

BRUNO MILIOLI FERREIRA

ESTUDO DO EFEITO DO CARREGAMENTO DE PULSO EM VIGA

Monografia apresentada no Trabalho de Conclusão de Curso 2 do Curso de Graduação
em Engenharia Civil ou Engenharia Ambiental e Sanitária da Universidade Federal de
Goiás.

Aprovado em: 02 / 03 / 2016.

Banca Examinadora:

Renata Soares

Prof. Dra. Renata Machado Soares – UFG (Orientadora)

[Assinatura]

Prof. Dr. Frederico Martins Alves da Silva - UFG

[Assinatura]

Prof. Dr. Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado - UFG

Atesto que as revisões solicitadas foram feitas:

Renata Soares

Dra. Renata Machado Soares

Em: 09 / 03 / 16

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ESTUDO DO EFEITO DO
CARREGAMENTO DE PULSO EM VIGA

Bruno Milioli Ferreira

GOIÂNIA, 2016

Bruno Milioli Ferreira

ESTUDO DO EFEITO DO CARREGAMENTO DE PULSO EM VIGAS

Projeto de monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da
Universidade Federal de Goiás para a disciplina Trabalho de Conclusão
de Curso II

Orientador: Prof. Dra. Renata Machado Sores

GOIÂNIA, 2016

Agradecimentos

A Deus por ter me permitido essa oportunidade e por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A Universidade Federal de Goiás, seu corpo docente, direção e administração por tornarem possível a realização desse curso.

À professora doutora Renata Machado Soares, pela orientação e pelo tempo a mim dedicado.

Aos meus familiares, pelo amor, incentivo e apoio dedicados a mim incondicionalmente.

Aos meus amigos, companheiros de trabalho, que fizeram parte da minha formação.

A todos que direta ou indiretamente me ajudaram a trilhar esse caminho, o meu muito obrigado.

BRUNO MILIOLI FERREIRA

ESTUDO DO EFEITO DO CARREGAMENTO DE PULSO EM VIGA

Monografia apresentada no Trabalho de Conclusão de Curso 2 do Curso de Graduação em Engenharia Civil ou Engenharia Ambiental e Sanitária da Universidade Federal de Goiás.

Aprovado em: ____/____/_____.

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Renata Machado Soares – UFG (Orientador)

Prof. Dr. Frederico Martins Alves da Silva - UFG

Prof. Dr. Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado - UFG

Atesto que as revisões solicitadas foram feitas:

Dra. Renata Machado Soares

Em: ____/____/____

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.1 – Modelos mecânicos para estrutura de edifício de multipavimentos: (a) Representação física; (b) Modelo contínuo; (c) Um grau de liberdade modelo discreto; (d) três graus de liberdade modelo discreto | 12 |
| Figura 2.2 – Seções transversais após deformação..... | 14 |
| Figura 3.1 - Elemento infinitesimal da viga | 17 |
| Figura 4.1 – Viga engastada-apoiada | 24 |
| Figura 4.2 – Gráfico das funções $\text{tg}(x)$ e x | 26 |
| Figura 4.3 – Primeira função de forma da viga engastada-apoiada..... | 27 |
| Figura 4.4 – Segunda função de forma da viga engastada-apoiada..... | 28 |
| Figura 4.5 – Terceira função de forma da viga engastada-apoiada | 28 |
| Figura 4.6 – Quarta função de forma da viga engastada-apoiada | 29 |
| Figura 4.7 – Carga de pulso em viga engastada-apoiada | 29 |
| Figura 4.8 – Convergência da malha para MEF, comparando o momento do Abaqus com o momento do Ftool..... | 32 |
| Figura 4.9 - Convergência da malha para MEF analisando o deslocamento obtido pelo Abaqus | 33 |
| Figura 5.1 – Forma da carga de pulso para análise pela Integral de Duhamel | 34 |
| Figura 5.2 – Vibração não-amortecida de uma viga engastada-apoiada devido a uma carga de pulso.Fonte: O autor | 35 |
| Figura 5.3 –Deslocamento no ponto $x = 0,5 L$ | 35 |
| Figura 5.4 – Representação do deslocamento máximo por ciclo de vibração..... | 36 |
| Figura 5.5 – Deslocamento no ponto $x=0,5L$ com influência do amortecimento. | 37 |

| | |
|--|----|
| Figura 6.1 - Forma da carga de pulso para análise pelo MEF | 38 |
| Figura 6.2- Deslocamento no ponto $x = 0,5L$ obtido usando o MEF | 39 |
| Figura 6.3 – Deslocamento no ponto $x = 0,5L$ utilizando o MEF e considerando o amortecimento. | 40 |
| Figura 7.1 – Sobreposição dos deslocamentos no ponto $x = 0,5L$ obtido pelos dois métodos em estudo..... | 41 |
| Figura 7.2 - Sobreposição dos deslocamentos no ponto $x = 0,5L$, com amortecimento, obtido pelos dois métodos em estudo | 42 |

LISTA DE SIMBOLOS

\bar{m} – Massa distribuida

E – Modulo de elasticidade

F_n – Força modal

I – Momento de inércia

L – Comprimento

M – Momento fletor

M_n – Massa modal

N – Esforço normal

P – Carga axial

P_0 – Carga de pulso

q – Carga distribuída

V – Esforço cortante

w – Deslocamento transversal

X_n – Modo de vibração

β – Mudança de curvatura

ξ - Amortecimento

ω – Frequência natural

ω_d – Frequência natural

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| RESUMO..... | 6 |
| 1 INTRODUÇÃO | 7 |
| 1.1 OBJETIVOS..... | 8 |
| 1.1.1 <i>Objetivo geral</i> | 9 |
| 1.1.2 <i>Objetivo específico</i> | 9 |
| 1.2 JUSTIFICATIVA | 9 |
| 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 10 |
| 2.1 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS | 10 |
| 2.2 VIBRAÇÃO | 10 |
| 2.3 TEORIA DE VIGAS | 13 |
| 2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS..... | 14 |
| 3 METODOLOGIA E MÉTODOS | 17 |
| 3.1 VIGA DE EULER-BERNOULLI | 17 |
| 3.2 FREQUÊNCIA NATURAL..... | 20 |
| 3.3 INTEGRAL DE DUHAMEL | 21 |
| 3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS..... | 23 |
| 4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA | 24 |
| 4.1 VIGA ENGASTADA-APOIADA..... | 24 |
| 4.2 VIBRAÇÃO NÃO-AMORTECIDA DEVIDO A CARGA DE PULSO..... | 29 |
| 4.3 VIBRAÇÃO AMORTECIDA DEVIDO A CARGA DE PULSO..... | 31 |
| 4.4 ESCOLHA DA MALHA PARA A ANÁLISE USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS | 32 |
| 5 RESULTADOS NUMÉRICOS UTILIZANDO A INTEGRAL DE DUHAMEL.... | 34 |
| 5.1 VIBRAÇÃO NÃO-AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA..... | 34 |
| 5.2 VIBRAÇÃO AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA | 36 |
| 6 RESULTADOS NUMÉRICOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS..... | 38 |

| | | |
|-----|--|----|
| 6.1 | VIBRAÇÃO NÃO-AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA..... | 38 |
| 6.2 | VIBRAÇÃO AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA | 39 |
| 7 | COMPARANDO O RESULTADO OBTIDO PELOS DOIS MÉTODOS | 41 |
| 8 | CONCLUSÃO..... | 43 |
| 9 | REFERÊNCIAS | 44 |

RESUMO

Nesse trabalho é estudado uma viga isotrópica com as condições de contorno engastada-apoiada sujeita a uma carga dinâmica de pulso. Inicialmente a equação de equilíbrio dinâmica da viga é desenvolvida e as frequências naturais com seus respectivos modos de vibração são obtidos. Para a obtenção da resposta no tempo, não amortecida e amortecida, são utilizados a Integral de Duhamel e o Método dos Elementos Finitos (MEF) através da utilização do programa comercial Abaqus ®. Os resultados obtidos através das duas metodologias são comparados e observa-se uma boa convergência entre eles.

Palavras-chave: Dinâmica. Vibração. Integral de Duhamel. Método dos Elementos Finitos.

1 INTRODUÇÃO

Com o avanço tecnológico na área da construção civil, a sociedade vem cada vez mais se deparando com construções esbeltas, onde os efeitos dos carregamentos dinâmicos são mais significativos. Por esse motivo, os estudos na área da dinâmica das estruturas estão se tornando mais expressivos.

Diversos fenômenos naturais são causadores de cargas que podem ser consideradas dinâmicas. Entre estes os mais expressivos são os terremotos, abalos sísmicos e semelhantes além de ventos e tufões. Outras forças causadoras de efeitos dinâmicos são: Os choques mecânicos, motores com rotações periódicas e vibrações causadas por impacto de maquinário em solos.

No Brasil, em geral, as estruturas estão pouco sujeitas a efeitos de terremotos, sendo assim o principal efeito dinâmico, causado por uma força natural, são os oriundos das cargas de vento. Porém, pode-se dizer que praticamente toda construção está sujeita a algum tipo de carga de impacto, como por exemplo o choque mecânico de veículos. Os efeitos das cargas de vento já são bastante discutidos, ao contrário dos efeitos causados pelas cargas de impactos pontuais, as chamadas carga de pulso. Dessa maneira faz-se relevante o estudo do efeito desse tipo de carregamento dinâmico. Dentre os diversos sistemas submetidos a esse carregamento, destacam-se as vigas, com as mais diversas condições de contorno. Esse tipo de estudo auxilia no desenvolvimento do projeto estrutural de construções que tenham esse tipo de carga prevista.

Para a análise do comportamento das mais diversas estruturas submetidas aos carregamentos dinâmicos são necessários o entendimento de alguns conceitos relacionados à oscilação das estruturas como por exemplo, frequência natural, período e amplitude de vibração. O conhecimento destes parâmetros nos fornece ferramentas para a análise da resposta no tempo de determinada estrutura. Resposta essa que pode ser através de uma análise linear ou não linear.

Diversos são os métodos que se propõem a analisar e encontrar respostas para problemas envolvendo dinâmica das estruturas e vibrações. Cada qual com a sua peculiaridade e aplicabilidade, que as torna mais adequadas para determinado problema matemático. Thomson (1998), separa os métodos em clássicos e de vibrações não lineares. No primeiro grupo estão

os métodos Rayleigh, Rayleigh-Ritz, Holzer e Método de Myklestad para vigas. No segundo grupos estão os métodos da perturbação e Runge-Kutta.

O método Rayleigh, utiliza um sistema de múltiplos graus de liberdade, esse modelo é introduzido para se obter uma melhor estimativa da frequência fundamental de um sistema que contém elementos flexíveis, tais como molas e vigas. O método de Rayleigh-Ritz trata-se de uma extensão do anterior que fornece valores mais precisos para frequência fundamental, além de conceder aproximações para frequências elevadas e modos de vibração. Método de Holzer assume o fato de que quando um sistema está sob vibração livre em qualquer uma de suas frequências naturais, nenhuma força externa, torque ou momento é necessário para manter a vibração, para dessa maneira calcular a frequência natural e os modos de vibração desse sistema. O Método de Myklestad para vigas é aplicável para se calcular a deflexão, inclinação, momento e esforço em vigas. (THOMSON, 1998)

O método da perturbação é aplicável para problemas onde a não linearidade do mesmo é causada por um parâmetro proveniente da equação diferencial da oscilação livre. O método Runge-Kutta, gera resultados com boa precisão, nesse procedimento uma equação diferencial de segunda ordem é reduzida a duas equações diferenciais de primeira ordem deixando o problema de mais fácil solução em programas computacionais de álgebra simbólica como Maple e Matlab.

Além desses procedimentos já citados, os problemas envolvendo a dinâmica das estruturas podem ser desenvolvidos de forma contínua e solucionados utilizando por exemplo, a Integral de Duhamel, ou discreta que é o caso do Método dos Elementos Finitos (MEF). Ambos modelos serão abordados nesse trabalho.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivos os descritos a seguir.

1.1.1 Objetivo geral

Analisar o comportamento dinâmico de uma viga engastada-apoiada submetida à carga de impacto, comparando os resultados obtidos a partir da Integral de Duhamel e do Método dos elementos finitos.

1.1.2 Objetivo específico

Como objetivos específicos deste trabalho tem-se:

- Deduzir a equação de movimento da viga em estudo utilizando a teoria linear de vigas de Euler-Bernoulli;
- Analisar a diferença dos resultados considerando um sistema com e sem amortecimento;
- Comparar os resultados obtidos utilizando a Integral de Duhamel e o Método dos elementos finitos.

1.2 JUSTIFICATIVA

Esta pesquisa, ao se propor analisar o efeito causado por carga de pulso em viga, auxiliará no projeto estrutural de construções que tenham esse tipo de carga prevista, além de analisar os efeitos causados a uma estrutura caso esse carregamento venha a acontecer.

Os estudos desta pesquisa se dão em torno de uma viga cuja condição de contorno é engastada-apoiada, porque essa seria a condição do pilar de um deck em um porto, que poderia estar sujeito a uma carga de impacto provocada, por exemplo, pelo choque mecânico de uma embarcação. Para as análises que serão feitas é possível fazer a consideração de que um pilar reage da mesma maneira que uma viga.

Essa condição de ser engastada-apoiada também se encontra no primeiro pilar de um prédio, que poderia estar sujeito a uma carga dinâmica pontual, causada pelo impacto de um automóvel, por exemplo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para o desenvolvimento desse trabalho diversos conceitos que envolvem a área de dinâmica das estruturas devem ser considerados, bem como suas definições básicas e as metodologias de cálculo disponíveis.

2.1 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Fazendo-se uma análise detalhada, nenhuma força aplicada a uma estrutura é realmente estática. Isso porque todas as cargas devem ser aplicadas a uma estrutura obedecendo uma sequência particular, ou seja, demoram um certo intervalo de tempo para serem completamente aplicadas. Dessa maneira a consideração de uma carga como dinâmica ou estática é relativo principalmente ao tempo de aplicação da carga.

Um parâmetro bastante significativo de uma estrutura e que influencia na sua resposta dinâmica, é a sua frequência natural de vibração. Se o tempo de aplicação de uma carga for muito grande comparado a frequência natural da estrutura, então não haverá nenhum efeito dinâmico e a carga poderá ser considerada estática. Caso o tempo de aplicação do carregamento seja aproximadamente perto da frequência natural da estrutura, então os efeitos dinâmicos deverão ser considerados.

Na natureza as principais cargas dinâmicas são devidas as forças naturais do ambiente, induzidas por máquinas, por veículos e por explosão. Além de ser dependente do tempo outro importante fator que diferencia problemas dinâmicos de problemas estáticos é a ocorrência da força de inércia. Ou seja, o mesmo carregamento se aplicado de forma estática e dinâmica gera esforços de momentos e de cortantes diferentes, e a inércia faz com que esses esforços assumam valores significativamente maiores. (TEDESCO, et al., 1999)

2.2 VIBRAÇÃO

Quando uma força não estática atua sobre um sistema deformável, acaba por ter uma resposta dinâmica, em outras palavras podemos dizer que o sistema oscila em função do tempo. Dentro da análise dinâmica de estruturas tem-se os estudos lineares e não lineares para a avaliação do

comportamento de diferentes fenômenos dependentes do tempo como por exemplo a vibração. Segundo Kelly (2007 *apud* WANG, et al., 2014), “vibração pode ser considerada como qualquer movimento que se repete em um intervalo de tempo, ou pode-se definir vibração como oscilações de um sistema acerca de sua posição de equilíbrio”

As vibrações podem ser descritas basicamente através de três parâmetros, que são eles: amplitude, frequência e período. Como definição destes, pode-se dizer que amplitude é o maior deslocamento durante a vibração de um corpo, ou partícula, partindo de uma posição inicial. Já período é definido como sendo o tempo necessário para se completar um ciclo do movimento e frequência é dada como a quantidade de ciclos por unidade de tempo (WANG, et al., 2014).

Dependendo da causa do início da vibração, pode-se classificá-las como sendo vibração livre ou vibração forçada. A vibração forçada ocorre quando o sistema está sob a ação de uma força externa, força essa que pode, ou não, ter a característica de ser periódica. Já a vibração livre ocorre com a ausência dessa força, um sistema nessas condições vibrará conforme a sua frequência natural.

Além da classificação anterior, um sistema que está submetido a uma vibração pode ser classificado em amortecido e não-amortecido. O amortecimento se deve a dissipação de energia causada por ações como o atrito com o ambiente externo, promovendo assim uma redução da amplitude e da oscilação do movimento. Um sistema não-amortecido não é visto comumente na prática da engenharia, trata-se apenas de um efeito teórico, que pode ser reproduzido em procedimentos experimentais de laboratório, porém se faz essencial para o entendimento de situações limites (ROEHL, 2005).

Muitos elementos estruturais estão sujeitos a vibração, provocadas por diferentes tipos de forças, como por exemplo cargas de impacto. Dentre esse tipo de força tem-se o chamado pulso que tem a característica de ser não-periódica e agir em um curto espaço de tempo. Para a solução desse tipo de problemas pode-se utilizar a Integral de Duhamel. Isso porque o sistema de equação de movimento de elementos submetidos a esse tipo de carregamento tem como solução a resolução de uma integral de uma função conhecida dependente do tempo, ou seja, a solução da Integral de Duhamel.

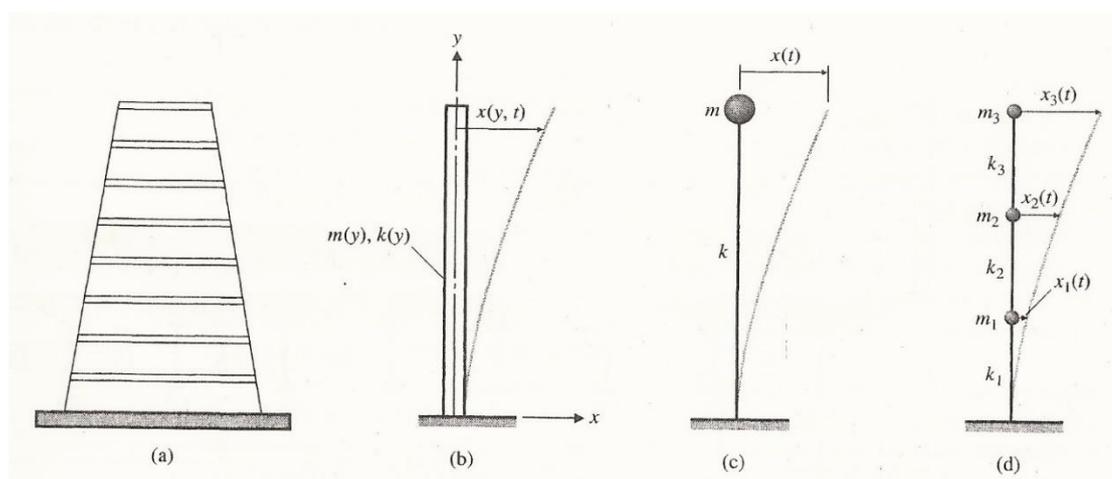
Em seu artigo, Queiroz, *et al*, (2011) discorre sobre as possíveis técnicas de análise de estruturas, citando o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenciais Finitas

(MDF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Segundo os autores cada método tem a sua particularidade, porém o MEF é o mais popular entre eles. Dessa maneira os autores implementaram o MEF para elementos de viga usando a linguagem de programação JAVA e compararam com resultados da literatura evidenciando a eficiência do método.

Segundo Roehl (2005), analisando de uma maneira geral, para a resolução de um problema de dinâmica pode-se utilizar um modelo contínuo ou discreto. Para o sistema contínuo a formulação matemática do problema resulta em um sistema de equações diferenciais parciais. Esse modelo consiste em analisar o sistema como um todo, obtendo como resposta uma função que depende dos parâmetros da estrutura analisada e tem como resultado o deslocamento ao longo de toda a estrutura.

Para o sistema discreto a formulação matemática gera um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Esse modelo consiste em analisar a estrutura em pontos específicos, considerando que a massa está concentrada nesse ponto. Os resultados obtidos através desse método de resolução são deslocamentos apenas nos pontos considerados. O número de pontos considerados nos quais as massas estão concentradas são chamados de graus de liberdade (TEDESCO, et al., 1999). Essas diferenças são ilustradas na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Modelos mecânicos para estrutura de edifício de multipavimentos: (a) Representação física; (b) Modelo contínuo; (c) Um grau de liberdade modelo discreto; (d) três graus de liberdade modelo discreto



Fonte: (TEDESCO, et al., 1999)

Em muitas situações, o modelo discreto atende as necessidades gerando resultados muito próximos da realidade, e muitos programas computacionais utilizam-se desse modelo em suas programações.

2.3 TEORIA DE VIGAS

O comportamento do elemento estrutural viga pode ser estudado por diferentes teorias que levam em consideração diferentes fenômenos. A teoria de Euler-Bernoulli permite uma explicação razoável para a flexão em vigas isotrópicas, porém Bayat (2011) mostra que atualmente existem teorias mais modernas que explicam melhor os problemas de vibrações em vigas, por exemplo o modelo de viga de Timoshenko. O motivo para a necessidade de uma nova formulação seria o fato de que a análise linear, quando aplicada a casos específicos, como uma viga em balanço com um momento aplicado a sua extremidade livre e em vigas-parede – não aquelas que possuem uma dimensão muito maior que as outras. Nesses casos os resultados provenientes das análises lineares são diferentes dos observados em laboratório.

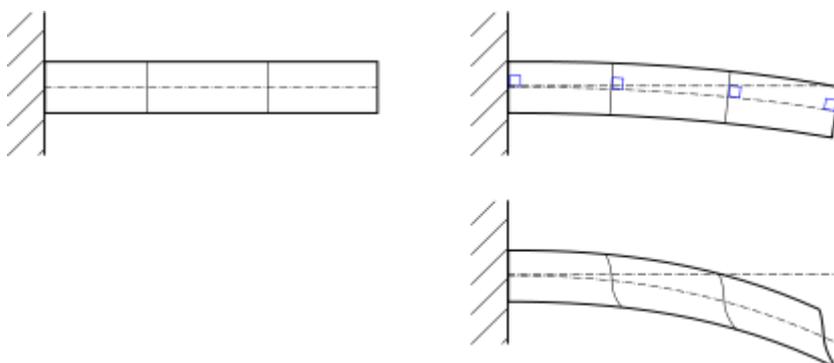
O modelo de Euler-Bernoulli possui algumas hipóteses consideradas, sendo elas:

- O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões.
- A viga é constituída de um material linearmente elástico e homogêneo.
- Os efeitos do coeficiente de Poisson são desprezados.
- A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele.
- Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação.
- O ângulo de rotação é muito pequeno.
- Os efeitos de momento de inércia de rotação e a parcela da energia de deformação devido ao cisalhamento são desprezados. (WANG, et al., 2000).

Com relação à teoria da estabilidade elástica, Timoshenko (1963), diferentemente de Euler-Bernoulli considera os efeitos dos esforços cortantes na formulação da viga. A hipótese de que as seções planas permanecem planas após deformação está ilustrado na Figura 2.2, onde a

primeira viga da direita mostra uma deformação segundo a teoria de Euler-Bernoulli enquanto a segunda viga mostra uma deformação sem a hipótese das seções planas.

Figura 2.2 – Seções transversais após deformação



Fonte: (WANG, et al., 2000).

Abbassion, *et al* (2009), utiliza da teoria de Timoshenko e de Euler-Bernoulli para analisar vibrações livres em vigas de escala microscópica, com medidas que variaram de nanômetros a micrômetros, onde os efeitos de superfície são significantes. A conclusão que se chegou foi de que a medida que a viga aumenta o seu tamanho os resultados obtidos em laboratório tendem a se aproximar dos obtidos com os modelos clássicos de vigas. Com base nisso e pelo fato da viga analisada nesse trabalho ter sua ordem de grandeza em metros, conclui-se que os modelos clássicos podem ser aplicados.

2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No estudo com base em sistemas contínuos parte-se do pressuposto de que a partir do entendimento de um elemento diferencial é possível entender o comportamento da estrutura como um todo. Essa é um tipo de solução analítica e não está disponível para a maioria dos problemas de engenharia. Por esse motivo é justificado o estudo dos sistemas discretos.

A solução via MEF tem a vantagem de poder ser utilizada nos mais diversos problemas que possuam, ou não, não linearidade física e geométrica com a consideração de efeitos lineares, não lineares, estáticos, dinâmicos entre outros.

Os sistemas discretos são compostos por elementos finitos e não diferenciais, de modo que a estrutura como um todo seja modelada com uma série de estruturas simples. Esses elementos

são conectados uns aos outros pelos chamados nós, que são onde são calculados os deslocamentos. É através do conhecimento dos deslocamentos dos nós que se pode calcular o comportamento interno de cada elemento. (ALVES FILHO, 2000)

A solução do problema utilizando o método dos elementos finitos passa pela solução de um sistema de equações onde cada nó, com seus respectivos graus de liberdade, são variáveis do sistema de equações. Ou seja, o número de equações a serem resolvidas neste sistema é igual à quantidade de nós que o problema foi discretizado vezes o número de graus de liberdade de cada nó.

A quantidade e a distribuição desses elementos na estrutura formam a chamada malha de elementos finitos. A definição dessa malha é uma questão de grande importância nesse modelo de estudo, isso porque ela está diretamente ligada ao resultado a sua proximidade com a realidade. Quanto maior o número de elementos presentes na malha mais refinado será o resultado do sistema, dessa maneira para se definir um número ótimo de quantidade de elementos se faz necessária uma análise de convergência.

Existem duas maneiras para se fazer essa análise de convergência. A primeira seria comparar os resultados obtidos pelos métodos dos elementos finitos com resultados já conhecidos, provenientes de outros métodos. Porém muitas vezes não se tem esses resultados previamente calculados, dessa forma a análise de convergência se faz comparando os resultados provenientes do próprio método, na medida que são aumentados os números de elementos das malhas, até que se alcance uma convergência numérica.

A quantidade de elementos não são as únicas variáveis de uma malha, o tipo e a geometria dos elementos também são. Com relação a geometria do elemento, elas podem ter as mais variadas configurações, porém cada sistema converge mais rapidamente com um determinado tipo de elemento. Levando em consideração o estudo de uma viga, por exemplo Alves Filho (2000) mostrou que uma viga precisa de muito menos elementos para convergir a um valor se esses possuírem o formato retangular, ao contrário do que aconteceria se eles possuísem o formato triangular.

Segundo Alves Filho (2000), com relação ao tipo de elemento, eles podem ser de viga, de casca e várias variações dos mesmos, como por exemplo o número de nós e o número de dimensões. A escolha do tipo de elemento depende de quais esforços se deseja calcular. No entanto deve

se tomar o cuidado para não se escolher geometrias onde um dos lados seja muito maior do que o outro, como seria o caso de uma malha composta por elementos laminares, pois esses tipos de elementos não produzem bons resultados.

Vale lembrar que a formulação e a resolução dos problemas dos métodos dos elementos finitos são feitas com o auxílio de programas computacionais, dessa maneira a quantidade de elementos e os tipos de esforços que se deseja calcular influenciam muito na performance do programa. Uma malha com 100 elementos, por exemplo, levaria muito menos tempo para ser processada do que uma malha com 10000 elementos, por esse motivo não se deve aumentar indiscriminadamente o número de elementos de uma malha.

Os modelos discretos podem ser divididos quanto a geometria em estruturas reticuladas, bidimensionais, tridimensionais e com cabos ou membranas. Os modelos reticulados são caracterizados por possuírem a dimensão do eixo longitudinal de cada elemento, preponderante em relação as demais. Nesse tipo de geometria, os elementos são conectados entre si somente nos nós estruturais, dessa forma as condições de compatibilidade de deslocamentos, serão suficientes para conceber matematicamente os modelos de cálculo. Estão inclusas nessa geometria as treliças (planas e espaciais), os pórticos (planos – incluindo vigas e arcos – e espaciais) e as grelhas (SORIANO, 2003).

Os modelos bidimensionais ou de superfície têm duas direções preponderantes, no caso de placas e cascas a terceira dimensão é denominada espessura. Nos modelos tridimensionais ou de volume, as três direções são essenciais, um exemplo é um bloco de fundação.

Os modelos estruturais mistos são formados por associações dos modelos anteriores. Para esse tipo de geometria, têm-se como exemplo placas nervuradas e cascas com esforços nas bordas. Cabos e membranas são elementos que resistem prioritariamente a tração. Os modelos como cabos ou membranas incluem elementos reticulados, sendo dessa forma um tipo especial de modelo misto. Diferentemente das estruturas reticuladas, todas as outras possuem os elementos estruturais ligados continuamente, dessa forma as condições de compatibilidade de deslocamento não são suficientes e são inseridas nas análises as especificações das propriedades do elemento (SORIANO, 2003).

3 METODOLOGIA E MÉTODOS

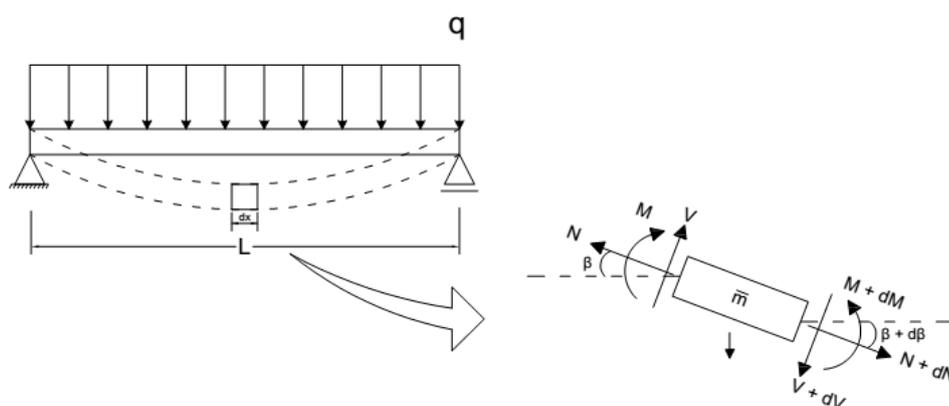
Para se chegar aos resultados desejados o estudo terá como base referências bibliográficas de livros e de estudos que abordam a área da dinâmica das estruturas. A partir desses estudos, foram realizadas deduções matemáticas para se chegar a uma resposta numérica, utilizando o programa computacional de álgebra simbólica Maple. A solução do problema também será realizada com a utilização do programa computacional de elementos finitos Abaqus,

3.1 VIGA DE EULER-BERNOULLI

A análise de vibrações em vigas tem sido objeto de estudo de diversos autores. Um importante nome nesses estudos é Timoshenko (1963) que propôs uma análise não linear de vigas-colunas, considerando os seus esforços de segunda ordem. Essa teoria foi simplificada por Euler e posteriormente complementada por Bernoulli, dando origem a chama viga de Euler-Bernoulli. Para o estudo em questão, onde a viga analisada é da condição de engastada-apoiada, não será feita uma análise não-linear, explicando assim a escolha desse modelo.

Na Figura 3.1 apresenta-se uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído q e uma carga axial P de onde se secciona um elemento infinitesimal, no qual será realizado um equilíbrio de forças.

Figura 3.1 - Elemento infinitesimal da viga



Fonte: O autor

Considerando o equilíbrio de forças na direção horizontal obtém-se:

$$-N \cos \beta + (N + dN) \cos(\beta + d\beta) + V \sin \beta - (V - dV) \sin(\beta + d\beta) = 0 \quad (3.1)$$

Onde N é o esforço normal, V o esforço cortante e β a mudança de curvatura.

Levando-se em conta a teoria das pequenas deformações, o ângulo β é muito pequeno, podendo assim ser aproximado por $\cos \beta = 1$ e $\sin \beta = \beta$. Posteriormente, fazendo-se as devidas simplificações na equação (3.1), onde é possível aproximar $\beta + d\beta$ para β e $dVd\beta$ para zero. Sendo assim, tem-se:

$$dN - Vd\beta - \beta dV = 0 \quad (3.2)$$

Reescrevendo a equação (3.2) ao longo do comprimento infinitesimal dx tem-se:

$$\frac{dN}{dx} - V \frac{d\beta}{dx} - \beta \frac{dV}{dx} = 0 \quad (3.3)$$

Procedendo com o equilíbrio de forças na direção vertical têm-se

$$N \sin \beta - (N + dN) \sin(\beta + d\beta) + V \cos \beta - (V + dV) \cos(\beta + d\beta) - q dx = 0 \quad (3.4)$$

Considerando as mesmas condições feitas para o equilíbrio de forças horizontais e fazendo as devidas simplificações, chega-se a:

$$-N d\beta - \beta dN - dV = q dx \quad (3.5)$$

Rearrmando equação (3.5) ao longo do comprimento dx têm-se:

$$N \frac{d\beta}{dx} + \beta \frac{dN}{dx} + \frac{dV}{dx} = -q dx \quad (3.6)$$

Fazendo o equilíbrio de momento têm-se:

$$M - (M + dM) + V dx = 0 \quad (3.7)$$

Aplicando as devidas simplificações onde:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (3.8)$$

Desprezando os termos quadráticos em relação ao cortante, e termos que são multiplicados pelo ângulo β , as equações (3.3) e (3.6), ficam respectivamente da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dx} = 0; \frac{dV}{dx} + N \frac{d\beta}{dx} = -q dx; V = \frac{dM}{dx} \quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.8) na segunda equação de (3.9) têm-se:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + N \frac{d\beta}{dx} = -q dx \quad (3.10)$$

Hibbeler (2004), no seu livro de resistência dos materiais mostra que se pode fazer as seguintes considerações:

$$M = EI \frac{d^2w}{dx^2}; \beta = \frac{dw}{dx} \quad (3.11)$$

Onde E é o módulo de elasticidade da viga e I o momento de inércia da seção transversal e w o deslocamento transversal a viga. Substituindo a equação (3.11) na equação (3.10):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + N \frac{d^2 w}{dx^2} = -q dx \quad (3.12)$$

Após algumas simplificações, obtêm-se a equação de equilíbrio de uma viga contínua submetida a um carregamento distribuído q e uma carga concentrada axial P :

$$EI w - P w'' = q L \quad (3.13)$$

Onde L é o comprimento da viga. Resolvendo essa equação diferencial ordinária de quarta ordem linear não homogênea de coeficientes constantes, é possível obter a seguinte resposta:

$$w = C_1 \text{sen}(k x) + C_2 \text{cos}(k x) + C_3 x + C_4 \quad (3.14)$$

Onde C_1, C_2, C_3, C_4 e k são constantes dependentes das condições de contorno da viga.

3.2 FREQUÊNCIA NATURAL

A frequência natural pode ser obtida, ou por processo de cálculo, com a inspeção da equação do movimento, ou experimentalmente, através de instrumentos registradores da resposta, de frequencímetros e de analisadores de espectro (ROEHL, 2005). A partir da equação (3.13), igualando a carga axial P por zero, e substituindo o termo qL pelo termo de inércia $\bar{m} \ddot{w}$ tem-se:

$$EI w'''' - \bar{m} \ddot{w} = 0 \quad (3.15)$$

Onde w'''' é a quarta derivada de w em função de x e \ddot{w} é a segunda derivada em função do tempo e \bar{m} a massa por unidade de comprimento da viga. Partindo do princípio que a solução desta equação diferencial de movimento é dada por:

$$w = \cos(\omega t) [C_1 \text{sen}(k x) + C_2 \text{cos}(k x)] \quad (3.16)$$

Onde ω é a frequência natural do sistema. As constantes C_3 e C_4 foram desconsideradas pois elas não influenciam na resposta da frequência natural.

Dessa forma obtém-se:

$$w'''' = \cos(\omega t) [C_1 \text{sen}(k x)k^4 + C_2 \cos(k x) k^4] \quad (3.17)$$

E também:

$$\ddot{w} = -\cos(\omega t) \omega^2 [C_1 \text{sen}(k x) + C_2 \cos(k x)] \quad (3.18)$$

Substituído as equações (3.17) e (3.18) na equação (3.15) e fazendo as devidas simplificações tem-se:

$$\omega^2 = \frac{k^4 E I}{\bar{m}} \quad (3.19)$$

Considerando o valor de $k = n_f \pi / L$, têm-se a expressão para a frequência natural da viga estudada:

$$\omega^2 = \frac{n_f^4 \pi^4 E I}{\bar{m} L^4} \quad (3.20)$$

Para o caso de uma viga engastada e apoiada o $k = (n_f + 0,25) \pi / L$, onde n_f tem estes valores: 1, 2, 3, 4 Estes são provenientes das condições de contorno da viga. (ROEHL, 2005).

3.3 INTEGRAL DE DUHAMEL

Para a resolução de problemas de dinâmica envolvendo cargas pontuais, agindo em um curto espaço de tempo, os chamados pulsos, pode-se usar a Integral de Duhamel. Tedesco (1999) mostra a seguinte explicação matemática. Sendo $h(T)$ a função da resposta do impulso e

considerando uma força arbitrária não-periódica em função do tempo $F(t)$, consistindo em uma sequência de pulsos $F(\tau)$, agindo em um pequeno intervalo de tempo $d\tau$, onde $t > \tau$. Têm-se:

$$dx = F(\tau) d\tau h(t - \tau) \quad (3.21)$$

Para obtermos a resposta dessa equação, integramos os dois termos

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.22)$$

Essa equação é comumente conhecida como Integral de Duhamel. Para um sistema amortecido, a substituição do pulso descrito anteriormente na equação (3.21), tem-se como resultado a equação (3.23), que representa o deslocamento causado por uma força arbitrária, onde as condições iniciais são iguais a zero, ou seja, a viga partindo do repouso

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_d^2} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \quad (3.23)$$

Onde ω é a frequência amortecida, ξ é o amortecimento e ω_d é a frequência natural amortecida de valor igual a $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$. Para condições iniciais de posição e velocidade diferentes de zero, tem-se que a solução completa da equação é a superposição das equações da solução particular e da solução homogênea:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (3.24)$$

Superpondo as equações (3.23) e (3.24) tem como resultado a solução completa

$$\begin{aligned}
 x_h(t) = e^{-\xi\omega t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \\
 + \frac{1}{m \omega_d^2} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para o caso de um sistema não amortecido ($\xi = 0$) as equações (3.23) e (3.25) tornam-se respectivamente,

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_d^2} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \tag{3.26}$$

e

$$x_h(t) = x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega_d t + \frac{1}{m \omega_d^2} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \tag{3.27}$$

3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As análises utilizando o método dos elementos finitos serão modeladas e analisadas através do programa computacional Abaqus

Primeiramente faz se necessária a escolha do tipo do elemento do sistema. Para o problema em questão o elemento escolhido é um elemento de viga, linear e com apenas dois nós com dois graus de liberdade em cada um, nas direções x e y.. O código no Abaqus do elemento que atende a essas características é o B21. O “B” indica que se trata de um elemento de viga, do inglês (Beam), o “2” indica a quantidade de nós e o “1” indica que o mesmo está inserido no plano.

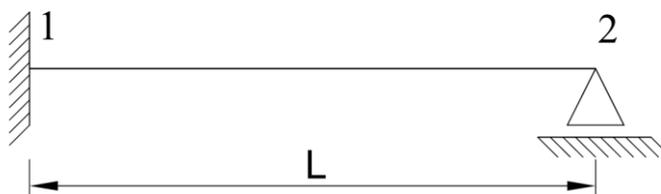
4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para a formulação matemática do problema será considerada uma viga engastada-apoiada, composta de material elástico linear e isotrópico submetida a uma carga dinâmica de pulso. Primeiramente, o problema será formulado de maneira contínua utilizando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli e a Integral de Duhamel será utilizada para a solução do problema.

4.1 VIGA ENGASTADA-APOIADA

Para encontrar a resposta dinâmica de uma viga, a solução passa por encontrar as suas condições de contorno. Em outras palavras, é preciso encontrar os coeficientes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 da equação (3.14). A viga que será analisada tem a condição de ser engastada e apoiada conforme a Figura 4.1. Nesta solução são desconsideradas as cargas distribuída q e concentrada axial P .

Figura 4.1 – Viga engastada-apoiada



Fonte: O autor

Uma viga com essas condições de apoio, possui no ponto 1 ($x = 0$) as condições de ter os deslocamentos transversal, axial e a inclinação nulos. No ponto 2 ($x = L$) as condições são do deslocamento transversal e momento nulos.

Partindo da equação do deslocamento transversal w (3.14), tem-se que a primeira derivada dessa equação em relação a x corresponde a equação da inclinação, a segunda derivada corresponde ao momento e a terceira derivada corresponde ao cortante (HIBBELER, 2004).

Dessa forma, substituindo $x = 0$ e $w = 0$ na Eq. (3.14) têm-se:

$$C_1 \operatorname{sen}(k 0) + C_2 \operatorname{cos}(k 0) + C_3 0 + C_4 = 0 \quad (4.1)$$

Simplificando:

$$C_2 = -C_4 \quad (4.2)$$

Substituindo $x = 0$ e $w' = 0$ na Eq. (3.14), onde w' corresponde a dw / dx têm-se:

$$C_1 \cos(k \cdot 0) k + C_2 \sin(k \cdot 0) k + C_3 = 0 \quad (4.3)$$

Simplificando:

$$C_1 k = C_3 \quad (4.4)$$

Substituindo $x = L$ e $w'' = 0$ na Eq. (3.14), onde w'' corresponde a d^2w / dx^2 têm-se:

$$C_1 \sin(k L) + C_2 \cos(k L) = 0 \quad (4.5)$$

Para a condição de $w = 0$ em $x = L$, será necessária fazer as substituições das equações (4.2) e (4.4) na fórmula do deslocamento transversal, dessa forma tem-se:

$$C_1 \sin(k L) + C_2 \cos(k L) - C_1 k L - C_2 = 0 \quad (4.6)$$

Simplificando:

$$C_1[\sin(k L) - k L] + C_2[\cos(k L) - 1] = 0 \quad (4.7)$$

Dessa forma para se encontrar os coeficientes C_1 e C_2 é necessária a resolução do sistema composto pelas equações (4.5) e (4.7).

$$\begin{cases} C_1 \sin(k L) + C_2 \cos(k L) & = 0 \\ C_1[\sin(k L) - k L] + C_2[\cos(k L) - 1] & = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Isolando o C_2 na primeira equação

$$C_2 = C_1 \frac{\text{sen}(k L)}{\cos(k L)} \quad (4.9)$$

$$C_2 = C_1 \text{tg}(k L) \quad (4.10)$$

Substituindo a equação (4.10) na segunda equação do sistema (4.8)

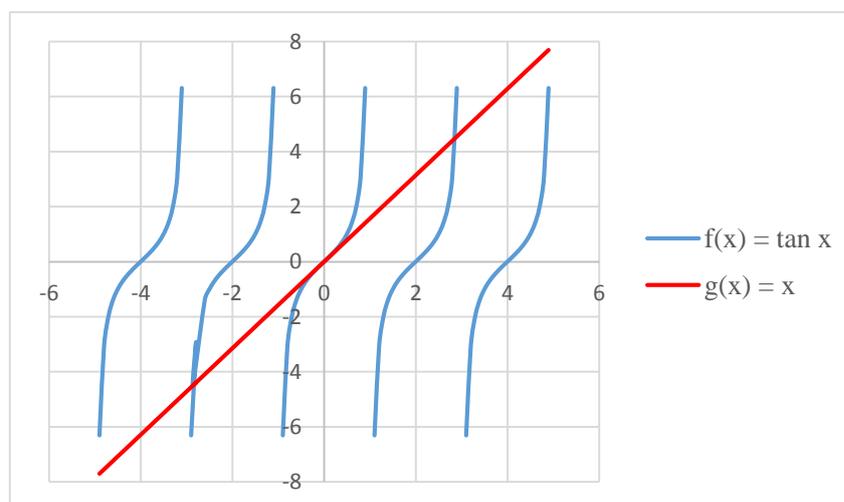
$$C_1 [\text{sen}(k L) - k L] - C_1 \text{tg}(k L) [\cos(k L) - 1] = 0 \quad (4.11)$$

Simplificando:

$$\text{tg}(k L) = k L \quad (4.12)$$

Analisando a equação (4.12) um valor possível para resolver essa igualdade seria o zero, porém para esse problema não se pode fazer essa consideração. Isso se deve ao fato de que nem o k nem o L podem obter valores nulos. Dessa forma a maneira de se resolver esse problema é através da resolução gráfica mostrada na Figura 4.2. As intersecções das duas funções são os postos de interesse para $k L$.

Figura 4.2 – Gráfico das funções $\text{tg}(x)$ e x



Fonte: O autor

Para o problema em questão foi feita a aproximação para quatro soluções numéricas, diferentes de zero, obtidas a partir da igualdade (4.12) sendo elas: $k L = 4,4934095$; $k L = 7,7252518$; $k L = 10,904122$ e $k L = 14,0661939$.

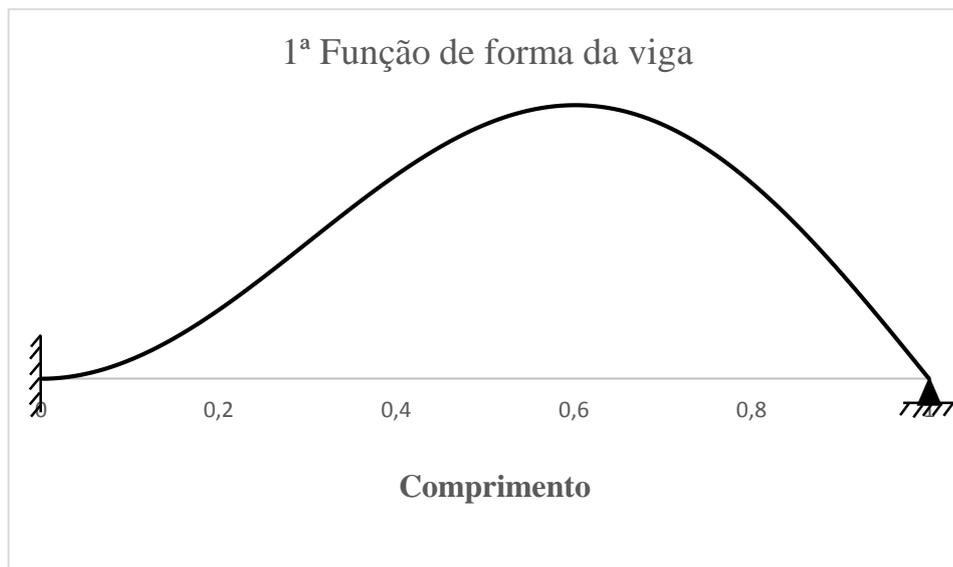
Substituindo as equações (4.2), (4.4), (4.10) e (4.12) na formula da linha elástica e fazendo as devidas simplificações, tem-se:

$$w = C_1[\text{sen}(k x) - \cos(k x) k L - k x + k L] \quad (4.13)$$

A equação (4.13) representa o deslocamento de uma viga para a condição de contorno de ser engastada-apoiada. Substituindo os valores de $k L$ nessa equação tem-se como resposta a configuração deslocada da viga apresentados nas Figura 4.3 a

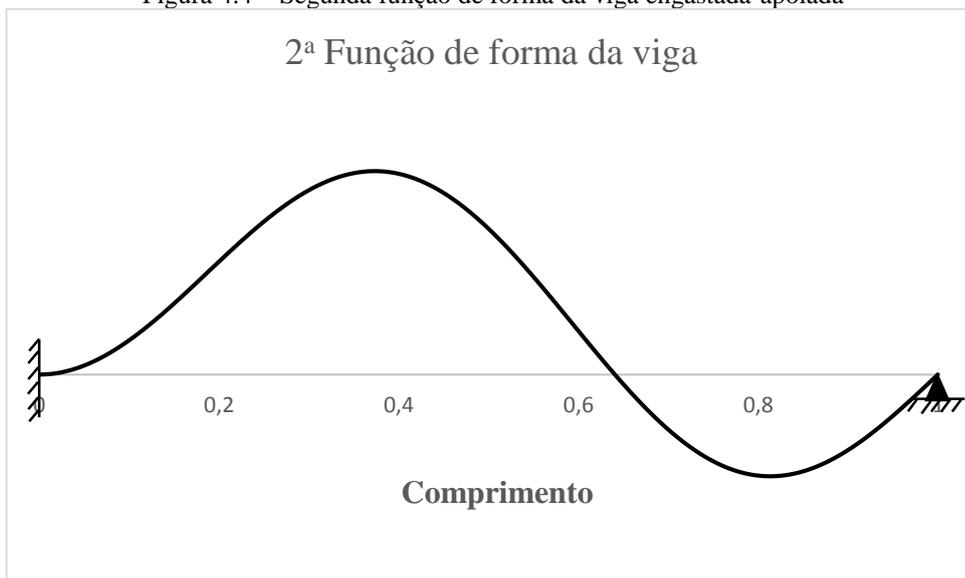
Figura 4.6.

Figura 4.3 – Primeira função de forma da viga engastada-apoiada



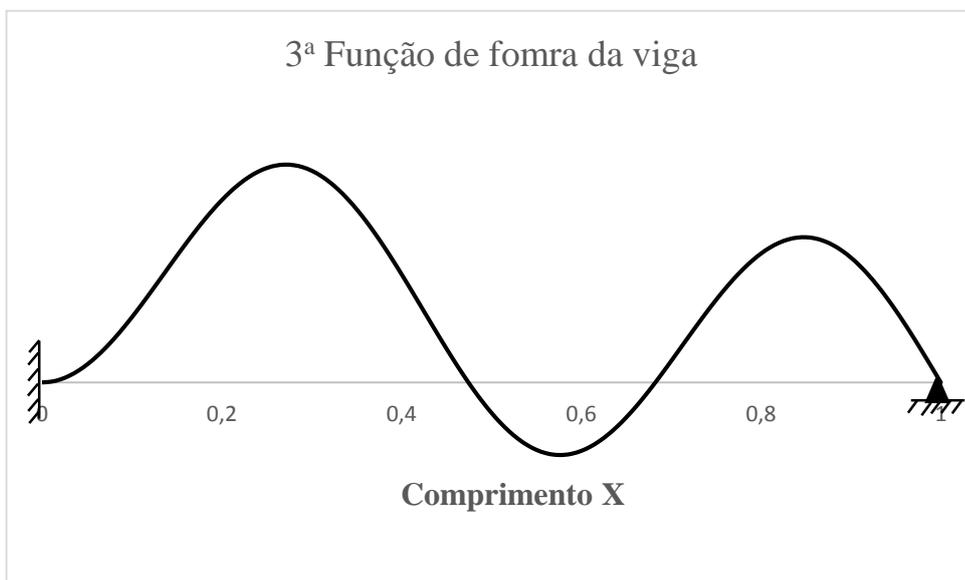
Fonte: O autor

Figura 4.4 – Segunda função de forma da viga engastada-apoiada



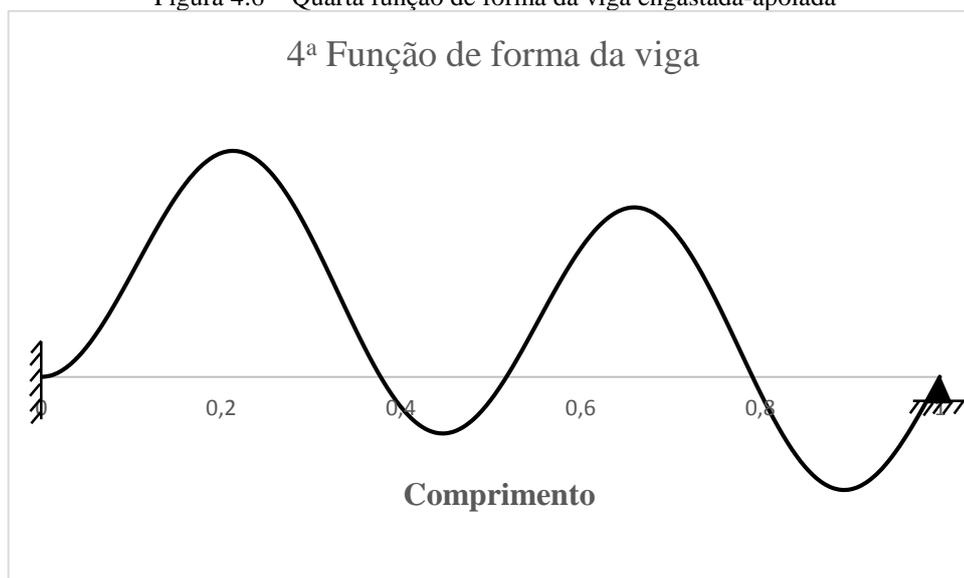
Fonte: O autor

Figura 4.5 – Terceira função de forma da viga engastada-apoiada



Fonte: O autor

Figura 4.6 – Quarta função de forma da viga engastada-apoiada

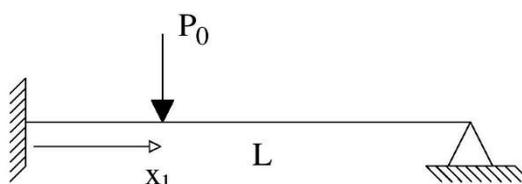


Fonte: O autor

4.2 VIBRAÇÃO NÃO-AMORTECIDA DEVIDO A CARGA DE PULSO

Considerando a viga engastada-apoiada, da Figura 4.7, partindo do repouso e submetida a uma carga concentrada aplicada subitamente a uma distância x_1 do apoio da esquerda. Desconsiderando os efeitos do amortecimento e fazendo uso da análise modal e da Integral de Duhamel, será possível determinar a resposta da viga.

Figura 4.7 – Carga de pulso em viga engastada-apoiada



Fonte: O Autor

Os modos de vibração de uma viga engastada-apoiada são escritos como:

$$X_n = \text{sen}\left(\frac{n x}{L}\right) - \cos\left(\frac{n x}{L}\right) n - \frac{n}{L} x + n \quad (4.14)$$

Onde $n = 4,4934095; 7,7252518; 10,904122; 14,0661939$ correspondem às constantes presentes nos quatro primeiros modos de vibração da viga engastada-apoiada obtidos anteriormente a partir do gráfico apresentado na Figura 4.2

A força modal é dada pela equação:

$$F_n(t) = \int_0^L X_n(x) q(x, t) dx \quad (4.15)$$

Onde $q(x, t) = P_0$ em $x = x_1$, conseqüentemente:

$$F_n(t) = P_0 X_n(x_1) \quad (4.16)$$

Usando a equação (4.14), obtém-se:

$$F_n(t) = P_0 \left[\text{sen} \left(\frac{n x}{L} \right) - \cos \left(\frac{n x}{L} \right) n - \frac{n}{L} x + n \right] \quad (4.17)$$

A massa modal é escrita como

$$M_n = \int_0^L \bar{m} X_n^2(x) dx \quad (4.18)$$

Onde \bar{m} é a massa distribuída ao longo da viga. Substituindo a equação (4.14) na equação (4.18) e resolvendo a integral, obtém-se:

$$M_n = \frac{1}{6 n} \{ L \bar{m} [-3 n - 3 \cos(n) \text{sen}(n) + 5 n^3 - 12 \text{sen}(n) + 6 n \cos(n)^2 + 12 n \cos(n) + 3 n^2 \cos(n) \text{sen}(n)] \} \quad (4.19)$$

A expressão de Duhamel fornece a equação (3.26) sendo ω_d a frequência natural apresentada na equação (3.19) e substituindo os valores da força modal na expressão de Duhamel e resolvendo a integral, obtém-se:

$$x(t) = - \left\{ 6 n P_0 \left[\left(\frac{\text{sen} \left(\frac{n x_1}{L} \right) - n \cos \left(\frac{n x_1}{L} \right) L - x_1 n + n L}{L} \right) (\cos(\omega t) - 1) \right] \right. \quad (4.20)$$

$$\left. / \{ L \bar{m} [-3 n - 3 \cos(n) \text{sen}(n) + 5n^3 - 12 \text{sen}(n) + 6 n \cos(n)^2 + 12 n \cos(n) + 3 n^2 \cos(n) \text{sen}(n)] \omega_d^3 \}$$

Roehl (2005) define a solução para o problema escrita como:

$$w = \sum_{n_f=1}^{\infty} X_n(x) x(t) \quad (4.21)$$

Para resolver esse somatório, no primeiro termo o n é substituído por 4,4934095 e o n_f por 1, no segundo termo n é substituído por 7,7252518 e n_f por 2, e assim sucessivamente. Para efeito de cálculo foi considerado os valores até o quarto termo. Essa aproximação foi feita porque a partir desse ponto os valores são muito pequenos, podendo ser desconsiderados.

4.3 VIBRAÇÃO AMORTECIDA DEVIDO A CARGA DE PULSO

Para se aplicar o amortecimento na viga em estudo, é necessária a aplicação de um amortecimento (ξ) diferente de zero na equação (3.23). Dessa forma tem-se:

$$x(t) = \left\{ 6 n P_0 \left[\text{sen} \left(\frac{1}{2} n \right) - n \cos \left(\frac{1}{2} n \right) + \frac{1}{2} n \right] [-\text{sen}(\omega t)\xi + e^{\xi\omega t} \right. \quad (4.22)$$

$$\left. - \cos(\omega t)] e^{\xi\omega t} \right\}$$

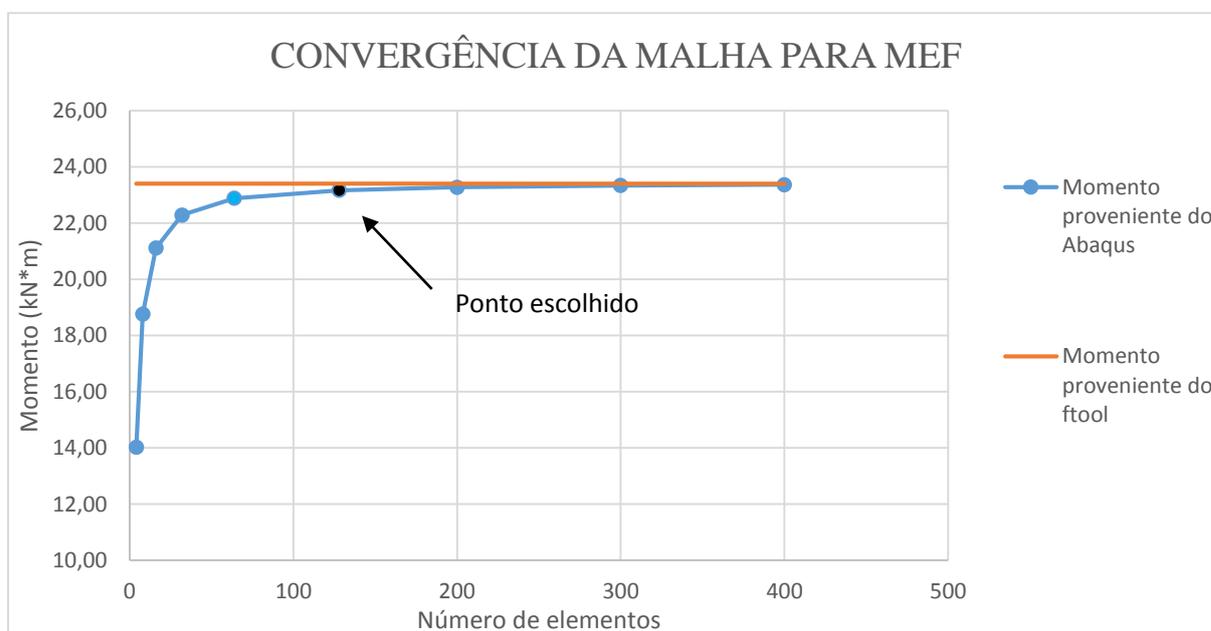
$$/ \{ (L\bar{m} [3\text{sen}(n) \cos(n) n^2 + 6n \cos(n)^2 + 5n^3 - 3 \cos(n) \text{sen}(n) + 12n \cos(n) - 12 \text{sen}(n) - 3n] \omega^3 (\xi^2 + 1) \}$$

Considerando que o modo de vibração é o mesmo que o de uma viga sem amortecimento temos que a solução para esse problema passa pela mesma equação (4.21).

4.4 ESCOLHA DA MALHA PARA A ANÁLISE USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

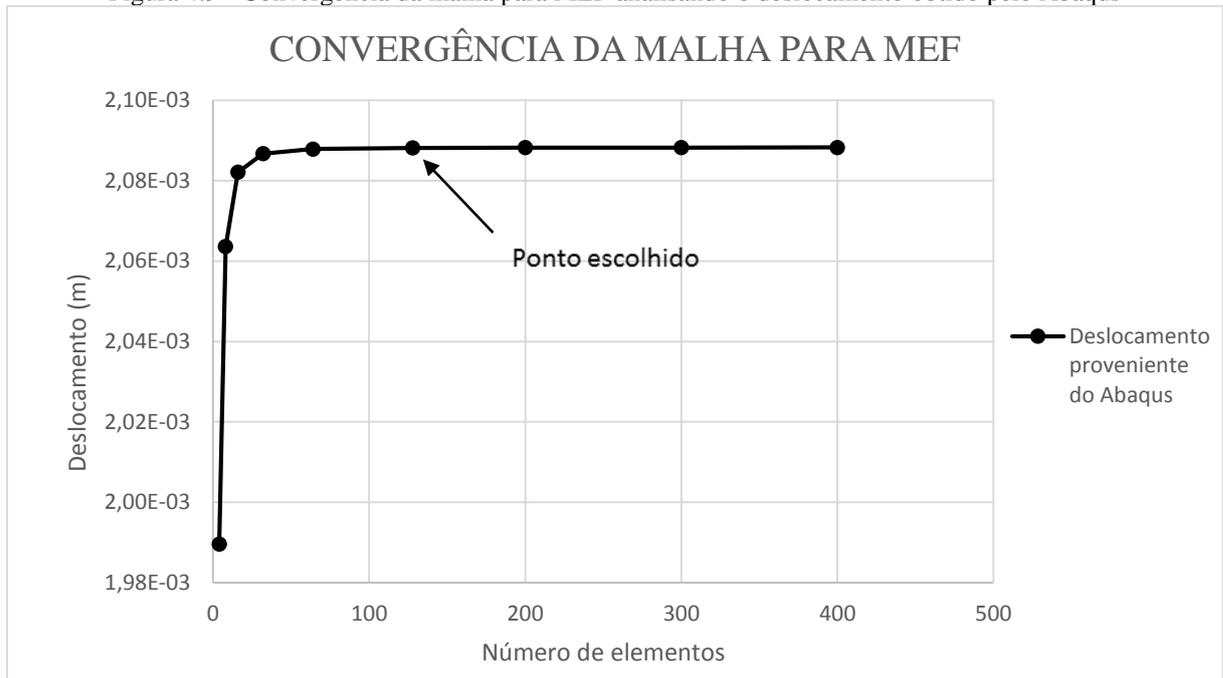
Para realizar a escolha da malha do sistema foi feita a análise estática de uma viga com 10 m de comprimento, seção transversal de base igual a 0.35 m e altura igual a 0,45 m e sujeita a uma carga de 15 kN para baixo aplicada no meio do vão. Foram feitas modelagens utilizando diversas quantidades de nós. Os momentos obtidos no meio do vão da viga ($x = 5\text{m}$) foram comparados com o momento obtido pelo Ftool e colocados no gráfico como mostra-se na Figura 4.8, fazendo assim a convergência através da comparação com resultados já conhecidos. Os deslocamentos no meio do vão viga foram explicitados no gráfico da Figura 4.9, mostrando assim a convergência com resultados provenientes do próprio método. Assim, utilizou-se uma malha com 128 elementos.

Figura 4.8 – Convergência da malha para MEF, comparando o momento do Abaqus com o momento do Ftool



Fonte: O autor

Figura 4.9 - Convergência da malha para MEF analisando o deslocamento obtido pelo Abaqus



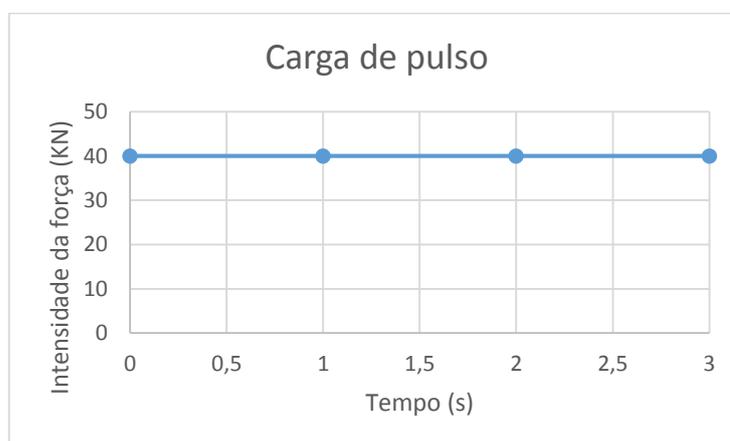
Fonte: O autor

5 RESULTADOS NUMÉRICOS UTILIZANDO A INTEGRAL DE DUHAMEL DE DUHAMEL

A viga a ser considerada nesse exemplo será a representada na Figura 4.7 juntamente com os seguintes parâmetros: Seção transversal retangular de (35 cm x 45 cm), módulo de elasticidade $E = 25\,000$ MPa, momento de inércia $I = 2,6578 \cdot 10^9$ mm⁴, comprimento $L = 10$ m, $x_1 = 0.5 L$ e $P_0 = 40$ kN e $\bar{m} = 3500$ g/m.

Para essa análise será considerada esta carga de pulso:

Figura 5.1 – Forma da carga de pulso para análise pela Integral de Duhamel



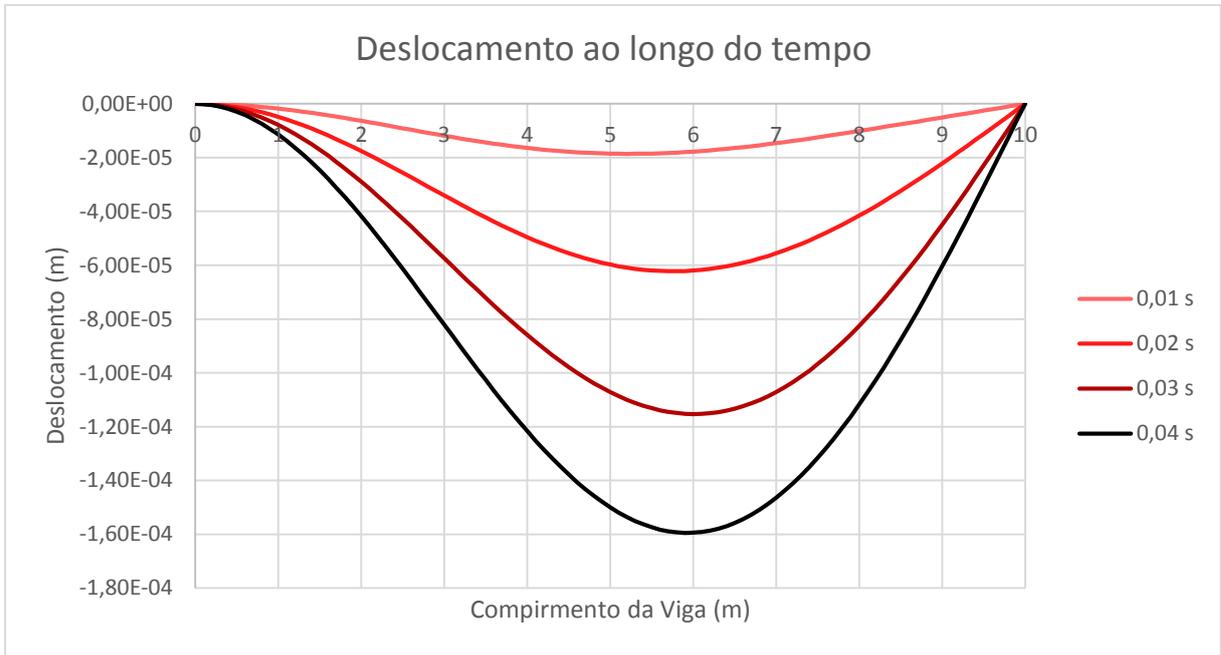
Fonte: O autor

5.1 VIBRAÇÃO NÃO-AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA

Tendo que a resposta desse problema é $w(x, t) = \sum_{n_f=1}^{\infty} X_n(x) x(t)$, como mostrado no item 4.2 e fazendo a consideração de que a viga em questão possui densidade uniforme.

Dessa forma obtém-se os deslocamentos em diferentes instantes de tempo apresentados na Figura 5.2, onde no eixo das abscissas está representando o comprimento da viga e no eixo das ordenadas está representando o valor em módulo do deslocamento da viga em função do tempo, as unidades de comprimento estão em metros e o tempo em segundos.

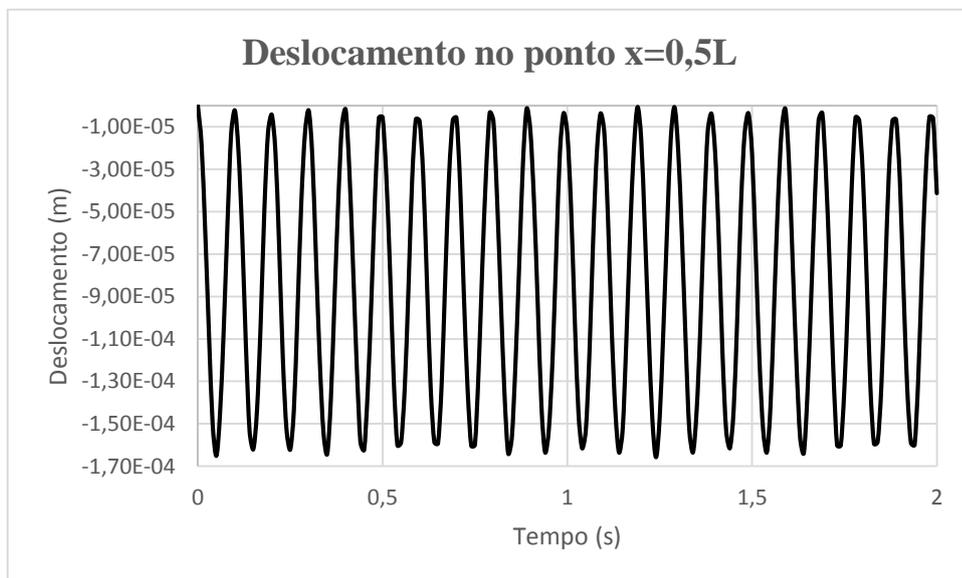
Figura 5.2 – Vibração não-amortecida de uma viga engastada-apoiada devido a uma carga de pulso.



Fonte: O autor

A Figura 5.3 representa o deslocamento no ponto $x = 0,5 L$.

Figura 5.3 –Deslocamento no ponto $x = 0,5 L$

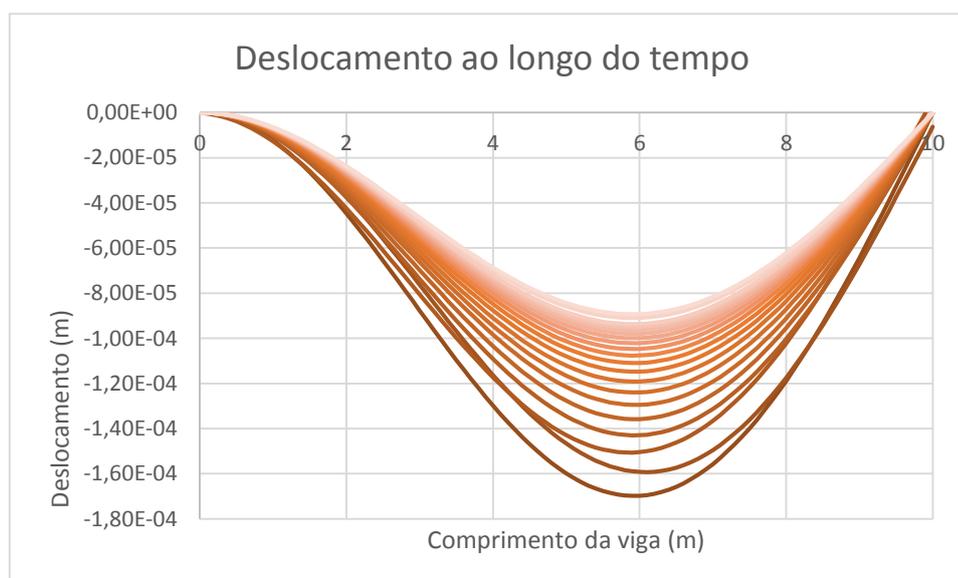


Fonte: O autor

5.2 VIBRAÇÃO AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA

Tendo que a resposta para esse problema está representada na equação (4.22), foi adotado um amortecimento (ξ) igual a 0,02. Na Figura 5.4 está representada a máxima amplitude do deslocamento em cada período de vibração. Essa representação é feita em escala de cores, onde a cor mais intensa representa os primeiros períodos, logo após a aplicação da carga e as cores mais claras representam os períodos posteriores. Pode-se perceber que devido ao amortecimento o deslocamento da viga diminui a sua amplitude máxima com o passar do tempo, tendendo a permanecer em um estado de repouso.

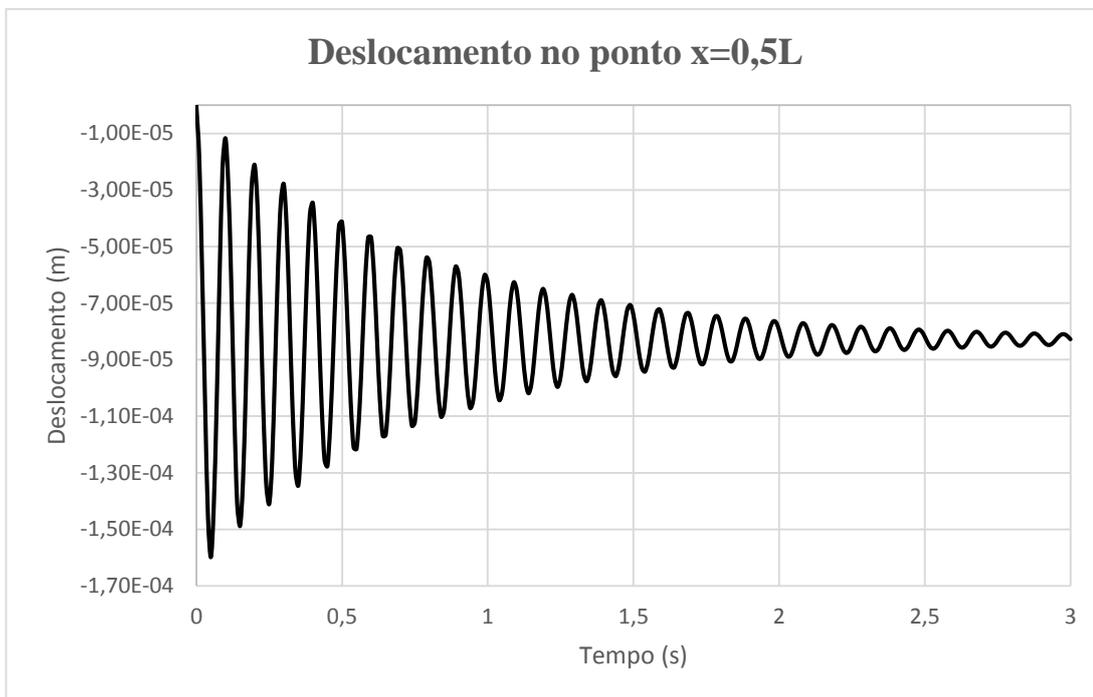
Figura 5.4 – Representação do deslocamento máximo por ciclo de vibração



Fonte: O autor

Na Figura 5.4 é mostrada a amplitude do deslocamento no ponto $x = 0,5L$. Pode-se perceber que a amplitude do deslocamento diminui com o passar do tempo, diferente do que acontecia no caso da viga sem amortecimento.

Figura 5.5 – Deslocamento no ponto $x=0,5L$ com influência do amortecimento.



Fonte: O autor

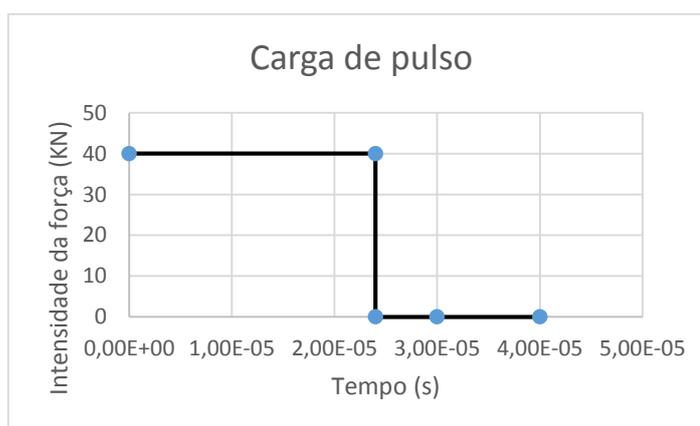
6 RESULTADOS NUMÉRICOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para os resultados desta secção foi utilizado o programa de elementos finitos Abaqus. A viga desenhada é do tipo “line” e os elementos foram do tipo B21, que representam elementos de viga com uma dimensão e 2 nós por elemento. A malha escolhida contém 128 elementos como é explicitada na secção 4.4.

Como dados de entrada tem-se os seguintes parâmetros: Densidade igual a 2500 kg/m^3 , modulo de elasticidade $E = 25 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

Para essa análise será considerada esta carga de pulso:

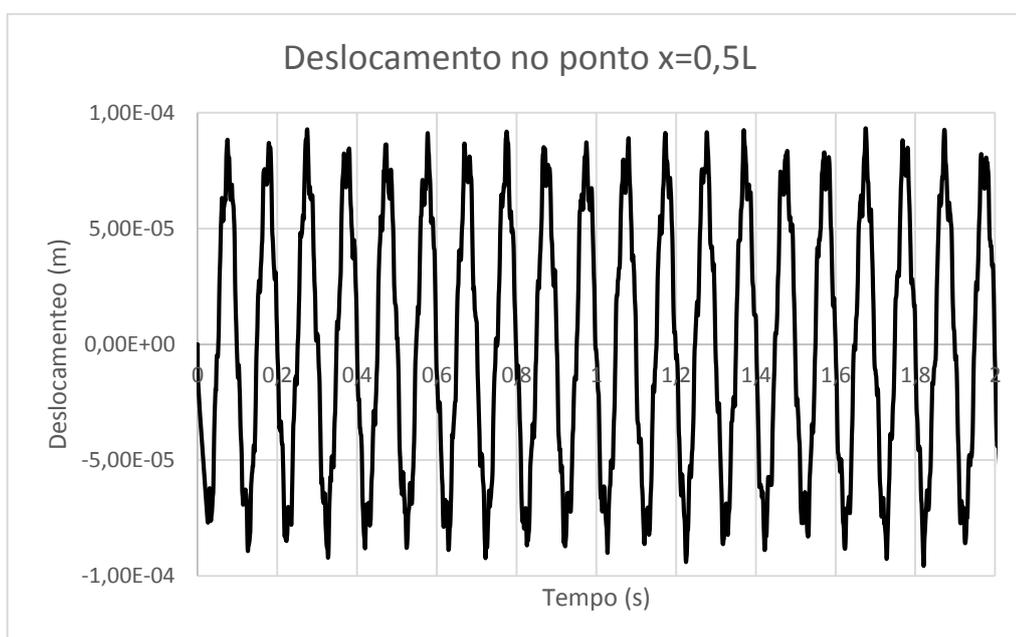
Figura 6.1 - Forma da carga de pulso para análise pelo MEF



Fonte: O Autor

6.1 VIBRAÇÃO NÃO-AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA

Aplicando-se uma carga de 40 kN no centro de uma viga de 10 metros de comprimento com as condições de apoio engastada-apoiada, utilizando-se dos parâmetros anteriormente mencionados tem-se os deslocamentos no ponto $x = 0,5L$ representados na Figura 6.2.

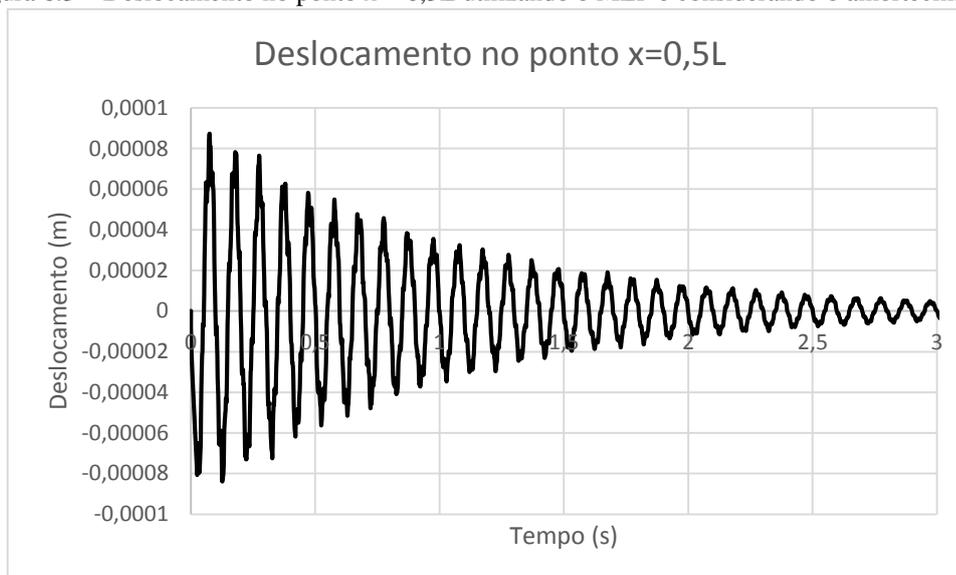
Figura 6.2- Deslocamento no ponto $x = 0,5L$ obtido usando o MEF

Fonte: O autor

6.2 VIBRAÇÃO AMORTECIDA DEVIDO A UMA CARGA DE PULSO EM VIGA ENGASTADA-APOIADA

Adicionando como dado de entrada para o Abaqus um amortecimento do tipo ALPHA, que corresponde a um amortecimento proporcional a massa, de valor igual a 2% do amortecimento crítico – amortecimento equivalente ao utilizado na solução utilizando a Integral de Duhamel, tem-se o deslocamento no ponto $x = 0,5L$ como mostrado na Figura 6.3. Pode-se perceber que segue o mesmo padrão de vibração do deslocamento proveniente do método utilizando a Integral de Duhamel.

Figura 6.3 – Deslocamento no ponto $x = 0,5L$ utilizando o MEF e considerando o amortecimento.



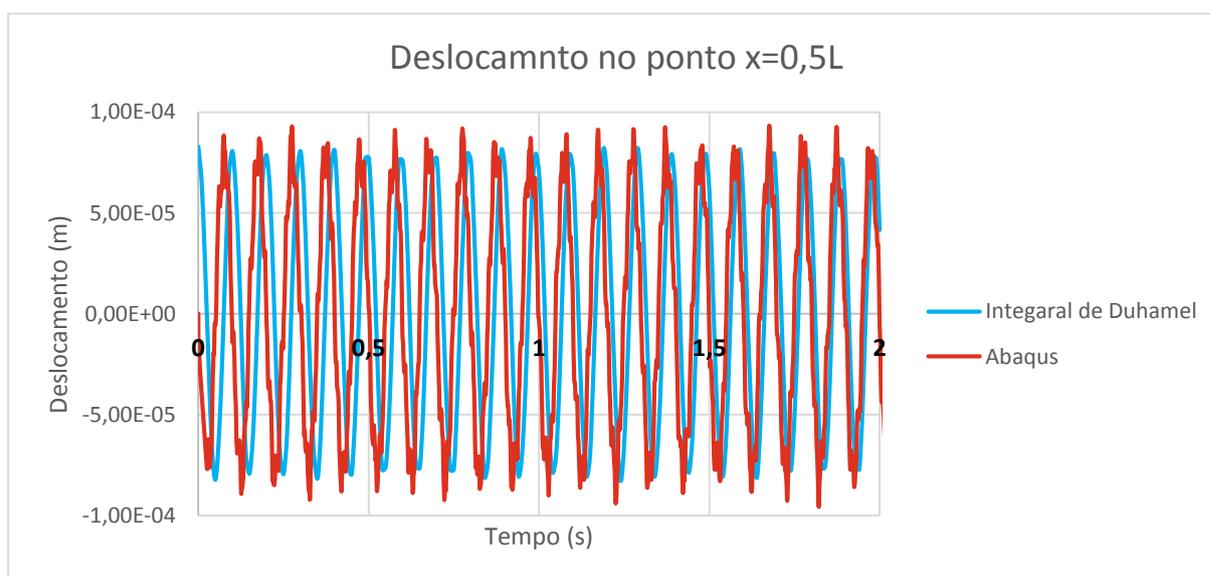
Fonte: O autor

7 COMPARANDO O RESULTADO OBTIDO PELOS DOIS MÉTODOS

Para se comparar os gráficos obtidos pelos dois métodos analisados nesse trabalho é necessário fazer a normalização dos mesmos, pois a carga que foi aplicada para análise pelo MEF foi retirada após 0,00025 segundos de sua aplicação, já a carga que foi aplicada para análise usando a Integral de Duhamel permaneceu na estrutura após a aplicação. Para isso foi somado $8,29 \times 10^{-5}$, que corresponde à metade do deslocamento máximo, a todos os valores do eixo Y nos gráficos obtidos utilizando a Integral de Duhamel. Dessa forma o eixo das abscissas passou a ser o ponto médio do gráfico, fato que já ocorria nos gráficos provenientes do MEF.

Na Figura 7.1 os deslocamentos no ponto $x = 0,5L$ das vibrações não amortecidas causadas pela carga de pulso oriundos dos dois métodos estão sobrepostos. É notável uma pequena diferença nos deslocamentos, porém isso é explicado por se tratar de métodos diferentes que se utilizam de conceitos diferentes.

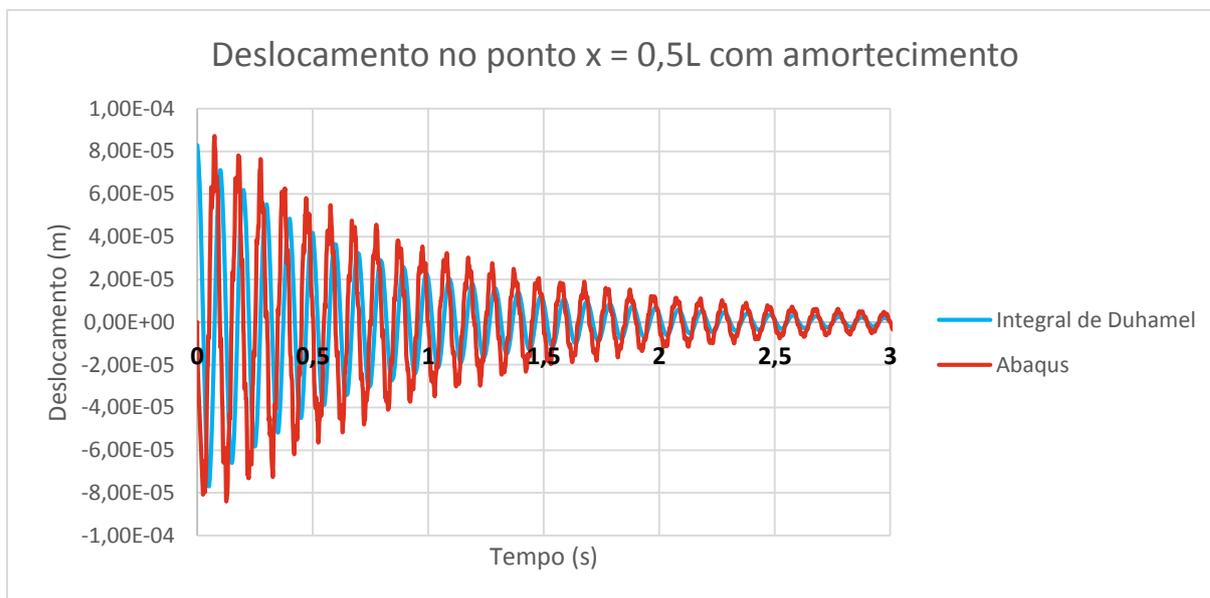
Figura 7.1 – Sobreposição dos deslocamentos no ponto $x = 0,5L$ obtido pelos dois métodos em estudo



Fonte: O autor

Seguindo essa mesma ideia é feita a sobreposição com dos deslocamentos no ponto $x = 0,5L$ considerando os efeitos do amortecimento, como é mostrado na Figura 7.2.

Figura 7.2 - Sobreposição dos deslocamentos no ponto $x = 0,5L$, com amortecimento, obtido pelos dois métodos em estudo



Fonte: O autor

A compatibilidade dos dois métodos também pode ser comprovada pela frequência natural. O valor da primeira frequência natural obtido pelo Abaqus é de 62.871 rad/s enquanto fazendo-se a devidas substituições na equação (3.20) o resultado o obtido para o $n = 1,25$ é de 63.341 rad/s, uma diferença de 0,74 % que é explicado pela diferença das análises.

8 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foram feitas análises dinâmicas de uma viga com as condições de contorno engastada-apoiada, sob o efeito de uma carga de pulso. Para essas análises obteve-se a equação de movimento contínua da viga e sua solução obtida através da utilização da Integral de Duhamel. O problema também é analisado de forma discreta através da utilização do método dos elementos finitos. Em ambas metodologias se estudam os efeitos na viga com e sem a consideração de amortecimento.

Analisando as diferenças de um sistema com e sem amortecimento percebeu-se que tanto utilizando o método dos elementos finitos como a Integral de Duhamel, os resultados obtidos foram semelhantes aos esperados, onde o sistema sem amortecimento vibra de forma constante enquanto o sistema com amortecimento diminui a amplitude de sua vibração com o passar do tempo, tendendo a uma estabilidade.

Comparando o resultado obtido pelos dois métodos utilizados nesse trabalho, percebeu-se que ambas as vigas modeladas vibraram de acordo com o esperado pela revisão bibliográfica e os seus deslocamentos estão bem próximos, apresentando uma pequena diferença que é explicada pelo fato de uma análise ser feita por um modelo contínuo e a outra por um modelo discreto.

9 REFERÊNCIAS

2015. Abaqus analysis User's Manual. [Online] UNIVERSITY OF CAMBRIDGE, Agosto de 2015.

http://things.maths.cam.ac.uk/computing/software/abaqus_docs/docs/v6.12/books/usb/default.htm.

ALVES FILHO, A. 2000. *Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE*. São Paulo : Érica, 2000. 85-7194-7414.

BAYAT, M. 2011. Dynamic response of axially loaded Euler-Bernoulli beams. 2011, Vol. 17(2), pp. 172-177.

CARRERA, Erasmo. 2011. *Beam structures: classical and advanced theories*. West Sussex : John Wiley & Sons, Ltd, 2011.

HIBBELER, R. C. 2004. *Resistência dos materiais*. São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2004.

KREYSZING, Erwin. 2006. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken : John Wiley & Sons, Inc., 2006.

MAPLESOFT. 2014. *Maple User Manual*. s.l. : Waterloo Maple Inc., 2014. 978-1-926902-45-6.

QUEIROZ, Paulo César de O., EL DEBS, Ana Lúcia e FERREIRA, Ivone passos. 2010. Dynamic analysis of frame structures: simulation environment using JAVA. 2010.

ROEHL, J. L. P. 2005. *Dinâmica das estruturas*. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro : s.n., 2005. Notas de aula.

SORIANO, H. L. 2003. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 85-314-0730-3.

TEDESCO, Joseph W., McDOUGAL, William G. e ROSS, C. Allen. 1999. *Structural dynamics: theory and applications*. Menlo Park : Addison Wesley Longman, Inc., 1999.

THOMSON, William Tyrrell. 1998. *Theory of vibration with applications*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1998. 0-13-651068-X.

TIMOSHENKO, Stephen P. 1963. *Theory of elastic stability*. New York : McGraw - Hill Book Company, Inc., 1963.

WANG, C. M., REDDY, J. N. e LEE, K. H. 2000. *Shear deformable beams and plates: relationship with classical solutions*. Oxford : Elsevier Science Ltd., 2000.

WANG, C.Y. e WANG, C.M. 2014. *Structural vibration*. Boca Raton : Taylor & Francis Group, 2014.