Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Nara Reges Faria de Paiva Pereira

Alguns Problemas de Soma-Zero Com Peso

Goiânia
2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. **Identificação do Material Bibliográfico**: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. **Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor(a):	NARA REGES FARIA DE PAIVA PEREIRA				
E-mail:	narapaiva.mat@gmail.com				
Seu E-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do Autor	BOLSISTA				
Agência de Fomento:	CAPES			Sigla:	CAPES
País: BRASIL	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08	
Título:	ALGUNS PROBLEMAS DE SOMA-ZERO COM PESO				
Palavras-Chave:	SEQUÊNCIAS DE A-SOMA-ZERO, GRUPOS ABELIANOS FINITOS, COMBINATÓRIA				
Título em outra língua:	SOME ZERO-SUM PROBLEMS WITH WEIGHT				
Palavras-Chave em outra língua:	SEQUENCES OF A-ZERO-SUM, FINITE ABELIAN GROUPS, COMBINATORIAL				
Área de Concentração:	ÁLGEBRA				
Data Defesa: (dd/mm/aaaa)	02/03/2015				
Programa de Pós-Graduação:	MESTRADO EM MATEMÁTICA				
Orientador (a):	PAULO HENRIQUE DE AZEVEDO RODRIGUES				
E-mail:	paulo_rodrigues@ufg.br				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. **Informações de acesso ao documento:**
   Liberação para disponibilização?[1] [X] Total [ ] Parcial

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da Tese ou Dissertação. O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos Autores, que os arquivos contendo eletronicamente as Teses e ou Dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

______________________________ Data: 09 / 03 / 15

Assinatura do(a) Autor(a)

[1] Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de Defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à Coordenação do Curso. Todo resumo e dados ficarão sempre disponibilizados.

Nara Reges Faria de Paiva Pereira

Alguns Problemas de Soma-Zero Com Peso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: ˈÁlgebra

Orientador: Prof. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia
2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Pereira, Nara Reges Faria de Paiva
Alguns Problemas de Soma-Zero Com Peso [manuscrito] / Nara Reges Faria de Paiva Pereira. - 2015.
45 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2015.
Bibliografia.

1. Sequências de A-soma-zero. 2. Grupos abelianos finitos. 3. Combinatória. I. Rodrigues, Paulo Henrique de Azevedo , orient. II. Título.

NARA REGES FARIA DE PAIVA PEREIRA

ALGUNS PROBLEMAS DE SOMA-ZERO COM PESO

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 02 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Profa. Dra. Sheila Campos Chagas
Departamento de Matemática - UnB

Ana Paula de A. Chaves

Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Nara Reges Faria de Paiva Pereira

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

Ao meu esposo, Mateus,
e aos meus pais, Donizeth e Adelmira.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a vida e por me dar forças para superar as dificuldades que enfrentei até aqui, e por cuidar de mim em cada mínimo detalhe.

Ao meu amado esposo, por ser meu companheiro fiel, paciente e amigo, por me incentivar a ir atrás dos meus sonhos, por ser o meu porto seguro e por estar ao meu lado sempre e me fazer tão feliz.

Aos meus pais, Donizeth e Adelmira, por todo o cuidado e sacrifício dispensados a mim, por apostarem no meu crescimento e apoiarem cada novo desafio, e por serem meus exemplos de vida.

Aos meus sogros, Suedis e Marlene, por terem me acolhido como uma filha e me ajudado em vários momentos que precisei, e por terem se tornado tão especiais em minha vida.

Ao meu irmão, Diego, por ser meu amigo e companheiro desde sempre, por se orgulhar de cada pequena vitória minha e me ajudar em tudo.

Aos meus cunhados, Lucas, Filipe e Francielly, por todo apoio e incentivo e por terem se tornado tão especiais.

A todos os meus amigos, pois estiveram sempre ao meu lado, me ajudando, me apoiando e me fazendo rir. De forma muito especial cito aqui o Laredo, a Lucyjane, a Paula e a Thamara que foram grandes companheiros de estudos e brincadeiras, que me ensinaram muito sobre matemática, sobre humildade e me fizeram acreditar que ainda podemos encontrar verdadeiros amigos. O Guilherme, por me ajudar, me aconselhar e ser tão boa companhia. A Kamila, por ter me acolhido como amiga e me ensinado tanto, sendo ao mesmo tempo muito inteligente e muito humilde. A Nina, por ser tão carinhosa e paciente comigo, por conquistar meu coração mesmo sendo tão diferente de mim, e por fazer parte da minha vida mesmo quando eu me afasto. A Brunna, por ser tão doce e companheira, por cuidar de mim quando eu mais precisei dela, e por entender que a amo mesmo sendo tão ausente. O Mayk, por sempre estar disposto a ajudar e me fazer rir. O Gean Godoy, meu professor no ensino fundamental e médio, por me fazer enxergar meu amor pela matemática e por sempre me incentivar. E por fim colegas de curso que me acompanharam em alguns momentos e contribuíram de alguma forma na minha vida: Dassael, Marcos Túlio, Pablo, Jean, Pedro Resende, Cícero e Heric.

A todos os meus professores desta jornada, que me deram a oportunidade de crescer e desenvolver minhas aptidões. Em especial, ao meu orientador de iniciação científica da graduação, professor Ronaldo, pela paciência em me ajudar desde os primeiros anos de estudos a ver a matemática pelo lado divertido e simples, e por não desistir de me ajudar a chegar mais longe.

Ao meu orientador, professor Paulo Henrique, por toda a paciência, apoio e incentivo, pelos ensinamentos e conselhos, e por ter sido um bom amigo.

Aos funcionários do IME/UFG por sempre estarem dispostos a resolver nossos problemas e nos direcionarem quando precisamos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Os homens podem estar sempre a pesquisar, sempre a aprender, e ainda há, para além, o infinito."

Ellen G. White,
PP 74.2.

Resumo

Pereira, Nara Reges Faria de Paiva. **Alguns Problemas de Soma-Zero Com Peso**. Goiânia, 2015. 45p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudamos resultados sobre a *constante de Davenport* para grupos abelianos finitos. Estudamos também alguns problemas de soma-zero com peso para grupos cíclicos específicos e, para isto, provamos relações entre os invariantes s_A, g_A e η_A para tais grupos.

Palavras–chave

Sequências de A-soma-zero, grupos abelianos finitos, combinatória.

Abstract

Pereira, Nara Reges Faria de Paiva. **Some zero-sum problems with weight**. Goiânia, 2015. 45p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we study some results about Davenport's constant for finite abelian groups. We also study some weighted zero-sum problems for especific cyclic groups and for this we prove some relations between the invariants s_A, g_A e η_A for such groups.

Keywords

Sequences of A-zero-sum, finite abelian groups, combinatorial.

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo das sequências de soma-zero com peso em grupos abelianos finitos. A pesquisa sobre sequências em grupos abelianos finitos se iniciou com o resultado provado por Erdös-Ginzburg-Ziv em 1961 (ver [5]) que diz o seguinte: Qualquer sequência de inteiros de comprimento $2n-1$ possui uma subsequência de comprimento n cuja soma de seus elementos é zero módulo n. Depois disto Erdös propôs a determinação do menor comprimento de uma sequência no grupo C_p^2, que é o produto direto dos grupos cíclicos C_p, tal que esta sequência possua uma subsequência de comprimento p cuja soma de seus elementos é zero módulo p.

Em abril de 1966 H. Davenport propôs uma questão durante a *Midwestern conference on Group Theory and Number Theory, Ohio State University*, que diz o seguinte:

Se R é o anel de inteiros de um corpo F de números algébricos, qual é o número maximal de classes de ideais primos (contando multiplicidade) na decomposição em ideais primos de aR para um inteiro irredutível a em R?

Sendo G o grupo de classes de ideais primos de R na questão acima, Davenport provou que o número procurado é dado pelo menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência de elementos de G, com comprimento maior ou igual a ℓ, possui uma subsequência cuja soma de seus elementos é o zero de G. Tal invariante é denotada por $D(G)$ e é chamada de *constante de Davenport* de G.

No Capítulo 1 deste trabalho apresentamos um resultado demonstrado por J. Olson em 1969 (ver [14]) que diz que para um p-grupo abeliano G com invariantes $p^{n_1}, \ldots, p^{n_r}$ a *constante de Davenport* de G é dada por $D(G) = 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{n_i} - 1)$. Apresentamos também outro resultado provado por J. Olson no mesmo ano (ver [15]) que diz que se $G = H \times K$ é o produto direto de dois grupos abelianos H e K com ordens h e k, respectivamente, onde $h|k$, então $D(G) \leq h + k - 1$. Como Corolário deste resultado vemos que se $G = C_m \times C_n$ é o produto direto de dois grupos cíclicos de ordens m e n com $m|n$, então $D(G) = m + n - 1$. Outra consequência é a solução de um problema proposto por Erdös que nos diz que uma sequência arbitrária de comprimento $2n-1$ de inteiros Gaussianos tem uma subsequência cuja soma é divisível por n.

Ainda no Capítulo 1 definimos, para um grupo C_n^r, o invariante $s(C_n^r)$ como o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência de elementos em C_n^r com comprimento maior ou igual a ℓ possui uma subsequência de comprimento n com a soma de seus elementos sendo o zero de C_n^r. Essa definição foi dada por Harborth em [7] onde ele provou que $(n-1)2^r+1 \leq s(C_n^r) \leq (n-1)n^r+1$ e $s(C_{mn}^r) \leq \min\{(s(C_m^r)-1)n+s(C_n^r),(s(C_n^r)-2)m+s(C_m^r)\}$. Apresentamos também o resultado que foi conjecturado por Kemnitz em 1983 (ver [8]) e demonstrado em 2003 por C. Reiher (ver [16]).

Surgiu-se então o estudo dos problemas de soma zero com peso, onde o maior interesse é estudar o comportamento do invariante s_A de um grupo abeliano finito que é definido como o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência com comprimento maior ou igual a ℓ possui uma subsequência de A-soma-zero, isto é, uma subsequência cuja combinação linear dos seus elementos com coeficientes em $A \subset \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ é o zero do grupo. Em 2006, Adhikari *et al* em [2] provaram que $s_A(C_n) = n + \lfloor log_2 n \rfloor$, quando $A = \{-1,1\}$, onde para um número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. Esse resultado é equivalente ao Teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv para o peso $A = \{-1,1\}$. Nesse mesmo sentido, Adhikari *et al* provaram, em [1], que $s_A(C_n^2) = 2n-1$ para todo natural ímpar n e $A = \{-1,1\}$.

No Capítulo 2 deste trabalho, definimos o que é uma sequência de A-soma-zero e também os invariantes s_A, g_A e η_A, onde $A \subset \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Estabelecemos então duas importantes relações entre esses invariantes: $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r)-1$, onde C_3^r é o produto direto de r cópias do grupo cíclico de ordem 3. Esses resultados são encontrados em [6]. Para isto, provamos aqui o *Teorema de Chevalley-Warning* (ver [12]) que diz que o número de soluções de um sistema de funções em $\mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_n]$, onde $q = p^n$ e p é primo, é congruente a zero módulo p se a soma dos graus das funções for menor que n. Outro resultado importante utilizado foi a versão para o invariante s_A da conjectura de Kemnitz, enunciada no Capítulo 1, que diz que $s(C_n^2) = 4n-3$ (ver [8]).

No capítulo 3 apresentamos a prova de três importantes resultados demonstrados por H. Godinho, A. Lemos e D. Marques em [6] que dão cotas para o invariante s_A dos grupos C_n^r quando n é ímpar, C_3^r, $C_{3^a}^3$, $C_{3^a}^4$ e $C_{3^a}^5$. O artigo [6] é o artigo principal estudado neste trabalho e é uma continuação do estudo do Prof. Abílio Lemos, que pode ser encontrado em sua tese de doutorado (ver [10]). Apresentamos também a versão para o invariante s_A do Teorema demonstrado por H. Harborth em 1973 (ver [7]) que dá uma cota superior para $s(C_{mn}^r)$ em termos de $s(C_m)$, $s(C_n)$, m e n.

O estudo sobre sequências de soma-zero têm aplicação não apenas no problema original proposto por Davenport em 1966, mas também no estudo do número de soluções de sistemas sobre o corpo dos números p-ádicos, $\mathbb{Q}_p$.

P. Erdös propôs a seguinte questão:

Se $a_1, a_2, \ldots, a_p$ é uma sequência de elementos não nulos de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p primo), não todos iguais, é verdade que

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_p a_p = 0$$

tem pelo menos p soluções $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ da forma $\varepsilon_i = 0$ ou 1?

Em 1985 J. E. Olson provou um pouco mais (ver [13]). Ele considerou uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$ com elementos não nulos e não todos iguais em um grupo abeliano de ordem n, e mostrou que

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n = 0 \tag{0-1}$$

tem pelo menos n soluções $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ da forma $\varepsilon_i = 0$ ou 1.

Neste mesmo trabalho Olson provou que se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma sequência de comprimento n em um grupo abeliano não cíclico de ordem n, então a equação (0-1) tem pelo menos $2^{n/2}$ soluções $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de forma que $\varepsilon_i = 0$ ou 1.

Uma pergunta que podemos fazer é a seguinte: Dada uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de elementos em um grupo abeliano finito, podemos encontrar um número mínimo de soluções $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ da forma $\varepsilon_i = -1$ ou 1 para a equação (0-1)? Esta pergunta é um problema em aberto.

Sumário

CAPÍTULO 1

Sequências de Soma-Zero em Grupos abelianos Finitos

Neste capítulo apresentamos dois importantes Teoremas demonstrados por John E. Olson em [14] e [15], ambos em 1968. O primeiro deles dá uma fórmula exata para a *constante de Davenport* quando se estuda os p-grupos abelianos finitos. O segundo Teorema apresenta uma cota superior para a *constante de Davenport* de grupos que são produto direto de grupos abelianos finitos, cuja ordem de um deles divide a ordem do outro.

Como Corolários do segundo Teorema são apresentados alguns resultados. O primeiro deles (1.8) mostra que para grupos da forma $C_m \times C_n$, com $m|n$, a *constante de Davenport* é exatamente a cota superior apresentada no Teorema. O segundo Corolário (1.9) nos diz que sempre encontramos uma subsequência com soma divisível por n em uma sequência arbitrária de inteiros Gaussianos com comprimento $2n-1$. Por fim, o terceiro Corolário (1.10) nos diz que uma sequência de comprimento $h+k-1$ em grupo abeliano finito K com ordem k, onde $h \mid k$, possui uma subsequência de comprimento t, $t \equiv 0 \pmod h$, cujo produto de seus elementos é 1.

Apresentamos dois Teoremas demonstrados por Harborth em [7] que dão cotas para $s(C_n^r)$ e $s(C_{mn}^r)$. Enunciamos também a *Conjectura de Kemnitz* que afirma que $s(C_n^2) = 4n-3$.

1.1 Algumas Definições

Começamos definindo a *constante de Davenport* $D(G)$ de um grupo abeliano finito G. Vamos considerar os grupos na forma multiplicativa para evitar confusão de notação com os anéis de grupos, que serão utilizados para a demonstração de alguns resultados e definiremos adiante.

Definição 1.1 *Seja G um grupo abeliano finito. Defina $D = D(G)$ como o menor inteiro positivo tal que, para qualquer sequência $g_1, g_2, \ldots, g_D$ (permitindo repetições) de ele-*

mentos do grupo, existem índices

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq D,$$

para os quais $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} = 1$.

Outra definição necessária é a de *anéis de grupo*.

Definição 1.2 *Se G é um grupo e R um anel qualquer com elemento identidade, o anel de grupo de G sobre R, que denotamos por*

$$RG$$

é definido como o conjunto de todas as somas formais $\sum_{x \in G} r_x x$ *onde* $r_x \in R$ *e* $r_x = 0$ *exceto por uma quantidade finita de elementos, juntamente com as regras da adição e multiplicação*

$$(\sum_x r_x x) + (\sum_x r'_x x) = \sum_x (r_x + r'_x) x$$

e

$$(\sum_x r_x x)(\sum_x r'_x x) = \sum_x (\sum_{yz=x} r_y r'_z) x.$$

Verifica-se que com essas regras RG é um anel com o elemento identidade $1_R 1_G$. Se o leitor tiver maior interesse no estudo de *anéis de grupos* pode consultar [17].

1.2 A *Constante de Davenport* para p-grupos Abelianos Finitos

Em se tratando de p-grupos abelianos finitos, é possível encontrar explicitamente o valor da *constante de Davenport* em termos de seus invariantes. Nesta seção apresentamos o resultado de Olson demonstrado em 1969 (ver [14]) que nos dá o valor exato da *constante de Davenport* para um p-grupo abeliano finito. Para demonstrarmos este fato precisamos do seguinte lema que deve ser considerado em termos do anel de grupo $\mathbb{Z}G$.

Lema 1.3 *Seja G um p-grupo abeliano finito com invariantes $p^{e_1}, p^{e_2}, \ldots, p^{e_r}$. Se $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$ e $k \geq 1 + \sum_{i=1}^{r} (p^{e_i} - 1)$, então*

$$(1 - g_1)(1 - g_2)\ldots(1 - g_k) \equiv 0 \pmod p \tag{1-1}$$

Demonstração. Seja $J = (1 - g_1)(1 - g_2)\ldots(1 - g_k)$. Observe que se $g_i = uv$, então podemos reduzir o produto J a

$$J = (1-g_1)\dots(1-g_{i-1})(1-u)(1-g_{i+1})\dots(1-g_k)+ \tag{1-2}$$
$$+u(1-g_1)\dots(1-g_{i-1})(1-v)(1-g_{i+1})\dots(1-g_k),$$

pois $1-uv = (1-u)+u(1-v)$.

Como G é um grupo abeliano finito, $G =< x_1 > \cdot < x_2 > \cdot \dots \cdot < x_r >$. E assim temos que cada g_i é produto de potências dos x_i. Então repetimos o processo dado por (1-2) para cada g_i e encontramos

$$J = \sum_{\sigma} y_\sigma J_\sigma,$$

onde cada $y_\sigma \in G$ e cada J_σ é um produto da forma

$$J_\sigma = (1-x_1)^{f_1}(1-x_2)^{f_2}\dots(1-x_r)^{f_r}. \tag{1-3}$$

Aqui os $f_i's$ são inteiros não negativos que dependem do índice σ, e $\sum f_i = k$. Para entendermos melhor vamos observar o seguinte exemplo:

Exemplo 1.4 *Seja* $G =< x_1 > \cdot < x_2 > \cdot < x_3 >$*, então tomando* $g_1 = x_1^3x_2^2$*,* $g_2 = x_1^3x_2^3$ *e* $g_3 = x_1x_2^3x_3^2$ *obtemos*

$$J = (1-g_1)(1-g_2)(1-g_3) = (1-x_1^3x_2^2)(1-x_1^3x_2^3)(1-x_1x_2^3x_3^2).$$

Vamos utilizar a redução dada em (1-2) *para cada* $(1-g_i)$.

- $(1-g_1)$

$$\begin{aligned}
(1-g_1) &= (1-x_1^3x_2^2)\\
&= (1-x_1^3)+x_1^3(1-x_2^2)\\
&= (1-x_1x_1^2)+x_1^3(1-x_2x_2)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_1^2)+x_1^3[(1-x_2)+x_2(1-x_2)]\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_1x_1)+x_1^3(1-x_2)+x_1^3x_2(1-x_2)\\
&= (1-x_1)+x_1[(1-x_1)+x_1(1-x_1)]+[x_1^3+x_1^3x_2](1-x_2)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_1)+x_1^2(1-x_1)+[x_1^3+x_1^3x_2](1-x_2)\\
&= [1+x_1+x_1^2](1-x_1)+[x_1^3+x_1^3x_2](1-x_2)\\
&= h_1(1-x_1)+h_2(1-x_2)
\end{aligned}$$

- $(1-g_2)$

$$\begin{aligned}
(1-g_2) &= (1-x_1^3x_2^3)\\
&= (1-x_1^3)+x_1^3(1-x_2^3)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_1^2)+x_1^3(1-x_2)+x_1^3x_2(1-x_2^2)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_1)+x_1^2(1-x_1)+x_1^3(1-x_2)+x_1^3x_2(1-x_2)+x_1^3x_2^2(1-x_2)\\
&= [1+x_1+x_1^2](1-x_1)+[x_1^3+x_1^3x_2+x_1^3x_2^2](1-x_2)\\
&= h_3(1-x_1)+h_4(1-x_2)
\end{aligned}$$

- $(1-g_3)$

$$\begin{aligned}
(1-g_3) &= (1-x_1x_2^3x_3^2)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_2^3x_3^2)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_2^3)+x_1x_2^3(1-x_3^2)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_2)+x_1x_2(1-x_2^2)+x_1x_2^3(1-x_3)+x_1x_2^3x_3(1-x_3)\\
&= (1-x_1)+x_1(1-x_2)+x_1x_2(1-x_2)+x_1x_2^2(1-x_2)+[x_1x_2^3+x_1x_2^3x_3](1-x_3)\\
&= (1-x_1)+[x_1+x_1x_2+x_1x_2^2](1-x_2)+[x_1x_2^3+x_1x_2^3x_3](1-x_3)\\
&= (1-x_1)+h_5(1-x_2)+h_6(1-x_3)
\end{aligned}$$

Assim,

$$J=h_1h_3(1-x_1)^3+h_2h_4h_5(1-x_2)^3+[h_1h_4+h_2h_3+h_1h_3h_5](1-x_1)^2(1-x_2)+$$

$$+[h_1h_4h_5+h_2h_3h_5+h_2h_4](1-x_1)(1-x_2)^2+h_1h_3h_6(1-x_1)^2(1-x_3)+$$

$$+h_2h_4h_6(1-x_2)^2(1-x_3)+h_6[h_1h_4+h_2h_3](1-x_1)(1-x_2)(1-x_3).$$

Se chamarmos

$$\begin{aligned}
y_1 &= h_1h_3;\\
y_2 &= h_2h_4h_5;\\
y_3 &= h_1h_4+h_2h_3+h_1h_3h_5;\\
y_4 &= h_1h_4h_5+h_2h_3h_5+h_2h_4;\\
y_5 &= h_2h_4h_6;\\
y_6 &= h_2h_4h_6;\\
y_7 &= h_6[h_1h_4+h_2h_3],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_1 &= (1-x_1)^3;\\
J_2 &= (1-x_2)^3;\\
J_3 &= (1-x_1)^2(1-x_2);\\
J_4 &= (1-x_1)(1-x_2)^2;\\
J_5 &= (1-x_1)^2(1-x_3);\\
J_6 &= (1-x_2)^2(1-x_3);\\
J_7 &= (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3),
\end{aligned}$$

temos

$$J = \sum_{\sigma=1}^{7} y_\sigma J\sigma,$$

onde vemos que $y_\sigma \in G$ *e a soma dos expoentes de cada* J_σ *é exatamente* 3.

Como $k > \sum(p^{e_i}-1)$ e $k = \sum f_i$, então $\sum f_i > \sum(p^{e_i}-1)$, e por isso devemos ter $f_i \geq p^{e_i}$ para algum i em (1-3). Com efeito, se $f_i < p^{e_i}$ para todo i, então $f_i \leq p^{e_i}-1$ e por fim $\sum f_i \leq \sum(p^{e_i}-1)$ o que é um absurdo. Mas,

$$(1-x_i)^{p^{e_i}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Assim, $J_\sigma \equiv 0 \pmod{p}$ para cada σ, o que prova (1-1).

□

Agora podemos apresentar o seguinte Teorema demonstrado por John E. Olson em [14].

Teorema 1.5 *Seja G um p-grupo abeliano finito com invariantes* $p^{e_1}, p^{e_2}, \ldots, p^{e_r}$. *Então,*

$$D(G) = 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{e_i}-1). \tag{1-4}$$

Demonstração. Sendo G um p-grupo abeliano finito, temos que

$$G = <x_1> \cdot <x_2> \cdot \ldots \cdot <x_r>,$$

onde a ordem de x_i é p^{e_i}. Primeiramente observe que $1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{e_i}-1) \leq D(G)$. De fato, se considerarmos a sequência $x_1^{p^{e_1}-1}, x_2^{p^{e_2}-1}, \ldots, x_r^{p^{e_r}-1}$, vemos que ela não possui subsequência com produto 1, pois $x_i^{a_i} \neq 1$ para qualquer $1 \leq a_i \leq p^{e_i} - 1$ e $< x_i > \cap < x_j >= 1$ para $i \neq j$.

Para completar a demonstração, tomamos uma sequência de elementos $g_1, g_2, \ldots, g_s$ em G, com $s \geq 1 + \sum_{i=1}^{r}(p^{e_i} - 1)$. Como visto no Lema 1.3, esta sequência possui uma subsequência com produto 1.

Interpretamos a congruência (1-1) dada no Lema 1.3 combinatoriamente: Para $g \in G$ observamos todas as subsequências de $g_1, g_2, \ldots, g_k$ que tenham produto g. Seja $E(g)$ a quantidade de tais subsequências de comprimento par e seja $O(g)$ as de comprimento ímpar. Então a equação (1-1) nos diz que

$$E(g) - O(g) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & \text{se} \quad g \neq 1, \\ -1 \pmod{p}, & \text{se} \quad g = 1, \end{cases}$$

pois

$$(1-g_1)(1-g_2)\ldots(1-g_k) = 1 - g_1 - g_2 - \ldots - g_k + g_1g_2 + g_1g_3 + \ldots + g_1g_k +$$

$$+ g_2g_3 + \ldots + g_{k-1}g_k - g_1g_2g_3 - \ldots - g_{k-2}g_{k-1}g_k + \ldots (-1)^k g_1g_2\ldots g_k,$$

Assim, como vale a congruência (1-1), temos que se o produto de uma subsequência de comprimento par for igual a $g \neq 1$, necessariamente deve existir uma subsequência de comprimento ímpar cujo produto é $g \neq 1$ para que a primeira seja anulada, e vice-versa, pois o produto das subsequências de comprimento ímpar aparecem negativas no produto $(1-g_1)\ldots(1-g_k)$ e as de comprimento par aparecem positivas. O número $E(g)$ pode ser diferente de $O(g)$ apenas se a diferença for um múltiplo de p, por causa da congruência módulo p que anula o termo pg. Agora, para $g = 1$ deve existir uma subsequência de comprimento ímpar cujo produto é 1, para anular o termo 1 que aparece no produto $(1-g_1)\ldots(1-g_k)$. Assim, não podemos ter $E(1) = O(1) = 0$. Ou seja, pelo menos uma subsequência de $g_1, g_2, \ldots, g_s$ tem produto 1. Concluímos assim a demonstração.

□

1.3 A *Constante de Davenport* para Produto direto de Grupos abelianos Finitos

Nesta seção mostramos que quando $G = H \times K$ é o produto direto de dois grupos abelianos finitos com ordens h e k, respectivamente, temos que $D(G) \leq h + k - 1$. Este resultado foi demonstrado por Olson (ver [15]) em 1969. Apresentamos também três corolários deste Teorema. Para prová-lo precisamos do seguinte resultado.

Lema 1.6 *Seja E um grupo abeliano elementar de ordem p^2, p primo. Se $g_1, g_2, \ldots, g_s \in E$ e $s \geq 3p-2$, então existem índices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq s$ com $1 \leq t \leq p$ tais que $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} = 1$.*

***Demonstração*.** Pelo Teorema 1.5, para um p-grupo abeliano elementar P de ordem p^k temos que $D(P) = 1 + k(p-1)$. Colocamos E dentro de um grupo abeliano elementar F de ordem p^3 (o que é possível tomando $F = < x > \cdot E$, com $x \notin E$ e ordem de x igual a p). Como $D(F) = 1 + 3(p-1) = 3p-2$, alguma subsequência de $xg_1, xg_2, \ldots, xg_s$ em F, com $s = 3p-2$, tem produto 1. Então, reorganizando os índices, $g_1 g_2 \ldots g_{ep} = 1$, onde $e = 1$ ou 2. Com efeito, se $xg_1 xg_2 \ldots xg_a = 1$, temos $x^a(g_1 g_2 \ldots g_a) = 1$, mas daí $x^a = 1$ e $g_1 g_2 \ldots g_a = 1$, e como a ordem de x é p e $a \leq 3p-2$ temos que $a = ep$ com $e = 1$ ou 2. Se $e = 1$ está provado. Se $e = 2$, alguma subsequência de $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$ tem produto 1, pois esta é uma sequência de elementos em E e $D(E) = 1 + 2(p-1) = 2p-1$. Por fim, o comprimento de alguma subsequência com produto 1 de $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$ é menor que p. De fato, reorganizando novamente os índices, supomos $g_1 g_2 \ldots g_r = 1$ com $r > p$. Mas $g_1 g_2 \ldots g_r g_{r+1} \ldots g_{2p} = 1$, daí $g_{r+1} \ldots g_{2p} = 1$, o que conclui a demonstração.

□

O Teorema a seguir foi demonstrado em 1969 por John E. Olson (ver [15]).

Teorema 1.7 *Seja $G = H \times K$ produto direto dos grupos abelianos H e K de ordens $|H| = h$ e $|K| = k$, onde $h \mid k$. Se $g_1, g_2, \ldots, g_s \in G$ e $s \geq h+k-1$, então $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} = 1$ para algum $1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq s$.*

***Demonstração*.** Nós vamos provar por indução sobre a ordem h de H. Para $h = 1$, temos que o teorema é verdadeiro. Com efeito, consideremos os produtos parciais

$$\prod_j = \prod_{i=1}^{j} g_i \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Se os $\prod_j$ são distintos, então algum $\prod_j = 1$. Se $\prod_i = \prod_j$, para $i < j$, então $g_{i+1} \ldots g_j = 1$.

Supomos agora que $h > 1$ e seja p um primo divisor de h (e então de k). Seja H_1 um subgrupo de H, K_1 um subgrupo de K, com índices $[H : H_1] = [K : K_1] = p$. Chame $h = h_1 p$, $k = k_1 p$ e $Q = H_1 \times K_1$. Assumimos que o teorema é verdadeiro para $Q = H_1 \times K_1$. Observe que o grupo quociente $G/Q = E$ é um grupo abeliano elementar de ordem p^2. De fato, a ordem de E é

$$\frac{|G|}{|Q|} = \left| \frac{H \times K}{H_1 \times K_1} \right| = \frac{|H \times K|}{|H_1 \times K_1|} = \frac{hk}{h_1 k_1} = \frac{p^2 h_1 k_1}{h_1 k_1} = p^2,$$

e E é elementar pois dado o homomorfismo sobrejetor

$$\phi : H \times K \longrightarrow \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{K_1}$$
$$(a,b) \longmapsto (a \cdot H_1, b \cdot K_1)$$

temos que $Ker(\phi) = H_1 \times K_1$ e pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo

$$\frac{H \times K}{H_1 \times K_1} \cong Im(\phi) = \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{K_1}.$$

Mas H/H_1 e K/K_1 são grupos elementares de ordem p, logo todos os elementos de $\frac{H}{H_1} \times \frac{K}{K_1}$ (e portanto todos os elementos de E) tem ordem p.

Se $s \geq h+k-1 = p(h_1+k_1-2)+2p-1$, então existem dois casos a se considerar. Primeiro, $p(h_1+k_1-2) = 0$. Daí, $h_1 = k_1 = 1$ e então $p = |\frac{H}{H_1}| = |H|$ e $p = |K/K_1| = |K|$. Assim, G é um grupo abeliano elementar de ordem p^2 e aplicando o Lema 1.6 obtemos o resultado. Segundo, $p(h_1+k_1-2) \neq 0$, então, pelo Lema 1.6 existe uma subsequência de $g_1, g_2, \ldots, g_s$ com comprimento não excedendo p cujo produto q_1 esteja em Q. Continuando este processo, construir subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_{u-1}$ dois a dois disjuntos, do conjunto de índices $\{1,2,\ldots,s\}$, de tamanho $1 \leq |S_j| \leq p$, tais que

$$\prod_{i \in S_j} g_i = q_j \in Q,$$

onde $u-1 = h_1+k_1-2$. Assim, pelo menos $2p-1$ índices sobram, e como $D(E) = 2p-1$, existe um subconjunto S_u do conjunto de índices tal que

$$\prod_{i \in S_u} g_i = q_u \in Q.$$

Como $u = h_1+k_1-1$ e o teorema vale para Q, alguma subsequência de $q_1, q_2, \ldots, q_u$ tem produto 1.

□

Um resultado quase imediato deste Teorema nos dá um valor exato para a *constante de Davenport* do produto direto de grupos cíclicos.

Corolário 1.8 *Seja $G = C_m \times C_n$ um produto direto de grupos cíclicos C_m e C_n de ordens m e n com $m \mid n$. Então $D(G) = m+n-1$.*

Demonstração. Seja x o gerador de C_m e y o gerador de C_n. Considere a sequência $(x,1),\ldots,(x,1),(1,y),\ldots,(1,y)$, onde o $(x,1)$ aparece $m-1$ vezes e o $(1,y)$ aparece $n-1$ vezes. Tal sequência não possui subsequência com produto 1, pois a ordem de x é m e a ordem de y é n. □

O Corolário a seguir demonstra uma conjectura feita por Erdös.

Corolário 1.9 *Uma sequência arbitrária de comprimento* $2n-1$ *de inteiros Gaussianos tem uma subsequência cuja soma é divisível por* n.

Demonstração. Encontrar uma sequência de comprimento $2n-1$ em $\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que possui uma subsequência com soma divisível por n é equivalente a encontrar uma sequência de comprimento $2n-1$ em $\mathbb{Z}_n[i] \simeq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ que possui uma subsequência com soma-zero. E isto é garantido pelo Teorema 1.7. □

O seguinte Corolário é uma generalização do Teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv (ver [5]) que foi provado para $h = k$.

Corolário 1.10 *Se* $g_1, g_2, \ldots, g_{h+k-1}$ *é uma sequência de elementos em um grupo abeliano finito* K *de ordem* k, *e* $h \mid k$, *então existem índices* $1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq h+k-1$ *com* $t \equiv 0 \pmod h$ *tais que* $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} = 1$.

Demonstração. Basta incluir K no produto direto $H \times K$ onde H é cíclico de ordem h. Seja x o gerador de H, $\notin K$. Considere a sequência $xg_1, xg_2, \ldots, xg_{h+k-1}$ de elementos em $H \times K$. Pelo Teorema 1.5 temos que existem índices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq h+k-1$ tais que $xg_{i_1} xg_{i_2} \ldots xg_{i_t} = 1$. Daí, $x^t = 1$ e $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} = 1$. Ou seja, $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_t} = 1$ e $t \equiv 0 \pmod h$. □

1.4 Um Novo Invariante Para o Grupo C_n^r

Nesta seção apresentamos a definição de $s(C_n^r)$, onde C_n^r é o grupo formado por r cópias do grupo cíclico C_n. Essa definição foi dada por Harborth em 1973 (ver [7]) e formaliza o que foi feito no Teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv. Citamos também dois resultados demonstrados por Harborth em [7] que oferecem cotas para as constantes $s(C_n^r)$ e $s(C_{mn}^r)$. Outro resultado que apresentamos sem demonstração aqui, com o interesse de comparação, é a conjectura de Kemnitz (ver [8]).

Definição 1.11 *Dado o grupo* C_n^r, *com* $r \in \mathbb{N}$, *o invariante* $s(C_n^r)$ *(chamado na época de* $f(n,r)$ *por Harborth) é o menor inteiro positivo* ℓ *tal que toda sequência* $\mathcal{S}$ *de elementos em* C_n^r, *com comprimento maior ou igual a* ℓ, *possui uma subsequência* (T) *tal que seu comprimento é* n *e a soma de seus elementos é o zero de* C_n^r.

Neste trabalho Harborth provou alguns resultados, dentre eles apresentamos dois para futura comparação. O primeiro mostra cotas inferior e superior para $s(C_n^r)$.

Teorema 1.12 *Seja C_n^r o produto de r cópias do grupo cíclico C_n, então*

$$2^r(n-1)+1 \leq s(C_n^r) \leq n^r(n-1)+1.$$

O próximo Teorema nos dá uma cota superior para o invariante s do grupo C_{mn}^r em função de $s(C_m^r)$, $s(C_n^r)$, m e n.

Teorema 1.13 *Seja C_{mn}^r o produto de r cópias do grupo cíclico C_{mn}, então*

$$s(C_{mn}^r) \leq min\{(s(C_m^r)-1)n+s(C_n^r),(s(C_n^r)-2)m+s(C_m^r)\}.$$

Em 1983, A. Kemnitz conjecturou que o limite inferior apresentado no Teorema 1.12 é atingido (ver [8]) para $r=2$.

Conjectura 1 (de Kemnitz) $s(C_n^2)=4n-3$.

Esta conjectura foi provada em 2003 por C. Reiher e só foi publicada em 2007 (ver [16]).

CAPÍTULO 2

Problemas de Soma-Zero com Peso Sobre C_3^r

Como o foco do nosso trabalho é o estudo do invariante s_A, que é uma variação da *constante de Davenport*, definimos neste capítulo, além deste, mais dois invariantes que serão importantes para a demonstração dos principais resultados apresentados neste trabalho. As proposições 2.5 e 2.8 nos dão uma relação de igualdade entre tais invariantes para o grupo C_3^r. Para a demonstração da Proposição 2.8 utilizamos, e por isso demonstramos aqui, o *Teorema de Chevalley-Warning*.

A partir de agora, vamos considerar G um grupo abeliano finito na escrita aditiva.

2.1 Algumas Definições

Seja $\mathcal{S}$ uma sequência de elementos de G com comprimento m. Denotaremos $\mathcal{S}$ na forma multiplicativa

$$\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{l} g_i^{v_i},$$

onde v_i representa o número de vezes que o elemento g_i aparece nesta sequência. Assim, $\sum_{i=1}^{l} v_i = m$.

Definição 2.1 *Seja $A \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dizemos que uma subsequência $a_1 a_2 \ldots a_k$ de $\mathcal{S}$ é uma subsequência de A-soma-zero se podemos encontrar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in A$ tal que*

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 \ldots + \varepsilon_k a_k = 0 \quad em \quad G.$$

Estamos particularmente interessados em estudar o comportamento de $s_A(G)$ definida a seguir.

Definição 2.2 *A constante $s_A(G)$ é o menor inteiro positivo ℓ tal que toda sequência $\mathcal{S}$ com comprimento maior ou igual a ℓ, satisfaz a condição (s_A), que afirma que deve existir uma subsequência de A-soma-zero de $\mathcal{S}$ com comprimento $exp(G)$, onde o $exp(G)$ é o mínimo múltiplo comum das ordens de todos os elementos do grupo.*

Para isto precisamos definir outros invariantes.

Definição 2.3 • *Seja* $\eta_A(G)$ *o menor inteiro positivo* ℓ *tal que toda sequência* $\mathcal{S}$ *com comprimento maior ou igual a* ℓ *satisfaz a condição* (η_A)*, a qual diz que existe uma subsequência de A-soma-zero de* $\mathcal{S}$ *com comprimento no máximo* $exp(G)$*.*

- *E, seja,* $g_A(G)$ *o menor inteiro positivo* ℓ *tal que toda sequência* $\mathcal{S}$ *de elementos distintos e com comprimento maior ou igual a* ℓ*, satisfaz a condição* (g_A)*, a qual diz que deve existir uma subsequência de A-soma-zero de* $\mathcal{S}$ *com comprimento* $exp(G)$*.*

2.2 Relações Entre os Invariantes η_A, g_A e s_A

Nesta seção, os principais resultados nos fornecem uma relação entre os invariantes s_A, g_A e η_A de C_3^r. A Proposição 2.5 diz que $g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1$ e a Proposição 2.8 diz que $s_A(C_3^r) = g_A(C^r)$ para $r \geq 2$. Para demonstrá-las, no entanto, precisamos demonstrar o lema a seguir que fornece os valores de $s_A(C_3)$, $g_A(C_3)$ e $\eta_A(C_3)$ e também uma relação entre $\eta_A(C_3^r)$ e o valor r de cópias do grupo cíclico C_3. Outro Lema necessário diz que $s_A(C_n^2) = 2p - 1$ para n ímpar. Demonstramos também o *Teorema de Chevalley-Warning* que nos fala sobre o número de soluções N de um sistema homogêneo de m funções em $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ com grau $gr(f_i) = d_i$ cuja soma dos graus é menor que o número de variáveis n. Esse resultado nos diz que $N \equiv 0 \pmod{p}$, onde p é um primo tal que $q = p^n$.

Lema 2.4 *Para* $A = \{-1, 1\}$*, temos*

i) $\eta_A(C_3) = 2$, $g_A(C_3) = 3$ *e* $s_A(C_3) = 4$*, e*

ii) $\eta_A(C_3^r) \geq r + 1$ *para todo* $r \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração.

1. Seja $C_3 = \{0, a, 2a\}$.

   - $\eta_A(C_3) = 2$;
     É claro que a sequência com comprimento um, $\mathcal{S} = a$, não possui subsequência de A-soma-zero, então $\eta_A(C_3) \geq 2$. Mas toda sequência com comprimento 2 possui uma subsequência de A-soma-zero com comprimento menor que $exp(C_3) = 3$. De fato, C_3 possui seis sequências com comprimento 2. Três delas possuem o zero e assim a subsequência formada apenas por ele é uma subsequência de A-soma-zero. Os outros casos são as sequências $\mathcal{S} = a.a$, $\mathcal{S} = 2a.2a$, $\mathcal{S} = a.2a$ que são elas próprias subsequências de A-soma-zero ($a - a = 0$; $2a - 2a = 0$; $a + 2a = 0$, respectivamente). Portanto, $\eta_A(C_3) = 2$.

- $g_A(C_3) = 3$;
  Primeiramente observamos que para uma sequência $\mathcal{S}$ de C_3 ter uma subsequência de A-soma-zero com comprimento $exp(C_3) = 3$, a sequência deve ter comprimento pelo menos 3. Assim, $g_A(C_3) \geq 3$. Mas, como a condição (g_A) exige que a sequência $\mathcal{S}$ deve ter elementos distintos, nossa única opção é $\mathcal{S} = 0.a.2a$ que é ela própria uma subsequência de A-soma-zero $(0+a+2a=0)$. Logo, $g_A(C_3) = 3$.
- $s_A(C_3) = 4$.
  Note que a sequência $\mathcal{S} = a.a.2a$ de C_3 tem comprimento 3 e não possui subsequência com comprimento $exp(C_3) = 3$ de A-soma-zero, então $s_A(C_3) \geq 4$. Mas todas as sequências com comprimento 4 possuem subsequências de A-soma-zero com comprimento $exp(C_3) = 3$. De fato, nós temos 15 possibilidades que são: $\mathcal{S} = 0.0.0.0$ $(0+0+0=0)$, $\mathcal{S} = 0.0.0.a$ $(0+0+0=0)$, $\mathcal{S} = 0.0.0.2a$ $(0+0+0=0)$, $\mathcal{S} = 0.0.a.a$ $(0+a-a=0)$, $\mathcal{S} = 0.0.a.2a$ $(0+a+2a=0)$; $\mathcal{S} = 0.0.2a.2a$ $(0+2a-2a=0)$, $\mathcal{S} = 0.a.a.a$ $(a+a+a=0)$, $\mathcal{S} = 0.a.a.2a$ $(2a-a-a=0)$, $\mathcal{S} = 0.a.2a.2a$ $(2a+2a-a=0)$, $\mathcal{S} = 0.2a.2a.2a$ $(0+2a-2a=0)$, $\mathcal{S} = a.a.a.a$ $(a+a+a=0)$, $\mathcal{S} = a.a.a.2a$ $(a+a+a=0)$, $\mathcal{S} = a.a.2a.2a$ $(2a-a-a=0)$, $\mathcal{S} = a.2a.2a.2a$ $(2a+2a+2a=0)$ e $\mathcal{S} = 2a.2a.2a.2a$ $(2a+2a+2a=0)$. Portanto, $s_A(C_3) = 4$.

2. A prova segue do fato de que a sequência $e_1e_2\ldots e_r$ com $e_j = (0,\ldots,1,\ldots,0)$, não tem subsequência de A-soma-zero.

$\square$

A primeira relação é dada a seguir.

Proposição 2.5 *Para $A = \{-1,1\}$, temos $g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1$.*

Demonstração. O caso $r = 1$ segue diretamente do lema anterior, pois $g(C_3^r) = 3 = 2\cdot 2 - 1 = 2\eta(C_3^r) - 1$. Primeiramente vamos mostrar que em C_3^r existe uma sequência de elementos distintos com comprimento $2\eta_A(C_3^r) - 2$ tal que nenhuma subsequência dela com comprimento $exp(C_3^r) = 3$ seja de A-soma-zero. Tome $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^m g_i$ com comprimento $m = \eta_A(C_3^r) - 1$ a qual não satisfaz a condição (η_A). Em particular, $\mathcal{S}$ não tem subsequências de A-soma-zero com comprimento 1 e 2, isto é, todos os elementos de $\mathcal{S}$ são não nulos e distintos. Agora, seja $\mathcal{S}^* = \prod_{i=1}^m g_i \prod_{i=1}^m (-g_i)$. Observe que $\mathcal{S}^*$ tem somente elementos distintos, já que $\mathcal{S}$ não tem subsequências de A-soma-zero com comprimento 2. Observe também que qualquer subsequência de A-soma-zero de $\mathcal{S}^*$ com comprimento 3 é também uma A-soma-zero de $\mathcal{S}$, para $A = \{-1,1\}$. Assim, $g_A(C_3^r) \geq 2\eta_A(C_3^r) - 1$.

Seja $\mathcal{S}$ uma sequência de elementos distintos e comprimento $n = 2\eta_A(C_3^r) - 1$, e escreva

$$\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{t} g_i \prod_{i=1}^{t} (-g_i) \prod_{i=2t+1}^{n} g_i,$$

onde $g_r \neq -g_s$ para $2t+1 \leq r < s \leq n$. Se $t = 0$, então $\mathcal{S}$ não tem A-soma-zero com comprimento 2, e 0 pode aparecer no máximo uma vez em $\mathcal{S}$. Suponha $t = 0$ e seja $\mathcal{S}^*$ a subsequência de todos os elementos não nulos de $\mathcal{S}$, então $|\mathcal{S}^*| = 2\eta_A(C_3^r) - 2 > \eta_A(C_3^r)$, para $r \geq 2$, pois pelo item $ii)$ do Lema anterior temos que $\eta_A(C_3^r) \geq r+1$. Assim, ela deve conter uma A-soma-zero com comprimento 3.

Para o caso $t \geq 1$, podemos assumir $g_j \neq 0$ para todo $j = 2t+1, \ldots, n$, pois caso contrário, $g_t + (-g_t) + g_{j_0}$ $(g_{j_0} = 0)$ é uma subsequência de A-soma-zero com comprimento 3. Com isso, ou $t \geq \eta_A(C_3^r)$, tal que $\prod_{i=1}^{t} g_i$ tem uma A-soma-zero com comprimento 3 (não com comprimento 1, pois o zero não está lá, e nem com comprimento 2, pois o inverso de cada um dos seus elementos também não pertence a ela), ou $n - t \geq \eta_A(C_3^r)$, tal que $\prod_{i=1}^{t}(-g_i)\prod_{i=2t+1}^{n} g_i$ tem uma subsequência de A-soma-zero com comprimento 3.

Concluímos então que $g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1$. $\square$

Observe que com a definição dos invariantes s_A e g_A, e pela Proposição 2.5 temos a seguinte relação

$$s_A(C_3^r) \geq g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1. \tag{2-1}$$

O próximo lema é o Teorema 3 de [1]. Para demonstrá-lo precisamos do *Teorema de Chevalley-Warning* (ver [12]), que provamos a seguir.

Teorema 2.6 (Chevalley-Warning) *Sejam p um inteiro primo e $\mathbb{F}_q$ o corpo finito com $q = p^n$ elementos. Para $i = 1, \ldots, m$ sejam $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ de grau $gr(f_i) = d_i$. Seja N o número de n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ de elementos em $\mathbb{F}_q^n$ tais que*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

para todo $i = 1, \ldots, m$. Se

$$\sum_{i=1}^{m} d_i < n,$$

então

$$N \equiv 0 \pmod{p}$$

Demonstração. O grupo multiplicativo dos elementos não nulos de um corpo finito é cíclico, e então, para todo $x \in \mathbb{F}_q$,

$$x^{q-1} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Além disso, convencionando $0^0 = 1$, temos

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_q} x^r = 0 \ \text{ se } \ 0 \leq r < q-1.$$

De fato, para $r = 0$ temos $\sum\limits_{x \in \mathbb{F}_q} x^0 = \sum\limits_{x \in \mathbb{F}_q} 1 = q1 = 0$, e para $0 < r < q-1$ temos

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_q} x^r = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} x^r = \sum_{i=0}^{q-2} (a^i)^r = \frac{a^{r(q-1)} - 1}{a^r - 1} = 0.$$

Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_q$. Então,

$$\prod_{i=1}^{m} (1 - f_i(x_1, \ldots, x_n)^{q-1}) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ 0, & \qquad\qquad \text{c.c.} \quad , \end{cases}$$

e assim,

$$N = \sum_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^{m} (1 - f_i(x_1, \ldots, x_n)^{q-1}).$$

Como o grau de $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ é d_i, segue que

$$\prod_{i=1}^{m} (1 - f_i(x_1, \ldots, x_n)^{q-1}) = \sum_{r_1, \ldots, r_n} a_{r_1, \ldots, r_n} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$$

é um polinômio de grau no máximo $(q-1)\sum\limits_{i=1}^{m} d_i$ com coeficientes $a_{r_1, \ldots, r_n} \in \mathbb{F}_q$. Então

$$\begin{aligned} N &\equiv \sum_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_q} \prod_{i=1}^{m} (1 - f_i(x_1, \ldots, x_n)^{q-1}) \\ &\equiv \sum_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_q} \sum_{r_1, \ldots, r_n} a_{r_1, \ldots, r_n} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} \pmod{p} \\ &\equiv \sum_{r_1, \ldots, r_n} a_{r_1, \ldots, r_n} \sum_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_q} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} \pmod{p} \\ &\equiv \sum_{r_1, \ldots, r_n} a_{r_1, \ldots, r_n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{x_j \in \mathbb{F}_q} x_j^{r_j} \pmod{p}, \end{aligned}$$

onde o somatório acontece sobre toda n-upla $(r_1,\ldots,r_n)$ de inteiros não negativos tais que

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \leq (q-1)\sum_{j=1}^{n} d_j \leq n(q-1).$$

Isso implica que $0 \leq r_j < q-1$ para algum j, e assim

$$\prod_{j=1}^{n}\sum_{x_j\in\mathbb{F}_q} x_j^{r_j} \equiv 0 \pmod p.$$

Portanto,

$$N \equiv 0 \pmod p.$$

□

Uma observação relevante para a demonstração a seguir é a de que existe um isomorfismo natural entre os grupos cíclicos $C_n^r \cong (\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})^r$. Por simplificação denotaremos $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})$ por F_n.

Este Lema é a versão da Conjectura de Kemnitz para sequências de A-soma-zero, e foi demonstrado por Adhikari *et al* em [1].

Lema 2.7 *Para um inteiro ímpar n, temos que*

$$s_A(C_n^2) = 2n-1.$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre o número de fatores primos de n.

Se $n = p$ é primo, então

$$s_A(C_p^2) = 2p-1.$$

De fato, sejam $r = 2p-1$ e $v_1 = (c_1,d_1), v_2 = (c_2,d_2),\ldots,v_r = (c_r,d_r)$ uma sequência qualquer de vetores em F_p^2.

Consideremos o seguinte sistema de equações em $2p-1$ variáveis x_i sobre F_p:

$$\sum_{i=1}^{2p-1} c_i x_i^{\frac{p-1}{2}} = 0, \tag{2-2}$$

$$\sum_{i=1}^{2p-1} d_i x_i^{\frac{p-1}{2}} = 0, \tag{2-3}$$

$$\sum_{i=1}^{2p-1} x_i^{p-1} = 0. \tag{2-4}$$

Como $2(p-1) < 2p-1$ e $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2p-1} = 0$ é uma solução, pelo Teorema de *Chevalley-Warning*, existe uma outra solução $(a_1, a_2, \ldots, a_r) \in (F_p)^{2p-1}$. Seja $J \subset \{1, 2, \ldots, 2p-1\}$ o conjunto de todos os índices de entradas não nulas de uma tal solução.

Das equações (2-2) e (2-3) segue que

$$\sum_{i \in J} a_i v_i = (0,0), \quad \text{em } F_p^2,$$

onde $a_i \in \{-1, 1\}$, pois pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que

$$x^{p-1} = \begin{cases} 0 \ , & \text{se} \quad x = 0, \\ -1 \ , & \text{se} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Daí,

$$x^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 0 \ , & \text{se} \quad x = 0, \\ \pm 1 \ , & \text{se} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Da equação (2-4) e também do Pequeno Teorema de Fermat temos

$$\sum_{i \in J} 1 = 0.$$

Então $|J|$ é múltiplo de p. Mas o sistema possui apenas $2p-1$ variáveis, portanto $|J| = p$. Isso prova que

$$s_A(C_p^2) \leq 2p-1.$$

Por outro lado, consideramos a sequência de $2p-2$ elementos onde cada um dos elementos $(1,0)$ e $(0,1)$ é repetido $p-1$ vezes. Esta sequência não possui subsequência de A-soma-zero com comprimento p, pois como p é ímpar temos que $p-1$ é par e não é possível cancelar todos os elementos da subsequência. E como só existe $p-1$ vezes cada elemento não podemos somar um elemento p vezes para ele se anular em C_p^2. Logo,

$$s_A(C_p^2) \geq 2p-1.$$

Concluímos então que $s_A(C_p^2) = 2p-1$.

Agora, supomos por indução que o resultado é válido para todo inteiro com o número de fatores primos menor que o de n.

Seja $n = mp$, onde p é primo. Pelo que assumimos, cada subsequência de $2p-1$ membros de uma sequência qualquer $\mathcal{S} = v_1 v_2 \ldots v_{2n-1}$ tem uma subsequência v_i, $i \in I$ de

p elementos tal que existem $a_j \in \{-1,1\}$ e $j \in I$ de tal forma que

$$\sum_{j\in I} a_j v_j \equiv (0,0) \pmod{p}.$$

De $\mathcal{S}$ vamos omitindo repetidamente tais subsequências de p elementos. Mesmo depois que $2m-2$ destas subsequências são omitidas nós ainda ficamos com $2pm-1-(2m-2)p = 2p-1$ elementos e podemos ter outra subsequência de p elementos de A-soma-zero em F_p^2.

Assim nós encontramos $2m-1$ subconjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_{2m-1}$, dois a dois disjuntos, de $\{1,2,\ldots,2mp-1\}$, com $|I_i| = p$ e $\sum_{j\in I_i} a_i j v_j \equiv (0,0) \pmod{p}$ para cada i, onde $a_{ij} \in A$. Escrevendo $x_i = \sum_{j\in I_i} a_{ij} v_j$, nós agora consideramos a sequência $\frac{1}{p}x_1, \frac{1}{p}x_2, \ldots, \frac{1}{p}x_{2m-1} \in \mathbb{Z}^2$. Pela hipótese de indução, essa nova sequência tem uma subsequência de m elementos cuja A-soma é divisível por m. Isto é, existe um subconjunto I' com comprimento m de $\{1,2,\ldots,2m-1\}$, tal que $\sum_{k\in I'} b_k \dfrac{1}{p} x_k$ é divisível por m, onde $b_k \in A$. Daí,

$$\frac{1}{p}\sum_{k\in I'} b_k x_k = mt, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in I'} b_k x_k = mpt$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in I'} b_k x_k \equiv (0,0) \pmod{n}.$$

Observe que, como o conjunto A é fechado em relação à multiplicação, a subsequência v_j, com $j \in I_k$ e $k \in I'$ é uma A-soma-zero de $\mathcal{S}$. Logo, $s_A(C_n^2) = 2n-1$.

□

A seguir temos a relação de igualdade entre os invariantes s_A e g_A para o grupo C_3^r.

Proposição 2.8 *Para $A = \{-1,1\}$, temos $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r)$, para $r \geq 2$.*

Demonstração. Pelo Lema anterior (2.7) temos que $s_A(C_3^2) = 5$ e, por outro lado, a sequência $(1,0)(0,1)(2,0)(0,2)$ não satisfaz a condição (g_A), então $g_A(C_3^2) \geq 5$, e assim $s_A(C_3^2) = g_A(C_3^2)$ pela condição dada por (2-1).

Seja $\mathcal{S}$ uma sequência com comprimento $m = s_A(C_3^r) - 1$ que não satisfaz a condição (s_A). Em particular $\mathcal{S}$ não contém três elementos iguais, já que $3g = 0$. Se $\mathcal{S}$ contém somente elementos distintos, então ela não satisfaz a condição (g_A), e então $m \leq g_A(C_3^r) - 1$, o que implica $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r)$ pela equação (2-1). Assim, vamos supor que $\mathcal{S}$ tem elementos repetidos e escrevemos

$$\mathcal{S} = \varepsilon^2 \mathcal{F} = \prod_{i=1}^{t} g_i^2 \prod_{j=2t+1}^{m} g_j \tag{2-5}$$

onde $g_1, \ldots, g_t, g_{2t+1}, \ldots, g_m$ são distintos. Se para algum $1 \leq j_0 \leq m$ tivermos $g_{j_0} = 0$, então a subsequência de todos os elementos não nulos de $\mathcal{S}$ tem comprimento pelo menos igual a $s_A(C_3^r) - 3 \geq 2\eta_A(C_3^r) - 4 \geq \eta_A(C_3^r) + r + 1 - 4 \geq \eta_A(C_3^r)$ para $r \geq 3$, onde a segunda desigualdade vale pelo Lema 2.4 item ii). Então devemos ter uma A-soma-zero com comprimento 2 ou 3. Pelo que assumimos, essa subsequência de A-soma-zero deve ter comprimento 2. Mas a A-soma-zero juntamente com $g_j = 0$ seria uma subsequência de A-soma-zero com comprimento 3 em $\mathcal{S}$, contradizendo o fato de que $\mathcal{S}$ não satisfaz a condição (s_A).

Assim, vamos assumir que todos os elementos de $\mathcal{S}$ são não nulos. Observe que nós não podemos ter g em ε e h em $\mathcal{F}$ tal que $h = -g$, pois $g + g - h = 3g = 0$, uma A-soma-zero com comprimento 3. Portanto a nova sequência

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{t} g_i \prod_{i=1}^{t} (-g_i) \prod_{i=2t+1}^{m} g_i$$

tem somente elementos distintos, comprimento $m = s_A(C_3^r) - 1$, e não satisfaz a condição (g_A). Então, $m \leq g_A(C_3^r) - 1$, e isso conclui a demonstração de acordo com a equação (2-1). □

Por fim, unindo as Proposições 2.5 e 2.8 obtemos a seguinte relação

$$s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r) = 2\eta_A(C_3^r) - 1. \tag{2-6}$$

Principais Resultados

Neste capítulo apresentamos os resultados principais deste trabalho. Os primeiros três Teoremas foram demonstrados por Lemos, Godinho e Marques em [6]. O primeiro deles (Teorema 3.1) nos apresenta cotas inferior e superior para o invariante $s_A(C_n^r)$, n ímpar, em função dos valores n e r. O segundo (Teorema 3.5) apresenta cotas inferiores para o invariante $s_A(C_3^r)$ em três casos diferentes: quando r é ímpar, quando r é par com $r \equiv 2 \pmod 4$ e quando r é par com $r \equiv 0 \pmod 4$. O terceiro resultado (Teorema 3.6) apresenta valores e cotas para o invariante s_A dos grupos da forma $C_{3^a}^3$, $C_{3^a}^4$ e $C_{3^a}^5$. Por fim apresentamos o Teorema demosntrado por Harborth (ver [7]) para o invariante $s(C_{mn}^r)$ em 1973 que nos dá uma cota superior para o invariante s_A do grupo C_{mn}.

3.1 Limitantes Para $s_A(C_n^r)$

O Teorema a seguir foi provado por H. Godinho, A. Lemos e D. Marques em [6] e é a versão para sequências de A-soma-zero do Teorema 1.12 provado por Harborth em [7].

Seja $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ o epimorfismo canônico de grupos, e defina $\alpha : \mathbb{Z}^r \longrightarrow (\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})^r$ como $\alpha(a_1,\dots,a_r) = (\phi(a_1),\dots,\phi(a_r))$. Se $\mathcal{S} = g_1 \dots g_m$ é uma sequência sobre o grupo $\mathbb{Z}^r$, vamos denotar por $\alpha(S)$ a sequência $\alpha(S) = \alpha(g_1)\dots\alpha(g_m)$ de mesmo comprimento sobre o grupo $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})^r$.

Teorema 3.1 *Sejam $A = \{-1,1\}$, $n \geq 1$ ímpar e $r \geq 1$. Se $n = 3$ e $r \geq 2$, ou $n \geq 5$ então*

$$2^{r-1}(n-1)+1 \leq s_A(C_n^r) \leq (n^r-1)(\frac{n-1}{2})+1.$$

Demonstração.

1. **O limite inferior para $s_A(C_n^r)$.** Sejam $e_1,\dots,e_r$ os elementos de C_n^r definidos como $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, onde o 1 está na j-ésima posição, e para cada subconjunto $I \subset \{1,\dots,r\}$ de cardinalidade ímpar, defina $\mathfrak{e}_I = \sum_{i\in I} e_i$ (por exemplo, tomando $I = \{1,3,r\}$, temos $\mathfrak{e}_I = (1,0,1,0,\dots,0,1)$), e seja $\mathfrak{I}_m$ a coleção de todos os subconjuntos de $\{1,\dots,r\}$ de cardinalidade ímpar e no máximo igual a m.

Vamos provar este resultado para F_p^r, o que é equivalente a provar para C_n^r como vimos no capítulo anterior. Seja $e_1^*, \ldots, e_r^*$ a base canônica (isto é, $e_j^* = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, onde o 1 está na j-ésima posição) do grupo $\mathbb{Z}^r$, e defina, como anteriormente

$$\mathfrak{e}_I^* = \sum_{i \in I} e_i^*.$$

Agora considere a sequência

$$\mathcal{S} = \prod_{I \in \mathfrak{I}_r} (\mathfrak{e}_I^*)^{n-1},$$

com comprimento $2^{r-1}(n-1)$. De fato, pois a cardinalidade do conjunto das partes de $\{1, \ldots, r\}$ é 2^r, e como a coleção I tem apenas os subconjuntos de $\{1, \ldots, r\}$ com cardinalidade ímpar temos que existem $\frac{2^r}{2}$ conjuntos em $\mathfrak{I}_r$. Vamos provar que a sequência correspondente

$$\alpha(\mathcal{S}) = \prod_{I \in \mathfrak{I}_r} \mathfrak{e}_I^{n-1}$$

não tem subsequência de A-soma-zero com comprimento n, o que é equivalente a provar que dado $A = \{-1, 1\}$ e qualquer subsequência $\mathcal{R} = g_1 \ldots g_n$ de $\mathcal{S}$, não é possível encontrar $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in A$ tais que

$$\varepsilon_1 g_1 + \ldots + \varepsilon_n g_n \equiv (0, \ldots, 0) \pmod{n}. \tag{3-1}$$

Suponhamos por absurdo que seja possível encontrar tais ε_i's. Escrevendo $g_k = (c_1^{(k)}, \ldots, c_r^{(k)})$, para $1 \leq k \leq n$, segue de (3-1) que, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k c_j^{(k)} \equiv 0 \pmod{n}. \tag{3-2}$$

Para cada $1 \leq j \leq r$ definimos os conjuntos

$$A_j = \{\ell | c_j^{(\ell)} = 1\}.$$

Como $c_j^{(\ell)} \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ para qualquer j e qualquer ℓ devemos ter, de acordo com (3-2), que

$$|A_j| = n \ \text{ ou } \ |A_j| \text{ é par}. \tag{3-3}$$

Como $g_\ell = \mathfrak{e}_{I_\ell}$ para algum $I_\ell \in \mathfrak{I}_r$, e pela definição de I_ℓ, $\sum_{j=1}^{r} c_j^{(\ell)} = |I_\ell|$ para todo ℓ, então

$$\sum_{j=1}^{r} |A_j| = \sum_{j=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{n} c_j^{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} c_j^{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^{n} |I_\ell| = |I_1| + \ldots + |I_n|,$$

uma soma ímpar de números ímpares. Portanto, deve existir um j_0 tal que $|A_{j_0}|$ é ímpar. Mas por (3-3) temos que $|A_{j_0}| = n$. Daí, segue que $c_{j_0}^{(\ell)} = 1$ para todo $1 \leq \ell \leq n$, e assim $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k c_{j_0}^{(k)} = n$. Portanto, $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 1$. Agora note que por (3-2), se tivermos $c_j^{(t_0)} = 1$, para algum $1 \leq t_0 \leq n$, então $c_j^{(t)} = 1$ para todo $1 \leq t \leq n$, e da mesma forma se tivermos $c_j^{(s_0)} = 0$, para algum $1 \leq s_0 \leq n$, então $c_j^{(s)} = 0$ para todo $1 \leq s \leq n$. Logo, temos $g_1 = \ldots = g_n$, o que é um absurdo já que na sequência $\mathcal{S}$ os elementos não aparecem mais que $n-1$ vezes.

Portanto, $2^{r-1}(n-1)+1 \leq s_A(C_n^r)$.

2. **O limite superior para $s_A(C_n^r)$.** Vamos considerar o conjunto de elementos do grupo C_n^r como a união $\{0\} \cup G^+ \cup G^-$, onde se $g \in G^+$ então $-g \in G^-$, e escreva a sequência $\mathcal{S}$ como

$$\mathcal{S} = 0^m \prod_{g \in G^+} (g^{v_g(\mathcal{S})}(-g)^{v_{-g}(\mathcal{S})}).$$

Primeiro observe que se para algum g, $v_g(\mathcal{S}) + v_{-g}(\mathcal{S}) \geq n$, então podemos encontrar uma subsequência $\mathcal{R} = c_1 \ldots c_n$ de $\mathcal{S}$, que é uma A-soma-zero, pois qualquer soma de n elementos iguais é zero em C_n^r. Agora considere $m \geq 1$ e $m + v_g(\mathcal{S}) + v_{-g}(\mathcal{S}) > n$, então podemos encontrar uma subsequência $\mathcal{R} = h_1 \ldots h_t$ de $\mathcal{S}$ com comprimento par $t \geq n-m$ com $h_j \in \{-g, g\}$. Como $A = \{-1, 1\}$, $\mathcal{R}$ é uma A-soma-zero. Portanto, a subsequência $\mathcal{T} = 0^{m^*}\mathcal{R}$ ($m^* \leq m$) de $\mathcal{S}$ é uma A-soma-zero com comprimento n.

Agora assuma que, para cada g em $\mathcal{S}$ temos $v_g(\mathcal{S}) + v_{-g}(\mathcal{S}) \leq n-m$, que dá

$$|\mathcal{S}| \leq \begin{cases} m + \frac{n^r-1}{2}(n-m), & \text{se} \quad m > 0 \ \text{par}, \\ m - 1 + \frac{n^r-1}{2}(n-m), & \text{se} \quad m > 0 \ \text{ímpar}, \\ \frac{n^r-1}{2}(n-1), & \text{se} \quad m = 0, \end{cases}$$

para $|G^+| = \frac{n^r-1}{2}$. Observamos que no caso m par

$$m + \frac{n^r-1}{2}(n-m) \leq 2 + \frac{n^r-1}{2}(n-2) \leq 2 + \frac{n^r-1}{2}(n-2) + \frac{n^r-1}{2} - 1 \leq \frac{n^r-1}{2}(n-1) + 1$$

e a igualdade só acontece quando $n = 3$ e $r = 1$. Neste caso temos que $|\mathcal{S}| \leq \frac{n^r-1}{2}(n-1)+1$. Concluímos então que se $|\mathcal{S}| \geq \frac{n^r-1}{2}(n-1)+1$, ela tem uma subsequência com comprimento n a qual é de A-soma-zero.

□

No caso em que $n = 3$ podemos melhorar a cota superior de $s_A(C_3^r)$.

Corolário 3.2 *Sejam $A = \{-1, 1\}$ e $r \geq 1$, então $s_A(C_3^r) \leq 2 \cdot \frac{3^r}{r}$*

Demonstração. De acordo com a proposição 2.8, $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r)$ para $r \geq 2$, e segue da definição que $g_A(C_3^r) \leq g(C_3^r)$, onde $g(C_3^r)$ é o invariante $g_A(C_3^r)$ com $A = \{1\}$. Agora usamos o Teorema 1.2 de [11] para obter $s_A(C_3^r) = g_A(C_3^r) \leq g(C_3^r) \leq 2 \cdot \frac{3^r}{r}$. $\square$

3.2 Cota Inferior Para $s_A(C_3^r)$

Nesta seção vamos apresentar a demonstração do Teorema 3.5 que nos dá uma cota inferior da constante $s_A(C_3^r)$ para o caso em que r é ímpar e no caso em que r é par tratamos separadamente $r \equiv 2 \pmod 4$ e $r \equiv 0 (\text{mod } 4)$. Para demonstrar o caso em que r é ímpar apresentamos a Proposição 3.3 à seguir e para o caso em que r é par apresentamos a Proposição 3.4. Ambas proposições apresentam resultado para o invariante η_A, mas através da Proposição 2.5 obtemos o resultado.

Proposição 3.3 *Se $r > 3$ é ímpar e $A = \{-1, 1\}$, então $\eta_A(C_3^r) \geq 2^{r-1} + \binom{r-1}{\delta}$, onde*

$$\delta = \delta(r) = \begin{cases} \frac{r-3}{2}, & se \quad r \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ \frac{r-5}{2}, & se \quad r \equiv 3 \ (mod\ 4) \end{cases} \tag{3-4}$$

Demonstração. Nós provaremos essa proposição apresentando um exemplo de sequência com comprimento $2^{r-1} + \binom{r-1}{\delta} - 1$ sem subsequência de A-soma-zero com comprimento menor ou igual a 3. Seja $\ell = \binom{r-1}{\delta}$, e considere a sequência

$$\mathcal{S} = \mathcal{E}\mathcal{G} = (\prod_{I \in \mathfrak{I}_{r-2}} \mathfrak{e}_I) \cdot g_1 \ldots g_\ell$$

com

$$g_1 = (-1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\delta}, 1, 1, \ldots, 1)$$

$$\vdots$$

$$g_\ell = (-1, 1, \ldots, 1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\delta}),$$

onde $\mathfrak{e}_I$ e $\mathfrak{I}_{r-2}$ são definidos na demonstração do Teorema 3.1. A sequência $\mathcal{S}$ não tem subsequências de A-soma-zero com comprimento 1 e 2, pois o 0 não pertence à $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}$ não possui elementos repetidos. E também a soma ou diferença de elementos de $\mathcal{G}$ nunca dará outro elemento de $\mathcal{G}$, pois nenhum elemento de $\mathcal{G}$ possui zero como uma de suas coordenadas. Agora nós consideramos $\mathfrak{e}_s - \mathfrak{e}_t$, onde $\mathfrak{e}_s$ e $\mathfrak{e}_t$ representam os $\mathfrak{e}_I$'s para o qual s coordenadas são iguais a 1 e t coordenadas são iguais a 1, respectivamente. Assim, vemos que $\mathfrak{e}_s - \mathfrak{e}_t$ nunca será um elemento de $\mathcal{G}$ já que ou ele tem necessariamente uma coordenada zero ou, como s e t são ímpares por definição, ele tem um número ímpar de -1's o que é um absurdo pois $\delta + 1$ é par.

Agora, se para algum s e para algum t nós tivermos

$$\mathfrak{e}_s + \mathfrak{e}_t = g_i,$$

então $\mathfrak{e}_t$ e $\mathfrak{e}_s$ deveriam ter $\delta+1$ coordenadas não nulas nas mesmas posições para obter $\delta+1$ coordenadas -1's. Então devemos ter

$$r + (\delta+1) = s + t.$$

O que é impossível já que $s+t$ é par e $r+(\delta+1)$ é ímpar.

Assim, a única subsequência de A-soma-zero possível com comprimento 3 necessariamente incluirá um elemento de $\mathcal{E}$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Agora, note que ou $v+w$ ou $v-w$ tem duas das suas entradas com sinais opostos (já que $\delta < \frac{r-1}{2}$) e então ambos não podem ser adicionados a um $\pm\mathfrak{e}_I$ para obter uma A-soma-zero, já que todas as suas entradas não nulas tem o mesmo sinal. Portanto, $\eta_A(C_3^r) \geq 2^{r-1} + \binom{r-1}{\delta}$. □

Proposição 3.4 *Seja $r > 4$ par, $m = \lfloor \frac{3r-4}{4} \rfloor$ e $A = \{-1, 1\}$. Então,*

$$\eta_A(C_3^r) \geq \sum_{\substack{j=1,\\ j \text{ ímpar}}}^{m} \binom{r}{j} + \ell(r) + 1,$$

onde

$$\ell(r) = \begin{cases} \binom{r}{\frac{r-2}{2}}, & se \quad r \equiv 2 \pmod 4 \\ \binom{r}{\frac{r}{2}}/2, & se \quad r \equiv 0 \pmod 4). \end{cases}$$

Demonstração. Considere a sequência $\mathcal{K} = g_1 \ldots g_\tau$ com

$$g_1 = (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{\delta}, 1, 1, \ldots, 1)$$

$$\vdots$$

$$g_\tau = (1, 1, \ldots, 1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\delta}),$$

onde

$$\tau = \begin{cases} \ell(r), & \text{se} \quad r \equiv 2 \pmod 4 \\ 2\ell(r), & \text{se} \quad r \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

e

$$\delta = \begin{cases} \frac{r-2}{2}, & \text{se} \quad r \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{r}{2}, & \text{se} \quad r \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

Observe que se $r \equiv 2 \pmod 4$, então $\tau = \ell$. E como $\delta = \frac{r-2}{2} < \frac{r}{2}$, temos que $-g_i \notin \mathcal{K}$ para nenhum $i \in \{1,2,\dots,\tau\}$. Mas, se $r \equiv 0 \pmod 4$ temos que $\delta = \frac{r}{2}$ e $\tau = 2\ell = \binom{r}{\frac{r}{2}}$, então para todo $i = \{1,2,\dots,\tau\}$ temos que $-g_i \in \mathcal{K}$. Logo podemos reorganizar a sequência da seguinte forma

$$\mathcal{K} = \prod_{i=1}^{\frac{\tau}{2}} g_i \prod_{i=1}^{\frac{\tau}{2}} (-g_i) = \mathcal{K}^+ \mathcal{K}^-.$$

Agora defina a sequência

$$\mathcal{S} = (\prod_{I \in \mathfrak{I}_m} \mathfrak{e}_I)\ \mathcal{G}$$

onde $\mathcal{G} = \mathcal{K}$ se $r \equiv 2 \pmod 4$ ou $\mathcal{G} = \mathcal{K}^+$ se $r \equiv 0 \pmod 4$, e $m = \lfloor \frac{3r-4}{4} \rfloor$, uma sequência de tamanho

$$|\mathcal{S}| = \sum_{\substack{j=1,\\ j \text{ ímpar}}}^{m} \binom{r}{j} + \ell(r) + 1.$$

Observamos que $\mathcal{S}$ não possui subsequências de A-soma-zero com comprimento 1 ou 2, pois o zero não está na sequência e a sequência possui dois elementos iguais ou opostos. Também a soma ou diferença de dois elementos de $\mathcal{G}$ nunca será outro elemento de $\mathcal{G}$, pois teremos necessariamente um zero como coordenada. Também $\mathfrak{e}_I - \mathfrak{e}_J$ nunca será um elemento de $\mathcal{G}$ já que ele tem necessariamente ou uma coordenada zero ou um número ímpar de -1's, sendo o δ par. Agora, se para algum s e algum t nós tivermos

$$\mathfrak{e}_s - \mathfrak{e}_t = \pm g_j,$$

para algum j, então $\mathfrak{e}_t$ e $\mathfrak{e}_s$ terão necessariamente δ coordenadas não-nulas nas mesmas posições (para obter δ coordenadas -1's). Mas então, $s + t = r + \delta \geq \frac{3r-2}{2}$, para qualquer valor de δ o que é impossível já que

$$s + t \leq 2m \leq \frac{3r-4}{2}.$$

Assim, a única subsequência com comprimento 3 possível inclui necessariamente um elemento $\mathfrak{e}_t$ e dois elementos de $\mathcal{G}$.

Sejam v, w elementos de $\mathcal{G}$. Primeiro observe que se eles não têm -1's em posições comuns, então $v + w$ tem uma quantidade par de zeros e uma quantidade par de -1's (já que r e δ são ambos pares), isto é, $v + w \neq \pm\mathfrak{e}_I$. Note que $v - w$ também tem uma quantidade par de coordenadas não nulas, isto é, $v - w$ não é do tipo $\pm\mathfrak{e}_I$. Agora, assumimos que v, w tem pelo menos um -1 na mesma posição, e verificamos que $v + w$ ou $v - w$ tem duas ou mais de suas entradas com sinais opostos e então qualquer deles não pode ser adicionado a um $\pm\mathfrak{e}_I$ para obter uma A-soma-zero, já que todas as entradas não nulas de $\pm\mathfrak{e}_I$ tem o mesmo sinal.

$\square$

O Teorema a seguir segue diretamente das Proposições 3.3 e 3.4 e da equação (2-6).

Teorema 3.5 *Sejam $A = \{-1,1\}$ e $r \geq 5$*

i) Se r é ímpar então

$$s_A(C_3^r) \geq 2^r + 2\binom{r-1}{\frac{r-5}{2}} - 1;$$

ii) Se r é par, com $m = \lfloor \frac{3r-4}{4} \rfloor$, então

(a) Se $r \equiv 2 \pmod 4$, então

$$s_A(C_3^r) \geq 2 \sum_{1 \leq j \leq m} \binom{r}{j} + 2\binom{r}{\frac{r-2}{2}} + 1,$$

onde j toma valores ímpares.

(b) Se $r \equiv 0 \pmod 4$, então

$$s_A(C_3^r) \geq 2 \sum_{1 \leq j \leq m} \binom{r}{j} + 2\binom{r}{\frac{r}{2}} + 1,$$

onde j toma valores ímpares.

3.3 Valores e Limitantes Para $s_A(C_{3^a}^3)$, $s_A(C_{3^a}^4)$ e $s_A(C_{3^a}^5)$

Nesta seção temos como objetivo a demonstração do Teorema 3.6 a seguir. Sua prova está dividida entre duas proposições. Para concluirmos o item $i)$ do Teorema demonstramos a Proposição 3.7 para o invariante η_A e aplicamos os valores encontrados na equação dada pela Proposição 2.5. Os outros três itens são demonstrados na Proposição 3.9. No entanto precisamos do Lema 3.8 demonstrado em [3] para $A = \{1\}$ e que aqui demonstramos para $A = \{-1,1\}$.

Teorema 3.6 *Seja $A = \{-1,1\}$. Então,*

i) $s_A(C_3^3) = 9$, $s_A(C_3^4) = 21$, $41 \leq s_A(C_3^5) \leq 45$;

ii) $s_A(C^3_{3^a}) = 4\times 3^a - 3$, *para todo* $a \geq 1$.

iii) $8\times 3^a - 7 \leq s_A(C^4_{3^a}) \leq 10\times 3^a - 9$, *para todo* $a \geq 1$;

iv) $16\times 3^a - 15 \leq s_A(C^5_{3^a}) \leq 22\times 3^a - 21$, *para todo* $a \geq 1$.

Para a demonstração do item $i)$ do Teorema acima segue a Proposição.

Proposição 3.7 *Para* $A = \{-1,1\}$, *nós temos*

1. $\eta_A(C^2_3) = 3$;
2. $\eta_A(C^3_3) = 5$;
3. $\eta_A(C^4_3) = 11$;
4. $21 \leq \eta_A(C^5_3) \leq 23$.

Demonstração. Pelas proposições 2.5 e 2.8 temos a equação dada por

$$s_A(C^r_3) = g_A(C^r_3) = 2\eta_A(C^r_3) - 1, \tag{3-5}$$

para $r > 1$, e por definição temos que $g_A(C^r_3) \leq g(C^r_3)$ resultando em $\eta_A(C^r_3) \leq \frac{g(C^r_3)+1}{2}$. Segue de $g(C^r_3) = 5$ (ver [8]), $g(C^3_3) = 10$, $g(C^4_3) = 21$ (ver [9]), $g(C^5_3) = 46$ (ver [4]), então $\eta_A(C^2_3) \leq 3$, $\eta_A(C^3_3) \leq 5$, $\eta_A(C^4_3) \leq 11$ e $\eta_A(C^5_3) \leq 23$. Por outro lado, observe que as sequências $(1,0)(0,1)$ e $(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)(1,1,1)$ não possuem subsequências de A-soma-zero com comprimento no máximo três, pois os elementos neutros não pertencem às sequências, nenhuma das duas sequências possuem elementos repetidos e por fim, a soma ou diferença de dois elementos da sequência não pertence à ela. Então $\eta_A(C^2_3) = 3$ e $\eta_A(C^3_3) = 5$. Podemos verificar com observações análogas que as seguintes sequências com comprimento 10 e 20 respectivamente não satisfazem a condição (η_A):

$$(1,1,0,0)\ldots(0,0,1,1)(1,1,1,0)\ldots(0,1,1,1)$$

e

$$(1,1,0,0,0)\ldots(0,0,0,1,1)(1,1,1,0,0)\ldots(0,0,1,1,1),$$

então $\eta_A(C^4_3) = 11$ e $\eta_A(C^5_3) \geq 21$.

$\square$

A Proposição 3.7 juntamente com a equação (2-6) nos dão a demonstração do item $i)$ do Teorema 3.6. A demonstração dos outros três itens é dada pela proposição 3.9

que apresentaremos posteriormente. Mas antes precisamos do seguinte resultado que está demonstrado em [3] para $A = \{1\}$ e aqui demonstramos para $A = \{-1, 1\}$.

Lema 3.8 *Seja G um grupo abeliano finito, $A = \{-1, 1\}$ e $H \leq G$. Seja $\mathcal{S}$ uma sequência em G com comprimento*

$$m \geq (s_A(H) - 1)exp(G/H) + s_A(G/H).$$

Então $\mathcal{S}$ tem uma subsequência de A-soma-zero com comprimento $exp(H)exp(G/H)$. Em particular, se $exp(G) = exp(H)exp(G/H)$, então

$$s_A(G) \leq (s_A(H) - 1)exp(G/H) + s_A(G/H).$$

Demonstração. Seja $\phi : G \to G/H$, o epimorfismo canônico, dado por $\phi(g) = g + H$ para cada $g \in G$. De $|\phi(\mathcal{S})| = |\mathcal{S}|$ e de $|\mathcal{S}| \geq s_A(G/H)$ segue que $\phi(\mathcal{S})$ possui uma subsequência $\phi(\mathcal{S}_1)$ de A-soma-zero, com $|\mathcal{S}_1| = exp(G/H)$, e resta uma subsequência com tamanho maior ou igual a $(s_A(H) - 2)exp(G/H) + s_A(G/H)$. De novo, repetimos este procedimento para obtermos mais uma sequência $\phi(\mathcal{S}_2)$ de A-soma-zero, com $|\mathcal{S}_2| = exp(G/H)$, e uma subsequência com tamanho maior ou igual a $(s_A(H) - 3)exp(G/H) + s_A(G/H)$.

Após repetirmos este procedimento $s_A(H) - 1$ vezes obtemos esta quantidade de subsequências de A-soma-zero disjuntas aos pares, $\phi(\mathcal{S}_i)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, s_A(H) - 1\}$, com $|\mathcal{S}_i| = exp(G/H)$, e restará uma subsequência com tamanho maior ou igual a $s_A(G/H)$. Mais uma vez aplicamos o procedimento anterior para obtermos uma subsequência $\phi(\mathcal{S}_{s_A(H)})$ de A-soma-zero, com $|\mathcal{S}_{s_A(H)}| = exp(G/H)$ e disjunta das anteriores obtidas.

Seja $\mathcal{L} = a_1 \ldots a_n$ uma sequência em G tal que $\phi(\mathcal{L}) = \phi(a_1) \ldots \phi(a_n)$ seja uma sequência em G/H de A-soma-zero. Então existem $x_1, \ldots, x_n \in A = \{-1, 1\}$ tais que $x_1\phi(a_1) + \ldots + x_n\phi(a_n) = 0$. Defina então

$$\sigma_A(\mathcal{L}) = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n.$$

Agora, considere $\mathcal{T} = \prod_{i=1}^{s_A(H)} \sigma_A(\mathcal{S}_i)$. De $\phi(\sigma_A(\mathcal{S}_i)) = \sigma_A(\phi(\mathcal{S}_i)) = 0$, segue que a sequência $\mathcal{T}$ está em $ker(\phi) = H$. Como $\mathcal{T}$ é uma sequência com comprimento $s_A(H)$ temos que ela possui uma subsequência de A-soma-zero $\mathcal{T}' = \prod_{j \in I} \sigma_A(\mathcal{S}_j)$, $I \subset \{1, 2, \ldots, s_A(H)\}$, com comprimento $exp(H)$.

Portanto, a sequência $\mathcal{S}' = \prod_{j \in I} \mathcal{S}_j$ é uma sequência de A-soma-zero e tem comprimento $|\mathcal{S}'| = exp(H)exp(G/H)$.

Em particular, se $exp(G) = exp(H)exp(G/H)$ então $s_A(G) \leq (s_A(H) - 1)exp(G/H) + s_A(G/H)$.

$\square$

Proposição 3.9 *Para* $A = \{-1,1\}$*, temos*

1. $s_a(C^3_{3^a}) = 4\times 3^a - 3$*, para todo* $a \geq 1$*;*

2. $8\times 3^a - 7 \leq s_A(C^4_{3^a}) \leq 10\times 3^a - 9$*, para todo* $a \geq 1$*;*

3. $16\times 3^a - 15 \leq s_A(C^5_{3^a}) \leq 22\times 3^a - 21$*, para todo* $a \geq 1$.

Demonstração. Segue do item $i)$ do Teorema 3.6 que $s_A(C^3_3) = 4\times 3 - 3 = 9$. Agora assumimos que $s_A(C^3_{3^{a-1}}) = 4\times 3^{a-1} - 3$. Assim, a proposição 3.8 nos diz que

$$s_A(C^3_{3^a}) \leq 3\times (s_A(C^3_{3^{a-1}}) - 1) + s_A(C^3_3) \leq 4\times 3^a - 3$$

Por outro lado, o Teorema 3.1 nos dá $s_A(C^3_{3^a}) \geq 4\times 3^a - 3$, concluindo a demonstração do item $i)$.

Novamente pelo item $i)$ do Teorema 3.6 nós temos que $s_A(C^4_3) = 10\times 3 - 9 = 21$. Agora, assumimos que $s_A(C^4_{3^{a-1}}) \leq 10\times 3^{a-1} - 9$. Segue da proposição 3.8 que

$$s_A(C^4_{3^a}) \leq 3\times (s_A(C^4_{3^{a-1}}) - 1) + s_A(C^4_3) \leq 10\times 3^a - 9.$$

Por outro lado, o Teorema 3.1 nos dá o limite inferior $s_A(C^4_{3^a}) \geq 8\times 3^a - 7$, concluindo a demonstração do item $ii)$.

Por fim, para demonstrarmos o item $iii)$ observamos que o Teorema 3.6, item $i)$ nos dá $s_A(C^5_3) \leq 22\times 3 - 21$. Assumimos que $s_A(C^5_{3^{a-1}}) \leq 22\times 3^{a-1} - 21$. Assim, pela Proposição 3.8 temos que

$$s_A(C^5_{3^a}) \leq 3\times (s_A(C^5_{3^{a-1}}) - 1) + s_A(C^5_3) \leq 22\times 3^a - 21.$$

Por outro lado, o Teorema 3.1 nos dá o limite inferior $s_A(C^5_{3^a}) \geq 16\times 3^a - 15$, e assim concluímos a demonstração desta proposição.

$\square$

3.4 Cota Superior Para $s_A(C^r_{mn})$

O Teorema a seguir é a versão para o invariante s_A do Teorema 1.13 demonstrado por Harborth em [7] que apresenta uma cota superior para o invariante $s(C^r_{mn})$, só que nesse caso é para o invariante $s_A(C^r_{mn})$. A diferença é que no lugar de $s(C^r_m)$ e $s(C^r_n)$ essa nova cota depende dos invariantes $s_A(C^r_m)$ e $s_A(C^r_n)$.

Teorema 3.10 *Seja C_{mn}^r o produto de r cópias o grupo cíclico C_{mn}, então*

$$s_A(C_{mn}^r) \leq min\{(s_A(C_m^r)-1)n+s_A(C_n^r),(s_A(C_n^r)-2)m+s_A(C_m^r)\}.$$

Demonstração. Observe que $exp(C_{mn}^r) = mn = exp(C_m^r)exp(C_n^r)$. E como $C_{mn}^r/C_m^r \approx C_n^r$ e $C_{mn}^r/C_n^r \approx C_m^r$, então pela Proposição 3.8 temos que $s_A(C_{mn}) \leq (s_A(C_m^r)-1)n+s_A(C_n^r)$ e $s_A(C_{mn}) \leq (s_A(C_n^r)-1)m+s_A(C_m^r)$. □

Referências Bibliográficas

[1] ADHIKARI, S. D; BALASUBRAMANIAN, R; PAPPALARDI, F; RATH, P. **Some zero-sum constants with weights**. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 118(2):183–188, 2008.

[2] ADHIKARI, S. D; CHEN, Y. G; FRIEDLANDER, J. B; KONYAGIN, S. V; PAPPALARDI, F. **Contributions to zero-sum problems**. Discrete Math., 306:1–10, 2006.

[3] CHI, R; DING, S; GAO, W; GEROLDINGER, A; SCHMID, W. A. **On zero-sum subsequences of restricted size. IV**. Acta Math. Hungar., 107(4):337–344, 2005.

[4] EDEL, Y; FERRET, S; LANDJEV, I; STORME, L. **The classification of the largest caps in** $\mathrm{AG}(5,3)$. J. Combin. Theory Ser. A, 99(1):95–110, 2002.

[5] ERDÖS, P; GINZBURG, A; ZIV, A. **Theorem in the additive number theory**. Research Council Israel, 10F:42–43, 1961.

[6] GODINHO, H; LEMOS, A; MARQUES, D. **Weighted zero-sum problems over** c_3^r. Algebra Discrete Math, 15(2):201–212, 2013.

[7] HARBORTH, H. **Ein Extremalproblem für Gitterpunkte**. J. Reine Angew. Math., 262/263:356–360, 1973. Collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday.

[8] KEMNITZ, A. **On a lattice point problem**. Ars Combin., 16(B):151–160, 1983.

[9] KNUTH, D. E. **Computerprogramme**. http://www-cs-faculty.stanford.edu/ knuth/programs/setset-all.w.

[10] LEMOS, A. **Problemas de soma zero com peso sobre grupos abelianos finitos**. Tese de Doutorado (UnB), 2010.

[11] MESHULAM, R. **On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progressions**. J. Combin. Theory Ser. A, 71(1):168–172, 1995.

[12] NATANSON, M. B. **Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets**. Springer-Verlag, New York, 1996.

[13] OLSON, J. E. **A problem of erdös on abelian groups**. Combinatorica, 7(3):285–289, 1987.

[14] OLSON, J. E. **A combinatorial problem on finite Abelian groups. I**. J. Number Theory, 1:8–10, 1969.

[15] OLSON, J. E. **A combinatorial problem on finite Abelian groups. II**. J. Number Theory, 1:195–199, 1969.

[16] REIHER, C. **On Kemnitz' conjecture concerning lattice-points in the plane**. Ramanujan J., 13(1-3):333–337, 2007.

[17] ROBINSON, D. J. S. **A Course in the Theory of Groups**. Springer-Verlag, New York, 1991.