

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCOS LEANDRO MENDES CARVALHO

**Equações Diferenciais Parciais Elípticas  
Multivalentes: Crescimento Crítico,  
Métodos Variacionais**

Goiânia  
2013

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**      ☐ Dissertação      ☒ Tese

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

|                                                                                                                     |                                                                                                   |        |                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---------------------------------|
| Autor (a):                                                                                                          | MARCOS LEANDRO MENDES CARVALHO                                                                    |        |                                 |
| E-mail:                                                                                                             | marcos_leandro_carvalho@ufg.br                                                                    |        |                                 |
| Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não |                                                                                                   |        |                                 |
| Vínculo empregatício do autor                                                                                       | Professor Assistente - UFG                                                                        |        |                                 |
| Agência de fomento:                                                                                                 | Capes                                                                                             | Sigla: | Capes                           |
| País:                                                                                                               | Brasil                                                                                            | UF:    | GO    CNPJ:    00889834/0001-08 |
| Título:                                                                                                             | Equações Diferenciais Parciais Elípticas Multivalentes: Crescimento Crítico, Métodos Variacionais |        |                                 |
| Palavras-chave:                                                                                                     | Minimização, convexidade, Espaços de Orlicz-Sobolev.                                              |        |                                 |
| Título em outra língua:                                                                                             | Português                                                                                         |        |                                 |
|                                                                                                                     |                                                                                                   |        |                                 |
| Palavras-chave em outra língua:                                                                                     | Minimization, convexity, Orlicz-Sobolev Spaces.                                                   |        |                                 |
|                                                                                                                     |                                                                                                   |        |                                 |
| Área de concentração:                                                                                               | Análise                                                                                           |        |                                 |
| Data defesa: (dd/mm/aaaa)                                                                                           | 27/09/2013                                                                                        |        |                                 |
| Programa de Pós-Graduação:                                                                                          | Matemática                                                                                        |        |                                 |
| Orientador (a):                                                                                                     | José Valdo Abreu Gonçalves                                                                        |        |                                 |
| E-mail:                                                                                                             | goncalves.jva@hotmail.com                                                                         |        |                                 |
| Co-orientador (a):*                                                                                                 |                                                                                                   |        |                                 |
| E-mail:                                                                                                             |                                                                                                   |        |                                 |

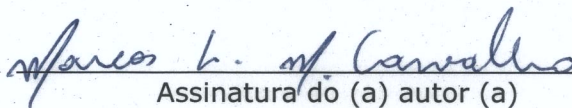
\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento    ☒ SIM      ☐ NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 03 / 10 / 2013

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

MARCOS LEANDRO MENDES CARVALHO

# **Equações Diferenciais Parciais Elípticas Multivalentes: Crescimento Crítico, Métodos Variacionais**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Área de concentração:** Análise - Equações Diferenciais Parciais.

**Orientador:** José Valdo Abreu Gonçalves

Goiânia  
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**GPT/BC/UFG**

C331e Carvalho, Marcos Leandro Mendes.  
Equações Diferenciais Parciais Elípticas Multivalentes  
[manuscrito] : Crescimento Crítico, Métodos Variacionais /  
Marcos Leandro Mendes Carvalho. - 2013.  
135 f.

Orientador: Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves.  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.  
Bibliografia.  
Apêndices.

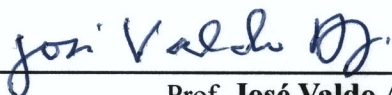
1. Minimização (Matemática). 2. Convexidade. 3. Orlicz  
– Espaços de. 4. Sobolev – Espaços de. I. Título.

CDU: 517.956.2

MARCOS LEANDRO MENDES CARVALHO

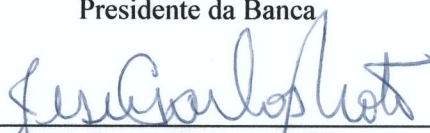
# **Equações Diferenciais Parciais Elípticas Multivalentes: Crescimento Crítico, Métodos Variacionais**

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 27 de setembro de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. José Valdo Abreu Gonçalves**  
Instituto de Matemática e Estatística – UFG  
Presidente da Banca



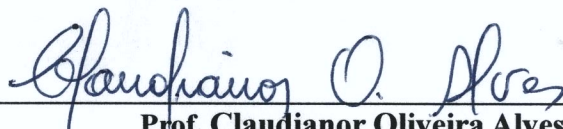
---

**Prof. Jesus Carlos da Mota**  
Instituto de Matemática e Estatística–UFG



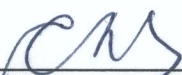
---

**Prof. Edcarlos Domingos da Silva**  
Instituto de Matemática e Estatística–UFG



---

**Prof. Claudianor Oliveira Alves**  
Universidade Federal de Campina Grande-UFCG



---

**Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos**  
Departamento de Matemática–Unb



Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Marcos Leandro Mendes Carvalho**

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi Bolsista de iniciação científica no departamento de Matemática da UFG. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista da CAPES e atuou na área de Sistemas Dinâmicos. Atualmente é professor no Instituto de Matemática da UFG e desenvolve pesquisa em Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

À minha avó Waldemira e ao meu pai Jeowal (in memorian), escolhas de Deus para minha origem, que eu reverencio, e que me deram a maior lição: do amor. Também ao Marquixo (in memorian), pelos exemplos de fé, persistência e desejo de viver.

---

## Agradecimentos

---

A Deus, meu criador, fonte de minha paz, meu guia, minhas verdadeiras forças. Que eu saiba Senhor sempre amar-Te e seguir-Te. Obrigado pelo teu filho Jesus, por Maria, pelo Teu plano para minha vida, enfim, por tudo.

Ao meu orientador Prof. José Valdo Abreu Gonçalves pela amizade, confiança, orientação, calma e conselhos que foram dados a mim em momentos fundamentais deste curso. Saiba que estes servirão para mim não somente agora mais sim por toda minha vida.

Aos professores e funcionários do IME/UFG pela apoio, confiança, seriedade, respeito e motivação.

A minha esposa Cláudia de Jesus Silva Carvalho pelo amor, apoio, compreensão, força e confiança, que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

A minha mãe Maria das Dores Mendes pelo amor e compreensão, que foram de grande importância no decorrer do curso e de minha vida.

Aos meus tios Telminton Rodrigues Sales e Jeomar Alves de Carvalho Sales pelo amor, amizade, compreensão e apoio desde o início da minha vida estudantil.

Aos demais membros da minha família e amigos que torceram e ajudaram na realização deste sonho.

A todos, obrigado por tudo, inclusive pela paciência em minhas ausências. Que a luz do Espírito Santo nos ilumine.

Nossos agradecimentos a CAPES/CNPq - Brasil pelo apoio financeiro.



Não digas no teu coração: a minha força e o vigor de meu braço adquiriram-me todos esses bens. Lembra-te de que é o Senhor, teu Deus, quem te dá a força para adquiri-los, a fim de confirmar, como o faz hoje, a aliança que jurou a teus pais.

**Bíblia Sagrada,**  
*Deuteronômio 8, 17–18.*

---

## Resumo

---

Carvalho, Marcos Leandro Mendes. **Equações Diferenciais Parciais Elípticas Multivalentes: Crescimento Crítico, Métodos Variacionais.** Goiânia, 2013. 135p. Tese de Doutorado . Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho desenvolvemos argumentos sobre a teoria de pontos críticos para funcionais Localmente Lipschitz em Espaços de Orlicz-Sobolev, juntamente com técnicas de convexidade, minimização e compacidade para investigar a existencia de solução da equação multivalente

$$-\Delta_{\Phi}u \in \partial j(.,u) + \lambda h \text{ em } \Omega,$$

onde  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  regular,  $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  é uma N-função apropriada,  $\Delta_{\Phi}$  é o correspondente  $\Phi$ -Laplaciano,  $\lambda > 0$  é um parâmetro,  $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  é uma função mensurável e  $\partial j(.,u)$  é o gradiente generalizado de Clarke da função  $u \mapsto j(x,u)$ , q.t.p.  $x \in \Omega$ , associada com o crescimento crítico. A regularidade de solução também será investigada.

### Palavras-chave

Minimização, convexidade, Espaços de Orlicz-Sobolev.

---

## Abstract

---

Carvalho, Marcos Leandro Mendes. **Multivalued Elliptic Partial Differential Equations: Critical Growth, Variational Methods**. Goiânia, 2013. 135p. PhD. Thesis . Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we develop arguments on the critical point theory for locally Lipschitz functionals on Orlicz-Sobolev spaces, along with convexity, minimization and compactness techniques to investigate existence of solution of the multivalued equation

$$-\Delta_{\Phi}u \in \partial j(.,u) + \lambda h \text{ in } \Omega,$$

where  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  is a bounded domain with boundary smooth  $\partial\Omega$ ,  $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  is a suitable N-function,  $\Delta_{\Phi}$  is the corresponding  $\Phi$ -Laplacian,  $\lambda > 0$  is a parameter,  $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  is a measurable and  $\partial j(.,u)$  is a Clarke's Generalized Gradient of a function  $u \mapsto j(x,u)$ , a.e.  $x \in \Omega$ , associated with critical growth. Regularity of the solutions is investigated, as well.

### Keywords

Minimization, convexity, Orlicz-Sobolev Spaces.

---

# Sumário

---

|     |                                                                                                                                                        |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | Introdução                                                                                                                                             | 11 |
| 2   | Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev: Uma Revisão                                                                                                        | 21 |
| 2.1 | N-função                                                                                                                                               | 21 |
| 2.2 | Espaços de Orlicz                                                                                                                                      | 23 |
| 2.3 | Espaços de Orlicz-Sobolev                                                                                                                              | 26 |
| 2.4 | Consequências das Hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$ .                                                                                                    | 28 |
| 2.5 | Consequências das Hipóteses $(\phi_1)' - (\phi_4)'$                                                                                                    | 35 |
| 3   | Funcionais Localmente Lipschitzianos:<br>Uma Revisão                                                                                                   | 41 |
| 3.1 | O Gradiente de Clarke                                                                                                                                  | 41 |
| 3.2 | Mais Sobre Cálculo Subdiferencial                                                                                                                      | 43 |
| 3.3 | O Teorema de Aubin-Clarke em Espaços de Orlicz                                                                                                         | 44 |
| 4   | O Problema de Dirichlet Para $\Delta_\Phi$ :<br>Resultados Básicos                                                                                     | 48 |
| 4.1 | Minimização do Funcional Energia de $(4 - 1)$                                                                                                          | 48 |
| 4.2 | Existência de Solução de $(4 - 1)$ via Minimização                                                                                                     | 50 |
| 4.3 | Existência de Solução de $(4 - 1)$ via Browder-Minty                                                                                                   | 52 |
| 4.4 | Unicidade de Solução de $(4 - 1)$                                                                                                                      | 59 |
| 4.5 | O Operador Solução Associado a $(4 - 1)$                                                                                                               | 60 |
| 4.6 | Regularidade da Solução de $(4 - 1)$                                                                                                                   | 66 |
| 5   | Equações Multivalentes em Domínios Limitados via Minimização em Espaços<br>de Orlicz-Sobolev:<br>Minimização Global                                    | 70 |
| 5.1 | Observações e Resultados Preliminares                                                                                                                  | 70 |
| 5.2 | Preliminares as Demonstrações dos Teoremas Principais                                                                                                  | 75 |
| 5.3 | Provas dos Teoremas 1.0.1 e 1.0.2.                                                                                                                     | 77 |
| 5.4 | Demonstrações dos Teoremas 1.0.3 e 1.0.4                                                                                                               | 83 |
| 6   | Problemas Quasilineares Multivalentes com Crescimento Crítico em um Domí-<br>nio Limitado: Princípio Variacional de Ekeland e Concentração-Compacidade | 86 |
| 6.1 | Estrutura Variacional Associada a $(1 - 26)$                                                                                                           | 87 |
| 6.2 | Limitação Local de $I$ : Sequência de Ekeland                                                                                                          | 89 |
| 6.3 | Algumas Propriedades da Sequência de Ekeland                                                                                                           | 91 |
| 6.4 | Convergência da Sequência de Ekeland em Compactos                                                                                                      | 93 |
| 6.5 | Demonstração do Teorema 1.0.5                                                                                                                          | 99 |

|     |                                                          |     |
|-----|----------------------------------------------------------|-----|
| 6.6 | Demonstração do Teorema 1.0.6                            | 105 |
| 6.7 | Demonstrações dos Teoremas 1.0.7, 1.0.8 e 1.0.9          | 115 |
| A   | Alguns Funcionais em Espaços de Orlicz-Sobolev           | 119 |
| B   | Medidas e Concentração-Compacidade                       | 123 |
| C   | Sobre Regularidade de Soluções de Equações Quasilineares | 130 |
|     | Referências Bibliográficas                               | 132 |

## Introdução

Neste trabalho estudamos existência e regularidade de soluções da equação quasilinear elíptica multivalente

$$-\Delta_{\Phi}u \in \partial j(x, u) + \lambda h(x, u) \text{ em } \Omega \quad (1-1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  regular,  $\Delta_{\Phi}$  é o operador  $\Phi$ -Laplaciano, isto é

$$\Delta_{\Phi}u = \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \phi(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

onde  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é uma função contínua e satisfaz:

$$(\phi_1) \quad (i) \lim_{s \rightarrow 0} s\phi(s) = 0, \quad (ii) \lim_{s \rightarrow \infty} s\phi(s) = \infty,$$

$$(\phi_2) \quad s \mapsto s\phi(s) \text{ é não-decrescente em } (0, \infty),$$

$\Phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é a função par dada por

$$\Phi(t) := \int_0^t s\phi(s)ds, \quad t \geq 0,$$

$j : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é uma função Carathéodory tal que a função  $t \mapsto j(x, t)$  é localmente Lipschitz q.t.p. em  $\Omega$ ,  $\lambda > 0$  é um parâmetro,  $h : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é uma função Carathéodory e  $\partial j(x, t)$  é a derivada generalizada de Clarke, isto é,

$$\partial j(x, t) := \{\mu \in \mathbf{R} \mid j^0(x, t; r) \geq \mu r, \quad r \in \mathbf{R}\}, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

onde  $j^0(x, t; r)$  denota a derivada direcional generalizada de  $s \mapsto j(x, s)$  em  $s$  na direção  $r$  dada por

$$j^0(x, t; r) := \limsup_{y \rightarrow t; \lambda \downarrow 0} \frac{j(x, y + \lambda r) - j(x, y)}{\lambda}.$$

Em nossa primeira classe de resultados, exploramos funcionais energia coercivos para obter solução da equação

$$-\Delta_{\Phi} u \in \partial j(\cdot, u) + h \text{ em } \Omega, \quad (1-2)$$

via minimização (cf. Capítulo 5). Na equação (1-2),  $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , é uma função mensurável (consideramos  $h(x, u) = h(x)$  em (1-1)), e  $j : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tem crescimento crítico (num sentido que definiremos abaixo), satisfazendo a seguinte condição adicional:

*existem números  $A \geq 0$ ,  $\ell > 0$  e uma função não negativa  $B \in L^1(\Omega)$  tais que*

$$j(x, s) \leq A|s|^{\ell} + B(x), \quad s \in \mathbf{R}, \quad a.e. \quad x \in \Omega. \quad (1-3)$$

Segue que a função

$$A_{\infty}(x) := \limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{j(x, s)}{|s|^{\ell}}$$

satisfaz

$$A_{\infty}(x) \leq A, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \quad (1-4)$$

Quando a função  $\phi$  satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_2)$ ,  $\Phi$  é uma N-função (cf. Capítulo 2). A função complementar de  $\Phi$  (que também é uma N-função) é definida por

$$\tilde{\Phi}(t) = \max_{s \geq 0} \{st - \Phi(s)\}. \quad (1-5)$$

Para introduzir a função crescimento crítico  $\Phi_*$  precisamos que  $\phi$  satisfaça

$$(\phi_3) \text{ existem } \ell, m \in (1, N) \text{ tais que } \ell \leq \frac{t^2 \phi(t)}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0.$$

A propósito,  $\Phi_*$  é definida como sendo a inversa de

$$t \in (0, \infty) \mapsto \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}} ds. \quad (1-6)$$

Estendemos  $\Phi_*$  a  $\mathbf{R}$  por  $\Phi_*(t) = \Phi_*(-t)$  para  $t \leq 0$ , e observemos que de acordo com a condição  $(\phi_3)$  a função  $\Phi_*$  é uma N-função (cf. Capítulo 2).

Devido a natureza do operador  $\Delta_{\Phi}$  utilizaremos espaços de Orlicz  $L_{\Phi}(\Omega)$  e de Orlicz-Sobolev  $W_0^{1, \Phi}(\Omega)$  (cf. Capítulo 2 para definições e propriedades) e graças a condição  $(\phi_3)$  ambos os espaços são reflexivos.

A propósito, a definição de solução fraca de (1-2) é:

**Definição 1.0.1** Dizemos que  $u \in W_0^{1, \Phi}(\Omega)$  é solução fraca de (1-2) se existe  $\rho = \rho_u \in$



$L_{\Phi_*}(\Omega)' = L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  tal que

$$\rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \quad (1-7)$$

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \rho v dx + \int_{\Omega} h v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \quad (1-8)$$

Nosso primeiro teorema, enunciado a seguir, é motivado por resultados de Mawhin, Ward e Willem (cf. [39, Teo. 1]) e Gonçalves (cf. [27, Teo. 1]).

**Teorema 1.0.1** *Seja  $\Phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Suponha que existam  $c_1, c_2 \geq 0$  e uma função não negativa  $b \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$  tal que*

$$|\eta| \leq c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 s) + b(x), \quad s \in \mathbf{R} \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \quad \eta \in \partial j(x, s). \quad (1-9)$$

Suponha também que  $j$  satisfaça (1-3) e

$$\inf_{v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \|v\|_{\Phi}=1} \left\{ \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx - \int_{\{v \neq 0\}} A_{\infty}(x) |v(x)|^{\ell} dx \right\} > 0. \quad (1-10)$$

Então para todo  $h \in L_{\Phi}(\Omega)'$ , o problema (1-2) possui pelo menos uma solução fraca em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ .

**Observação 1.0.1** 1. A condição (1-10) é motivada pelas condições (5) – (6) em Brézis e Oswald [11], e condição (5) em Gonçalves [27].

2. Se  $1 < p < N$  e  $\phi(t) = pt^{p-2}$ , então

$$\Phi(t) = t^p.$$

Assim

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}} ds = \int_0^t s^{1/p-1/N-1} ds = \frac{1}{p^*} t^{1/p^*}, \quad t > 0$$

obtendo  $\Phi_*(t) = (p^*)^p t^p$ , onde  $p^* = \frac{Np}{N-p}$ . A função  $\Phi_*$  desempenha o papel do expoente crítico de Sobolev no caso de espaços de Sobolev.

3. Quando  $1 < p < N$  e  $\phi(t) = pt^{p-2}$  temos que

- (i)  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$  e na condição  $(\phi_3)$  temos  $\ell = m = p$ ;
- (ii) supondo que  $s \mapsto j(x, s)$  é diferenciável e  $f(x, s) := \frac{\partial j(x, s)}{\partial s}$  q.t.p.  $x \in \Omega$ , a equação (1-2) e as condições (1-9) e (1-10) tornam-se respectivamente

$$-\Delta_p u = f(x, u) + h, \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \quad (1-11)$$

$$|f(x, s)| \leq a|s|^{p^*-1} + b(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, s \in \mathbf{R}, \quad (1-12)$$

e

$$\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_p=1} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \int_{\{v \neq 0\}} A_{\infty}(x) |v(x)|^p dx \right\} > 0; \quad (1-13)$$

(iii) O problema (1-11) sob as condições (1-3), onde  $\ell = m = p = 2$ , (1-12) e (1-13) foi resolvido por Gonçalves (cf. [27]).

4. Para outros comentários e observações confira Capítulo 5.

Nosso segundo teorema, enunciado abaixo, trata sobre regularidade de solução fraca da equação (1-2) obtida no Teorema 1.0.1.

Neste sentido, sejam  $a > 0$  e  $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função satisfazendo:

$$\begin{aligned} f(x, \cdot) &\in \mathbf{C}(\mathbf{R} - \{a\}), \\ f(x, a-0) &< f(x, a+0), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1-14)$$

onde

$$f(x, t-0) := \lim_{\delta \rightarrow t^-} f(x, \delta) \text{ e } f(x, t+0) := \lim_{\delta \rightarrow t^+} f(x, \delta).$$

Defina

$$j(x, s) := \int_0^s f(x, t) dt.$$

Se  $u$  é solução de (1-2), dada pelo Teorema 1.0.1, considere o conjunto de nível

$$\Gamma_a(u) = \{x \in \Omega \mid u(x) = a\}. \quad (1-15)$$

**Teorema 1.0.2** Sejam  $\Phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$  e  $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função não decrescente na segunda variável satisfazendo (1-3), (1-10), (1-14) e

$$|f(x, s)| \leq c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 s) + b(x), \quad (1-16)$$

onde  $c_1, c_2 > 0$  e  $b \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$ . Então (1-2) admite solução satisfazendo

$$\begin{aligned} |\Gamma_a(u)| &= 0, \\ -\Delta_{\Phi} u(x) &= f(x, u) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (1-17)$$

**Observação 1.0.2** Uma explicação para a equação (1-17) é da no Capítulo 5.

Nosso próximo resultado é uma aplicação do Teorema 1.0.1 no caso em que o operador  $\Delta_\Phi$  da equação (1–2) é dado por:

$$\Delta_{\Phi_\gamma} u = \operatorname{div} \left( \gamma \frac{(\sqrt{1+|\nabla u|^2} - 1)^{\gamma-1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \nabla u \right), \quad (1-18)$$

onde  $1 < \gamma < \infty$ . Neste caso a correspondente função  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é dada por

$$\phi_\gamma(t) = \gamma \frac{(\sqrt{1+t^2} - 1)^{\gamma-1}}{\sqrt{1+t^2}} \quad t \geq 0.$$

**Observação 1.0.3** O operador  $\Delta_{\Phi_\gamma}$ , com  $\gamma > 1$ , aparece em problemas de elasticidade (cf. Fukagai & Narukawa [24]). Por outro lado, o caso  $\gamma = 1$  é tratado por Dacoronha [17, Teo. 5.28].

Nosso terceiro resultado é:

**Teorema 1.0.3** Suponha que  $1 < \gamma < \frac{N}{2}$ , que

$$|\eta| \leq \hat{a}|s|^{\gamma^*-1} + b(x), \quad s \in \mathbf{R} \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \quad \eta \in \partial j(x, t), \quad (1-19)$$

onde  $\hat{a} \geq 0$  é uma constante,  $b \in L^{\gamma^*}(\Omega)$  é não negativa,  $\gamma^* = N\gamma/(N-\gamma)$ , e

$$j(x, s) \leq A|s|^\gamma + B(x), \quad s \in \mathbf{R} \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \quad (1-20)$$

para alguma constante  $A \geq 0$  e alguma função não negativa  $B \in L^1(\Omega)$ . Se além disso,

$$\inf_{v \in W_0^{1,\gamma}, |v|_{L^\gamma}=1} \left\{ \int_\Omega \left( \sqrt{1+|\nabla v|^2} - 1 \right)^\gamma dx - \int_{\{v \neq 0\}} A_\infty(x) |v(x)|^\gamma dx \right\} > 0, \quad (1-21)$$

então para cada  $h \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$  existe  $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$  satisfazendo

$$-\Delta_{\Phi_\gamma} \in \partial j(., u) + h \text{ em } \Omega, \quad (1-22)$$

no sentido fraco.

Para formular nosso quarto resultado vamos supor a seguinte condição de crescimento

$$|f(x, s)| \leq \hat{a}|s|^{\gamma^*-1} + b(x), \quad t \in \mathbf{R}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \quad (1-23)$$

onde  $\hat{a} \geq 0$  é uma constante,  $b \in L^{\gamma^*}$  é não negativa,  $\gamma^* = N\gamma/(N-\gamma)$ .

Observamos que a Condição (1–23) é um caso particular de (1–16).

**Teorema 1.0.4** *Suponha  $1 < \gamma < \frac{N}{2}$ . Suponha também (1–14), (1–20), (1–21) e (1–23). Então, para cada  $h \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$ , o problema (1–22) admite uma solução fraca  $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$  satisfazendo (1–17).*

**Observação 1.0.4** *Sejam  $a > 0$  e  $h \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$ ,  $h \geq 0$  e  $h \not\equiv 0$ . Considere o problema de fronteira livre em  $\Omega$ :*

$$\begin{aligned} -\Delta_{\Phi} u &= 1 + h & \text{se } u > a; \\ -\Delta_{\Phi} u &= h & \text{se } u \leq a. \end{aligned} \quad (1-24)$$

O problema (1–24) pode ser escrito como

$$-\Delta_{\Phi} u = \chi_{u>a} + h \text{ q.t.p. em } \Omega. \quad (1-25)$$

No Capítulo 5 mostraremos o seguinte resultado:

**Proposição 1.0.1** *A equação (1–25) admite uma solução fraca  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ .*

Os resultados acima serão demonstrados no Capítulo 5.

Em nossa segunda classe de resultados, exploramos a limitação local de funcionais energia para obter solução da equação

$$-\Delta_{\Phi} u \in \partial j(\cdot, u) + \lambda h \text{ in } \Omega, \quad (1-26)$$

via princípio variacional de Ekeland (cf. Capítulo 6). Na equação (1–26),  $\lambda > 0$  é um parâmetro,  $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  é uma função mensurável e  $j : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é dada por

$$j(x, t) = \sigma(x)[\Phi_*(t) - \Phi_*(a)] \chi_{\{t>a\}}(t), \quad (1-27)$$

onde  $\sigma \in L^{\infty}(\Omega)$ ,  $\sigma > 0$ , e  $a > 0$  é um número. A propósito, o funcional energia associado a equação (1–26) é dado por

$$I(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \int_{\Omega} j(x, u) dx - \lambda \int_{\Omega} h u dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \quad (1-28)$$

Uma solução da equação (1–26) é entendida no seguinte sentido:

**Definição 1.0.2** *Seja  $h \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$ . Uma função  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  é uma solução do problema (1–26) se existe um elemento  $\rho := \rho_u \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$  tal que*

$$\rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \quad (1-29)$$

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \rho v dx + \lambda \int_{\Omega} h v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \quad (1-30)$$

A seguir, enunciamos os principais resultados do Capítulo 6.

Esses resultados, bem como as técnicas de demonstração, são motivados por Alves & Gonçalves [5], Alves, Bertone & Gonçalves [4], Alves & Bertone [3], Santos [45], Alves, Gonçalves & Santos [7] e Alves, Gonçalves & Santos [6].

**Teorema 1.0.5** *Seja  $a > 0$  e suponha que  $\ell^* > m$ . Suponha também que  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é contínua e satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Seja  $h \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$  não negativa e não nula. Então existe  $\lambda_* > 0$  tal que para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  o problema (1–26) possui pelo menos uma solução não-negativa, digamos  $u = u_\lambda \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Além disso,*

$$-\Delta_\Phi u = \rho + \lambda h \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (1-31)$$

**Observação 1.0.5** *No Teorema acima  $\ell^* = \frac{N\ell}{N-\ell}$ . Além disso,  $\rho$  que aparece em (1–31) é o  $\rho$  que aparece na Definição 1.0.2.*

Antes de enunciarmos nosso próximo resultado, introduziremos algumas notações.

Em primeiro lugar, lembramos que (cf. [23, 43])

$$\Phi_*(t) = \int_0^t \phi_*(s) ds,$$

onde  $\phi_* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  satisfaz

$$\begin{aligned} (\phi_*)_1 \quad & \phi_*(0) = 0, \phi_*(s) > 0 \text{ for } s > 0, \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_*(s) = \infty, \\ (\phi_*)_2 \quad & \phi_* \text{ é contínua, não-decrescente,} \\ (\phi_*)_3 \quad & \ell^* \leq \frac{t\phi_*(t)}{\Phi_*(t)} \leq m^* \text{ for } t > 0, \end{aligned}$$

onde  $p^* := Np/(N-p)$  para  $p \in (1, N)$ .

Observamos que a função  $j(x, t)$  se escreve da seguinte forma

$$j(x, t) = \int_0^t \sigma(x) \chi_{\{\tau > a\}}(\tau) \phi_*(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1-32)$$

As condições adicionais abaixo são necessárias para formular o nosso próximo resultado que trata sobre regularidade da solução obtida no teorema anterior:

$$\begin{aligned} (\phi_1)' \quad & \phi \in C^1(0, \infty) \text{ uma função não-negativa e monótona;} \\ (\phi_2)' \quad & \text{Se } \phi \text{ é não-decrescente, então } \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty. \\ (\phi_3)' \quad & 0 < a_1 := \inf_{s>0} \frac{(\phi(s)s)'}{\phi(s)} \leq \frac{(\phi(t)t)'}{\phi(t)} \leq \sup_{s>0} \frac{(\phi(s)s)'}{\phi(s)} =: a_2 < N-1, \quad t > 0; \\ (\phi_4)' \quad & (\phi_*(t)t)' \text{ é não-decrescente para } t \geq 0, \text{ ou em outros termos } \phi_*(t)t \text{ é convexa.} \end{aligned}$$

**Observação 1.0.6** Mostraremos no Seção 6.6 que as condições  $(\phi_1)'$  e  $(\phi_3)'$  implicam  $(\phi_1) - (\phi_3)$ .

**Teorema 1.0.6** Sejam  $a > 0$ . Suponha que  $\ell^* > m$ ,  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  satisfaça  $(\phi_1)' - (\phi_4)'$  e  $h \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$  é não negativa e não nula. Então existe  $\lambda_* > 0$  tal que para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  a solução  $u \in W_0^{1, \Phi}(\Omega)$  obtida no pelo Teorema 1.0.5 satisfaz:

- (i)  $I(u) < 0$ ;
- (ii)  $|\Gamma_a(u)| = 0$ ;
- (iii)  $|\{x \in \Omega \mid u(x) > a\}| > 0$ ;

Além disso,

$$-\Delta_{\Phi} u = \sigma \phi_*(u) \chi_{\{u > a\}} + \lambda h \text{ q.t.p. em } \Omega. \quad (1-33)$$

**Observação 1.0.7** Uma consequência do Teorema 1.0.6, item (iii), é que a solução  $u \in W_0^{1, \Phi}(\Omega)$  do problema (1 – 26) não é solução do problema

$$-\Delta_{\Phi} u = h \text{ em } \Omega.$$

**Observação 1.0.8** Sejam  $a > 0$  e  $h \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$ ,  $h \geq 0$  e  $h \not\equiv 0$ . Considere o problema de fronteira livre:

$$\begin{aligned} -\Delta_{\Phi} u &= \lambda h && \text{em } \{u < a\} \\ -\Delta_{\Phi} u &= \phi_*(u) + \lambda h && \text{em } \{u > a\} \\ u &= 0 && \text{em } \partial\{u < a\} \\ u &\geq 0 && \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (1-34)$$

O problema (1 – 34) pode ser escrito na forma (1 – 33).

Ainda no Capítulo 6 examinamos vários exemplos de funções  $\phi$  em que o correspondente operador  $\Delta_{\Phi}$  aparece em aplicações.

Em primeiro lugar considere a função

$$\phi(t) = 2\gamma(1+t^2)^{\gamma-1}, \quad t > 0, \quad (1-35)$$

onde  $\gamma \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right)$ . Neste caso,  $\Delta_{\Phi}$  aparece em problemas de elasticidade não linear, (cf. [25] e suas referências).

Mostraremos no Capítulo 6 que a função expoente crítico de  $\Phi$  é  $\Phi_*(t) = t^{(2\gamma)^*}$ , onde  $(2\gamma)^* = \frac{2\gamma N}{N-2\gamma}$ .

Neste caso,

$$j(x, t) = \sigma(x) [t^{(2\gamma)^*} - a^{(2\gamma)^*}] \chi_{\{t > a\}}(t). \quad (1-36)$$

O resultado abaixo é baseado no Teorema 1.0.5 e inclui argumentos adicionais de regularidade.

**Teorema 1.0.7** *Suponha que  $N \geq 4$  e  $1 < \gamma < \frac{N}{N-2}$ . Sejam  $a > 0$  e  $h \in L^{(2\gamma)^*}(\Omega)'$  é não negativa e não nula. Então existe  $\lambda_* > 0$  tal que para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  a equação (1–26), onde  $\phi$  é dada por (1–35), admite pelo menos uma solução não negativa  $u = u_\lambda \in W_0^{1,2\gamma}(\Omega) - \{0\}$ .*

**Observação 1.0.9** *O operador  $\Delta_\Phi$ , onde  $\phi$  é definida em (1–35), aparece em problemas de elasticidade não linear (cf. [25]).*

Em segundo lugar considere a função

$$\phi(t) = \frac{pt^{p-2}(1+t)\ln(1+t) + t^{p-1}}{1+t}, \quad t > 0, \quad (1-37)$$

onde  $1 < \frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2} < p < N-1$ ,  $N \geq 3$ . Neste caso,  $\Delta_\Phi$  aparece em problemas de plasticidade, (cf. [25] e suas referências).

O resultado abaixo é baseado no Teorema 1.0.5.

**Teorema 1.0.8** *Suponha que  $N \geq 3$  e  $\frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2} < p < N-1$ . Sejam  $a > 0$  e  $h \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$  é não negativa e não nula. Então existe  $\lambda_* > 0$  tal que para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , a equação (1–26), onde  $\phi$  é definida por (1–37), possui pelo menos uma solução não negativa e não nula.*

**Observação 1.0.10** *O operador  $\Delta_\Phi$ , onde  $\phi$  é definida em (1–37), aparece em problemas de plasticidade (cf. [25]).*

**Observação 1.0.11** *Diferentemente do Teorema 1.0.7, o espaço de Orlicz-Sobolev  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  considerado no Teorema 1.0.8 não coincide com nenhum espaço de Sobolev. Provaremos isto na Observação 6.7.1.*

Por fim, considere a função

$$\phi(t) = p_0 t^{p_0-2} + p_1 t^{p_1-2}, \quad t \geq 0, \quad (1-38)$$

onde  $2 < p_0 < p_1 < N$  e  $p_1 \in (p_0, p_0^*)$ .

Mostraremos no Capítulo 6 que a função expoente crítico de  $\Phi$ , onde  $\phi$  é definida por (1–38), é  $\Phi_*(t) = \frac{t^{p_1^*}}{p_1^*}$ , onde  $p_1^* = \frac{p_1 N}{N-p_1}$ .

Neste caso

$$j(x, t) := \frac{\sigma(x)}{p_1^*} [t^{p_1^*} - a^{p_1^*}] \chi_{\{t>a\}}(t). \quad (1-39)$$

O teorema a seguir é uma aplicação do Teorema 1.0.6.

**Teorema 1.0.9** *Suponha que  $2 < p_0 < p_1 < N$  e  $p_1 \in (p_0, p_0^*)$ . Sejam  $a > 0$  e  $h \in L^{p_1^*}(\Omega)'$  é não negativa e não nula. Então existe  $\lambda_* > 0$  tal que para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , a equação (1–26), onde  $\phi$  é definida por (1–38), possui pelo menos uma solução  $u_0 \in W_0^{1,p_1}(\Omega) - \{0\}$  não negativa satisfazendo*

$$-\Delta_{\Phi} u = \sigma u^{p_1^*-1} \chi_{u>a} + \lambda h \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

**Observação 1.0.12** *O operador  $\Delta_{\Phi}$ , onde  $\phi$  é definida em (1–38), aparece em problemas de Biofísica e Física de Plasmas (cf. [30]).*

No Capítulo 2 introduzimos notações e resultados básicos sobre Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev.

No Capítulo 3 apresentamos notações, observações sobre funcionais Localmente Lipschitzianos, Gradiente Generalizado de Clarke e pontos críticos de funcionais  $Lip_{loc}$ .

No Capítulo 4 estudamos o problema

$$-\Delta_{\Phi} u = h \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

incluindo existência, regularidade e unicidade de solução, estudo do operador solução e propriedades de monotonicidade.

Finalmente, reunimos em um apêndice vários resultados técnicos a que nos referimos ao longo deste trabalho.



## Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev: Uma Revisão

Neste capítulo revisaremos conceitos básicos sobre espaços de Orlicz e apresentaremos referências específicas para cada resultado e observação. Como referências básicas citamos [1, 31, 32, 43, 44].

### 2.1 N-função

**Definição 2.1.1** Dizemos que  $\Phi$  é uma N-função (ou função Young) se

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds, \quad t \geq 0,$$

onde  $\varphi : [0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

1.  $\varphi(0) = 0$ ;
2.  $\varphi(s) > 0$  para  $s > 0$ ;
3.  $\varphi$  é contínua à direita em qualquer ponto  $s \geq 0$ ;
4.  $\varphi$  é não decrescente em  $]0, \infty[$ ;
5.  $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = \infty$ .

**Observação 2.1.1** Estendemos  $\Phi$  a  $\mathbf{R}$  fazendo  $\Phi(-t) = \Phi(t)$ ,  $t \geq 0$ , isto é,  $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é par.

**Exemplo 2.1.1** Incluímos a seguir alguns exemplos de N-funções:

1.  $\Phi_1(t) = |t|^p$ , onde  $p \in (1, +\infty)$  e  $t \in \mathbf{R}$ ;
2.  $\Phi_2(t) = (\sqrt{1+t^2} - 1)^\gamma$ , onde  $\gamma \in (1, +\infty)$  e  $t \in \mathbf{R}$ ;
3.  $\Phi_3(t) = t^p \ln(1 + |t|)$ , onde  $p \in (0, +\infty)$  e  $t \in \mathbf{R}$ .

**Definição 2.1.2** (Função complementar de  $\Phi$ ) Seja  $\Phi$  uma N-função. A função definida por

$$\tilde{\Phi}(t) = \max_{s \geq 0} \{st - \Phi(s)\}$$

é chamada a função complementar de  $\Phi$ .

**Observação 2.1.2** (cf. [32])  $\tilde{\Phi}$  é uma N-função.

Apresentaremos no lema a seguir várias propriedades de N-funções.

**Lema 2.1.1** (cf. [1, 23, 32]) Uma N-função  $\Phi$  é contínua, não negativa, estritamente crescente e convexa em  $[0, \infty)$ . Além disso, vale:

1.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$ ;
2. a função  $t \mapsto \frac{\Phi(t)}{t}$  é crescente em  $(0, +\infty)$ ;
3.  $\Phi(\alpha t) \leq \alpha \Phi(t)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  e  $t \geq 0$ ;
4.  $\Phi(\beta t) \geq \beta \Phi(t)$ ,  $\beta > 1$  e  $t \geq 0$ ;
5. (Desigualdade de Young) Dados  $s, t \in \mathbf{R}$ , então

$$st \leq \Phi(s) + \tilde{\Phi}(t),$$

a igualdade vale se, e somente se,  $s = \tilde{\Phi}(t)$  ou  $t = \Phi(s)$ , onde  $\Phi$  e  $\tilde{\Phi}$  satisfazem

$$\Phi(s) = \int_0^s \varphi(r) dr \text{ e } \tilde{\Phi}(t) = \int_0^t \tilde{\varphi}(r) dr.$$

6. Se  $\varphi$  é contínua e crescente, então

$$\tilde{\Phi}(t) = \int_0^t \varphi^{-1}(s) ds;$$

7.  $\tilde{\Phi}(\varphi(t)) \leq \Phi(2t)$ , para  $t \geq 0$ ;
8.  $\tilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(t)}{t}\right) \leq \Phi(t)$ , para  $t > 0$ .

**Definição 2.1.3** Seja  $\Phi$  uma N-função. Dizemos que  $\Phi$  satisfaz a condição  $\Delta_2$  ( $\Phi \in \Delta_2$ ), se existe  $K > 0$  tal que

$$\Phi(2t) \leq K\Phi(t), \quad t \geq 0.$$

Dizemos que  $\Phi$  satisfaz a condição  $\Delta_2$  no infinito ( $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ ), se existem  $T \geq 0$  e  $K > 0$  tais que

$$\Phi(2t) \leq K\Phi(t), \quad t \geq T.$$

**Observação 2.1.3** (cf. [1]) Uma N-função  $\Phi$  satisfaz a condição  $\Delta_2$  no infinito se, e somente se, existe  $t_0 \geq 0$  tal que

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} \leq m, \quad t \geq t_0,$$

para alguma constante  $m > 1$ . No caso em que  $\Phi \in \Delta_2$  teremos que  $t_0 = 0$ .

Todas as N-funções do exemplo 2.1.1 satisfazem a condição  $\Delta_2$ . Já a N-função

$$\Phi_4(t) = [e^t - t - 1] \notin \Delta_2.$$

De fato,

$$\frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} = \frac{te^t - t}{e^t - t - 1} = t + \frac{t^2}{e^t - t - 1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty,$$

e pela Observação 2.1.3  $\Phi_4 \notin \Delta_2$ .

## 2.2 Espaços de Orlicz

**Definição 2.2.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  um domínio e  $\Phi$  uma N-função. O espaço de Orlicz é definido por*

$$L_\Phi(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ mensurável} \mid \int_\Omega \Phi(\alpha u) dx < \infty, \text{ para algum } \alpha > 0 \right\}.$$

**Observação 2.2.1** (cf. [32, 43])

(i) A expressão

$$\|u\|_\Phi := \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \int_\Omega \Phi \left( \frac{|u(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\},$$

define uma norma em  $L_\Phi(\Omega)$ , chamada norma de Luxemburg;

(ii)  $(L_\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$  é um espaço de Banach;

(iii) (Desigualdade Integral de Young) Dados  $u \in L_\Phi(\Omega)$ ,  $v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ , então

$$uv \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_\Omega uv dx \leq \int_\Omega \Phi(u) dx + \int_\Omega \tilde{\Phi}(v) dx.$$

**Lema 2.2.1** (cf. [1, 32]) *Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  um domínio limitado e  $\Phi$  uma N-função tal que  $\Phi \in \Delta_2$ . Então:*

1.  $L_\Phi(\Omega)$  é separável;
2.  $L_\Phi(\Omega) = \overline{\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_\Phi}$ ;
3.  $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega) = L_\Phi(\Omega)'$  e  $L_\Phi(\Omega) = L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)'$ ;
4.  $L_\Phi(\Omega)$  é reflexivo se, e somente se,  $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$ ;
5. (Teorema da Representação de Riesz) Seja  $F \in L_\Phi(\Omega)'$ , então existe um único  $v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$  tal que

$$F(u) = \int_\Omega uv dx, \quad u \in L_\Phi(\Omega).$$

**Teorema 2.2.1 (Desigualdade de Hölder)** (cf. [1]) *Dados  $u \in L_\Phi(\Omega)$ ,  $v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ , então*

$$\int_\Omega uv dx \leq 2\|u\|_\Phi \|v\|_{\tilde{\Phi}}.$$

**Observação 2.2.2** (cf. [43]) Se  $\Phi(1) + \tilde{\Phi}(1) = 1$ , então

$$\int_{\Omega} uv dx \leq \|u\|_{\Phi} \|v\|_{\tilde{\Phi}}.$$

Formularemos abaixo um resultado técnico que será útil em aplicações envolvendo o Teorema de Lebesgue, no contexto de Espaços de Orlicz.

**Lema 2.2.2** *Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  um domínio limitado,  $\Phi$  uma  $N$ -função satisfazendo  $\Delta_2$  e  $(u_n) \subseteq L_{\Phi}(\Omega)$  uma sequência tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $L_{\Phi}(\Omega)$ . Então existem uma subsequência  $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$  e  $h \in L_{\Phi}(\Omega)$  tais que*

1.  $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$ ;
2.  $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$ .

**Demonstração:** Como  $|\Omega| < \infty$ , segue por [1] que  $L_{\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ . Assim, considerando uma subsequência se necessário, temos que

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Além disso, como  $u_n \rightarrow u$  em  $L_{\Phi}(\Omega)$ , temos

$$\int_{\Omega} \Phi(u_n - u) dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

donde

$$\Phi(u_n - u) dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

em  $L^1(\Omega)$ . Assim, existe  $\tilde{h} \in L^1(\Omega)$  tal que

$$\Phi(u_n(x) - u(x)) \leq \tilde{h}(x), \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Como  $\Phi$  é convexa, crescente e satisfaz a condição  $\Delta_2$ , temos

$$\begin{aligned} \Phi(|u_n|) &\leq K\Phi\left(\frac{|u_n - u| + |u|}{2}\right) \\ &\leq \frac{K}{2} [\Phi(|u_n - u|) + \Phi(|u|)] \\ &\leq \frac{K}{2} [\tilde{h} + \Phi(|u|)], \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \end{aligned}$$

donde

$$|u_n| \leq \Phi^{-1}\left(\frac{K}{2}(\tilde{h} + \Phi(|u|))\right)$$

Defina  $h = \Phi^{-1} \left( \frac{K}{2} (\tilde{h} + \Phi(|u|)) \right)$  e note que  $h \in L_\Phi(\Omega)$ . De fato,  $\tilde{h} \in L^1(\Omega)$ ,  $\Phi(|u|) \in L^1(\Omega)$  e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(h) dx &= \int_{\Omega} \Phi \left( \Phi^{-1} \left( \frac{K}{2} (\tilde{h} + \Phi(|u|)) \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{K}{2} (\tilde{h} + \Phi(|u|)) \right) dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

Agora, basta aplicar o Teorema de Lebesgue. ■

Enunciaremos a seguir uma variante, para o caso de Espaços de Orlicz, do Lema de Brézis-Lieb (cf. [9]) que será bastante utilizado no Capítulos 6.

**Lema 2.2.3 (Brézis-Lieb)** *Sejam  $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma  $N$ -função,  $(u_n) \subseteq L_\Phi(\Omega)$  e  $u \in L_\Phi(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  q.t.p. em  $\Omega$ . Então*

$$\int_{\Omega} |\Phi(u_n) - \Phi(u_n - u) - \Phi(u)| dx \rightarrow 0.$$

**Lema 2.2.4** (cf. [29]) *Sejam  $\Phi$  uma  $N$ -função tal que  $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$  e  $(u_n) \subseteq L_\Phi(\Omega)$  limitada. Suponha que  $u_n \rightarrow u$  q.t.p. em  $\Omega$ . Então  $u \in L_\Phi(\Omega)$  e  $u_n \rightharpoonup u$ .*

**Definição 2.2.2** *Uma sequência  $(u_n) \subseteq L_\Phi(\Omega)$  converge em média para  $u \in L_\Phi(\Omega)$  se*

$$\int_{\Omega} \Phi(|u_n - u|) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2-1)$$

**Observação 2.2.3** (cf. [32])

- (i) *Se  $(u_n) \subseteq L_\Phi(\Omega)$  converge para  $u$  em  $L_\Phi(\Omega)$ , então  $(u_n)$  converge em média para  $u$ .*
- (ii) *Se  $\Phi \in \Delta_2$ , então as duas convergências, referidas em (i), são equivalentes.*

**Definição 2.2.3** *Sejam  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$   $N$ -funções. Se existem duas constantes positivas  $c$  e  $T$  tais que*

$$\Phi_1(t) \leq \Phi_2(ct), \quad t \geq T$$

*denotaremos por*

$$\Phi_1 \prec \Phi_2.$$

*Dizemos que  $\Phi_1$  é equivalente a  $\Phi_2$  se*

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \text{ e } \Phi_2 \prec \Phi_1.$$

**Teorema 2.2.2** (cf. [32]) *Sejam  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  N-funções. Então*

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_2}(\Omega)$$

*se, e somente se,  $\Phi_2 \prec \Phi_1$ .*

**Definição 2.2.4** *Sejam  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  N-funções. Dizemos que  $\Phi_1$  cresce essencialmente mais lentamente que  $\Phi_2$ , denotamos  $\Phi_1 \prec\prec \Phi_2$ , se para qualquer  $k > 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(kt)} = 0.$$

**Lema 2.2.5** (cf. [1]) *Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  um conjunto limitado e  $\Phi_1, \Phi_2$  N-funções tais que  $\Phi_1 \in \Delta_2$  e  $\Phi_1$  cresce essencialmente mais lentamente que  $\Phi_2$ . Então*

$$L_{\Phi_2}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_1}(\Omega).$$

## 2.3 Espaços de Orlicz-Sobolev

Se  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  é um domínio e  $\Phi$  uma N-função,

$$W^{1,\Phi}(\Omega) := \{u \in L_{\Phi}(\Omega) \mid \partial_i u \in L_{\Phi}(\Omega), i = 1, \dots, N\}$$

é chamado espaço de Orlicz-Sobolev.

**Observação 2.3.1** (cf. [1]) *A expressão*

$$\|u\|_{1,\Phi} := \|u\|_{\Phi} + \sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{\Phi}$$

*define uma norma em  $W^{1,\Phi}(\Omega)$  e  $(W^{1,\Phi}(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Phi})$  é um espaço de Banach.*

**Observação 2.3.2** (cf. [8, 29]) *Se  $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$ , então*

**a)** *O espaço  $W^{1,\Phi}(\Omega)$  é homeomorfo ao conjunto*

$$\{(w_0, w_1, \dots, w_N) \in \prod L_{\Phi}(\Omega) \mid w_i = \partial_i u \in L_{\Phi}(\Omega), i = 0, 1, \dots, N\},$$

*onde  $\partial_0 u := u$ ;*

**b)**  $W^{1,\Phi}(\Omega) \stackrel{fech}{\subseteq} \prod L_{\Phi}(\Omega);$

**c)**  $W^{1,\Phi}(\Omega)$  *é fechado na topologia fraca de  $\prod L_{\Phi}(\Omega)$ ;*

Definimos

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) := \overline{\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Phi}}.$$

**Observação 2.3.3** (cf. [29]) Se  $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$ , então

- a)  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  é o kernel do operador traço.  
b) (Desigualdade de Poincaré) Se  $d = |\Omega| < \infty$ , então

$$\int_{\Omega} \Phi(u) dx \leq \int_{\Omega} \Phi(2d|\nabla u|) dx \text{ e } \|u\|_{\Phi} \leq 2d\|\nabla u\|_{\Phi}.$$

- c) Usando a desigualdade de Poincaré,

$$\|u\| := \|\nabla u\|_{\Phi}$$

define uma norma em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  que é equivalente à norma  $\|\cdot\|_{1,\Phi}$ .

**Teorema 2.3.1** (cf. [1])

1.  $W^{1,\Phi}(\Omega)$  é separável se  $\Phi \in \Delta_2$ ;
2.  $W^{1,\Phi}(\Omega)$  é reflexivo se, e somente se,  $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$ ;
3. Dado  $L \in W^{1,\Phi}(\Omega)' := W^{-1,\tilde{\Phi}}(\Omega)$ , existem  $v_0, \dots, v_N \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$  tais que

$$L(u) = \int_{\Omega} uv_0 dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i dx, \quad u \in W^{1,\Phi}(\Omega);$$

4.  $W^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{\mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,\Phi}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Phi}};$
5. Se  $\Omega$  satisfaz propriedade do seguimento, então  $W^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{\mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,\Phi}}.$

Seja  $\Phi$  uma N-função e defina

$$g_{\Phi}(t) := \frac{\Phi^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}}, \quad t > 0. \quad (2-2)$$

**Observação 2.3.4** (cf. [32]) Dada uma N-função  $\Phi$  existe uma N-função  $\Phi_1$ , equivalente a  $\Phi$ , satisfazendo

$$\int_0^1 g_{\Phi_1}(t) dt < \infty. \quad (2-3)$$

**Definição 2.3.1** Seja  $\Phi$  uma N-função satisfazendo (2–3) e que

$$\int_1^\infty g_{\Phi}(t) dt = \infty. \quad (2-4)$$

A função  $\Phi_*$  definida como sendo a inversa da função

$$(\Phi_*)^{-1}(t) = \int_1^t g_{\Phi}(s) ds$$

é chamada a conjugada de Sobolev de  $\Phi$ .

**Teorema 2.3.2** (cf. [32]) Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  um domínio limitado regular e  $\Phi$  satisfazendo (2-3). Então

1. se  $\Psi \prec\prec \Phi_*$  e (2-4) vale, tem-se

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{cont} L_{\Phi_*}(\Omega) \text{ e } W^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{comp} L_{\Psi}(\Omega),$$

2. Se (2-4) não vale, tem-se

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{comp} \mathbf{C}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega);$$

**Corolário 2.3.1** (cf. [26]) Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  um domínio limitado regular e  $\Phi$  satisfazendo (2-3) e (2-4). Então

$$W_0^{1,\Phi} \xrightarrow{comp} L_{\Phi}(\Omega).$$

**Demonstração:** Afirmamos que  $\Phi \prec\prec \Phi_*$ . Com efeito, conforme [1, pg. 265] isto equivale a mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(t)} = 0.$$

Por outro lado, para  $t \geq t_0$

$$\Phi_*^{-1}(t) = \Phi_*^{-1}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+1/N}} ds$$

assim, integrando por partes e dividindo por  $\Phi^{-1}(t)$ , encontramos

$$\frac{\Phi_*^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(t)} = \frac{\Phi^{-1}(t_0)}{\Phi^{-1}(t)} - N t^{-1/N} + \frac{N}{\Phi^{-1}(t)} \int_{t_0}^t (\Phi^{-1})'(s) s^{-1/N} ds.$$

Usando a regra de L'Hospital deduzimos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\Phi^{-1})'(t) t^{-1/N}}{(\Phi^{-1})'(t)} = 0,$$

mostrando a afirmação. A conclusão do Corolário segue do Teorema 2.3.2. ■

## 2.4 Consequências das Hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$ .

Seja  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  uma função contínua satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Estenda a função  $s \mapsto s\phi(s)$  a  $\mathbf{R}$  como ímpar e defina  $\Phi$  por

$$\Phi(t) := \int_0^t s\phi(s) ds, \quad t \in \mathbf{R}.$$



Afirmamos que  $\Phi$  é uma N-função. Com efeito, defina

$$\varphi(t) = \begin{cases} t\phi(t) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

Claramente  $\varphi(t) > 0$  para  $t > 0$ , por  $(\phi_1)$  concluímos que  $\varphi$  é contínua em  $[0, +\infty)$ , que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$  e por  $(\phi_2)$  é não-decrescente em  $(0, +\infty)$ .

**Lema 2.4.1** (cf. [25]) *Seja  $\phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Defina  $\zeta_0(t) = \min\{t^\ell, t^m\}$  e  $\zeta_1(t) = \max\{t^\ell, t^m\}$ ,  $t \geq 0$ , Então*

$$\zeta_0(\rho)\Phi(t) \leq \Phi(\rho t) \leq \zeta_1(\rho)\Phi(t), \quad \rho, t > 0 \text{ e} \quad (2-5)$$

$$\zeta_0(\|u\|_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(u) dx \leq \zeta_1(\|u\|_\Phi), \quad \text{para } u \in L_\Phi(\Omega). \quad (2-6)$$

**Demonstração:** Dado  $\rho > 0$ , considere os seguintes casos:

**Caso 1:**  $s \geq 1$

Como

$$\frac{d}{ds}(\ln \Phi(\rho s)) = \frac{\phi(\rho s)\rho s^2}{\Phi(\rho s)}.$$

De  $(\phi_3)$

$$\frac{\ell}{s} \leq \frac{d}{ds}(\ln \Phi(\rho s)) \leq \frac{m}{s},$$

donde

$$\ell \int_1^t \frac{ds}{s} \leq \int_1^t \frac{d}{ds}(\ln \Phi(\rho s)) ds \leq m \int_1^t \frac{ds}{s},$$

assim

$$t^\ell \leq \frac{\Phi(\rho t)}{\Phi(\rho)} \leq t^m, \quad t \geq 1,$$

e portanto

$$\Phi(\rho)t^\ell \leq \Phi(\rho t) \leq \Phi(\rho)t^m, \quad t \geq 1, \quad \rho > 0$$

**Caso 2:**  $0 < s \leq 1$

Neste caso

$$\ell \int_t^1 \frac{ds}{s} \leq \int_t^1 \frac{d}{ds}(\ln \Phi(\rho s)) ds \leq m \int_t^1 \frac{ds}{s},$$

assim

$$\ln t^\ell \geq \ln \left( \frac{\Phi(\rho s)}{\Phi(\rho)} \right) \geq \ln t^m,$$

consequentemente

$$\Phi(\rho)t^m \leq \Phi(\rho t) \leq \Phi(\rho)t^\ell, \quad 0 < t \leq 1, \quad \rho > 0.$$

De ambos os casos

$$\zeta_0(\rho)\Phi(t) \leq \Phi(\rho t) \leq \zeta_1(\rho)\Phi(t), \quad \rho, t > 0.$$

Agora dado  $u \in L_\Phi(\Omega)$  faça

$$\rho = \frac{|u|}{\|u\|_\Phi} \text{ e } t = \|u\|_\Phi.$$

em (2–5). Assim,

$$\Phi\left(\frac{|u|}{\|u\|_\Phi}\right) \zeta_0(\|u\|_\Phi) \leq \Phi(|u|) \leq \Phi\left(\frac{|u|}{\|u\|_\Phi}\right) \zeta_1(\|u\|_\Phi).$$

Integrando em  $\Omega$  e usando que

$$\int_\Omega \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_\Phi}\right) dx = 1,$$

obtemos (2–6), como queríamos demonstrar. ■

**Corolário 2.4.1** (cf. [38]) *Seja  $\phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então*

$$\|u\|_\Phi \leq \max \left\{ \left( \int_\Omega \Phi(u) dx \right)^{\frac{1}{\ell}}, \left( \int_\Omega \Phi(u) dx \right)^{\frac{1}{m}} \right\}, \quad u \in L_\Phi(\Omega).$$

**Corolário 2.4.2** *Seja  $\phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então*

$$L^m(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L_\Phi(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L^\ell(\Omega).$$

**Demonstração:** Seja  $u \in L_\Phi(\Omega)$  tal que  $\|u\|_\Phi = 1$ , então pelo Lema 2.4.1

$$1 = \|u\|_\Phi = \int_\Omega \Phi(u) dx \geq \Phi(1) \int_{|u| \leq 1} |u|^m dx + \Phi(1) \int_{|u| > 1} |u|^\ell dx,$$

assim

$$\int_{|u| > 1} |u|^\ell dx \leq \frac{1}{\Phi(1)},$$

consequentemente

$$|u|_\ell^\ell = \int_\Omega |u|^\ell dx = \int_{|u| > 1} |u|^\ell dx + \int_{|u| \leq 1} |u|^\ell dx \leq \frac{1}{\Phi(1)} + |\Omega|$$

donde  $L_\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^\ell(\Omega)$ . De maneira análoga mostra-se que  $L^m(\Omega) \hookrightarrow L_\Phi(\Omega)$ . ■

**Lema 2.4.2** (cf. [25]) *Seja  $\phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Defina  $\zeta_2(t) = \min\{t^{\frac{\ell}{\ell-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\}$  e  $\zeta_3(t) = \max\{t^{\frac{\ell}{\ell-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\}$ ,  $t \geq 0$ , Então*

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\tilde{\Phi}'(t)}{\tilde{\Phi}(t)} \leq \frac{\ell}{\ell-1} \quad (2-7)$$

$$\zeta_2(\rho)\tilde{\Phi}(t) \leq \tilde{\Phi}(\rho t) \leq \zeta_3(\rho)\tilde{\Phi}(t), \quad \rho, t > 0 \quad (2-8)$$

$$\zeta_2(\|u\|_{\tilde{\Phi}}) \leq \int_{\Omega} \tilde{\Phi}(u) dx \leq \zeta_3(\|u\|_{\tilde{\Phi}}), \quad \text{para } u \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega). \quad (2-9)$$

**Demonstração:** ([45]) Como a função  $\phi$  é crescente e contínua, temos que

$$\eta(s)\phi(\eta(s)) = s, \quad s \geq 0,$$

onde  $\eta$  é a função inversa da função  $t \mapsto t\phi(t)$ . Fazendo  $t = \eta(s)$  em  $(\phi_3)$  obtemos

$$\ell\Phi(\eta(s)) \leq s\eta(s) \leq m\Phi(\eta(s)), \quad s > 0.$$

Pela desigualdade de Young temos que  $\Phi(\eta(s)) = s\eta(s) - \tilde{\Phi}(s)$ , então

$$\ell(s\eta(s) - \tilde{\Phi}(s)) \leq s\eta(s) \leq m(s\eta(s) - \tilde{\Phi}(s)), \quad s > 0$$

donde

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{s\eta(s)}{\tilde{\Phi}(s)} \leq \frac{\ell}{\ell-1}, \quad s > 0.$$

Procedendo como no Lema 2.4.1, concluímos a demonstração. ■

**Corolário 2.4.3** *Seja  $\phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então*

$$L^{\frac{\ell}{\ell-1}}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L_{\tilde{\Phi}}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega).$$

**Observação 2.4.1** *Pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 e a Observação 2.1.3 segue que  $\Phi, \tilde{\Phi} \in \Delta_2$ . Recorrendo ao Lema 2.2.1, concluímos que  $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$  é reflexivo.*

**Lema 2.4.3** *Suponha que  $\Phi$  satisfaça  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então  $\Phi_*$  é uma N-função.*

**Demonstração:** Basta mostrarmos (2-3) e (2-4), e conforme Donaldson & Trudinger [20] teremos que  $\Phi_*$  é uma N-função. Para tal, afirmamos que

$$\min \left\{ \frac{1}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell}, \frac{1}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m} \right\} \leq \Phi^{-1}(s) \leq \max \left\{ \frac{1}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell}, \frac{1}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m} \right\}, \quad s \geq 0. \quad (2-10)$$

De fato, no Lema 2.4.1 fazendo  $\rho = \Phi^{-1}(s)$  e  $t = 1$  encontramos

$$\Phi(1) \min\{\Phi^{-1}(s)^\ell, \Phi^{-1}(s)^m\} \leq s.$$

Se  $0 \leq \Phi^{-1}(s) \leq 1$ , então

$$\Phi^{-1}(s) \leq \frac{1}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m}$$

e se  $\Phi^{-1}(s) > 1$  então

$$\Phi^{-1}(s) \leq \frac{1}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell}.$$

Assim,

$$\Phi^{-1}(s) \leq \max\left\{\frac{1}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell}, \frac{1}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m}\right\}, \quad s \geq 0.$$

De igual forma obtemos que

$$\min\left\{\frac{1}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell}, \frac{1}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m}\right\} \leq \Phi^{-1}(s).$$

Como consequência de (2 – 10) temos

$$\min\left\{\frac{1}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell^*-1}, \frac{1}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m^*-1}\right\} \leq \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+1/N}} \leq \max\left\{\frac{1}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell^*-1}, \frac{1}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m^*-1}\right\}$$

para  $s \geq 0$ , onde  $\ell^* = \frac{N\ell}{N-\ell}$  e  $m^* = \frac{Nm}{N-m}$ . Lembrando que  $\ell, m \in (0, N)$  e integrando em  $s$  obtemos que

$$\min\left\{\frac{\ell^*}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell^*}, \frac{m^*}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m^*}\right\} \leq \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+1/N}} ds \leq \max\left\{\frac{\ell^*}{\Phi(1)^{1/\ell}} s^{1/\ell^*}, \frac{m^*}{\Phi(1)^{1/m}} s^{1/m^*}\right\}$$

consequentemente

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+1/N}} ds < \infty \quad \text{e} \quad \int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+1/N}} ds = \infty,$$

como queríamos demonstrar. ■

**Observação 2.4.2** De acordo com o Lema 2.4.3  $\Phi_*$  é uma  $N$ -função, assim pela definição de  $N$ -função

$$\Phi_*(t) = \int_0^t \phi_*(s) ds,$$

onde  $\phi_* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  satisfazendo

- $(\phi_*)_1 \quad \phi_*(0) = 0, \phi_*(s) > 0 \text{ para } s > 0, \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_*(s) = \infty,$
- $(\phi_*)_2 \quad \phi_* \text{ é contínua e não decrescente.}$

onde  $(\phi_*)_2$  é provada via Teorema da Função Implícita.

**Lema 2.4.4** *Suponha  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Sejam*

$$\zeta_4(t) = \min\{t^{\ell^*}, t^{m^*}\} \text{ e } \zeta_5(t) = \max\{t^{\ell^*}, t^{m^*}\}, \quad t \geq 0.$$

Então

$$\ell^* \leq \frac{t\Phi'_*(t)}{\Phi_*(t)} \leq m^*, \quad (2-11)$$

$$\zeta_4(\rho)\Phi_*(t) \leq \Phi_*(\rho t) \leq \zeta_5(\rho)\Phi_*(t), \quad \rho, t > 0, \quad (2-12)$$

$$\zeta_4(\|u\|_{\Phi_*}) \leq \int_{\Omega} \Phi_*(u) dx \leq \zeta_5(\|u\|_{\Phi_*}), \quad u \in L_{\Phi_*}(\Omega). \quad (2-13)$$

**Demonstração:** ([45]) Inicialmente provaremos (2 – 12). Com efeito, dados  $\tau, \sigma$ , tome  $t, \sigma_0, \sigma_1 > 0$  tais que

$$\tau = \Phi(t) \text{ e } \sigma = \zeta_0(\rho_0) = \zeta_1(\rho_1).$$

De (2 – 5) temos

$$\zeta_0(\rho_0)\Phi(t) \leq \Phi(\rho_0 t) \text{ e } \Phi(\rho_1 t) \leq \zeta_1\rho_1\Phi(t),$$

consequentemente

$$\Phi(\zeta_1^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\tau)) \leq \sigma\tau \leq \Phi(\zeta_0^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\tau)),$$

donde

$$\zeta_1^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\tau) \leq \Phi^{-1}(\sigma\tau) \leq \zeta_0^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\tau), \quad \tau > 0,$$

e portanto

$$\frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\tau)}{(\sigma\tau)^{1+1/N}} \leq \frac{\Phi^{-1}(\sigma\tau)}{(\sigma\tau)^{1+1/N}} \leq \frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)\Phi^{-1}(\tau)}{(\sigma\tau)^{1+1/N}}, \quad \sigma, \tau > 0.$$

Integrando de 0 à  $t$  com relação a variável  $\tau$ , temos

$$\frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)}{\sigma^{1+1/N}} \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/N}} d\tau \leq \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma\tau)}{(\sigma\tau)^{1+1/N}} d\tau \leq \frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)}{\sigma^{1+1/N}} \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/N}} d\tau, \quad t, \sigma > 0.$$

Por mudança de variável obtemos

$$\frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)}{\sigma^{1/N}} \Phi_*^{-1}(t) \leq \int_0^{\sigma t} \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/N}} d\tau \leq \frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)}{\sigma^{1/N}} \Phi_*^{-1}(t), \quad t, \sigma > 0. \quad (2-14)$$

como

$$\frac{\zeta_0^{-1}(\sigma)}{\sigma^{1/N}} = \zeta_4(\sigma) \text{ e } \frac{\zeta_1^{-1}(\sigma)}{\sigma^{1/N}} = \zeta_5(\sigma)$$

se (2-14) obtemos

$$\zeta_4(\sigma)\Phi_*^{-1}(t) \leq \Phi_*^{-1}(\sigma t) \leq \zeta_5(\sigma)\Phi_*^{-1}(t), \quad t, \sigma > 0. \quad (2-15)$$

Fixe  $s, r_1, r_2 > 0$  e  $t, \sigma > 0$  tais que

$$t = \Phi_*(s) \text{ e } \sigma = \zeta_4(r_1) = \zeta_5(r_2).$$

Segue de (2-15)

$$r_2 s \leq \Phi_*^{-1}(\Phi_*(s)\zeta_5(r_2)) \text{ e } \Phi_*^{-1}(\Phi_*(s)\zeta_4(r_2)) \leq r_1 s,$$

portanto

$$\Phi_*(r_2 s) \leq \Phi_*(s)\zeta_5(r_2) \text{ e } \zeta_4(r_1)\Phi_*(s) \leq \Phi_*(r_1 s),$$

donde a relação (2-12) vale. De maneira análoga ao que foi feito no Lema 2.4.1 prova-se a relação (2-13).

Para verificar (2-11), observe que

$$\zeta_4(1)\Phi_*(t) = \Phi_*(t) = \zeta_5(1)\Phi_*(t).$$

Isto junto com (2-12) obtemos

$$\frac{\zeta_4(\rho) - \zeta_4(1)}{\rho - 1} \Phi_*(t) \leq \frac{t(\Phi_*(t\rho) - \Phi_*(t))}{t(\rho - 1)} \leq \frac{\zeta_5(\rho) - \zeta_5(1)}{\rho - 1} \Phi_*(t), \quad \rho > 1, t > 0.$$

Passando ao limite quando  $\rho \rightarrow 1^+$ , obtemos que

$$\ell^* \Phi_*(t) = \zeta_{4+}(1)\Phi_*(t) \leq t\Phi'_*(t) \leq \zeta_{5+}(1)\Phi_*(t) = m^* \Phi_*(t),$$

donde a relação (2-11). ■

**Corolário 2.4.4** *Seja  $\phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então*

$$L^{m^*}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L_{\Phi^*}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L^{\ell^*}(\Omega).$$

**Lema 2.4.5** *Suponha  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Sejam*

$$\zeta_6(t) = \min\{t^{\frac{\ell^*}{\ell^*-1}}, t^{\frac{m^*}{m^*-1}}\} \text{ e } \zeta_7(t) = \max\{t^{\frac{\ell^*}{\ell^*-1}}, t^{\frac{m^*}{m^*-1}}\}, \quad t \geq 0.$$

*Então*

$$\frac{m^*}{m^* - 1} \leq \frac{t\tilde{\Phi}'_*(t)}{\tilde{\Phi}(t)} \leq \frac{\ell^*}{\ell^* - 1},$$

$$\zeta_6(\rho)\tilde{\Phi}_*(t) \leq \tilde{\Phi}_*(\rho t) \leq \zeta_7(\rho)\tilde{\Phi}_*(t), \rho, t > 0,$$

$$\zeta_6(\|u\|_{\tilde{\Phi}_*}) \leq \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_*(u) dx \leq \zeta_7(\|u\|_{\tilde{\Phi}_*}), u \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega).$$

**Corolário 2.4.5** *Seja  $\phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então*

$$L_{\ell^*-1}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L_{\Phi}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L_{m^*-1}(\Omega).$$

**Demonstração:** A demonstração deste é análoga à feita no Corolário 2.4.2. ■

## 2.5 Consequências das Hipóteses $(\phi_1)' - (\phi_4)'$

Iniciaremos observando algumas situações em que as hipóteses  $(\phi_1)' - (\phi_4)'$ , introduzidas no Capítulo 1, são satisfeitas.

**Observação 2.5.1** *Se  $\phi(t) = t^{p-2}$ ,  $1 < p < N$ , então as condições  $(\phi_1)' - (\phi_4)'$  são válidas.*

**Observação 2.5.2** *Se  $\Phi$  é uma  $N$ -função equivalente a  $\Phi_p(t) = t^p$ , para algum  $p \in (1, N)$ , então  $\Phi_*(t) = t^{p^*}$  é uma conjugada de Sobolev de  $\Phi$ . Neste caso, a condição  $(\phi_4)'$  é válida. Por exemplo, a  $N$ -função  $\Phi(t) = (1 + t^2)^\gamma - 1$  é equivalente a  $\Phi_{2\gamma}(t) = t^{2\gamma}$  (cf. demonstração do Teorema 1.0.7).*

**Lema 2.5.1** (Cf. [47]) *Suponha que  $\phi$  satisfaça  $(\phi_3)'$ . Então*

- (i)  $t^{a_2-1}\phi(u) \leq \phi(tu) \leq t^{a_1-1}\phi(u)$ ,  $u \in \mathbf{R}$ , se  $0 < t \leq 1$ ;
- (ii)  $t^{a_1-1}\phi(u) \leq \phi(tu) \leq t^{a_2-1}\phi(u)$ ,  $u \in \mathbf{R}$ , se  $1 \leq t < \infty$ .

**Demonstração:** Basta observar que

$$a_1 - 1 \leq s \frac{d}{ds} [\ln \phi(\rho s)] = \frac{\phi'(\rho s) \rho s}{\phi(\rho s)} \leq a_2 - 1$$

e proceder como na demonstração do Lema 2.4.1. ■

**Proposição 2.5.1** *Suponha que  $\phi$  satisfaça  $(\phi_1)'$  e  $(\phi_3)'$ , então  $\phi$  também satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_3)$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 2.5.1 temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\phi(t) \leq \lim_{t \rightarrow 0} t^{a_1}\phi(1) = 0$$

e também

$$\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{a_1}\phi(1) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} t\phi(t).$$

Portanto, vale  $(\phi_1)$ . Agora, pela condição  $(\phi_3)'$

$$0 < a_1 \leq \frac{(t\phi(t))'}{\phi(t)} \Rightarrow (t\phi(t))' > 0,$$

ou seja,  $t \mapsto t\phi(t)$  é crescente para  $t > 0$ . Por fim, segue de  $(\phi_3)'$  que

$$a_1\phi(t)t \leq t(\phi(t)t)' \leq a_2\phi(t)t,$$

via integração, obtemos

$$(a_1 + 1)\Phi(t) \leq \phi(t)t^2 \leq (a_2 + 1)\Phi(t).$$

Basta fazer  $\ell := a_1 + 1$  e  $m := a_2 + 1$ . ■

**Observação 2.5.3**  $\phi$  é não-decrescente (não-crescente) em  $(0, \infty)$  se, e somente se,  $a_1 \geq 1$  ( $a_2 \leq 1$ ). Com efeito, se  $\phi$  é não-decrescente (não-crescente) então

$$a_1 = \inf_{s>0} \frac{(\phi(s)s)'}{\phi(s)} = \inf_{s>0} \frac{\phi'(s)s}{\phi(s)} + 1$$

concluindo que  $1 \leq a_1$  ( $1 \geq a_2$ ). Por outro lado, se  $a_1 \geq 1$  ( $a_2 \leq 1$ )

$$\frac{(\phi(t)t)'}{\phi(t)} = \frac{\phi'(t)t}{\phi(t)} + 1 \geq a_1 \geq 1 \quad (\leq a_2 \leq 1) \Rightarrow \phi'(t) \geq 0 \quad (\phi'(t) \leq 0),$$

ou seja,  $\phi$  é não-decrescente (não-crescente). Além disso,  $a_1 = a_2$  se, e somente se,  $\phi(t) = t^{a_1-1}$  (isto independe de  $\phi$  ser não-crescente ou não-decrescente).

**Observação 2.5.4** Se  $a_1 > 1$ , então vale a condição  $(\phi_2)'$ . De fato, pelo Lema 2.5.1

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \phi(t) \leq \lim_{t \rightarrow 0_+} t^{a_1-1} \phi(1) = 0.$$

Por outro lado,

$$\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{a_1-1} \phi(1) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t).$$

**Observação 2.5.5** Segue da hipótese  $(\phi_1)'$  e do Teorema da Função Inversa que  $\phi_*$  é de classe  $C^1(\mathbf{R})$ .

**Observação 2.5.6** Se  $(\phi_*(t)t)', t \in \mathbf{R}$ , é não decrescente, então  $\phi_*(t)t$  é convexa. De fato,

$$[(\phi_*(t)t)' - (\phi_*(s)s)'] [t - s] = [\phi'_*(t)t - \phi'_*(s)s] [t - s] + [\phi_*(t) - \phi_*(s)] [t - s] \geq 0.$$

A seguir alguns resultados técnicos.



**Proposição 2.5.2** *Suponha  $(\phi_3)$ . Então existe  $C > 0$  tal que*

$$\phi(a+b) \leq C[\phi(a) + \phi(b)],$$

onde  $a, b \geq 0$  e  $a+b \neq 0$ .

**Demonstração:** Sejam  $a, b \geq 0$ . Como  $\Phi$  é convexa,  $\Phi \in \Delta_2$

$$\begin{aligned} \Phi(a+b) &= \Phi\left(2\frac{a+b}{2}\right) \\ &\stackrel{\text{conv}}{\leq} \frac{1}{2}\Phi(2a) + \frac{1}{2}\Phi(2b) \\ &\stackrel{\Delta_2}{\leq} \frac{K}{2\ell}a^2\phi(a) + \frac{K}{2\ell}b^2\phi(b) \\ &\leq \frac{K}{2\ell}(a+b)^2[\phi(a) + \phi(b)], \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade usamos  $(\phi_3)$ . Por outro lado,

$$\frac{1}{m}(a+b)^2\phi(a+b) \leq \Phi(a+b),$$

donde

$$\phi(a+b) \leq \frac{mK}{2\ell}[\phi(a) + \phi(b)].$$

Isso conclui a demonstração. ■

**Proposição 2.5.3** *Suponha que  $\phi$  é não-decrescente e satisfaz  $(\phi_1)' - (\phi_3)'$ . Então*

$$\Phi_1(t) := \int_0^t \phi(s)ds$$

é uma  $N$ -função,  $\Phi_1 \in \Delta_2$  e  $L_\Phi(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_1}(\Omega)$ , sempre que  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  for limitado.

**Demonstração:** É fácil ver que  $\Phi_1$  é uma  $N$ -função. Para mostrarmos que  $\Phi_1 \in \Delta_2$ , provaremos inicialmente que  $t\Phi_1(t) \geq \Phi(t)$ . De fato,  $\Phi'_1(t) = \phi(t)$ . Assim,

$$\Phi'(t) = t\phi(t) = t\Phi'_1(t),$$

consequentemente

$$\Phi(t) = \int_0^t s\Phi'_1(s)ds = t\Phi_1(t) - \int_0^t \Phi_1(s)ds \leq t\Phi_1(t), \quad t \geq 0.$$

Agora,

$$t^2\phi(t) \leq m\Phi(t) \leq mt\Phi_1(t),$$

ou seja,

$$t\phi(t) \leq m\Phi_1(t), \quad t \geq 0.$$

Segue da Observação 2.1.3 que  $\Phi_1 \in \Delta_2$ .

Por fim, segue de  $(\phi_3)'$

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \phi(s)ds \leq t\phi(t) \leq t^2\phi(t) \leq m\Phi(t), \quad t \geq 1.$$

Assim, pelo Teorema 2.2.2  $L_\Phi(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_1}(\Omega)$ , o que prova o Lema 2.5.3. ■

A seguir estudaremos algumas condições de elipticidade de  $\Delta_\Phi$ .

**Notação:**  $a_i(\eta) = \phi(|\eta|)\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , onde  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in \mathbf{R}^N$ .

**Proposição 2.5.4** *Suponha que  $\Phi$  satisfaça  $(\phi_1)' - (\phi_3)'$ , então existe  $\Gamma_1 > 0$  tal que*

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) \xi_i \xi_j \geq \Gamma_1 \phi(|\eta|) |\xi|^2, \quad \eta, \xi \in \mathbf{R}^N, \quad \eta \neq 0. \quad (2-16)$$

**Demonstração:** Dados  $\eta, \xi \in \mathbf{R}^N$ ,  $\eta \neq 0$  temos

$$\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) = \phi'(|\eta|) \frac{\eta_i \eta_j}{|\eta|} + \phi(|\eta|) \delta_{i,j},$$

Se  $\phi'(|\eta|) \geq 0$ , então

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) \xi_i \xi_j = \phi'(|\eta|) \frac{|\langle \eta, \xi \rangle|^2}{|\eta|} + \phi(|\eta|) |\xi|^2 \geq \phi(|\eta|) |\xi|^2.$$

Por outro lado, se  $\phi'(|\eta|) \leq 0$  então  $\phi'(|\eta|) |\langle \eta, \xi \rangle|^2 \geq \phi'(|\eta|) |\eta|^2 |\xi|^2$ . Segue de  $(\phi_3)'$

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) \xi_i \xi_j \geq \phi(|\eta|) |\xi|^2 + (a_1 - 1) \phi(|\eta|) |\xi|^2 = a_1 \phi(|\eta|) |\xi|^2.$$

Considerando  $\Gamma_1 = \min\{1, a_1\}$ , concluímos a demonstração. ■

**Proposição 2.5.5** *Suponha que  $\phi$  seja diferenciável satisfazendo  $(\phi_3)'$ , então existe  $\Gamma_2 > 0$  tal que*

$$\left| \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) \right| \leq \Gamma_2 \phi(|\eta|), \quad \eta \in \mathbf{R}^N - \{0\}. \quad (2-17)$$

**Demonstração:** Com efeito, dados  $\eta, \xi \in \mathbf{R}^N$ ,  $\eta \neq 0$  segue de

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta) \right| &\leq \sum_{i,j=1}^N \left\{ |\phi'(|\eta|)| \frac{|\eta_i \eta_j|}{|\eta|} + \phi(|\eta|) \delta_{i,j} \right\} \\ &\leq \phi(|\eta|) \sum_{i,j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \max\{|a_1 - 1|, |a_2 - 1|\} \frac{|\eta_i \eta_j|}{|\eta|^2} + \delta_{i,j} \right\} \\ &\leq \phi(|\eta|) \sum_{i,j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \max\{|a_1 - 1|, |a_2 - 1|\} + \delta_{i,j} \right\} \\ &= \Gamma_2 \phi(|\eta|) \end{aligned}$$

provando a Proposição. ■

A seguir, enunciaremos e demonstraremos um Lema devido a Tan & Fang [47].

**Lema 2.5.2** *Se  $\phi$  é não-crescente para  $t > 0$ , então existe  $d > 0$  tal que*

$$|\phi(|\eta|)\eta - \phi(|\xi|)\xi| \leq d\phi(|\eta - \xi|)|\eta - \xi|, \quad \eta, \xi \in \mathbf{R}^N.$$

**Demonstração:** Suponha, sem perda de generalidade, que  $|\xi| > |\eta|$ .

$$\begin{aligned} |\phi(|\eta|)\eta - \phi(|\xi|)\xi| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} [\phi(|\xi + t(\eta - \xi)|)(\xi + t(\eta - \xi))] dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \phi'(|\xi + t(\eta - \xi)|) \frac{(\xi + t(\eta - \xi), \eta - \xi)}{|\xi + t(\eta - \xi)|} (\xi + t(\eta - \xi)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \phi(|\xi + t(\eta - \xi)|)(\eta - \xi) dt \right| \\ &\leq |\eta - \xi| \int_0^1 [\phi'(|\xi + t(\eta - \xi)|)|\xi + t(\eta - \xi)| + \phi(|\xi + t(\eta - \xi)|)] dt \\ &\leq |\eta - \xi| \int_0^1 [|a_2 - 1| \phi(|\xi + t(\eta - \xi)|) + \phi'(|\xi + t(\eta - \xi)|)] dt \\ &= (|a_2 - 1| + 1) |\eta - \xi| \int_0^1 \phi(|\xi + t(\eta - \xi)|) dx. \end{aligned} \tag{2-18}$$

Afirmamos que

$$\int_0^1 \phi(|\xi + t(\eta - \xi)|) dt \leq C\phi(|\eta| + |\xi|). \tag{2-19}$$

De fato, se  $|\eta - \xi| \leq \frac{|\xi|}{2}$ , usando que  $|\xi| > |\eta|$

$$|\xi + t(\eta - \xi)| \geq |\xi| - |\eta - \xi| \geq \frac{|\xi|}{2} = \frac{|\xi|}{4} + \frac{|\xi|}{4} \geq \frac{|\xi| + |\eta|}{4}$$

junto com Lema 2.5.1 temos

$$\int_0^1 \phi(|\xi + t(\eta - \xi)|) dt \leq \phi\left(\frac{|\xi| + |\eta|}{4}\right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{a_1-1} \phi(|\eta| + |\xi|),$$

ou seja, (2-19) é válida.

Se  $|\eta - \xi| > \frac{|\xi|}{2} > 0$ , temos que  $t_0 := \frac{|\xi|}{|\eta - \xi|} \in (0, 2)$  e também

$$\begin{aligned} |\xi + t(\eta - \xi)| &\geq ||\xi| - t|\eta - \xi|| \\ &= |t - t_0||\eta - \xi| \\ &\geq |t - t_0| \frac{|\xi|}{2} \\ &= |t - t_0| \left( \frac{|\xi|}{4} + \frac{|\xi|}{4} \right) \\ &\geq |t - t_0| \left( \frac{|\xi| + |\eta|}{4} \right). \end{aligned} \tag{2-20}$$

Como  $t_0 \in (0, 2)$  e  $\phi$  é não-crescente

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(|\xi + t(\eta - \xi)|) dt &\leq \int_0^1 \phi\left(\frac{|t - t_0|}{4}(|\eta| + |\xi|)\right) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{|t - t_0|}{4}\right)^{a_1-1} \phi(|\eta| + |\xi|) dt \\ &\leq \phi(|\eta| + |\xi|) \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1-1} \end{aligned}$$

Assim, vale (2-19), onde  $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1-1}$ , provando a afirmação.

Por fim, como  $|\eta - \xi| \leq |\eta| + |\xi|$  e  $\phi$  é não-crescente segue de (2-18) e (2-19) que

$$|\phi(|\eta|)\eta - \phi(|\xi|)\xi| \leq d\phi(|\eta - \xi|)|\eta - \xi|,$$

o que prova o Lema 2.5.2. ■

## Funcionais Localmente Lipschitzianos: Uma Revisão

Neste capítulo reuniremos alguns conceitos e resultados da teoria de pontos críticos para funcionais localmente Lipschitz desenvolvida por Chang [13] e Clarke [14]. Em particular, apresentaremos uma versão para espaços de Orlicz, devida a Le et al. [34], do Teorema de Aubin-Clarke desenvolvida originalmente para espaços  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ .

Neste capítulo  $X$  é um espaço de Banach real munido da norma  $\|\cdot\|$ . O espaço dual de  $X$  é denotado por  $X'$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  significa o par de dualidade entre  $X'$  e  $X$ .

### 3.1 O Gradiente de Clarke

A seguir, introduziremos algumas definições e resultados básicos.

**Definição 3.1.1** *Um funcional  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  é dito localmente Lipschitz ( $f \in Lip_{loc}(X; \mathbf{R})$ ) se para cada  $x \in X$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  e uma constante  $K = K_x > 0$  tal que*

$$|f(y) - f(z)| \leq K\|y - z\|, \quad y, z \in V.$$

**Exemplo 3.1.1** *A função  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(t) = |t|$  é uma função localmente Lipschitz (cf. [14]).*

**Definição 3.1.2** *Sejam  $f \in Lip_{loc}(X; \mathbf{R})$  e  $u, v \in X$ . A derivada direcional generalizada de  $f$  em  $u$  na direção  $v$  é definida por:*

$$f^0(u; v) = \limsup_{x \rightarrow u, t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

**Observação 3.1.1** *Como  $f \in Lip_{loc}(X; \mathbf{R})$ , dados  $u, v \in X$  existem uma vizinhança  $V$  de  $u$  e uma constante  $K > 0$  tal que*

$$|f(x + tv) - f(x)| \leq K\|tv\|, \quad x \in V, \quad t \in (0, 1).$$

**Proposição 3.1.1** (Cf. [14]) Se  $f \in \text{Lip}_{loc}(X; \mathbf{R})$ , então:

- i) dado  $u \in X$ , o funcional  $f^0(u, \cdot) : X \rightarrow \mathbf{R}$  é subaditivo, positivamente homogêneo, convexo e satisfaz a desigualdade

$$|f^0(u; v)| \leq K \|v\|, \quad v \in X.$$

- ii)  $f^0(u; v) = (-f)^0(u; -v)$ ,  $u, v \in X$ ;

- iii) A função  $(u, v) \in X \times X \mapsto f^0(u, v) \in \mathbf{R}$  é semicontínua superiormente.

**Definição 3.1.3** O gradiente generalizado de Clarke de um funcional localmente Lipschitz  $f \in \text{Lip}_{loc}(X; \mathbf{R})$  em um ponto  $u \in X$  é o subconjunto de  $X'$  definido por

$$\partial f(u) = \{\xi \in X' \mid f^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \forall v \in X\}.$$

**Observação 3.1.2** Mostra-se, usando o Teorema de Hahn-Banach (cf. [8]), que  $\partial f(u) \neq \emptyset$ .

A seguir estabelecemos várias propriedades do gradiente generalizado.

**Proposição 3.1.2** (Cf. [13, 14]) Sejam  $f \in \text{Lip}_{loc}(X; \mathbf{R})$  e  $u \in X$  então:

- i) Se  $f$  for convexa e contínua, então  $\partial f(u) = \partial(f^0(u; \cdot))(0)$ ;
- ii)  $\partial f(u) \subset X'$  é convexo, fraco\*-compacto e

$$\|\xi\|_{X'} \leq K, \quad \xi \in \partial f(u);$$

- iii)  $f^0(u, v) = \max\{\langle \xi, v \rangle \mid \xi \in \partial f(u)\}$ ,  $v \in X$ ;
- iv)  $\inf\{\|\xi\|_{X'} \mid \xi \in \partial f(u)\} = \min\{\|\xi\|_{X'} \mid \xi \in \partial f(u)\}$ ;
- v)  $\partial f(u) \subset X'$  é fraco\*-compacta, em particular fraco\*-fechada;
- vi) a multifunção  $u \mapsto \partial f(u)$  é fraco\*-fechada, no seguinte sentido:  
se  $(u_n, \xi_n) \subseteq X \times X'$  é uma sequência satisfazendo

$$\xi_n \in \partial f(u_n), \quad u_n \xrightarrow{X} u \quad \text{e} \quad \xi_n \xrightarrow{*} \xi,$$

então  $\xi \in \partial f(u)$ .

**Proposição 3.1.3** (cf. [13]) Seja  $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função Baire mensurável, não decrescente na segunda variável. Então a função

$$j(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$$

é localmente Lipschitz e

$$\partial_t f(x, t) = [\underline{f}(x, t), \bar{f}(x, t)] \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \text{ para todo } t \in \mathbf{R},$$

onde

$$\underline{f}(x, t) := \min\{f(x, t-0), f(x, t+0)\} \text{ e } \bar{f}(x, t) := \max\{f(x, t-0), f(x, t+0)\}$$

$$\text{e } f(x, t \pm 0) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(x, t \pm \delta).$$

## 3.2 Mais Sobre Cálculo Subdiferencial

Nesta seção enunciaremos resultados relativos ao gradiente generalizado, como por exemplo a regra da cadeia e o Teorema do Valor Médio de Lebourg (cf. [12]).

**Definição 3.2.1** Um elemento  $u \in X$  é dito um ponto crítico de um funcional  $f \in Lip_{loc}(X; \mathbf{R})$  se

$$0 \in \partial f(u).$$

**Definição 3.2.2** Um número real  $c$  é um valor crítico de  $f$  se existe um ponto crítico  $u_0$  de  $f$  tal que  $f(u_0) = c$ .

Apresentamos a seguir algumas propriedades sobre o gradiente generalizado que serão usadas no decorrer deste trabalho.

**Proposição 3.2.1** Sejam  $f, g \in Lip_{loc}(X; \mathbf{R})$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  e  $u \in X$ , então:

- (P1) Se  $f \in C^1(X; \mathbf{R})$ , então  $\partial f(u) = \{f'(u)\}$ ;
- (P2)  $\partial(\lambda f)(u) = \lambda \partial f(u)$ , em particular  $\partial(-f)(u) = -\partial f(u)$ ;
- (P3) Se  $f \in C^1(X; \mathbf{R})$ , então  $\partial(f+g)(u) = \partial f(u) + \partial g(u)$ ;
- (P4) Se  $u \in X$  é ponto de mínimo ou de máximo local de  $f$ , então  $u$  é ponto crítico.

Apresentamos abaixo uma generalização do Teorema do Valor Médio para funcionais  $f \in Lip_{loc}(X; \mathbf{R})$ . Por completicidade, incluiremos abaixo uma demonstração (cf. [12]).

**Teorema 3.2.1 (Lebourg)** Sejam  $f \in Lip_{loc}(X; \mathbf{R})$  e  $x, y \in X$ . Então existem  $u$  no segmento  $(x, y)$  e  $\xi \in \partial f(u)$  tais que

$$f(y) - f(x) = \langle \xi, y - x \rangle.$$

**Demonstração:** Considere a função  $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$\theta(t) = f(x + t(y - x)) + t(f(x) - f(y)), \quad t \in [0, 1].$$

Note que  $\theta$  é contínua e que  $\theta(0) = \theta(1) = f(x)$ , então existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que  $\theta$  realiza o mínimo ou o máximo. Pela Proposição 3.2.1 e [14, lema 2.3.7]) concluímos que

$$0 \in \partial\theta(t_0) \subseteq \langle \partial f(x + t_0(y - x)), y - x \rangle + [f(x) - f(y)],$$

provando o Teorema. ■

A seguir enunciaremos uma versão não diferenciável da Regra da Cadeia.

**Teorema 3.2.2** (Cf. [12]) *Seja  $F \in \mathbf{C}^1(X; Y)$ , onde  $X, Y$  são espaços de Banach e  $g \in \text{Lip}_{loc}(Y; \mathbf{R})$ . Então  $g \circ F \in \text{Lip}_{loc}(X; \mathbf{R})$  e*

$$\partial(g \circ F)(u) \subseteq \partial g(F(u)) \circ F'(u), \quad u \in X$$

no sentido de que dado qualquer elemento  $z \in \partial(g \circ F)(u)$  pode ser escrito como

$$z = F'(u)^* \xi, \quad \text{para algum } \xi \in \partial g(F(u)),$$

onde  $F'(u)^*$  denota o operador adjunto associado com a diferencial de Fréchet de  $F$  em  $u$ .

**Corolário 3.2.1** *Se existe uma aplicação linear contínua  $i : X \rightarrow Y$ , onde  $X, Y$  são espaços de Banach, então dado  $g \in \text{Lip}_{loc}(Y; \mathbf{R})$  temos*

$$\partial(g \circ i)(u) \subseteq i^* \partial g(i(u)), \quad u \in X.$$

Além disso, se  $i(X) \subseteq Y$  é denso, então

$$\partial(g \circ i)(u) = i^* \partial g(i(u)), \quad u \in X.$$

### 3.3 O Teorema de Aubin-Clarke em Espaços de Orlicz

Nesta seção apresentaremos uma demonstração do Teorema de Aubin-Clarke em Espaços de Orlicz reflexivo. Esse resultado foi demonstrado originalmente em  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , cf. [12, 14].

**Teorema 3.3.1** (Cf. [34]) *Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  um domínio limitado,  $\Phi$  uma  $N$ -função e  $j : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função Carathéodory tal que  $j(x, \cdot) \in \text{Lip}_{loc}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  q.t.p.  $x \in \Omega$  e  $j(x, 0) \in L^1(\Omega)$  satisfazendo a seguinte condição:*



existem  $h \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ ,  $h \geq 0$ , e constantes  $c_1, c_2 > 0$  tais que

$$|\eta(x)| \leq h(x) + c_1 \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2 t), \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \eta \in \partial j(x, t). \quad (3-1)$$

Então o funcional  $J : L_{\Phi}(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$  definido por

$$J(u) := \int_{\Omega} j(x, u) dx$$

é localmente Lipschitz e seu gradiente generalizado satisfaz

$$\partial J(u) \subseteq \{w \in L_{\Phi}(\Omega)' \mid w(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}. \quad (3-2)$$

**Demonstração:** Inicialmente mostraremos que o funcional  $J$  é bem definido. De fato, pelo Teorema do Valor Médio de Lebourg dado  $t \in \mathbf{R}$  existem  $\tau \in (0, t)$ , ou  $\tau \in (t, 0)$  caso  $t < 0$ , e  $\eta \in \partial j(x, \tau)$  tal que

$$j(x, t) - j(x, 0) = \eta t$$

e como  $\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$  é crescente, segue da condição (3-1) que

$$\begin{aligned} |j(x, t)| &\leq |j(x, 0)| + |\eta| |t| \\ &\leq |j(x, 0)| + [h(x) + c_1 \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2 \tau)] |t| \\ &\leq |j(x, 0)| + [h(x) + c_1 \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2 t)] |t|, \end{aligned} \quad (3-3)$$

q.t.p.  $x \in \Omega$  e para todo  $t \in \mathbf{R}$ . Por outro lado, para  $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ , temos que  $c_2 u \in L_{\Phi}(\Omega)$  e então

$$\int_{\Omega} \tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2 u)] dx = \int_{\Omega} \Phi(c_2 u) dx < \infty, \quad (3-4)$$

donde  $\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2 u) \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ . Isso implica que  $j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$  e que  $J(u)$  é bem definida em  $L_{\Phi}(\Omega)$ .

Agora verificaremos que  $J \in Lip_{loc}(L_{\Phi}(\Omega), \mathbf{R})$ . Com efeito, seja  $w \in L_{\Phi}(\Omega)$  e denote por  $B_{\varepsilon}(w)$  a bola fechada em  $L_{\Phi}(\Omega)$  centrada em  $w$  e de raio  $\varepsilon > 0$ . Note que o conjunto

$$W := \{c_2(|u| + |v|) \mid u, v \in B_{\varepsilon}(w)\} \subset B_{2c_2\varepsilon}(2c_2|w|).$$

Escolhendo  $\varepsilon$  suficiente pequeno, teremos que  $\text{diam}(W) \leq 1/2$ . Afirmamos que

$$\left\{ \int_{\Omega} \Phi(u) dx \mid u \in W \right\} \text{ é limitado em } \mathbf{R}. \quad (3-5)$$

Para este fim, vemos que para qualquer  $u \in W$  segue da convexidade  $\Phi$  que

$$\int_{\Omega} \Phi(2(u - w)) dx \leq \|2(u - w)\|_{\tilde{\Phi}} \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{2(u - w)}{\|2(u - w)\|_{\tilde{\Phi}}}\right) dx \leq \|2(u - w)\|_{\tilde{\Phi}} \leq 1$$

haja visto que  $\|u - w\|_{\tilde{\Phi}} \leq 1/2$ . Portanto

$$\int_{\Omega} \Phi(u) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(2w) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(2(u-w)) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(2w) dx + \frac{1}{2} < \infty, \forall u \in W,$$

provando a afirmação.

Para provar que  $J \in Lip_{loc}(L_{\Phi}(\Omega); \mathbf{R})$ , considere  $u, v \in B_{\varepsilon}(w)$ . Graças ao Teorema 3.2.1, existe  $\theta(x) \in (0, 1)$  e  $\eta(x) \in \partial j(x, \theta(x)u(x) + [1 - \theta(x)]v(x))$  tal que

$$\begin{aligned} |j(x, v(x)) - j(x, u(x))| &= |\eta(x)| |v(x) - u(x)| \\ &\leq [|h(x)| + c_1 \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2(\theta(x)u(x) + [1 - \theta(x)]v(x)))] \\ &\quad |v(x) - u(x)| \\ &\leq [|h(x)| + c_1 \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2(|u(x)| + |v(x)|))] |v(x) - u(x)| \end{aligned}$$

q.t.p.  $x \in \Omega$ , onde usamos a condição (3-1) e que  $\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi$  é crescente. Como em (3-1) e usando (3-5) obtemos que  $\{\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2(|u(x)| + |v(x)|)) \mid u, v \in B_{\varepsilon}(w)\}$  é um subconjunto limitado em  $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ . Assim, aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|J(u) - J(v)| \leq \int_{\Omega} |j(x, v(x)) - j(x, u(x))| dx \leq C \|v - u\|_{\tilde{\Phi}}, \quad u, v \in B_{\varepsilon}(w),$$

onde  $C = \|h\|_{\tilde{\Phi}} + c_1 \sup_{u, v \in B_{\varepsilon}(w)} \|\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2(|u(x)| + |v(x)|))\|_{\tilde{\Phi}} < \infty$ .

Por fim, mostraremos a inclusão (3-2). Para este fim, observemos que a aplicação  $x \mapsto j^0(x, u(x); v(x))$  é mensurável em  $\Omega$  (cf. [14, Teo 2.7.2]). De fato, como  $j(x, \cdot)$  é contínua, podemos representar  $j^0(x, u(x); v(x))$  como o limite superior de

$$\frac{j(x, y + \lambda v(x)) - j(x, y)}{\lambda}$$

quando  $\lambda \downarrow 0$  por valores racionais e  $y \rightarrow u(x)$  por valores em um subconjunto contável denso em  $\mathbf{R}^N$ . Assim,  $j^0(x, u(x); v(x))$  é mensurável pois é igual ao "limsup" de funções mensuráveis em  $x$ .

Afirmamos que

$$J^0(u; v) \leq \int_{\Omega} j^0(x, u(x); v(x)) dx, \quad v \in L_{\Phi}(\Omega). \quad (3-6)$$

A saber, dado  $\lambda \in (0, 1)$ , segue do pelo Teorema 3.2.1 que

$$\frac{j(x, y + \lambda v(x)) - j(x, y)}{\lambda} = \xi_x v(x)$$

para algum  $\xi_x \in \partial j(x, u^*(x))$  e algum  $u^*(x) \in [u(x), u(x) + \lambda v(x)]$ . Assim, pela condição (3-1)

$$\left| \frac{j(x, y + \lambda v(x)) - j(x, y)}{\lambda} \right| = |\xi_x| |v(x)| \leq [|h(x)| + c_1 \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi(c_2(|u(x)| + |v(x)|))] |v(x)|,$$

que pertence a  $L^1(\Omega)$  haja visto a desigualdade de Hölder. Portanto, pelo Lema de Fatou a afirmação (3-6) está verificada. Agora, pelo que vimos em (3-6), dado  $w \in \partial J(u)$  temos

$$\int_{\Omega} w(x) v(x) dx =: \langle w, v \rangle \leq J^0(u; v) \leq \int_{\Omega} j^0(x, u(x); v(x)) dx, \quad v \in L_{\Phi}(\Omega). \quad (3-7)$$

Em particular, como a aplicação  $r \mapsto j(x, u(x); r)$  é positivamente homogênea, segue de (3-7) que

$$\int_{\Omega} [w(x) - j(x, u(x); 1)] v(x) dx \leq 0, \quad \forall v \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega), \quad v \geq 0$$

donde  $w(x)r \leq j(x, u(x); r)$ , quando  $r \in \mathbf{R}$  e  $r \geq 0$ . Por outro lado,

$$\int_{\Omega} [-w(x) - j(x, u(x); -1)] |v(x)| dx \leq 0, \quad \forall v \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega), \quad v \leq 0$$

donde  $w(x)(-r) \leq j(x, u(x); -r)$ ,  $r \in \mathbf{R}$  e  $r > 0$ . Isso mostra que  $z(x) \in \partial j(x, u(x))$  q.t.p.  $x \in \Omega$ , concluindo a demonstração do Teorema 3.3.1. ■

## O Problema de Dirichlet Para $\Delta_\Phi$ : Resultados Básicos

Neste capítulo estudaremos existência, unicidade e regularidade de solução para o problema de contorno

$$-\Delta_\Phi u = h \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (4-1)$$

lembrando que  $\Delta_\Phi u := \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u)$  é o operador  $\Phi$ -Laplaciano, com  $\Phi$  no contexto das condições  $(\phi_1) - (\phi_3)$  e  $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$ .

### 4.1 Minimização do Funcional Energia de (4 – 1)

Nesta seção desenvolveremos argumentos de convexidade e minimização de funcionais em espaços de Orlicz-Sobolev para investigar existência e unicidade de solução do problema (4 – 1). Considere o funcional energia  $I : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$  definido por

$$I(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \langle h, u \rangle, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \quad (4-2)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  designa o par de dualidade entre  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  e  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ .

**Proposição 4.1.1** *Suponha  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então o funcional  $I$  é limitado inferiormente.*

**Demonstração:** Seja  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Conforme [28, Lema 3.14] existe  $M > 0$  de tal maneira que se  $\|\nabla u\|_\Phi > M$  teremos

$$\frac{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx}{\|\nabla u\|_\Phi} > 2\|h\|,$$

donde

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \|h\| \|\nabla u\|_{\Phi} \\ &\geq K \|h\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, segue do Lema A.0.3 que o funcional

$$E(z) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla z|) dx, \quad z \in W_0^{1,\Phi}$$

é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente (fssci). Assim,

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \liminf_n \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, u_n \rangle \\ &\leq \liminf_n I(u_n) \\ &= I_{\infty}, \end{aligned}$$

ou seja,  $I$  é fssci. Além disso,  $B_M(0) = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \mid \|u\|_{\Phi} \leq M\}$  é fracamente compacta, portanto o funcional  $I$  possui mínimo em  $B_M(0)$ , digamos em  $u_0$ . Donde,

$$I(u) \geq \min\{I(u_0), K\|h\|\},$$

concluindo que  $I$  é limitado inferiormente. ■

**Proposição 4.1.2** *Suponha que  $\phi$  satisfaça  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então existe  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que*

$$I(u) = \inf_{v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)} I(v) := I_{\infty}.$$

**Demonstração:** Pela Proposição 4.1.1  $I$  é limitada inferiormente. Seja  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  uma sequência minimizante para  $I$ . Afirmamos que  $(u_n)$  é limitada em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Com efeito, existe  $n_0 > 0$  tal que para todo  $n > n_0$

$$I_{\infty} + 1 \geq I(u_n) \geq I_{\infty}$$

e como o funcional  $I$  é coercivo (cf. Lema 3.14, [28]), temos que  $(u_n)$  é limitada.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Lembrando que  $I$  é fssci, então existe  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que

$$I(u) = \min_{v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)} I(v),$$

concluindo a demonstração. ■

## 4.2 Existência de Solução de (4-1) via Minimização

**Teorema 4.2.1** *Suponha  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então o mínimo  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  de  $I$  é solução fraca de (4-1), isto é,*

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx = \langle h, v \rangle, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

**Demonstração:** Sejam  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ , garantido pela Proposição 4.1.2,  $0 < t < 1$  e  $v \in W_0^{1,\Phi}$  qualquer. Então

$$\frac{I(u+tv) - I(u)}{t} \geq 0$$

isto é

$$\int_{\Omega} \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} dx \geq \langle h, v \rangle. \quad (4-3)$$

Afirmamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{\Omega} \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} dx = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx.$$

De fato, pelo Teorema do Valor Médio

$$\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|) = \phi(\theta_t) \theta_t [|\nabla u + t\nabla v| - |\nabla u|], \quad (4-4)$$

onde

$$\begin{aligned} -|\nabla u| - |\nabla v| &\leq \min\{|\nabla u + t\nabla v|, |\nabla u|\} \\ &\leq \theta_t \\ &\leq \max\{|\nabla u + t\nabla v|, |\nabla u|\} \\ &\leq |\nabla u| + |\nabla v| \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \quad (4-5)$$

De (4-5) temos que  $\theta_t(x) \rightarrow |\nabla u(x)|$  q.t.p.  $x \in \Omega$ , quando  $t \rightarrow 0_+$ . Disto e de (4-4) concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} = \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \quad (4-6)$$

Agora note que

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} &= \phi(\theta_t)\theta_t \left[ \frac{|\nabla u + t\nabla v| - |\nabla u|}{t} \right] \\
 &\leq \phi(\theta_t)\theta_t \left[ \frac{|\nabla u| + t|\nabla v| - |\nabla u|}{t} \right] \\
 &= \phi(\theta_t)\theta_t |\nabla v| \\
 &\leq \phi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla v|,
 \end{aligned} \tag{4-7}$$

onde a última desigualdade segue de  $t\phi(t) \geq 0$ ,  $t\phi(t)$  é crescente para  $t \geq 0$  e (4-5). Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} &\geq \phi(\theta_t)\theta_t \left[ \frac{|\nabla u| - t|\nabla v| - |\nabla u|}{t} \right] \\
 &= -\phi(\theta_t)\theta_t |\nabla v| \\
 &\geq -\phi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla v|.
 \end{aligned} \tag{4-8}$$

Concluimos de (4-7) e (4-8) que

$$\left| \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} \right| \leq \phi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla v|. \tag{4-9}$$

Além disso, como  $\tilde{\Phi}(t\phi(t)) \leq \Phi(2t)$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ , temos que

$$\phi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|) \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega).$$

Pela Desigualdade de Hölder

$$\phi(|\nabla u| + |\nabla v|)(|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla v| \in L^1(\Omega). \tag{4-10}$$

Segue de (4-6), (4-9) e do Teorema de Lebesgue

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{\Omega} \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla v|) - \Phi(|\nabla u|)}{t} dx = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx.$$

Portanto, passando ao limite em (4-3) com  $t \rightarrow 0$  e observando que a inequação é válida para todo  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ , concluimos a demonstração. ■

### 4.3 Existência de Solução de (4 – 1) via Browder-Minty

Apresentamos a seguir alguns conceitos para enunciar o Teorema de Browder-Minty.

**Definição 4.3.1** *Sejam  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $A : X \rightarrow X'$  um operador. Dizemos que  $A$  é:*

- (i) *monotônico se  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$  para todos  $u, v \in X$ ;*
- (ii) *coercivo se*

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_X} = \infty.$$

A seguir uma versão simplificada do Teorema de Browder-Minty.

**Teorema 4.3.1** (cf. [8]) *Sejam  $E$  um espaço de Banach reflexivo,*

$$A : E \longrightarrow E'$$

*um operador contínuo, monotônico e coercivo. Então para cada  $f \in E'$  o problema*

$$Au = f$$

*possui uma solução  $u \in E$ .*

Dado  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  considere

$$\langle Lu, v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Segue pela desigualdade de Hölder que

$$|\langle Lu, v \rangle| \leq 2 \|\phi(|\nabla u|) \nabla u\|_{\tilde{\Phi}} \|\nabla v\|_{\Phi}.$$

Fica definido  $L : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  e vale

$$\|Lu\|_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)'} \leq 2 \|\phi(|\nabla u|) \nabla u\|_{\tilde{\Phi}}.$$

A seguir formularemos e demonstraremos vários resultados sobre propriedades de  $L$ .

**Lema 4.3.1** *O operador  $L$  é contínuo.*

**Demonstração:** Seja  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que

$$u_n \longrightarrow u, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$



Note que

$$\begin{aligned}
\|Lu_n - Lu\|_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)'} &= \sup_{\|\nabla v\|_{\Phi} \leq 1} |\langle Lu_n - Lu, v \rangle| \\
&= \sup_{\|\nabla v\|_{\Phi} \leq 1} \left| \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla v) dx \right| \\
&\leq \sup_{\|\nabla v\|_{\Phi} \leq 1} \int_{\Omega} |\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u| |\nabla v| dx \\
&\leq 2 \|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\|_{\tilde{\Phi}}.
\end{aligned}$$

Portanto, mostrando que

$$\int_{\Omega} \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u) dx \longrightarrow 0,$$

teremos

$$\|Lu_n - Lu\|_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)'} \longrightarrow 0.$$

Para tal, observe que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) dx \longrightarrow 0,$$

e pelo Lema 2.2.2, considerando uma subsequência se necessário, teremos que

1.  $\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$  e
2. Existe  $\theta \in L_{\Phi}(\Omega)$  tal que

$$|\nabla u_n(x)| \leq \theta(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Graças a continuidade da função  $x \mapsto \phi(|x|)x$ ,  $x \in \mathbf{R}^N$ , temos

$$|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u| \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

e pela continuidade de  $\tilde{\Phi}$  teremos que

$$\tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u) \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Note também que

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| - \phi(|\nabla u|)|\nabla u|) &\leq \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n| + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|) \\ &\leq \tilde{\Phi}(\phi(\theta)\theta + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|). \end{aligned}$$

Como  $\tilde{\Phi}(\phi(\theta)\theta + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|) \in L^1(\Omega)$ , o resultado segue do Teorema da Convergência Dominada. ■

**Lema 4.3.2** *L é coercivo.*

**Demonstração:** Seja  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Pela condição  $(\phi_3)$  junto com o Lema 2.4.1 temos

$$\begin{aligned} \frac{\langle Lu, u \rangle}{\|\nabla u\|_\Phi} &= \frac{\int_\Omega \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx}{\|\nabla u\|_\Phi} \\ &\geq \ell \frac{\int_\Omega \Phi(|\nabla u|) dx}{\|\nabla u\|_\Phi} \\ &\geq \ell \min \left\{ \|\nabla u\|_\Phi^{\ell-1}, \|\nabla u\|_\Phi^{m-1} \right\} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

quando  $\|\nabla u\|_\Phi \rightarrow \infty$ . ■

**Lema 4.3.3** *L é monotônico.*

Para demonstrar o Lema 4.3.3 utilizaremos o seguinte resultado.

**Lema 4.3.4** *Seja  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  uma função contínua satisfazendo  $(\phi_1)$  e  $(\phi_2)$ . Então*

$$(\phi(\|x\|)x - \phi(\|y\|)y, x - y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n. \quad (4-11)$$

**Demonstração:** Sejam  $x, y \in \mathbf{R}^N$ . Se  $x = y$  a relação é trivialmente verificada. Suponha que  $x \neq y$ . Temos as seguintes possibilidades:

1.  $\|x\| = \|y\|$  (Claramente não nulos)

Neste caso,

$$\phi(\|x\|) = \phi(\|y\|).$$

Então

$$(\phi(\|x\|)x - \phi(\|y\|)y, x - y) = \phi(\|x\|)\|x - y\|^2 > 0$$

$$2. \|x\| < \|y\|$$

$$\begin{aligned} (\phi(\|x\|)x - \phi(\|y\|)y, x - y) &\geq \phi(\|x\|)\|x\|(\|x\| - \|y\|) + \phi(\|y\|)\|y\|(\|y\| - \|x\|) \\ &= (\phi(\|x\|)\|x\| - \phi(\|y\|)\|y\|)(\|x\| - \|y\|) \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{4-12}$$

haja visto que  $t\phi(t)$  é não decrescente. ■

**Demonstração do Lema 4.3.3:** Sejam  $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Pelo Lema 4.3.4 temos que

$$(\phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v)(\nabla u - \nabla v) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto,

$$\langle Lu - Lv, u - v \rangle = \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v)(\nabla u - \nabla v) dx \geq 0,$$

provando o Lema 4.3.3. ■

**Observação 4.3.1** Segue pelo Teorema de 4.3.1 (Browder-Minty) que: dado  $f \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  existe  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $Lu = f$ , isto é,

$$\int_{\Omega} \phi(\nabla u) \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Neste trabalho utilizaremos algumas propriedades adicionais de  $L$  as quais são demonstradas a seguir.

**Definição 4.3.2** Sejam  $E$  um espaço de Banach real reflexivo e

$$A : E \longrightarrow E'$$

um operador. Dizemos que  $A$  é:

(i) do tipo  $(S_+)$  se para toda sequência  $(u_n) \subseteq E$  tal que

1.  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E$ ,
2.  $\limsup_n \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ ,

tem-se

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } E;$$

(ii) pseudomonotônico se para toda sequência  $(u_n) \subseteq E$  tal que

1.  $u_n \rightharpoonup u$  em  $E$ ,

$$2. \limsup_n \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0,$$

*tem-se*

$$Au_n \rightharpoonup Au \text{ e } \langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle.$$

**Lema 4.3.5** *L é pseudomonotônico.*

**Demonstração:** De fato, pelo Lema 4.3.1 *L* é contínua, em particular hemicontínua. Além disso, pelo Lema 4.3.3 *L* é monotônica, então pelo Lema 2.98 (cf. [12]) *L* é pseudomonotônico. ■

**Lema 4.3.6** *L é um operador do tipo  $(S_+)$ .*

A seguir, alguns conceitos e resultados que serão utilizados na demonstração do Lema 4.3.6.

**Definição 4.3.3** *Sejam  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  e função  $\beta : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$ . Dizemos que  $\beta$  é estritamente monotônica se*

$$(\beta(x) - \beta(y), x - y) > 0, \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y.$$

Apresentaremos a seguir uma versão simplificada de um resultado devido a Dal Maso & Murat em [18].

**Lema 4.3.7** *Seja  $\beta : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  estritamente monotônica e  $(v_n) \subseteq \mathbf{R}^N$  tal que*

$$(\beta(v_n) - \beta(v), v_n - v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ em } \mathbf{R}.$$

*Então*

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v, \text{ em } \mathbf{R}^N.$$

**Demonstração:** Suponha, por contradição, que  $v_n$  não converge para  $v$ , então, considerando uma subsequência se necessário, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|v_n - v| \geq \delta, \text{ para todo } n.$$

Sejam

$$t_n := \delta |v_n - v|^{-1} \text{ e } u_n := t_n v_n + (1 - t_n) v.$$

Como

$$|u_n - v| = t_n |v_n - v| = \delta,$$

a sequência  $(u_n)$  é limitada, donde, considerando uma subsequência se necessário,  $(u_n)$  converge para algum  $u$  com  $|v - u| = \delta$ . É possível provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta(u_n) - \beta(v), u_n - v) = 0.$$

Por outro lado, temos que  $u_n \rightarrow u$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta(u_n) - \beta(v), u_n - v) = (\beta(u) - \beta(v), u - v),$$

donde

$$(\beta(u) - \beta(v), u - v) = 0$$

o que é uma contradição pois  $|u - v| = \delta > 0$  e  $\beta$  é estritamente monotônica. ■

**Observação 4.3.2** Em várias ocasiões exigiremos no lugar  $(\phi_2)$  a seguinte condição mais forte:

$$(\phi'_2) \quad t \mapsto t\phi(t) \text{ é estritamente crescente.}$$

Assim, concluímos da relação (4–12) que

$$(\phi(|x|)x - \phi(|y|)y, x - y) > 0, \quad x, y \in \mathbf{R}^N, \quad x \neq y,$$

ou seja, a função  $x \mapsto \phi(|x|)x$ ,  $x \in \mathbf{R}^N$ , é estritamente monotônica.

**Demonstração do Lema 4.3.6:** Seja  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que

1.  $u_n \rightharpoonup u$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  e
2.  $\limsup_n \langle Lu_n, u_n - u \rangle \leq 0$ .

Pelo Lema 4.3.4 o operador  $L$  é monotônico, isto é

$$\langle Lu_n - Lu, u_n - u \rangle = \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) dx \geq 0,$$

consequentemente

$$\langle Lu, u_n - u \rangle \leq \langle Lu_n, u_n - u \rangle$$

assim

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Lu, u_n - u \rangle \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Lu_n, u_n - u \rangle \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Lu_n, u_n - u \rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Lu_n, u_n - u \rangle = 0,$$

o que implica

$$\langle Lu_n - Lu, u_n - u \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

isto é,

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ em } L^1(\Omega),$$

daí

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Pela condição  $(\phi'_2)$  e o Lema 4.3.7 obtemos que

$$\nabla u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

e pela continuidade de  $\Phi$

$$\Phi(|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } x \in \Omega. \quad (4-13)$$

Afirmamos que

$$u_n \longrightarrow u, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Para tal usaremos o Teorema da Convergência Dominada Generalizado. Nesta direção, graças a (4-13) temos

$$f_n := \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Além disso,

$$f_n \leq \frac{m}{2} [\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \Phi(|\nabla u|)]$$

$$:= g_n.$$

Claramente

$$g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

onde

$$g := \frac{m}{2} [\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 + \Phi(|\nabla u|)]$$

e

$$\int_{\Omega} g(x) dx < \infty.$$

Para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) dx = \int_{\Omega} g(x) dx,$$

basta verificar que

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx. \quad (4-14)$$

Pelo lema 4.3.5  $L$  é pseudomonotônico, daí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Lu_n, u_n \rangle \\ &= \langle Lu, u \rangle \\ &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (4-15)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizado concluímos que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) dx \longrightarrow 0,$$

concluindo a demonstração. ■

## 4.4 Unicidade de Solução de (4-1)

A seguir mostraremos que o problema (4-1) possui uma única solução. Para isto, mostraremos que o operador  $L$ , substituindo a condição  $(\phi_2)$  por  $(\phi'_2)$ , é estritamente monotônico, ou seja,

$$\langle Lu - Lv, u - v \rangle > 0, \quad u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \quad u \neq v.$$

**Lema 4.4.1**  *$L$  é estritamente monotônico.*

**Demonstração:** Pelo Lema 4.3.3 segue que  $L$  é monotônico. Agora, sejam  $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  com  $u \neq v$ . Então existe  $\Omega_0 \subset \Omega$  de medida positiva tal que  $u \neq v$  e pelo Lema 4.3.4 temos

$$(\phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v)(\nabla u - \nabla v) > 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega_0.$$

Portanto,

$$\langle Lu - Lv, u - v \rangle \geq \int_{\Omega_0} (\phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v)(\nabla u - \nabla v) dx > 0,$$

o que prova o Lema 4.4.1. ■

**Proposição 4.4.1** *Suponha  $(\phi_1), (\phi'_2)$  e  $(\phi_3)$ . Então para cada  $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  o problema (4-1) tem no máximo uma solução.*

**Demonstração:** Sejam  $u_1, u_2 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  soluções de (4-1), isto é,

$$\int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_i|)) \nabla u_i \nabla v dx = \langle h, v \rangle, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \text{ e } i = 1, 2.$$

Daí,

$$\langle Lu_1 - Lu_2, v \rangle = \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_1|)) \nabla u_1 - \phi(|\nabla u_2|) \nabla u_2, \nabla v dx = 0, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Fazendo  $v = u_1 - u_2$  obtemos

$$\langle Lu_1 - Lu_2, u_1 - u_2 \rangle = \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_1|)) \nabla u_1 - \phi(|\nabla u_2|) \nabla u_2 (\nabla u_1 - \nabla u_2) dx = 0, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Mas pelo Lema 4.4.1  $L$  é estritamente monotônica, donde  $u_1 = u_2$ . ■

**Observação 4.4.1** Pelo Teorema 4.3.1 (Browder-Minty) e o Lema 4.4.1 o problema

$$Lu = f$$

tem uma única solução.

## 4.5 O Operador Solução Associado a (4-1)

De acordo com Teorema 4.2.1 e o Lema 4.4.1 fica definido o operador (solução)

$$\begin{aligned} S: W_0^{1,\Phi}(\Omega)' &\longrightarrow W_0^{1,\Phi}(\Omega) \\ h &\longmapsto Sh := u, \end{aligned} \tag{4-16}$$

onde  $u$  é a única solução de (4-1).

**Observação 4.5.1** O operador  $S$  é bijetor e  $L^{-1} = S$ . Basta mostrarmos que  $L^{-1} = S$ . Com efeito, dado  $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  segue do Teorema 4.2.1 que existe um único  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $Sh = u$ , isto é

$$L(Sh) = h.$$

Por outro lado, dado  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ , fica definido

$$h := Lu,$$

de modo que  $Sh = u$  e aplicando  $S$  obtemos

$$S(Lu) = Sh = u.$$



A seguir, formularos e demonstraremos várias propriedades sobre  $S$ .

**Lema 4.5.1** *O operador  $S$  é contínuo.*

**Demonstração:** Sejam  $(h_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  tal que

$$h_n \longrightarrow h, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega)',$$

$u_n := Sh_n$  e  $u := Sh$ , isto é

$$\langle h_n, v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v dx \text{ e}$$

$$\langle h, v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx,$$

$v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ .

Afirmamos que  $(\|\nabla u_n\|_{\Phi})$  é limitada. Suponha, por contradição, que não seja limitada. Então existe uma subsequência  $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$  tal que

$$\|\nabla u_{n_j}\|_{\Phi} \rightarrow \infty \text{ e } u_{n_j} \neq 0.$$

Então da relação  $t^2\phi(t) = \Phi(t) + \tilde{\Phi}(t\phi(t))$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_{n_j}|) dx &\leq \langle h_{n_j}, u_{n_j} \rangle \\ &\leq \|h_{n_j}\| \|\nabla u_{n_j}\|_{\Phi}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_{n_j}|) dx}{\|\nabla u_{n_j}\|_{\Phi}} \leq \|h_{n_j}\|,$$

o que contradiz [28, Lema 3.14], haja visto que  $(h_{n_j})$  é convergente.

Observe também que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \\ &= \langle h_n - h, u_n - u \rangle \\ &\leq \|h_n - h\| \|\nabla u_n - \nabla u\|_{\Phi} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donde

$$a_n := (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \rightarrow 0, \text{ em } L^1(\Omega),$$

donde

$$a_n(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

e considerando  $\beta(v) := \phi(|v|)v$ ,  $v \in \mathbf{R}^N$ , no Lema 4.3.7 obtemos que

$$\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Por fim mostraremos que

$$u_n \rightarrow u, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

o que equivale a mostrar que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) dx \rightarrow 0,$$

haja visto que  $\Phi \in \Delta_2$ . Para tal utilizaremos o Teorema da Convergência Dominada Generalizado de Lebesgue.

1. Inicialmente

$$\Phi(|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

haja visto que

$$\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

2. Como  $\Phi$  é crescente, satisfaz  $\Delta_2$  e é convexa temos

$$\begin{aligned} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) &\leq \Phi\left(2 \frac{|\nabla u_n| + |\nabla u|}{2}\right) \\ &\leq \frac{K}{2} (\Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|)) \end{aligned}$$

e como  $\Phi(t) \leq \phi(t)t^2$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) &\leq \frac{K}{2} (\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \Phi(|\nabla u|)) \\ &:= g_n \end{aligned}$$

3. Da continuidade de  $t^2\phi(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{2} (\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \Phi(|\nabla u|)) = \frac{K}{2} (\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 + \Phi(|\nabla u|)) := g,$$

q.t.p. em  $\Omega$ .

4. Observando que

$$\int_{\Omega} g(x) dx < \infty$$

e que

$$h_n \rightarrow h, \quad u_n \rightharpoonup u, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

assim

$$\begin{aligned} \langle h_n, u_n \rangle &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|^2 dx \\ &= \langle h_n - h, u_n \rangle + \langle h, u_n \rangle \\ &\rightarrow \langle h, u \rangle \\ &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) dx = \int_{\Omega} g(x) dx$$

Dos Itens 1-4 e do Teorema da Convergência Dominada Generalizado obtemos que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) dx \rightarrow 0,$$

isto é

$$u_n \rightarrow u, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

como queríamos demonstrar. ■

**Corolário 4.5.1** *O operador  $S$  é um homeomorfismo.*

**Demonstração:** Segue diretamente da Observação 4.5.1 e dos Lemas 4.3.1 e 4.5.1. ■

No que se segue, verificaremos propriedades de monotonicidade do operador  $S$ .

**Lema 4.5.2** *O operador  $S$  é monotônico, isto é,*

$$\langle h_1 - h_2, Sh_1 - Sh_2 \rangle \geq 0, \quad h_1, h_2 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)'.$$

**Demonstração:** Sejam  $h_1, h_2 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$ . Então

$$\langle h_i, v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla(Sh_i)|) \nabla(Sh_i) \nabla v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

Faça  $u_i := Sh_i$ ,  $i = 1, 2$ , e considerando  $v = u_1 - u_2$  obtemos

$$\langle h_1 - h_2, u_1 - u_2 \rangle = \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_1|) \nabla u_1 - \phi(|\nabla u_2|) \nabla u_2, \nabla u_1 - \nabla u_2) dx. \quad (4-17)$$

De (4-17) e do Lema 4.3.4 obtemos que

$$\langle h_1 - h_2, Sh_1 - Sh_2 \rangle \geq 0,$$

provando o Lema 4.5.2. ■

**Observação 4.5.2** *Se no lugar da condição  $(\phi_2)$  considerarmos a condição  $(\phi'_2)$  prova-se, de maneira análoga ao Lema 4.4.1, que  $S$  é estritamente monotônico.*

**Lema 4.5.3** *O operador  $S$  é coercivo.*

**Demonstração:** Mostraremos que dado  $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  e considerando  $u = Sh$

$$1) \|h\| \leq 2\|\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\|_{\tilde{\Phi}};$$

$$2) \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|)dx \leq \langle h, u \rangle;$$

$$3) \frac{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|)dx}{\|\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\|_{\tilde{\Phi}}} \rightarrow \infty, \text{ quando } \|h\| \rightarrow \infty.$$

**Prova de 1)** Como  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  é reflexivo, então existe  $w_h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $\|\nabla w_h\|_{\Phi} \leq 1$  e pela Desigualdade Triangular para  $\mathbf{R}^N$  teremos e para Espaços de Orlicz

$$\begin{aligned} \|h\| &= \langle h, w_h \rangle \\ &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla w_h dx \\ &\leq \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)|\nabla u||\nabla w_h| dx \\ &\leq 2\|\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\|_{\tilde{\Phi}} \|\nabla w_h\|_{\Phi} \\ &\leq 2\|\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\|_{\tilde{\Phi}}. \end{aligned}$$

**Prova de 2)** Observe que

$$t^2\phi(t) = \Phi(t) + \tilde{\Phi}(t\phi(t)). \quad (4-18)$$

Donde

$$\begin{aligned} \langle h, Sh \rangle &= \langle h, u \rangle \\ &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|)dx \end{aligned}$$

**Prova de 3)** Como  $\Phi \in \Delta_2$ , então existe  $K \geq 2$  tal que

$$\tilde{\Phi}(\phi(s)s) \leq K\Phi(s), \quad s \geq 0,$$

donde

$$\frac{1}{K} \int_{\Omega} \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|) dx \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx \quad (4-19)$$

De (4-19) e do Lema 2.4.2, fazendo  $v = \phi(|\nabla u|)|\nabla u|$ , obtemos que existe  $C > 0$  tal que

$$C \min \left\{ \|\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\|_{\tilde{\Phi}}^{\frac{\ell}{\ell-1}}, \|\phi(|\nabla u|)|\nabla u|\|_{\tilde{\Phi}}^{\frac{m}{m-1}} \right\} \leq \int_{\Omega} \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|) dx.$$

Agora recorrendo a 1), 2) e usando que  $\tilde{\Phi}(t\phi(t)) \leq \Phi(2t) \leq K\Phi(t)$

$$\begin{aligned} \min \left\{ \|h\|^{\frac{1}{m-1}}, \|h\|^{\frac{1}{\ell-1}} \right\} &\leq C_1 \frac{\int_{\Omega} \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|) dx}{\|h\|} \\ &\leq C_2 \frac{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx}{\|h\|} \\ &\leq C_2 \frac{\langle h, u \rangle}{\|h\|} \\ &= C_2 \frac{\langle h, Sh \rangle}{\|h\|}, \end{aligned}$$

para algumas constantes  $C_1, C_2 > 0$ . Onde

$$\frac{\langle h, Sh \rangle}{\|h\|} \rightarrow \infty, \text{ quando } \|h\| \rightarrow \infty,$$

provando o Lema 4.5.3. ■

**Lema 4.5.4** *O operador  $S$  é Pseudomonotônico.*

**Demonstração:** Análoga a demonstração do Lema 4.3.5. ■

**Lema 4.5.5** *Suponha que  $\phi$  satisfaça  $(\phi_1)$ ,  $(\phi'_2)$  e  $(\phi_3)$ , então  $S$  é um operador do tipo  $(S_+)$ .*

**Demonstração:** Seja  $(h_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  tal que

1.  $h_n \rightharpoonup h$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$  e

$$2. \limsup_n \langle h_n - h, Sh_n \rangle \leq 0.$$

Pelo Lema 4.5.2  $S$  é monotônica. Então, de maneira análoga ao que foi feito no Lema 4.3.6 mostra-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n - h, Sh_n - Sh \rangle = 0,$$

que

$$\nabla u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

onde  $u_n := Sh_n$  e  $u := Sh$ , e que

$$u_n \longrightarrow u, \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Mas, pelo Lema 4.3.1 o operador  $L$  é contínuo, donde

$$h_n = Lu_n \longrightarrow Lu = h, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

concluindo a demonstração do lema 4.5.5. ■

## 4.6 Regularidade da Solução de (4-1)

Nesta seção, discorreremos sobre a regularidade da solução do problema (4-1). Para tal, vamos supor que  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  regular e  $h \in L^\infty(\Omega)$ . Casos mais gerais que o problema (4-1) são tratados em [22] e [35].

O principal resultado desta seção é um caso particular de um resultado devido a Lieberman (cf. Apêndice C). Antes de enunciar o nosso resultado precisamos das seguintes hipóteses:

suponha que  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é de classe  $C^1(0, \infty)$  e sejam  $a_j : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , definidas por

$$a_j(\eta) = \begin{cases} \phi(|\eta|)\eta_j & , \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in \mathbf{R}^N - \{0\} \\ 0 & , \quad \eta = (0, \dots, 0). \end{cases}$$

com  $j = 1, \dots, N$ . Além disso, suponha que existam  $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0$  tais que

$$(\phi_4) \quad \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta) \xi_i \xi_j \geq \Gamma_1 \phi(|\eta|) |\xi|^2;$$

$$(\phi_5) \quad \left| \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta) \right| \leq \Gamma_2 \phi(|\eta|).$$

**Observação 4.6.1** Tomando  $\eta = (t, 0, \dots, 0)$  e  $\xi = (1, 0, \dots, 0)$  em  $(\phi_4)$  e  $(\phi_5)$ , obtemos

$$\Gamma_1 t \phi(t) \leq t(t \phi(t))' \leq \Gamma_2 t \phi(t), \quad (4-20)$$

e integrando

$$\ell := 1 + \Gamma_1 \leq \frac{t^2 \phi(t)}{\Phi(t)} \leq 1 + \Gamma_2 =: m \quad (4-21)$$

que é a condição  $(\phi_3)$ .

**Teorema 4.6.1** Suponha que  $\phi \in C^1(0, \infty)$  e satisfaz  $(\phi_1)$ ,  $(\phi'_2)$ ,  $(\phi_4)$  e  $(\phi_5)$ . Suponha que  $h \in L^\infty(\Omega)$ , então o problema (4-1) possui uma única solução  $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ , para algum  $\alpha > 0$ .

A demonstração do Teorema 4.6.1 depende do Lema a seguir e será feita no final desta seção.

**Lema 4.6.1** Suponha que  $\phi$  satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_3)$  e que  $h \in L^\infty(\Omega)$ . Seja  $u$  uma solução de (4-1), então  $u \in L^\infty(\Omega)$ .

Para demonstrar o Lema 4.6.1 usaremos o seguinte resultado (cf. [33, lemma 5.1, pg. 71]).

**Lema 4.6.2** Sejam  $k_0 > 0, \gamma > 0, \varepsilon > 0$  e  $\alpha \in [0, 1 + \varepsilon]$ . Suponha que  $u \in L^1(\Omega)$  satisfaça a estimativa

$$\int_{A_k} (u - k) dx \leq \gamma k^\alpha |A_k|^{1+\varepsilon},$$

para todo  $k \geq k_0$  onde  $A_k := \{x \in \Omega \mid u(x) > k\}$ . Então

$$\sup_{\Omega} u \leq C,$$

onde  $C = C(\gamma, \varepsilon, \alpha, k_0, \|u\|_{L^1(A_{k_0})})$  é uma constante positiva.

**Demonstração do Lema 4.6.1:** Verificaremos as hipóteses do Lema 4.6.2. Considerando  $k_0 = 1$ , mostraremos que

$$\int_{A_k} \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx \leq \text{const}(N, \|h\|_\infty, |\Omega|, \Phi) |A_k|, \quad k > 1. \quad (4-22)$$

De fato, considere  $\varphi := \max\{u - k, 0\} \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^{1,1}(\Omega) \cap W^1 L_\Phi(\Omega)$  (cf. Fuchs & Gongbao [22]), obtemos assim que

$$\int_{A_k} \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx = \int_{A_k} h(u - k) dx. \quad (4-23)$$

O lado direito de (4-23) é estimado usando a desigualdade de Hölder, como se segue

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} h(u-k)dx &\leq \|h\|_\infty |A_k|^{\frac{1}{N}} \left( \int_{A_k} |u-k|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq c(N) \|h\|_\infty |A_k|^{\frac{1}{N}} \int_{A_k} |\nabla u| dx \\
&\leq \int_{A_k} \left\{ \tilde{\Phi} \left( 2c(N) \|h\|_\infty |A_k|^{\frac{1}{N}} \right) + \Phi \left( \frac{1}{2} |\nabla u| \right) \right\} dx \\
&\leq \tilde{\Phi} \left( 2c(N) \|h\|_\infty |A_k|^{\frac{1}{N}} \right) |A_k| + \frac{1}{2} \int_{A_k} \Phi(|\nabla u|) dx \\
&\leq \tilde{\Phi} \left( 2c(N) \|h\|_\infty |A_k|^{\frac{1}{N}} \right) |A_k| + \frac{1}{2} \int_{A_k} \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned}$$

provando assim a estimativa (4-22).

Agora mostraremos que

$$\int_{A_k} |\nabla u| dx \leq \text{const}(N, \|h\|_\infty, |\Omega|, \Phi) |A_k|, \quad k \geq 1 \quad (4-24)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} |\nabla u| dx &= \int_{A_k \cap \{|\nabla u| \leq 1\}} |\nabla u| dx + \int_{A_k \cap \{|\nabla u| > 1\}} |\nabla u| dx \\
&\leq |A_k| + \frac{1}{\Phi(1)} \int_{A_k} \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx
\end{aligned}$$

e (4-24) segue de (4-22).

Por fim, observemos que da desigualdade de Hölder e de (4-24)

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} (u-k) dx &\leq |A_k|^{\frac{1}{N}} \left( \int_{A_k} |u-k|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \\
&\leq c(N) |A_k|^{\frac{1}{N}} \int_{A_k} |\nabla u| dx \\
&\leq \text{const}(N, \|h\|_\infty, |\Omega|, \Phi) |A_k|^{1+\frac{1}{N}}, \quad k > 1.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.6.2, concluímos que

$$\sup_{\Omega} u \leq \text{const}(N, \|h\|_\infty, |\Omega|, \Phi, \|u\|_{L^1(A_1)}).$$



De maneira análoga mostra-se que

$$\inf_{\Omega} u \geq \text{const}(N, \|h\|_{\infty}, |\Omega|, \Phi, \|u\|_{L^1(A_1)}),$$

donde  $u \in L^{\infty}(\Omega)$ . ■

**Prova do Teorema 4.6.1:** Verificaremos que as hipóteses do Teorema C.0.4 (cf. Apêndice C) são válidas.

Inicialmente, pelo Lema 4.6.1  $u \in L^{\infty}(\Omega)$ , neste caso  $M_0 = \|u\|_{\infty}$  e portanto  $|u| \leq M_0$  q.t.p. em  $\Omega$ .

No Teorema C.0.4 faça

$$A(x, z, p) = \phi(|p|)p, \quad B(x, z, p) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbf{R}, \quad p \in \mathbf{R}^N - \{0\}.$$

As condições  $(\phi_3)$  e  $(\phi_4)$  são, respectivamente, casos particulares dos itens (i) e (ii) da condição (C-2) do Apêndice C.

Lembrando (cf. C) que  $g(t) = \Phi'(t) = t\phi(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , o item (iii) é válido pois,

$$|A(x, z, p) - A(y, w, p)| = |\phi(|p|)p - \phi(|p|)p| = 0 \leq \Lambda_1(1 + g(|p|))[|x - y|^{\alpha} + |z - w|^{\alpha}],$$

para todos  $x, y \in \Omega$ ,  $z, w \in [-M_0, M_0]$   $p \in \mathbf{R}^N - \{0\}$ , e quaisquer constantes  $0 < \alpha \leq 1$  e  $\Lambda_1 \geq 0$ .

Por fim, o item (iv) é facilmente verificado, pois

$$|B(x, z, p)| = |h(x)| \leq |h|_{\infty} \leq |h|_{\infty} \left(1 + \frac{g(|p|)}{|p|}\right),$$

$p \in \mathbf{R}^N - \{0\}$ . ■

# Equações Multivalentes em Domínios Limitados via Minimização em Espaços de Orlicz-Sobolev: Minimização Global

Neste capítulo desenvolveremos argumentos de minimização sobre funcionais localmente Lipschitz definidos em espaços de Orlicz-Sobolev junto com técnicas de convexidade para investigar a existência de solução da equação multivalente (1–2). A regularidade da solução também será discutida.

## 5.1 Observações e Resultados Preliminares

Em primeiro lugar, lembramos que a definição de solução fraca de (1–2) é a seguinte:

**Definição 5.1.1** Dizemos que  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  é solução fraca de (1–2) se existe  $\rho = \rho_u \in L_{\Phi_*}(\Omega)' = L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  tal que

$$\rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \quad (5-1)$$

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \rho v dx + \int_{\Omega} h v, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \quad (5-2)$$

Consideraremos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi} u &= \lambda \phi(u) u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5-3)$$

García-Huidobro et al. [26] e Mustonen & Tienari [42], sob hipóteses mais gerais que  $(\phi_1) - (\phi_3)$ , consideram o problema de minimização

$$\lambda_{1,r} := \inf \left\{ \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx : u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} \Phi(u) dx = r \right\}, \quad (5-4)$$

para cada  $r > 0$ . Eles provam que existe  $u_r \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  não-negativa tal que  $u_r$  é solução do problema (5–4). Além disso,  $u_r$  é solução fraca da correspondente equação de Euler-Lagrange (5–3), ou seja,

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_r|) \nabla u_r \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\Omega} \phi(u_r) u_r \varphi dx, \quad \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \quad (5-5)$$

para algum  $\lambda > 0$ , como pode ser visto no teorema a seguir:

**Teorema 5.1.1** (Cf. [26, 42]) *Seja  $\Phi$  uma  $N$ -função. Então existe  $\lambda > 0$  tal que o problema (5–3) possui uma solução fraca. Se  $\Phi$  satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_3)$ , então  $u_r$  é não negativa.*

Quando  $r = 1$  denotaremos  $\lambda_1 = \lambda_{1,1}$ . A proposição a seguir compara os valores  $\lambda_1$  com  $\lambda$ .

**Proposição 5.1.1** *Suponha que  $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é contínua e satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então*

$$\frac{\ell}{m} \lambda_1 \leq \lambda \leq \frac{m}{\ell} \lambda_1.$$

**Demonstração:** Considerando  $\varphi = u_1$  em (5–5), usando  $(\phi_3)$  e  $\int_{\Omega} \Phi(u_1) = 1$  obtemos

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_1|) |\nabla u_1|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi(u_1) u_1^2 dx} \leq \frac{m}{\ell} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_1|) dx = \frac{m}{\ell} \lambda_1.$$

Por outro lado,

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_1|) |\nabla u_1|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi(u_1) u_1^2 dx} \geq \frac{\ell}{m} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_1|) dx = \frac{\ell}{m} \lambda_1,$$

o que prova a Proposição. ■

**Observação 5.1.1** *No caso  $\phi(t) = t^{p-2}$ ,  $1 < p < \infty$ , temos que  $\ell = m = p$  e portanto  $\lambda_1 = \lambda$ .*

A proposição abaixo relaciona a condição (1–10) com o autovalor  $\lambda_1$  do operador  $\Delta_{\Phi}$ . Relembramos algumas notações. Por Clement et al. [15, lema D2]

$$L_{\Phi}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L^{\ell}(\Omega) \quad (5-6)$$

e denotando por  $C_{\ell} > 0$  a melhor constante tal que

$$C_{\ell} |u|_{\ell}^{\ell} \leq \|u\|_{\Phi}^{\ell}, \quad u \in L_{\Phi}(\Omega). \quad (5-7)$$

**Proposição 5.1.2** *Suponha  $(\phi_1) - (\phi_3)$ . Então (1 – 10) vale se existem um função  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  e um subconjunto  $\Omega_0$  de  $\Omega$  com  $|\Omega_0| > 0$  tal que*

$$A_\infty \leq C_\ell \alpha \text{ q.t.p. em } \Omega, \alpha \leq \lambda_1 \text{ q.t.p. em } \Omega, \alpha < \lambda_1 \text{ q.t.p. em } \Omega_0. \quad (5-8)$$

**Demonstração: Caso 1:** Tome  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $\|v\|_\Phi = 1$  e  $\lambda_1 = \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx$ . Então

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx - \int_{v \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx &= \lambda_1 - \int_{v(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) \Phi(v) dx \\ &= \lambda_1 - \left( \int_{\Omega_0} + \int_{\Omega - \Omega_0} \right) C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx \\ &> \lambda_1 - \lambda_1 \int_{\Omega_0} C_\ell |v|^\ell dx - \int_{\Omega - \Omega_0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx \\ &\geq \lambda_1 - \lambda_1 \|v\|_\Phi^\ell \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Caso 2:** Seja  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $\|v\|_\Phi = 1$  e  $\lambda_1 < \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx$ . Então

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx - \int_{v \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx &> \lambda_1 - \int_{v(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx \\ &\geq \lambda_1 - \lambda_1 \|v\|_\Phi \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dos Casos 1 e 2, concluímos que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx - \int_{v(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx > 0, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \quad \|v\|_\Phi = 1.$$

Agora sejam

$$i(C_\ell \alpha) = \inf_{v \in W_0^{1,\Phi}, \|v\|_\Phi = 1} \left\{ \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx - \int_{v(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx \right\}$$

e  $(v_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  uma sequência minimizante para  $i(\alpha)$ , isto é

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla v_n|)dx - \int_{v_n(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v_n|^\ell dx \longrightarrow i(C_\ell \alpha), \quad \|v_n\|_\Phi = 1.$$

Mostraremos que  $(\|\nabla v_n\|_\Phi)$  é limitada. Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$

$$i(C_\ell \alpha) \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx - \int_{v_n(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v_n|^\ell dx \leq i(C_\ell \alpha) + \varepsilon \quad (5-9)$$

para  $n$  suficientemente grande. Como  $\alpha(x) \leq \lambda_1$  e  $\|v_n\|_\Phi = 1$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx &\leq i(\alpha) + \varepsilon + \int_{v_n(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v_n|^\ell dx \\ &\leq i(\alpha) + \varepsilon + \lambda_1. \end{aligned} \quad (5-10)$$

Se, por contradição,  $\|\nabla v_n\|_\Phi \rightarrow \infty$ , teremos que  $\|\nabla v_n\|_\Phi \geq 1$  e portanto

$$\|\nabla v_n\|_\Phi^\ell \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx \leq i(\alpha) + \varepsilon + \lambda_1,$$

o que é um absurdo, donde  $(\|\nabla v_n\|_\Phi)$  é limitada. Considerando uma subsequência se necessário, existe  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que

1.  $v_n \rightharpoonup v$  e  $\int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx \leq \liminf_n \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx$ ;
2.  $v_n \rightarrow v$  em  $L_\Phi(\Omega)$  e portanto  $\|v\|_\Phi = 1$ ;
3.  $v_n(x) \rightarrow v(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$ ;
4. Existe  $\theta_1 \in L_\Phi(\Omega)$  tal que

$$|v_n(x)| \leq \theta_1(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Logo pelo Teorema de Lebesgue

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx - \int_{v(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx \\ &\leq \liminf_n \left\{ \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx - \int_{v_n(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v_n|^\ell dx \right\} \\ &\leq i(C_\ell \alpha) + \varepsilon, \end{aligned}$$

donde

$$0 < \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx - \int_{v(x) \neq 0} C_\ell \alpha(x) |v|^\ell dx \leq i(C_\ell \alpha)$$

junto com (5-9), teremos que

$$0 < \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx - \int_{v(x) \neq 0} \alpha(x) |v|^\ell dx = i(C_\ell \alpha).$$

É fácil ver que  $i(A_\infty) \geq i(C_\ell \alpha) > 0$ , concluindo a demonstração. ■

A observação abaixo é importante para entender o significado de equações do tipo

$$-\Delta_\Phi u = f(x, u) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

**Observação 5.1.2** (Cf. [3]) A equação (1–17) é entendida como se segue. Defina

$$\langle -\Delta_\Phi u, v \rangle := \int_\Omega \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx, \quad u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Por [23, p. 263],

$$\int_\Omega \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|) dx \leq \int_\Omega \Phi(2|\nabla u|) dx < \infty,$$

que nos dá  $\phi(|\nabla u|)|\nabla u| \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ . Se  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  é uma solução do problema (1–2), então

$$-\Delta_\Phi u = J_1 + J_2 \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$$

onde  $J_1, J_2 : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$  são funcionais lineares limitados:

$$J_1(v) = \lambda \int_\Omega h v dx \text{ e } J_2(v) = \int_\Omega \rho v dx.$$

Note que  $J_1, J_2 \in L_{\Phi_*}(\Omega)' \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)'$ . Assim, pelo Teorema de Riesz para espaços de Orlicz,  $J_1, J_2 \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$ . Donde  $\Delta_\Phi u \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$ .

**Demonstração da Proposição 1.0.1:** Sejam

$$f(x, t) := \chi_{\{t > a\}}(t) \text{ e } j(u) := \int_\Omega f(x, t) dt = (u - a)^+.$$

Consideraremos o problema multivalente:

$$-\Delta_\Phi u \in \partial j(u) + h. \quad (5-11)$$

Afirmamos que (5–11) possui solução. Para este fim, verificaremos que as hipóteses do Teorema 1.0.2 são válidas.

Com efeito,

$$(u - a)^+ \leq |u|^\ell + (1 + a),$$

e também

$$|f(x, u)| \leq 1 \leq c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 u) + 1.$$

Além disso,

$$A_\infty(x) = \limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{(s - a)^+}{|s|^\ell} = 0,$$

donde

$$\inf_{v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \|v\|_\Phi=1} \left\{ \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx - \int_{\{v \neq 0\}} A_{\infty}(x) |v(x)|^{\ell} dx \right\} > 0.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow a-} \chi_{t>a}(t) = 0 < 1 = \lim_{t \rightarrow a+} \chi_{t>a}(t).$$

segue do Teorema 1.0.2 que existe  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $|\Gamma_a(u)| = 0$  e é solução de (1–25).

Logo  $u$  é solução de (1–25). Concluindo a demonstração da Proposição 1.0.1. ■

## 5.2 Preliminares as Demonstrações dos Teoremas Principais

Para demonstrarmos os Teoremas 1.0.1 e 1.0.2 precisamos de alguns resultados preliminares que provaremos a seguir.

O funcional energia associado ao problema (1–2) é

$$I(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \int_{\Omega} j(x, u) dx - \int_{\Omega} h u dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \quad (5-12)$$

Verificaremos no Apêndice A que  $I$  está bem definido.

Fazendo

$$Q(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \int_{\Omega} u h dx \quad \text{e} \quad J(u) = \int_{\Omega} j(x, u) dx, \quad (5-13)$$

temos

$$I(u) = Q(u) - J(u).$$

Pelo Lema A.0.2 temos

$$Q \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}) \quad \text{e} \quad \langle Q'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} h v dx. \quad (5-14)$$

O resultado a seguir é um corolário do Teorema de Aubin-Clarke (cf. Teorema 3.3.1).

**Corolário 5.2.1** *Sobre as hipóteses do Teorema 3.3.1, temos que*

$$J \in Lip_{loc}(W_0^{1,\Phi}(\Omega); \mathbf{R}) \quad \text{e}$$

$$\partial J(u) \subseteq \{w \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega) \mid w(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}. \quad (5-15)$$

**Demonstração:** Pelo Lema A.0.1  $J(u)$  está definido para todo  $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$ . Além disso, como  $C_0^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_*}(\Omega)$ , segue que  $\overline{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}^{L_{\Phi_*}} = L_{\Phi_*}(\Omega)$ . Pelo Teorema de Aubin-Clarke (cf. Teorema 3.3.1)  $J \in Lip_{loc}(L_{\Phi_*}(\Omega), \mathbf{R})$  e satisfaz a relação (3-2), então por [13, Teo. 2.2] concluímos que  $J$  é localmente Lipschitz em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  e satisfaz

$$\partial J(u) \subseteq \{w \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega) \mid w(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}$$

para  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ , provando o Corolário. ■

Assim, pelo Corolário 5.2.1 e a Proposição 3.2.1

$$I \in Lip_{loc}(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}) \text{ e } \partial I(u) = Q'(u) - \partial J(u). \quad (5-16)$$

Portanto,  $u$  é um ponto crítico de  $I$  se  $0 \in \partial I(u)$ , isto é, existe algum  $\rho \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  tal que

$$\langle Q'(u), v \rangle - \langle \rho, v \rangle = 0, \text{ for } v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

**Observação 5.2.1** *Nos argumentos abaixo,  $C$  denotará uma constante positiva (cumulativa).*

Abaixo estabeleceremos e provaremos alguns resultados técnicos.

**Lema 5.2.1** *Suponha  $(\phi_1) - (\phi_3)$  e (1-3). Então  $I$  é fracamente sequencialmente semi-contínua inferiormente (fssci).*

**Demonstração:** Em primeiro lugar, segue do Lema A.0.3 (cf. Apêndice A) que o funcional

$$u \mapsto \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

é fssci.

Agora, seja  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Então  $u_n \rightarrow u$  em  $L_{\Phi}(\Omega)$  e, considerando uma subsequência se necessário,  $u_n \rightarrow u$  q.t.p. em  $\Omega$  e existe  $\theta_2 \in L^\ell(\Omega)$  tal que  $|u_n| \leq \theta_2$  q.t.p. em  $\Omega$ . Por (1-3) temos

$$j(x, u_n) \leq A|u_n|^\ell + B(x) \leq A|\theta_2|^\ell + B(x).$$

Como  $s \mapsto j(x, s)$  é uma função localmente Lipschitz, em particular contínua, temos que  $j$  é uma função Carathéodory e portanto

$$j(x, u_n(x)) \longrightarrow j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\limsup \int_{\Omega} j(x, u_n) dx \leq \int_{\Omega} j(x, u) dx.$$



Assim,

$$\begin{aligned}
 I(u) &\leq \liminf \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx - \limsup \int_{\Omega} j(x, u_n) dx - \lim \int_{\Omega} h u_n dx \\
 &\leq \liminf \left\{ \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx - \int_{\Omega} j(x, u_n) dx - \int_{\Omega} h u_n dx \right\} \\
 &= \liminf I(u_n)
 \end{aligned}$$

mostrando que  $I$  é fssci. ■

### 5.3 Provas dos Teoremas 1.0.1 e 1.0.2.

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 1.0.1 e 1.0.2. Começaremos pelo Teorema 1.0.1.

**Demonstração do Teorema 1.0.1** Inicialmente mostraremos que  $I$  é coercivo. De fato, suponha por contradição que exista  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que

$$\|\nabla u_n\|_{\Phi} \rightarrow \infty \text{ e } I(u_n) \leq C.$$

Usando (1–3) e a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx &\leq \int_{\Omega} j(x, u_n) dx + \int_{\Omega} h u_n dx + C \\
 &\leq A \int_{\Omega} |u_n|^{\ell} dx + 2\|h\|_{\tilde{\Phi}} \|u_n\|_{\Phi} + C
 \end{aligned} \tag{5-17}$$

Afirmamos que  $\int_{\Omega} |u_n|^{\ell} dx \rightarrow \infty$ . De fato, suponha o contrário, que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{\ell} dx \leq C.$$

Pela imersão  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{\ell}(\Omega)$ , (5–17) e a Desigualdade de Poincaré (cf. [28]) temos

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx \leq C(1 + \|\nabla u_n\|_{\Phi}),$$

o que é impossível, pois conforme [28, lemma 3.14]

$$\frac{\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx}{\|\nabla u_n\|_{\Phi}} \rightarrow \infty,$$

mostrando que  $\int_{\Omega} |u_n|^\ell dx \rightarrow \infty$ . Observando que  $L_\Phi(\Omega) \xrightarrow{cont} L^\ell(\Omega)$  concluímos também que  $\|u_n\|_\Phi \rightarrow \infty$ .

Por (5-17), Lema 2.4.1 e a imersão  $L_\Phi(\Omega) \xrightarrow{cont} L^\ell(\Omega)$  temos

$$\|\nabla u_n\|_\Phi^\ell \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx \leq C \|u_n\|_\Phi^\ell + 2 \|h\|_{\tilde{\Phi}} \|u_n\|_\Phi + C. \quad (5-18)$$

Dividindo (5-18) por  $\|u_n\|_\Phi^\ell$  chegamos a

$$\|\nabla v_n\|_\Phi^\ell \leq C + \frac{2 \|h\|_{\tilde{\Phi}}}{\|u_n\|_\Phi^{\ell-1}} + \frac{C}{\|u_n\|_\Phi^\ell},$$

onde  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_\Phi}$ . Donde  $(\|\nabla v_n\|_\Phi)$  é limitada. Passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \text{ in } W_0^{1,\Phi}(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx \leq \liminf \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx, \\ v_n &\rightarrow v \text{ in } L_\Phi(\Omega) \text{ e existe } \theta_3 \in L^\ell(\Omega) \text{ tal que } |v_n| \leq \theta_3 \text{ q.t.p. em } \Omega, \\ v &\neq 0, \text{ pois } W_0^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{comp} L_\Phi(\Omega) \text{ e portanto } \|v\|_\Phi = 1. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\limsup \int_{\Omega} \frac{j(x, \|u_n\|_\Phi v_n)}{\|u_n\|_\Phi^\ell} dx \leq \int_{\{v \neq 0\}} A_\infty(x) |v(x)|^\ell dx. \quad (5-19)$$

Com efeito, usando (1-3) estimamos

$$\begin{aligned} \frac{j(x, u_n(x))}{\|u_n\|_\Phi^\ell} &= \frac{j(x, \|u_n\|_\Phi v_n(x))}{\|u_n\|_\Phi^\ell} \\ &\leq \frac{1}{\|u_n\|_\Phi^\ell} \left( A(\|u_n\|_\Phi v_n(x))^\ell + B(x) \right) \\ &\leq A \theta_3^\ell(x) + B(x). \end{aligned} \quad (5-20)$$

Além disso,

$$\limsup \frac{j(x, \|u_n\|_\Phi v_n)}{\|u_n\|_\Phi^\ell} \leq \limsup \frac{j(x, \|u_n\|_\Phi v_n)}{\|u_n\|_\Phi^\ell |v_n(x)|^\ell} |v_n(x)|^\ell \chi_{\{v_n \neq 0\}}$$

donde

$$\limsup \frac{j(x, \|u_n\|_\Phi v_n)}{(\|u_n\|_\Phi v_n(x))^\ell} |v_n(x)|^\ell \chi_{\{v_n \neq 0\}} \leq A_\infty(x) |v(x)|^\ell, \quad v(x) \neq 0. \quad (5-21)$$

Por (5-20), (5-21) e o Lema de Fatou, concluímos (5-19). Usando o fato que  $\Phi$  é

convexa e contínua, o Lema 2.4.1,  $I(u_n) \leq C$  e (5 – 19) segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v|) dx &\leq \liminf \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx \\
 &\leq \liminf \frac{1}{\|u_n\|_{\Phi}^{\ell}} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx \\
 &\leq \liminf \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{j(x, \|u_n\|_{\Phi} v_n)}{\|u_n\|_{\Phi}^{\ell}} + \frac{2\|h\|_{\tilde{\Phi}}}{\|u_n\|_{\Phi}^{\ell-1}} \right] dx + \frac{C}{\|u_n\|_{\Phi}^{\ell}} \right\} \\
 &\leq \limsup \int_{\Omega} \frac{j(x, \|u_n\|_{\Phi} v_n)}{\|u_n\|_{\Phi}^{\ell}} dx \\
 &\leq \int_{\{v \neq 0\}} A_{\infty}(x) |v(x)|^{\ell} dx,
 \end{aligned}$$

que contradiz (1 – 10). Portanto,  $I$  é coercivo. Pelo Lema 5.2.1, existe  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que

$$I(u) = \min_{v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)} I(v)$$

consequentemente  $u$  é um ponto crítico, isto é,  $0 \in \partial I(u)$ . Donde, existe  $\rho \in \partial J(u)$  tal que

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \rho v dx + \int_{\Omega} h v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

e pelo Corolário 5.2.1

$$\rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

ou seja,  $u$  é uma solução para o problema (1 – 2). ■

Para demonstrarmos o Teorema 1.0.2 precisamos de alguns resultados técnicos, os quais serão apresentados a seguir. Iniciamos lembrando uma proposição cuja demonstração encontra-se em Chang [13] (cf. também a Proposição 3.1.3).

**Proposição 5.3.1** *Seja  $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função Baire mensurável tal que  $s \mapsto f(x, s)$  seja não decrescente q.t.p.  $x \in \Omega$  e satisfaça (1 – 16). Então a função*

$$j(x, t) := \int_0^t f(x, s) ds, \tag{5-22}$$

*é localmente Lipschitz q.t.p.  $x \in \Omega$  e*

$$\partial j(x, t) = [f(x, t - 0), f(x, t + 0)]. \tag{5-23}$$

**Demonstração:** Mostraremos que a função  $t \mapsto j(x, t)$  é localmente Lipschitz, q.t.p.  $x \in \Omega$ . De fato, sejam  $t \in \mathbf{R}$  e  $\varepsilon > 0$ . Considere  $s_1, s_2 \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  e suponha, sem perda de generalidade, que  $s_1 < s_2$ , segue de (1 – 16) e de  $\tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*$  ser crescente

$$\begin{aligned}
 |j(x, s_2) - j(x, s_1)| &\leq \int_{s_1}^{s_2} |f(x, s)| ds \\
 &\leq \int_{s_1}^{s_2} \left[ c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 s) + b(x) \right] ds \\
 &\leq \left[ c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2(t + \varepsilon)) + b(x) \right] |s_2 - s_1| \\
 &= C(x) |s_2 - s_1|,
 \end{aligned} \tag{5-24}$$

onde  $C(x) := \left[ c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2(t + \varepsilon)) + b(x) \right]$ , donde  $j(x, \cdot) \in Lip_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ . Da desigualdade (5 – 24) vemos que  $j$  é localmente Lipschitziana. A demonstração da relação (5 – 23) é encontrada em Chang [13]. ■

O seguinte resultado é baseado no Teorema 2.3 (cf. [13]) o qual determina condições para que se tenha a igualdade na relação (5 – 15).

**Corolário 5.3.1** *Sejam  $\Phi$  satisfazendo  $(\phi_1) - (\phi_3)$  e  $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é uma função Baire-mensurável, não decrescente na segunda variável satisfazendo (1 – 16). Então a função  $J$  é convexa e*

$$\partial J(u)(x) = [f(x, u(x) - 0), f(x, u(x) + 0)]$$

para todo  $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$  ou  $u \in W_0^{1, \Phi}(\Omega)$ .

**Demonstração:** Para verificar que  $J$  é convexa, basta mostrarmos que a função  $s \mapsto j(x, s)$  é convexa, para isto, observemos que esta é não decrescente e também localmente Lipschitz, portanto contínua, e proceder como no Lema 3.2.2 (cf. [32]).

Como  $f$  é Baire mensurável, segue da Proposição 5.3.1 que

$$\partial j(x, t) = [f(x, t - 0), f(x, t + 0)], \quad t \in \mathbf{R} \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Recorrendo ao Teorema 3.3.1 e ao Corolário 5.2.1 obtemos que

$$\partial J(u)(x) \subseteq [f(x, u(x) - 0), f(x, u(x) + 0)] \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega$$

sempre que  $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$  ou  $u \in W_0^{1, \Phi}(\Omega)$ .

Por outro lado, seja  $w \in L_{\Phi_*}(\Omega)$  tal que  $w(x) \in [f(x, u(x) - 0), f(x, u(x) + 0)]$  q.t.p.  $x \in \Omega$ . Então (basta avaliar graficamente)

$$\begin{aligned} w(x)(v(x) - u(x)) &\leq \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt \\ &= \left( \int_0^{v(x)} - \int_0^{u(x)} \right) f(x, t) dt \\ &= j(x, v(x)) - j(x, u(x)). \end{aligned}$$

Integrando

$$(w, v - u) = \int_{\Omega} w(x)(v(x) - u(x)) dx \leq \int_{\Omega} j(x, v(x)) dx - \int_{\Omega} j(x, u(x)) dx \leq J(v) - J(u),$$

e lembrando que

$$\partial J(u) = \{w \in L_{\Phi_*} \mid (w, v - u) \leq J(v) - J(u)\}$$

concluimos que  $w \in \partial J(u)$ , sempre que  $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$ . Pelo Corolário 5.2.1 o mesmo vale em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . ■

A seguir provaremos o Teorema 1.0.2, que é baseado no Teorema 4 de Corrêa & Gonçalves em [16], o qual trata sobre a medida do conjunto de nível  $\Gamma_a(u)$ .

**Prova do Teorema 1.0.2:** Afirmamos que  $f$  é Baire mensurável. De fato, defina

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & , t < a \\ f(x, a - 0) & , t \geq a \end{cases}$$

e

$$f_2(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & , t > a \\ f(x, a - 0) & , t \leq a \end{cases}$$

que são Baire mensuráveis, pois são contínuas na segunda variável. Como os conjuntos  $(-\infty, a)$  e  $[a, \infty)$  são Baire mensuráveis então

$$f(x, t) = \chi_{(-\infty, a)}(t) \cdot f_1(x, t) + \chi_{[a, \infty)}(t) \cdot f_2(x, t)$$

é Baire mensurável, provando a afirmação.

Agora, como  $f(x, t)$  é não decrescente em  $t$ , segue do Corolário 5.3.1 que

$$\partial J(v)(x) = \partial j(x, v(x)) = [f(x, v(x) - 0), f(x, v(x) + 0)], \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Seja  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  uma solução de (1–2) que minimiza o funcional energia  $I$ , então

$$-\Delta_{\Phi} u(x) \in \partial j(x, u(x)) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

e

$$I(u) \leq I(u + \varepsilon \varphi), \quad \varepsilon > 0 \text{ e } \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

donde

$$\int_{\Omega} \frac{j(x, u + \varepsilon \varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} dx \leq \int_{\Omega} \frac{\Phi(|\nabla(u + \varepsilon \varphi)|) - \Phi(|\nabla u|)}{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} h \varphi dx. \quad (5-25)$$

Consideremos os seguintes casos:

**Caso 1:** Considere  $\varphi \geq 0$  e  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Pelo Teorema do Valor Médio de Lebourg existe  $\rho_\varepsilon$  tal que

$$\frac{j(x, u + \varepsilon \varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} = \xi_\varepsilon \varphi$$

onde

$$u < \rho_\varepsilon < u + \varepsilon \varphi \text{ e } \xi_\varepsilon \in \partial j(x, \rho_\varepsilon) = [f(x, \rho_\varepsilon - 0), f(x, \rho_\varepsilon + 0)].$$

Usando isto e a condição (1 – 16) obtemos

$$\begin{aligned} |\xi_\varepsilon| &\leq |f(x, \rho_\varepsilon - 0)| + |f(x, \rho_\varepsilon + 0)| \\ &\leq 2c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 \rho_\varepsilon) + 2b(x). \end{aligned}$$

Além disso, como  $|\rho_\varepsilon| \leq |u| + |\varphi|$  obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{j(x, u + \varepsilon \varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} \right| &= |\xi_\varepsilon| \varphi \\ &\leq [2c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 \rho_\varepsilon) + 2b(x)] \varphi \\ &\leq [2c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 |u| + c_2 |\varphi|) + 2b(x)] \varphi \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil ver que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{j(x, u + \varepsilon \varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} = f(x, u(x) + 0) \varphi(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Aplicando o Teorema de Lebesgue em (5 – 25) obtemos

$$\int_{\Omega} f(x, u(x) + 0) \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} h \varphi dx$$

assim,

$$-\Delta_{\Phi} u \geq f(x, u(x) + 0) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

portanto,

$$-\Delta_{\Phi} u = f(x, u(x) + 0) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \quad (5-26)$$

**Caso 2:** Considere  $\varphi \leq 0$  e  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . De maneira análoga ao que foi feito no Caso 1

mostra-se que

$$-\Delta_{\Phi} u = f(x, u(x) - 0) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \quad (5-27)$$

Suponha, por contradição, que  $|\Gamma_a(u)| \neq 0$ . Por (5-26) e (5-27) obtemos que

$$f(x, a - 0) = f(x, a + 0) \text{ q.t.p. } x \in \Gamma_a(u),$$

o que contradiz (1-14). Donde  $|\Gamma_a(u)| = 0$ .

Como  $u$  é solução de (1-2) existe  $\rho \in \partial J(u)$  tal que

$$\int_{\Omega} [-\Delta_{\Phi} u - \rho - h] \varphi dx = 0, \quad \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Donde

$$-\Delta_{\Phi} u(x) = \rho(x) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

e como  $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R} - \{a\})$  e  $|\Gamma_a(u)| = 0$  concluímos que

$$-\Delta_{\Phi} u(x) = f(x, u(x)) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

■

## 5.4 Demonstrações dos Teoremas 1.0.3 e 1.0.4

Para demonstrarmos o Teorema 1.0.3 precisamos de alguns resultados preliminares. Seja

$$\phi_{\gamma}(t) = \gamma \frac{(\sqrt{1+t^2} - 1)^{\gamma-1}}{\sqrt{1+t^2}} \quad t \geq 0.$$

**Lema 5.4.1** *A função  $\Phi$  satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_2)$ , e*

$$\gamma \leq \frac{t^2 \phi(t)}{\Phi(t)} \leq 2\gamma, \quad t > 0. \quad (5-28)$$

Além disso, quando  $1 < \gamma < N$ ,

$$L_{\Phi}(\Omega) = L^{\gamma}(\Omega),$$

$$|u|_{\Phi} \leq |u|_{\gamma}, \quad u \in L_{\Phi}(\Omega), \quad (5-29)$$

e

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^{1,\gamma}(\Omega).$$

**Demonstração:** Naturalmente  $\phi \in C(0, \infty)$ . Por cálculos diretos mostra-se que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\phi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t\phi(t) = \infty, \quad (t\phi(t))' > 0 \text{ e } \gamma \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq 2\gamma,$$

mostrando  $(\phi_1)$  e  $(\phi_2)$ . Agora observemos que

$$\begin{aligned} \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} &= \frac{\gamma^2(\sqrt{1+t^2}-1)^{\gamma-1}}{\sqrt{1+t^2}(\sqrt{1+t^2}-1)^\gamma} \\ &= \frac{\gamma^2}{\sqrt{1+t^2}(\sqrt{1+t^2}-1)} \\ &= \gamma \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right) \end{aligned}$$

de onde prova-se facilmente (5–28). Para provar que  $L_\Phi(\Omega) = L^\gamma(\Omega)$ , basta observar que

$$\Phi(t) \leq t^\gamma, \quad t \geq 0 \text{ e } \Phi(t) \geq \frac{1}{2^\gamma} t^\gamma, \quad t \geq 2$$

e usar [32, thm. 3.17.3]. Como consequência,  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ ,

Para provar (5–29), considere  $u \in L^\gamma(\Omega)$  e  $k > 0$  e note que

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^\gamma}{k^\gamma} = 1 \text{ se, e somente se, } k = |u|_\gamma.$$

Como  $\Phi(t) \leq t^\gamma$  para  $t \geq 0$  temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k}\right) dx \leq \frac{|u|_\gamma^\gamma}{k^\gamma}.$$

Fazendo  $k = |u|_\gamma$  segue da definição de  $\|u\|_\Phi$  a relação (5–29). Isto prova o Lema 5.4.1.

■

**Proposição 5.4.1** *Suponha (1–21). Então (1–10) vale.*

**Demonstração:** Por (1–21) e  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ ,

$$\inf_{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), |u|_{L^\gamma}=1} \left\{ \int_\Omega (\sqrt{1+|\nabla u|^2}-1)^\gamma dx - \int_{\{u \neq 0\}} A_\infty(x) |u(x)|^\gamma dx \right\} > 0,$$



Seja  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $\|u\|_\Phi = 1$ . Recordando que  $\Phi(t) = (\sqrt{1+t^2} - 1)^\gamma$  e fazendo  $v = \frac{u}{|u|_\gamma}$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\delta \leq \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|\nabla u|}{|u|_\gamma}\right) dx - \frac{1}{|u|_\gamma^\gamma} \int_{\{u \neq 0\}} A_\infty(x) |u(x)|^\gamma dx.$$

Usando a desigualdade  $1 = \|u\|_\Phi \leq |u|_\gamma$  dada pelo Lema 5.4.1 e aplicando o Lema 2.4.1 temos

$$\begin{aligned} \delta &\leq \max \left\{ \frac{1}{|u|_\gamma^\gamma}, \frac{1}{|u|_\gamma^{2\gamma}} \right\} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \frac{1}{|u|_\gamma^\gamma} \int_{\{u \neq 0\}} A_\infty(x) |u(x)|^\gamma dx \\ &\leq \frac{1}{|u|_\gamma^\gamma} \left\{ \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \int_{\{u \neq 0\}} A_\infty(x) |u(x)|^\gamma dx \right\} \\ &\leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \int_{\{u \neq 0\}} A_\infty(x) |u(x)|^\gamma dx \end{aligned}$$

Isto prova a Proposição 5.4.1. ■

**Proposição 5.4.2** *Suponha que  $1 < \gamma < \frac{N}{2}$  e (1–19). Então (1–9) vale.*

**Demonstração:** Seja  $\Phi(t) = t^\gamma$ . Pelo Lema 2.4.4,

$$\Phi_*(1) t^{\gamma^*} \leq \Phi_*(t), \quad t \geq 1.$$

Usando a desigualdade acima e (1–19) temos que (1–9). Isto prova a Proposição 5.4.2. ■

**Prova do Teorema 1.0.3** Basta aplicarmos o Lema 5.4.1, as Proposições 5.4.1 e 5.4.2 e o Teorema 1.0.1. ■

**Prova do Teorema 1.0.4** Basta observarmos que a condição (1–23) é equivalente a condição (1–16) do Teorema 1.0.2, pois  $L_{\Phi_*}(\Omega) = L^{\gamma^*}(\Omega)$ . Por fim, basta aplicar o Teorema 1.0.2. ■

# Problemas Quasilineares Multivalentes com Crescimento Crítico em um Domínio Limitado: Princípio Variacional de Ekeland e Concentração-Compacidade

Neste capítulo utilizaremos o Princípio Variacional de Ekeland e argumentos da teoria de pontos críticos para funcionais Localmente Lipschitzianos em espaços de Orlicz-Sobolev, juntamente com convexidade e técnicas de compacidade para investigar a existência de solução da equação multivalente (1 – 26), isto é,

$$-\Delta_{\Phi} u \in \partial j(., u) + \lambda h \text{ in } \Omega,$$

onde  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  é um domínio limitado regular,  $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  é uma N-função apropriada,  $\Delta_{\Phi}$  é o correspondente  $\Phi$ -Laplaciano,  $\lambda > 0$  é um parâmetro,  $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  é uma função mensurável,

$$j(x, t) = \sigma(x) [\Phi_*(t) - \Phi_*(a)] \chi_{\{t > a\}}(t)$$

e  $\partial j(., u)$  é o subdiferencial de uma função  $j$  associada com o crescimento crítico.

Observamos que nossos resultados funcionam (acompanhe as demonstrações abaixo) para funções  $j(x, t)$  mais gerais, por exemplo

$$j(x, t) = \sum_{i=1}^k \sigma_i(x) [\Phi_*(t) - \Phi_*(a_i)] \chi_{\{t > a_i\}}(t),$$

onde  $\sigma_i \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\sigma_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , e  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ .

## 6.1 Estrutura Variacional Associada a (1 – 26)

O funcional Energia associado a (1 – 26) é  $I := I_{\lambda,a}$  definido em (1 – 28), isto é,

$$I(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \int_{\Omega} j(x, u) dx - \lambda \int_{\Omega} h u dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Exploraremos abaixo algumas propriedades de  $I$ . Em primeiro lugar escrevemos

$$I(u) = Q_{\lambda}(u) - J(u),$$

onde

$$Q_{\lambda}(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \lambda \int_{\Omega} h u dx$$

e

$$J(u) = \int_{\Omega} j(x, u) dx.$$

Mostra-se que (cf. Lema A.0.2 no Apêndice A)

$$Q_{\lambda} \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}) \text{ e } \langle Q'_{\lambda}(u), v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} h v dx.$$

No resultado abaixo, usamos o Teorema de Aubin-Clarke (cf. Teorema 3.3.1) para obter uma expressão para  $\partial j(x, t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}$ .

**Lema 6.1.1** *Seja  $j$  como em (1 – 27). Então*

$$\partial j(x, t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ [0, \sigma(x) \phi_*(a)], & t = a, \\ \sigma(x) \phi_*(t), & t > a, \end{cases}$$

e o funcional

$$J(u) := \int_{\Omega} j(x, u(x)) dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

satisfaz

$$J \in Lip_{loc}(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}) \text{ e } \partial J(u) \subseteq \left\{ \rho \in L_{\widehat{\Phi}_*}(\Omega) \mid \rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \right\}. \quad (6-1)$$

**Observação 6.1.1** *Notemos que  $J(u)$  está definido para  $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$ . Para isto, basta observar que*

$$j(x, t) := \sigma(x) [\Phi_*(t) - \Phi_*(a)] \chi_{\{t > a\}}(t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}$$

satisfaz a condição (1–9). De fato, pelo Lema 2.1.1 item 7 temos

$$\phi_*(t) \leq \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(2t).$$

Pelo Lema 6.1.1 obtemos

$$0 \leq \rho \leq |\sigma|_\infty \phi_*(t) \leq |\sigma|_\infty \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(2t), \quad \rho \in \partial j(x, t).$$

Portanto, pelo Lema A.0.1 concluímos que  $J(u)$  está definido para  $u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$ .

**Demonstração do Lema 6.1.1:** Pela definição de  $j$ ,  $j(x, \cdot)$  é diferenciável para cada  $t \neq a$  e

$$\partial j(x, t) = \{j'(x, t)\} = \{\sigma(x)\phi_*(t)\chi_{\{t>a\}}\}.$$

Por outro lado, como  $j \in L_{loc}^\infty(\Omega \times \mathbf{R})$  temos por [41, Prop. 1.7] que

$$\partial j(x, a) = \left[ \lim_{t \rightarrow a^-} \chi_{\{t>a\}} \sigma(x)\phi_*(t), \lim_{t \rightarrow a^+} \chi_{\{t>a\}} \sigma(x)\phi_*(t) \right] = [0, \sigma(x)\phi_*(a)].$$

Seja  $\rho = \rho(x) \in \partial j(x, t), t \geq 0$ . Usando a relação (2–11) temos

$$0 \leq t\rho \leq \sigma(x)t\phi_*(t) \leq m^*\sigma(x)\Phi_*(t) \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

Na realidade, se  $t > a$ , então

$$\ell^*\sigma(x)\Phi_*(t) \leq t\rho \leq m^*\sigma(x)\Phi_*(t) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \quad (6-2)$$

Note que se  $\rho := \rho(x) \in \partial j(x, t)$  então

$$0 \leq \rho \leq \sigma(x)\phi_*(t) \leq |\sigma|_\infty \phi_*(t).$$

Lembrando que  $\tilde{\Phi}_*(\phi_*(t)) \leq \Phi_*(2t)$ , (cf. [23, p. 263]) temos

$$0 \leq \rho \leq |\sigma|_\infty \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(2t),$$

que é a condição (3–1) do Teorema de Aubin-Clarke (cf. Teorema 3.3.1). Daí  $J \in Lip_{loc}(L_{\Phi_*}(\Omega), \mathbf{R})$  e  $J$  satisfaz a condição (3–2). Por fim, por [13, Teo. 2.2] obtemos a condição (6–1). Isto prova o Lema 6.1.1. ■

Com base em (6–1) e o Lema A.0.2, concluímos que

$$I \in Lip_{loc}(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}) \quad \text{e} \quad \partial I(u) = Q'_\lambda(u) - \partial J(u).$$

Relembramos que  $u$  é um ponto crítico de  $I$  se  $0 \in \partial I(u)$  isto é, existe algum  $\rho \in \partial J(u)$  tal

que

$$\langle Q'_\lambda(u), v \rangle - \langle \rho, v \rangle = 0 \text{ para } v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Por conseguinte, se  $u$  é um ponto crítico de  $I$  então  $u$  é solução da equação (1–26) no sentido da definição 1.0.2.

## 6.2 Limitação Local de $I$ : Sequência de Ekeland

O lema seguinte tem o objetivo de verificar que o funcional  $I$ , restrito a uma bola de centro na origem, satisfaz as hipóteses do Princípio variacional de Ekeland.

**Lema 6.2.1** *Existem  $\lambda_0, r > 0$  tais que para cada  $\lambda \in (0, \lambda_0)$  e  $a > 0$*

- (i)  $\inf_{\partial B_r(0)} I(v) > 0$ ;
- (ii)  $-\infty < c := \inf_{B_r(0)} I < 0$ .

**Observação 6.2.1** *Graças a imersão  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{\text{cont}} L_{\Phi_*}(\Omega)$  denotaremos por  $S$  a melhor constante positiva tal que*

$$S = \inf_{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), u \neq 0} \frac{\|u\|^\ell}{\|u\|_{\Phi_*}^\ell}. \quad (6-3)$$

**Demonstração do Lema 6.2.1** Inicialmente mostraremos (i). De fato, usando o Lema 2.4.1 e a desigualdade de Hölder temos

$$I(u) \geq \min\{\|u\|^\ell, \|u\|^m\} - \int_{\Omega} j(x, u) dx - 2\lambda \|h\|_{\tilde{\Phi}_*} \|u\|_{\Phi_*} \quad (6-4)$$

Segue da definição de  $j$  que  $j(x, t) \leq |\sigma|_{\infty} \Phi_*(t)$ ,  $(x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}$ . Pelo Lema 2.4.2 e a Observação 6.2.1 temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} j(x, u) dx + 2\lambda \|h\|_{\tilde{\Phi}_*} \|u\|_{\Phi_*} &\leq |\sigma|_{\infty} \int_{\Omega} \Phi_*(u) dx + 2\lambda \|h\|_{\tilde{\Phi}_*} \|u\|_{\Phi_*} \leq \\ &|\sigma|_{\infty} \max\{\|u\|_{\Phi_*}^{\ell^*}, \|u\|_{\Phi_*}^{m^*}\} + 2\lambda \|h\|_{\tilde{\Phi}_*} \|u\|_{\Phi_*} \leq \end{aligned} \quad (6-5)$$

$$|\sigma|_{\infty} \max\left\{\frac{1}{S^{\frac{\ell^*}{\ell}}}\|u\|^{\ell^*}, \frac{1}{S^{\frac{m^*}{\ell}}}\|u\|^{m^*}\right\} + \frac{2\lambda}{S^{\frac{1}{\ell}}}\|h\|_{\tilde{\Phi}_*}\|u\|.$$

Juntando (6–4) e (6–5) encontramos

$$I(u) \geq \min\{\|u\|^\ell, \|u\|^m\} - |\sigma|_{\infty} \max\left\{\frac{1}{S^{\frac{\ell^*}{\ell}}}\|u\|^{\ell^*}, \frac{1}{S^{\frac{m^*}{\ell}}}\|u\|^{m^*}\right\} - \frac{2\lambda}{S^{\frac{1}{\ell}}}\|h\|_{\tilde{\Phi}_*}\|u\|.$$

Fazendo  $0 < \|u\| \leq 1$  segue da desigualdade acima que

$$I(u) \geq \|u\|^m \left( 1 - \beta \|u\|^{\ell^*-m} - \alpha \lambda \|u\|^{1-m} \right),$$

onde  $\alpha := 2/S_\ell^1 \|h\|_{\tilde{\Phi}_*}$  e  $\beta := |\sigma|_\infty / S_\ell^{\ell^*}$ . Seja  $P(s) := 1 - \beta s^{\ell^*-m}$ ,  $s > 0$ . Como  $\ell^* > m$  segue que  $P(s) \geq 1/2$  se, e somente se,  $s \leq s_0 := \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{1/\ell^*-m}$ . Além disso,

$$P(s_0) - \lambda \alpha s_0^{1-m} \geq \frac{1}{4} \text{ portando } \lambda \leq \lambda_0 := \frac{1}{4\alpha} s_0^{m-1}.$$

Escolhendo  $r := \min\{1, s_0\}$  segue que

$$I(u) \geq \frac{r^m}{4} > 0 \text{ para } u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \text{ com } \|u\| = r.$$

Isto mostra (i). Agora mostraremos (ii). Usando o Lema 2.4.1, a imersão contínua  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_*}(\Omega)$  e a desigualdade de Hölder obtemos que

$$I(u) \geq -|\sigma|_\infty \max\left\{\frac{1}{S_\ell^{\ell^*}} r^{\ell^*}, \frac{1}{S_\ell^{m^*}} r^{m^*}\right\} - \frac{2\lambda}{S_\ell^1} \|h\|_{\tilde{\Phi}} r > -\infty, \quad \|u\| \leq r.$$

Por outro lado, dados  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  positiva em  $\Omega$  e  $t \in (0, 1)$  temos que

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &\leq \max\{t^\ell, t^m\} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla \varphi|) dx - t\lambda \int_{\Omega} h\varphi dx \\ &= t^\ell \int_{\Omega} \Phi(|\nabla \varphi|) dx - t\lambda \int_{\Omega} h\varphi dx < 0 \end{aligned}$$

para  $t > 0$  suficientemente pequeno, mostrando (ii). ■

**Observação 6.2.2** *Pelo que foi visto acima o funcional energia  $I$  dado em (1–28) satisfaz*

- (i)  $I \in Lip_{loc}(W_0^{1,\Phi}(\Omega); \mathbf{R})$ ;
- (ii)  $I : \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbf{R}$  é limitado inferiormente.

Pelo Princípio Variacional de Ekeland (cf. Apêndice A, Teorema A.0.1), dado  $\varepsilon > 0$  existe  $u_\varepsilon \in \overline{B_r(0)}$  tal que

$$I(u_\varepsilon) < \inf_{\overline{B_r}} I + \varepsilon, \tag{6-6}$$

$$I(u_\varepsilon) < I(u) + \varepsilon \|u - u_\varepsilon\|, \quad u \neq u_\varepsilon. \tag{6-7}$$

Segue que existe uma sequência  $(u_n) \subseteq \overline{B_r(0)}$  tal que

$$I(u_n) < \inf_{\overline{B_r(0)}} I_{\lambda,a} + \frac{1}{n} \text{ e} \tag{6-8}$$

$$I(u_n) < I(u) + \frac{1}{n} \|u - u_n\|, \quad u \neq u_n. \quad (6-9)$$

**Observação 6.2.3** A sequência  $(u_n)$  é chamada Sequência de Ekeland.

## 6.3 Algumas Propriedades da Sequência de Ekeland

**Lema 6.3.1** A sequência de Ekeland  $(u_n) \subseteq \overline{B_r(0)}$  satisfaz

$$I(u_n) \xrightarrow{n} c \text{ e } m(u_n) := \min_{w \in \partial I(u_n)} \|w\|_{W^{-1,\tilde{\Phi}}} \xrightarrow{n} 0. \quad (6-10)$$

**Demonstração:** Pelo Lema A.0.2 temos que  $Q_\lambda \in \mathbf{C}^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R})$  e pelo Lema 6.1.1 concluímos que  $J \in Lip_{loc}(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R})$ , então  $I$  é contínua, em particular semicontínuo inferiormente (na topologia da norma).

Pelo Lema 6.2.1 temos que  $\inf_{\partial B_r} I > 0$  e considerando um inteiro positivo  $n$  suficientemente grande de modo que (cf. Lema 6.2.1)

$$\frac{1}{n} < \inf_{\partial B_r} I - \inf_{\overline{B_r}} I.$$

Isto junto com (6–8) nos dá

$$I(u_n) < \frac{1}{n} + \inf_{\overline{B_r}} I < \inf_{\partial B_r} I,$$

mostrando que  $u_n \in B_r$ . Tomemos  $\gamma > 0$  e  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tais que  $u_\gamma = u_n + \gamma v \in B_r$ . Por (6–9),

$$I(u_n + \gamma v) - I(u_n) + \gamma \frac{1}{n} \|v\| \geq 0,$$

implicando em

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} \|v\| &\leq \limsup_{\gamma \downarrow 0} \frac{I(u_n + \gamma v) - I(u_n)}{\gamma} \\ &\leq I^0(u_n, v). \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.2 iii) concluímos que

$$I^0(u; v) = \max_{\mu \in \partial I(u)} \langle \mu, v \rangle, \quad u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Para  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  obtemos

$$-\frac{1}{n} \|v\| \leq I^0(u_n, v) = \max_{\mu \in \partial I(u_n)} \langle \mu, v \rangle, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

e por isso, para  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n}\|v\| &\leq I^0(u_n; -v) \\ &= \max_{\mu \in \partial I(u_n)} \langle \mu, -v \rangle \\ &= -\min_{\mu \in \partial I(u_n)} \langle \mu, v \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\min_{\mu \in \partial I(u_n)} \langle \mu, v \rangle \leq \frac{1}{n}\|v\|, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

que nos dá

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \min_{\mu \in \partial I(u_n)} \langle \mu, v \rangle \leq \frac{1}{n}. \quad (6-11)$$

A seguir, aplicaremos o Teorema de Minimax de Ky Fan (cf. Teorema A.0.2) à aplicação  $K : \partial I(u_n) \times \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por:

$$K(\mu, v) := \langle \mu, v \rangle, \quad (\mu, v) \in \partial I(u_n) \times \overline{B_1(0)}.$$

As condições (A-5) – (A-6) são facilmente verificadas.

Para verificar a condição (A-7), considere  $v \in \overline{B_1(0)}$ ,  $c \in \mathbf{R}$  e

$$M_v := \{\mu \in \partial I(u_n) \mid \langle \mu, v \rangle \leq c\} \subseteq W^{-1, \tilde{\Phi}}(\Omega).$$

É fácil ver que para cada  $v \in \overline{B_1(0)}$ ,  $M_v$  é convexo e fortemente fechado. Como consequência  $M_v$  é fracamente fechado (cf. [8, Teo. 3.7]). Segue que o funcional  $\mu \mapsto K(\mu, v)$  é fracamente semicontínuo inferiormente.

Para verificar a condição (A-8), considere  $\mu \in \partial I(u_n)$  e observe que a função  $v \mapsto -K(\mu, v) = -\langle \mu, v \rangle$  é contínua, e portanto semicontínua inferiormente.

Por fim, considere  $\tilde{v} = 0 \in \overline{B_1(0)}$  e  $\lambda = 1$ . Pela Proposição 3.1.2 o conjunto

$$\{\mu \in \partial I(u_n) \mid \langle \mu, 0 \rangle \leq 1\} = \partial I(u_n)$$

é fracamente compacto, verificando a condição (A-9).

Pelo Teorema A.0.2 e (6-11) temos

$$\begin{aligned} \sup_{\|v\| \leq 1} \min_{\mu \in \partial I(u_n)} \langle \mu, v \rangle &= \min_{\mu \in \partial I(u_n)} \sup_{\|v\| \leq 1} \langle \mu, v \rangle \\ &= \min_{\mu \in \partial I(u_n)} \|\mu\|_{W^{-1, \tilde{\Phi}}} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$



Segue de (6–8) que existe uma sequência  $(u_n) \subseteq B_r$  tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ e } \min_{\mu \in \partial I(u_n)} \|\mu\|_{W^{-1}, \tilde{\Phi}} \rightarrow 0.$$

Isto prova o Lema 6.3.1. ■

**Observação 6.3.1** A sequência de Ekeland  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  satisfaz (6–10). Na realidade, existe  $w_n \in \partial I(u_n)$  tal que

$$\|w_n\|_{W^{-1}, \tilde{\Phi}} = \min_{w \in \partial I(u_n)} \|w\|_{W^{-1}, \tilde{\Phi}}$$

(cf. Proposição 3.1.2 iv)) e assim existe  $\rho_n \in \partial J(u_n)$  tal que  $w_n = Q'_\lambda(u_n) - \rho_n$ . Por isso,

$$\langle w_n, v \rangle \rightarrow 0, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

de modo que

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} h v dx + \int_{\Omega} \rho_n v dx + o_n(1). \quad (6-12)$$

**Observação 6.3.2** Como  $(u_n) \subseteq \overline{B_r(0)} \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ , existe  $u \in \overline{B_r(0)}$  tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

## 6.4 Convergência da Sequência de Ekeland em Compactos

O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado:

**Lema 6.4.1** Seja  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  a sequência obtida em (6–10). Estenda  $u_n$  a  $\mathbf{R}^N$  definindo  $u_n = 0$  em  $\mathbf{R}^N \setminus \Omega$ . Então existem  $x_1, \dots, x_r \in \mathbf{R}^N$  tais que

$$u_n \xrightarrow{L_{\Phi_*}(K)} u \quad (6-13)$$

para cada conjunto compacto  $K \subset \mathbf{R}^N \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ .

A demonstração do Lema 6.4.1 usa uma variante, devido a Fukagai, Ito & Narukawa [23] (cf. também o Apêndice A), das Técnicas de Concentração-Compacidade de Lions [36].

Inicialmente introduziremos algumas notações e observações (cf. Willem [49] e o Apêndice A). Dado  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  nós a estenderemos a  $\mathbf{R}^N$  definindo  $v(x) = 0$  caso  $x \in \Omega^c$  e ainda denotaremos tal extensão por  $v$ . Então  $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$  e  $\text{supp}(v) \subset \Omega$ . Além disso,

$$\|v\|_{W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)} = \|v\|_{W^{1,\Phi}(\Omega)}$$

e

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{\{v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \mid \text{supp}(v) \subset \Omega\}}^{W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)}.$$

Desta forma, se  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  então  $v \in W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$ . Notações similares serão admitidas em  $L_{\Phi_*}(\Omega)$ .

Seguindo Willem [49], introduzimos dois espaços vetoriais normados:

$$(i) \quad C_0 = \overline{\{u \in C(\mathbf{R}^N) \mid \text{supp}(u) \subseteq \mathbf{R}^N\}}^{\|\cdot\|_\infty},$$

com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |u(x)|,$$

$$(ii) \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbf{R}^N) = \text{o espaço das medidas finitas em } \mathbf{R}^N$$

munido da norma

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} u d\mu \mid u \in C_0, \|u\|_\infty = 1 \right\}.$$

Considere  $\mu_n, \nu_n : C_0 \rightarrow \mathbf{R}$  definidas por

$$\langle \mu_n, v \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|) v dx \text{ e } \langle \nu_n, v \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(|u_n|) v dx, \quad v \in C_0.$$

Então existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|\langle \mu_n, v \rangle| \leq C \|v\|_\infty \text{ e } |\langle \nu_n, v \rangle| \leq C \|v\|_\infty$$

isto é  $(\mu_n), (\nu_n) \subseteq \mathcal{M}$  são limitadas. Segue que

$$\Phi(|\nabla u_n|) \rightharpoonup \mu, \quad \Phi_*(|u_n|) \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}. \quad (6-14)$$

Sejam  $J, \{x_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbf{R}^N, \{v_j\}_{j \in J}$  e  $\{\mu_j\}_{j \in J}$  dados pelo Lema B.0.5. Ainda pelo Lema B.0.5 temos

$$\nu = \Phi_*(u) + \sum_{j \in J} v_j \delta_{x_j}$$

e

$$\mu \geq \Phi(|\nabla u|) + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

**Lema 6.4.2** *O conjunto  $\tilde{J} = \{j \in J \mid v_j > 0\}$  é finito.*

**Demonstração:** Afirmamos que  $\{x_j\}_{j \in \tilde{J}} \subseteq \overline{\Omega}$ . Caso contrário, se  $x_j \in \overline{\Omega}^c$  para algum  $j \in \tilde{J}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B_\varepsilon}(x_j) \subseteq \overline{\Omega}^c$ . Considere  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$  tal que

$$\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(x_j), \quad \varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{\{x_j\}} \text{ q.t.p. } \mathbf{R}^N.$$

Agora, estendamos  $u_n$  a  $\mathbf{R}^N$  definindo  $u_n(x) = 0$  para  $x \in \mathbf{R}^N - \Omega$ . Usando (6–14), obtemos

$$0 = \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|) \varphi_\varepsilon dx \xrightarrow{n} \int_{\mathbf{R}^N} \varphi_\varepsilon d\mu,$$

e passando ao limite com  $\varepsilon \rightarrow 0$  deduzimos

$$0 = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi_\varepsilon d\mu = \int_{B_\varepsilon(x_j)} \varphi_\varepsilon d\mu \rightarrow \int_{\{x_j\}} d\mu = \mu_j.$$

Donde,  $\mu_j = 0$  e pelo Lema B.0.5 inferimos que  $v_j = 0$ , o que é um absurdo, pois  $j \in \tilde{J}$ , provando a afirmação.

Agora, considere  $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$  tal que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi(x) = 1$  se  $|x| \leq 1$  e  $\psi(x) = 0$  se  $|x| \geq 2$ . Escolha  $x_j$  com  $j \in \tilde{J}$ ,  $\varepsilon > 0$  e defina

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Note que  $(\psi_\varepsilon u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  é limitada. De acordo com a Observação 6.3.1

$$w_n = \mathcal{Q}'_\lambda(u_n) - \rho_n \text{ para algum } \rho_n \in \partial J(u_n). \quad (6-15)$$

e por (6–12)

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla(\psi_\varepsilon u_n) = \lambda \int_{\Omega} h u_n \psi_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \rho_n u_n \psi_\varepsilon dx + o_n(1). \quad (6-16)$$

Além disso, pelo Lema 6.1.1,  $\rho_n \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  e  $\rho_n(x) \in \partial j(x, u_n(x))$  para  $x \in \Omega$ . Por (6-16), Lema 6.1.1 e (6-2)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla (\psi_{\varepsilon} u_n) &= \left( \int_{\{u_n < a\}} + \int_{\{u_n \geq a\}} \right) \rho_n u_n \psi_{\varepsilon} dx + \lambda \int_{\Omega} h u_n \psi_{\varepsilon} dx + o_n(1) \\
 &= \int_{\{u_n \geq a\}} \rho_n u_n \psi_{\varepsilon} dx + \lambda \int_{\Omega} h u_n \psi_{\varepsilon} dx + o_n(1) \\
 &\leq m^* \int_{\{u_n \geq a\}} \sigma(x) \Phi_*(u_n) \psi_{\varepsilon} dx + \lambda \int_{\Omega} h u_n \psi_{\varepsilon} dx + o_n(1) \\
 &\leq m^* |\sigma|_{\infty} \int_{\Omega} \Phi_*(u_n) \psi_{\varepsilon} dx + \lambda \int_{\Omega} h u_n \psi_{\varepsilon} dx + o_n(1)
 \end{aligned} \tag{6-17}$$

Por outro lado, usando o fato que  $t^2 \phi(t) \geq \Phi(t)$  temos,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla (\psi_{\varepsilon} u_n) dx &= \int_{\Omega} u_n \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla \psi_{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} \phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|^2 dx \\
 &\geq \int_{\Omega} u_n \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla \psi_{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} \Phi(|\nabla u_n|) dx
 \end{aligned} \tag{6-18}$$

Afirmamos que

$$(\phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|) \text{ é limitada em } L_{\tilde{\Phi}}(\Omega).$$

De fato, como  $\tilde{\Phi}(\phi(t)t) \leq \Phi(2t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , e  $\Phi \in \Delta_2$

$$\int_{\Omega} \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|) |\nabla u_n|) dx \leq \int_{\Omega} \Phi(2|\nabla u_n|) dx \leq K \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx < \infty.$$

provando a afirmação. Consequentemente,  $(\phi(|\nabla u_n|) \partial u_n / \partial x_i)$  também é limitada em  $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$  e portanto

$$\phi(|\nabla u_n|) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup w_i \text{ em } L_{\tilde{\Phi}}(\Omega), \quad i = 1, \dots, N. \tag{6-19}$$

Definindo  $w = (w_1, \dots, w_N)$ , afirmamos que

$$\int_{\Omega} (u_n \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla \psi_{\varepsilon} - u_n w \cdot \nabla \psi_{\varepsilon}) dx = o_n(1). \tag{6-20}$$

De fato, somando e subtraindo um termo conveniente, usando a desigualdade de Hölder e aplicando (6–19) na função teste  $\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} u$ , temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} u_n - w_i \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} u dx \right| \leq \\ & \int_{\Omega} \left| \phi(|\nabla u_n|) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} (u_n - u) \right| dx + \left| \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} u - w_i \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} u dx \right| \leq \\ & 2 \left\| \phi(|\nabla u_n|) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{\tilde{\Phi}} \|u_n - u\|_{\Phi} + o_n(1) \end{aligned}$$

Como  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{comp} L_{\Phi}(\Omega)$  obtemos que  $\|u_n - u\|_{\Phi} \rightarrow 0$ , e assim deduzimos

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} u_n dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega} w_i \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} u dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

o que leva a (6–20), provando a afirmação. Substituindo (6–20) em (6–18) chegamos a

$$\int_{\Omega} \psi_\varepsilon \Phi(|\nabla u_n|) dx + \int_{\Omega} u w \cdot \nabla \psi_\varepsilon dx \leq \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla (\psi_\varepsilon u_n) + o_n(1). \quad (6-21)$$

Segue de (6–17) e (6–21) que

$$\int_{\Omega} \psi_\varepsilon \Phi(|\nabla u_n|) dx + \int_{\Omega} u w \cdot \nabla \psi_\varepsilon dx \leq m^* |\sigma|_\infty \int_{\Omega} \Phi_*(u_n) \psi_\varepsilon dx + \lambda \int_{\Omega} h u_n \psi_\varepsilon dx + o_n(1).$$

Passando ao limite na desigualdade acima com  $n \rightarrow \infty$ , recordando que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) \psi_\varepsilon dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon d\mu, \quad \int_{\Omega} \Phi_*(u_n) \psi_\varepsilon dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon d\nu,$$

e que

$$\int_{\Omega} u_n h \psi_\varepsilon dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u h \psi_\varepsilon dx,$$

chegamos a

$$\int_{\Omega} \psi_\varepsilon d\mu + \int_{\Omega} u w \cdot \nabla \psi_\varepsilon dx \leq m^* |\sigma|_\infty \int_{\Omega} \psi_\varepsilon d\nu + \lambda \int_{\Omega} h u \psi_\varepsilon dx. \quad (6-22)$$

Afirmamos que  $(\rho_n)$  é limitada em  $L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$ . De fato, usando o Lema 6.1.1 inferimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_*(\rho_n) dx & \leq \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_*(\sigma(x) \phi_*(u_n)) dx \leq \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_*(|\sigma|_\infty \phi_*(u_n)) dx \\ & \leq C_{|\sigma|_\infty} \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_*(\phi_*(u_n)) dx \leq C_{|\sigma|_\infty} \int_{\Omega} \Phi_*(2u_n) dx \leq C, \end{aligned}$$

provando a afirmação. Assim, existe  $\rho \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  tal que

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ in } L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega). \quad (6-23)$$

Seja  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Passando ao limite na expressão

$$\langle w_n, v \rangle = \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v - \lambda h v - \rho_n v) dx,$$

e usando (6–19) chegamos a

$$\int_{\Omega} (w \cdot \nabla v - \lambda h v - \rho v) dx = 0. \quad (6-24)$$

Considerando  $v = u\psi_{\varepsilon}$  em (6–24) obtemos

$$\int_{\Omega} u w \cdot \nabla \psi_{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} (\lambda h u + \rho u - w \cdot \nabla u) \psi_{\varepsilon} dx.$$

Mas

$$|(\lambda h u + \rho u - w \cdot \nabla u) \psi_{\varepsilon}| \leq |\lambda h u| + |\rho u| + |w \cdot \nabla u| \in L^1(\Omega)$$

e

$$(\lambda h u + \rho u - w \cdot \nabla u) \psi_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_{\Omega} u w \cdot \nabla \psi_{\varepsilon} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ e } \int_{\Omega} h u \psi_{\varepsilon} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Notando que

$$\psi_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{\{x_j\}} \text{ q.t.p. em } \mathbf{R}^N \text{ e } \psi_{\varepsilon}(x) \leq \chi_{B_1(x_j)}(x) \text{ para } x \in \mathbf{R}^N \text{ e } \varepsilon > 0 \text{ pequeno}$$

chegamos a

$$\int_{\mathbf{R}^N} \psi_{\varepsilon} d\mu \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{x_j\}} d\mu = \mu(\{x_j\}) = \mu_j \text{ e } \int_{\mathbf{R}^N} \psi_{\varepsilon} d\nu \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{x_j\}} d\nu = \nu(\{x_j\}) = \nu_j.$$

Passando ao limite em (6–22) com  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  concluímos que

$$\mu_j \leq m^* |\sigma|_{\infty} \nu_j, \quad j \in \tilde{J}. \quad (6-25)$$

Pelo Lema B.0.5 chegamos a  $\mu_j \leq c_1 \mu_j^{\alpha}$ , onde  $1 < \alpha \leq \max\{\ell^*/\ell, m^*/\ell, \ell^*/m, m^*/m\}$ . Portanto,  $\mu_j \geq c_2$  para alguma constante positiva  $c_2$ . Daí e de (6–25) concluímos que  $\nu_j \geq c_3$ , para  $j \in \tilde{J}$  e para alguma constante positiva  $c_3$ . Neste ponto, se supormos que

$\#(\tilde{J}) = \infty$ , então

$$\sum_{j \in \tilde{J}} v_j \geq \sum_{j \in \tilde{J}} c_3 = \infty,$$

o que é impossível, pois  $v$  é uma medida finita e

$$v = \Phi_*(u) + \sum_{j \in \tilde{J}} v_j \delta_{x_j}.$$

Isto prova o Lema 6.4.2. ■

Encerraremos esta seção demonstrando o Lema 6-13.

**Demonstração do Lema 6.4.1:** Como  $\tilde{J}$  é um conjunto finito, é possível escolher  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_j) = \emptyset$  para  $i \neq j$  com  $i, j \in \tilde{J}$ . Agora considere  $K_\delta \subset \mathbf{R}^N \setminus \bigcup_{j \in \tilde{J}} B_\delta(x_j)$  e  $\chi \in C_0^\infty$  tais que

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi = 1 \text{ em } K_\delta, \quad \text{supp}(\chi) \cap \left( \bigcup_{j \in \tilde{J}} B_{\frac{\delta}{2}}(x_j) \right) = \emptyset.$$

Note que

$$\Phi_*(u_n - u) \rightharpoonup v = \Phi_*(0) + \sum_{j \in \tilde{J}} v_j \delta_{x_j} \text{ em } \mathcal{M}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{K_\delta} \Phi_*(u_n - u) dx \leq \int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(u_n - u) \chi dx, \\ &\int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(u_n - u) \chi dx \rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} \chi dv, \\ &\int_{\mathbf{R}^N} \chi dv = \sum_{j \in \tilde{J}} v_j \chi(x_j) = 0. \end{aligned}$$

Donde

$$\int_{K_\delta} \Phi_*(u_n - u) dx \rightarrow 0.$$

Como os argumentos acima valem para todo  $\delta > 0$  concluímos que (6-13) vale para cada conjunto compacto  $K \subset \mathbf{R}^N - \{x_j\}_{j \in \tilde{J}}$ . ■

## 6.5 Demonstração do Teorema 1.0.5

A seguir demonstraremos alguns lemas técnicos, porém fundamentais para demonstrarmos o Teorema 1.0.5.

Em primeiro lugar, seja  $\rho \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  definido em (6-23).

**Lema 6.5.1**  $\rho_n(x) \longrightarrow \rho(x)$  e  $\rho(x) \in \partial j(x, u(x))$  q.t.p.  $x \in \Omega$ .

**Demonstração:** Inicialmente provaremos que

$$\rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

De fato, seja  $K \subset \mathbf{R}^N \setminus \{x_j\}_{j \in \tilde{J}}$  um conjunto compacto e considere  $\varphi \in L_{\Phi_*}(K)$ . Defina  $\varphi(x) = 0$  para  $x \in \Omega - K$ . Lembremos que

$$\rho_n \in \partial J(u_n), \quad \rho_n \rightharpoonup \rho \text{ em } L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega) \text{ e } \rho(x) = \rho_n(x) = 0 \text{ para } x \in K - \Omega.$$

Daí,

$$\int_K (\rho_n - \rho) \varphi dx = \int_{\Omega} (\rho_n - \rho) \varphi|_{\Omega} dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Donde,

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ em } L_{\tilde{\Phi}_*}(K)$$

e como  $L_{\tilde{\Phi}_*}(K)$  é reflexivo, a condição acima equivale a

$$\rho_n \xrightarrow{*} \rho, \text{ em } L_{\tilde{\Phi}_*}(K).$$

Por outro lado, pelo Lema 6.4.1,

$$u_n \xrightarrow{L_{\Phi_*}(K)} u$$

e pelo item vi) da Proposição 3.1.2,  $\rho \in \partial J(u)$ . Pelo Lema 6.1.1 acima,

$$\rho \in L_{\tilde{\Phi}_*}(K) \text{ e } \rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in K.$$

Como

$$\mathbf{R}^N - \{x_j\}_{j \in \tilde{J}} = \bigcup_{v=1}^{\infty} K_v, \quad (6-26)$$

onde  $\{K_v\}_{v=1}^{\infty}$  é uma família de conjuntos compactos, segue que  $\rho(x) \in \partial j(x, u(x))$  q.t.p.  $x \in \Omega$ .

Por fim, mostraremos que

$$\rho_n(x) \longrightarrow \rho(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Com efeito, pelo Lema 6.4.1

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L_{\Phi_*}(K),$$

onde  $K \subset \mathbf{R}^N - \{x_j\}_{j \in \tilde{J}}$  é um conjunto compacto. Então, considerando uma subsequência



se necessário, pelo Lema 2.2.2

$$u_n \longrightarrow u \text{ q.t.p. em } K$$

e existe  $h \in L_{\Phi_*}(K)$  tal que

$$|u_n| \leq h \text{ q.t.p. em } K.$$

Pelo Lema 6.1.1

$$0 \leq \rho_n(x) \leq \sigma(x)\phi_*(|u_n|) \leq \sigma(x)\phi_*(h(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \quad (6-27)$$

Assim, existe  $\rho_0 = \rho_0(x)$  tal que

$$\rho_n(x) \longrightarrow \rho_0(x)$$

e por (6 – 27) temos que  $\rho_0 \in L_{\Phi_*}(K)$ . Pelo Lema 2.2.4

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_0 \text{ em } L_{\Phi_*}(K)$$

e graças a unicidade do limite  $\rho_0 = \rho$  q.t.p. em  $K$ , ou seja,

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ q.t.p. em } K,$$

para cada compacto  $K \subset \mathbf{R}^N - \{x_j\}_{j \in \tilde{J}}$ . Disso e (6 – 26) temos

$$\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho \text{ q.t.p. em } \mathbf{R}^N.$$

Como  $\rho_n = 0$  em  $\mathbf{R}^N - \Omega$ , segue que

$$\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Isto finaliza a demonstração do Lema 6.5.1. ■

A demonstração do próximo lema é baseada no [23, Lema 4.5].

**Lema 6.5.2**  $\nabla u_n(x) \xrightarrow{n} \nabla u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$

**Demonstração:** Seja  $\{K_v\}_{v=1}^\infty$  uma família de conjuntos compactos tal que (6 – 26) vale. Escolha um inteiro  $v \geq 1$  e uma função  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$  tais que  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi = 1$  em  $K_v$  e  $\text{supp}(\chi) \cap \{x_j\}_{j \in \tilde{J}} \neq \emptyset$ . Como  $\Phi$  é convexa,

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \geq 0, \text{ em } \mathbf{R}^N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{K_v} (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u, \nabla u_n - \nabla u) dx \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^N} (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \chi dx \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^N} (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n, \nabla u_n - \nabla u) \chi dx - \int_{\mathbf{R}^N} (\phi(|\nabla u|) \nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \chi dx
\end{aligned} \tag{6-28}$$

Seja  $v_n = \chi(u_n - u)$ . Segue que  $v_n$  é limitada em  $W_0^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$  e como  $\langle w_n, v_n \rangle \rightarrow 0$  (cf. Observação 6.3.1) obtemos

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbf{R}^N} h v_n dx - \int_{\mathbf{R}^N} \rho_n v_n dx = o_n(1), \tag{6-29}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \chi dx + \int_{\mathbf{R}^N} (u_n - u) \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla \chi dx \\
&= \lambda \int_{\mathbf{R}^N} h v_n dx + \int_{\mathbf{R}^N} \rho_n v_n dx + o_n(1).
\end{aligned} \tag{6-30}$$

Note que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla \chi (u_n - u)| dx \leq \|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n\|_{L_{\tilde{\Phi}}(\mathbf{R}^N)} \|\nabla \chi\|_{\infty} \|u_n - u\|_{L_{\Phi}(\mathbf{R}^N)} = o_n(1),$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} h v_n dx = o_n(1),$$

e como  $(\rho_n)$  é limitada em  $L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$ , segue do Lema 6-13

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\rho_n v_n| dx \leq \|\rho_n\|_{L_{\tilde{\Phi}_*}(\text{supp } \chi)} \|\chi\|_{\infty} \|u_n - u\|_{L_{\Phi_*}(\text{supp } \chi)} = o_n(1),$$

mostrando, via (6-30), que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \chi dx \xrightarrow{n} 0. \tag{6-31}$$

Agora, mostraremos que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(|\nabla u|) \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) \chi dx \rightarrow 0. \tag{6-32}$$

De fato, sabemos que  $u_n \rightharpoonup u$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  e  $\chi \phi(|\nabla u|) |\nabla u| \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ . Assim, definindo

$u_n = u = 0$  em  $\mathbf{R}^N - \overline{\Omega}$  temos (6–32).

Por fim, de (6–31) – (6–32) segue que

$$\int_{K_V} (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ou seja,

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^1(K_V)$$

e, considerando uma subsequência se necessário

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ q.t.p. em } K_V.$$

Daí e de (6–26) chegamos a

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ q.t.p. em } \mathbf{R}^N.$$

Pelo Lema 4.3.7

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ q.t.p. em } \mathbf{R}^N.$$

Recordando que  $u_n(x) = 0$  para  $x \in \mathbf{R}^N \setminus \Omega$ , concluímos

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

finalizando a demonstração do Lema 6.5.2. ■

**Lema 6.5.3**  $\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \rightharpoonup \phi(|\nabla u|)\nabla u$  em  $\prod L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ .

**Demonstração:** Pelo Lema 6.5.2,

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como  $\eta \mapsto \phi(|\eta|)\eta$ ,  $\eta \in \mathbf{R}^N$ , é contínua,

$$\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \longrightarrow \phi(|\nabla u|)\nabla u \text{ q.t.p. } \Omega.$$

Além disso,

$$\tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|) \leq \Phi(2|\nabla u_n|)$$

provando que  $(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|)$  é limitada em  $\prod L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ . Aplicando o Lema 2.2.4, finalizamos a demonstração do Lema 6.5.3. ■

Finalmente demonstraremos o Teorema 1.0.5.

**Prova do Teorema 1.0.5:** Pelo Lema 6.5.3,

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v dx \longrightarrow \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Por outro lado, (cf. demonstração do Lema 6.4.2)

$$\int_{\Omega} \rho_n v dx \longrightarrow \int_{\Omega} \rho v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

e de acordo com o Lema 6.5.1

$$\rho \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega) \text{ e } \rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Passando ao limite em (6 – 12) chegamos a

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} h v dx - \int_{\Omega} \rho v dx = 0, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Portanto  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  é uma solução de (1 – 26), no sentido da definição 1.0.2 e como  $h \neq 0$ , concluímos que  $u \not\equiv 0$ .

**Afirmção.**  $u \geq 0$ . De fato, note que

$$u_n = u_n^+ - u_n^-, \quad \nabla u_n = \nabla u_n^+ - \nabla u_n^-, \text{ e } |\nabla u_n|^2 = |\nabla u_n^+|^2 + |\nabla u_n^-|^2.$$

Como  $\Phi$  é crescente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n^-|) dx &\leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n^-|^2 + |\nabla u_n^+|^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx \end{aligned}$$

donde  $(u_n^-)$  é limitada em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Notando que  $\langle w_n, -u_n^- \rangle = o_n(1)$  temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= - \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla u_n^- dx + \lambda \int_{\Omega} h u_n^- dx + \int_{\Omega} \rho u_n^- dx \\ &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n^-|) |\nabla u_n^-|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} h u_n^- dx + \int_{\Omega} \rho u_n^- dx \\ &\geq \ell \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n^-|) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n^-|) dx \rightarrow 0,$$

e como  $u_n^- \rightarrow 0$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ , temos que  $u \geq 0$ .

**Prova de (1 – 31):** Como  $u$  é uma solução de (1 – 26), existe  $\rho := \rho_u \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  tal que

$\rho(x) \in \partial j(x, u(x))$  q.t.p.  $x \in \Omega$  (cf. Lema 6.5.1) e

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \rho v dx + \lambda \int_{\Omega} h v dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pela Observação 5.1.2,  $\Delta_{\Phi} u \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$ . Como  $h \in L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$  segue que

$$\int_{\Omega} [-\Delta_{\Phi} u - \rho - \lambda h] v dx = 0, \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Donde,

$$-\Delta_{\Phi} u = \rho + \lambda h \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

encerrando a demonstração do Teorema 1.0.5. ■

## 6.6 Demonstração do Teorema 1.0.6

Nesta seção, demonstraremos o Teorema 1.0.6. Para tal, consideraremos as hipóteses  $(\phi_1)' - (\phi_4)'$ . Essas hipóteses são necessárias para demonstrarmos uma versão para N-funções do Lema 3 de Alves [2] ( $\Delta_p$  com  $p \geq 2$ ) e do Lema 3.1 de Mercuri & Willem [40] ( $\Delta_p$  com  $1 < p < 2$ ).

O lema a seguir generaliza [2, Lema 3] devido a Alves e [40, Lema 3.1] de Mercuri & Willem e usa argumentos em Brézis & Lieb [9].

**Lema 6.6.1** *Suponha que  $(\phi_1)' - (\phi_3)'$ . Seja  $\eta_n : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$  com  $\eta_n \in L_{\Phi}(\Omega) \times \dots \times L_{\Phi}(\Omega)$ ,  $\eta_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  q.t.p.  $x \in \Omega$  e  $a(y) := \phi(|y|)y$ ,  $y \in \mathbf{R}^N$ . Se  $\|\eta_n\|_{\Phi} \leq C$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ , então*

$$\int_{\Omega} \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|) dx = o_n(1),$$

para todo  $w \in L_{\Phi}(\Omega) \times \dots \times L_{\Phi}(\Omega)$ .

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração em dois casos:

**Caso I:** Suponha que  $\phi$  é não-decrescente. Dado  $w \in L_{\Phi}(\Omega) \times \dots \times L_{\Phi}(\Omega)$  segue da Proposição 2.5.3 que  $|w|, |\eta_n| \in L_{\Phi_1}(\Omega)$ . Observemos também que

$$\frac{d}{dt}(a_i(\eta_n + tw)) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta_n + tw) w_j,$$

onde  $a_i(x) = \phi(|x|)x_i$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Pela Proposição 2.5.5,  $(\phi_1)'$  e a

Proposição 2.5.2

$$\begin{aligned}
 |a_i(\eta_n + w) - a_i(\eta_n)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} (a_i(\eta_n + tw)) dt \right| \leq \int_0^1 \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta_n + tw) \right| |w_j| dt \\
 &\leq |w| \int_0^1 \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta_n + tw) \right| dt \leq \Gamma |w| \int_0^1 \phi(|\eta_n + tw|) dt \\
 &\leq \Gamma |w| \phi(|\eta_n| + |w|) \leq C[|w| \phi(|w|) + |w| \phi(|\eta_n|)].
 \end{aligned}$$

Assim, considerando  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, segue da desigualdade de Young e convexidade junto com condição  $\Delta_2$  de  $\Phi_1$

$$\begin{aligned}
 C|w| \phi(|\eta_n|) &= \frac{kC}{\varepsilon} |w| \left( \frac{\varepsilon}{k} \phi(|\eta_n|) \right) \\
 &\stackrel{\text{Young}}{\leq} \Phi_1 \left( \frac{kC}{\varepsilon} |w| \right) + \tilde{\Phi}_1 \left( \frac{\varepsilon}{k} \phi(|\eta_n|) \right) \\
 &\stackrel{\text{conv}}{\leq} C(\varepsilon) \Phi_1(|w|) + \frac{\varepsilon}{k} \tilde{\Phi}_1(\phi(|\eta_n|)) \\
 &\stackrel{\tilde{\Phi}_1(\phi(t)) \leq \Phi_1(2t)}{\leq} C(\varepsilon) \Phi_1(|w|) + \frac{\varepsilon}{k} \Phi_1(2|\eta_n|) \\
 &\stackrel{\Phi_1 \in \Delta_2}{\leq} C(\varepsilon) \Phi_1(|w|) + \varepsilon \Phi_1(|\eta_n|) \\
 &\stackrel{\Phi_1(t) \leq \phi(t)t}{\leq} C(\varepsilon) \phi(|w|) |w| + \varepsilon \phi(|\eta_n|) |\eta_n|,
 \end{aligned}$$

onde  $k$  é tal que  $\Phi_1(2t) \leq k\Phi_1(t)$ ,  $t \geq 0$ . Portanto,

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)| \leq C[|w| \phi(|w|) + |w| \phi(|\eta_n|)] \leq C_1(\varepsilon) |w| \phi(|w|) + \varepsilon \phi(|\eta_n|) |\eta_n|. \quad (6-33)$$

Fixado  $\varepsilon$ , defina

$$G_{\varepsilon,n}(x) := \max\{|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|(x) - \varepsilon |\eta_n| \phi(|\eta_n|), 0\}.$$

Claramente

$$G_{\varepsilon,n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Além disso, considerando  $x \in \Omega$  tal que  $G_{\varepsilon,n}(x) > 0$ , segue de (6–33)

$$\begin{aligned}
 G_{\varepsilon,n}(x) &\leq |a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|(x) + |a(w)|(x) - \varepsilon |\eta_n| \phi(|\eta_n|) \\
 &\leq C_1(\varepsilon) |w| \phi(|w|) + \varepsilon \phi(|\eta_n|) |\eta_n| + |a(w)|(x) - \varepsilon |\eta_n| \phi(|\eta_n|) \\
 &\leq [C_1(\varepsilon) + 1] |w| \phi(|w|) \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega),
 \end{aligned}$$

e quando  $x \in \Omega$  é tal que  $G_{\varepsilon,n}(x) = 0$  a desigualdade acima é trivialmente satisfeita.

Portanto,

$$0 \leq G_{\varepsilon,n} \leq [C_1(\varepsilon) + 1]|w|\phi(|w|) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por Lebesgue

$$\int_{\Omega} \tilde{\Phi}(G_{\varepsilon,n}(x))dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por outro lado, dado  $x \in \Omega$  tal que  $G_{\varepsilon,n}(x) = 0$  temos que

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|(x) - \varepsilon|\eta_n|\phi(|\eta_n|) \leq 0,$$

o que equivale a

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|(x) \leq \varepsilon|\eta_n(x)|\phi(|\eta_n(x)|) = \varepsilon|\eta_n(x)|\phi(|\eta_n(x)|) + G_{\varepsilon,n}(x).$$

Além disso, se  $x \in \Omega$  tal que  $G_{\varepsilon,n}(x) > 0$  então

$$0 < G_{\varepsilon,n}(x) = |a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|(x) - \varepsilon|\eta_n(x)|\phi(|\eta_n(x)|)$$

o que equivale a

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|(x) = G_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon|\eta_n(x)|\phi(|\eta_n(x)|).$$

De ambos os casos

$$|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)| \leq G_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon|\eta_n|\phi(|\eta_n|) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, segue da convexidade de  $\Phi$ , da condição  $\Delta_2$  e de  $\tilde{\Phi}(t\phi(t)) \leq \Phi(2t)$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|) &\leq \tilde{\Phi}(G_{\varepsilon,n} + \varepsilon|\eta_n|\phi(|\eta_n|)) \\ &\stackrel{\text{conv e } \tilde{\Phi} \in \Delta_2}{\leq} C_1[\varepsilon\tilde{\Phi}(|\eta_n|\phi(|\eta_n|)) + \tilde{\Phi}(G_{\varepsilon,n})] \\ &\stackrel{\tilde{\Phi}(t\phi(t)) \leq \Phi(2t)}{\leq} C_1[\varepsilon\Phi(2|\eta_n|) + C_1\tilde{\Phi}(G_{\varepsilon,n})] \\ &\stackrel{\Phi \in \Delta_2}{\leq} C_2[\varepsilon\Phi(|\eta_n|) + \tilde{\Phi}(G_{\varepsilon,n})], \end{aligned}$$

Como  $\left(\int_{\Omega} \Phi(|\eta_n|)dx\right)$  é limitada, segue que

$$\begin{aligned} \limsup_n \int_{\Omega} \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|)dx \\ \leq \varepsilon C_2 \limsup_n \int_{\Omega} \Phi(|\eta_n|)dx + C_2 \limsup_n \int_{\Omega} \tilde{\Phi}(G_{\varepsilon,n})dx \leq \varepsilon C_3, \end{aligned}$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Donde

$$\limsup_n \int_{\Omega} \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|) dx = 0.$$

**Caso II:** Suponha que  $\phi$  é não-crescente. Como  $\tilde{\Phi}$  é crescente e convexa, considerando  $C > 0$  uma constante cumulativa,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|) &\leq \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)| + |a(w)|) \\ &\leq C[\tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n)|) + \tilde{\Phi}(|a(w)|)]. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.5.2 e observando que  $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$  e  $\tilde{\Phi}(t\phi(t)) \leq \Phi(2t)$  obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|) &\leq C[\tilde{\Phi}(d|a(w)|) + \tilde{\Phi}(|a(w)|)] \\ &\leq C[\tilde{\Phi}(|a(w)|) + \tilde{\Phi}(|a(w)|)] \\ &= C\tilde{\Phi}(\phi(|w|)|w|) \\ &= C\Phi(2|w|) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_{\Omega} \tilde{\Phi}(|a(\eta_n + w) - a(\eta_n) - a(w)|) dx = o_n(1)$$

concluindo a demonstração. ■

A seguir, trataremos sobre a convergência forte da sequência  $(u_n)$  para a solução  $u$  do problema (1 – 26).

**Lema 6.6.2** *Suponha  $(\phi_1)' - (\phi_4)'$  e  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno. Então a sequência de Ekeland  $(u_n)$  satisfaz*

$$u_n \longrightarrow u, \quad W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

**Demonstração:** Suponha, por contradição, que  $u_n \not\rightarrow u$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Seja  $v_n := u_n - u$ . Assim, existem  $K_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tais que:

1.  $\int_{\Omega} \phi(|\nabla v_n|) |\nabla v_n|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_1;$
2.  $\int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_2;$
3.  $\|v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_3.$

Como  $\ell\Phi(t) \leq t^2\phi(t) \leq m\Phi(t)$  então

$$\ell K_2 \leq K_1 \leq m K_2. \tag{6-34}$$



Além disso, temos que

$$\min\{\|v_n\|^\ell, \|v_n\|^m\} \leq \int_{\Omega} \Phi(|\nabla v_n|) \leq \max\{\|v_n\|^\ell, \|v_n\|^m\},$$

donde

$$\min\{K_3^\ell, K_3^m\} \leq K_2 \leq \max\{K_3^\ell, K_3^m\}$$

o que implica

$$K_3 \leq \max\{K_2^{1/\ell}, K_2^{1/m}\}. \quad (6-35)$$

Como  $(v_n)$  é limitada em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

$$\langle w_n, v_n \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \int_{\Omega} h v_n dx - \langle \rho_n, v_n \rangle = o_n(1). \quad (6-36)$$

Afirmamos que

$$\int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|) \nabla v_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u) \nabla v_n dx = o_n(1). \quad (6-37)$$

De fato, segue da desigualdade de Hölder e do Lema 6.6.1

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|) \nabla v_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u) \nabla v_n dx \\ & \leq 2 \|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|) \nabla v_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u\|_{\tilde{\Phi}} \|v_n\| = o_n(1). \end{aligned}$$

o que prova a afirmação. Assim, substituindo (6-37) em (6-36) obtemos que

$$\langle w_n, v_n \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla v_n|) |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v_n dx - \lambda \int_{\Omega} h v_n dx - \langle \rho_n, v_n \rangle = o_n(1),$$

e passando ao limite concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \rho_n, v_n \rangle = K_1$ .

Recorde que  $j \in L_{loc}^\infty(\Omega \times \mathbf{R})$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\sigma|_\infty} \langle \rho_n, v_n \rangle & \leq \frac{1}{|\sigma|_\infty} \int_{\Omega} \sigma(x) \phi_*(u_n) v_{n+} dx + \int_{\Omega} 0(-v_{n-}) dx \\ & = \frac{1}{|\sigma|_\infty} \int_{\Omega} \sigma(x) \phi_*(u_n) v_{n+} dx \\ & = \frac{1}{|\sigma|_\infty} \int_{u_n > u} \sigma(x) \phi_*(u_n) (u_n - u) dx \\ & \leq \int_{u_n > u} \phi_*(u_n) (u_n - u) dx \\ & = \int_{\Omega} \phi_*(u_n) u_n dx - \int_{u_n \leq u} \phi_*(u_n) u_n dx - \int_{\Omega} \phi_*(u_n) u dx + \int_{u_n \leq u} \phi_*(u_n) u dx. \end{aligned} \quad (6-38)$$

Sabemos que  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{comp} L^1(\Omega)$ . Assim, considerando uma subsequência se necessário,  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$  e de acordo com a Observação 2.5.6 temos que

$\phi_*(t)t$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , é convexa, então usando o Lema de Brézis-Lieb em (6–38) (devido a  $(\phi_4)'$ ) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\sigma|_\infty} \langle \rho_n, v_n \rangle &\leq \int_{\Omega} \phi_*(v_n) v_n dx + \int_{\Omega} [\phi_*(u) - \phi_*(u_n)] u dx + \\ &\int_{u_n \leq u} \phi_*(u_n) (u - u_n) dx + o_n(1). \end{aligned} \quad (6-39)$$

Mas,  $\phi_*(u_n(x)) \rightarrow \phi_*(u(x))$  q.t.p.  $x \in \Omega$  e  $L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$ , então pelo Lema 2.2.4  $\phi_*(u_n) \rightharpoonup \phi_*(u)$  em  $L_{\tilde{\Phi}_*}(\Omega)$ , assim

$$\int_{\Omega} [\phi_*(u) - \phi_*(u_n)] u dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Além disso, como  $\phi_*$  é crescente

$$0 \leq \int_{u_n \leq u} \phi_*(u_n) (u - u_n) dx \leq \int_{u_n \leq u} \phi_*(u) (u - u_n) dx \leq \left| \int_{\Omega} \phi_*(u) (u - u_n) dx \right| = o_n(1).$$

Assim, por (6–39)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\sigma|_\infty} \langle \rho_n, v_n \rangle &\leq \int_{\Omega} \phi_*(v_n) v_n dx + o_n(1) \\ &\leq m^* \int_{\Omega} \Phi_*(v_n) dx + o_n(1) \\ &\leq m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}} \|v_n\|^{\ell^*}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \|v_n\|^{m^*} \right\} + o_n(1) \\ &\leq m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \right\} \max \left\{ \|v_n\|^{\ell^*}, \|v_n\|^{m^*} \right\} + o_n(1), \end{aligned}$$

e passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$ , segue de (6–38)

$$\frac{\ell K_2}{|\sigma|_\infty} \leq \frac{K_1}{|\sigma|_\infty} \leq m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \right\} \max \{K_3^{\ell^*}, K_3^{m^*}\},$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{|\sigma|_\infty m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \right\}} &\leq \max \left\{ \frac{K_3^{\ell^*}}{K_2}, \frac{K_3^{m^*}}{K_2} \right\} \\ &\leq \max \left\{ K_2^{\ell^*/\ell-1}, K_2^{\ell^*/m-1}, K_2^{m^*/\ell-1}, K_2^{m^*/m-1} \right\}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\ell^*}{m} - 1 \leq \frac{\ell^*}{\ell} - 1 \leq \frac{m^*}{m} - 1 \leq \frac{m^*}{\ell} - 1,$$

assim, se  $K_2 \leq 1$ , então

$$\left( \frac{\ell}{|\sigma|_\infty m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \right\}} \right)^{\frac{m}{\ell^* - m}} \leq K_2,$$

e se  $K_2 > 1$ , então

$$\left( \frac{\ell}{|\sigma|_\infty m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \right\}} \right)^{\frac{\ell}{m^* - \ell}} \leq K_2.$$

consequentemente,

$$C_0 := \min \left\{ \left( \frac{\ell}{|\sigma|_\infty m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \right\}} \right)^{\frac{m}{\ell^* - m}}, \left( \frac{\ell}{|\sigma|_\infty m^* \max \left\{ \frac{1}{S^{\ell^*/\ell}}, \frac{1}{S^{m^*/\ell}} \right\}} \right)^{\frac{\ell}{m^* - \ell}} \right\} \leq K_2,$$

ou seja,  $K_2 \geq C_0 = C(N, \ell, m, |\sigma|_\infty, S) > 0$ .

Por outro lado, como  $\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x)$  q.t.p.  $x \in \Omega$ , segue do Lema de Brézis-Lieb

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\ell^*} \langle w_n, u_n \rangle &\geq \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u_n|) dx - \lambda \left(1 - \frac{1}{\ell^*}\right) \int_{\Omega} h u_n dx + o_n(1) \\ &= \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) \int_{\Omega} [\Phi(|\nabla v_n|) + \Phi(|\nabla u|)] dx - \lambda \left(1 - \frac{1}{\ell^*}\right) \int_{\Omega} h u dx + o_n(1) \end{aligned}$$

Passando ao limite obtemos

$$\begin{aligned} 0 > c &\geq \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) K_2 + \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \lambda \left(1 - \frac{1}{\ell^*}\right) \int_{\Omega} h u dx \\ &\geq \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) C_0 + \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) \min\{\|u\|^\ell, \|u\|^m\} - 2\lambda \left(1 - \frac{1}{\ell^*}\right) \|u\|_\Phi \|h\|_{\tilde{\Phi}^*} \\ &\geq \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) C_0 + \left(1 - \frac{m}{\ell^*}\right) \min\{\|u\|^\ell, \|u\|^m\} - \lambda C_1 \|u\|. \end{aligned}$$

Mas  $g_\lambda(t) = A \min\{t^\ell, t^m\} - \lambda C_1 t$ ,  $t \geq 0$ , onde  $A := 1 - \frac{m}{\ell^*}$ , satisfaz

$$g_\lambda(s) \geq \min \left\{ A - \lambda C_1, \lambda^{\frac{\ell}{\ell-1}} \left( \frac{C_1}{A^{1/\ell} \ell} \right)^{\frac{\ell}{\ell-1}} (1 - \ell), \lambda^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{C_1}{A^{1/m} m} \right)^{\frac{m}{m-1}} (1 - m) \right\} := f_\lambda.$$

Assim, para  $\lambda$  suficientemente pequeno

$$0 > c \geq A C_0 + g_\lambda(\|u\|) \geq 0,$$

o que é uma contradição. Portanto  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . ■

**Observação 6.6.1** A demonstração do Lema 6.6.2 vale para todo  $c \in (-\infty, AC_0 + f_\lambda)$ .

**Prova do Teorema 1.0.6: Prova de i)** Pelo Lema 6.6.2  $u_n \rightarrow u$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Como  $I$  é contínua  $I(u_n) \rightarrow I(u)$ , donde  $I(u) = c < 0$ .

**Prova de ii)** Sabemos que  $u$  é um mínimo local. Então

$$-\Delta_\Phi u(x) \in \partial j(x, u(x)) + \lambda h(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Tome  $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ . Escolhendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno temos

$$I(u) \leq I(u + \varepsilon\varphi),$$

donde

$$\int_\Omega \frac{j(x, u + \varepsilon\varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} dx \leq \int_\Omega \frac{\Phi(|\nabla(u + \varepsilon\varphi)|) - \Phi(|\nabla u|)}{\varepsilon} dx - \lambda \int_\Omega h\varphi dx. \quad (6-40)$$

Consideremos os seguintes casos:

**Caso 1:** Considere  $\varphi \geq 0$  e  $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ . Pelo Teorema do Valor Médio de Lebourg (cf. Teorema 3.2.1) existem  $\rho_\varepsilon$ , com  $u < \rho_\varepsilon < u + \varepsilon\varphi$ , e

$$\xi_\varepsilon(x) \in \partial j(x, \rho_\varepsilon(x)) = [f(x, \rho_\varepsilon(x) - 0), f(x, \rho_\varepsilon(x) + 0)] = \begin{cases} 0, & \rho_\varepsilon(x) < a, \\ [0, \sigma(x)\phi_*(a)], & \rho_\varepsilon(x) = a, \\ \sigma(x)\phi_*(\rho_\varepsilon(x)), & \rho_\varepsilon(x) > a, \end{cases}$$

tais que

$$\frac{j(x, u + \varepsilon\varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} = \xi_\varepsilon\varphi$$

Como  $\phi_*$  é crescente

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi_\varepsilon &\leq \sigma(x)\phi_*(\rho_\varepsilon) \\ &\leq \sigma(x)\phi_*(u + \varepsilon\varphi) \\ &\leq \sigma(x)\phi_*(u + \varphi) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left| \frac{j(x, u + \varepsilon\varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} \right| = \xi_\varepsilon\varphi \leq \sigma(x)\phi_*(u + \varphi)\varphi \in L^1(\Omega).$$

Por outro lado, é fácil ver que (pois  $j \in L_{loc}^\infty(\Omega \times \mathbf{R})$ )

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{j(x, u + \varepsilon\varphi) - j(x, u)}{\varepsilon} = f(x, u(x) + 0)\varphi(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

onde  $f(x, t) := \sigma(x) \chi_{\{t > a\}} \phi_*(t)$ . Aplicando Lebesgue em (6-40) obtemos

$$\int_{\Omega} f(x, u(x) + 0) \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} h \varphi dx$$

e de acordo com a Observação 5.1.2

$$0 \leq \int_{\Omega} [-\Delta_{\Phi} u - \lambda h - f(x, u(x) + 0)] \varphi dx, \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega), \quad \varphi \leq 0.$$

Donde

$$-\Delta_{\Phi} u(x) \geq f(x, u(x) + 0) + \lambda h(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

e como

$$-\Delta_{\Phi} u(x) \in [f(x, u(x) + 0) - \lambda h(x), f(x, u(x) + 0) + \lambda h(x)] \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

concluimos que

$$-\Delta_{\Phi} u(x) = f(x, u(x) + 0) + \lambda h(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \quad (6-41)$$

**Caso 2:** Considere  $\varphi \leq 0$  e  $\varphi \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ . De maneira análoga ao que foi feito no Caso 1 mostra-se que

$$-\Delta_{\Phi} u(x) = f(x, u(x) - 0) + \lambda h(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \quad (6-42)$$

Porém, para  $x \in \Gamma_a(u)$  temos que

$$f(x, u(x) - 0) = 0 \quad \text{e} \quad f(x, u(x) + 0) = \sigma(x) \phi_*(a) \neq 0.$$

Se  $|\Gamma_a(u)| > 0$ , então por (6-41) e (6-42) teremos que

$$\sigma(x) \phi_*(a) = 0 \quad \text{q.t.p. } x \in \Gamma(u),$$

o que é um absurdo. Portanto,  $|\Gamma_a(u)| = 0$ .

**Prova de iii)** Suponha, por absurdo, que  $u \leq a$  q.t.p. em  $\Omega$ . Pelo Lema 6.1.1,

$$\rho := \rho_u(x) \in \partial j(x, a) \subset [0, \sigma(x) \phi_*(a)] \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, como  $|\Gamma_a(u)| = 0$  segue que  $\rho(x) = 0$  q.t.p.  $x \in \Omega$  e por (1-31) a solução  $u = u_a$  de (1-26) satisfaz

$$-\Delta_{\Phi} u = \lambda h \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \quad (6-43)$$

Como  $h$  é não nula, a única solução  $u$  do problema (6-43) é não nula e não depende de

a. Usando  $(\phi_3)$ , que é consequência de  $(\phi_3)'$  como vimos acima, temos que

$$0 < \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx \leq \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} h u dx \leq \lambda |h|_1 a.$$

Fazendo  $a \rightarrow 0_+$  chegamos a uma contradição.

Por fim, segue do item **ii**) que  $|\Gamma_a(u)| = 0$  e neste caso  $\rho = \sigma\phi_*(u)\chi_{\{u>a\}}$  q.t.p. em  $\Omega$ . Pelo Teorema 1.0.5 temos

$$-\Delta\Phi u = \sigma\phi_*(u)\chi_{\{u>a\}} + \lambda h \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que encerra a demonstração do Teorema 1.0.6. ■

**Observação 6.6.2** Se  $\phi(|\nabla u|)|\nabla u| \in W_{loc}^{1, \frac{m^*}{m^*-1}}(\Omega)$  e  $h > 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , então  $|\Gamma_a(u)| = 0$ , para qualquer ponto crítico de  $I$  (cf. [37]). De fato, temos que  $|\nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u)| \in L_{loc}^{\frac{m^*}{m^*-1}}(\Omega)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{\phi(|\nabla u|)|\nabla u|}{\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|} \right) &= \frac{\nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)[\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|] - \nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)\phi(|\nabla u|)|\nabla u|}{[\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|]^2} \\ &= \frac{\varepsilon \nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)}{[\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|]^2} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|), \end{aligned}$$

provando a afirmação. Façamos  $f(x) := \rho(x) + \lambda h(x)$ , então para todo  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\phi(|\nabla u|)|\nabla u|}{\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|} \varphi f dx &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla \left( \frac{\phi(|\nabla u|)|\nabla u|}{\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|} \varphi \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \frac{\phi(|\nabla u|)|\nabla u|}{\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|} \nabla u \nabla \varphi dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \varphi \frac{\varepsilon}{[\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|]^2} \nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|) \nabla u dx \end{aligned} \tag{6-44}$$

Mas

$$\begin{aligned}
& \left| \phi(|\nabla u|) \phi \frac{\varepsilon}{[\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|]^2} \nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|) \nabla u \right| \\
& \leq |\phi| \phi(|\nabla u|) |\nabla u| \frac{\varepsilon}{[\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|]^2} |\nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)| \\
& \leq |\phi| \frac{\varepsilon^2 + (\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)^2}{2[\varepsilon + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|]^2} |\nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)| \\
& \leq \frac{1}{2} |\phi \nabla(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|)| \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Lebesgue em (6–44) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega/\{\nabla u \neq 0\}} f \phi dx &= \int_{\Omega/\{\nabla u \neq 0\}} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla \phi dx \\
&= \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla \phi dx \\
&= \int_{\Omega} f \phi dx.
\end{aligned}$$

Portanto,  $f(x) = 0$  q.t.p. em  $\{x \in \Omega \mid \nabla u = 0\}$ . Por outro lado,  $f(x) > 0$  q.t.p.  $x \in \Omega$ .  
Donde,

$$|\{x \in \Omega \mid \nabla u = 0\}| = 0.$$

Agora observe que pelo Teorema de Morey-Stampacchia  $\nabla u = 0$  em  $\Gamma_a(u) := \{x \in \Omega \mid u(x) = a\}$ . Assim,

$$\Gamma_a(u) \subseteq \{x \in \Omega \mid \nabla u = 0\}$$

concluindo que  $|\Gamma_a(u)| = 0$ .

## 6.7 Demonstrações dos Teoremas 1.0.7, 1.0.8 e 1.0.9

Nesta seção apresentamos as demonstrações dos Teoremas 1.0.7, 1.0.8 e 1.0.9.

**Demonstração do Teorema 1.0.7:** Em primeiro lugar, afirmamos que  $\phi$  satisfaz

$$(\phi_1) - (\phi_2) \text{ e } 2 \leq \frac{t^2 \phi(t)}{\Phi(t)} \leq 2\gamma, \quad t > 0. \quad (6-45)$$

De fato,  $\phi \in C(0, \infty)$  e

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \phi(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} t \phi(t) = \infty.$$

Observando que

$$\Phi(t) = \int_0^t s\phi(s)ds = (1+t^2)^\gamma - 1,$$

obtemos

$$\frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} = \frac{2\gamma t^2(1+t^2)^{\gamma-1}}{(1+t^2)^\gamma - 1}, \quad t > 0.$$

Faça  $z = 1 + t^2$  e defina

$$f(z) = \frac{2\gamma(z-1)z^{\gamma-1}}{z^\gamma - 1}, \quad z > 1.$$

Note que  $f$  é crescente para  $z > 1$ , pois,

$$f'(z) = \frac{2\gamma z^{\gamma-2}(z^\gamma - \gamma z + \gamma - 1)}{(z^\gamma - 1)^2} > 0, \quad z > 1.$$

Agora, pela regra de L'Hospital

$$\lim_{z \rightarrow 1+} f(z) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 2\gamma,$$

donde

$$2 \leq f(z) \leq 2\gamma, \quad z > 1,$$

ou seja,

$$2 \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq 2\gamma, \quad t > 0.$$

Em segundo lugar, afirmamos que

$$2\gamma < 2^*, \quad L_\Phi(\Omega) = L^{2\gamma}(\Omega) \quad \text{e} \quad W_0^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^{1,2\gamma}(\Omega). \quad (6-46)$$

De fato, para mostrar que  $L_\Phi(\Omega) = L^{2\gamma}(\Omega)$ , observe que

$$\Phi(t) \leq (1+t^2)^\gamma \leq 2^\gamma t^{2\gamma} \quad \text{e} \quad \Phi(t) \geq \frac{1}{2} t^{2\gamma} \quad \text{para } t \geq 1.$$

Por [43, pg. 156],  $L_\Phi(\Omega) = L^{2\gamma}(\Omega)$ . Consequentemente,  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) = W_0^{1,2\gamma}(\Omega)$ .

Por fim, note que a condição  $\gamma < \frac{N}{N-2}$  é equivalente a  $2\gamma < 2^*$ .

Como  $\Phi$  é equivalente a  $t^{2\gamma}$ ,  $t \geq 0$ , temos que uma função expoente crítico de  $\Phi$  é  $\Phi_*(t) = t^{(2\gamma)^*}$ . Portanto,  $j$  é dada pela relação (1-36). Assim, pelo Teorema 1.0.5 a equação (1-26) possui pelo menos uma solução não negativa e não nula. ■

**Demonstração do Teorema 1.0.8:** Inicialmente, afirmamos que  $\phi$  definida por (1-37) satisfaz  $(\phi_1) - (\phi_2)$  e

$$p \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq p+1.$$



De fato,  $\phi \in \mathbf{C}(0, \infty)$  e

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\phi(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} t\phi(t) = \infty,$$

ou seja,  $(\phi_1)$  é válida.

É fácil ver que

$$t\phi(t) = pt^{p-1} \ln(1+t) + \frac{t^p}{1+t}, \quad t > 0,$$

é crescente, isto é, vale  $(\phi_2)$ .

Agora, observe que

$$\Phi(t) := \int_0^t s\phi(s)ds = t^p \ln(1+t).$$

Assim,

$$\frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} = p + \frac{t}{(1+t)\ln(1+t)}, \quad t > 0$$

e como

$$f(t) = \frac{t}{(1+t)\ln(1+t)}, \quad t > 0$$

é decrescente

$$p \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq p + \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = p + 1. \quad (6-47)$$

Note também que  $\frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2} < p$  é equivalente a  $p+1 < p^*$ .

Além disso, por (6-47) temos que  $\Phi_*$  é definido. Assim, podemos definir

$$j(x, t) := \sigma(x)[\Phi_*(t) - \Phi_*(a)] \chi_{\{t>a\}}(t).$$

Por fim, basta aplicarmos o Teorema 1.0.5. ■

**Observação 6.7.1** *Um fato peculiar da última aplicação com relação a primeira é que  $L_\Phi(\Omega) \neq L^r(\Omega)$  para todo  $r \geq 1$  e consequentemente  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \neq W_0^{1,r}(\Omega)$ . Com efeito, suponha, por absurdo, que  $L_\Phi(\Omega) = L^r(\Omega)$  para algum  $r \geq 1$ . Então existem  $C_1, C_2, T > 0$ , (cf. Teorema 3.17.5 em [32]), tais que*

$$C_1 t^r \leq t^p \ln(1+t) \leq C_2 t^r, \quad t \geq T$$

e dividindo-a por  $t^p$  obtemos

$$C_1 t^{r-p} \leq \ln(1+t) \leq C_2 t^{r-p}, \quad t \geq T.$$

Da desigualdade

$$\ln(1+t) \leq C_2 t^{r-p}, \quad t \geq T$$

concluimos que  $r > p$ . Por outro lado, temos a desigualdade

$$C_1 \leq \frac{\ln(1+t)}{t^{r-p}}, \quad t \geq T,$$

o que é uma absurdo.

**Demonstração do Teorema 1.0.9:** Afirmamos que  $\phi$  satisfaz  $(\phi_1)' - (\phi_4)'$ . De fato, como  $p_0 > 2$  vale  $(\phi_1)'$ .

É fácil ver que

$$\phi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty.$$

Para verificar  $(\phi_3)'$ , observe que  $p_0 - 1 < p_1 - 1$  e assim

$$\begin{aligned} \frac{(t\phi(t))'}{\phi(t)} &= \frac{(p_0 - 1)p_0 t^{p_0-2} + (p_1 - 1)p_1 t^{p_1-2}}{p_0 t^{p_0-2} + p_1 t^{p_1-2}} \\ &= \frac{(p_0 - 1)p_0 + (p_1 - 1)p_1 t^{p_1-p_0}}{p_0 + p_1 t^{p_1-p_0}} \\ &\leq (p_1 - 1) \frac{p_0 + p_1 t^{p_1-p_0}}{p_0 + p_1 t^{p_1-p_0}} \\ &= p_1 - 1 \end{aligned} \tag{6-48}$$

De igual forma mostra-se que

$$\frac{(t\phi(t))'}{\phi(t)} \geq p_0 - 1 \tag{6-49}$$

De (6-48) – (6-49) obtemos

$$p_0 - 1 \leq \frac{(\phi(t)t)'}{\phi(t)} \leq p_1 - 1$$

Observando que

$$t^{p_1} \leq t^{p_0} + t^{p_1} \leq 2t^{p_1}, \quad t \geq 1,$$

concluimos que  $\Phi$  é equivalente a  $\Psi(t) = t^{p_1}$ . Assim, uma função expoente crítico de  $\Phi$  é  $\Phi_*(t) = \frac{t^{p_1^*}}{p_1^*}$ . Donde,

$$t\phi'_*(t) = (p_1^* - 1)t^{p_1^*-1}, \quad t \geq 0,$$

é crescente, provando  $(\phi_4)'$ .

Por fim, como  $p_1 < p_0^*$  e  $h \in L_{\Phi_*}(\Omega) = L^{p_1^*}(\Omega)$  o Teorema 1.0.9 segue do Teorema 1.0.6. ■

## Alguns Funcionais em Espaços de Orlicz-Sobolev

Este Apêndice tem o objetivo de provar algumas propriedades relativas a funcionais usados neste trabalho.

A seguir, examinaremos algumas propriedades do funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx - \int_{\Omega} j(x, u) dx - \int_{\Omega} h u dx, \quad u \in W_0^{1, \Phi}(\Omega), \quad (\text{A-1})$$

onde  $j : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  é mensurável,  $j(x, \cdot) \in Lip_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  q.t.p.  $x \in \Omega$ ,  $j(\cdot, 0) \in L^1(\Omega)$  e satisfaça (1–9), e é usado no Capítulo 5.

**Lema A.0.1** *Suponha que  $j : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  seja mensurável,  $j(x, \cdot) \in Lip_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  q.t.p.  $x \in \Omega$ ,  $j(\cdot, 0) \in L^1(\Omega)$  e satisfaça (1–9), então funcional*

$$J(u) = \int_{\Omega} j(x, u) dx, \quad u \in L_{\Phi_*}(\Omega)$$

*é bem definido.*

**Demonstração:** De fato, pelo Teorema do Valor Médio de Lebourg (Teorema 3.2.1) existem  $\tau \in (0, t)$  e  $\eta_{\tau}(x) \in \partial j(x, \tau)$  tal que  $j(x, t) - j(x, 0) = \eta_{\tau}(x)t$  q.t.p.  $x \in \Omega$ .

Como  $s \mapsto \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 s)$  é crescente, segue de (1–9) que

$$\begin{aligned} |j(x, t)| &= |j(x, 0) + \eta_{\tau}(x)t| \\ &\leq |j(x, 0)| + [c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 \tau) + b(x)]|t| \\ &\leq |j(x, 0)| + [c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 t) + b(x)]|t|. \end{aligned}$$

Assim, segue da desigualdade de Hölder que

$$\left| \int_{\Omega} j(x, u) dx \right| \leq \int_{\Omega} |j(x, 0)| dx + 2 \|c_1 \tilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 |u|) + b(x)\|_{\tilde{\Phi}_*} \|u\|_{\Phi_*} < \infty.$$

Isto prova o Lema A.0.1. ■

**Lema A.0.2** *O funcional*

$$E(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

satisfaz:

$$E \in \mathbf{C}^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}) \text{ e } \langle E'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx, \quad v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \quad (\text{A-2})$$

**Demonstração:** Na demonstração o Teorema 4.2.1 provamos que o funcional  $E$  é Gateaux diferenciável e que sua derivada de Gateaux

$$d_GE : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \rightarrow L(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}),$$

onde  $L(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R})$  é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos de  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  em  $\mathbf{R}$ , é dada por

$$\langle d_GE(u), v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx, \quad u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

A seguir, mostraremos que  $d_GE : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \rightarrow L(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R})$  é contínua. De fato, sejam  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  e  $(u_n) \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $u_n \rightarrow u$ . Afirmamos que

$$\int_{\Omega} \tilde{\Phi}(|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u|) dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (\text{A-3})$$

Com efeito, considerando uma subsequencia se necessário (cf. Lema 2.2.2),

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u, \quad \text{q.t.p. } \Omega,$$

e como  $t \mapsto t\phi(t)$  e  $s \mapsto \tilde{\Phi}(|s|)$  são contínuas, temos

$$\tilde{\Phi}(|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u|) \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p. } \Omega.$$

Além disso, existe  $h \in L_{\Phi}(\Omega)$  tal que  $|\nabla u_n| \leq h$  (cf. Lema 2.2.2) e como  $\tilde{\Phi}$  é crescente

$$\tilde{\Phi}(|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u|) \leq \tilde{\Phi}(\phi(h)h + |\phi(|\nabla u|) \nabla u|).$$

Aplicando o Teorema de Lebesgue, a afirmação está provada. Como  $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ , a condição (A-3) equivale a

$$\|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u\|_{\tilde{\Phi}} \rightarrow 0.$$

Por fim, considere  $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que  $\|\nabla v\|_\Phi = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} |\langle d_GE(u_n) - d_GE(u), v \rangle| &= \left| \int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u, \nabla v) dx \right| \\ &\leq 2 \|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u\|_{\tilde{\Phi}} \|\nabla v\|_\Phi \\ &= 2 \|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u\|_{\tilde{\Phi}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|d_GE(u_n) - d_GE(u)\| &= \sup_{\|\nabla v\|_\Phi=1} |\langle d_GE(u_n) - d_GE(u), v \rangle| \\ &\leq 2 \|\phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n - \phi(|\nabla u|) \nabla u\|_{\tilde{\Phi}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela Proposição 1.3 (cf. Willem [49])  $E$  é Fréchet diferenciável em  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ . Isto prova o Lema A.0.2. ■

O lema abaixo é crucial.

**Lema A.0.3** *O funcional*

$$E(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

é fssci.

**Demonstração:** Pelo Lema A.0.2,  $E$  é Fréchet diferenciável. Além disso, como  $t \mapsto \Phi(|t|)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , é convexa então  $E$  é convexa.

Sejam  $u_n \rightharpoonup u$  em  $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  e  $E'(u) \in W^{-1,\Phi}(\Omega)$  a derivada de Fréchet de  $E$  aplicada em  $u$ . Como  $E$  é convexa, temos

$$E(u_n) \geq E(u) + \langle E'(u), u_n - u \rangle$$

e passando ao limite inferior quando  $n \rightarrow \infty$  obtemos que

$$\begin{aligned} \liminf E(u_n) &\geq \liminf \{E(u) + \langle E'(u), u_n - u \rangle\} \\ &\geq E(u) + \liminf \langle E'(u), u_n - u \rangle \\ &= E(u). \end{aligned}$$

Isto prova o Lema A.0.3. ■

**Observação A.0.2** *O funcional*

$$H(u) = \int_\Omega h u dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

satisfaz: e

$$H \in \mathbf{C}^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbf{R}) \text{ e } \langle H'(u), v \rangle = \int_{\Omega} h v dx, \quad u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

De fato, segue da desigualdade de Hölder (cf. Teorema 2.2.1) e da imersão  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_*}(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} h u dx \right| \leq C \|u\| \|h\|_{\tilde{\Phi}_*},$$

onde  $C > 0$ . Como  $H$  é linear e contínua, a afirmação segue.

**Observação A.0.3** Segue dos resultados e observação acima que o funcional  $Q_{\lambda}(u) = E(u) - \lambda H(u)$ ,  $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ , é de classe  $\mathbf{C}^1$  e

$$\langle Q'_{\lambda}(u), v \rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} h v dx, \quad u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \quad (\text{A-4})$$

A seguir, enunciamos casos particulares do Princípio Variacional de Ekeland e do Teorema de Minimax de Ky Fan (cf. Brézis et al. [10, Prop. 1]) que utilizamos neste trabalho.

**Teorema A.0.1 (Ekeland)** Sejam  $r > 0$ ,  $B = \overline{B_r(0)} \subseteq W_0^{1,\Phi}(\Omega)$  a bola fechada de raio  $r$  e centro na origem, e  $I : B \rightarrow \mathbf{R}$  um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Sejam  $c = \inf_B I$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $u \in B$  tais que  $I(u) \leq c + \varepsilon$ . Então, dado  $\lambda > 0$  existe  $v \in B$  tal que

$$\begin{aligned} I(v) &\leq I(u) \\ d(v, u) &\leq \lambda \\ I(v) &\leq I(w) + (\varepsilon/\lambda) d(v, w), \quad w \neq v. \end{aligned}$$

**Teorema A.0.2 (Ky Fan)** Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $A \subset X'$ , onde  $X'$  é munido da topologia fraca\*, e  $B \subset X$  conjuntos convexos. Se  $K : A \times B \rightarrow \mathbf{R}$  satisfaz:

$$\{v \in B : -K(u, v) < c\} \text{ é convexo para todo } u \in A \text{ e } c \in \mathbf{R}; \quad (\text{A-5})$$

$$\{u \in A : K(u, v) < c\} \text{ é convexo para todo } v \in B \text{ e } c \in \mathbf{R}; \quad (\text{A-6})$$

$$K(., v) \text{ é semicontínua inferiormente em } A, \text{ para todo } v \in B; \quad (\text{A-7})$$

$$\begin{aligned} -K(u, .) &\text{ é semicontínua inferiormente em } B \cap X_n \\ &\text{ para todo } u \in A, \text{ onde } X_n \subset X \text{ e } \dim X_n < \infty; \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

$$\text{Existem } \tilde{v} \in B \text{ e } \lambda > \sup_A \inf_B K(u, v) \text{ tal que } \{u \in A | K(u, \tilde{v}) \leq \lambda\} \text{ é fraco* -compacto.} \quad (\text{A-9})$$

Então

$$\sup_B \inf_A K(u, v) = \inf_A \sup_B K(u, v).$$

## Medidas e Concentração-Compacidade

---

Em primeiro lugar, lembramos alguns conceitos sobre medidas.

**Definição B.0.1** *Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico.*

(a) *A  $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos de  $X$  é dita  $\sigma$ -álgebra de Borel e será denotada por  $\mathbf{B}(X, \tau)$ .*

(b) *A  $\sigma$ -álgebra tal que toda função  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  contínua é mensurável é dita  $\sigma$ -álgebra de Baire e será denotada por  $\mathbf{Ba}(X, \tau)$ .*

A demonstração do Teorema a seguir é encontrada em Dudley [21, pg. 223].

**Teorema B.0.3** *Se  $X$  é um espaço métrico, então  $\mathbf{Ba}(X, \tau) = \mathbf{B}(X, \tau)$ .*

Com base em Lions [36] e Fukagai, Ito & Narukawa [23], introduzimos a seguir várias notações e resultados sobre Concentração-Compacidade no contexto de espaços de Orlicz-Sobolev.

Lembramos que

$$(i) \quad C_0 = \overline{\{u \in C(\mathbf{R}^N) \mid \text{supp}(u) \subseteq \mathbf{R}^N\}}^{\|\cdot\|_\infty},$$

com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |u(x)|,$$

$$(ii) \quad \mathcal{M}(\mathbf{R}^N) = \text{o espaço das medidas finitas em } \mathbf{R}^N$$

com a norma

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} u d\mu \mid u \in C_0, \|u\|_\infty = 1 \right\}.$$

Seja  $\Phi$  uma  $N$ -função satisfazendo  $\Delta_2$ , o espaço  $\mathfrak{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$  é definido como sendo o completamento do espaço de  $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N)$  com relação a norma

$$\|u\|_{\mathfrak{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)} = \|u\|_{\Phi_*} + \|\nabla u\|_{\Phi}.$$

É imediato verificar que

$$\mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N) \xrightarrow{\text{cont}} L_{\Phi_*}(\mathbf{R}^N).$$

**Observação B.0.4** *Recordemos algumas notações e resultados:*

- (i)  $\mathcal{M} = C_0^*$  e  $\langle \mu, u \rangle = \int u d\mu$ ,
- (ii) Denotaremos  $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{M}} \mu$  sempre que  $\int u d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int u d\mu$ ,  $u \in C_0$ ,
- (iii) Se  $(\mu_n) \subseteq \mathcal{M}$  limitada então  $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{M}} \mu$ , considerando uma subsequencia se necessário.

Seja  $(u_n) \subseteq \mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$  uma sequencia limitada. Consequentemente

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L_{\Phi_*}(\mathbf{R}^N), \quad (\text{B-1})$$

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ em } L_{\Phi}(\mathbf{R}^N), \quad (\text{B-2})$$

$$\Phi_*(|u_n|) \rightharpoonup v \text{ em } \mathcal{M}(\mathbf{R}^N), \quad (\text{B-3})$$

$$\Phi(|\nabla u_n|) \rightharpoonup \mu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbf{R}^N). \quad (\text{B-4})$$

Devido a imersão  $W^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L_{\Phi}(\Omega)$  concluímos que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L_{\Phi}(\Omega), \quad (\text{B-5})$$

para qualquer domínio limitado  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$  e consequentemente

$$u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \mathbf{R}^N. \quad (\text{B-6})$$

**Lema B.0.4** (Cf. [23]) *Suponha que  $u \equiv 0$  em (B-1) – (B-6). Então*

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla(\varphi u_n)|) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\varphi \nabla u_n|) dx + o_n(1) \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (\text{B-7})$$

para qualquer  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ .

**Demonstração:** Pela desigualdade de Hölder temos que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\varphi \nabla u_n + u_n \nabla \varphi|) dx - \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\varphi \nabla u_n|) dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi(|\phi \nabla u_n + t u_n \nabla \phi|) dt dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^1 \phi(|\phi \nabla u_n + t u_n \nabla \phi|) (\phi \nabla u_n + t u_n \nabla \phi) \cdot (u_n \nabla \phi) dt dx \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^N} \phi(|\phi \nabla u_n| + |u_n \nabla \phi|) (|\phi \nabla u_n| + |u_n \nabla \phi|) |u_n \nabla \phi| dx \tag{B-8} \\
&\leq 2 \|\phi(|\phi \nabla u_n| + |u_n \nabla \phi|) (|\phi \nabla u_n| + |u_n \nabla \phi|)\|_{\tilde{\Phi}} \|u_n \nabla \phi\|_{\Phi} \\
&\leq 2 \|\phi(|\phi \nabla u_n| + |u_n \nabla \phi|) (|\phi \nabla u_n| + |u_n \nabla \phi|)\|_{\tilde{\Phi}} \|u_n \nabla \phi\|_{\Phi}
\end{aligned}$$

pois  $\tilde{\Phi}(\phi(t)t) \leq \Phi(2t)$ . Devido a imersão  $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \xrightarrow{comp} L_{\Phi}(\Omega)$  temos que  $\|u_n \nabla \phi\|_{\Phi} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, por (B-8) chegamos a (B-7). ■

**Lema B.0.5 (Cf. [23])** *Existem um conjunto enumerável  $J$ , uma família  $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbf{R}^N$  com  $x_i \neq x_j$  e uma família de números positivos  $\{v_j\}_{j \in J}$  e  $\{\mu_j\}_{j \in J}$  tais que*

$$v = \Phi_*(u) + \sum_{j \in J} v_j \delta_{x_j} \tag{B-9}$$

e

$$\mu \geq \Phi(|\nabla u|) + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{B-10}$$

onde  $\delta_{x_j}$  é a medida de Dirac com massa 1 concentrada em  $x_j$ . Além disso,

$$0 < v_j \leq \max \left\{ S^{-\frac{\ell^*}{\ell}} \mu_j^{\frac{\ell^*}{\ell}}, S^{-\frac{m^*}{\ell}} \mu_j^{\frac{m^*}{\ell}}, S^{-\frac{\ell^*}{\ell}} \mu_j^{\frac{\ell^*}{m}}, S^{-\frac{m^*}{\ell}} \mu_j^{\frac{m^*}{m}} \right\}, \quad j \in J. \tag{B-11}$$

**Demonstração:** Sejam  $\{x_j\}_{j \in J} \subset \mathbf{R}^N$  as singularidades da medida  $\mu$  e faça

$$\mu = \mu_{free} + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j} \tag{B-12}$$

onde  $\mu_{free} \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)$  é livre de singularidades. Como  $\mu \geq 0$  temos que  $\mu_{free} \geq 0$  e  $\mu_j = \mu(\{x_j\}) > 0$ . Além disso,

$$\mu(\mathbf{R}^N) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|) dx < \infty,$$

donde  $J$  é um conjunto contável.

Suponha que  $u = 0$ . Seja  $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ . Assim, pelo Lema 2.4.4, (6–3), Lema 2.4.1 e (B–7) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(\varphi|u_n|)dx &\leq \zeta_5(\|\varphi u_n\|_{\Phi_*}) \leq \zeta_5\left(\frac{1}{S^{1/\ell}}\|\nabla(\varphi u_n)\|_{\Phi}\right) \\ &\leq \zeta_5\left(\frac{1}{S^{1/\ell}}\zeta_0^{-1}\left(\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla(\varphi u_n)|)dx\right)\right) \\ &\leq \zeta_5\left(\frac{1}{S^{1/\ell}}\zeta_0^{-1}\left(\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(\varphi|\nabla u_n|)dx + o_n(1)\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

Pelo Lema 2.4.1

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(\varphi|\nabla u_n|)dx \leq \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_1(\varphi)\Phi(|\nabla u_n|)dx \leq \int_{\mathbf{R}^N} \varphi^\ell \Phi(|\nabla u_n|)dx \quad (\text{B-14})$$

e pelo Lema 2.4.4

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(\varphi|u_n|)dx \geq \int_{\mathbf{R}^N} \zeta_4(\varphi)\Phi_*(|u_n|)dx = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi^{m^*} \Phi_*(|u_n|)dx. \quad (\text{B-15})$$

Combinando (B–13) – (B–15), temos que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varphi^{m^*} \Phi_*(|u_n|)dx \leq \zeta_5\left(\frac{1}{S^{1/\ell}}\zeta_0^{-1}\left(\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(\varphi|\nabla u_n|)dx + o_n(1)\right)\right). \quad (\text{B-16})$$

Passando ao limite  $n \rightarrow \infty$  e usando (B–3) – (B–4) chegamos a

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varphi^{m^*} d\mathbf{v} \leq \zeta_5\left(\frac{1}{S^{1/\ell}}\zeta_0^{-1}\left(\int_{\mathbf{R}^N} \varphi^\ell d\mu\right)\right).$$

Por aproximação,

$$\mathbf{v}(A) \leq \zeta_5\left(\frac{1}{S^{1/\ell}}\zeta_0^{-1}(\mu(A))\right), \quad \text{para qualquer conjunto de Borel } A \subset \mathbf{R}^N. \quad (\text{B-17})$$

Assim,  $\mathbf{v}$  é absolutamente contínua com relação a  $\mu$  e

$$\mathbf{v}(A) = \int_A D_\mu \mathbf{v} d\mu \quad (\text{B-18})$$

onde

$$D_\mu \mathbf{v}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{v}(B_\varepsilon(x))}{\mu(B_\varepsilon(x))} \quad \text{para } \mu - \text{q.t.p. } x \in \mathbf{R}^N$$

e  $B_\varepsilon(x)$  é uma bola com raio  $\varepsilon$  e centro  $x$ . Por (B-17)

$$\frac{v(B_\varepsilon(x))}{\mu(B_\varepsilon(x))} \leq \frac{\zeta_5 \left( \frac{1}{s^{1/\ell}} \zeta_0^{-1}(\mu(B_\varepsilon(x))) \right)}{\mu(B_\varepsilon(x))},$$

desde que  $\mu(B_\varepsilon(x)) \neq 0$ . Como  $\zeta_0^{-1}(t) = \max\{t^{1/\ell}, t^{1/m}\}$  e  $\zeta_5(t) = \max\{t^{\ell^*/\ell}, t^{m^*/\ell}, t^{\ell^*/m}, t^{m^*/m}\}$  obtemos

$$\zeta_5 \left( \frac{1}{s^{1/\ell}} \zeta_0^{-1}(t) \right) = \max \left\{ \frac{1}{s^{\ell^*/\ell}} t^{\ell^*/\ell}, \frac{1}{s^{m^*/\ell}} t^{m^*/\ell}, \frac{1}{s^{\ell^*/\ell}} t^{\ell^*/m}, \frac{1}{s^{m^*/\ell}} t^{m^*/m} \right\},$$

assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\zeta_5 \left( \frac{1}{s^{1/\ell}} \zeta_0^{-1}(t) \right)}{t} = 0,$$

donde

$$D_\mu v(x) = 0 \quad \text{para } \mu - \text{q.t.p. } x \in \mathbf{R}^N - \{x_j\}_{j \in J}. \quad (\text{B-19})$$

Faça  $v_j = D_\mu v(x_j) \mu_j$ . Então, por (B-18), (B-19) e (B-12)

$$v = \sum_{j \in J} v_j \delta_{x_j} \quad \text{e} \quad \mu \geq \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

Além disso, por (B-17),

$$v(B_\varepsilon(x_j)) \leq \zeta_5 \left( \frac{1}{s^{1/\ell}} \zeta_0^{-1}(\mu(B_\varepsilon(x))) \right).$$

Passando ao limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , concluímos

$$0 \leq v_j \leq \zeta_5 \left( \frac{1}{s^{1/\ell}} \zeta_0^{-1}(\mu_j) \right) = \max \left\{ \frac{1}{s^{\ell^*/\ell}} \mu_j^{\ell^*/\ell}, \frac{1}{s^{m^*/\ell}} \mu_j^{m^*/\ell}, \frac{1}{s^{\ell^*/\ell}} \mu_j^{\ell^*/m}, \frac{1}{s^{m^*/\ell}} \mu_j^{m^*/m} \right\}.$$

Finalmente, excluindo os índices  $j$  tais que  $v_j = 0$  do conjunto de índices  $J$ , o Lema está provado para o caso  $u = 0$ .

Agora consideraremos o caso  $u \neq 0$ . Seja  $v_n = u_n - u \in \mathfrak{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$ . Então

- $v_n \rightharpoonup 0$  fracamente em  $L_{\Phi_*}(\mathbf{R}^N)$ ;
- $|\nabla v_n| \rightharpoonup 0$  fracamente em  $L_\Phi(\mathbf{R}^N)$ ;
- $v_n \rightarrow 0$  em  $L_\Phi(\Omega)$  para qualquer  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ;
- $v_n \rightarrow 0$  q.t.p. em  $\mathbf{R}^N$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Como

$$\|\nabla v_n\|_\Phi \leq \|\nabla u_n\|_\Phi + \|\nabla u\|_\Phi \quad \text{e} \quad \|v_n\|_{\Phi_*} \leq \|u_n\|_{\Phi_*} + \|u\|_{\Phi_*},$$

as sequencias  $\{\|\nabla v_n\|_\Phi\}$  e  $\{\|v_n\|_{\Phi_*}\}$  são limitadas, segue dos Lemas 2.4.1 e 2.4.4 que as sequencias  $\{\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla v_n|)dx\}$  e  $\{\int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(|v_n|)dx\}$  também o são. Passando a uma subsequencia se necessário, podemos assumir que existem medidas de Radon  $\hat{\nu}, \hat{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)$  tais que

$$\Phi_*(v_n) \rightharpoonup \hat{\nu} \quad \text{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbf{R}^N) \quad (\text{B-20})$$

$$\Phi(|\nabla v_n|) \rightharpoonup \hat{\mu} \quad \text{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbf{R}^N) \quad (\text{B-21})$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Pelo caso acima em que  $u = 0$ , existem um conjunto contável  $J$ , uma família  $\{x_j\}_{j \in J}$  de pontos distintos em  $\mathbf{R}^N$  e pesos positivos  $\{v_j\}_{j \in J}$ ,  $\{\mu_j\}_{j \in J}$  tais que

$$\hat{\nu} = \sum_{j \in J} v_j \delta_{x_j} \quad \text{e} \quad \hat{\mu} \geq \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

Como  $\Phi_*(t)$ ,  $\Phi(t)$  são funções convexas e  $u_n \rightarrow u$  q.t.p., segue do Lema de Brézis-Lieb que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \{\Phi_*(u_n) - \Phi_*(u_n - u) - \Phi_*(u)\} \varphi dx \rightarrow 0$$

para  $\varphi \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}^N)$ ,  $\varphi \geq 0$ . Assim, por (B-3), (B-4), (B-20) e (B-21) temos

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\nu = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\hat{\nu} + \int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(|u|) \varphi dx,$$

para qualquer  $\varphi = \varphi_+ - \varphi_- \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}^N)$ . Isto prova (B-9). Para qualquer  $\varphi \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}^N)$ ,

$$\int_{\mathbf{R}^N} [\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|\nabla v_n|)] \varphi dx = \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^1 \phi(|\nabla u_n - t \nabla u|) (\nabla u_n - t \nabla u) \cdot \nabla u \varphi dt dx.$$

Pelos Lemas 2.1.1 e 2.4.1, e os fatos de  $\Phi$  ser estritamente crescente e convexa temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n - t \nabla u|) |\nabla u_n - t \nabla u|) dx &\leq \zeta_1(2) \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u_n - t \nabla u|) dx \\ &\leq \frac{\zeta_1(2)^2}{2} \left( \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u_n|) dx + \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u|) dx \right) \end{aligned}$$

para qualquer  $0 < t < 1$ . Portanto,  $\{\int_0^1 \phi(|\nabla u_n - t \nabla u|) (\nabla u_n - t \nabla u) \cdot \nabla u \varphi dt\}$  é limitada em  $L_{\tilde{\Phi}}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$ , e existe uma subsequencia que converge para algum  $w$  em  $L_{\tilde{\Phi}}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$ . Passando ao limite, chegamos a

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu - \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\hat{\mu} = \int_{\mathbf{R}^N} w \cdot \nabla u \varphi dx$$

para qualquer  $\varphi \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}^N)$ . Assim, as singularidades de  $\mu$  coincidem com as singularidades de  $\widehat{\mu}$ . Pela semicontinuidade inferior fraca, chegamos a

$$\mu_{free} \geq \Phi(|\nabla u|).$$

Donde (B – 10) vale, concluindo a demonstração do Lema. ■

## Sobre Regularidade de Soluções de Equações Quasilineares

---

A seguir, apresentaremos um resultado sobre regularidade de soluções da equação

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) + B(x, u, \nabla u) = 0 \quad (\text{C-1})$$

onde  $\Omega$  é um domínio regular,  $A : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  e  $B : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  são tais que  $A \in \mathbf{C}^1(\Omega \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^N - \{0\})) \cap \mathbf{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$  e  $B$  é Carathéodory.

Os principais resultados abaixo são devidos a Liberman [35]. Para resultados adicionais confira DiBenedetto [19], Serrin & Zou [46] e Tolksdorf [48].

Seja  $\Phi$  uma N-função.

**Definição C.0.2** Uma solução fraca de (C-1) é uma função  $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} A(x, u, \nabla u) \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} B(x, u, \nabla u) \varphi dx = 0, \quad \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Suponha que  $\Phi$  é duas vezes diferenciável e que existam  $\delta, g_0 > 0$  tais que

$$\delta \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \quad t > 0,$$

onde  $g(t) := \Phi'(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Além disso, suponha que para todos  $x, y \in \Omega$ ,  $z, w \in \mathbf{R}$  e  $p \in \mathbf{R}^N / \{0\}$

$$(i) \quad \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial A_i}{\partial p_j}(x, z, p) \xi_i \xi_j \geq \frac{g(|p|)}{|p|} |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbf{R}^N; \quad (\text{C-2})$$

$$(ii) \quad \left| \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial A_i}{\partial p_j}(x, z, p) \right| \leq \Lambda \frac{g(|p|)}{|p|};$$

$$(iii) \quad |A(x, z, p) - A(y, w, p)| \leq \Lambda_1 (1 + g(|p|)) [|x - y|^\alpha + |z - w|^\alpha]; \quad (\text{C-3})$$

$$(iv) \quad |B(x, z, p)| \leq \Lambda_1 \left( 1 + \frac{g(|p|)}{|p|} \right),$$

onde  $\Lambda, \Lambda_1 \geq 0$ .

**Teorema C.0.4** *Suponha que as condições (C-2) sejam válidas para algumas constantes positivas  $\alpha \leq 1$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda_1$  sempre que  $x, y \in \Omega$ ,  $z, w \in [-M_0, M_0]$ , para alguma constante positiva  $M_0$ , e  $p \in \mathbf{R}^N / \{0\}$ . Então qualquer solução  $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$  de*

$$\operatorname{div} A(x, u(x), \nabla u(x)) + B(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

*com  $|u| \leq M_0$  em  $\Omega$ , pertence a  $C^{1,\beta}(\Omega)$  para alguma constante positiva  $\beta$  dependendo de  $\alpha$ ,  $\Lambda$ ,  $\delta$ ,  $g_0$ ,  $N$ , e*

$$|u|_{1+\beta;\Omega'} \leq C(\alpha, \Lambda, \delta, g_0, N, g(1), \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), M_0),$$

*onde  $\Omega' \subset\subset \Omega$  é um conjunto aberto.*

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ADAMS, R. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.
- [2] ALVES, C. O. **Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian**. *Nonlinear Analysis*, 51(7):1187–1206, 2002.
- [3] ALVES, C. O.; BERTONE, A. M. **A discontinuous problem involving the p-Laplacian operator and critical exponent in  $\mathbb{R}^n$** . *Electron. J. Differential Equations*, 42(1):(eletronic), 2003.
- [4] ALVES, C. O.; BERTONE, A. M.; GONÇALVES, J. V. **A variational approach to discontinuous problems with critical Sobolev exponents**. *J. Math. Anal. Appl.*, 265(1):103–127, 2002.
- [5] ALVES, C. O.; GONÇALVES, J. V. **Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in  $\mathbb{R}^n$  involving critical Sobolev exponents**. *Nonlinear Anal., Theory, Methods & Applications*, 32(1):53–70, 1998.
- [6] ALVES, C. O.; GONÇALVES, J. V.; SANTOS, C. A. **Existence and asymptotic behavior of ground states for quasilinear singular equations involving Hardy-Sobolev exponents**. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(1):298–315, 2006.
- [7] ALVES, C. O.; GONÇALVES, J. V.; SANTOS, J. A. **Strongly nonlinear multivalued elliptic equations on a bounded domain**. *J. Glob. Optimization*, 1(1):1–29, 2013.
- [8] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer, New York, 2011.
- [9] BRÉZIS, H.; LIEB, E. **A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88(3):486–490, 1983.
- [10] BRÉZIS, H.; NIRENBERG, L.; STAMPACCHIA, G. **A remark on Ky Fan's minmax theorem**. *Boll. U. M. I.*, 6(4):293–300, 1972.



- [11] BRÉZIS, H.; OSWALD, L. **Remarks on sublinear elliptic equations.** *Nonlinear Anal.*, 10(1):55–64, 1986.
- [12] CARL, S.; LE, V. K.; MOTREANU, D. **Nonsmooth variational problems and their inequalities - Comparison principles and applications.** Springer, New York, 2007.
- [13] CHANG, K. C. **Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations.** *J. Math. Anal. Appl.*, 80(1):102–129, 1981.
- [14] CLARKE, F. **Optimization and Nonsmooth Analysis.** SIAM, Philadelphia, 1990.
- [15] CLEMENT, P.; DE PAGTER, B.; SWEERS, G.; DE THÉLIN, F. **Existence of solutions to a semilinear elliptic system through Orlicz-Sobolev spaces.** *Mediterr. J. Math.*, 1(3):241–267, 2004.
- [16] CORRÊA, F. J. S. A.; GONÇALVES, J. V. **Sublinear elliptic systems with discontinuous nonlinearities.** *Appl. Anal.*, 44(1–2):37–50, 1992.
- [17] DACOROGNA, B. **Introduction to the Calculus of Variations.** ICP, London, 2004.
- [18] DAL MASO, G.; MURAT, F. **Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems.** *Nonlinear Anal.*, 31(3–4):405–412, 1998.
- [19] DIBENEDETTO, E.  **$C^{1+\alpha}$  local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.** *Nonlinear Anal.*, 7(8):827–850, 1983.
- [20] DONALDSON, T. K.; TRUDINGER, N. S. **Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems.** *J. Functional Analysis*, 8, 1971.
- [21] DUDLEY, R. M. **Real Analysis and Probability.** Cambridge University Press, Massachusetts, 2002.
- [22] FUCHS, M.; GONGBAO, L.  **$L^\infty$ -bounds for elliptic equations on Orlicz-Sobolev spaces.** *Arch. Math. (Basel)*, 72(4):293–297, 1999.
- [23] FUKAGAI, N.; ITO, M.; NARUKAWA, K. **Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on  $\mathbb{R}^n$ .** *Funkcialaj Ekvacioj*, 49(2):235–267, 2006.
- [24] FUKAGAI, N.; NARUKAWA, K. **Nonlinear eigenvalue problem for a model equation of an elastic surface.** *Hiroshima Math. J.*, 25(1):19–41, 1995.

- [25] FUKAGAI, N.; NARUKAWA, K. **On the existence of multiple positive solutions of quasilinear elliptic eigenvalue problems.** *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4(3):539–564, 2007.
- [26] GARCIA-HUIDOBRO, M.; LE, V. K.; MANASÉVICH, R.; SCHIMITT, K. **On principal eigenvalues for quasilinear elliptic differential operators: An Orlicz-Sobolev spaces setting.** *Nonl. Diff. Eq. Appl.*, 6(2):207–225, 1999.
- [27] GONÇALVES, J. V. **On nonresonant sublinear elliptic problems.** *Nonlinear Anal.*, 15(10):915–920, 1990.
- [28] GOSSEZ, J. P. **Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190(1):163–205, 1974.
- [29] GOSSEZ, J. P. **Orlicz-Sobolev spaces and nonlinear elliptic boundary value problems.** *Nonlinear analysis, function spaces and applications*, 1(1):59–94, 1979.
- [30] HE, C.; LI, G. **The existence of a nontrivial solution to the  $p$ & $q$ -Laplacian problem with nonlinearity asymptotic to  $u^{p-1}$  at infinity in  $\mathbb{R}^N$ .** *Nonlinear Anal.*, 68(1):1100–1119, 2008.
- [31] KRASNOSELS’KII, M. A.; RUTICKIĬ, Y. A. **Convex functions and Orlicz spaces.** Noordhoff, Groningen, 1961.
- [32] KUFNER, A.; JOHN, O.; FUČÍK, S. **Function spaces.** Noordhoff, Leyden, 1977.
- [33] LADYZHENSKAYA, O.; URAL’TSEVA, N. **Linear and quasilinear elliptic equations.** Academic Press, New York, 1968.
- [34] LE, V. K.; MOTREANU, D.; MOTREANU, V. V. **On a non-smooth eigenvalue problem in Orlicz-Sobolev spaces.** *Appl. Anal.*, 89(2):229–242, 2010.
- [35] LIEBERMAN, G. M. **The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural’tseva.** *Comm. Partial Differential Equations*, 16(2–3):311–361, 1991.
- [36] LIONS, P. L. **The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I.** *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1):145–201, 1985.
- [37] LOU, H. **On singular sets of local solutions to  $p$ -Laplace equations.** *Chin. Ann. Math. B*, 29(5):521–530, 2008.
- [38] MARTÍNEZ, S.; WOLANSKI, N. **A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces.** *Adv. Math.*, 218(6):1914–1971, 2008.

- [39] MAWHIN, J.; WARD, J.; WILLEM, M. **Variational methods and semilinear elliptic equations.** *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 95(3):269–277, 1986.
- [40] MERCURI, C.; WILLEM, M. **A global compactness result for the  $p$ -Laplacian involving critical nonlinearities.** *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 28(2):469–493, 2010.
- [41] MOTREANU, D.; PANAGIOTOPOULOS, P. D. **Minimax theorems and qualitative properties of the solutions of hemivariational inequalities.** Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [42] MUSTONEN, V.; TIENARI, M. **An eigenvalue problem for generalized Laplacian in Orlicz-Sobolev spaces.** *Proc. R. Soc. Edinb. A*, 129(1):153–163, 1999.
- [43] RAO, M. M.; REN, Z. D. **Theory of Orlicz spaces.** In: Taft, E. J.; Nashed, Z., editors, *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 1995.
- [44] RAO, M. M.; REN, Z. D. **Applications of Orlicz spaces.** In: Taft, E. J.; Nashed, Z., editors, *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 2002.
- [45] SANTOS, J. A. **Equações Quasilineares Multivalentes.** PhD thesis, Departamento de Matemática, UnB, 2011.
- [46] SERRIN, J.; ZOU, H. **Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities.** *Acta Math.*, 189(1):79–142, 2002.
- [47] TAN, Z.; FANG, F. **Orlicz-Sobolev versus Hölder local minimizer and multiplicity results for quasilinear elliptic equations.** *J. Math. Anal. Appl.*, 402(1):348–370, 2013.
- [48] TOLKSDORF, P. **Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.** *J. Differential Equations*, 51(1):126–150, 1984.
- [49] WILLEM, M. **Minimax theorem.** Birkhauser, Boston, 1996.