

SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Fernando Ricardo Moreira¹, Esdras Teixeira Costa², Rafael Tomaz Parreira³, Reslley Gabriel Oliveira Silva⁴, Wendy Carniello Ferreira⁵

¹Professor Mestre do Curso de Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFG) (moreirafrmat@hotmail.com)

²Professor Doutor da Coordenação de Matemática da UFG

³Aluno de Graduação em Ciências da Computação da UFG

⁴Aluno de Graduação em Ciências da Computação da UFG

⁵Professor Doutor da Faculdade de Engenharia Florestal da UFG

RESUMO

Muitos dos problemas em matemática e outras áreas afins conduzem a equações dos mais variados tipos como, equações algébricas, diferenciais e integrais. O que motivou e motiva matemáticos do mundo inteiro é a resolução destas equações, que nem sempre é uma tarefa fácil. Apresentamos um histórico sobre a dificuldade de se resolver equações, sendo estas equações do tipo mais simples: as equações polinomiais. Diante da dificuldade de encontrar soluções exatas para equações algébricas, nos deparamos com outro problema: encontrar soluções aproximadas. Assim apresentamos e discutimos sobre quatro métodos para encontrar raízes aproximadas de equações.

PALAVRAS-CHAVE – Métodos Numéricos, Iteração, Convergência.

ON NUMERICAL METHODS IN ALGEBRAIC EQUATION SOLVER ABSTRACT

Many of the problems in mathematics and other related areas leading to equations of all kinds as algebraic equations, differential and integral. What motivated and motivates mathematicians in the world is the solution of these equations, which is not always an easy task. We present a history on the difficulty of solving equations; these equations are the simplest kind: the polynomial equations. Given the difficulty of finding exact solutions to algebraic equations, we face another problem: to find approximate solutions. Thus we present and discuss four methods to find approximate roots of equations.

KEYWORDS - Numerical Methods, Iteration, Convergence.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho vamos falar um pouco sobre quatro métodos numéricos para encontrar raízes aproximadas de equações algébricas, a saber o Método da Bissecção, Iteração Linear, o Método das Secantes e o Método de Newton. Porém, para explicar a necessidade de processos numéricos, vamos explorar um pouco sobre a história das equações e da dificuldade existente em encontrar raízes exatas.

O estudo sobre vários tipos de equações motivaram e motivam muitos matemáticos em todo o mundo. Grande parte dos célebres matemáticos entre os anos de 1400 e 1700 deram grandes contribuições ao estudo das equações algébricas. Resolver uma equação já era um desafio desde o início do conhecimento matemático como podemos apreciar nos papiros de Moscou (1890 a.C.), de Rhind (1650 a.C.) entre outros. A palavra equação já era usada por escritores medievais. Ramus (1515 - 1572) usou a palavra "*Aequatio*" em sua "*Aritmética*" (1567). A equação apareceu em inglês em 1570 em uma tradução da obra Os Elementos de Euclides feita pelo senhor Henry Billingsley. François Viète (1540-1603) define o termo equação no capítulo VIII de "*Isagoge do Analyticem do Artem*" em 1591. Para saber um pouco mais sobre história da matemática veja BOYER (1996).

O grande problema enfrentado pelos matemáticos entre 1400 e 1700 era o de encontrar as raízes de equação polinomiais em função apenas dos coeficientes da equação. A resposta para as equações de grau era conhecida desde o início do século II, pois Bháskara formalizou uma demonstração da fórmula para as equações quadráticas, por isso a fórmula conhecida por "*Formula de Bháskara*". Para as equações de terceiro grau o problema era um pouco mais sério e até motivou disputas entre alguns matemáticos. Acredita-se que Scipione Dal Ferro (1465-1526) sabia resolver equações cúbicas por métodos algébricos e que nos seus últimos dias ele confiou sua solução a um estudante, Antônio Fior. Fior desafiou Nícolo Fontana (1499-1557), conhecido por Tartaglia, para uma competição pública: as regras consistiam em que, cada um daria ao outro 30 problemas com 40 ou 50 dias para resolver e, o vencedor seria aquele que resolvesse a maioria ganhando assim um prêmio. Tartaglia resolveu todos os problemas de Fior em cerca de duas horas. Acontece que Tartaglia, um pouco antes de receber os problemas, tinha achado um método geral para todos os tipos de equações cúbicas. Entretanto foi outro matemático, chamado Girolamo Cardano (1501-1576), quem publicou em 1545 a fórmula para as equações cúbicas em "*Ars Magna*".

Porém Cardano observou algo estranho quando aplicou a fórmula para certas equações cúbicas. Por exemplo, ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ obteve a expressão $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Cardano não entendeu seu próprio cálculo. Foram precisos 25 anos para que Rafael Bombelli (1526-1572) em seu artigo "*Álgebra*" publicado em 1572, mostrasse um conjunto formal de regras para manipular números complexos e acabasse assim com o impasse. A fórmula obtida por Tartaglia-Cardano era a seguinte.

Proposição 1 - Sejam a_3, a_2, a_1 e a_0 números reais onde $a_3 \neq 0$. Então as soluções da equação $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, são dadas pelas $x_1 = \alpha + \beta - \frac{b}{3}$, $x_2 = \alpha\omega + \beta\omega^2 - \frac{b}{3}$ e $x_3 = \alpha\omega^2 + \beta\omega - \frac{b}{3}$ onde:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[-q + \sqrt{q^3 + \frac{4p^2}{27}} \right]}, \beta = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[q + \sqrt{q^3 + \frac{4p^2}{27}} \right]}, \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e b, p e q são números determinados. Pinedo 2001, faz uma demonstração desta proposição.

A partir daí o interesse era encontrar uma fórmula que fornecesse as raízes de equações polinomiais em função dos seus coeficientes. Muitos matemáticos buscaram resolver este problema, até que em 1799, Carl F. Gauss, demonstrou em sua tese de doutoramento o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). O TFA é apenas um teorema sobre a existência de soluções para polinômios e não aponta a

direção de uma fórmula para essas soluções. Podemos ver algumas demonstrações do TFA em GILAIN (1991), FINE & ROSENBERGER (1997) e BALTUS (2004). Assim a questão sobre a existência de uma fórmula ainda não havia sido resolvida. Até que, por volta de 1830, um grande matemático chamado Evarist Galois (1811-1832) resolveu a questão para polinômios de grau maior do que quatro. Galois teve a brilhante idéia de associar as raízes de um polinômio com um grupo de permutações dessas raízes. Ele mostrou que seria possível encontrar uma fórmula para as raízes se e somente se o grupo de permutações dessas raízes fosse solúvel. Ainda mostrou que para cada grau maior do que quatro era possível encontrar algum polinômio para o qual o grupo de permutações das suas raízes não era solúvel. Isso mostra que para polinômios de grau maior ou igual a cinco é impossível encontrar uma fórmula que forneça as suas raízes. Para conhecer um pouco mais sobre a história das equações sugerimos a leitura do livro que foi o grande ganhador do 40° Prêmio Jabuti intitulado "*O Romance das Equações Algébricas*" (GARBI, 2007). Para saber um pouco mais sobre grupos solúveis veja HERSTEIN (1996).

Diante desta dificuldade de se encontrar raízes exatas passamos agora para outra fase: encontrar raízes aproximadas para equações. Em problemas aplicados é indiferente o uso de uma raiz exata ou aproximada, desde que tenha um bom grau de exatidão. Portanto vamos agora falar sobre alguns métodos numéricos para encontrar raízes de equações.

2. PRELIMINARES

Enunciaremos, sem nenhuma demonstração, alguns fatos do cálculo que serão importantes para o entendimento de alguns resultados futuros. Também daremos algumas definições.

Definição 2 - Uma raiz ou zero da equação $f(x) = 0$ um número $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Proposição 3 - Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$, isto, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz $\bar{x} \in (a, b)$.

Prova: Este resultado é consequência do Teorema do Valor Intermediário (TVI) e uma prova do TVI pode ser encontrada no livro Curso de Análise (Lima, 2002).

O que a proposição 3 afirma é que uma condição "*suficiente*" para que uma equação do tipo $f(x) = 0$ tenha solução, onde f é função contínua, é que ela tenha imagens de sinais opostos. Esta condição não é "*necessária*" para que uma função tenha raiz. Este resultado será de muita importância para nós, pois por ele podemos afirmar que uma equação tem raiz e a maioria dos métodos numéricos precisa desta hipótese para ser implementado. Por exemplo, é possível mostrar que a função

$$f(x) = \cos \frac{\pi(x+1)}{8} + 0.148x - 0.9062$$

possui uma raiz no intervalo $(-1, 0)$, pois $f(-1) < 0$ e $f(0) > 0$.

Proposição 4 (Teorema do Valor Médio) - Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b) . Então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Prova: A prova do TVM pode ser encontrada no livro Curso de Cálculo, citado anteriormente.

Proposição 5 (Teorema da Permanência do Sinal) - Seja f uma função real e contínua em uma vizinhança de um ponto x_0 com $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$). Então existe uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) para todo x nessa vizinhança.

Prova: A prova do TVM pode ser encontrada no livro Curso de Cálculo, citado anteriormente.

Daremos agora um procedimento que deve ser seguido na aplicação de qualquer método numérico para determinar uma solução de $f(x) = 0$, com uma precisão pré-fixada.

Processo de Parada

1. Para aplicar qualquer método numérico deveremos ter sempre à idéia sobre a localização da raiz a ser determinada. Esta localização é obtida, em geral, fazendo uso da Proposição 3.

2. Para obtermos uma raiz com uma determinada precisão ϵ devemos, durante o processo iterativo, efetuar o seguinte teste: Se

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon \quad (\text{erro relativo})$$

onde ϵ é uma precisão prefixada; x_k e x_{k+1} são duas aproximações consecutivas para $\bar{x}$, então x_{k+1} é raiz procurada, isto é, tomamos $\bar{x} = x_{k+1}$.

Observações:

a) Em relação à precisão prefixada, normalmente, tomamos $\epsilon = 10^{-m}$ onde m é o número de casas decimais corretas que queremos na raiz aproximada.

b) Apesar de alguns autores considerarem como teste de parada o fato de $|f(x_{k+1})| < \epsilon$ é preciso ter cuidado, pois, a menos que se tenha idéia muito clara do comportamento da função, podemos ter uma surpresa quanto à resposta do teste. Por exemplo, considere a função $f(x) = x^{-3} \ln x$ onde a única raiz é $\bar{x} = 1$. Calculando $f(x)$ para $x = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ obtemos, respectivamente: 0.0866, 0.0217, 0.00406, 0.0006769, 0.0001058, ... isto é, quanto mais longe estamos de $\bar{x}$ menor é o valor de $f(x)$.

c) Alguns autores consideram como teste de parada o fato de $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$, chamado de erro absoluto. Entretanto, se estes números forem muito grandes e ϵ for muito pequeno, pode não ser possível calcular a raiz com uma precisão tão exigente.

De posse destes resultados e definições preliminares, podemos agora descrever alguns métodos numéricos para encontrar raízes de equações.

3. MÉTODO DA BISSECÇÃO

Nesta seção vamos apresentar o Método da Bissecção e faremos um exemplo para mostrar como o método funciona.

Considere uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e suponha que $f(a) \cdot f(b) < 0$. De acordo com a Proposição 3, existe uma raiz $\bar{x}$ no intervalo (a, b) . Calculamos o valor da função f no ponto médio: $x_1 = \frac{a+b}{2}$.

Temos apenas três possibilidades, a saber:

1. Se o valor de $f(x)$ em x_1 fosse nulo, isto é, se $f(x_1) = 0$. Neste caso não teríamos que fazer mais nada.
2. Se $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, então f tem uma raiz entre a e x_1 . O processo pode ser repetido no intervalo (a, x_1) .
3. Se $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ então f tem uma raiz entre x_1 e b . O processo pode ser repetido no intervalo (x_1, b) .

A repetição do método é chamada de iteração e as aproximações sucessivas são os termos iterados.

Portanto, podemos escrever o método da bissecção da seguinte forma.

Para $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, faça:

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2} \quad \text{Se } f(a_k) \cdot f(b_k) \begin{cases} < 0 \text{ então } a_{k+1} = a_k \text{ e } b_{k+1} = x_k \\ > 0 \text{ então } a_{k+1} = x_k \text{ e } b_{k+1} = b_k \end{cases}$$

Exemplo – Para ilustrar o método da bissecção, considere que desejamos calcular a raiz positiva da equação

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{(x^2 - 2)} - 1 = 0.$$

Observe que é muito difícil calcular a raiz exata da equação dada acima. Observe ainda que $f(0) < 0$ e que $f(1) > 0$. Portanto, pela proposição 3, temos uma raiz de f no intervalo $[a, b]$. Os primeiros passos do método da bissecção para esta equação, estão mostrados na **TABELA 1**.

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	0.5	-0.609009
2	0.5	1	0.75	-0.272592
3	0.75	1	0.875	0.023105
4	0.75	0.875	0.8125	-0.139662
5	0.8125	0.875	0.84375	-0.062448
6	0.84375	0.875	0.859375	-0.020775
:	:	:	:	:

Vamos agora aplicar o processo de parada. Com seis iterações obtemos:

$$\frac{|x_6 + x_5|}{|x_6|} = \frac{|0.859375 - 0.84375|}{|0.859375|} = 0.0181818 \dots$$

Não obtemos uma precisão boa. Continuando o processo e exigindo uma precisão $\epsilon = 10^{-5}$, obteremos: $x_{16} = 0.866868$ e $x_{17} = 0.866876$, e assim

$$\frac{|x_{17} - x_{16}|}{|x_{17}|} = \frac{|0.866876 - 0.866868|}{|0.866876|} = 9.2 \times 10^{-6} < \epsilon = 10^{-5}$$

Podemos, através deste exemplo, ver que a velocidade de convergência para o Método da Bissecção é baixa. Nas referências BURDEN & FAIRES (2001) e FRANCO (2006) é possível obter maiores informações sobre taxas de convergência para métodos numéricos específicos. BURDEN & FAIRES (2001) fazem a demonstração sobre a convergência do método da bissecção. Nesta referência podemos também observar que a taxa de convergência do método da bissecção é linear. Para saber um pouco mais sobre taxa de convergência veja MOREIRA, et. al. (2009).

3. ITERAÇÃO LINEAR

Queremos introduzir o método da iteração linear para o cálculo de uma raiz de uma equação do tipo $f(x) = 0$. Devemos, inicialmente, expressar a equação anterior na seguinte forma:

$$x = \varphi(x). \quad (1)$$

De modo que qualquer solução da equação $f(x) = 0$ também seja solução da equação $x = \varphi(x)$. Geralmente existe mais de uma maneira de expressar a equação $f(x) = 0$ na forma $x = \varphi(x)$. Por exemplo, algumas formas possíveis para a equação quadrática

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

são

$$x = x^2 - 2 \quad x = 1 + \frac{2}{x} \quad x = \sqrt{2 + x}$$

Seja x_0 uma aproximação inicial para uma solução $\bar{x}$ de (1). Obtemos aproximações sucessivas x_k usando o processo iterativo

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Este processo chama-se iteração linear. Para que este processo seja interessante, e necessário, que os iterados x_k sejam convergentes para a solução $\bar{x}$. Porém, não é difícil fornecer exemplos para os quais a sequência dos iterados x_k diverge. Por exemplo, considerando a equação $x = x^2 - 2$ e tomando como ponto inicial $x_0 = 2.5$, teremos

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) = (2.5)^2 - 2 = 4.25 \\ x_2 &= \varphi(x_1) = (4.25)^2 - 2 = 16.0625 \\ x_3 &= \varphi(x_2) = (16.0625)^2 - 2 = 256.00391 \end{aligned}$$

⋮

e é claro que se trata de uma sequência divergente. As condições suficientes para que a função φ deve satisfazer para garantir a convergência da iteração linear e dada no próximo teorema.

Teorema 6 - Seja φ uma função contínua, com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas num intervalo I da forma $I = [\bar{x} - h, \bar{x} + h]$, onde $\bar{x}$ solução de (1). Seja $x_0 \in I$ e M tal que $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ em I . Então:

a) A iteração $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, 2, 3, \dots$, pode ser executada indefinidamente, pois $x_k \in I$ para todo k .

b) $|x_k - \bar{x}| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$

Prova –

a) Usaremos indução para provar que $x_k \in I$ para todo k . Por hipótese $x_0 \in I$ e não temos nada a fazer. Seja k um natural qualquer e suponha que $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$. Queremos provar que $x_{k+1} \in I$. Usando a Proposição 4 (TVM), obtemos

$$x_{k+1} - \bar{x} = \varphi'(\varepsilon_k)(x_k - \bar{x})$$

onde $\varepsilon_k \in I$ está entre x_k e $\bar{x}$. Tomando o módulo em ambos os lados e observando que $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ obtemos

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq M|x_k - \bar{x}| < |x_k - \bar{x}|$$

Logo, temos que $x_{k+1} \in I$, já que $x_k \in I$.

b) Pelo item a), segue indutivamente que

$$|x_k - \bar{x}| \leq M|x_{k-1} - \bar{x}| \leq M^2|x_{k-2} - \bar{x}| \leq \dots \leq M^k|x_0 - \bar{x}|$$

Como $M < 1$, passando o limite quando $k \rightarrow \infty$, obtemos $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = 0$ e portanto $|x_k - \bar{x}| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Para que o processo $x_{k+1} = x_k^2 - 2$ seja convergente devemos ter $|\varphi'(x)| < 1$ numa vizinhança de $\bar{x} = 2$ (já sabemos que 2 é uma raiz). Temos que $\varphi'(x) = 2x$ e assim $|\varphi'(x)| < 1$ se e somente se $-1/2 < x < 1/2$. Assim o Teorema 6 não pode ser usado para garantir a convergência. Por outro lado, se usarmos a iteração $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}$ teremos $|\varphi'(x)| < 1$ se e só se $x > -1.75$ e, portanto o Teorema 6 garante a convergência do método da iteração linear para a raiz $\bar{x} = 2$ para qualquer escolha de $x_0 > -1.75$.

5. MÉTODO REGULA FALSI OU DA FALSA POSIÇÃO

Descreveremos agora o método Regula Falsi também conhecido como método da Falsa Posição. Podemos encarar este método como uma variação do método da bissecção. Tomemos x_0 e x_1 duas aproximações de uma raiz $\bar{x}$ de $f(x) = 0$ para o qual $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. Suponha que $|f(x_0)| < |f(x_1)|$. É razoável esperar que $\bar{x}$ esteja mais próximo de x_0 do que de x_1 (daí o nome de Falsa Posição). Ao invés de calcular o iterado x_2 como o ponto médio entre x_0 e x_1 , iremos calcular o iterado x_2 pela média ponderada de x_0 e x_1 com pesos $|f(x_1)|$ e $|f(x_0)|$ respectivamente, da seguinte forma

$$x_2 = \frac{x_0|f(x_1)| + x_1|f(x_0)|}{|f(x_1)| + |f(x_0)|}$$

Extraindo os módulos, podemos reescrever a equação anterior, assim

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Assim o iterado x_2 estará mais próximo de x_1 do que de x_0 . Se

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} < \epsilon \text{ ou } \frac{|x_2 - x_0|}{|x_2|} < \epsilon$$

para um ϵ pré-fixado, então x_2 é a raiz procurada. Caso contrário, calculamos $f(x_2)$ e escolhemos entre x_0 e x_1 àquele cuja imagem por f tenha sinal contrário ao de $f(x_2)$. Com x_2 e este ponto (x_0 ou x_1) e fazendo hipóteses sobre estes pontos como fizemos anteriormente, calculamos x_3 usando a formula acima. O processo iterativo deve ser continuado ate que se obtenha a precisão pré-fixada.

Para fixarmos as idéias vamos fazer um exemplo.

Exemplo - Determinar uma raiz positiva da equação $x - \cos x = 0$ pelo método da Posição Falsa, com erro inferior a $\epsilon = 10^{-3}$, isto é, com pelo menos três casas decimais de exatidão.

Por um método gráfico, observamos que $\bar{x}$ esta nas vizinhanças de $x_0 = 0.7$ e $x_1 = 0.8$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0.7) = 0.7 - \cos 0.7 = -0.0648 \\ f(x_1) &= f(0.8) = 0.8 - \cos 0.8 = 0.1033 \\ x_2 &= \frac{0.7f(0.8) - 0.8f(0.7)}{f(0.8) - f(0.7)} = 0.7383 \end{aligned}$$

Calculando o erro relativo, temos

$$\frac{|x_2 - x_0|}{|x_2|} < 0.052 \text{ ou } \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} < 0.084$$

Ambos são maiores que a precisão pré-fixada $\epsilon = 10^{-3}$. O próximo passo é calcular $f(x_2)$, então

$$f(x_2) = f(0.7383) = 0.7383 - \cos 0.7383 = -0.0013$$

Observe que $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$ e, portando, a raiz $\bar{x}$ está entre x_2 e x_1 . Calculemos, pelo mesmo processo, o iterado x_3 . Então

$$x_3 = \frac{0.8f(0.7383) - 0.7383f(0.8)}{f(0.7383) - f(0.8)} = 0.7390$$

Calculando o erro relativo

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} \approx 0.00095$$

vemos que este erro é menor que $\epsilon = 10^{-3}$. Assim tomamos $x_3 = 0.7390$ como sendo uma aproximação para $\bar{x}$ com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

Para terminar, vale a pena observar que em geral a convergência do método da falsa posição é mais rápida do que a do método da bissecção. Um fato interessante é que é possível mostrar que a ordem de convergência do método da posição falsa é o número áureo $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. MÉTODO DE NEWTON

O método de Newton é também conhecido como método de Newton-Raphson. O método de Newton pode ser obtido através do método da iteração linear, mas aqui resolvemos fazê-lo de outra forma. A ideia básica do Método de Newton é bastante simples, consiste na linearização de uma função derivável. Suponha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e queremos resolver a equação $f(x) = 0$. Começando de um ponto inicial x_0 podemos construir uma aproximação linear de $f(x)$ em uma vizinhança de x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Note que pela equação anterior, temos

$$0 = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Portanto podemos assumir que

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Que tem solução, digamos

$$x_1 = x_0 - f'(x_0)^{-1}f(x_0).$$

Agora, se $f'(x_1) \neq 0$ repetimos o processo e encontramos

$$x_2 = x_1 - f'(x_1)^{-1}f(x_1).$$

Portanto, na k -ésima iteração, se $f'(x_k) \neq 0$, encontramos

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1}f(x_k).$$

A equação anterior nos motiva para a seguinte definição.

Definição 7 - A sequência do método de Newton para resolver $f(x) = 0$ onde f é uma função derivável com derivada contínua é a sequência dada pela seguinte regra de recorrência:

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1}f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Observação - Para esta definição fazer sentido temos que garantir que $x_k \in I$, isto é, que x_k esteja no domínio de f e que $f'(x_k) \neq 0$ para todo $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Observação - Suponhamos que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável. Seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo método de Newton. Suponha que $\{x_k\}$ está bem definida, isto é, $x_k \in I$ e $f'(x_k) \neq 0$ para todo k natural e a mesma converge para algum x_* . Então $f(x_*) = 0$.

De fato, a equação (5) é equivalente à equação

$$f(x) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

Agora fazendo $k \rightarrow \infty$ na última igualdade e usando o fato de f e f' serem contínuas, temos que $f(x_*) + f'(x_*)(x_* - x_*) = 0$. Assim; $f(x_*) = 0$. Ilustraremos agora com alguns exemplos numéricos.

Exemplo - Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Note que $f(x) = 0$ implica que $x = 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Agora observe que

$$x_{k+1} = -x_k^3, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

Assim:

- Para $|x_0| = 1$ a seqüência de Newton oscila entre 1 e -1 ; Para $|x_0| < 1$ a seqüência de Newton converge para 0 com taxa cúbica! Para $|x_0| > 1$ a seqüência de Newton diverge.

Exemplo - Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

Note que $f(x) = 0$ implica que $x = 0$. Temos que $f'(x) = 2x \neq 0$ para $x \neq 0$ e

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k}{2}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Veja que para todo $x_0 \neq 0$ a seqüência converge, isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Como $|x_{k+1}| = \frac{1}{2}|x_k|$, temos que a convergência é linear. Observe ainda que neste exemplo $f'(0) = 0$, isto é, a raiz é um ponto singular da derivada.

Exemplo - Considere a função $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Note que $f(x) = 0$ implica que $x = 1$. Temos que a derivada $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ não se anula no domínio de f e que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k(2 - x_k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Observe que:

- $x_0 = 2$ implica que $x_1 = 0 \notin (0, \infty)$ e que para todo $x_0 > 2$ temos $x_1 \notin (0, \infty)$. Desta forma a seqüência não está bem definida; Por último, se $0 < x_0 < 2$ então a seqüência está bem definida e converge para $x_* = 1$.

Exemplo - Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(x-1)(x+1)$. Note que $f(x) = 0$ implica que as raízes da equação são 0 , 1 e -1 . Observe que $f(x) = x^3 - x$. Com isso temos que $f'(x) = 3x^2 - 1$ e

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k}{3x_k^2 - 1} = \frac{2x_k^3}{3x_k^2 - 1}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Assim:

i) Para $x_0 = 1/\sqrt{3}$ a seqüência de Newton oscila entre $1/\sqrt{3}$ e $-1/\sqrt{3}$; Para $x_0 = 1/2$ temos $x_1 = -1$ e portanto, a seqüência de Newton é finita (converge); Para $x_0 = -1/2$ temos $x_1 = 1$ e portanto, a seqüência de Newton é finita (converge);

ii) Tomando $x_0 = -0.465444\dots$, isto é, a raiz real do polinômio de terceiro grau $2\sqrt{3}x^3 - 3x^2 + 1$ temos que

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 1}$$

Logo, $x_1 = 1/\sqrt{3}$. Assim, o método de Newton gera um ponto singular da derivada, neste caso, a seqüência de Newton não está bem definida.

Sugestões de leitura sobre o método de Newton encontram-se em MOREIRA (2006), MOREIRA et. al. (2009) e MOREIRA (2009).

7. REFERÊNCIAS

- BALTUS, C. D'ALEMBERT proof of the fundamental theorem of algebra, *Historian Mathematica* 31 (2004) 414-428.
- BURDEN, R. L. and FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. Editora Thomson.2001.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2o Edição. Editora Edgard Blücher. 1996.
- FINE, B. , and ROSENBERGER, G. **The Fundamental Theorem of Algebra**, Springer-Verlag, 1997.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. Editora Pearson Princite Hall. 2006.
- GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. Editora Livraria da Física. 2007.
- GILAIN, C. **Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral**, *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (1991), 91-136
- HERSTEIN, I. N. **Topics in Algebra**. 3rd Edition. Editora John Wiley. 1996.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Volume 1. 12 Edição. IMPA.2002.
- MOREIRA, F. R., SANTOS, R. C. , FILHO, R. R. G., PAULINO, H. B. **Uma discussão sobre o Método de Newton**. Enciclopédia Biosfera. Volume 5, n.8. 2009.
- MOREIRA, F. R. **O Método de Newton: Uma Análise de Convergência Local e Semi-Local. O Teorema de Kantorovich**. Dissertação de Mestrado em Matemática UFG. 2006.
- MOREIRA, F. R. **Método de Newton: Convergência Local, Unicidade de Solução e Aceleração da Convergência**. *ReMat – Revista Eletrônica de Matemática*, nº 1, 2009. Disponível em<www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica/article/viewFile/927/495>.
- PINEDO, C. J. Q. **História das equações**. VII Erematsul. Cefet-PR Uned Pato Branco. Paraná: 2001. pp 5-15 e 56-57.