Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

Instabilidade Modulacional em Equações Não Lineares de Schrödinger

Erivelton de Oliveira Alves

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar*

Coorientador: *Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso*

Coorientador: *Prof. Dr. Márcio A. R. Souza*

Goiânia

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico**: **[ ] Dissertação** **[X] Tese**

1 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

2

Nome completo do autor: Erivelton de Oliveira Alves

Título do trabalho: Instabilidade Modulacional em Equações Não Lineares de Schrödinger

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Data: 21 / 12 / 2016

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira Alves, Erivelton
Instabilidade Modulacional em Equações Não Lineares de Schrödinger [manuscrito] / Erivelton Oliveira Alves. - 2015.
7, 74 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar; co-orientador Dr. Wesley Bueno Cardoso; co-orientador Márcio Adriano Rodrigues de Souza.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2015.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui lista de figuras.

1. Sólitons. 2. não linearidade. 3. instabilidade modulacional. I. Torres Avelar, Ardiley, orient. II. Título.

CDU 530.1/145

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ata **Nº 23** de defesa de tese de **Erivelton de Oliveira Alves** para obtenção do título de Doutor em Física.

Aos 16 dias do mês de outubro de 2015, às 14h00min, no Miniauditório do Instituto de Física da UFG, reuniu-se a Banca Examinadora indicada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação, aprovada pelo Conselho Diretor e designada pela Diretoria do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo **Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar** (orientador e presidente da Banca – IF/UFG), **Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso** (coorientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Márcio Adriano Rodrigues Souza** (coorientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho** (CCEN/UFPB), **Prof. Dr. Jorge Mario Carvalho Malbouisson** (IF/UFBA), **Prof. Dr. Salviano de Araújo Leão** (IF/UFG) e **Prof. Dr. Lauro June Queiroz Maia** (IF/UFG) para julgar a tese de doutorado de **Erivelton de Oliveira Alves**, intitulada: "**Instabilidade modulacional em equações não lineares de Schrödinger**". O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a **Erivelton de Oliveira Alves**, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (orientador)	APROVADO
Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (coorientador)	APROVADO
Prof. Dr. Márcio Adriano R. Souza (coorientador)	Aprovado
Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho (CCEN/UFPB)	APROVADO
Prof. Dr. Jorge Mario Carvalho Malbouisson (IF/UFBA)	Aprovado
Prof. Dr. Salviano de Araújo Leão (IF/UFG)	Aprovado
Prof. Dr. Lauro June Queiroz Maia (IF/UFG)	APROVADO

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato **Erivelton de Oliveira Alves** APROVADO pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 16 de outubro de 2015.

Wesley B. Cardoso

Prof. Dr. Ardiley T. Avelar | Prof. Dr. Wesley B. Cardoso | Prof. Dr. Márcio A. R. Souza

Prof. Dr. Dionisio B. Filho | Prof. Dr. Jorge M. C. Malbouisson

Prof. Dr. Salviano A. Leão | Prof. Dr. Lauro J. Q. Maia

Aos meus pais, José (In memoriam) e Adelis.

Agradecimentos

- Antes de tudo, agradeço a Deus pela vida.
- Ao Prof. Ardiley pela oportunidade que me deu em trabalhar sob a sua orientação, pelas discussões e pelo apoio incondicional que me deu durante o trabalho.
- Ao Prof. Wesley, meu coorientador, pelas discussões, contribuições e sugestão do tema.
- Aos Prof. Márcio Adriano pelo incentivo e amizade.
- Ao Instituto de Física da UFG pela oportunidade.
- Aos meus irmãos, Wellington e Érika, pela força e apoio nos momentos difíceis dessa batalha.
- Às minhas filhas, Carol e Alana, que suportaram minha ausência nos momentos de estudo.
- À mulher mais doce que encontrei, justamente nessa etapa exigente da vida, e que tornou mais suave e belos meus dias, Ana Paula.
- Aos meus colegas de Doutorado.
- À FAPEG pelo importante apoio financeiro com a concessão da bolsa.

Conteúdo

Lista de Figuras

Resumo

Neste trabalho estudamos a influência dos efeitos de não linearidades de ordem cúbica e quíntica saturável sobre o espectro de ganho da instabilidade modulacional (MI) em acopladores direcionais e fibras ópticas. O ganho de instabilidade foi obtido usando a análise de estabilidade linear padrão. Em particular, estudou-se a combinação de efeitos de não-linearidade saturável, autoinclinação ou espalhamento sobre MI para regimes de dispersão de velocidade de grupo normal e anômalo. No caso dos acopladores direcionais investigamos como o ganho da instabilidade modulacional é afetado pelo modelo de saturação e pelos efeitos de autoinclinação e espalhamento Raman. Nossos resultados mostram que ganho de instabilidade exibe mudanças significativas devido aos efeitos da não linearidade saturável. Quando analisamos o efeito de autoinclinação, mostramos que sua influência efetiva sobre o ganho da instabilidade modulacional depende da soma algébrica dos parâmetros em cada canal. Analisando o espalhamento Raman, observamos uma quebra de simetria nas regiões de ganho quando se considera o parâmetro do espalhamento de Raman com sinais contrários em cada canal. Finalmente, no contexto de fibras ópticas mostramos como a redução da faixa de frequência do ganho da IM, induzida pela saturação, pode limitar drasticamente a formação de trens de sólitons.

Abstract

In this work the influence of a saturable nonlinearity on the modulation instability (MI) in the contexts oppositely directed coupler and optical fibers in the presence of high-order effects are investigated. The instability gain is attained by using standard linear stability analysis. In particular, we study the combination of a saturable nonlinearity with self-steepening or intrapulse Raman scattering effects on MI for both normal and anomalous group velocity dispersion regimes. In the case of the directional couplers we investigated how the gain of modulational instability is affected by the saturation model and self-steepening or intrapulse Raman scattering effects. Our results show that instability gain exhibits significant changes due to the effects of saturable nonlinearity. When we analyze self-steepening effect, we show that its effective influence on the gain of the modulational instability depends on the algebraic sum of the parameters in each channel. Analyzing the intrapulse Raman scattering, we observe a symmetry break in the gain regions when the Raman scattering parameter with opposite signals in each channel is considered. Finally, in the context of optical fibers we show how the reduction of the Of the gain frequency of the IM, induced by saturation, can drastically limit the formation of soliton trains.

Capítulo 1

Introdução

O interesse em torno de sistemas físicos que apresentam fenômenos não lineares tem se intensificado nas últimas décadas, graças aos avanços conseguidos em distintos ramos da Matemática (não-linear), a exemplo de sistemas de equações diferenciais não lineares, sistemas solitônicos ou ondas solitárias, sistemas fractais entre outros. Tais ferramentas matemáticas têm dado grande ajuda para a resolução de vários problemas em diversas área da Física como na Teoria da Relatividade Geral, Eletromagnetismo clássico, Mecânica dos Fluidos e Teoria de Campos Clássicos por exemplo.

Uma das grandes descobertas da Física não linear ocorreu em agosto de 1834: a onda solitária. O escocês John Scott Russell Russell observava uma barcaça sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do canal de Edimburgo-Glasgow quando, de repente, a embarcação parou. A massa de água que esta arrastava, no entanto, continuou e foi perseguida por ele a galope, com uma velocidade constante por mais de três quilômetros de distância [5, 6]. O interesse de Russell nesta estranha onda que não se deformara por uma razoável distância não se esgotou naquele momento, pois ele fez uma série de experimentos para produzi-las em série: acumulando água em uma extremidade de um canal raso separada por um anteparo e, subitamente, retirando este anteparo. A explicação teórica para a os experimentos de Russell surgiu em 1895, através do estudo de D. Korteweg e G. de Vries. A equção de Korteweg-de Vries (ou simplesmente KdV) é uma equação diferencial parcial e não linear, proposta para descrever ondas longas em canais rasos. Considerando uma onda se propagando num canal com seção transversal retangular, eles obtiveram teoricamente a fórmula de Russell para a velocidade de uma onda solitária de translação [7].

De modo geral, os efeitos ópticos que presenciamos todos os dias são efeitos lineares. Isto quer dizer que, quando a luz interage com a matéria, ela responde usualmente de forma proporcional produzindo fenômenos como reflexão, espalhamento e absorção, por exemplo. Essas respostas ópticas lineares por parte da matéria modificam a luz de várias formas, mas não alteram a sua frequência. Contudo em 1961, Peter Franken *et al.* [8] observaram um efeito óptico fora do comum: quando focalizaram em um cristal de quartzo a luz de um laser de rubi de alta potência, eles obtiveram uma luz transmitida que não era somente constituída por uma, mas sim por duas componentes de frequência, com comprimentos de onda em $694,3$ nm e $347,15$ nm. Assim, ao invés de apenas transmitir a luz do laser, o cristal gerou um segundo feixe que possuía exatamente o dobro da frequência da luz do laser. Essa observação da geração do segundo harmônico e com o advento dos primeiros lasers marca o surgimento da óptica não linear.

Entre os diversos sistemas físicos possíveis de serem descritos por modelos não lineares, com certeza, as fibras ópticas constituem um interessante cenário. Embora já fabricadas na década 20, as fibras de vidro ganharam importância na década de 50, quando receberam uma camada de revestimento que melhorava suas característica de transmissão de luz. Na década seguinte, os esforços para transmissão de imagens por fibras ópticas esbarraram na sua alta perda de sinal (superior a 1000 dB/km) o que motivou o desenvolvimento da tecnologia de fabricação, culminando em 1979, em fibras com perdas de $0,2$ dB/km no comprimento de onda de $1,55$ μm. A disponibilidade dessas fibras ópticas com baixas perdas revolucionou o campo da comunicação em fibra óptica. Em 1973, Hasegawa [9] sugeriu que sólitons[1] pudessem existir em fibras ópticas e propôs a ideia de um sistema de transmissão baseando-se neles, para aumentar

[1]Em 1965 Zabusky e Kruskal [10], criaram o termo sóliton para descrever pacotes de onda estáveis que se propagam em longas distâncias sem modificar sua forma, apresentando ainda a propriedade de permanecerem inalteradas mesmo após colidirem entre si. Os sólitons aparecem assim em diferentes contextos de ciência, tais como, na dinâmica de ondas em águas rasas [11], em fenômenos de transporte cargas ao longo do DNA e outras macromoléculas [12] além de serem criados e observados experimentalmente em óptica atômica não linear nos condensados de Bose-Einstein [13, 14].

ainda mais o desempenho das telecomunicações ópticas. Em 1987, Emplit *et al.* [15] fizeram a primeira observação experimental da propagação de um sóliton escuro em uma fibra óptica. Em 1988, Mollenauer *et al.* transmitiram pulsos solitônicos por mais de 4 km [16]. Desde então, muitos experimentos foram feitos usando sólitons em fibras ópticas [17].

Do ponto de vista matemático, sólitons são solucões de equações (ou de um sistema de equações) diferenciais não lineares, como por exemplo a equação não linear de Schrödinger (*Nonlinear Schrödinger Equation* - NLSE). A NLSE serve para descrever a propagação de um pulso de luz em um meio com não linearidade e dispersão. Nestes sistemas os dois efeitos podem desempenhar papéis opostos, isto é, em determinadas condições a não linearidade pode ocasionar uma compressão temporal no pulso propagado enquanto, simultaneamente, a dispersão tende a provocar um alargamento temporal. Quando ocorre um equilíbrio entre os efeitos dispersivos e não lineares do meio, temos um fenômeno denominado de instabilidade modulacional, que é responsável por gerar um pulso solitônico.

No presente trabalho, apresentamos uma análise geral da instabilidade modulacional, considerando que a resposta não linear pode saturar à medida que a potência do pulso de luz incidente na fibra torna-se mais intensa. Nosso objetivo é determinar o espectro de ganho da instabilidade modulacional em função dos parâmetros que caracterizam os termos de dispersão e não linearidade presentes NLSE, e em função também da modelo que descreve a resposta saturável. Dessa forma, é possível mapear faixas de frequências em que haja formação de trens de pulsos solitônicos, tanto em fibras ópticas com alta não linearidade quanto em acopladores direcionais. O trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 02 apresentamos a equacão de propagação de luz em fibras ópticas e os fenômenos não lineares que podem afetar a propagação. Vamos discutir também a análise da estabilidade linear e definir o espectro de ganho da instabilidade modulacional. No Capítulo 03 vamos calcular o ganho da instabilidade modulacional em função dos parâmetros que caracterizam o espalhamento Raman e o efeito de autoinclinação em acopladores direcionais para dois modelos de resposta saturável. No Capítulo 04 vamos estudar a NLSE incluindo termos de dispersão e não linearidade de mais altas ordens.

Investigaremos como a saturação pode influenciar a formação de trens de sólitons e também como a inclusão de termos de não linearidade quíntica e dispersão de quarta ordem podem afetar o espectro de ganho. No Capítulo 05 apresentamos nossos comentários finais, conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Equação de Propagação e Efeitos Não Lineares em Fibras Ópticas

Para compreender os fenômenos não lineares em fibras ópticas, é necessário utilizar a teoria do eletromagnetismo clássico, através das equações de Maxwell. O objetivo deste capítulo é apresentar a equação que rege a propagação de luz em fibras ópticas, obtida via equações de Maxwell, e apresentar os fenômenos não lineares que podem afetar esta propagação. Dessa maneira, na Seção 2.1 apresentaremos a equação generalizada de Schrödinger, que inclui termos de altas ordens de dispersão e não linearidade (*Higher-Order Nonlinear Schrödinger* - HNLS), para descrever a propagação de lasers intensos em fibras ópticas. Na Seção 2.2 discutimos os efeitos não lineares que surgem à medida que a radiação eletromagnética de alta intensidade altera as propriedades ópticas do material. Na Seção 2.3 estudamos a Instabilidade Modulacional e obteremos seu espectro de ganho.

2.1 Equação Não Linear de Schrödinger

A equação não linear de Schrödinger (*Nonlinear Schrödinger Equation* - NLSE) possibilita a descrição do comportamento de um pulso propagante em uma fibra. A NLSE é utilizada desde a década de 70, em uma versão mais simplificada envolvendo apenas um termo de dispersão de segunda ordem, responsável pela dispersão da velocidade de grupo, e um termo não linear que descreve a automodulação de fase [18]. Contudo, a NLSE evoluiu de acordo com a necessidade de modelar efeitos de mais alta ordem como, por exemplo, o efeito Raman [19, 20], autoinclinação [21, 22] e não linearidade de ordem quíntica [23, 4].

A literatura apresenta várias deduções da NLSE seja no domínio do tempo ou no domínio da freqüência. A dedução no domínio da freqüência pode ser encontrada em [24, 25], enquanto uma dedução mais detalhada no domínio do tempo pode ser encontrada em [26]. Assim, consideraremos a equação não linear de Schrödinger (*Higher-Order Nonlinear Schrödinger* - HNLS), que descreve a propagação de luz em fibras ópticas com efeitos de não linearidade e dispersão de altas ordens, é escrita por:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + i\frac{\beta_4}{24}\frac{\partial^4 A}{\partial T^4} + i\gamma\left[|A|^2 A + is\frac{\partial\left(|A|^2 A\right)}{\partial T} - T_R A\frac{\partial\left(|A|^2\right)}{\partial T}\right]. \tag{2.1}$$

Na Eq. (2.1) $A(z,T)$ representa o envelope de variação lenta do campo elétrico incidente; T é o tempo medido em um referencial que se move com o pulso com velocidade de grupo v_g, mediante a transformação $T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z$; os termos β_i estão associados ao efeito de dispersão de ordem i; o termo γ descreve um efeito denominado automodulação de fase; o parâmetro s é responsável pelo efeito de autoinclinação e o último termo T_R caracteriza o espalhamento Raman. Estes parâmetros associados aos temos dispersivos e não lineares serão descritos nas próximas seções. A dedução da Eq. (2.1) é apresentada no Apêndice A.

Para muitos materiais, os termos de não linearidade presentes Eq. (2.1), surgem da expansão do índice de refração, escrito por $n = n_0 + n_2|E|^2 + \ldots$. Aqui n_0 é o índice de refração linear, n_2 e n_4 são os índices de refração não lineares que tem origem na susceptibilidade de terceira e quinta ordem respectivamente. Essa expansão fornece a taxa à que o índice de refração aumenta (ou diminui dependendo dos sinais de n_{2j}) com o aumento da intensidade. Esse efeito é chamado de efeito Kerr óptico, ou ainda, não linearidade tipo Kerr. Entretanto, quando o material é submetido a radiação de intensidade mais elevados a mudança no índice de refração começa a saturar, haja vista que todo material possui um limite de mudança no índice de refração que pode ser induzido opticamente. Nesses casos, o modelo de não linearidade do tipo Kerr passa a falhar. Vários sistemas não lineares com resposta saturável tem sido investigados, tais como guias de onda [27, 28], fibras ópticas [29, 30], metamateriais de índice de refração negativo [31], fibras ópticas com dispersão de ordem superior [21, 32, 33], acopladores com índice de refração positivo-negativo [34], fibras de vidro dopado com semicondutor [35], fibras de cristal fotônico com núcleo líquido [36] entre outros.

Com o objetivo de levar em conta este efeito de saturação nos termos de não linearidade da Eq. (2.1), descreveremos a mudança no índice de refração substituindo $n = n_0 + n_2|E|^2 + \ldots$ por

$$n(|E|) = n_0 + n_2 f\left(|E|^2\right) + n_4 f\left(|E|^4\right) + \ldots, \tag{2.2}$$

em que $f\left(|E|^2\right)$ e $f\left(|E|^4\right)$ representam modelos fenomenológicos que descrevem a não linearidade com resposta saturável.

2.2 Efeitos Não Lineares em Fibras Ópticas

2.2.1 Efeitos de Dispersão

A dispersão é um fenômeno associado ao alargamento temporal de pulso luminoso que viaja ao longo da fibra óptica que, consequentemente, limita a capacidade de transmissão de informação na fibra. Em fibras ópticas, os efeitos dispersivos são classificados em dois tipos: dispersão modal e dispersão cromática. A maior fonte de atraso nas fibras multimodo é a dispersão modal. Aqui, vamos restringir nossa discussão em fibras de monomodo, que são os principais tipos de fibras utilizadas em sistemas de comunicação atualmente. Nestas fibras, a dependência do índice de refração do material com a frequência da luz guiada, está por trás dois tipos diferentes de dispersão denominados como dispersão material e dispersão de guia de onda. Coletivamente, a soma desses efeitos é conhecida como dispersão cromática.

Dispersão Cromática

Quando uma onda eletromagnética interage com os elétrons ligados de um dielétrico, a resposta do meio, de um modo geral, depende da frequência óptica ω. Esta propriedade é a conhecida dispersão cromática e manifesta-se através da dependência do índice de refração com a frequência da onda propagante $n(\omega)$.

A origem da dispersão cromática relaciona-se com as frequências de ressonância características nas quais o meio absorve a radiação eletromagnética através das oscilações dos elétrons ligados. Para frequências afastadas das frequências de ressonância do meio, o índice de refração é bem aproximado pela equação de Sellmeier

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega}, \tag{2.3}$$

em que ω_j é uma frequência de ressonância do meio e B_j é o peso correspondente dessa ressonância. Os coeficientes de Sellmeier B_j e ω_j são obtidos pelo ajuste das curvas de dispersão aos resultados experimentais e, em geral, utiliza-se $m = 3$ [1].

Pode-se quantificar os efeitos da dispersão nas fibras expandindo-se $\beta(\omega)$ em série de Taylor em torno da frequência portadora ω_0 na qual o espectro do pulso esteja centrado, de modo que:

$$\beta(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{d^m}{d\omega} \beta(\omega) \right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^m. \tag{2.4}$$

Podemos relacionar os parâmetros β_m com o índice de refração e suas derivadas, de modo que

$$\beta_1 = \frac{d}{d\omega}\left[n(\omega)\frac{\omega}{c} \right] = \frac{1}{c}\left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right). \tag{2.5}$$

Como $\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega}$, temos

$$\beta_2 = \frac{1}{c}\left(\frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n}{d\omega^2} \right). \tag{2.6}$$

Por análise dimensional vemos que $\beta_1 \rightarrow [LT^{-1}]^{-1}$, de modo que

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c}, \tag{2.7}$$

em que n_g é o índice de refração do grupo e v_g é a velocidade de grupo. Com a mesma análise vemos que $\beta_2 \rightarrow [LT^{-2}]^{-1}$, desta forma observa-se que o envelope do pulso óptico se move com velocidade v_g enquanto essa velocidade varia de acordo com β_2. Este fenômeno é conhecido como dispersão da velocidade de grupo (*Group-Velocity Dispersion* - GVD) e β_2 é o parâmetro que caracteriza a GVD. Um outro parâmetro comumente usado na literatura de fibras ópticas no lugar de β_2 é o parâmetro D, que está relacionado com β_1 e β_2 por

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\beta_2. \tag{2.8}$$

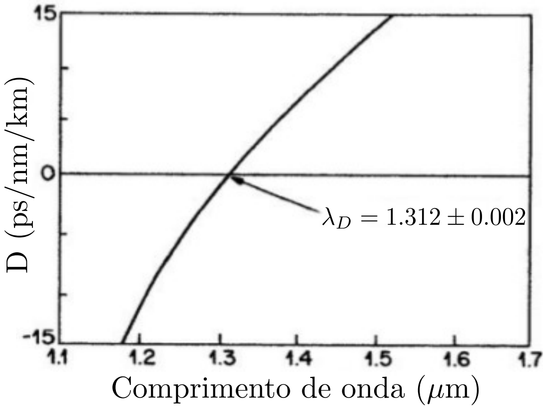

Figura 2.1: Medida do parâmetro de dispersão D com o comprimento de onda para fibras monomodo convencionais. Figura retirada da Ref. [1].

A Fig. 2.1 mostra a curva típica de D em função do comprimento de onda para uma fibra óptica convencional. O comprimento de onda para o qual β_2 se anula é chamado de comprimento de onda do zero de dispersão da fibra, λ_D. O intervalo de frequência para a qual $\beta_2 > 0$ ($D < 0$) denomina-se de regime de dispersão normal de propagação e, por outro lado, quando $\beta_2 < 0$ o regime de dispersão é denominado de anômalo[1]

Uma característica interessante da dispersão de guia de onda é que, dependendo da diferença relativa entre os índices de refração do núcleo e do revestimento da fibra, ela pode contribuir com um deslocamento para comprimentos de onda mais alto que λ_D. Este fato pode ser utilizado para deslocar o comprimento de onda de dispersão de zero para a vizinhança de 1,55 μm, que corresponde a uma janela óptica em que as perdas são $\approx$ 0,2 dB/km. Por este motivo as fibras de dispersão deslocada têm encontrado amplas aplicações em sistemas de

[1]Em fibras de vidro padrão valor de $\beta_2 \sim 50$ ps^2/km na região do visível e torna-se próximo de -20 ps^2/km para $\lambda_D \sim 1,5$ μm.

comunicação óptica. Neste trabalho consideraremos desprezíveis os efeitos de perdas em fibras ópticas.

Alargamento Temporal do Pulso Induzido pela Dispersão

Para estudar o efeito isolado da DVG sobre os pulsos ópticos, vamos tratar o meio como sendo linear ($\gamma = 0$) e sem dispersão de ordem superior ($\beta_3 = \beta_4 = 0$). Deste modo que a Eq. (2.1) fica reduzida para seguinte equação diferencial parcial linear

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}. \tag{2.9}$$

A Eq. (2.9) pode ser resolvida usando o método da transformada de Fourier. Se $\widetilde{A}(z, \omega)$ é a transformada de $A(z, T)$, de forma que

$$A(z,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}(z,\omega)e^{-i\omega T}d\omega, \tag{2.10}$$

obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2\omega^2\widetilde{A}, \tag{2.11}$$

cuja solução é

$$\widetilde{A}(z,\omega) = \widetilde{A}(0,\omega)e^{\frac{i}{2}\beta_2\omega^2 z}. \tag{2.12}$$

Substituindo a equação (2.12) na equação (2.10), obtemos

$$A(z,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}(0,\omega)e^{(\frac{i}{2}\beta_2\omega^2 z - i\omega T)}d\omega, \tag{2.13}$$

em que $\widetilde{A}(0, \omega)$ é a transformada de Fourier do campo incidente em $z = 0$ e é obtido usando

$$\widetilde{A}(0,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(0,T)e^{i\omega T}dT. \tag{2.14}$$

As Eqs. (2.13) e (2.14) podem ser utilizadas para pulsos de qualquer formato. Como exemplo do alargamento de pulso devido a DVG, vamos considerar um campo incidente correspondente a uma Gaussiana, de forma que

$$A(0,T) = e^{-\frac{T^2}{2\,T_0{}^2}}, \tag{2.15}$$

em que T_0 largura temporal inicial do pulso.

Substituindo a equação (2.15) em (2.14) e (2.13) e efetuando as integrações, obtemos

$$A(z,T) = \frac{T_0\, e^{-\frac{T^2}{2\,({T_0}^2 - i\beta_2\, z)}}}{\sqrt{{T_0}^2 - i\beta_2\, z}}. \tag{2.16}$$

Introduzindo convenientemente a variável L_D, que representa o comprimento de dispersão, dado por

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}, \tag{2.17}$$

e fazendo $t = \frac{T}{T_0}$ é possível entender o comportamento do módulo quadrado da envoltória $|A(z,t)|^2$ ao se propagar por uma distância z. De fato, se o comprimento L da fibra for tal que $L \sim L_D$, o efeito de dispersão torna-se dominante na evolução do pulso.

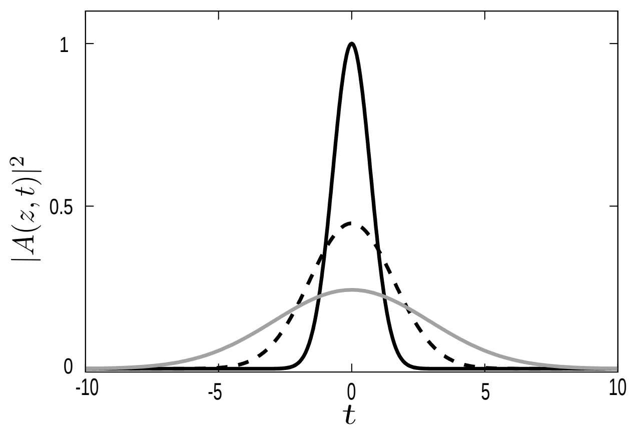

Figura 2.2: Gráfico de $|A(z,t)|^2$ em função do tempo t para um pulso Gaussiano . considerando as distâncias: $z = 0$ (linha contínua), $z = 2L_D$ (linha tracejada) e $z = 4L_D$ (linha contínua cinza).

Com base na Fig. 2.2, podemos verificar que, à medida que o pulso se propaga, exclusivamente sob o regime de dispersão de segunda ordem, ele sofrerá um alargamento temporal e uma diminuição em sua amplitude. Observamos que o pulso se alarga temporalmente, à medida que se propaga ao longo da fibra.

Esse alargamento devido a DVG pode ser compreendido pelo fato de que diferentes frequências de um pulso viajam com velocidades ligeiramente diferentes ao longo da fibra, conforme é mostrado esquematicamente na Fig. 2.3. Na Fig. 2.3(a) observa-se que o pulso óptico

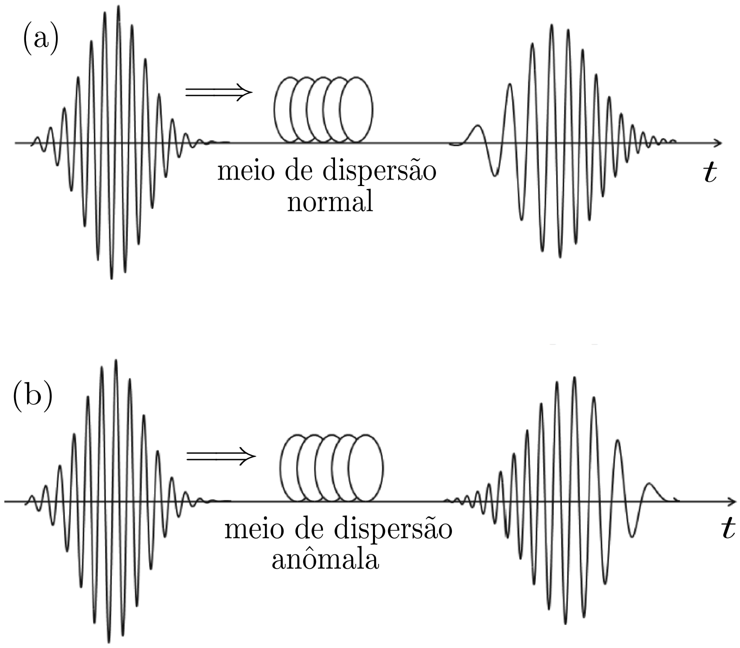

Figura 2.3: Esquma que mostra um pulso de luz, apenas modulado pela envoltória de variação lenta, se propagando em um meio (a) de dispersão normal ($\beta_2 > 0$) e (b) de dispersão anômala ($\beta_2 < 0$).

incide em um meio com dispersão normal ($\beta_2 > 0$). Nota-se que as componentes vermelhas viajam com velocidade maior e se deslocam para a parte dianteira do pulso (desvio para o vermelho). Enquanto as componentes azuis, que viajam com velocidade menor, se deslocam para a parte traseira do pulso (desvio para o azul). Em contrapartida, de acordo com Fig. 2.3(b), se o pulso experimenta um meio com regime de dispersão anômala ($\beta_2 < 0$), as componentes vermelhas viajam com velocidade menor que as azuis. Portanto qualquer atraso temporal na chegada do pulso das diferentes componentes espectrais resulta no alargamento do pulso.

2.2.2 Automodulação de Fase

A automodulação de fase (*Self-Phase Modulation* - SPM) é um fenômeno com origem na dependência entre o índice de refração de um meio não linear e a intensidade do campo elétrico aplicado num dado instante t. Na SPM, pulsos de luz ao interagirem com o meio material, fazem com que o índice de refração passe a ser dependente da intensidade e, consequentemente, modulam a fase, causando um alargamento na banda de frequências sem afetar a função evelope.

Em outras palavras, a SPM é um efeito não-linear instantâneo que promove o agrupamento das componentes de frequência do pulso, conforme mostrado esquematicamente pela Fig. 2.4.

A SPM depende principalmente de dois parâmetros: o coeficiente não linear da fibra (γ) e a potência do pulso incidente (P_0). Esta dependência é representada pelo comprimento não linear (que é a distância de propagação na qual a ação do SPM torna-se relevante), definido por

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}. \tag{2.18}$$

Para verificar o efeito da SPM isoladamente, em uma fibra sem perdas, são desconsiderados todos os demais termos da NLSE, que se reduz à seguinte equação

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma |A|^2 A. \tag{2.19}$$

A equação (2.19) possui solução analítica, expressa por [2]

$$A(z,t) = A(0,t)e^{i\gamma|A(0,t)|^2 z}. \tag{2.20}$$

Fica claro na Eq. (2.20) que a SPM sozinha não altera o formato temporal do pulso, mas induz um deslocamento de fase $\phi_{NL}(z,t) = \gamma|A(0,t)|^2 z$. O alargamento induzido pela SPM é consequência da dependência temporal de $\phi_{NL}(z,t)$, uma vez que, quando a fase varia no tempo, a frequência óptica instantânea difere do seu valor central ao longo do pulso. Essa diferença é dada por [1]

$$\delta\omega(t) = -\frac{\partial \phi_{NL}}{\partial t} = -\gamma z \frac{\partial |A(0,t)|^2}{\partial t}. \tag{2.21}$$

Assim, a automodulação de fase pode ser entendida como o efeito físico que modifica o índice de refração do material por onde a luz se propaga, o que resulta num aumento da largura de banda de frequências. Por meio da Fig. 2.4 é possível verificar esquematicamente o que ocorre com um pulso óptico ao se propagar em um meio com não linearidade tipo Kerr.

Como foi mencionado anteriormente, um pulso com uma intensidade de pico muito alta tende a aumentar momentaneamente o índice de refração do meio material por onde se

[2] A partir deste ponto, para facilitar a notação, o instante t corresponde ao tempo medido no referencial que viaja junto com pulso.

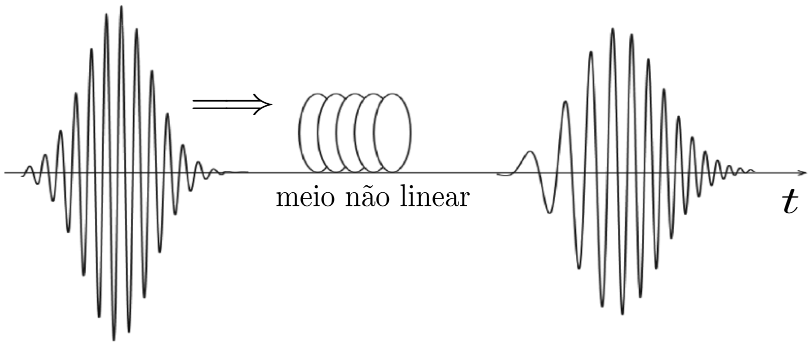

Figura 2.4: Pulso óptico com alta intensidade ao se propagar por um meio material não linear do tipo Kerr.

propaga em um fator proporcional a essa intensidade instantânea. Assim, de acordo com a Fig. 2.4, à medida que um pulso de luz se propaga em um meio não linear, observamos que na borda dianteira do pulso as posições relativas ao pico e vales tornam-se cada vez mais espaçadas, o que implica em uma redução na frequência. Na borda posterior do pulso, ocorre o contrário. Dessa forma, a borda dianteira sofre um desvio de frequência para o vermelho e o borda traseira um desvio para o azul.

Novas características da propagação do pulso surgem de uma ação conjunta entre GVD e SPM. A combinação dos efeitos de GVD e SPM na propagação de um pulso ocorrem quando as escalas de comprimento L_D e L_{NL} tem a mesma ordem de grandeza e tornam-se comparáveis com o comprimento L da fibra. No regime de dispersão anômalo da fibra ($\beta_2 < 0$), os efeitos da GVD tendem a compensar os efeitos da SPM resultando em um dos mais impressionantes fenômenos da óptica não linear: os sólitons. Estes tipos de pulsos são estáveis e preservam o formato original durante a propagação, ou recuperam o formato original periodicamente ao longo da propagação. A propagação de sólitons por fibras constitui uma das áreas de grande interesse em pesquisa, sobretudo em comunicações ópticas.

O parâmetro não linear γ é definido por

$$\gamma = \frac{n_2\omega_0}{cA_{ef}}, \tag{2.22}$$

em que A_{ef} é a área efetiva que depende das características físicas da fibra. A determinação da área efetiva é fundamental no controle dos efeitos não-lineares, uma vez que o coeficiente não-linear da fibra γ é inversamente proporcional à área efetiva. Os valores típicos de A_{ef} podem variar de 1 a 100 μm^2 para comprimentos de onda 1,5 μm, para a sílica por exemplo. Isso resulta que o parâmetro γ possui valores que variam de 1-100 W^{-1}/km se considerado um índice de refração não linear em torno de 2,6$\times$10^{-20} m^2/W [1].

2.2.3 Efeito de Autoinclinação

O segundo termo não linear da Eq. (2.1), proporcional a $\frac{\partial\left(|A|^2A\right)}{\partial t}$, governa um importante efeito não linear, conhecido como autoinclinação. Sua origem física está relacionada com a dependência entre a velocidade de grupo e a intensidade dos pulsos que se propagam pelas fibras. Os efeitos de autoinclinação de pulsos de luz devido à propagação em um meio com um índice de refração dependente da intensidade foram investigados pela primeira vez em 1967 [37]; logo em seguida o efeito de autoinclinação foi estudado também em meios líquidos não lineares [38] e pouco mais de uma década depois em fibras ópticas [39, 40]. Recentemente foi mostrado que, em guias de onda de cristais fotônicos, o efeito autoinclinação tem magnitude bem maior se comparado com fibras ópticas convencionais e pode afetar fortemente a dinâmica não linear do pulso [41].

Nos casos em que a dispersão, as perdas e o efeito Raman podem ser desprezadas, podemos estudar o efeito isolado de autoinclinação. Desse modo, a Eq. (2.1) pode ser escrita por:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + s\frac{\partial\left(|A|^2A\right)}{\partial t} = i\gamma|A|^2A. \tag{2.23}$$

Escrevendo a solução de (2.23) como $A(z,t) = \sqrt{I}e^{i\phi}$ e separando as partes real e imaginária, podemos obter a seguinte equação para a amplitude I da envoltória $A(z,t)$:

$$\frac{\partial I}{\partial z} + 3sI\frac{\partial I}{\partial t} = 0. \tag{2.24}$$

A Eq. (2.24) pode ser resolvida pelo método das características e a solução pode ser dada por

$$I(z,t) = f\left(t - 3sIz\right), \tag{2.25}$$

em que usamos a condição inicial $I(0,t) = f(t)$ e $f(t)$ descreve a forma do pulso em $z = 0$. Como um exemplo, vamos considerar o caso de um pulso Gaussiano para o qual $I(0,t) = f(t) = e^{-t^2}$. A partir da Eq. (2.25), a forma do pulso ao longo da distância z fica expressa por:

$$I(z,t) = e^{-(t-3sIz)^2}. \tag{2.26}$$

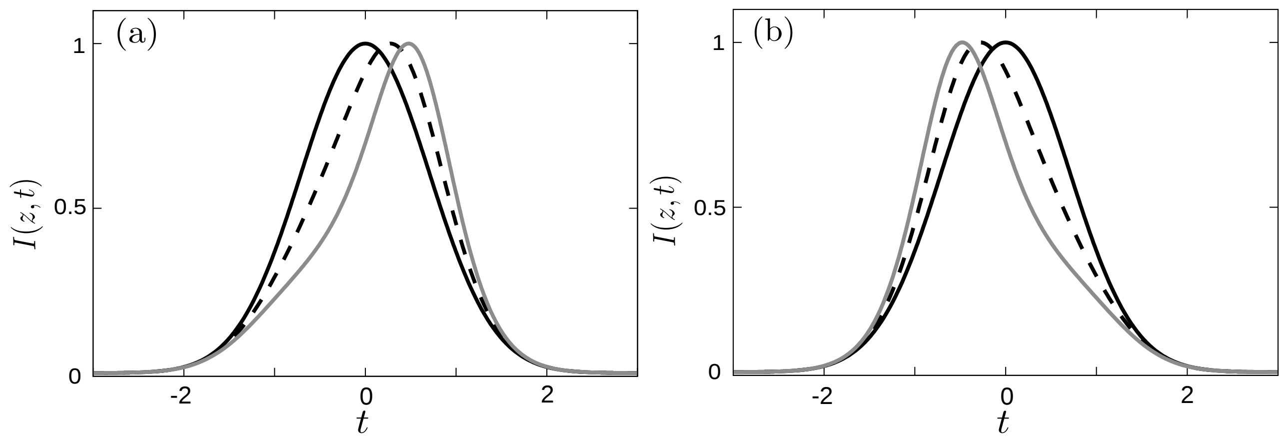

Figura 2.5: Efeito autoinclinação sobre um pulso Gaussiano para diferentes posições: $z = 0$ (linha contínua), $z = 10L_{NL}$ (linha tracejada) e $z = 20L_{NL}$ (linha cinza) para (a) $s = 0.01$ e (b) $s = -0.01$.

A Fig. 2.5 apresenta o formato do pulso Gaussiano em função da distância z e do parâmetro s que caracteriza o efeito autoinclinação. É possível observar que à medida que o pulso se propaga, ele torna-se assimétrico, com o seu pico se deslocando para a borda traseira do pulso, se $s > 0$, ou para a borda dianteira se $s < 0$. Assim, a velocidade de grupo do pulso é dependente da intensidade, de modo que o pico se move a uma velocidade diferente das bordas dianteira e traseira.

2.2.4 Espalhamento Raman

O efeito Raman é um processo não linear importante que pode limitar a performance de sistemas ópticos e foi descoberto em 1928 por Chandrasekhara Venkata Raman (1888-1970).

O espalhamento Raman ocorre em função das interações entre a luz e moléculas que constituem o meio material na qual ela se propaga. A influência do efeito Raman na obtenção de pulsos solitônicos foi observada experimentalmente em 1985 [42]. Com a observação de um outro efeito, denominado deslocamento de frequência de sólitons obtido experimentalmente em 1986 [43], o efeito Raman passou a ser bastante estudado.

Do ponto de vista quântico, durante a passagem da luz pelo dielétrico, parte da energia $\hbar\nu$ do fóton incidente no material é absorvida por uma molécula, fazendo-a vibrar, criando assim um fônon de energia $\hbar\nu_{fonon}$. A energia restante dá origem a um fóton espalhado com frequência menor do que a frequência inicial, satisfazendo à equação

$$\hbar\nu' = \hbar\nu - \hbar\nu_{fonon}. \tag{2.27}$$

As frequências geradas pelo espalhamento, com uma frequência menor que o fóton incidente, são conhecidos como frequências de Stokes. Caso a molécula esteja previamente excitada, encontrando-se portanto com uma energia superior ao fóton incidente, as frequências geradas pelo espalhamento serão maiores que as dos fótons incidentes. Estas frequências são denominadas frequências Anti-Stokes.

Ao contrário dos efeitos SPM e autoinclinação, que são efeitos não lineares instantâneos, o efeito Raman é um efeito não linear atrasado. Matematicamente, este efeito é modelado através da função resposta causal $R(t)$, conhecida como função resposta Raman. A função resposta $R(t)$ deve incluir tanto as contribuições eletrônicas quanto nucleares. Considerando que a contribuição electrônica é quase instantânea, a forma funcional de $R(t)$ pode ser escrita como [1]

$$R(t) = (1 - f_R)\delta(t - t_e) + f_R h_R(t), \tag{2.28}$$

em que t_e corresponde ao atraso na resposta eletrônica ($t_e < 1$ fs) e f_R representa a fração da contribuição da função resposta Raman. A forma da função $h_R(t)$ é definida pelas vibrações das moléculas de sílica, induzidas pelo campo óptico, e não é determinada facilmente, devido a natureza amorfa das fibras de vidro. Um maneira indireta de obter $h_R(t)$, é partir do espectro medido experimentalmente do ganho de Raman de fibras de sílica [2], mostrado na Fig. 2.6.

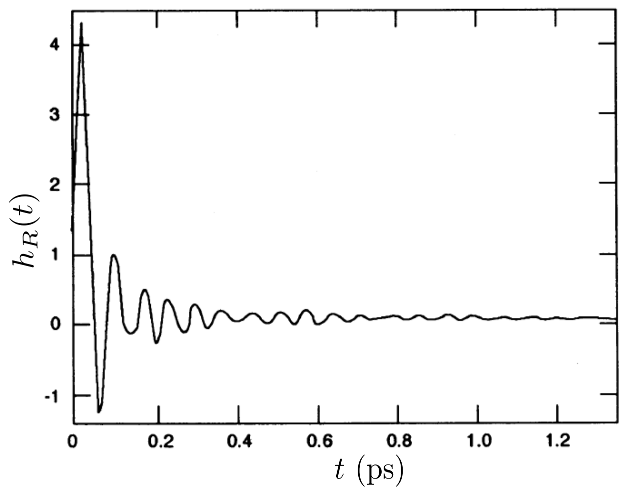

Figura 2.6: A variação temporal da função resposta Raman $h_R(t)$, obtida usando o espectro de Raman de ganho de fibras de sílica. Figura obtida na Ref. [2].

Tentativas mais recentes forma feitas no intuito de determinar mais precisamente uma forma analítica da função de resposta de Raman $h_R(t)$. De acordo com [44], a função resposta $h_R(t)$ que melhor concorda com os resultados experimentais, é dada por

$$h_R(t) = (f_a + f_c)h_a(t) + f_b h_b(t), \tag{2.29}$$

em que as funções $h_a(t)$ e $h_b(t)$ são definidas por

$$h_a(t) = \left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\tau_1}\right), \tag{2.30}$$

$$h_b(t) = \left(\frac{2\tau_3 - t}{\tau_3^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_3}\right), \tag{2.31}$$

em que τ_1, τ_2, τ_3, f_a, f_b e f_c são parâmetros determinados experimentalmente que regulam a resposta de Raman.

O parâmetro T_R que representa o espalhamento Raman na Eq. (2.1) está relacionado com função resposta $R(t)$ da seguinte forma:

$$T_R = f_R \int_0^{+\infty} t h_R(t) dt, \tag{2.32}$$

em que seu valor, obtido experimentalmente [1] para comprimento de onda em torno de 1,5 μm, corresponde a $T_R = 3$ fs para fibras monomodo convencionais.

2.3 Instabilidade Modulacional

A interação entre os fenômenos de dispersão e não linearidade promove um efeito de muito interessante, denominado instabilidade modulacional (*Modulation Instability* - MI). A MI está associada com um crescimento exponencial de uma pequena perturbação, que ocorre em determinadas condições durante a sua propagação, devido à compensação entre os efeitos de dispersão e não linearidade, que pode quebrar uma onda contínua em um trem de sólitons.

Em 1967, Ostrovskii previu a possibilidade de MI em óptica não linear [45] que mais tarde foi explicada em detalhes por Hasegawa em 1973 no contexto de fibras ópticas [9]. A partir destes trabalhos pioneiros, o estudo da MI tornou-se intenso no campo da óptica não linear. Este fenômeno tem sido observado e / ou prevista em vários sistemas não lineares, tais como ondas de plasma [18, 46, 47, **?**], fibras ópticas [48, 49], condensados de Bose-Einstein [50, 51, 52, 53], cristais líquidos [54], ondas do mar [55, 56] dentre outros contextos.

A MI é regida pela NLSE, que inerentemente admite a formação sólitons como um resultado do equilíbrio entre a dispersão anômala da velocidade de grupo e não linearidade tipo Kerr, tais como os apresentados em [57, 58]. No entanto, a MI pode ser estendida também para o regime dispersão normal da velocidade de grupo, para alguns casos especiais, tal como a presença de dispersões de quarta ordem ou ordem superior [59, 32, 33]. Isso reforça a estreita relação entre MI e a formação de sólitons, de modo que o estudo das condições de instabilidade tornam-se fundamentais para caracterizar a formação de soluções solitônicas em um dado sistema.

Para ilustrar um exemplo de estudo da MI no contexto de fibras ópticas, vamos considerar que a equação de propagação para uma onda contínua no interior de uma fibra contenha somente um termo de dispersão e um não linear, descrita pela equação não linear de Schrödinger padrão:

$$i\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \gamma|A|^2 A, \tag{2.33}$$

em que $A = A(z,t)$ descreve a amplitude do envelope do campo elétrico.

Como vimos anteriormente, quando os efeitos de GVD e SPM apresentam contribuições de mesma ordem de grandeza, é possível um sóliton óptico seja gerado e possa se propagar dentro da fibra óptica, sem sofrer alterações significativas em seu formato.

A solução estacionária da Eq.(2.33) é dada por

$$A(z) = \sqrt{P_0}e^{i\phi_{NL}}, \tag{2.34}$$

em que $\phi_{NL} = \gamma P_0 z$ é o incremento de fase não linear induzido pela SPM e P_0 é a potência do feixe incidente. Uma pergunta pertinente agora é: será esta solução estável quando sujeitas a pequenas perturbações que possam haver no sistema? Para responder a esta pergunta, devemos fazer a análise de estabilidade para verificar se a solução estacionária dada pela equação (2.34) é estável com relação a pequenas perturbações.

2.3.1 Análise da Estabilidade Linear

Para a proceder com a análise de estabilidade linear, vamos considerar uma perturbação $a(z,t)$, tal que $|a(z,t)|^2 \ll \sqrt{P_0}$, de modo que a solução seja

$$A(z,t) = [\sqrt{P_0} + a(z,t)]e^{i\phi_{NL}}, \tag{2.35}$$

e vamos estudar a evolução temporal dessa pequena perturbação. Substituindo a Eq. (2.35) em (2.33) e desprezando os termos proporcionais a $|a(z,t)|^2$, temos

$$i\frac{\partial a(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 a(z,t)}{\partial t^2} - \gamma\left(a(z,t) + a(z,t)^*\right)P_0. \tag{2.36}$$

A solução geral da Eq. (2.36) pode ser escrita por

$$a(z,t) = a_1 e^{i(Kz-\Omega t)} + a_2 e^{-i(Kz-\Omega t)}, \tag{2.37}$$

em que a_1 e a_2 são constantes reais, K é o vetor de onda e Ω representa a frequência da solução perturbada. Substituindo a Eq. (4.6) em (2.36) e agrupando os termos em função das exponenciais $e^{i(Kz-\Omega t)}$ e $e^{-i(Kz-\Omega t)}$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_1\left[-K+\frac{\beta_2\Omega^2}{2}+\gamma P_0\right]+a_2\gamma P_0=0 \\ \\ a_1\gamma P_0+a_2\left[K+\frac{\beta_2\Omega^2}{2}+\gamma P_0\right]=0. \end{cases} \tag{2.38}$$

O sistema homogêneo dado por (2.38) possui solução não trivial quando satifizer a relação de dispersão

$$K^2=\frac{\Omega^2\beta_2^2}{4}\left(\Omega^2+\frac{4\gamma P_0}{\beta_2}\right), \tag{2.39}$$

que pode ser reescrita como

$$K=\pm\frac{1}{2}|\Omega\beta_2|(\Omega^2+sgn(\beta_2)\Omega_c^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.40}$$

em que $\Omega_c^2=\frac{4\gamma P_0}{|\beta_2|}=\frac{4}{|\beta_2|L_{NL}}$ e $sgn(\beta_2)$ é o sinal da GVD.

A relação de dispersão dada pela Eq. (2.40) revela que a estabilidade da solução estacionária depende se a luz experimenta a dispersão da velocidade de grupo normal ($\beta_2>0$) ou anômala ($\beta_2<0$) dentro da fibra. No caso de dispersão normal, o número de onda $K\in\Re$, $\forall\ \Omega$, portanto a solução estacionária é estável para pequenas perturbações. Por outro lado, no caso de dispersão anômala, K se torna complexo para $|\Omega|<\Omega_c$ e a perturbação $a(z,t)$ cresce exponencialmente com z. Esta instabilidade é denominada instabilidade modulacional pois corresponde a uma modulação temporal da solução estacionária e a transforma em um trem de pulsos tipo sólitons. A MI é um fenômeno que tem sido amplamente estudado, sobretudo em fibras monomodo padrão [48, 60]. No início, acreditava-se que o MI ocorre apenas no regime de dispersão anômala em materiais convencionais [1]. Contudo, posteriormente vários trabalhos mostraram que MI pode também ocorrer em regime de dispersão normal, se dispersão de quarta ordem (*Fourth-Order Dispersion* - FOD) for considerada [61], ou ainda, quando existir dois ou mais campos ópticos copropagantes no interior da fibra [62, 63].

Considerando o fato que a parte imaginária de K mostra que a amplitude da propagação cresce exponencialmente com a distância z percorrida na fibra, podemos definir o espectro de ganho da instabilidade modulacional por $g(\Omega)$ da seguinte forma

$$e^{g(\Omega)} = \frac{|a(z,0)|}{|a(0,0)|}. \tag{2.41}$$

Como $|a(z,0)| = |a_1 e^{iKz} + a_2 e^{-iKz}|$ e $|a(0,0)| = |a_1 + a_2|$ então

$$\frac{|a(z,0)|}{|a(0,0)|} = \frac{|a_1 e^{iKz} + a_2 e^{-iKz}|}{|a_1 + a_2|} \simeq \frac{|a_1 + a_2| e^{|\Im m K| z}}{|a_1 + a_2|}, \tag{2.42}$$

portanto o espectro de ganho da instabilidade modulacional fica dado por

$$g(\Omega) = |\Im m(k)|. \tag{2.43}$$

2.3.2 Conclusões

Este capítulo foi dedicado a apresentar a equação de propagação de luz em fibras ópticas e discutir os efeitos dispersivos e não lineares presentes nesta equação.

Inicialmente vimos que a dispersão é um efeito que ocorre em todas as fibras, pois é consequência da composição da matéria prima da fibra. Como cada componente da fonte luminosa viaja com velocidade diferente, os tempos de chegada de cada modo propagante na fibra são diferentes. Isso resulta em um alargamento temporal do sinal óptico emitido no início da fibra, conforme mostra a Fig. 2.2. Esse alargamento limita a banda passante e, consequentemente, a capacidade de transmissão de informação na fibra.

Os efeitos não lineares de ordem cúbica podem ser divididos em duas categorias. A primeira categoria de efeitos não lineares provém de uma dependência com as variações de intensidade da luz e índice de refração na fibra de sílica. Neste caso, os efeitos considerados neste trabalho são automodulação de fase e autoinclinação. A segunda abrange os processos não lineares de espalhamentos inelásticos, devido à interação da luz com fônons (vibrações moleculares) no meio da sílica, que neste trabalho está representado pelo espalhamento Raman.

O efeito de alargamento temporal do pulso causados pela dispersão material, pode ser compensado pelo efeito dos fenômenos não lineares. A compensação dos efeitos dispersivos com os efeitos de não linearidade do meio material é responsável pela geração de ondas que se propagam por longas distâncias sem sofrer alterações significativas em seu perfil. Tais ondas são denominadas sólitons.

Matematicamente, os sólitons representam soluções de equações (ou de um sistema de equações) diferenciais não lineares integráveis. A equação de Schrödinger não linear pertence a esta classe de equações integráveis. Verificamos que a formação de trens de sólitons em fibras ópticas está relacionada com a instabilidade modulacional. Vimos que uma maneira de estudar a geração de pulsos solitônicos em fibras é através de uma função que representa o ganho da instabilidade modulacional, dada pela Eq. (2.43).

Nos capítulos seguintes vamos determinar o espectro de ganho da MI em função dos parâmetros que caracterizam os termos de dispersão e não linearidade, de modo a mapear faixas de frequências em que haja formação de trens de pulsos solitônicos, tanto em fibras ópticas com alta não linearidade quanto em acopladores direcionais.

Capítulo 3

Equações Não Lineares de Schrödinger Acopladas

Acopladores de fibra, também conhecidos como acopladores direcionais, são, na sua versão mais simples, constituídos de duas fibras ópticas paralelas separadas por uma determinada distância. Embora a maioria das aplicações de acopladores de fibra utilizem suas características lineares, em 1982 Jensen sugeriu, pela primeira vez, o modelo de uma acoplador não linear [64]. O modelo consiste em duas guias de onda, bastante próximas, que pode permitir a interação entre elas, de modo que ocorra a redistribuição das ondas entre os canais, ou seja, no guia dielétrico óptico não existe uma superfície externa onde o campo elétrico se anula. Portanto, semelhante ao caso dos guias metálicos, o campo guiado deve ser decrescente ao se afastar do centro e tender a zero na região externa ao guia. O campo nessa região é chamado de evanescente. Com a proximidade entre as guias, o campo evanescente dos modos de uma das fibras excita modos de propagação na outra fibra.

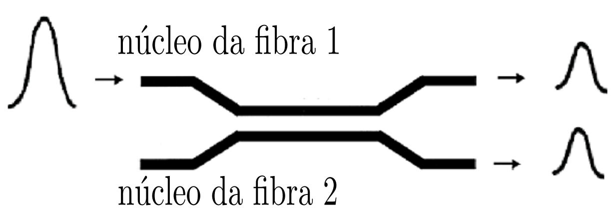

Figura 3.1: Esquema de funcionamento de uma acoplador não linear direcional. Figura retirada da Ref. [3].

Para fibras convencionais temos algumas diversidades interessantes de acopladores: direcionais, contradirecionais, simétricos e assimétricos. Se o sentido do campo que for chaveado pelo acoplador for o mesmo do campo incidente dizemos que esse acoplador é direcional ou copropagante. Se o sentido for contrário falamos em um acoplador contrapropagante. Os acopladores são simétricos quando seus núcleos apresentam raios e índices de refração iguais entre si. Se existir alguma diferença entre os núcleos (seja por diâmetro ou índice de refração) este acoplador será assimétrico.

Acopladores direcionais não lineares (*Couplers Nonlinear Directional* - CND) vem despertando um grande interesse principalmente por suas aplicações em optoeletrônica, telecomunicações, processamento de sinal incluindo comutação óptica e operação lógica [65, 66, 3]. Existem também propostas de se utilizar acopladores direcionais de cristais fotônicos para a transmissão de sólitons [67].

Ao longo deste capítulo investigaremos a influência dos efeitos da autoinclinação e espalhamento Raman sobre o espectro da MI em equações não lineares de Schrödinger acopladas, que descrevem acopladores contradirecionais. Consideraremos, em ambos os casos, dois modelos fenomenológicos que descrevem a não linearidade saturável. Como caso particular do nosso modelo, na ausência de saturação do sistema, os resultados devem ser semelhantes aos obtidos em [21] para os efeitos da autoinclinação e espalhamento Raman sobre MI.

3.1 Modelo Teórico

O modelo que descreve a propagação de feixes ópticos intensos em acopladores contra direcionais é dado por um par de equações não lineares de Schrödinger acopladas (*Coupled Nonlinear Schrödinger Equations* - CNLSE) com a seguinte forma [21, 29]:

$$i\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\beta_{21}}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \kappa_{12} u_2 e^{-i\delta z} + \gamma_1 \left[|u_1|^2 u_1 + i s_1 \frac{\partial(|u_1|^2 u_1)}{\partial t} - T_{R1} u_1 \frac{\partial(|u_1|^2)}{\partial t} \right] = 0, \quad (3.1)$$

$$i\sigma_2\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\beta_{22}}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \kappa_{21}u_1e^{i\delta z} + \gamma_2\left[|u_2|^2u_2 + is_2\frac{\partial(|u_2|^2u_2)}{\partial t} - T_{R2}u_2\frac{\partial(|u_2|^2)}{\partial t}\right] = 0, \quad (3.2)$$

em que σ_1 e σ_2 indicam os sinais do índice de refração do material do canal-1 e canal-2 de cada acoplador, respectivamente. Consideramos aqui que o canal-1 é feito de um material cujo índice de refração é positivo e que o canal-2 possui índice de refração negativo, isto é $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = -1$. Os outros parâmetros são: β_{21} e β_{22} coeficientes de dispersão da velocidade de grupo; $u_1(z,t)$ e $u_2(z,t)$ são as amplitudes do campo elétrico nos canais 1 e 2; κ_{12} e κ_{21} são os coeficientes de acoplamento linear; $\delta = \beta_1 - \beta_2$, em que β_1 e β_2 representam as constantes de propagação individual de cada canal; γ_1 e γ_2 são os coeficientes não lineares associados com a automodulação de fase; s_1 e s_2 representam o efeito da autoinclinação; T_{R1} e T_{R2} são os termos responsáveis pelo espalhamento Raman.

O acoplador contradirecional não linear descrito pelas Eqs. (3.1) e (3.2), não incluem efeitos da saturação sobre termos não lineares, que devem desempenhar relevante papéis na propagação de pulsos ultracurtos. Para descrever o efeito da não linearidade saturável, dois tipos de saturação propostos foram estudadas neste trabalho: a não linearidade saturável convencional (*Conventional Kerr-type Saturable Nonlinearity* - CSN) [32, 68, 69]:

$$f(\Gamma|u_j|^2) = \frac{|u_j|^2}{1+\Gamma|u_j|^2}, \quad (3.3)$$

e a não linearidade saturável exponencial (*Exponential Saturable Nonlinearity* - ESN)[70, 71]:

$$f(\Gamma|u_j|^2) = \frac{1-\exp(\Gamma|u_j|^2)}{\Gamma}, \quad (3.4)$$

em que o índice j se refere aos canais 1 e 2, $\Gamma = 1/P_S$ é o parâmetro de saturação com P_s sendo potência de saturação.

Substituindo as Eqs. (3.3) e (3.4) nas Eqs. (3.1) e (3.2), podemos escrever as equações que governam a evolução da função envelope $u_j(z,t)$ em acopladores contra direcionais com não linearidade saturável da seguinte forma:

$$i\sigma_1\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\beta_{21}}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \kappa_{12}u_2e^{-i\delta z} + \gamma_1\left[f(\Gamma|u_1|^2)u_1 + is_1\frac{\partial(f(\Gamma|u_1|^2)u_1)}{\partial t} - T_{R1}u_1\frac{\partial(f(\Gamma|u_1|^2))}{\partial t}\right] = 0, \quad (3.5)$$

$$i\sigma_2\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\beta_{22}}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\kappa_{21}u_1e^{i\delta z}+\gamma_2\left[f(|\Gamma u_2|^2)u_2+is_2\frac{\partial(f(\Gamma|u_2|^2)u_2)}{\partial t}-T_{R2}u_2\frac{\partial(f(|\Gamma u_2|^2))}{\partial t}\right]=0. \tag{3.6}$$

A fim de estudar a influência da não linearidade saturável e obter o espectro de ganho da MI, a seguir vamos proceder com a análise de estabilidade linear.

3.1.1 Estabilidade Linear e Espectro de Ganho da MI

Como vimos no Cap. 2, a ideia básica da análise de estabilidade linear é introduzir uma perturbação na solução estacionária e depois analisar se esta perturbação cresce ou decai com propagação. Para isso, consideramos que as soluções do estado estacionário das Eqs. (3.5) e (3.6) sejam dadas por

$$u_1(z)=a_1e^{iqz}e^{-i\frac{\delta}{2}z}, \tag{3.7}$$

$$u_2(z)=a_2e^{iqz}e^{i\frac{\delta}{2}z}, \tag{3.8}$$

com $a_j=\sqrt{P_j}$ e P_j sendo a potência do pulso incidente no canal do acoplador $j=1,2$. Inserindo as Eqs. (3.7) e (3.8) nas Eqs. (3.5) e (3.6) obtemos as constantes de propagação q e δ dadas por

$$q=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\kappa_{12}h-\kappa_{21}h^{-1}+\frac{\gamma_1 R}{1+\Gamma R}-\frac{\gamma_2 Rh^2}{1+\Gamma Rh^2}\right], & \text{(CSN)}\\[2ex] \frac{1}{2}\left[\kappa_{12}h-\kappa_{21}h^{-1}+\frac{\gamma_1(1-e^{-\Gamma R})}{\Gamma}-\frac{\gamma_2(1-e^{-\Gamma Rh^2})}{\Gamma}\right], & \text{(ESN)}\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\delta=\begin{cases}-\left[\kappa_{21}h^{-1}+\kappa_{12}h+\frac{\gamma_1 R}{1+\Gamma R}+\frac{\gamma_2 Rh^2}{1+\Gamma Rh^2}\right], & \text{(CSN)}\\[2ex] -\left[\kappa_{21}h^{-1}+\kappa_{12}h+\frac{\gamma_1(1-e^{-\Gamma R})}{\Gamma}+\frac{\gamma_2(1-e^{-\Gamma Rh^2})}{\Gamma}\right], & \text{(ESN)}\end{cases} \tag{3.10}$$

em que $h\equiv a_2/a_1$ descreve como a potência total $P=a_1^2+a_2^2$ está dividida nos canais e $R\equiv P/(1+h^2)$.

Em seguida, vamos considerar que as soluções estacionárias (3.7) e (3.8) podem ser perturbadas por funções $\alpha_j(z,t)$, de forma que as soluções se tornem

$$u_1(z,t)=\left[a_1+\alpha_1(z,t)\right]e^{iqz}e^{-i\frac{\delta}{2}z}, \tag{3.11}$$

$$u_2(z,t)=\left[a_2+\alpha_2(z,t)\right]e^{iqz}e^{i\frac{\delta}{2}z}, \tag{3.12}$$

em que $\alpha_j(z,t)$ é um termo perturbativo que satisfaz $|\alpha_j(z,t)| \ll \sqrt{P_j}$. Agora, vamos escrever o termo perturbativo como combinações de ondas planas

$$\alpha_j(z,t) = c_j e^{i[Kz-\Omega t]} + d_j e^{-i[Kz-\Omega t]}, \tag{3.13}$$

em que K e Ω são o vetor de onda e a frequência da perturbação, respectivamente. Dessa forma, substituindo as Eqs.(3.11) e (3.12) nas Eqs. (3.5) e (3.6), obtemos duas equações linearizadas para $\alpha_j(z,t)$ para cada tipo de saturação. Para o caso CSN, temos

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\beta_{21}}{2}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \alpha_1\kappa_{12}h + \alpha_2\kappa_{12} + \frac{\gamma_1 R}{(1+\Gamma R)^2}\left[\alpha_1(1+\Gamma R) + \alpha_1^*\right] \\ + \frac{i\gamma_1 s_1 R}{(1+\Gamma R)^2}\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(2+\Gamma R)\right] - \frac{\gamma_1 T_{R1} R}{(1+2\Gamma R)}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial \alpha_2}{\partial z} - \frac{\beta_{22}}{2}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - \alpha_2\kappa_{21}h^{-1} + \alpha_1\kappa_{21} + \frac{\gamma_2 R h^2}{(1+\Gamma R h^2)^2}\left[\alpha_2(1+\Gamma R h^2) + \alpha_2^*\right] \\ + \frac{i\gamma_2 s_2 R h^2}{(1+\Gamma R h^2)^2}\left[\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}(2+\Gamma R h^2)\right] - \frac{\gamma_2 T_{R2} R h^2}{(1+2\Gamma R h^2)}\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

e para o caso ESN

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\beta_{21}}{2}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \alpha_1\kappa_{12}h + \alpha_2\kappa_{12} + \gamma_1 R e^{-\Gamma R}(\alpha_1 + \alpha_1^*) \\ + i\gamma_1 s_1\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\Gamma^{-1}\left[1 + e^{-\Gamma R}(\Gamma R - 1)\right] + \frac{\partial \alpha_1^*}{\partial t} R e^{-\Gamma R}\right] - \gamma_1 T_{R1} R e^{-\Gamma R}\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1^*}{\partial t}\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial \alpha_2}{\partial z} - \frac{\beta_{22}}{2}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - \alpha_2\kappa_{21}h^{-1} + \alpha_1\kappa_{21} + \gamma_2 R h^2 e^{-\Gamma R h^2}(\alpha_2 + \alpha_2^*) \\ + i\gamma_2 s_2\left[\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\Gamma^{-1}\left[1 + e^{-\Gamma R h^2}(\Gamma R h^2 - 1)\right] + \frac{\partial \alpha_2^*}{\partial t} R h^2 e^{-\Gamma R h^2}\right] - \gamma_2 T_{R2} R h^2 e^{-\Gamma R h^2}\left[\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2^*}{\partial t}\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Substituindo a Eq. (3.13) nas Eqs. (3.14) - (3.17), obtém-se um conjunto de quatro equações linearmente acopladas para c_j e d_j. Este conjunto de equações acopladas pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Os elementos de matriz obtidos para o modelo de não linearidade saturável CSN foram:

$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = 0;$

$m_{12} = \frac{\gamma_2 Rh^2}{(1+\Gamma Rh^2)^2};$

$m_{13} = \kappa_{21};$

$m_{14} = -K + \frac{\beta_{22}}{2}\Omega^2 - \kappa_{21}h^{-1} + \frac{\gamma_2 Rh^2}{(1+\Gamma Rh^2)} - \frac{\gamma_2 s_2 Rh^2\Omega(2+\Gamma Rh^2)}{(1+\Gamma Rh^2)^2} - \frac{i\gamma_2 T_{R2} Rh^2\Omega}{(1+2\Gamma Rh^2)};$

$m_{21} = \frac{\gamma_1 R}{(1+\Gamma R)^2}$; $m_{22} = 0$; $m_{23} = K + \frac{\beta_{21}}{2}\Omega^2 - \kappa_{12}h + \frac{\gamma_1 R}{(1+\Gamma R)} - \frac{\gamma_1 s_1 R\Omega(2+\Gamma R)}{(1+\Gamma R)^2} - \frac{i\gamma_1 T_{R1} R\Omega}{(1+2\Gamma R)};$

$m_{23} = K + \frac{\beta_{21}}{2}\Omega^2 - \kappa_{12}h + \frac{\gamma_1 R}{(1+\Gamma R)} - \frac{\gamma_1 s_1 R\Omega(2+\Gamma R)}{(1+\Gamma R)^2} - \frac{i\gamma_1 T_{R1} R\Omega}{(1+2\Gamma R)};$

$m_{24} = \kappa_{12};$

$m_{31} = \kappa_{21};$

$m_{32} = K + \frac{\beta_{22}}{2}\Omega^2 - \kappa_{21}h^{-1} + \frac{\gamma_2 Rh^2}{(1+\Gamma Rh^2)} + \frac{\gamma_2 s_2 Rh^2\Omega(2+\Gamma Rh^2)}{(1+\Gamma Rh^2)^2} + \frac{i\gamma_2 T_{R2} Rh^2\Omega}{(1+2\Gamma Rh^2)};$

$m_{34} = \frac{\gamma_2 Rh^2}{(1+\Gamma Rh^2)^2};$

$m_{41} = -K + \frac{\beta_{21}}{2}\Omega^2 - \kappa_{12}h + \frac{\gamma_1 R}{(1+\Gamma R)} + \frac{\gamma_1 s_1 R\Omega(2+\Gamma R)}{(1+\Gamma R)^2} + \frac{i\gamma_1 T_{R1} R\Omega}{(1+2\Gamma R)};$

$m_{42} = \kappa_{12}$ e

$m_{43} = \frac{\gamma_1 R}{(1+\Gamma R)^2}.$

Os elementos de matriz obtidos para o modelo de não linearidade saturável ESN foram:

$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = 0;$

$m_{12} = \gamma_2 Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2} - \Omega\gamma_2 s_2 Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2} - i\Omega\gamma_2 T_{R2} Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2};$

$m_{13} = \kappa_{21};$

$m_{14} = -K + \frac{\beta_{22}}{2}\Omega^2 - \kappa_{21}h^{-1} + \gamma_2 Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2} - \Omega\gamma_2 s_2 \Gamma^{-1}\left[1 + e^{-\Gamma Rh^2}\left(\Gamma Rh^2 - 1\right)\right] - i\Omega\gamma_2 T_{R2} Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2};$

$m_{21} = \gamma_1 Re^{-\Gamma R} - \Omega\gamma_1 s_1 Re^{-\Gamma R} - i\Omega\gamma_1 T_{R1} Re^{-\Gamma R}$; $m_{22} = 0;$

$m_{23} = K + \frac{\beta_{21}}{2}\Omega^2 - \kappa_{12}h + \gamma_1 Re^{-\Gamma R} - \Omega\gamma_1 s_1 \Gamma^{-1}\left[1 + e^{-\Gamma R}(\Gamma R - 1)\right] - i\Omega\gamma_1 T_{R1} Re^{-\Gamma R}$;

$m_{24} = \kappa_{12}$;

$m_{31} = \kappa_{21}$;

$m_{32} = K + \frac{\beta_{22}}{2}\Omega^2 - \kappa_{21}h^{-1} + \gamma_2 Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2} + \Omega\gamma_2 s_2 \Gamma^{-1}\left[1 + e^{-\Gamma Rh^2}(\Gamma Rh^2 - 1)\right] + i\Omega\gamma_2 T_{R2} Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2}$;

$m_{34} = \gamma_2 Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2} + \Omega\gamma_2 s_2 Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2} + i\Omega\gamma_2 T_{R2} Rh^2 e^{-\Gamma Rh^2}$;

$m_{41} = -K + \frac{\beta_{21}}{2}\Omega^2 - \kappa_{12}h + \gamma_1 Re^{-\Gamma R} + \Omega\gamma_1 s_1 \Gamma^{-1}\left[1 + e^{-\Gamma R}(\Gamma R - 1)\right] + i\Omega\gamma_1 T_{R1} Re^{-\Gamma R}$;

$m_{42} = \kappa_{12}$ e

$m_{43} = \gamma_1 Re^{-\Gamma R} + \Omega\gamma_1 s_1 Re^{-\Gamma R} + i\Omega\gamma_1 T_{R1} Re^{-\Gamma R}$.

Para obter a solução da equação matricial, o determinante da matriz M leva a um polinômio de quarta ordem em K, em que as raízes correspondem a uma relação de dispersão $K(\Omega)$. A MI ocorre quando o número de onda $K(\Omega)$ possui uma parte imaginária diferente de zero, levando a um crescimento exponencial da amplitude de perturbação. A MI é medida pelo ganho de potência, e é definida por [34]

$$G(\Omega) \equiv |\Im m\left\{K_{\max}\right\}|, \tag{3.18}$$

em que $\Im m\left\{K_{\max}\right\}$ corresponde à parte imaginária do máximo valor de cada raiz que denotamos por $K_{\max}(\Omega)$.

3.2 Resultdados Numéricos

3.2.1 Efeito da Autoinclinação sobre a Instabilidade Modulacional

Inicialmente vamos estudar a influência do efeito da autoinclinação sobre o espectro de ganho da MI em acopladores direcionais para diferentes valores de parâmetro de saturação. Para este fim, vamos omitir efeito Raman fazendo $T_{R1} = T_{R2} = 0$. Os gráficos da Figs. 3.2 e 3.3 mostram o espectro de ganho da MI em regime de dispersão normal e anômala para diferentes combinações de s_1 e s_2, considerando que a saturação seja modelada por CSN. É

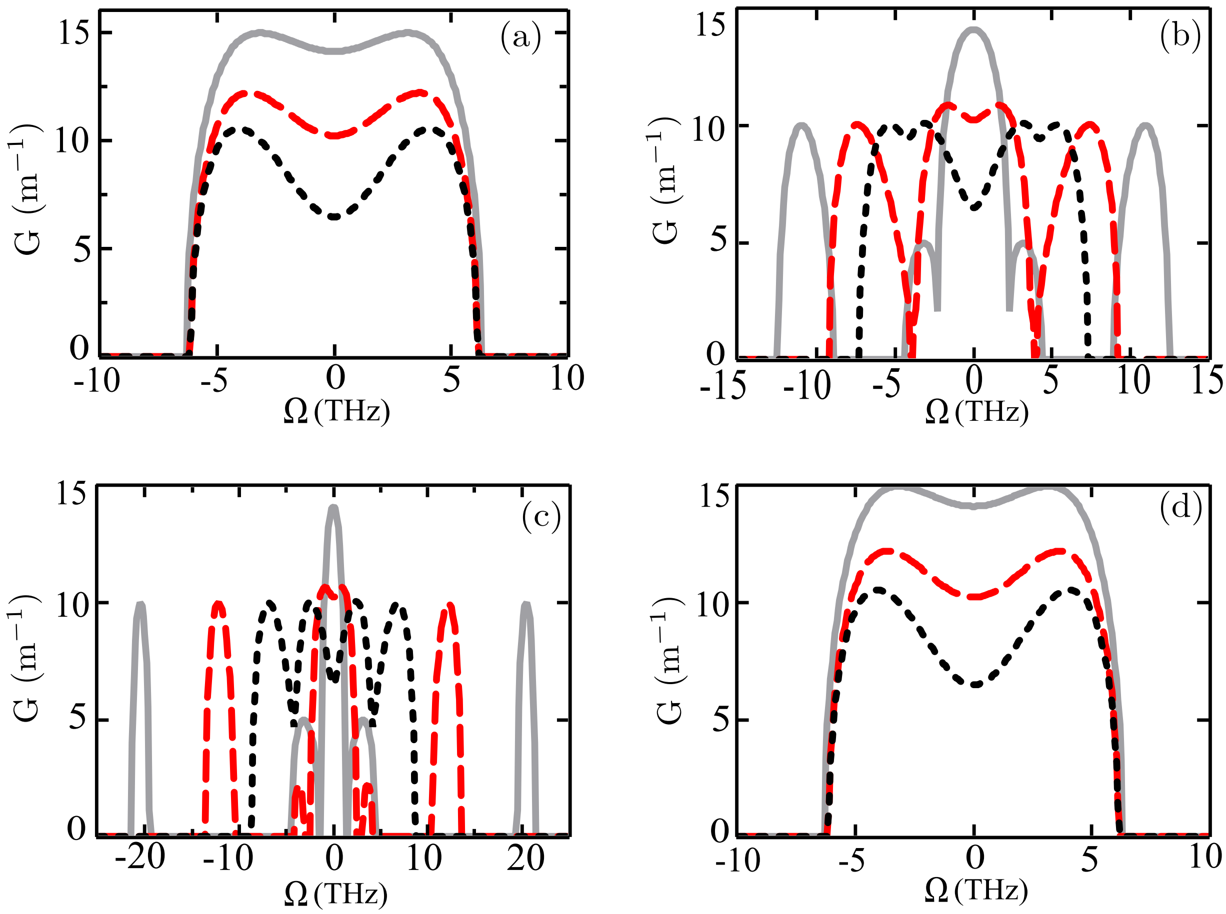

Figura 3.2: Espectro de ganho da MI, em regime de dispersão normal, em função da saturação sob diferentes combinações de s_1 e s_2. (a) $s_1 = s_2 = 0$, (b) $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$ ps/(kW m), (c) $s_1 = s_2 = 1$ ps/(kW m), e (d) $s_1 = -s_2 = 1$ ps/(kW m). Os valores de saturação utilizados são: $\Gamma = 0$ linha sólida (cinza), $\Gamma = 0.1\,\mathrm{kW}^{-1}$ linha tracejada (vermelha) e $\Gamma = 0.4\,\mathrm{kW}^{-1}$ linha pontilhada (preta). Os outros parâmetros utilizados são: $P = 10$ kW, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/(\mathrm{kW\,m})$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 10\mathrm{m}^{-1}$, $T_{R1} = T_{R2} = 0$ ps/(kW m), $h = 1$ e $\beta_{21} = \beta_{22} = 1\,\mathrm{ps}^2\,\mathrm{m}^{-1}$.

importante ressaltar que os parâmetros considerados nesta parte do trabalho, foram utilizados para recuperar os resultados obtidos na referência [21] para o caso ideal, ou seja, sem saturação. Os valores experimentais desses parâmetros podem ser encontrados na literatura [72, 73, 74].

A Fig. 3.2(a) mostra que a MI apresenta um comportamento com bandas de frequência simétricas, centradas em $\Omega = 0$, formadas pelo balanceamento entre o efeito de dispersão e automodulação de fase. Observa-se que quando a saturação aumenta o perfil do ganho diminui mais rapidamente para frequências próximas de $\Omega = 0$.

Na Fig. 3.2(b) estudamos o efeito da autoinclinação em apenas um dos canais fazendo

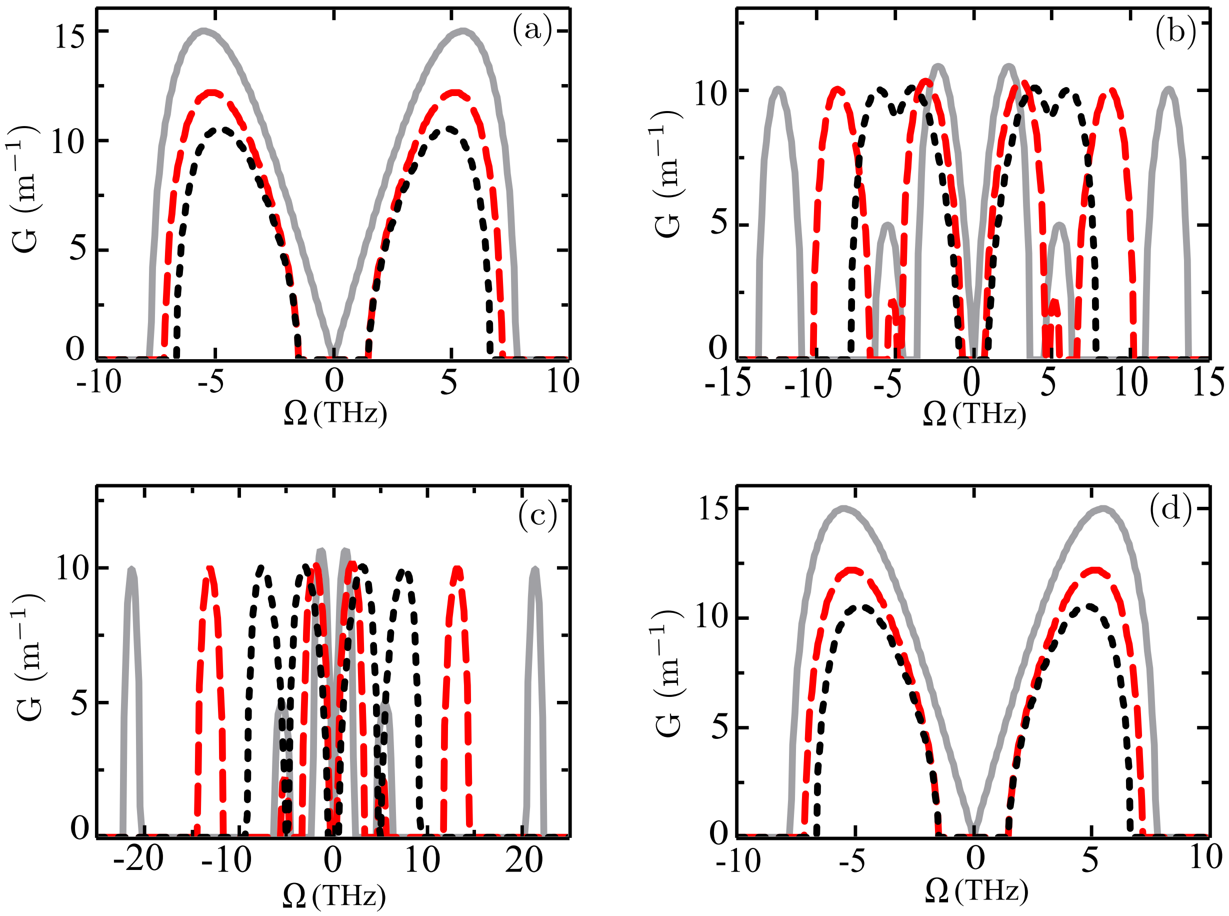

Figura 3.3: Espectro de ganho da MI em regime de dispersão anômala em função da saturação sob diferentes combinações de s_1 e s_2. (a) $s_1 = s_2 = 0$, (b) $s_1 = 0$ e $s_2 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$, (c) $s_1 = s_2 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$, e (d) $s_1 = -s_2 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$. Os valores de saturação utilizados são: $\Gamma = 0$ linha sólida (cinza), $\Gamma = 0.1\,\mathrm{kW}^{-1}$ linha tracejada (vermelha) e $\Gamma = 0.4\,\mathrm{kW}^{-1}$ linha pontilhada (preta). Os outros parâmetros utilizados são: $P = 10\mathrm{kW}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/(\mathrm{kW\,m})$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 10\mathrm{m}^{-1}$, $T_{R1} = T_{R2} = 0\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$, $h = -1$ e $\beta_{21} = \beta_{22} = -1\,\mathrm{ps^2\,m^{-1}}$.

$s_1 = 0$ e $s_2 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$. Nesta figura observa-se que o valor do parâmetro de saturação influencia diretamente do número de bandas de MI. Quanto maior do parâmetro de saturação, mais centralizada será a região de ganho, diminuindo assim a quantidade de bandas MI.

Os resultados, considerando o efeito da autoinclinação nos dois canais, estão apresentados Fig. 3.2(c), em que utilizamos $s_1 = s_2 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$. Notamos que, sem saturação ($\Gamma = 0$) há duas MI bandas centradas próximo a $\Omega = \pm 20\,\mathrm{THz}$ e outras três próximas de $\Omega = 0$. Ao aumentar o parâmetro de saturação para $\Gamma = 0.1\,\mathrm{kW}^{-1}$, observamos apenas três bandas centradas perto de $\Omega = 0$. Quando $\Gamma = 0.4\,\mathrm{kW}^{-1}$ vemos o aparecimento de praticamente uma

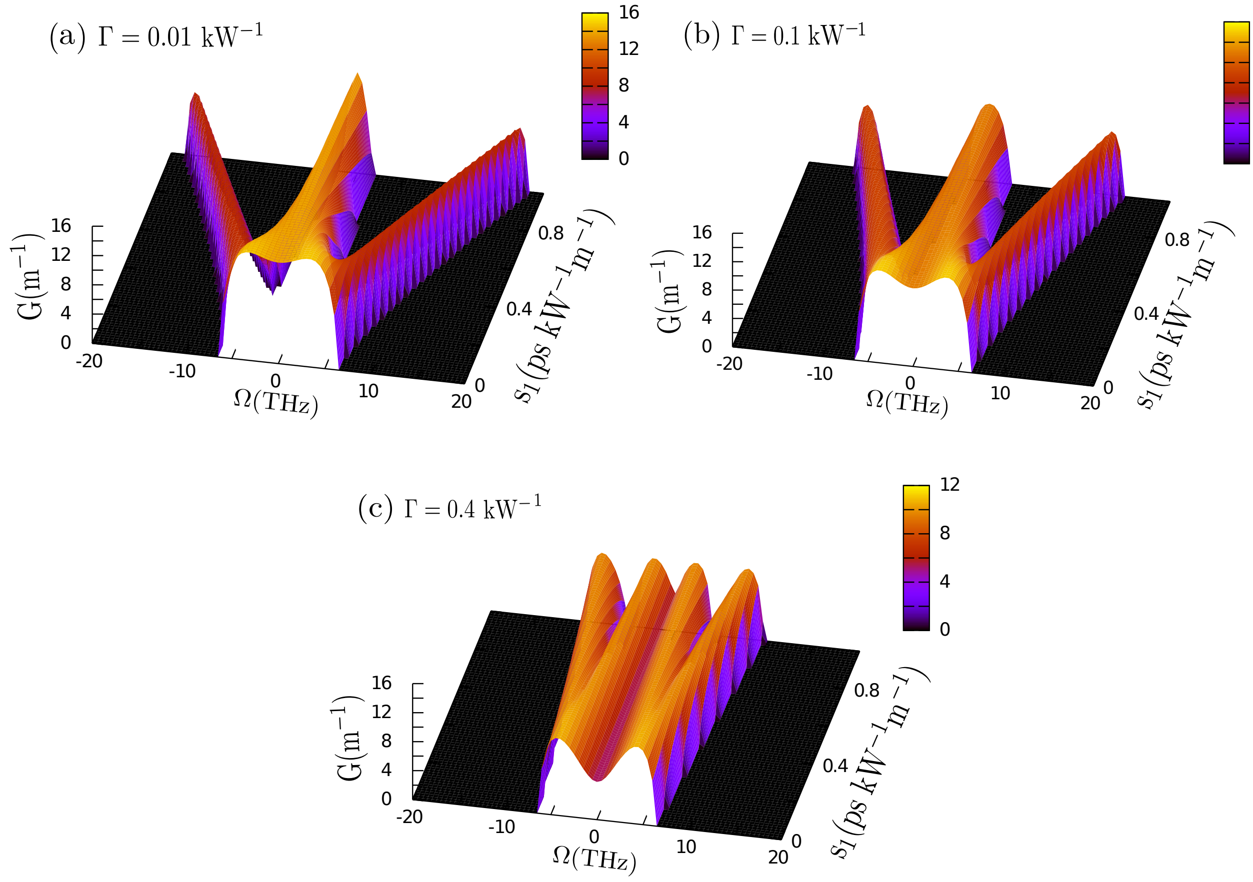

Figura 3.4: Influência do efeito da autoinclinação no canal 1 ($s_2 = 0$) sobre o espectro de ganho da MI em regime de dispersão normal para diferentes valores do parâmetro de saturação. Os gráficos mostrados em (a), (b) e (c) representam ESN. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados na Fig. 3.2.

única banda de MI em torno de $\Omega = 0$.

A Fig. 3.2(d) mostra o caso em que ambos os canais são influenciados pelo efeito da autoinclinação, porém com sinais opostos ($s_1 = -s_2 = 1$ ps/(kW m)). É importante notar que na 3.2(d), bem como mostrado em Ref. [21] para o caso sem saturação, o ganho apresenta um comportamento semelhante ao do caso em que ambos os canais não são influenciados por ele (Fig. 3.2(a)). De fato, observamos que a influência efetiva dos parâmetros da autoinclinação depende da soma algébrica nos respectivos canais, ou seja, notamos que este efeito é cancelado, se compararmos as curvas apresentadas nas Figs. 3.2(a) e 3.2(d).

Diferentemente do regime de dispersão normal, no caso da dispersão anômala não existe ganho de MI quando a frequência de perturbação é igual a zero, conforme apresentado na Fig.

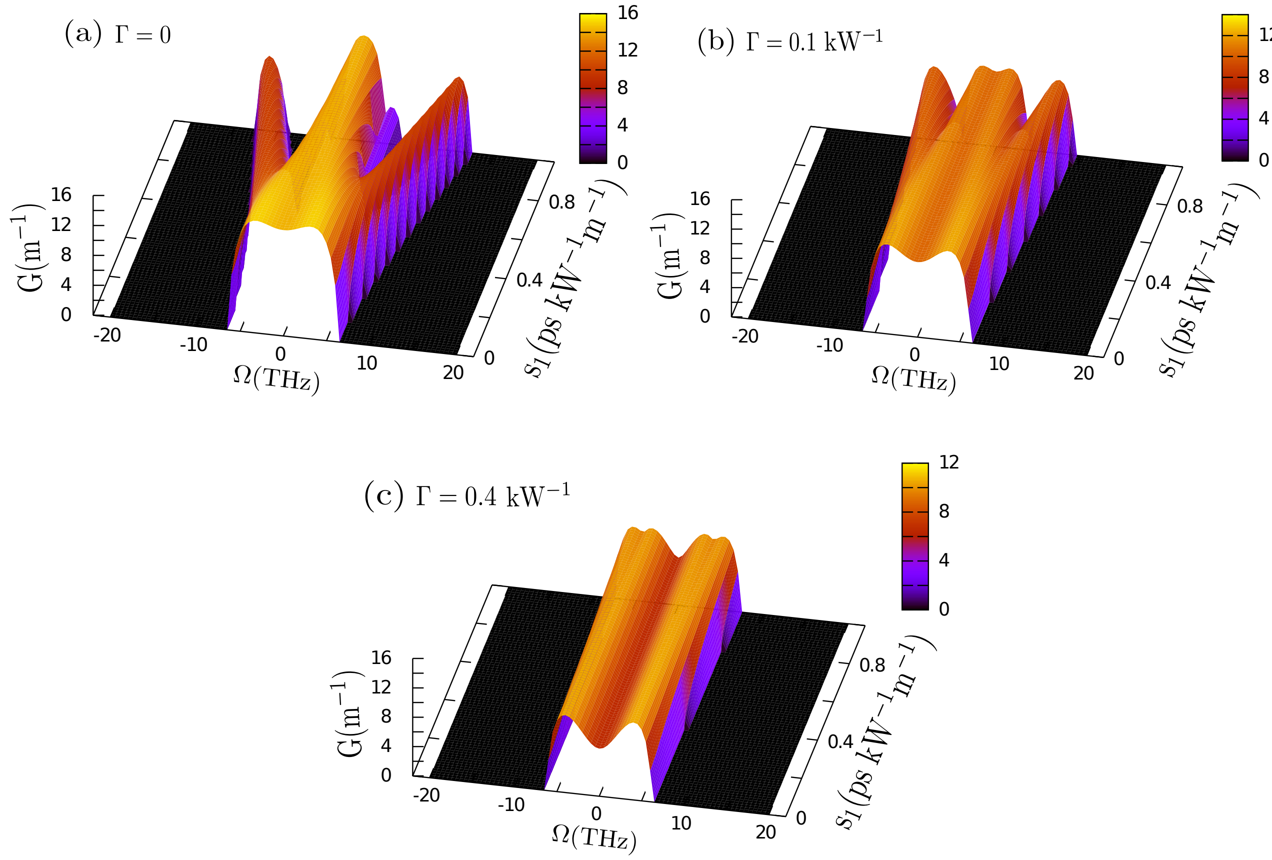

Figura 3.5: Influência do efeito da autoinclinação no canal 1 ($s_2 = 0$) sobre o espectro de ganho da MI em regime de dispersão normal para diferentes valores do parâmetro de saturação. Os gráficos mostrados em (a), (b) e (c) representam CSN. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados na Fig. 3.2.

3.3. Além disso, como foi verificada anteriormente em [21], o ganho máximo e a largura de banda são influenciadas pela a presença de efeito da autoinclinação.

Na Fig. 3.3(a) mostramos o caso sem efeito da autoinclinação ($s_1 = s_2 = 0$) para três valores diferentes parâmetro de saturação: $\Gamma = 0$ linha sólida (cinza), $\Gamma = 0.1\,\mathrm{kW}^{-1}$ linha tracejada (vermelha) e $\Gamma = 0.4\,\mathrm{kW}^{-1}$ linha pontilhada (preta). É possível observar que na ausência de saturação temos um único ponto em que o ganho se anula, que é em $\Omega = 0$, ao passo que, na presença de saturação, observamos o aparecimento de intervalo de frequência, em torno de $\Omega = 0$, que o ganho se anula.

A influência do efeito da autoinclinação em um dos canais ($s_1 = 0$ e $s_2 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$) é mostrado pela Fig. 3.3(b). Verificamos que o aumento do valor do parâmetro de saturação provoca uma compactação das bandas de MI, resultado semelhante ao obtido no regime de

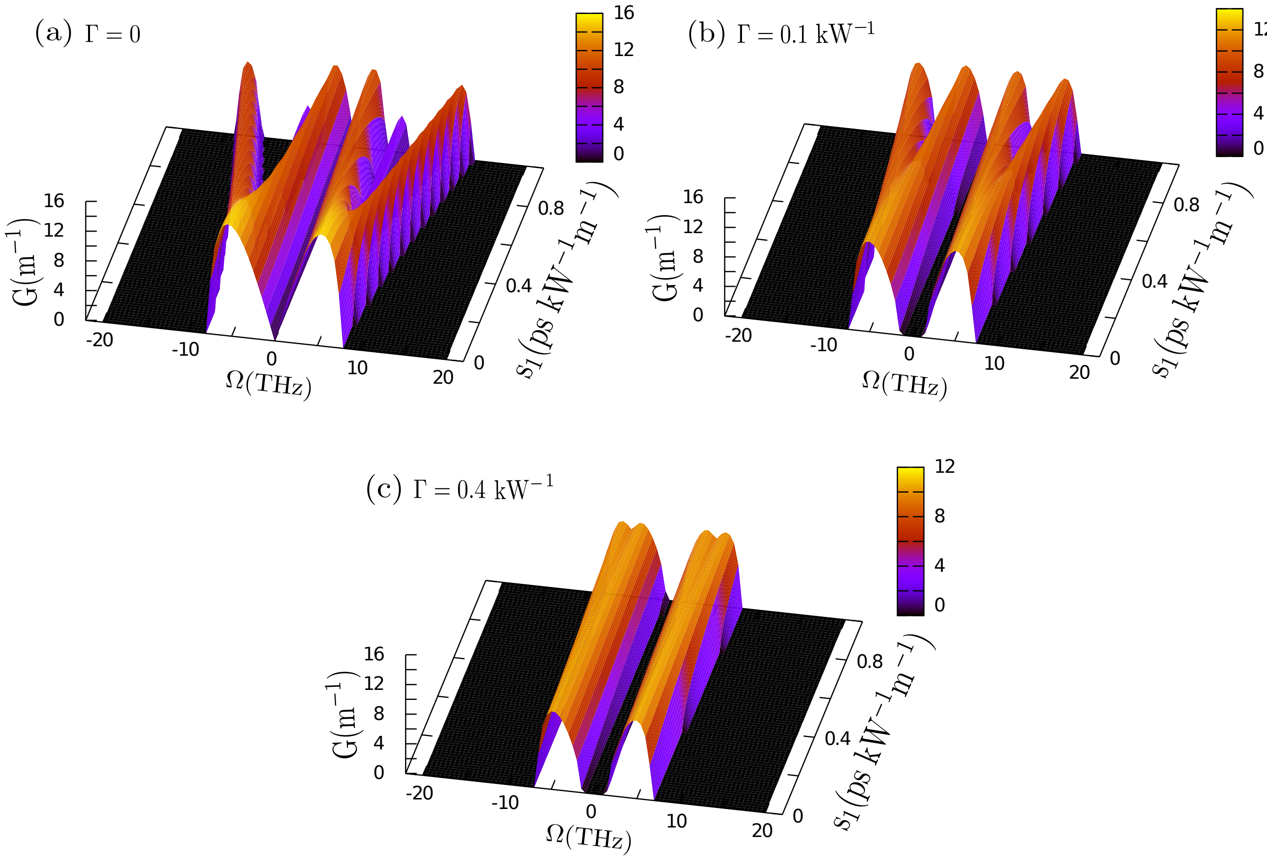

Figura 3.6: Influência do efeito da autoinclinação no canal 1 ($s_2 = 0$) sobre o espectro de ganho da MI em regime de dispersão anômala para diferentes valores do parâmetro de saturação. Os gráficos mostrados em (a), (b) e (c) representam o modelo CSN. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados na Fig. 3.3.

dispersão normal, mas agora com o ganho nulo para frequência de perturbação próxima de zero. Isto também pode ser visto na Fig. 3.3(c), no caso em que consideramos os dois canais ajustando $s_1 = s_2 = 1$ ps/(kW m). O caso em que ambos os canais são influenciados pelos parâmetros da autoinclinação com sinais contrários (Fig. 3.3(d)) mostram o mesmo comportamento quando comparados com o caso sem o efeito da autoinclinação (Fig. 3.3(a)).

Em seguida, nas Figs. 3.5 e 3.4, investigamos mais especificamente como as funções $f(\Gamma|u_j|^2)$, que descrevem a não linearidade saturável, afetam o espectro de ganho da MI. Além de considerar as formas funcionais de respostas não lineares de saturação convencional (CSN) e exponencial (ESN), levamos em conta também a variação do parâmetro que caracteriza o efeito da autoinclinação e o regime de dispersão normal e anômala.

Considerando o regime de dispersão normal, as Figs. 3.4(a) e 3.5(a) mostram o perfil

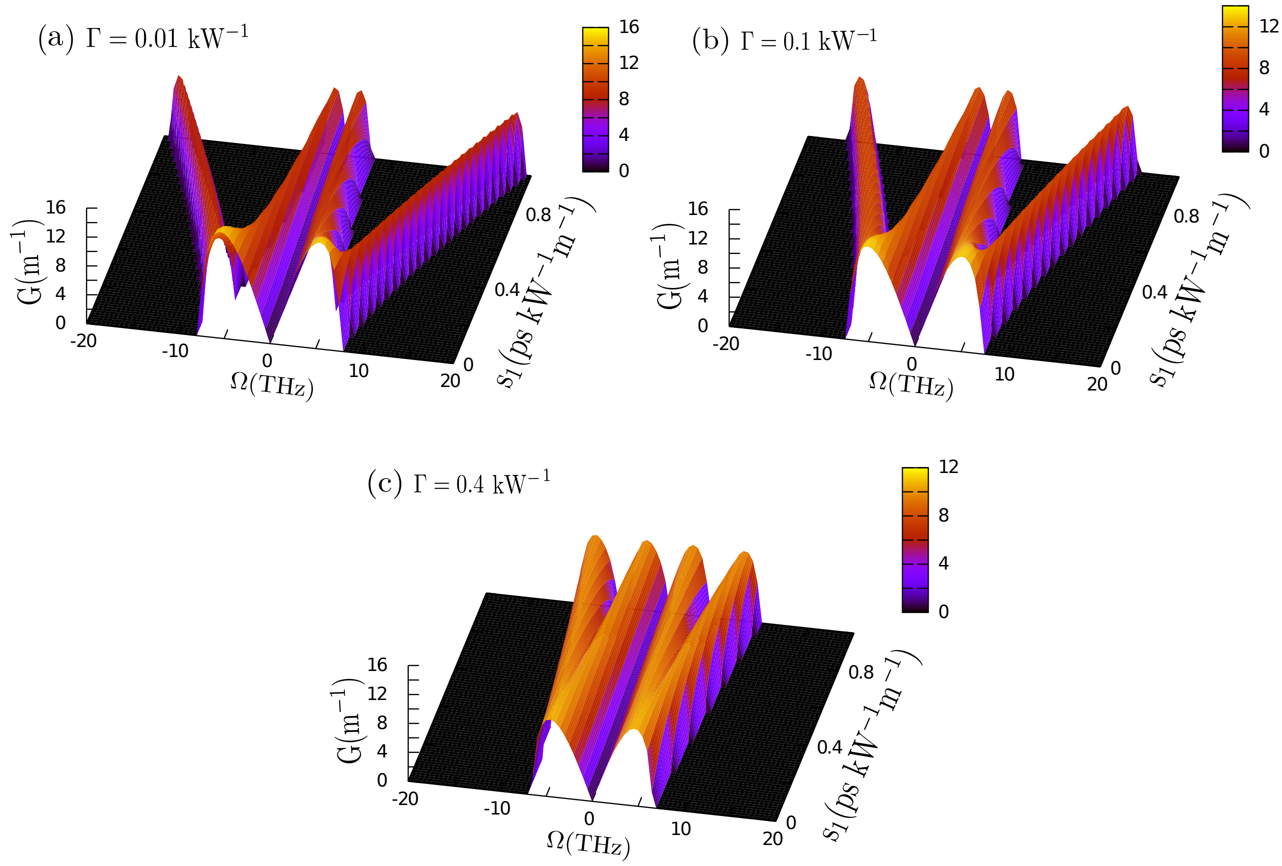

Figura 3.7: Influência do efeito da autoinclinação no canal 1 ($s_2 = 0$) sobre o espectro de ganho da MI em regime de dispersão anômala para diferentes valores do parâmetro de saturação. Os gráficos mostrados em (a), (b) e (c) representam o modelo ESN. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados na Fig. 3.3.

do ganho da MI para o modelo ESN ($\Gamma \to 0$) e CSN ($\Gamma = 0$) respectivamente. As superfícies 3D mostram que, à medida que o parâmetro do efeito da autoinclinação vai aumentando, as bandas de frequência ficam bem mais separadas para o caso em que a saturação é modelada por ESN do que para CSN. É possível também observar que para $\Gamma = 0.1$ kW^{-1} e $s_1 = 1$ ps/(kW m) as bandas estão praticamente aglomeradas em uma única região em torno de $\Omega = 0$ para o modelo CSN, conforme mostra a Fig. 3.5(b). No entanto, para o modelo ESN existem três bandas de frequência bem definidas: uma em torno de $\Omega = 0$ e outras duas simétricas em torno de $\Omega = \pm 15$ THz, de acordo com Fig. 3.4(b). Para $\Gamma = 0.4$ kW^{-1} e $s_1 = 1$ ps/(kW m) as bandas estão praticamente compactadas em torno de $\Omega = 0$ para ambos os modelos, como mostram as Figs. 3.5(c) e 3.4(c).

A análise dos resultados, ao considerarmos o regime de dispersão anômala (Figs. 3.6 e

3.7), é bastante semelhante ao regime de dispersão normal, mas agora com o ganho nulo para frequência de perturbação próxima de zero. As Figs. 3.6(a) e 3.7(a) mostram que à medida que o parâmetro do efeito da autoinclinação vai aumentando, as bandas de frequência ficam mais bem definidas e separadas para o modelo ESN do que para CSN. Observamos pelas Figs. 3.6(b) e 3.7(b), que quando para o parâmetro de saturação $\Gamma = 0.1$ kW^{-1} e $s_1 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$, o modelo CSN apresenta duas bandas simétricas aglomeradas em torno de $\Omega = \pm 5$ THz. Em contrapartida para o caso ESN ocorrem quatro bandas simétricas, duas em torno $\Omega = \pm 2.5$ THz e outras duas em $\Omega = \pm 8$ THz.

De fato, as Figs. 3.5 - 3.7 indicam que, não só o valor do parâmetro de saturação é importante para determinar a região de ganho de MI, o modelo da resposta não linear saturável pode ser determinante para se obter, ou não, formação de trem de sólitons em acopladores contra direcionais.

3.2.2 Influência do Espalhamento Raman sobre a Instabilidade Modulacional

Nesta subseção vamos estudar o efeito do espalhamento Raman sobre o espectro de ganho da MI em acopladores direcionais, em função parâmetro de saturação. Para este estudo em particular, vamos omitir o efeito da autoinclinação considerando $s_1 = s_2 = 0$. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados na subseção anterior.

Nas Figs. 3.8(a) e 3.8(b) consideramos a ocorrência da MI em regime dispersão normal e nas Figs. 3.8(c) e 3.8(d) em regime de dispersão anômala, com o parâmetro de espalhamento Raman igual a $T_{R1} = T_{R2} = 0.1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$ e $T_{R1} = -T_{R2} = 0.1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$, para ambos os regimes de dispersão respectivamente. As linhas sólidas (cinza) nas Figs. 3.8(a) - (d) representam os casos sem efeito de saturação ($\Gamma = 0$) enquanto que as linhas tracejadas (vermelho) e pontilhadas (preto) representam os efeitos da saturação dados pelos parâmetros $\Gamma = 0.1\,\mathrm{kW}^{-1}$ e $\Gamma = 0.4\,\mathrm{kW}^{-1}$, respectivamente.

Ao estabelecermos uma comparação entre as Figs. 3.8(a) e 3.8(c) com as Figs. 3.2(a) e 3.3(a) observa-se o aparecimento de uma região de ganho não nulo, além das bandas de frequências características, que aumenta linearmente com a frequência. No entanto, ao aumentar a saturação, observa-se que o efeito produzido é o de uma dimunuição no valor máximo do ganho e também uma diminuição nessa região além das bandas. Além disso, diferentemente dos casos mostrada nas Figs. 3.8(a) e 3.8(c), quando se considera o parâmetro do espalhamento de Raman com sinais contrários, verifica-se uma quebra de simetria nas regiões de ganho, conforme mostra as Figs. 3.8(b) e 3.8(d).

Por fim, as Figs. 3.9 e 3.10 mostram o comportamento do ganho da MI para diferentes valores do parâmetro de saturação. Observa-se que tanto no regime de dispersão normal quanto no anômalo, o aumento do termo de espalhamento Raman mantém as bandas de frequências em torno de $\Omega = 0$ praticamente inalteradas, enquanto que o aumento da saturação diminui o valor máximo do do ganho. Em relação ao tipo de função que descreve a saturação, os espectros de ganho mostrados nas Figs. 3.9 e 3.10 não sofrem alteração quando levamos em conta os modelos CSN ou ESN.

3.2.3 Conclusões

Neste capítulo investigamos a a influência dos efeitos da autoinclinação e espalhamento Raman sobre o espectro da MI em acopladores contradirecionais.

De modo geral, os resultados apresentados neste trabalho pelas Figs. 3.2 e 3.3, recuperam os resultados obtidos em [21] para os efeitos da autoinclinação e espalhamento Raman sobre espectro de ganho da MI, quando desprezamos o efeito da saturação em cada canal ou seja $\Gamma|u_j| \ll 1$. Entretanto, nossos resultados mostrados nas Figs. 3.5 e 3.6 deixam claro como a saturação reduz drasticamente a região de ganho da MI. Nosso estudo também incrementa a literatura ao evidenciar, através das Figs. 3.5 - 3.7, que o número de bandas de ganho da MI e sua forma, também dependem do tipo de saturação que é considerada nos acopladores.

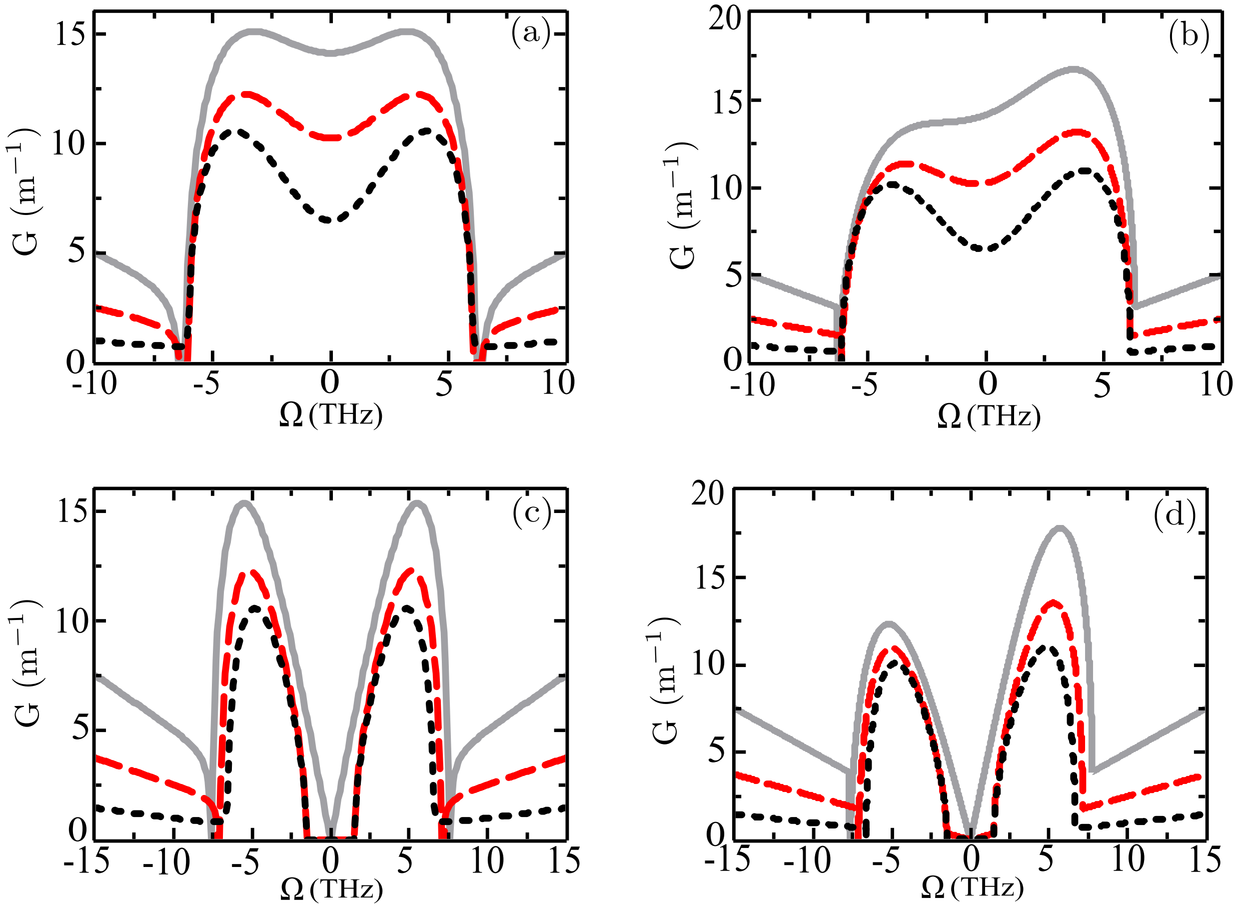

Figura 3.8: Espectro de ganho da MI em regime de dispersão normal ($h = 1$ e $\beta_{21} = \beta_{22} = 1\ \mathrm{ps^2\,m^{-1}}$) em função da saturação considerando o efeito Raman para (a) $T_{R1} = T_{R2} = 0.1$ ps/(kW m) e (b) $T_{R1} = -T_{R2} = 0.1$ ps/(kW m). Espectro de ganho da MI em regime de dispersão anômala ($h = -1$ e $\beta_{21} = \beta_{22} = -1\,\mathrm{ps^2\,m^{-1}}$) em função da saturação considerando o efeito Raman para (c) $T_{R1} = T_{R2} = 0.1$ ps/(kW m) e (d) $T_{R1} = -T_{R2} = 0.1$ ps/(kW m). Os valores de saturação utilizados são: $\Gamma = 0$ linha sólida (cinza), $\Gamma = 0.1\,\mathrm{kW^{-1}}$ linha tracejada (vermelha) e $\Gamma = 0.4\,\mathrm{kW^{-1}}$ linha pontilhada (preta). Os outros parâmetros utilizados são: $P = 10$ kW, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/(\mathrm{kW\,m})$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 10\,\mathrm{m^{-1}}$ e $s_1 = s_2 = 0$. Consideramos a não linearidade saturável é descrita pelo modelo CSN.

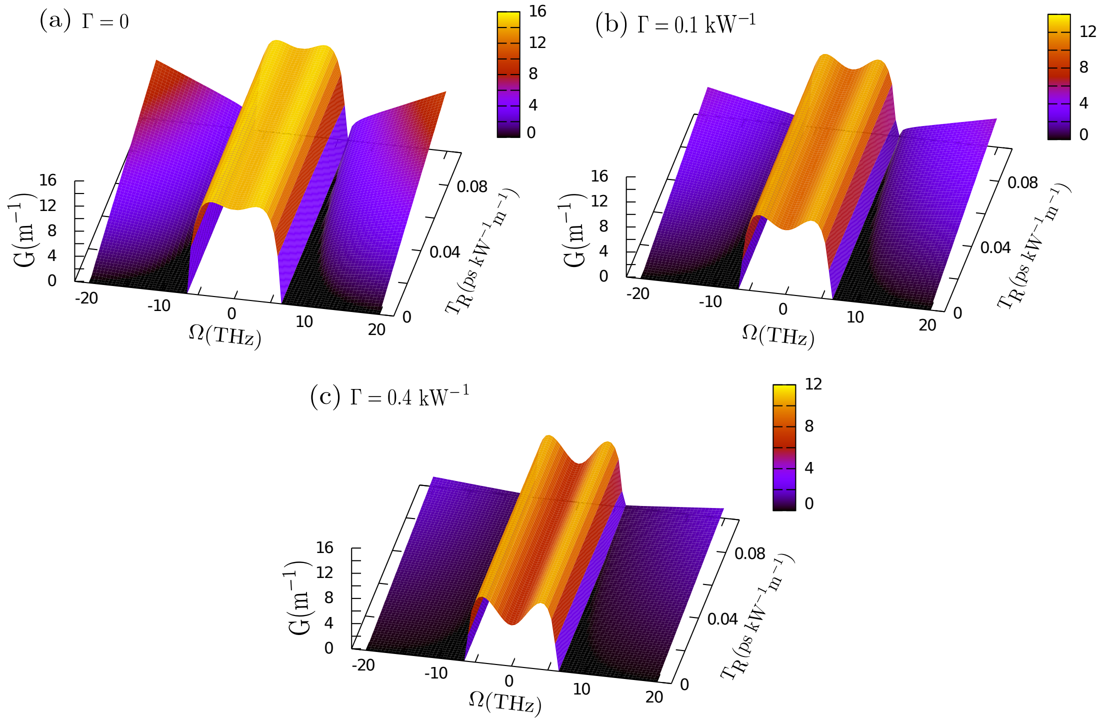

Figura 3.9: Influência do efeito Raman (com $T_{R1} = T_{R2} = T_R$) sobre o espectro de ganho da MI em regime de dispersão normal para diferentes valores do parâmetro de saturação. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados na Fig. 3.8(a).

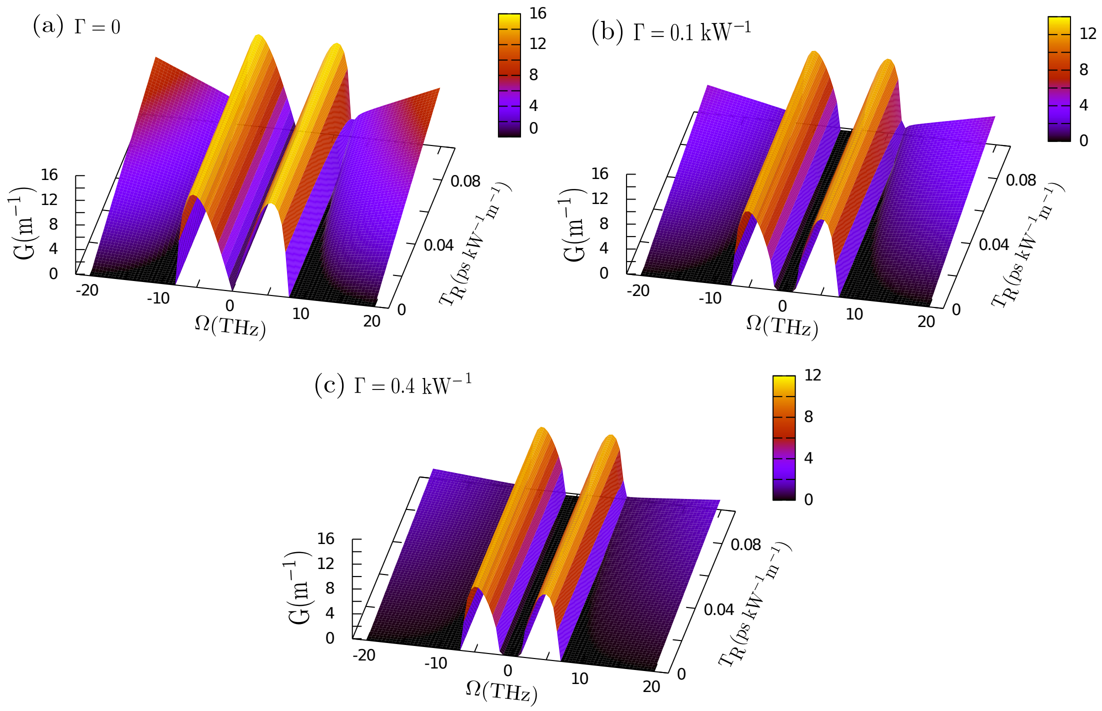

Figura 3.10: Influência do efeito Raman (com $T_{R1} = T_{R2} = T_R$) sobre o espectro de ganho da MI em regime de dispersão anômala para diferentes valores do parâmetro de saturação. Os outros parâmetros são os mesmos utilizados na Fig. 3.8(c).

Capítulo 4

Equação de Schrödinger e Não Linearidade de Altas Ordens

Como vimos no início do Cap.3, em fibras ópticas e guias de onda de alto índice de refração, a resposta não linear satura quando intensidade de campo aumenta. A não linearidade saturável é conhecida por modificar significativamente a amplitude e/ou a forma da banda MI, podendo até fazer com que a banda desapareça em algumas circunstâncias. Isto tem motivado o estudo da MI em vários sistemas não lineares saturáveis, tais como guias de onda [27, 28], fibras ópticas [30, 29], metamaterial com índice de refração negativo [31], metamateriais [75, 22, 76], fibras ópticas com termos de dispersão de ordem superior [59, 32, 33], fibras com resposta não linear atrasada [77], acopladores com índice de refração positivo e negativo [34], fibras de vidro dopado com semicondutor [35] e fibras de cristal fotônico [36].

No contexto de fibras ópticas, a equação que descreve a propagação de pulsos intensos de luz com largura temporal da ordem de femtossegundos (10^{-15} s) é a equação Schrödinger com termos não lineares e de dispersão de mais altas ordens (*Higher-Order Nonlinear Schrödinger* - HNLS). Neste capítulo vamos estudar a MI proveniente dos termos não lineares de ordem quíntica e de dispersão de quarta ordem presentes na equação Schrödinger. A característica do espectro de ganho da MI será analisado como uma função dos termos de dispersão até quarta ordem e da não linearidade de ordem cúbica e quíntica, incluindo o efeito de não linearidade saturável modelada por CSN. Uma vez conhecida a região de frequência que propicia a quebra de uma função contínua oscilatória em um trem de sólitons, faremos simulações no intuito investigar a influência da saturação sobre a formação de soluções solitônicas, em um cenário em que efeitos de atenuação podem ser desconsiderados. Como caso particular do nosso modelo, na ausência de saturação, os resultados obtidos em [4] devem ser semelhantes aos nossos, no que diz respeito a análise da influência de termos de não linearidade cúbica e quíntica sobre o ganho da MI.

4.1 Modelo Teórico

Em geral, para investigar e descrever a propagação de pulsos curtos e intensos em fibras ópticas, é necessário usar a equação não linear generalizada de altas ordens de Schrödinger [4] que, na aproximação de variação lenta do envelope, pode ser escrita por

$$\begin{aligned} A_z =& - i\beta_2 A_{tt} + \beta_3 A_{ttt} + i\beta_4 A_{tttt} + i\gamma_1 |A|^2 A + i\gamma_2 |A|^4 A \\ &+ \alpha_1 \left(|A|^2 A\right)_t + \alpha_2 A \left(|A|^2\right)_t + \alpha_3 \left(|A|^4 A\right)_t + \alpha_4 A \left(|A|^4\right)_t , \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que $A(z,t)$ é a amplitude de variação lenta do campo elétrico, z é a distância ao longo da fibra, e t é o tempo no referencial do pulso óptico. A derivação espacial e temporal são denotados por subscritos z e t, respectivamente. Os coeficientes $\beta_i (i = 2, 3, 4)$ são os parâmetros relacionados com a dispersão da velocidade de grupo, dispersão de terceira ordem, e dispersão de quarta ordem, respectivamente. Os termos γ_1 , α_1 e α_2 estão relacionados com os seguintes efeitos não lineares de ordem cúbica: a automodulação de fase, autoinclinação e espalhamento Raman respectivamente. Os termos relacionados com os coeficientes γ_2, α_3 e α_4 representam a não linearidade de ordem quíntica.

A Eq. (4.1) não inclui o efeito de saturação, que deve desempenhar papel relevante na propagação de pulsos ultracurtos. Os termos não lineares de ordem cúbica e quíntica presentes na Eq. (4.1) serão substituídos por uma função $f(\Gamma^{\frac{j}{2}}|A|^j)$ que descreve a dependência do índice de refração com a intensidade da radiação incidente. Tal função corresponde ao modelo convencional de não linearidade saturada (CSN) [30, 33] dada [1]

$$f(\Gamma^{\frac{j}{2}}|A|^j) = \frac{|A|^j}{1+\Gamma^{\frac{j}{2}}|A|^j} \tag{4.2}$$

em que $j+1$ representa a ordem da não linearidade (para $j=2,4$) e $\Gamma = \frac{1}{P_s}$ é o parâmetro de saturação e P_s potência de saturação.

Para intensidades de campo de tal modo que $\Gamma^{\frac{j}{2}}|A|^j \ll 1$ o sistema recai nos termos não lineares cúbicos e quínticos da Eq. (4.1), isto é $f(\Gamma|A|^2) \to |A|^2$ e $f(\Gamma^2|A|^4) \to |A|^4$. No entanto, para campos intensos devemos substituir a Eq. (4.2) em (4.1) para obter a equação de Schrödinger com resposta saturada, expressa por

$$\begin{aligned} A_z &= -i\beta_2 A_{tt} + \beta_3 A_{ttt} + i\beta_4 A_{tttt} + i\gamma_1 f(\Gamma|A|^2)A + i\gamma_2 f(\Gamma^2|A|^4)A + \alpha_1\left(f(\Gamma|A|^2)A\right)_t \\ &\quad + \alpha_2 A\left(f(\Gamma|A|^2)\right)_t + \alpha_3\left(f(\Gamma^2|A|^4)A\right)_t + \alpha_4 A\left(f(\Gamma^2|A|^4)\right)_t . \end{aligned} \tag{4.3}$$

A Eq (4.3) possui solução estacionária dada por

$$A(z) = \sqrt{P_0}e^{i\phi_{NL}z}, \tag{4.4}$$

em que P_0 é a potência da radiação incidente e $\phi_{NL} = \frac{\gamma_1 P_0}{1+\Gamma P_0} + \frac{\gamma_2 P_0^2}{1+\Gamma^2 P_0^4}$ é a fase não linear, introduzida pelo efeito de automodulação de fase e pela não linearidade quíntica.

Para a análise da estabilidade linear, vamos introduzir uma perturbação $a(z,t)$ na Eq. (4.4), com $|a(z,t)| \ll P_0$, de modo que a solução geral da Eq. (4.3) seja dada por

$$A(z,t) = [\sqrt{P_0} + a(z,t)]e^{i\phi_{NL}z}. \tag{4.5}$$

Vamos considerar que a perturbação pode ser escrita por

$$a(z,t) = U(z)e^{-i\Omega t} + V(z)e^{i\Omega t}, \tag{4.6}$$

em que $U(z)$ e $V(z)$ são funções complexas e Ω representa a frequência da solução perturbada. Substituindo as Eqs.(4.6) e (4.5) em (4.3) e nós obtemos duas equações linearizadas para as funções $U(z)$ e $V(z)$, que podem ser escritas na forma matricial

[1] Outros modelos empíricos de saturação empíricas estão presentes na literatura [31, 78], mas não farão parte da nossa discussão neste capítulo.

$$i\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} U(z) \\ V^*(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U(z) \\ V^*(z) \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Os autovalores da matriz λ determinam os possíveis números de onda K da solução perturbada (4.6). Os valores de K podem ser obtidos através da equação característica

$$\det|\lambda - KI| = 0, \tag{4.8}$$

em que I é uma matriz unitária de ordem 2. Os autovalores da equação característica (4.8) resultam em um polinômio de segundo grau em K, cujas raízes resultam numa relação de dispersão dada por

$$K(\Gamma, \Omega) = \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_{22})^2 + 4\lambda_{12}\lambda_{21}}. \tag{4.9}$$

Os elementos da matriz λ da Eq. (4.7) são dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= -\beta_2\Omega^2 + \beta_3\Omega^3 + \beta_4\Omega^4 + P_0\left[\frac{\gamma_1}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{2\gamma_2 P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] \\ &\quad -P_0\Omega\left[\frac{\alpha_1}{1+\Gamma P_0} + \frac{\alpha_3 P_0}{1+\Gamma^2 P_0^2}\right] - P_0\Omega\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{(\alpha_3+\alpha_4)2P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\lambda_{12} = P_0\left[\frac{\gamma_1}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{2\gamma_2 P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] - P_0\Omega\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{(\alpha_3+\alpha_4)2P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] \tag{4.11}$$

$$\lambda_{21} = -P_0\left[\frac{\gamma_1}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{2\gamma_2 P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] - P_0\Omega\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{(\alpha_3+\alpha_4)2P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{22} &= \beta_2\Omega^2 + \beta_3\Omega^3 - \beta_4\Omega^4 - P_0\left[\frac{\gamma_1}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{2\gamma_2 P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] \\ &\quad -P_0\Omega\left[\frac{\alpha_1}{1+\Gamma P_0} + \frac{\alpha_3 P_0}{1+\Gamma^2 P_0^2}\right] - P_0\Omega\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{(1+\Gamma P_0)^2} + \frac{(\alpha_3+\alpha_4)2P_0}{(1+\Gamma^2 P_0^2)^2}\right] \end{aligned} \tag{4.13}$$

Conforme já mencionado no Cap. 3, a MI ocorre quando o número de onda K torna-se um número imaginário e o espectro de ganho fica dado pela Eq. (3.18).

4.2 Método Numérico

4.2.1 Método Pseudoespectral

A análise de estabilidade linear permite identificar regiões de frequência onde a IM pode ocorrer e estimar a taxa de crescimento de perturbações de acordo com a Eq. (3.18). No entanto, a teoria de estabilidade linear não prediz como ocorre a evolução espaço temporal do pulso de onda. Portanto, devemos resolver numericamente a Eq.(4.3) para estudar a evolução do o campo $A(z,t)$ em intervalos de frequência em que o ganho da MI é não nulo.

Soluções numéricas de propagação de pulsos em meios dispersivos e com não linearidade podem ser obtidas através do método pseudoespectral. A ideia básica do método pseudoespectral consiste em utilizar a transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT), para o cálculo de termos dispersivos e não lineares que envolvam derivadas temporais, associado ao método Runge-Kutta de quarta ordem para obter a evolução de espaço-temporal de $A(z,t)$.

Por simplicidade, para descrever o método, vamos considerar como exemplo uma a Eq. (4.1) com dispersão de segunda ordem e um termo de não linearidade cúbica, de modo que

$$A_{n,z} = -\, i\beta_2 A_{n,tt} + i\gamma |A_n|^2 A_n, \tag{4.14}$$

representa a equação discretizada no espaço em que A_n representa a solução no ponto z_n da malha. O termo $A_{n,tt}$ é calculado por

$$A_{n,tt} = F^{-1}\left[(i\Omega)^2 F(A_n)\right], \tag{4.15}$$

em que F e F^{-1} representam a transformada de Fourier discreta e a transformada de Fourier inversa, respectivamente, e Ω a frequência da perturbação. Após $A_{n,tt}$ ser obtida, a equação espacialmente discretizada (4.14) pode então ser evoluída no tempo e na posição a partir do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Runge-Kutta de Quarta Ordem

Os métodos de Runge-Kutta (RK) formam uma família importante de metódos iterativos implícitos e explícitos para a resolução numérica de soluções de equações diferenciais ordinárias. Essas técnicas foram desenvolvidas por volta de 1900 pelos matemáticos alemães Carl D. T. Runge e Martin W. Kutta. Cada método de Runge-Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, avaliando a função a cada passo. Todas as fórmulas do método são destinadas à resolução de equações diferenciais do tipo $y_z = f\left(y(z), t\right)$ e admitem como forma genérica

$$y_{i+1} = y_i + \phi h, \tag{4.16}$$

em que y_i é a condição inicial, ϕ é a chamada função incremento e h a amplitude do passo. A função incremento de ordem n pode ser escrita na forma geral

$$\phi(z_i, t_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n, \tag{4.17}$$

em que a_i são constantes e os termos k_i são relações de recorrência. Como o método de Runge-Kutta é derivado de um método de Taylor, o método possui um erro de truncamento global de ordem $O(h^n)$.

Sendo $n = 4$ a ordem considerada para o método de Runge-Kutta, a equação e as relações de recorrência ficam ficam dadas por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \tag{4.18}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(z_0, t_0), \\ k_2 = f(z_0 + \frac{h}{2}k_1, t_0 + \frac{h}{2}), \\ k_3 = f(z_0 + \frac{h}{2}k_2, t_0 + \frac{h}{2}), \\ k_4 = f(z_0 + hk_3, t_0 + h). \end{cases} \tag{4.19}$$

Em nossas simulações, vamos usar como condição inicial (y_i) uma função harmônica com uma pequena amplitude de oscilação ε, dada por

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} + \varepsilon cos(\Omega t), \tag{4.20}$$

em que Ω é a frequência da perturbação.

4.3 Resultados Numéricos

Inicialmente estudaremos o efeito conjunto de termos de dispersão e não linearidade cúbica e quíntica sobre o espectro de ganho da MI e, consequentemente, sobre a geração de soluções tipo sólitons.

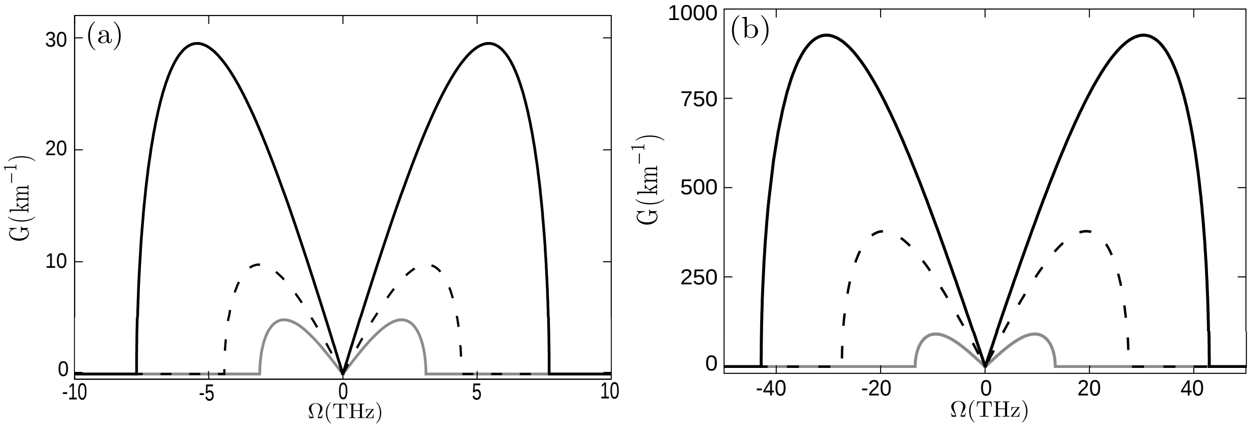

Figura 4.1: Espectro de ganho da MI dada pela Eq. (3.18) para diferentes valores do parâmetro de saturação. (a) Efeitos de dispersão de segunda ordem, β_2, e efeitos não lineares cúbicos γ_1, α_1 e α_2; b) efeitos de dispersão de quarta ordem, β_4, e efeitos não lineares quínticos γ_2, α_3 e α_4. Os valores de saturação são: $\Gamma = 0$ linha sólida (preta), $\Gamma = 0.1\,\mathrm{W}^{-1}$ linha tracejada e $\Gamma = 0.05\,\mathrm{W}^{-1}$ linha sólida (cinza). A potência de entrada $P_0 = 15$ W e os parâmetros de efeitos de dispersão e não linearidade são os mesmos utilizados em [4].

A saturação é um parâmetro que influencia tanto na amplitude do ganho quanto na faixa de frequência onde o mesmo é não nulo. Na Fig. 4.1(a) e 4.1(b), mostramos o comportamento do ganho da MI, quando consideramos os termos de dipersão de segunda e quarta ordem ($\beta_2 = \frac{1}{2}\text{ps}^2/\text{km}$ e $\beta_4 = -\frac{5}{24} \times 10^{-5}\text{ps}^4/\text{km}$) e não linearidade de ordem cúbica ($\gamma_1 = 1\text{W}^{-1}/\text{km}$, $\alpha_1 = -0.0247\text{W}^{-1}/[(2\pi)\text{kmTHz}]$ e $\alpha_2 = 0.03705\text{W}^{-1}(\text{fs}/\text{km})$) e quíntica ($\gamma_2 = 1\text{W}^{-1}/\text{km}$, $\alpha_3 = -0.0247\text{W}^{-2}/[(2\pi)\text{kmTHz}]$ e $\alpha_4 = 0.030875\text{W}^{-2}(\text{fs}/\text{km})$), em função do parâmetro de saturação para uma dada potência de entrada P_0. De um modo geral, os gráficos das Figs. 4.1(a) e 4.1(b) mostram que, à medida que a saturação aumenta de $\Gamma = 0 - 0.1\text{W}^{-1}$, o pico do ganho da MI diminui rapidamente e que a região de frequência em que o ganho é não nulo vai ficando cada vez mais estreita. As Figs. 4.1(a) e 4.1(b) deixam claro também que quando incluímos os termos de não linearidade quíntica, a forma das bandas formadas permanece praticamente inalterada. Em contrapartida, a amplitude do ganho e as faixas de frequência aumentam drasticamente.

A formação de trens de sólitons pode ser obervada num intervalo de frequência onde o ganho da MI é diferente de zero. Nessa faixa de frequência o vetor de onda $K(\Omega)$ torna-se um número imaginário e a perturbação, pela Eq. (4.20), dá origem a um trem de pulsos tipo sólitons, que se propagam sem experimentar distorção. No contexto de fibras ópticas, este trem de sólitons se dá pelo efeito balanceado entre os termos de dispersão e de não linearidade. Para investigar como a formação de trens de sólitons é afetada pela resposta saturável dos termos não lineares, apresentamos algumas simulações com a evolução espaço temporal da Eq. (4.3) sob solução inicial dada por (4.20).

Na Fig. 4.2(a), vemos a evolução espaço-temporal da solução inicial, considerando a Eq. (4.3) contendo termos de dispersão de segunda e quarta ordem e não linearidade cúbica. Observamos que, na ausência de saturação, a solução evolui de maneira randômica inicialmente, com a amplitude aumentando até aproximadamente $z \simeq 3$ km, mas depois desta distância a propagação a amplitude da solução torna-se estável e os pulsos sem maiores distorções. Quando consideramos o parâmetro de saturação $\Gamma = 0.05$ W^{-1}, Fig. 4.2(b), a região de frequência

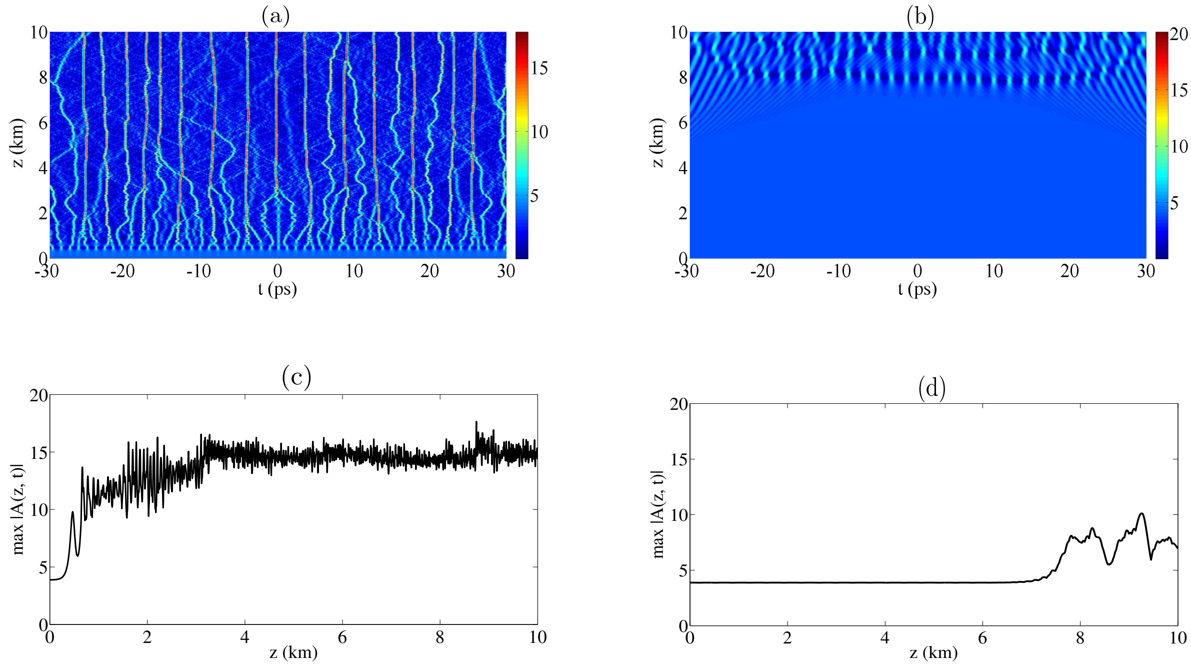

Figura 4.2: Evolução espaço temporal da Eq.(4.3) sob a solução inicial $A(0,t) = \sqrt{P_0} + \varepsilon\cos(\Omega t)$ em função do parâmetro de saturação: a) $\Gamma = 0$ W^{-1} e b) $\Gamma = 0.05$ W^{-1} para amplitude $\varepsilon = 0.01$ e frequência $\Omega = 4.5$ THz. Os gráficos (c) e (d) mostram o máximo de $|A(z,t)|$ em função da posição z no caso em que $\Gamma = 0$ W^{-1} e $\Gamma = 0.05$ W^{-1}, respectivamente. Os outros parâmetros são os mesmos da Fig. 4.1(a).

permitida diminui (como mostra a Fig. 4.1(a)) e com isso a formação de sólitons vai sendo inibida, surgindo soluções pouco estáveis a partir de $z = 8$ km. Desse modo, para $\Gamma = 0.1$ W^{-1}, não há formação de sólitons pois a frequência de $\Omega = 4.5$ THz fica além da região de ganho da MI para este valor de saturação. A estabilidade das soluções também pode ser percebida através das Figs.4.2(c) e (d), ao analisarmos como o valor de máximo $|A(z,t)|$ evolui com a distância de propagação. Na Fig.4.2(c) vemos que, sem saturação, o máximo de $|A(z,t)|$ aumenta rapidamente até uma distância em torno de $z = 3$ km, permanecendo praticamente constante e estável depois. A Fig.4.2(d) mostra que com saturação $\Gamma = 0.05$ W^{-1}, o máximo de $|A(z,t)|$ fica inalterado até aproximadamente $z = 8$ km, comportando-se oscilatoriamente a seguir.

4.3.1 Dispersão de quarta ordem

Nesta etapa, vamos estudar o efeito de dispersão de quarta ordem sobre o ganho da

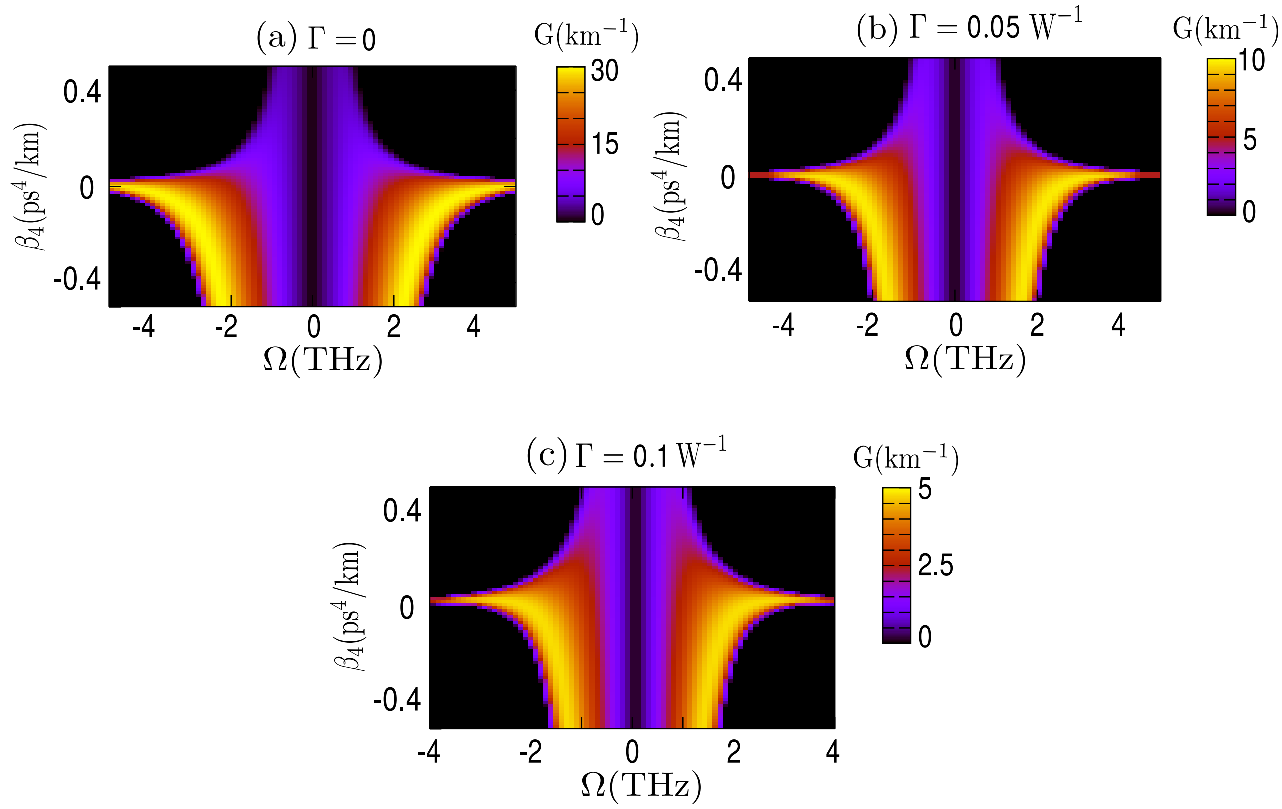

Figura 4.3: Espectro de ganho da MI como função da dispersão de quarta ordem e da frequência de modulação para diferentes valores do parâmetro de saturação. As Figs. 4.3(a)-(c) mostam o ganho em regime de dipersão normal ($\beta_2 > 0$). Os outros parâmetros são os mesmos da Fig. 4.1(a).

MI e desprezar, momentaneamente, os termos de não linearidade quíntica na Eq. 4.3. As Figs. 4.3 mostram o espectro de ganho da MI em função de β_4, para $\gamma_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, nos regimes de dispersão normal ($\beta_2 > 0$) e anômala ($\beta_2 < 0$).

De maneira geral os gráficos da Fig. 4.3 mostram duas bandas de gannho simétricas em relação a $\Omega = 0$ cuja amplitude diminui significativamente com o aumento do parâmetro de saturação. As Figs. 4.3(a)-(c) mostram o ganho em regime de dipersão normal ($\beta_2 > 0$). Nestes gráficos, observamos que o produto $\beta_2\beta_4 < 0$ propicia uma região de frequência apreciável para o ganho da MI. Vemos também que o valor de pico do ganho diminui abruptamente quando $\beta_2\beta_4$ torna-se positivo, fazendo com que o ganho de MI apresente duas bandas com amplitudes muito pequenas nesta condição. Nos gráficos das Figs. 4.3(d)-(f) mostramos o ganho em regime de dipersão anômala ($\beta_2 < 0$). Vemos que as bandas de MI características só existem

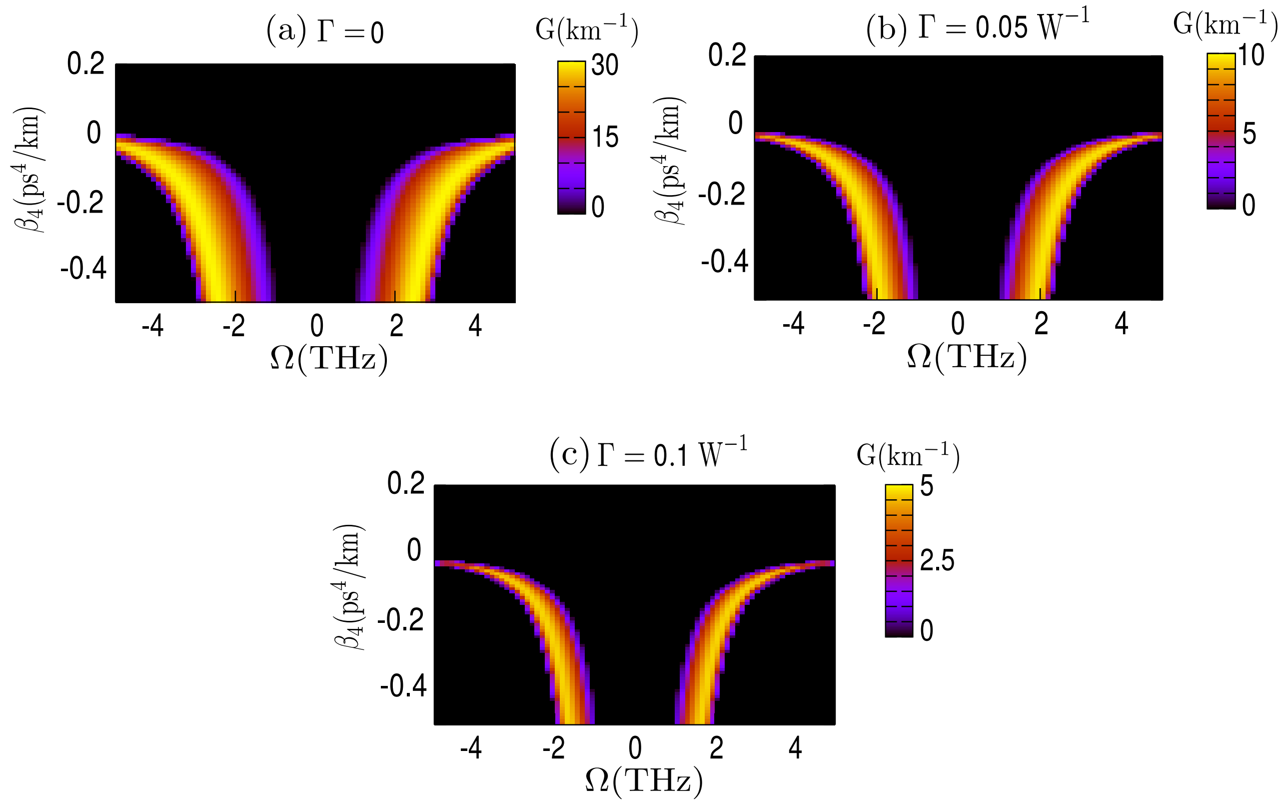

Figura 4.4: Espectro de ganho da MI como função da dispersão de quarta ordem e da frequência de modulação para diferentes valores do parâmetro de saturação. As Figs. 4.3(a)-(c) mostam o ganho em regime de dipersão anômala ($\beta_2 < 0$). Os outros parâmetros são os mesmos da Fig. 4.1(a).

para $\beta_2\beta_4 > 0$. Em concordância com outros trabalhos [32, 33], em nosso estudo verificamos também que o efeito de dispersão de terceira ordem β_3 não contribui para a MI.

4.3.2 Não linearidade quíntica

Nesta etapa, vamos estudar individualmente o efeito dos termos que representam a não linearidade quíntica sobre o ganho da MI. Nestes casos, vamos considerar presentes na Eq. (4.3) os termos de não linearidade cúbica e dispersão de quarta ordem, com os mesmos parâmetros utilizados na Fig. 4.1(b).

Na Fig. 4.5 mostramos o comportamento do ganho no caso em que $\gamma_2 \neq 0$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Podemos observar que o ganho apresenta a formação de duas bandas de frequência simétricas em relação a $\Omega = 0$ para valores de $\gamma_2 > 0$. Vemos que quando consideramos a não linearidade quíntica γ_2, o ganho vai aumentando, de maneira praticamente linear, com o

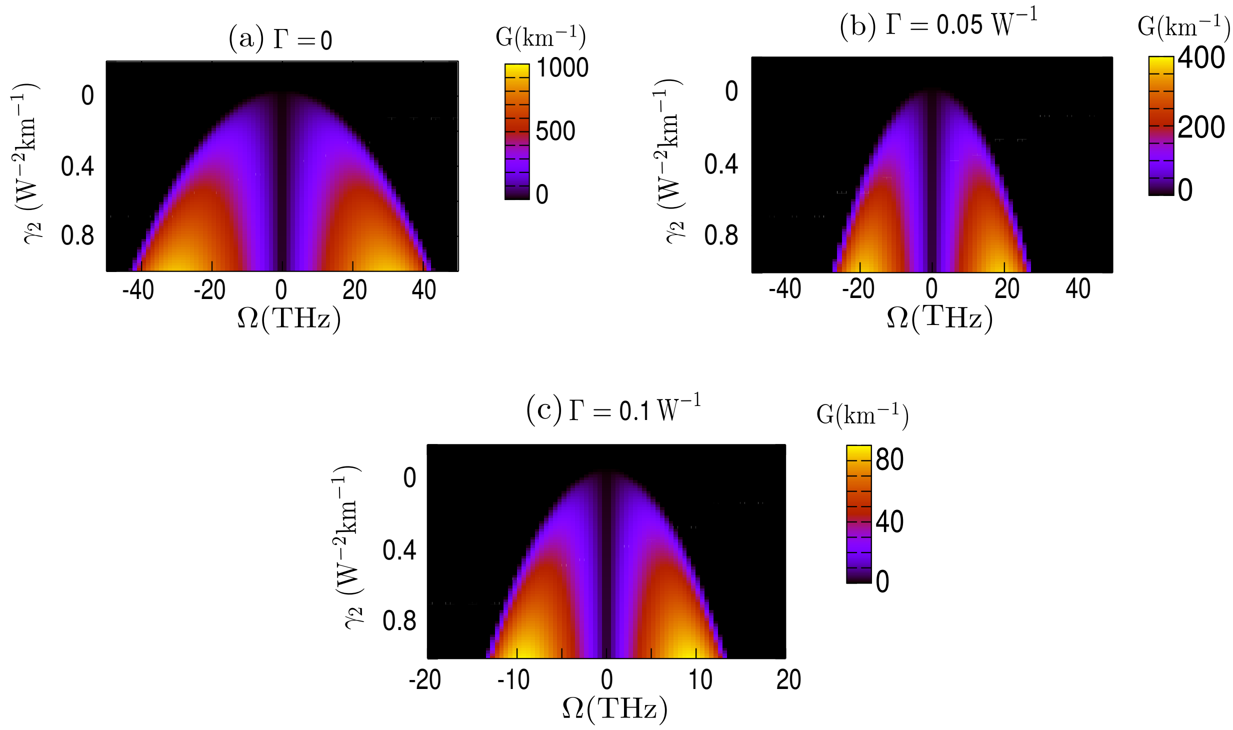

Figura 4.5: Espectro de ganho da MI como função da não linearidade quíntica γ_2 e da frequência de modulação Ω para diferentes valores do parâmetro de saturação Γ.

aumento do valor de γ_2. E praticamente linear também é a redução do intervalo de frequência de modulação à medida que o parâmetro da saturação vai aumentando.

Na Fig. 4.6 estudamos o comportamento do ganho no caso em que $\alpha_3 \neq 0$ e $\gamma_2 = \alpha_4 = 0$. Os gráficos da Fig. 4.6 mostram duas bandas de gannho simétricas em relação a $\Omega = 0$. As bandas se extendem para valores positivos e negativos de α_3, com o máximo da amplitude do ganho em torno de $\Omega = 0$. Observa-se também que amplitude do ganho vai diminuindo à medida que o parâmetro de saturação vai aumentando, mantendo a forma e a simetria das bandas inalteradas para um dado conjuto de valores de α_3. Por último, na Fig. 4.7 estudamos o comportamento do ganho no caso em que $\alpha_4 \neq 0$ e $\gamma_2 = \alpha_3 = 0$. Assim, como no resultado mostrado no gráfico da Fig. 4.6, o ganho caracteriza-se por duas bandas simétricas em relação a $\Omega = 0$, com comportamento análogo ao caso anterior.

Resultados de trabalhos anteriores [59, 32, 33], mostramos que MI pode existir não só dispersão anômalo, mas também em regime dispersão, quando se leva em conta na equação não linear de Schrödinger termos de dispersão de ordem superior e não linearidades cúbica e

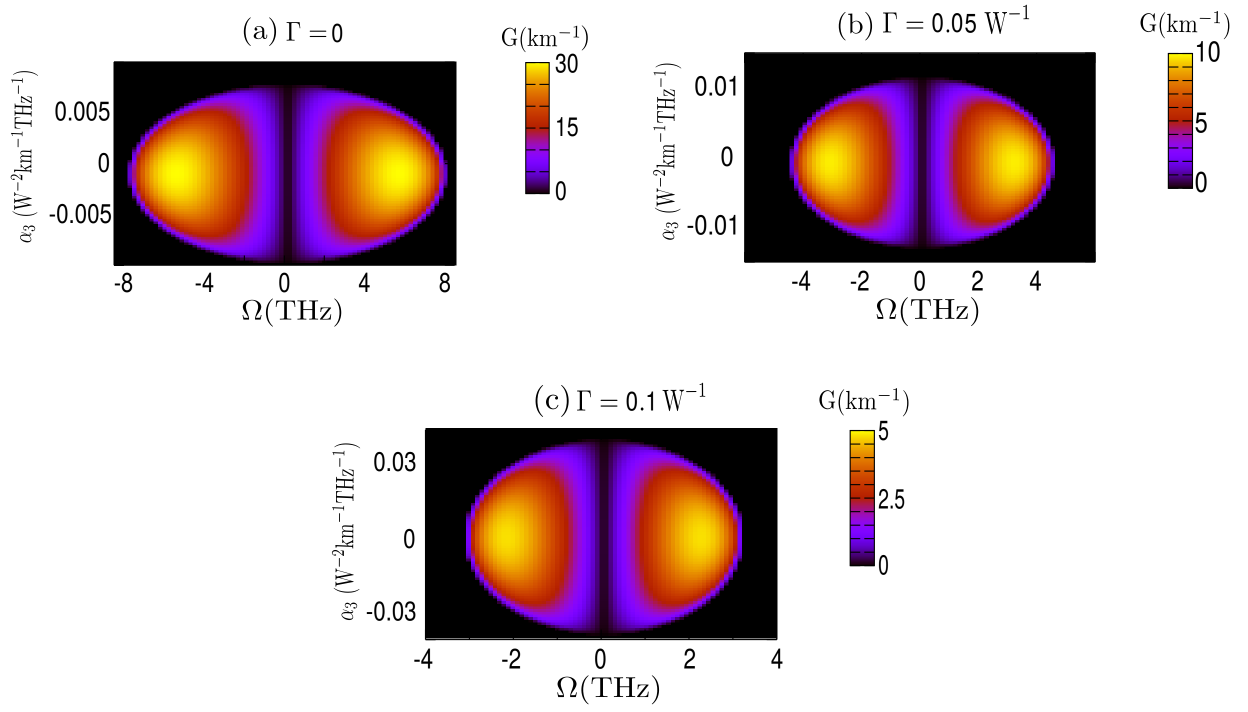

Figura 4.6: Espectro de ganho da MI como função da não linearidade quíntica α_3 e da frequência de modulação Ω para diferentes valores do parâmetro de saturação Γ.

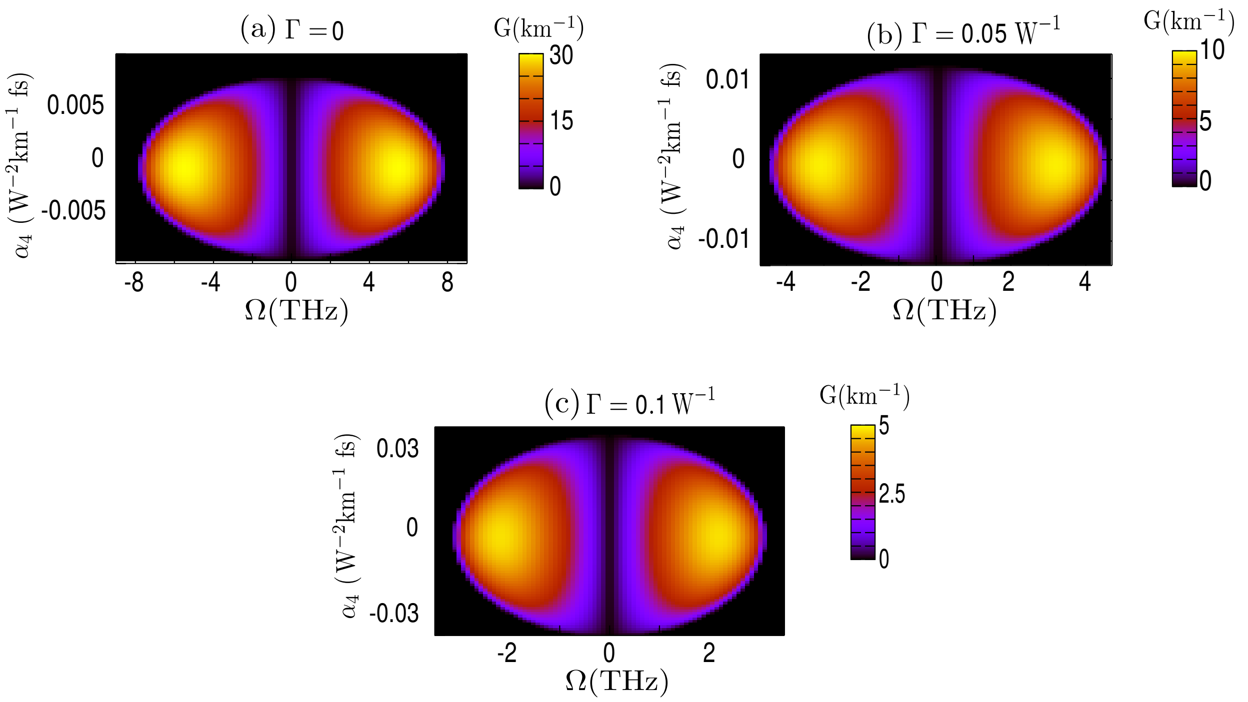

Figura 4.7: Espectro de ganho da MI como função da não linearidade quíntica α_4 e da frequência de modulação Ω para diferentes valores do parâmetro de saturação Γ.

quínticas. Os resultados apresentados pelas Figs. 4.5 - 4.7, mostram a existência de bandas de frequência devido ao ganho de MI, quando consideramos os termos de não lineares de ordem quíntica separadamente. Como estes resultados incluem a dispersão de quarta ordem, os espectros de ganho mostrados só são obtidos quando consideramos o regime de dispersão normal de velocidade de grupo. No regime anômalo não há ganho de MI, quando estudamos os efeitos de não linearidade quíntica na equação não linear de Schrödinger.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho apresentamos um estudo detalhado da MI em acopladores contradirecionais e em fibras ópticas, levando em consideração a resposta saturável nos termos não lineares. Nesta análise consideramos pequenas perturbações harmônicas sobre as soluções estacionárias, com o objetivo de encontrarmos a relação de dispersão que determina a estabilidade das soluções. Tendo determinado o intervalo de frequência para o qual ocorre a MI, é possível analisar sob que parâmetros ocorre a formação de sólitons tanto em acopladores quanto em fibras ópticas.

No Capítulo 02 modelamos a propagação de luz em fibras ópticas através da equação não linear de Schrödinger, no regime de envelope de variação lenta, obtida a partir das equações de Maxwell. Apresentamos características dos efeitos de dispersão, automodulação de fase, espalhamento Raman e autoinclinação sobre a propagação de pulsos de luz em fibras ópticas e também discutimos a origem da instabilidade modulacional. Definimos também o espectro de ganho da MI $g(\Omega)$, que determina as regiões de instabilidade que são fundamentais para a formação de soluções solitônicas.

No Capítulo 03 incialmente estudamos como a MI é afetada, em acopladores contradirecionais, pelos efeitos de autoinclinação, espalhamento Raman e da resposta saturada dos mesmos, tanto em regime de dispersão normal quanto anômala. Nossos resultados mostram, através das Figs. 3.2(a) e 3.3(a), que as que as bandas de MI sofrem uma redução em sua amplitude quando levamos em conta o efeito da saturação. Nas Figs. 3.2(b)-(c) e 3.3(b)-(c) mostramos que na presença do efeito de autoinclinação, a região de ganho apresenta bandas de frequência bem separadas, que vão se agrupando em torno de $\Omega = 0$, à medida que a saturação aumenta. Observamos que a influência efetiva da autoinclinação depende da soma algébrica dos parâmetros em cada canal. Isto pode ser verificado se compararmos as curvas apresentadas nas Figs. 3.2(a) e 3.2(d), pois o comportamento ganho de MI permanece inalterado nos casos de $s_1 = s_2 = 0$ e $s_1 = -s_2 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$.

Nas Figs. 3.5 e 3.4, mostramos uma importante da influência das formas funcionais de respostas saturável convencional (CSN) e exponencial (ESN) sobre o ganho de MI. Nossos resultados mostram, através das Figs.3.5(b) e 3.4(b), que para $\Gamma = 0.1$ kW^{-1} e $s_1 = 1\,\mathrm{ps/(kW\,m)}$ o modelo CSN mostra uma região de ganho compactada em torno de $\Omega = 0$, ao passo que o modelo ESN apresenta três bandas de frequência bem definidas: uma em torno de $\Omega = 0$ e ourtras duas em torno de $\Omega = \pm 15$ THz respectivamente. As Figs. 3.6(b) e 3.6(b) permitem uma conclusão semelhante: o modelo CSN mostram duas regiões simétricas de ganho aglomeradas em torno de $\Omega = \pm 5$THz, enquanto o modelo ESN apresenta quatro bandas de frequência bem distintas duas em torno de $\Omega = \pm 5$THz e outras duas em torno de $\Omega = \pm 15$THz. Estes resultados evidenciam que as regiões de frequência que permitem a geração de sólitons depende fortemente do tipo de modelagem da saturação dos termos não lineares.

Ao estudarmos a influência do efeito Raman nos canais dos acopladores, conforme mostram as Figs. 3.8(a) e (c), observa-se o aparecimento de uma região, além das bandas de frequências características, em que o ganho da MI aumenta linearmente com a frequência. Além do mais, quando se considera o parâmetro do espalhamento de Raman com sinais contrários, verifica-se uma quebra de simetria nas regiões de ganho, conforme mostra as Figs. 3.8(b) e 3.8(d).

O estudo realizado no Capítulo 04, analisamos os efeitos de dispersão e não linearidade de mais altas ordens, incluindo a saturação, sobre a MI. De um modo geral, a inclusão de dispersão de quarta ordem e não linearidade de ordem quíntica simultaneamente, aumentam drasticamente a amplitude e o intervalo de frequência das bandas do ganho de MI, de acordo com Figs. 4.1(a) e (b). Quando levamos em conta o efeito isolado do termo de dispersão de quarta ordem, vimos que o ganho de MI apresenta duas bandas simétricas de frequência tanto no regime de dispersão normal ($\beta_2 > 0$ e $\beta_2\beta_4 < 0$) quanto anômala ($\beta_2 < 0$ e $\beta_2\beta_4 > 0$), de acordo com as Figs. 4.3(a)-(e). Verificamos que a amplitude do ganho dimimui mais sensivelmente do que sua faixa de frequência, quando a saturação aumenta.

Investigamos também como a redução da faixa de frequência, induzida pela saturação, pode limitar a formação de trens de sólitons. A simulação apresentada na Fig. 4.2(a), mostra a formação de trens de sólitons a partir da evolução espaço temporal da solução inicial $A(0,t) = \sqrt{P_0} + \varepsilon\cos(\Omega t)$, para as regiões de ganho mostrados na Fig. 4.3(a). Vemos que as soluções evoluem de maneira caótica inicialmente, com sua amplitude aumentando gradativamente, até uma certa distância a propagação, tornando-se estáveis depois. Na presença de saturação, a formação de soluções solitônicas vai sendo afetada. A partir da Fig. 4.3(c), verificamos que o aumento da saturação vai inibindo a formação de sólitons, devido ao fato de que o intervalo de frequência onde ocorre o ganho de MI vai sendo reduzido.

Entre as perspectivas de trabalhos futuros, inclui-se a possibilidade de estudar fibras de cristal fotônico, que são fibras que contém vários núcleos que partilham o mesmo revestimento [79]. Efeitos não lineares em tais agregados de fibras tem sido analisados teoricamente, desde o início de 1990, utilizando um conjunto de equações não lineares de Schrödinger acopladas. O caso específico de três núcleos centrais (acopladores triangulares) tem atraído bastante atenção, uma vez que as três equações acopladas permitem solução analítica [80]. Além disso, há interesse em estudar propagação de sólitons no contexto de Condensados de Bose Einstein.

Apêndice A

Dedução da Equação Não Linear de Schrödinger

O Campo elétrico

Para iniciarmos a dedução da NLSE, é necessário compreender uma propriedade fundamental da transformada de Fourier na dedução da NLSE, a condição de existência de campos reais. Para que uma função seja real, é condição necessária e suficiente que a parte real da sua transformada de Fourier seja par e a parte imaginária seja ímpar. Assim, se definirmos as metades positivas e negativas do campo elétrico no domínio da frequência como $\widetilde{E}^{(+)}(\omega)$ e $\widetilde{E}^{(-)}(\omega)$, a condição de existência de campos reais será:

$$\widetilde{E}^{(-)}(\omega) = \widetilde{E}^{(+)*}(-\omega), \tag{A.1}$$

em que o sinal $*$ indica o complexo conjudado.

Uma vez que o campo elétrico é descrito por uma função real, o mesmo satisfaz a condição de existência de campos reais. Esta propriedade é importante porque permite a utilização de apenas uma metade do espectro, já que a outra pode ser obtida pela Eq. (A.1).

Como a NLSE descreve o comportamento da envoltória de variação lenta do campo elétrico em uma fibra monomodo, a definição mais geral de um campo elétrico monocromático propagando em uma fibra óptica monomodo é:

$$E(r, z, t) = E_0 R(x, y) \cos[\beta(\omega) z - \omega t], \tag{A.2}$$

em que o índice r condensa as coordenadas transversais (x, y), E_0 é uma constante, $R(x, y)$ é a distribuição transversal do campo, $\beta(\omega)$ é a constante de propagação calculada na freqüência ω e z a direção de propagação. Uma vez que (A.2) é uma representação meramente matemática, já que um campo elétrico monocromático não existe fisicamente, vamos considerar que o campo elétrico é constituído por infinitos campos monocromáticos e pode ser escrito por uma integral da seguinte forma:

$$E(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{R}(\omega, r)\widetilde{E}(\omega, z)e^{i[\beta(\omega)z-\omega t]}d\omega, \tag{A.3}$$

em que $\widetilde{R}(\omega, r)$ é o modo do campo na freqüência ω e $\widetilde{E}(\omega, z)$ é a amplitude em z do campo monocromático com freqüência ω. Separando (A.3) em duas integrais, cada uma envolvendo uma metade do espectro, temos:

$$\begin{aligned} E(r, z, t) = &\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \widetilde{R}^{(+)}(\omega, r)\widetilde{E}^{(+)}(\omega, z)e^{i[\beta(\omega)z-\omega t]}d\omega \\ &+\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \widetilde{R}^{(-)}(\omega, r)\widetilde{E}^{(-)}(\omega, z)e^{i[\beta(\omega)z-\omega t]}d\omega. \end{aligned} \tag{A.4}$$

De acordo com a condição de existência de campos reais, temos:

$$\widetilde{R}^{(-)}(\omega, r)\widetilde{E}^{(-)}(\omega, z)e^{i\beta z} = \widetilde{R}^{(+)*}(-\omega, r)\widetilde{E}^{(+)*}(-\omega, z)e^{-i\beta z}, \tag{A.5}$$

em que omitimos a dependência de $\beta(\omega)$ por simplificar a notação. Substituindo (A.5) em (A.4), temos:

$$\begin{aligned} E(r, z, t) = &\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \widetilde{R}^{(+)}(\omega, r)\widetilde{E}^{(+)}(\omega, z)e^{i[\beta z-\omega t]}d\omega \\ &+\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \widetilde{R}^{(+)*}(-\omega, r)\widetilde{E}^{(+)*}(-\omega, z)e^{i[-\beta z-\omega t]}d\omega. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Fazendo uma mudança de variável $\omega' = -\omega$ na segunda integral de (A.6), temos:

$$\begin{aligned} E(r, z, t) = &\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \widetilde{R}^{(+)}(\omega, r)\widetilde{E}^{(+)}(\omega, z)e^{i[\beta z-\omega t]}d\omega \\ &-\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{0} \widetilde{R}^{(+)*}(\omega', r)\widetilde{E}^{(+)*}(\omega', z)e^{-i[\beta z-\omega' t]}d\omega', \end{aligned} \tag{A.7}$$

e portanto

$$E(r,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \widetilde{R}^{(+)}(\omega,r)\widetilde{E}^{(+)}(\omega,z)e^{i[\beta z-\omega t]}d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \widetilde{R}^{(+)*}(\omega',r)\widetilde{E}^{(+)*}(\omega',z)e^{-i[\beta z-\omega' t]}d\omega'. \tag{A.8}$$

Definindo a função $C(r,z,t)$ como:

$$C(r,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \widetilde{R}^{(+)}(\omega,r)\widetilde{E}^{(+)}(\omega,z)e^{i[\beta z-\omega t]}d\omega, \tag{A.9}$$

a Eq. (A.8) pode ser reescrita por:

$$E(r,z,t) = C(r,z,t) + C^{*}(r,z,t). \tag{A.10}$$

Considerando como primeira aproximação que o modo é independente da frequência, (A.9) torna-se:

$$C(r,z,t) = R(r)\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \widetilde{E}^{(+)}(\omega,z)e^{i[\beta z-\omega t]}d\omega, \tag{A.11}$$

e considerando $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, podemos reescrever (A.11) como:

$$C(r,z,t) = R(r)\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{+\infty} \widetilde{E}^{(+)}(\Delta\omega+\omega_0,z)e^{i[\beta z-\Delta\omega t-\omega_0 t+\beta_0 z-\beta_0 z]}d\Delta\omega. \tag{A.12}$$

Mas como $\widetilde{E}^{(+)}$ correspondo à parte positiva do espectro, então $\widetilde{E}^{(+)}(\omega'+\omega_0) = 0$ para $(\omega' < \omega_0$, logo:

$$C(r,z,t) = e^{i[\beta_0 z-\omega_0 t]}R(r)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{E}^{(+)}(\Delta\omega+\omega_0,z)e^{i[\beta z-\beta_0 z-\Delta\omega t]}d\Delta\omega. \tag{A.13}$$

Definindo $\widetilde{A}(\Delta\omega,z)$ por:

$$\widetilde{A}(\Delta\omega,z) = \widetilde{E}^{(+)}(\Delta\omega+\omega_0,z)e^{i[\beta z-\beta_0 z]} \tag{A.14}$$

e substituindo (A.14) em (A.13) temos:

$$C(r,z,t) = e^{i[\beta_0 z-\omega_0 t]}R(r)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}(\Delta\omega,z)e^{-i\Delta\omega t}d\Delta\omega. \tag{A.15}$$

Portanto:

$$C(r, z, t) = e^{i[\beta_0 z - \omega_0 t]} R(r) A(z, t) \tag{A.16}$$

em que $A(z, t)$ é a transformada de Fourier inversa de $\widetilde{A}(\Delta\omega, z)$, que representa a envoltória de variação lenta do campo elétrico. Assim, utilizando (A.16) em (A.10), o campo elétrico pode ser escrito por:

$$E(r, z, t) = R(r)A(z, t)e^{i[\beta_0 z - \omega_0 t]} + R^*(r)A^*(z, t)e^{-i[\beta_0 z - \omega_0 t]}, \tag{A.17}$$

ou ainda:

$$E(r, z, t) = 2|R(r)||A(z, t)|\cos(\beta_0 z - \omega_0 t). \tag{A.18}$$

Polarização Induzida

Para tornar a descrição completa e obter a equação de onda, precisamos de uma relação entre a polarização induzida **P** e o campo elétrico **E**. Quando submetido a campos eletromagnéticos intensos, a resposta de qualquer meio dielétrico torna-se não linear. A origem desta resposta não linear está associada com o movimento não harmônico dos elétrons ligados sujeitos à influência do campo aplicado. A polarização total **P**, induzida pelos dipolos elétricos, pode ser escrita como uma expansão em série de Taylor em termos do campo elétrico aplicado [1]

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} . \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{EE} + \epsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{EEE} + \ldots, \tag{A.19}$$

com componentes

$$P_i = \epsilon_0 \left[\sum_{j=1}^{3} \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{j,k,l=1}^{3} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \ldots \right] \tag{A.20}$$

em que a susceptibilidade elétrica $\chi^{(j)}$ é um tensor de ordem $j + 1$.

A susceptibilidade $\chi^{(1)}$ corresponde a contribuição dominante de **P** e seus efeitos estão associados à atenuação e a parte linear do índice de refração $n(\omega)$.

O segundo termo da expansão da Eq. (A.20) é responsável por efeitos não lineares de segunda ordem, tal como geração de segundo harmônico. No caso de fibras de vidro, que são meios que apresentam simetria de inversão, as susceptibilidades de ordem par são identicamente nulas, $\chi^{(2j)} = 0$ [81]. Assim, a contribuição não linear de mais baixa ordem que atua nas fibras é devida a suceptibilidade elétrica de terceira ordem $\chi^{(3)}$. Este termo é responsável por vários efeitos não lineares, tais como mistura de quatro ondas, geração de terceiro harmônico e refração não linear. Neste trabalho daremos ênfase ao efeito de índice de refração não linear.

Ao incluirmos os efeitos não lineares de mais baixa ordem, a polarização induzida pode ser escrita, no domínio da frequência, como a soma de contribuições linear e não linear:

$$\widetilde{P} = \widetilde{P}_L + \widetilde{P}_{NL}. \tag{A.21}$$

As partes linear $\widetilde{P}_L$ e a não linear $\widetilde{P}_{NL}$ da polarização estão associados ao campo elétrico e podem ser expressas respectivamente por:

$$\widetilde{P}_L(\omega) = \epsilon_0 \widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)\widetilde{E}(\omega) \tag{A.22}$$

e

$$\widetilde{P}_{NL}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \epsilon_0 \chi^3 \iint \eta(\omega - \omega_1)\widetilde{E}(\omega_1)\widetilde{E}(\omega_2)\widetilde{E}(\omega_3) d\omega_1 d\omega_2. \tag{A.23}$$

Na Eq. (A.23), $\chi^3\eta^{(3)}(\omega)$ é a susceptibilidade de terceira ordem expressa por um termo independente χ^3 e um dependente da frequência $\eta^{(3)}(\omega)$. As componentes da polarização podem ser escritas ainda por:

$$\widetilde{P}_L(\omega) = \widetilde{P}_L^{(+)}(\omega) + \widetilde{P}_{NL}^{(-)}(\omega), \tag{A.24}$$

$$\widetilde{P}_{NL}(\omega) = \widetilde{P}_{NL}^{(+)}(\omega) + \widetilde{P}_{NL}^{(-)}(\omega), \tag{A.25}$$

em que os sinais (+) e (-) indicam as regiões de frequências positivas e negativas. O termo $\widetilde{P}_L^{(+)}$ é encontrado imediatamente de (A.22), substituindo $\widetilde{E}$ por $\widetilde{E}^{(+)}$. Para que o produto em (A.23) resulte em $\widetilde{P}_{NL}(\omega)$ com frequência positiva é necessário que os três, ou somente dois campos elétricos tenham frequência positiva [25]. Isto permite então limitar $\widetilde{P}_{NL}^{(+)}(\omega)$ a três combinações possíveis em (A.23) de dois campos com frequência positiva e o terceiro com frequência negativa. Com os campos elétricos são idênticos, podemos escrever:

$$\widetilde{P}_{NL}^{(+)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 3\epsilon_0\chi^3 \iint \eta^{(3)}(\omega - \omega_1)\widetilde{E}(\omega_1)\widetilde{E}(\omega_2)\widetilde{E}(-\omega_3)d\omega_1 d\omega_2, \tag{A.26}$$

em que o fator 3 surge da soma da três combinações possíveis. Usando a notação de espectro positivo e negativo:

$$\widetilde{P}_{NL}^{(+)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 3\epsilon_0\chi^3 \iint \eta^{(3)}(\omega - \omega_1)\widetilde{E}^{(+)}(\omega_1)\widetilde{E}^{(+)}(\omega_2)\widetilde{E}^{(-)}(\omega_3)d\omega_1 d\omega_2. \tag{A.27}$$

Como $\omega_3 = \omega - \omega_1 - \omega_2$ e considerando a condição de existência de campos reais em $\widetilde{E}^{(-)}(\omega - \omega_1 - \omega_2)$, a parte não linear da polarização fica expressa por:

$$\widetilde{P}_{NL}^{(+)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 3\epsilon_0\chi^3 \iint \eta^{(3)}(\omega - \omega_1)\widetilde{E}^{(+)}(\omega_1)\widetilde{E}^{(+)}(\omega_2)\widetilde{E}^{(+)*}(\omega_1 + \omega_2 - \omega)d\omega_1 d\omega_2. \tag{A.28}$$

Equação Não Linear de Schrödinger

A descrição da propagação de ondas eletromagnéticas em fibras ópticas, como qualquer outro fenômeno eletromagnético, é feita através das equações de Maxwell. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a forma diferencial deste conjunto de equações é dada por

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{A.29}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{A.30}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_l(\mathbf{r}, t), \tag{A.31}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{A.32}$$

em que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente. O vetor de densidade de corrente $\mathbf{J}$ e a densidade de carga livres ρ_l representam as fontes de campo eletromagnético. Os vetores dados por $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ representam o deslocamento elétrico e a indução magnética que aparecem em resposta aos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ que se propagam pelo meio. Os vetores $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ são dados pelas seguintes relações constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{A.33}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{A.34}$$

em que ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, μ_0 é permeabilidade magnética do vácuo, $\mathbf{P}$ é a polarização induzida e $\mathbf{M}$ é magnetização induzida.

Como a fibra é um meio não magnético ($\mathbf{M} = 0$) e que não apresenta fontes de cargas elétricas ($\rho = 0$) e corrente elétrica ($\mathbf{J} = 0$), podemos reescrever as equações de Maxwell da seguinte maneira

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{A.35}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{A.36}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{A.37}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{A.38}$$

Aplicando a transformada de Fourier direta em (A.35) e (A.36), temos:

$$\nabla \times \widetilde{E} = i\omega\mu_0 \widetilde{H}, \tag{A.39}$$

$$\nabla \times \widetilde{H} = -i\omega \left(\epsilon_0 \widetilde{E} + \widetilde{P}\right). \tag{A.40}$$

Tomando o rotacional de (A.39), combinando o resultado com (A.42) e utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \widetilde{E} = \nabla(\nabla \cdot \widetilde{E}) - \nabla^2 \widetilde{E}, \tag{A.41}$$

obtemos[1]:

$$\nabla^2 \widetilde{E} = -\omega^2 \mu_0 \left(\epsilon_0 \widetilde{E} + \widetilde{P}_L + \widetilde{P}_{NL}\right). \tag{A.42}$$

Substituindo (A.22) em (A.42) e definindo $\epsilon(\omega) = 1 + \widetilde{\chi}^{(1)}(\omega)$, obtemos a equação que descreve a propagação de luz em fibras ópticas:

[1] Considerando meios isotrópicos e livres de cargas, o primeiro termo do lado direito da Eq. (A.41) se anula, pois da Eq. (A.37) $\nabla \cdot \widetilde{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \widetilde{E} = 0$.

$$\nabla^2 \widetilde{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\widetilde{E} - \omega^2\mu_0\widetilde{P}_{NL}, \tag{A.43}$$

em que $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ e c é a velocidade da luz no vácuo.

A Eq. (A.43) é a equação de Helmholtz acrescida de um termo não linear. As constantes de propagação são obtidas pela equação de Helmholtz, considerando que $\widetilde{P}_{NL} = 0$. Trata-se de uma aproximação que considera o efeito não linear como uma perturbação [1].

Como feito anteriormente, vamos utilizar a metade positiva do espectro

$$\widetilde{E}^{(+)} = R(r)\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)e^{i\beta z} \tag{A.44}$$

e substituir $\widetilde{E}$ por $\widetilde{E}^{(+)}$ e $\widetilde{P}_{NL}(\omega)$ por $\widetilde{P}^{(+)}_{NL}(\omega)$ na Eq. (A.43) do seguinte modo:

$$\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)e^{i\beta z}\nabla^2_\perp\left[R(r)\right] + R(r)\frac{\partial^2\left[\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)e^{i\beta z}\right]}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)R(r)\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)e^{i\beta z} - \omega^2\mu_0\widetilde{P}^{(+)}_{NL}(\omega), \tag{A.45}$$

em que $\nabla^2_\perp = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ é o laplaciano transversal. Expandindo a a derivada segunda em relação a z, obtemos:

$$\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)e^{i\beta z}\nabla^2_\perp\left[R(r)\right] + R(r)e^{i\beta z}\left[\frac{\partial^2\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)}{\partial z^2} + 2i\beta\frac{\partial\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)}{\partial z} - \beta^2\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)\right] = -\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)R(r)\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)e^{i\beta z} - \omega^2\mu_0\widetilde{P}^{(+)}_{NL}(\omega). \tag{A.46}$$

Organizando os termos da Eq. (A.46):

$$\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)e^{i\beta z}\left[\nabla^2_\perp - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\right]R(r) + (2i\beta)\frac{\partial\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)}{\partial z}R(r)e^{i\beta z} + R(r)e^{i\beta z}\frac{\partial^2\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)}{\partial z^2} = -\omega^2\mu_0\widetilde{P}^{(+)}_{NL}(\omega). \tag{A.47}$$

O primeiro termo entre colchetes na Eq. (A.47) é a solução da equação de Helmholtz e, portanto, igual a zero. Para pulsos com largura temporal acima de 10 fs, derivada segunda em relação a z é pequena e pode ser desprezada [1], de modo que (A.47) se reduz a:

$$(2i\beta)\frac{\partial\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)}{\partial z}R(r)e^{i\beta z} = -\omega^2\mu_0\widetilde{P}^{(+)}_{NL}(\omega). \tag{A.48}$$

Substituindo a Eq. (A.28) em (A.48), temos:

$$(2i\beta)\frac{\partial\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)}{\partial z}R(r)e^{i\beta(\omega)z} = -3\omega^2\mu_0\epsilon_0\chi^3\iint\eta^{(3)}(\omega-\omega_1)\times \widetilde{E}^{(+)}(z,\omega_1)\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega_2)\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega-\omega_1-\omega_2)d\omega_1 d\omega_2. \quad \text{(A.49)}$$

Agora, substituindo (A.44) em (A.49) e multiplicando e dividindo por quatro o lado direito,obtemos:

$$\frac{\partial\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega)}{\partial z}R(r)e^{i\beta(\omega)z} = 4i\frac{3}{8}\frac{\omega^2\chi^3}{c^2\beta(\omega)}\iint\eta^{(3)}(\omega-\omega_1)R(r)\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega_1)e^{i\beta(\omega_1)z}\times R(r)\widetilde{E}^{(+)}(z,\omega_2)e^{i\beta(\omega_2)z}R^*(r)\widetilde{E}^{(+)*}(\omega_1+\omega_2-\omega)e^{i\beta(\omega_1+\omega_2-\omega)z}d\omega_1 d\omega_2. \quad \text{(A.50)}$$

Outra aproximação que vamos considerar é a aproximação de guiamento fraco, quando o contraste entre o índice de refração da casca e do núcleo da fibra é baixo, isto é: $n_e f \approx n = \beta(\omega)\frac{c}{\omega}$. Por outro lado, o índice de refração não linear é definido por $n_2 = \frac{3}{8n}\chi^3$ em unidade de $\mathrm{m^2V^{-2}}$. Introduzindo $\Delta\beta = \beta(\omega_1)+\beta(\omega_2)-\beta(\omega_1+\omega_2-\omega)-\beta(\omega)$ e utilizando a Eq. (A.14), podemos reescrever a Eq. (A.50) por:

$$\frac{\partial\widetilde{A}(\Delta\omega,z)}{\partial z}e^{-i[\beta(\omega)-\beta_0]z}R(r) - i\left[\beta(\omega)-\beta_0\right]\widetilde{A}(\Delta\omega,z)R(r)e^{-i[\beta(\omega)-\beta_0]z} = 4i\frac{n_2\omega}{c}\times \iint\eta^{(3)}(\Delta\omega-\Delta\omega_1)R(r)\widetilde{A}(\Delta\omega_1,z)R(r)\widetilde{A}(\Delta\omega_2,z)R^*(r)\widetilde{A}^*(\Delta\omega_1+\Delta\omega_2-\Delta\omega)e^{-i[\beta(\omega)-\beta_0]z}d\Delta\omega_1 d\Delta\omega_2, \quad \text{(A.51)}$$

em que $\Delta\omega = \omega-\omega_0$. Simplificando (A.51) por $e^{-i[\beta(\omega)-\beta_0]z}$ e expandindo $\beta(\omega)$ em série de Taylor em torno da frequência portadora ω_0

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega-\omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\beta_2 + \frac{1}{6}(\omega-\omega_0)^3\beta_3 + \ldots = \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}(\Delta\omega)^m\beta_m, \quad \text{(A.52)}$$

temos:

$$\frac{\partial\widetilde{A}(\Delta\omega,z)}{\partial z}R(r) - i\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}(\Delta\omega)^m\beta_m\right]\widetilde{A}(\Delta\omega,z)R(r) = 4i\frac{n_2\omega}{c}\times \iint\eta^{(3)}(\Delta\omega-\Delta\omega_1)R(r)\widetilde{A}(\Delta\omega_1,z)R(r)\widetilde{A}(\Delta\omega_2,z)R^*(r)\widetilde{A}^*(\Delta\omega_1+\Delta\omega_2-\Delta\omega)d\Delta\omega_1 d\Delta\omega_2. \quad \text{(A.53)}$$

Multiplicando ambos os lados por $R^*(r)$ e integrando transversalmente, podemos escrever (A.53) por:

$$\frac{\partial \widetilde{A}(\Delta\omega, z)}{\partial z} - i\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}(\Delta\omega)^m \beta_m\right] \widetilde{A}(\Delta\omega, z) = 4\frac{\iint |R(x,y)|^4 dxdy}{\iint |R(x,y)|^2 dxdy} i\frac{n_2\omega_0}{c}\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \times$$
$$\iint \eta^{(3)}(\Delta\omega - \Delta\omega_1)\widetilde{A}(\Delta\omega_1, z)\widetilde{A}(\Delta\omega_2, z)\widetilde{A}^*(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 - \Delta\omega)d\Delta\omega_1 d\Delta\omega_2. \quad \text{(A.54)}$$

Para obtermos a NLSE ainda precisamos transformar (A.54) para o domínio do tempo. As transformadas inversas de Fourier para os dois primeiros termos do lado esquerdo são elementares. Vamos tratar então a transformada inversa da integral dupla contendo $\eta^{(3)}(\Delta\omega - \Delta\omega_1)$. Vamos fazer as seguintes definições:

$$\widetilde{Q}(z, \Delta\omega) = \widetilde{A}(z, -\Delta\omega), \quad \text{(A.55)}$$

$$\widetilde{V}(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1) = \int \widetilde{A}(z, \Delta\omega_2)\widetilde{Q}^*\left(z, (\Delta\omega - \Delta\omega_1) - \Delta\omega_2\right) d\Delta\omega_2, \quad \text{(A.56)}$$

em que $\widetilde{V}$ é a convolução entre $\widetilde{A}$ e $\widetilde{Q}^*$. Substituindo (A.56) em (A.54), obtemos:

$$\frac{\partial \widetilde{A}(\Delta\omega, z)}{\partial z} - i\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}(\Delta\omega)^m \beta_m\right] \widetilde{A}(\Delta\omega, z) = 4\frac{\iint |R(x,y)|^4 dxdy}{\iint |R(x,y)|^2 dxdy} i\frac{n_2\omega_0}{c}\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \times$$
$$\int \eta^{(3)}(\Delta\omega - \Delta\omega_1)\widetilde{A}(\Delta\omega_1, z)\widetilde{V}(z, \Delta\omega - \Delta\omega_1)d\Delta\omega_1. \quad \text{(A.57)}$$

Utilizando * como símbolo da operação de convolução, a Eq. (A.57) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \widetilde{A}(\Delta\omega, z)}{\partial z} - i\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}(\Delta\omega)^m \beta_m\right] \widetilde{A}(\Delta\omega, z) = 4\frac{\iint |R(x,y)|^4 dxdy}{\iint |R(x,y)|^2 dxdy} i\frac{n_2\omega_0}{c}\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \times$$
$$\widetilde{A}(\Delta\omega, z) * \left[\eta^{(3)}(\Delta\omega)\widetilde{V}(z, \Delta\omega)\right]. \quad \text{(A.58)}$$

Considerando as propriedades da convolução:

$$F\left[A(t)B(t)\right] = \widetilde{A} * \widetilde{B}, \quad \text{(A.59)}$$

$$F^{-1}\left[\widetilde{A} * \widetilde{B}\right] = A(t)B(t), \quad \text{(A.60)}$$

e lembrando que, durante uma operação de transformada de Fourier, os termos $(\omega-\omega_0)^m$ devem ser repostos pelos operadores diferenciais $i^m\frac{\partial^m}{\partial t^m}$, podemos expressar (A.58) como:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{m+1}\beta_m}{m!}\frac{\partial^m A(z,t)}{\partial t^m} = 4\frac{\iint |R(x,y)|^4 dxdy}{\iint |R(x,y)|^2 dxdy} i\frac{n_2\omega_0}{c}\left(1-\frac{i}{\omega_0}\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}\right)\times F^{-1}\left[\eta^{(3)}(\Delta\omega)\widetilde{V}(z,\Delta\omega)\right]. \quad \text{(A.61)}$$

Definindo $R(t) = F^{-1}\eta^{(3)}(\Delta\omega)$, temos:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{m+1}\beta_m}{m!}\frac{\partial^m A(z,t)}{\partial t^m} = 4\frac{\iint |R(x,y)|^4 dxdy}{\iint |R(x,y)|^2 dxdy} i\frac{n_2\omega_0}{c}\left(1-\frac{i}{\omega_0}\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}\right)\times \left[R(t) * F^{-1}\widetilde{V}(z,\Delta\omega)\right]. \quad \text{(A.62)}$$

Da Eq. (A.56), temos que:

$$V(z,t) = F^{-1}\left[\widetilde{A}(z,\Delta\omega) * \widetilde{B}(z,\Delta\omega)\right] = F^{-1}\left[\widetilde{A}(z,\Delta\omega) * \widetilde{A}^*(z,-\Delta\omega)\right] = F^{-1}\left[\widetilde{A}(z,\Delta\omega)\right] F^{-1}\left[\widetilde{A}^*(z,-\Delta\omega)\right], \quad \text{(A.63)}$$

mas

$$F^{-1}\left[\widetilde{A}(z,\Delta\omega)\right] = A(z,t) \quad \text{(A.64)}$$

e

$$F^{-1}\left[\widetilde{A}^*(z,-\Delta\omega)\right] = A*(z,t), \quad \text{(A.65)}$$

portanto

$$V(z,t) = A(z,t)A*(z,t) = |A(z,t)|^2. \quad \text{(A.66)}$$

Assim, com o auxílio de (A.67), a Eq. (A.62) fica expressa por:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{m+1}\beta_m}{m!}\frac{\partial^m A(z,t)}{\partial t^m} = 4\frac{\iint |R(x,y)|^4 dxdy}{\iint |R(x,y)|^2 dxdy} i\frac{n_2\omega_0}{c}\times \left(1-\frac{i}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\right) A(z,t)\int_0^{+\infty} R(\tau)|A(z,t-\tau)|^2 d\tau, \quad \text{(A.67)}$$

em que $R(\tau)$ é a função resposta que representa o efeito Raman, discutida mais detalhadamente no Cap. 2.

Para que $|A(z,t)|^2$ represente a potência óptica, é necessário normalizar por um fator k calculado através do vetor de Poynting que, de acordo com a notação adotada em (A.18), é obtido através da relação:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \left[|R(x,y)|^2 |A(z,t)|^2 \cos^2(\beta_0 z - \omega_0 t) \right]. \quad \text{(A.68)}$$

Para obter a potência, integramos o vetor de Poynting transversalmente:

$$P = 4 \iint |R(x,y)|^2 dxdy \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \left[|A(z,t)|^2 \cos^2(\beta_0 z - \omega_0 t) \right]. \quad \text{(A.69)}$$

Em seguida, vamos calcular a média temporal de (A.69), fazendo a integração num período $T = 2\pi/\omega_0$. Considerando que o $\cos(\omega_0 t)$ varia muito mais rápido que $|A(z,t)|$, devido ao fato de que ω_0 é a frequência da portadora e $|A(z,t)|$ é a envoltória de variação lenta, podemos considerar $|A(z,t)|$ independente de t no período T. Assim, a média temporal fica expressa por:

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{T} \int P dt = \frac{1}{2} \left[4 \iint |R(x,y)|^2 dxdy \right] \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \left[|A(z,t)|^2 \right]. \quad \text{(A.70)}$$

Dessa forma, para que $|A(z,t)|^2$ represente a potência é necessário que $\langle P \rangle_T = |A(z,t)|^2$, o que implica em um fator de normalização dado por:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \iint |R(x,y)|^2 dxdy}}. \quad \text{(A.71)}$$

Assim, substituindo o fator de normalização, redefinindo o índice de refração não linear por:

$$n_2' = 2n_2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}, \quad \text{(A.72)}$$

e introduzindo o parâmetro não linear γ, dado por:

$$\gamma = \frac{n_2' \omega_0}{c A_{ef}}, \quad \text{(A.73)}$$

em que

$$A_{ef} = \frac{\left(\iint |R(x,y)|^2 dxdy \right)^2}{\iint |R(x,y)|^4 dxdy}, \quad \text{(A.74)}$$

obtemos finalmente que:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{m+1}\beta_m}{m!}\frac{\partial^m A(z,t)}{\partial t^m} = i\gamma\left(1 - \frac{i}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\right) A(z,t) \int_0^{+\infty} R(\tau)|A(z,t-\tau)|^2 d\tau. \quad \text{(A.75)}$$

Ainda é possível, considerando a aproximação de variação lenta da envoltória, a seguinte expansão em série de Taylor [1]:

$$|A(z,t-\tau)|^2 \approx |A(z,t)|^2 - \tau\frac{\partial}{\partial t}|A(z,t)|^2, \quad \text{(A.76)}$$

e definindo a função resposta não linear T_R por:

$$T_R = \int_0^{+\infty} \tau R(\tau) d\tau \approx f_R \int_0^{+\infty} \tau h(\tau) d\tau, \quad \text{(A.77)}$$

em que $R(\tau)$ é dada por (2.28), a Eq. (A.75) fica expressa por:

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{m+1}\beta_m}{m!}\frac{\partial^m A(z,t)}{\partial t^m} = i\gamma\left(|A(z,t)|^2 A(z,t) + \frac{i}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(|A(z,t)|^2 A(z,t)\right) - T_R A(z,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(|A(z,t)|^2\right)\right). \quad \text{(A.78)}$$

Bibliografia

[1] G .P. Agrawal. Nonlinear Fiber Optics. Elsevier Inc., fourth edition edition, 2007.

[2] R. H. Stolen, J. P. Gordon, W. J. Tomlinson, e H. A. Haus. J. Opt. Soc. Am. B, **6**, 1159, 1989.

[3] W.B. Fraga, J.W.M. Menezes, M.G. da Silva, C.S. Sobrinho, e A.S.B. Sombra. Opt. Commun., **262**, 32, 2006.

[4] A. Choudhuri e K. Porsezian. Phys. Rev. A, **85**, 033820, 2012.

[5] J. E. Allen. Phys. Scr., **57**, 436, 1998.

[6] J. S. Russell. Report of the British Association for the Advancement of Science . 1845.

[7] D. J. Korteweg e G. de Vries. Phil. Mag., **39**, 442, 1895.

[8] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, e G. Weinreich. Phys. Rev. Lett., **7**, 118, 1961.

[9] A. Hasegawa e F. Tappert. Appl. Phys. Lett., **23**, 142, 1973.

[10] N. J. Zabusky e M. D. Kruskal. Phys. Rev. Lett., **15**, 240, 1965.

[11] M. Lakshmanan. Solitons. Springer-Verlag, 1988.

[12] M. Peyrard. Molecular Excitations in Biomolecules. Springer-Verlag, 1995.

[13] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, Charles W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, e W. D. Phillips. Science, **287**, 97, 2000.

[14] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, e C. Salomon. Science, **296**, 1290, 2002.

[15] P. Emplit, J.P. Hamaide, F. Reynaud, C. Froehly, e A. Barthelemy. Opt. Comm., **62**, 374, 1987.

[16] L. F. Mollenauer e J. P. Gordon. Solitons in optical fibers. Elsevier Academic Press, 2006.

[17] H. A. Haus e W. S. Wong. Rev. Mod. Phys., **68**, 423, 1996.

[18] A. Hasegawa. Phys. Rev. A, **1**, 1746, 1970.

[19] F. Lu, L. Xiumin, e F. Qiyuan. J. Quantum Electron, **29**, 546, 1999.

[20] D. A. Korobko, O. G. Okhotnikov, e I. O. Zolotovskii. J. Opt. Soc. Am. B, **30**, 2377, 2013.

[21] A. K. Shafeeque Ali, K. Porsezian, e T. Uthayakumar. Phys. Rev. E, **90**, 042910, 2014.

[22] Y. Xiang, X. Dai, S. Wen, e D. Fan. J. Opt. Soc. Am. B, **28**, 908, 2011.

[23] A. Choudhuri e K. Porsezian. Opt. Commun., **285**, 364, 2012.

[24] P. V. Mamyshev e S. V. Chernikov. Opt. Lett., **15**, 1076, 1990.

[25] P. L. François. J. Opt. Soc. Am. B, **8**, 276, 1991.

[26] K. J. Blow e D. Wood. J. Quantum Electron., **25**, 2665, 1989.

[27] N. Da Dalt, C. De Angelis, G. F. Nalesso, e M. Santagiustina. Opt. Commun., **121**, 69, 1995.

[28] M. Stepić, C. E. Rüter, D. Kip, A. Maluckov, e L. Hadžievski. Opt. Commun., **267**, 229, 2006.

[29] K. Nithyanandan, R. V. J. Raja, e K. Porsezian. Phys. Rev. A, **87**, 043805, 2013.

[30] M. L. Lyra e A. S. Gouveia-Neto. Opt. Commun., **108**, 117, 1994.

[31] X. Zhong, T. Tang, A. Xiang, e K. Cheng. Opt. Commun., **284**, 4727, 2011.

[32] P. T. Dinda e K. Porsezian. J. Opt. Soc. Am. B, **27**, 1143, 2010.

[33] K. Porsezian, K. Nithyanandan, R. V. J. Raja, e P. K. Shukla. J. Opt. Soc. Am. B, **29**, 2803, 2012.

[34] P. H. Tatsing, A. Mohamadou, C. Bouri, C. G. L. Tiofack, e T. C. Kofane. J. Opt. Soc. Am. B, **29**, 3218, 2012.

[35] J. M. Hickmann, S. B. Cavalcanti, N. M. Borges, E. A. Gouveia, e A. S. Gouveia-Neto. Opt. Lett., **18**, 182, 1993.

[36] R. V. J. Raja, K. Porsezian, e K. Nithyanandan. Phys. Rev. A, **82**, 013825, 2010.

[37] F. DeMartini, C. H. Townes, T. K. Gustafson, e P. L. Kelley. Phys. Rev., **164**, 312, 1967.

[38] T. K. Gustafson, J. P. Taran, H. A. Haus, J. R. Lifsitz, e P. L. Kelley. Phys. Rev., **177**, 306, 1969.

[39] N. Tzoar e M. Jain. Phys. Rev. A, **23**, 1266, 1981.

[40] D. Anderson e M. Lisak. Phys. Rev. A, **27**, 1393, 1983.

[41] C. Husko e P. Colman. Phys. Rev. A, **92**, 013816, 2015.

[42] E. M. Dianov, A. Y. Karasik, P. V. Mamyshev, A. M. Prokhorov, V. N. Serkin, M. F. Stel?makh, e A. A. Fomichev. JETP Lett., **41**, 294, 1985.

[43] F. M. Mitschke e L. F. Mollenauer. Opt. Lett., **11**, 659, 1986.

[44] Q. Lin e Govind P. Agrawal. Opt. Lett, **31**, 3086, 2006.

[45] L. A. Ostrovskii. Zh. Eksp. Teor. Fiz., **51**, 1189, 1966.

[46] C. J. McKinstrie e R. Bingham. Phys. Fluids B, **4**, 2626, 1992.

[47] P. Sprangle, J. Krall, e E. Esarey. , , and ,. Phys. Rev. Lett., **73**, 3544, 1994.

[48] K. Tai, A. Hasegawa, e A. Tomita. Phys. Rev. Lett., **56**, 135, 1986.

[49] G. P. Agrawal. Phys. Rev. Lett., **59**, 880, 1987.

[50] V. V. Konotop e M. Salerno. Phys. Rev. A, **65**, 021602, 2002.

[51] L. Salasnich, A. Parola, e L. Reatto. Phys. Rev. Lett., **91**, 080405, 2003.

[52] L. D. Carr e J. Brand. Phys. Rev. Lett., **92**, 040401, 2004.

[53] L. Li, Z. Li, B. A. Malomed, D. Mihalache, e W. M. Liu. Phys. Rev. A, **72**, 033611, 2005.

[54] M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto, A. De Luca, e C. Umeton. Nature, **432**, 733, 2004.

[55] M. Onorato, A. R. Osborne, e M. Serio. Phys. Rev. Lett., **96**, 014503, 2006.

[56] M. Onorato, T. Waseda, A. Toffoli, L. Cavaleri, O. Gramstad, P. A. E. M. Janssen, T. Kinoshita, J. Monbaliu, N. Mori, A. R. Osborne, M. Serio, C. T. Stansberg, H. Tamura, e K. Trulsen. Phys. Rev. Lett., **102**, 114502, 2009.

[57] A. Hasegawa. Opt. Lett., **9**, 288, 1984.

[58] K. Tai, A. Tomita, J. L. Jewell, e A. Hasegawa. Appl. Phys. Lett., **49**, 236, 1986.

[59] K. Nithyanandan, R. V. J. Raja, T. Uthayakumar, e K. Porsezian. Pramana-J. Phys., **82**, 339, 2014.

[60] F. K. Abdullaev, S. A. Darmanyan, S. Bischoff, P. L. Christiansen, e M. P. Sorensen. Opt. Commun., **108**, 60, 1994.

[61] A. Hook e M. Karlsson. Opt. Lett., **18**, 1388, 1993.

[62] G. P. Agrawal, P. L. Baldeck, e R. R. Alfano. Phys. Rev. A, **39**, 3406, 1989.

[63] E. Rothenberg. Phys. Rev. A, **42**, 682, 1990.

[64] S. M. Jensen. IEEE J. Quan. Electron., **18**, 1580, 1982.

[65] R. Hoffe e J. Chrostowki. Opt. Commun., **57**, 34, 1986.

[66] W.M. Menezes, W.B. de Fraga, G.F. Guimarães, A.C. Ferreira, H.H.B. Rocha, e A.S.B. Sombra. Opt. Commun., **276**, 107, 2007.

[67] J. Herrmann, U. Griebner, N. Zhavoronkov, A. Husakou, D. Nickel, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, P. St. J. Russell, e G. Korn. Phys. Rev. Lett., **88**, 173901, 2002.

[68] Y.-F. Chen, K. Beckwitt, F. W. Wise, B. G. Aitken, J. S. Sanghera, e I. D. Aggarwal. J. Opt. Soc. Am. B, **23**, 347, 2006.

[69] S. Gatz e J. Herrmann. J. Opt. Soc. Am. B, **8**, 2296, 1991.

[70] K. Nithyanandan, R. Vasantha Jayakantha Raja, e K. Porsezian. Phys. Rev. E, **83**, 026604, 2011.

[71] U. Langbein, F. Lederer, T. Peschel, e H. E. Ponath. Opt. Lett., **10**, 571, 1985.

[72] E. Kelleher. Opt. Fiber Technol., **18**, 268–282, 2012.

[73] D. Modotto, M. Andreana, K. Krupa, G. Manili, U. Minoni, A. Tonello, V. Couderc, A. Barthélémy, A. Labruyère, B. M. Shalaby, P. Leproux, S. Wabnitz, e A. B. Aceves. J. Opt. Soc. Am. B, **32**, 1676, 2015.

[74] Y. P. Shapira, V. Smulakovsky, e M. Horowitz. Opt. Lett., **41**, 5, 2016.

[75] X. Zhong e K. Cheng. Optik, **125**, 6733, 2014.

[76] X. Zhong, K. Cheng, e K. S. Chiang. J. Opt. Soc. Am. B, **31**, 1484, 2014.

[77] G. L. da Silva, I. Gleria, M. L. Lyra, e A. S. B. Sombra. J. Opt. Soc. Am. B, **26**, 183, 2009.

[78] V. E. Wood, E. D. Evans, e R. P. Kenan. Opt. Commun., **69**, 156, 1988.

[79] U. Röpke, H. Bartelt, S. Unger, K. Schuster, e J. Kobelke. Opt. Express, **15**, 6894, 2007.

[80] K. G. Kalonakis e E. Paspalakis. J. Mod. Opt., **52**, 1885, 2005.

[81] A. Yariv. Optical Electronics in Modern Communications. Oxford Univ. Press., 1997.