

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCOS ROBERTO BATISTA

**Soluções Clássicas para um
Problema de Combustão em Meios
Porosos com n Camadas**

Goiânia
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Marcos Roberto Batista

Título do trabalho: Soluções Clássicas para um Problema de Combustão em Meios Porosos com n Camadas

3. Informações de acesso ao documento:

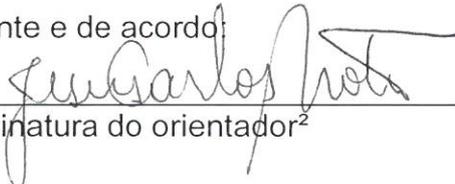
Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do autor²

Ciente e de acordo:


Assinatura do orientador²

Data: 04/09 /2019

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

MARCOS ROBERTO BATISTA

Soluções Clássicas para um Problema de Combustão em Meios Porosos com n Camadas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Batista, Marcos Roberto

Soluções clássicas para um problema de combustão em meios porosos com n camadas [manuscrito] / Marcos Roberto Batista. - 2019.

xcvii, 97 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2019.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui símbolos, gráfico.

1. Combustão em meios porosos. 2. Reação-difusão. 3. Método iterativo monótono. 4. Soluções fundamentais. 5. Solução maximal. I. Mota, Jesus Carlos da, orient. II. Título.

CDU 512.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.

Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

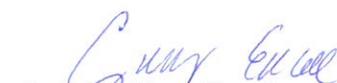
ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TESE DE MARCOS ROBERTO BATISTA – Ao décimo sexto dia do mês de agosto do ano de dois mil e dezenove (16/08/2019), às 10 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Jesus Carlos da Mota - Orientador, Prof. Edcarlos Domingos da Silva, Prof. Marcos Leandro Mendes Carvalho, Prof. Marcelo Martins dos Santos, e Prof. Grey Ercole, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na Sala Geraldo Ávila do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de tese intitulada: **“Soluções Clássicas para um Problema de Combustão em Meios Porosos com n Camadas”**, em nível de Doutorado, área de concentração em Análise, de autoria de Marcos Roberto Batista, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Jesus Carlos da Mota que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da tese que, em 45 minutos procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas às correções recomendadas, a tese foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **DOUTOR EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Análise pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da tese, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de tese e para constar eu, Flávia Magalhães Freire, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.


Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
Presidente - IME/UFG


Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Membro – IME/UFG


Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Membro – IME/UFG


Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
Membro – IME/UNICAMP


Prof. Dr. Grey Ercole
Membro – DPM/UFGM

Aos meus pais, João e Edi.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, na pessoa do meu Redentor Jesus Cristo, o Senhor absoluto de todas as coisas.

Agradeço aos meus pais, João e Edi, por todo apoio e cuidado.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota, por toda dedicação que me disponibilizou durante todo o curso.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza por todo auxílio em Geometria Riemanniana ao longo de todas as disciplinas na área de Geometria.

Agradeço ao Prof. Dr. Ronaldo Antônio dos Santos, que foi praticamente meu coorientador na elaboração da minha tese.

Agradeço à minha amiga Regina Célia da Fonseca pela amizade verdadeira e por todo amparo durante meu curso.

Agradeço a todos os meus colegas e professores do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás.

Agradeço à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo apoio financeiro.

Resumo

Batista, Marcos Roberto. **Soluções Clássicas para um Problema de Combustão em Meios Porosos com n Camadas**. Goiânia, 2019. 97p. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás (UFG).

Neste trabalho, estudamos as soluções clássicas para um sistema parabólico de equações de reação-difusão-convecção, acoplado a um sistema de equações diferenciais ordinárias, com condições iniciais e de contorno num domínio limitado. O sistema acoplado modela a propagação de uma frente de combustão através de um meio poroso com n camadas, onde as variáveis dependentes são as temperaturas e as concentrações de combustível em cada camada. O modelo é uma generalização para o modelo de duas camadas estudado em [9].

Problemas para sistemas de equações parabólicas acoplados com sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (*EDOs*), onde o acoplamento se dá tanto nas funções de reação quanto nos coeficientes do operador diferencial associado, são pouco conhecidos na literatura. Na teoria clássica em geral, o acoplamento aparece somente nas funções de reação, como, por exemplo, em [25].

Inicialmente, usando o Método Iterativo Monótono, provamos a existência e unicidade de uma solução global no tempo para o caso particular em que as concentrações de combustível em cada camada são funções conhecidas. A seguir, mostramos a existência da solução local no tempo para o problema completo quando as concentrações de combustível são funções desconhecidas. A prova é obtida definindo um operador no conjunto das funções Hölder Contínuas e mostrando que o mesmo possui um ponto fixo que é solução local para o problema. Esta solução pode ser estendida a uma solução global no tempo para o problema, desde que as derivadas espaciais da temperatura em cada camada sejam funções limitadas.

Palavras-chave

Combustão em meios porosos. Reação-difusão. Método Iterativo Monótono. Soluções fundamentais. Solução maximal.

Abstract

Batista, Marcos Roberto. **Classical Solutions to a Combustion Problem in Porous Media with n Layers**. Goiânia, 2019. 97p. PhD. Thesis . Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás (UFG).

In this work, we study the classical solutions for a parabolic system of reaction-diffusion-convection equations, coupled to a system of ordinary differential equations, with boundary and initial conditions in a bounded domain. The coupled system models the propagation of a combustion front through a porous medium with n layers, where the dependent variables are the temperatures and the fuel concentrations in each layer. The model is a generalization for the two-layer model studied in [9].

Problems for parabolic equations systems coupled with Ordinary Differential Equations (ODEs) system, where the coupling occurs in both the reaction functions and the associated differential operator coefficients, are little known in the literature. In classical theory in general, the coupling appears only in the reaction functions, for example in [25].

Initially, using the Monotone Iterative Method, we prove the existence and uniqueness of a global solution in time for the particular case where the fuel concentrations in each layer are known functions. Next, we show the existence of the local solution in time for the complete problem when the concentrations are unknown functions. The proof is obtained by defining an operator in the Continuous Hölder function set and showing that it has a fixed point that is a local solution to the problem. This solution can be extended to a global solution in time for the problem, provided that the spatial derivatives of the temperature in each layer are bounded functions.

Keywords

Combustion in porous media. Reaction-diffusion. Monotone Iterative Method. Fundamental solutions. Maximal solution.

Sumário

INTRODUÇÃO	9
1 Modelo	12
2 Método Iterativo Monótono para Sistemas de Equações Parabólicas Semilineares	16
3 Existência e Unicidade de Solução para o Problema de Combustão com Concentrações de Combustível Conhecidas	19
4 Existência de Solução Local para o Problema de Combustão Completo	40
5 Existência de Solução Global para o Problema de Combustão Completo	49
CONCLUSÃO	63
A Lista de Símbolos	66
B Resultados Preliminares	68
B.1 Soluções Fundamentais para Equações Parabólicas	68
B.2 Resultados Clássicos de Análise	85
C O Modelo de Combustão em um meio poroso com n camadas	87
Referências Bibliográficas	95

INTRODUÇÃO

Soluções de modelos matemáticos para problemas de combustão em meios porosos são importantes em várias aplicações, por exemplo, no estudo da viabilidade de recuperação de petróleo em poços petrolíferos que já pararam de produzir por processos naturais.

Existe uma vasta literatura sobre problemas de combustão em meios porosos. Quanto mais realístico é o modelo, maior é o número de variáveis e de parâmetros que devem ser incluídos nele. Isto dificulta a análise matemática dos mesmos. Em geral, os resultados são obtidos numericamente, ver, por exemplo [4, 5, 18].

O modelo matemático apresentado governa a variação de temperatura e a concentração de combustível através de um meio poroso constituído por n camadas paralelas, com propriedades físicas distintas como porosidades, capacidades térmicas, condutividades, etc. Um resumo do modelo é apresentado no Capítulo 1 e a dedução detalhada no Apêndice *C*.

Mais recentemente, alguns autores na área de Matemática Aplicada vêm trabalhando com modelos de combustão em meios porosos simplificados, de tal modo que são possíveis de serem analisados com as teorias matemáticas hoje disponíveis. Como exemplos, citamos:

- Em [6], os autores determinaram soluções do tipo ondas viajantes para um modelo de duas fases que representa a combustão de óleo com oxigênio em um meio poroso.
- Em [7], os autores apresentaram um modelo de combustão de combustível sólido com oxigênio em um meio poroso com duas camadas e provaram a existência de ondas viajantes.
- Em [8], os autores provaram a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy para o modelo deduzido em [7], num caso simples no qual as concentrações de combustível são funções conhecidas. O caso completo em que as concentrações de combustível não são funções conhecidas foi estudado em [9].

- Em [17], o autor provou a existência e unicidade de ondas viajantes de combustão para o modelo de escoamento em meios porosos altamente resistentes, proposto em [2].
- Em [16], os autores mostraram a existência e estabilidade não linear de frentes viajantes de combustão para um modelo de combustão sem gás, com perda de calor.
- Em [3], os autores obtiveram todas as sequências de ondas para a solução do problema de Riemann para um modelo de combustão em meios porosos, com combustível sólido.
- Recentemente, em [10], os autores provaram a existência e multiplicidade de frentes de combustão para o mesmo modelo estudado em [6].

No presente texto, estudamos a existência de uma solução global no tempo para um problema de valor inicial e de contorno associado a um sistema de n equações diferenciais parciais (EDPs) parabólicas não lineares, acopladas com n equações diferenciais ordinárias. O problema modela a propagação de uma frente de combustão através de um meio poroso constituído por n camadas paralelas com propriedades físicas distintas, como porosidades, capacidades térmicas, condutividades, etc. A reação de combustão envolve oxigênio e um sólido combustível. Para a análise matemática, o problema é escrito na forma adimensional.

Problemas para sistemas de equações parabólicas acoplados com sistemas de EDOs, em que o acoplamento é completo, isto é, se dá tanto nas funções de reação quanto nos coeficientes do operador diferencial associado, são pouco conhecidos na literatura. Na teoria clássica em geral, o acoplamento é mais simples, aparecendo somente nas funções de reação, como, por exemplo, em [25]. A dificuldade, no caso em que o acoplamento é completo, é que, num processo iterativo para determinar a existência de solução, o operador diferencial varia em cada iteração, o que não acontece em problemas com o acoplamento somente nas funções de reação. A seguir, descrevemos como esta tese é apresentada.

Conforme já referido acima, um resumo do modelo é feito no Capítulo 1. No Capítulo 2, como resultados preliminares, fazemos um breve resumo do Método Iterativo Monótono a partir de sub e supersoluções para resolução de sistemas de equações parabólicas semilineares. As demonstrações foram omitidas por serem demonstrações padrões da literatura, como ocorre em [24].

No Capítulo 3, estudamos o problema para o caso particular em que as concentrações de combustível em cada camada são funções conhecidas. Para mostrar a existência e unicidade da solução deste problema, usamos o Método Iterativo Monótono a partir de sub e supersoluções. Esta solução é usada para

resolver o problema completo, no qual as concentrações de combustível são também consideradas como incógnitas.

No Capítulo 4, provamos a existência de uma solução local para o problema completo. Neste caso, não foi possível usar o Método Iterativo Monótono, uma vez que o sistema não pode ser escrito na forma semilinear. A prova se baseia em uma análise cuidadosa da solução fundamental para equações parabólicas obtidas pelo Método Parametrix. Seguindo o mesmo procedimento de [9], mostramos a existência de uma solução local no conjunto das funções Hölder contínuas, onde construímos um operador que deixa invariante uma bola neste conjunto.

Neste ponto, usamos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para garantir a existência de um ponto fixo para este operador e verificamos que o mesmo é solução local do problema completo. Este método não permitiu provar a unicidade da solução, pois o mesmo não garante que o ponto fixo encontrado seja único.

No Capítulo 5, usando o método de funções auxiliares, conforme [23], procuramos estender a solução local a uma solução global no tempo. A demonstração depende de estimativas das derivadas espaciais da temperatura nas diversas camadas. Para o modelo de duas camadas, estas estimativas podem ser provadas do mesmo modo como em [9]. Para o modelo com mais de duas camadas, estas estimativas ficaram em aberto, embora evidências numéricas sugerem que as mesmas continuam válidas.

Após o Capítulo 5 apresentamos as conclusões do trabalho, incluindo uma lista de possíveis trabalhos futuros relacionados ao tema.

No Apêndice A, descrevemos a lista de símbolos que aparecem ao longo do texto.

No Apêndice B, seguindo [24], apresentamos um resumo dos principais resultados sobre soluções fundamentais para equações parabólicas.

Finalmente, no Apêndice C, usando as equações de balanço da física, deduzimos detalhadamente o sistema de EDPs que modela a propagação de uma frente de combustão através de um meio poroso constituído de n camadas paralelas.

Modelo

O objetivo deste capítulo é apresentar o sistema que modela a propagação de uma frente de combustão em um meio poroso, formado por n camadas, contendo gás e um sólido combustível, e, em seguida, definir um problema de valor inicial e de contorno associado a este sistema.

O meio poroso é considerado unidimensional e com n camadas paralelas. Cada camada possui uma concentração de combustível inicial. Denotamos por $x \in [0, \ell]$ a variável espacial e por $t > 0$ a variável temporal. As variáveis dependentes de coordenadas (x, t) são a temperatura $u_i(x, t)$ e a concentração de combustível $y_i(x, t)$, definidas em cada camada i , $i = 1, \dots, n$. No modelo, assumimos que a primeira e a n -ésima camada perdem calor para o meio externo e que há transferência de calor apenas entre as camadas i e $i + 1$, com $1 \leq i \leq n - 1$. A temperatura do meio externo é denotada por u_E .

O sistema é formado por n equações parabólicas não lineares acopladas com n equações diferenciais ordinárias e deduzido a partir das leis de conservação de massa e de energia, da Lei de Darcy e de uma versão da Lei de Arrhenius que descreve a taxa de consumo de combustível na reação química. A dedução do modelo se encontra no Apêndice C.

Nestas condições, o sistema é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} ((a_1 + b_1 y_1) u_1)_t + c_1 (u_1)_x = d_1 y_1 g(u_1) + q_1 (u_2 - u_1) + \lambda_1 (u_1)_{xx} - \bar{q}_1 (u_1 - u_E), \\ ((a_i + b_i y_i) u_i)_t + c_i (u_i)_x = d_i y_i g(u_i) - q_{i-1} (u_i - u_{i-1}) + q_i (u_{i+1} - u_i) \\ \quad + \lambda_i (u_i)_{xx} \text{ se } 2 \leq i \leq n - 1, \\ ((a_n + b_n y_n) u_n)_t + c_n (u_n)_x = d_n y_n g(u_n) - q_{n-1} (u_n - u_{n-1}) + \lambda_n (u_n)_{xx} \\ \quad - \bar{q}_2 (u_n - u_E), \\ (y_i)_t = -A_i y_i g(u_i), \quad i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

sendo $t > 0$, $0 < x < \ell$, $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, \lambda_i, q_i, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ constantes positivas e

$$g(u) = \begin{cases} e^{-\frac{E}{u}}, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

em que E é uma constante positiva, relacionada à energia de ativação da reação.

Dentre as constantes que aparecem no modelo, destacamos a constante q_i , que denota o coeficiente de transferência de calor entre duas camadas vizinhas. Note que, se $q_i = 0$, o sistema seria desacoplado nas variáveis u_1, \dots, u_n .

De (1.1), segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1 + b_1 y_1)(u_1)_t + b_1(y_1)_t u_1 + c_1(u_1)_x = d_1 y_1 g(u_1) + q_1(u_2 - u_1) + \lambda_1(u_1)_{xx} \\ \quad - \bar{q}_1(u_1 - u_E), \\ (a_i + b_i y_i)(u_i)_t + b_i(y_i)_t u_i + c_i(u_i)_x = d_i y_i g(u_i) - q_{i-1}(u_i - u_{i-1}) \\ \quad + q_i(u_{i+1} - u_i) + \lambda_i(u_i)_{xx}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ (a_n + b_n y_n)(u_n)_t + b_n(y_n)_t u_n + c_n(u_n)_x = d_n y_n g(u_n) - q_{n-1}(u_n - u_{n-1}) \\ \quad + \lambda_n(u_n)_{xx} - \bar{q}_2(u_n - u_E), \\ (y_i)_t = -A_i y_i g(u_i), \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Em (1.3), substituindo a equação diferencial ordinária no sistema de equações parabólicas, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1 + b_1 y_1)(u_1)_t - b_1 A_1 y_1 g(u_1) u_1 + c_1(u_1)_x = d_1 y_1 g(u_1) + q_1(u_2 - u_1) + \lambda_1(u_1)_{xx} \\ \quad - \bar{q}_1(u_1 - u_E), \\ (a_i + b_i y_i)(u_i)_t - b_i A_i y_i g(u_i) u_i + c_i(u_i)_x = d_i y_i g(u_i) - q_{i-1}(u_i - u_{i-1}) \\ \quad + q_i(u_{i+1} - u_i) + \lambda_i(u_i)_{xx}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ (a_n + b_n y_n)(u_n)_t - b_n A_n y_n g(u_n) u_n + c_n(u_n)_x = d_n y_n g(u_n) - q_{n-1}(u_n - u_{n-1}) \\ \quad + \lambda_n(u_n)_{xx} - \bar{q}_2(u_n - u_E). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Reescrevendo o sistema (1.4), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_1)_t - \frac{\lambda_1}{a_1 + b_1 y_1}(u_1)_{xx} + \frac{c_1}{a_1 + b_1 y_1}(u_1)_x = f_1(u, y_1), \\ (u_i)_t - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i}(u_i)_{xx} + \frac{c_i}{a_i + b_i y_i}(u_i)_x = f_i(u, y_i), \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ (u_n)_t - \frac{\lambda_n}{a_n + b_n y_n}(u_n)_{xx} + \frac{c_n}{a_n + b_n y_n}(u_n)_x = f_n(u, y_n), \end{array} \right. \quad (1.5)$$

sendo

$$\begin{aligned}
f_1(u, y_1) &= \frac{(b_1 A_1 u_1 + d_1) y_1 g(u_1)}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{q_1}{a_1 + b_1 y_1} (u_2 - u_1) - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (u_1 - u_E), \\
f_i(u, y_i) &= \frac{(b_i A_i u_i + d_i) y_i g(u_i)}{a_i + b_i y_i} - \frac{q_{i-1}}{a_i + b_i y_i} (u_i - u_{i-1}) \\
&\quad + \frac{q_i}{a_i + b_i y_i} (u_{i+1} - u_i), \quad 2 \leq i \leq n-1 \text{ e} \\
f_n(u, y_n) &= \frac{(b_n A_n u_n + d_n) y_n g(u_n)}{a_n + b_n y_n} - \frac{q_{n-1}}{a_n + b_n y_n} (u_n - u_{n-1}) \\
&\quad - \frac{\bar{q}_2}{a_n + b_n y_n} (u_n - u_E),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

em que $u = (u_1, \dots, u_n)$.

O sistema (1.5) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{cases} (u_i)_t - L_i u_i = f_i(u, y_i), & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ (y_i)_t = -A_i y_i g(u_i), & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

em que $u = (u_1, \dots, u_n)$,

$$L_i u_i = \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} (u_i)_{xx} - \frac{c_i}{a_i + b_i y_i} (u_i)_x, \tag{1.8}$$

$f_i(u, y_i)$ é a função de reação dada por (1.6) e g é a função definida em (1.2).

O operador $(u_i)_t - L_i u_i$ é uniformemente parabólico, pois $\alpha_1 \leq \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(x, t)} \leq \alpha_2$, $\forall (x, t) \in [0, \ell] \times [0, T]$, onde $\alpha_1 = \min\{\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i}, i = 1, \dots, n\}$ e $\alpha_2 = \max\{\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i}, i = 1, \dots, n\}$, $\ell > 0$, $T > 0$.

O objetivo deste trabalho é estudar as soluções clássicas para o seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} (u_i)_t - L_i u_i = f_i(u, y_i), & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ (y_i)_t = -A_i y_i g(u_i), & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ (u_i(x, 0), y_i(x, 0)) = (u_{i,0}(x), y_{i,0}(x)), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, & t \in (0, T), \end{cases} \tag{1.9}$$

em que $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. As funções $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$ são não negativas e limitadas em $[0, \ell]$, e $f_i(u, y_i)$ é a função de reação definida em (1.6).

No Capítulo 3, consideramos uma versão simplificada do problema (1.9), retirando as equações $(y_i)_t = -A_i y_i g(u_i)$, no qual supomos que, na primeira equação

de (1.9), as funções y_i sejam conhecidas. Assim, o problema torna-se

$$\begin{cases} (u_i)_t - L_i u_i = f_i(u, y_i), & x \in (0, \ell), \quad t > 0, \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Utilizamos o Método Iterativo Monótono [24], apresentado no Capítulo 2, para mostrar que o problema de valor inicial e de contorno (1.10) possui uma solução clássica única $u = (u_1, \dots, u_n)$, definida globalmente no tempo, isto é, determinada em $[0, \ell] \times [0, T]$, para qualquer $T > 0$. Esta solução será usada para resolver o problema (1.9).

Método Iterativo Monótono para Sistemas de Equações Parabólicas Semilineares

As notações que aparecem ao longo deste e dos próximos capítulos estão definidas no Apêndice A.

O objetivo deste capítulo é fazer um breve resumo do Método Iterativo Monótono, cujos detalhes podem ser encontrados em [24]. De agora em diante, em todo o texto, a menos que se diga o contrário, $i = 1, \dots, n$.

Aqui fixamos $a < b$ e $T > 0$ qualquer. Em cada ponto $(x, t) \in (a, b) \times (0, T]$ e para cada i , considere o operador elíptico

$$L_i u_i = a_i(x, t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + b_i(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x},$$

em que as funções $a_i(x, t)$ e $b_i(x, t)$ são tomadas como Hölder Contínuas em $[a, b] \times [0, T]$.

Considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_i)_t - L_i u_i = f_i(x, t, u_1, \dots, u_n), \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}(x), \quad x \in [a, b], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x}(a, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x}(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \end{array} \right. \quad (2.1)$$

sendo $u_{i,0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

A função f_i é tomada como Hölder contínua em $[a, b] \times [0, T] \times J^n$, sendo J algum intervalo limitado em \mathbb{R} .

Definição 2.0.1. Uma solução clássica para o problema (2.1) é uma função $u = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$, em que $u_i \in C^{2,1}((a, b) \times (0, T]) \cap C^1([a, b] \times (0, T]) \cap C^0([a, b] \times [0, T])$ e satisfaz (2.1).

Definição 2.0.2. A função $f_i = f_i(x, t, u_1, \dots, u_n)$ é dita quase-monótona não-decrescente, se fixado (x, t, u_i) , f_i é não-decrescente em u_j , $i \neq j$.

A função $f = (f_1, \dots, f_n)$ é dita quase-monótona não-decrescente em $J^n \subset \mathbb{R}^n$ se f_1, \dots, f_n são quase-monótonas não-decrescentes.

Definição 2.0.3. Dizemos que $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$, com $\tilde{u}_i \in C^{2,1}((a, b) \times (0, T]) \cap C^1([a, b] \times (0, T]) \cap C^0([a, b] \times [0, T])$, é uma supersolução para o problema (2.1) se

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{u}_i)_t - L_i \tilde{u}_i \geq f_i(x, t, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n), \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \\ \tilde{u}_i(x, 0) \geq u_{i,0}(x), \quad x \in [a, b], \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x}(a, t) \geq 0, \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x}(b, t) \geq 0, \quad t \in (0, T]. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

De modo análogo, dizemos que $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$, com $\hat{u}_i \in C^{2,1}((a, b) \times (0, T]) \cap C^1([a, b] \times (0, T]) \cap C^0([a, b] \times [0, T])$ é uma subsolução para o problema (2.1) se satisfaz as desigualdades reversas de (2.2).

Definição 2.0.4. Um par de sub e supersoluções $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ e $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ é ordenado se $\hat{u}_i \leq \tilde{u}_i$, para todo i . Neste caso, escrevemos $\hat{u} \leq \tilde{u}$.

O conjunto

$$\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in (C^0([a, b] \times [0, T]))^n : \hat{u} \leq u \leq \tilde{u}\}$$

é chamado setor determinado pelas sub e supersoluções. Se o setor $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$ está contido em J^n , então, na definição de função quase-monótona, é suficiente tomarmos $J^n = \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$. Isto significa que, se $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)) \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$, então $u_i(x, t) \in J, \forall (x, t) \in [a, b] \times [0, T]$.

Aqui, assumimos que existem funções limitadas $\underline{c}_i = \underline{c}_i(x, t)$ e $\overline{c}_i = \overline{c}_i(x, t)$ tais que

$$-\underline{c}_i(u_i - v_i) \leq f_i(u_1, \dots, u_n) - f_i(v_1, \dots, v_n) \leq \overline{c}_i(u_i - v_i), \quad (2.3)$$

para todos $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$, com $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n) \leq (v_1, \dots, v_n) \leq (u_1, \dots, u_n) \leq (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$.

Se $F_i(x, t, u_1, \dots, u_n) \equiv \underline{c}_i(x, t)u_i + f_i(x, t, u_1, \dots, u_n)$, pode-se mostrar que:

- F_i é Hölder contínua em $[a, b] \times [0, T] \times \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$ se \underline{c}_i também o é.
- F_i é monótona não-decrescente em $u_i \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$.

Com estas condições sobre F_i , começando com uma iteração inicial $(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)})$, é possível construir uma sequência de soluções $\{u^{(k)}\} = \{(u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})\}$, definida sucessivamente pela solução da equação linear

$$\mathcal{L}_i\{u_i^{(k)}\} = (u_i^{(k)})_t - L_i u_i^{(k)} + \underline{c}_i u_i^{(k)} = F_i(u_1^{(k-1)}, \dots, u_n^{(k-1)}) \text{ em } (a, b) \times (0, T],$$

sujeita às condições

$$\begin{aligned} u_i^{(k)}(x, 0) &= u_{i,0}(x), \quad x \in [a, b], \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x}(a, t) &= 0, \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x}(b, t) &= 0, \quad t \in (0, T], \end{aligned}$$

em que $k = 1, 2, \dots$. O próximo teorema apresenta o principal resultado do método iterativo monótono.

Teorema 2.0.1. Sejam $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ e $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ sub e supersoluções ordenadas, respectivamente, do problema (2.1). Seja $f = (f_1, \dots, f_n)$ uma função quase-monótona não-decrescente em $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$, satisfazendo (2.3). Então o problema (2.1) possui uma única solução $u = (u_1, \dots, u_n) \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$.

Demonstração. Fizemos aqui apenas um roteiro da demonstração, seguindo ([24], p. 384-401). Primeiro, constrói-se seqüências de supersoluções $\{\bar{u}^{(k)}\} = \{(\bar{u}_1^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)})\}$, com $\bar{u}^{(0)} = (\bar{u}_1^{(0)}, \dots, \bar{u}_n^{(0)})$ e subsoluções $\{\underline{u}^{(k)}\} = \{(\underline{u}_1^{(k)}, \dots, \underline{u}_n^{(k)})\}$, com $\underline{u}^{(0)} = (\underline{u}_1^{(0)}, \dots, \underline{u}_n^{(0)})$. A seguir, mostra-se que $\{\bar{u}^{(k)}\}$ é monótona não-crescente e que $\{\underline{u}^{(k)}\}$ é monótona não-decrescente, isto é,

$$\underline{u}_i^{(k)} \leq \underline{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k)} \quad \text{em } [a, b] \times [0, T].$$

Finalmente, mostra-se que ambas as seqüências $\{\bar{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ convergem para uma única função $u = (u_1, \dots, u_n) \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$ e que, de fato, u é a única solução clássica de (2.1). \square

Existência e Unicidade de Solução para o Problema de Combustão com Concentrações de Combustível Conhecidas

Conforme já observado no início do Capítulo 2, as notações usadas neste trabalho estão definidas no Apêndice A. Apenas para enfatizar, denotamos por $\Omega_T = (0, \ell) \times (0, T]$, $\bar{\Omega}_T = [0, \ell] \times [0, T]$ e $\tilde{\Omega}_T = [0, \ell] \times (0, T]$, com $\ell > 0$, $T > 0$. Onde aparecer o índice i , a menos que se diga o contrário, $i = 1, \dots, n$.

Para estudarmos as soluções do problema (1.9), vamos primeiramente considerar uma versão simplificada deste em Ω_T , omitindo de (1.9) o sistema de EDOs $(y_i)_t = -A_i y_i g(u_i)$ e supondo que as concentrações de combustível que aparecem nos coeficientes do operador L_i e nas funções f_i sejam funções conhecidas e limitadas $y_i = y_i(x, t)$, assumindo valores no intervalo $[0, 1]$. Neste caso, (1.9) reduz-se ao seguinte problema:

$$\begin{cases} (u_i)_t - L_i u_i = f_i(u, y_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, & t \in (0, T], \end{cases} \quad (3.1)$$

com L_i dado por (1.8) e f_i dada por (1.6).

Neste capítulo, usamos o Método Iterativo Monótono de sub e supersoluções, apresentado no Capítulo 2, para mostrar a existência e unicidade da solução clássica para o problema (3.1).

Definição 3.0.1. Uma solução clássica para o problema (3.1) é uma função $u = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$, em que $u_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e satisfaz (3.1).

Note que neste e nos próximos capítulos, a exigência de que a solução clássica pertença ao conjunto $C^1(\tilde{\Omega}_T)$ é porque as condições de fronteira são condições de Neumann. Veja Observação 3.

Definição 3.0.2. Uma aplicação $f_i = f_i(u, y_i)$ é quase-monótona não-decrescente se fixado (x, t, u_i) , f_i é não-decrescente com respeito a u_j , com $i \neq j$.

Uma aplicação $f = (f_1, \dots, f_n)$ é quase-monótona não-decrescente em algum paralelepípedo $J_1 \times \dots \times J_n$, se todas as funções componentes f_1, \dots, f_n forem quase-monótonas não-decrescentes.

Definição 3.0.3. Dizemos que $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$, com $\hat{u}_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$, é uma subsolução para o problema (3.1) se

$$\begin{cases} (\hat{u}_i)_t - L_i \hat{u}_i \leq f_i(\hat{u}, y_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ \hat{u}_i(x, 0) \leq u_{i,0}(x), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=0} \leq 0, \quad \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} \leq 0, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Analogamente, uma aplicação $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$, com $\tilde{u}_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$, é uma supersolução para (3.1) se forem consideradas as desigualdades reversas de (3.2).

Definição 3.0.4. Um par de sub e supersoluções \hat{u} e \tilde{u} é ordenado, neste caso, escrevemos $\hat{u} \leq \tilde{u}$, se $\hat{u}_i(x, t) \leq \tilde{u}_i(x, t)$, para todo $(x, t) \in [0, \ell] \times [0, T]$.

O conjunto

$\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle = \{(u_1, \dots, u_n) \in (C^0(\Omega_T))^n : (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n) \leq (u_1, \dots, u_n) \leq (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)\}$ é chamado de setor determinado pela sub e supersoluções.

Se o setor $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$ está contido em $J_1 \times \dots \times J_n$, então, na definição de aplicação quase-monótona, é suficiente tomarmos $J_1 \times \dots \times J_n = \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$, como no Capítulo 2.

Lema 3.0.1. Seja $T > 0$. Assuma que a_i, b_i e A_i são números estritamente positivos e $u_{i,0}$ são funções limitadas não negativas definidas em $[0, \ell]$.

Sejam $\hat{u}(x, t) = (0, \dots, 0)$ e $\tilde{u}(x, t) = (\varphi(t), \dots, \varphi(t))$, em que

$$\varphi(t) = \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \beta, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

com $\alpha = \max \left\{ \frac{A_1 b_1}{a_1}, \dots, \frac{A_n b_n}{a_n} \right\}$ e $\beta = \max \left\{ \frac{d_1}{A_1 b_1}, \dots, \frac{d_n}{A_n b_n} \right\}$. Suponha que $\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty \geq u_E$ e que as concentrações de combustível y_i em cada camada assumem valores no intervalo $[0, 1]$. Então \hat{u} é uma subsolução e \tilde{u} é uma supersolução do problema (3.1) em $\bar{\Omega}_T$.

Veja que a hipótese $\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty \geq u_E$ garante que $\varphi(t) \geq u_E$, para todo $0 \leq t \leq T$. De fato,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - u_E &= \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \beta - u_E \\
&= \sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty e^{\alpha t} + \beta e^{\alpha t} - \beta - u_E \\
&= \sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty e^{\alpha t} + \beta e^{\alpha t} - \beta - u_E + u_E e^{\alpha t} - u_E e^{\alpha t} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty - u_E \right) e^{\alpha t} + \beta(e^{\alpha t} - 1) + u_E(e^{\alpha t} - 1) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty - u_E \right) e^{\alpha t} + (e^{\alpha t} - 1)(u_E + \beta) \geq 0.
\end{aligned}$$

Agora, demonstramos o Lema 3.0.1.

Demonstração. Evidentemente, \hat{u} é subsolução de (3.1).

Para mostrar que \tilde{u} é supersolução de (3.1), observemos que, para todo i , temos

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}_i)_t - L_i \tilde{u}_i &= (\tilde{u}_i)_t - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} (\tilde{u}_i)_{xx} + \frac{c_i}{a_i + b_i y_i} (\tilde{u}_i)_x \\
&= \alpha \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t}.
\end{aligned}$$

Mostramos agora que $(\tilde{u}_i)_t - L_i \tilde{u}_i \geq f_i(\tilde{u}, y_i)$, $\forall i$. De fato, para $i = 1$, temos

$$\begin{aligned}
f_1(\tilde{u}, y_1) &= \frac{(b_1 A_1 \varphi(t) + d_1) y_1 e^{\frac{-E}{\varphi(t)}}}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{q_1}{a_1 + b_1 y_1} (\varphi(t) - \varphi(t)) - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (\varphi(t) - u_E) \\
&= \left\{ b_1 A_1 \left[\left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \beta \right] + d_1 \right\} \frac{y_1 e^{\frac{-E}{\varphi(t)}}}{a_1 + b_1 y_1} \\
&\quad - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (\varphi(t) - u_E) \\
&\leq \frac{b_1 A_1}{a_1 + b_1 y_1} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \frac{\beta b_1 A_1}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{d_1}{a_1 + b_1 y_1} \\
&\quad - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (\varphi(t) - u_E)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_1 A_1}{a_1 + b_1 y_1} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \frac{A_1 b_1}{a_1 + b_1 y_1} \left(\beta - \frac{d_1}{A_1 b_1} \right) \\
&\quad - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (\varphi(t) - u_E) \\
&\leq \frac{b_1 A_1}{a_1} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} \\
&\leq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} \\
&= (\tilde{u}_1)_t - L_1 \tilde{u}_1.
\end{aligned}$$

Para $2 \leq i \leq n-1$, observamos que

$$\begin{aligned}
f_i(\tilde{u}, y_i) &= \frac{(b_i A_i \varphi(t) + d_i) y_i e^{\frac{-E}{\varphi(t)}}}{a_i + b_i y_i} - q_{i-1} \cdot 0 + q_i \cdot 0 \\
&= \left\{ b_i A_i \left[\left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \beta \right] + d_i \right\} \frac{y_i e^{\frac{-E}{\varphi(t)}}}{a_i + b_i y_i} \\
&\leq \frac{1}{a_i} \left\{ b_i A_i \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \beta b_i A_i + d_i \right\} \\
&= \frac{b_i A_i}{a_i} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \beta + \frac{d_i}{b_i A_i} \right\} \\
&= \frac{b_i A_i}{a_i} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \left[\beta - \frac{d_i}{b_i A_i} \right] \right\} \\
&\leq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} \\
&= (u_i)_t - L_i u_i.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $i = n$, temos

$$\begin{aligned}
f_n(\tilde{u}, y_n) &= \frac{(b_n A_n \varphi(t) + d_n) y_n e^{\frac{-E}{\varphi(t)}}}{a_n + b_n y_n} - \frac{q_{n-1}}{a_n + b_n y_n} (\varphi(t) - \varphi(t)) - \frac{\bar{q}_2}{a_n + b_n y_n} (\varphi(t) - u_E) \\
&= \left\{ b_n A_n \left[\left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \beta \right] + d_n \right\} \frac{y_n e^{\frac{-E}{\varphi(t)}}}{a_n + b_n y_n} \\
&\quad - \frac{\bar{q}_2}{a_n + b_n y_n} (\varphi(t) - u_E)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b_n A_n}{a_n + b_n y_n} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \frac{\beta b_n A_n}{a_n + b_n y_n} + \frac{d_n}{a_n + b_n y_n} \\
&= \frac{b_n A_n}{a_n + b_n y_n} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} - \frac{A_n b_n}{a_n + b_n y_n} \left(\beta - \frac{d_n}{A_n b_n} \right) \\
&\leq \frac{b_n A_n}{a_n} \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} \\
&\leq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha t} \\
&= (\tilde{u}_n)_t - L_n \tilde{u}_n.
\end{aligned}$$

Veja também que

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, 0) &= \left(\left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha \cdot 0} - \beta, \dots, \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty + \beta \right) e^{\alpha \cdot 0} - \beta \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty, \dots, \sum_{i=1}^n \|u_{i,0}\|_\infty \right) \\
&\geq (u_{1,0}(x), \dots, u_{n,0}(x)).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, temos que

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad \forall i.$$

Logo, \tilde{u} é supersolução de (3.1). □

Como $\tilde{u} \geq \hat{u}$, podemos definir o setor

$$\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in (C^0(\Omega_T))^n : 0 \leq u_i \leq \varphi(t)\}.$$

Lema 3.0.2. Se $a_i, b_i > 0$ são constantes positivas e y_i é a função de concentração de combustível em cada camada i , então a função de reação $f = (f_1, \dots, f_n)$ do sistema (3.1) é quase-monótona não-decrescente em $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$.

Demonstração. De fato, basta observar que, para todo i ,

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \geq 0, \text{ com } j \neq i.$$

□

Lema 3.0.3. Assuma que a_1, \dots, a_n e b_i são constantes positivas e y_1, \dots, y_n são funções limitadas não negativas em Ω_T . Então,

$$\begin{aligned} |f_1(u, y_1) - f_1(v, y_1)| &\leq a_1^{-1}(\|y_1\|_\infty K_1 + q_1 + \bar{q}_1)|u_1 - v_1| + a_1^{-1}q_1|u_2 - v_2|, \\ |f_i(u, y_i) - f_i(v, y_i)| &\leq a_i^{-1}(\|y_i\|_\infty K_i + q_i + q_{i-1})|u_i - v_i| + a_i^{-1}q_{i-1}|u_{i-1} - v_{i-1}| \\ &\quad + a_i^{-1}q_i|u_{i+1} - v_{i+1}|, \quad 2 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

e

$$|f_n(u, y_n) - f_n(v, y_n)| \leq a_n^{-1}(\|y_n\|_\infty K_n + q_{n-1} + \bar{q}_2)|u_n - v_n| + a_n^{-1}q_{n-1}|u_{n-1} - v_{n-1}|,$$

sendo

$$K_n = A_n b_n + (A_n b_n |v_n| + d_n) \frac{4e^{-2}}{E}, \text{ e } u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle.$$

Demonstração. Calculando diretamente, obtemos

$$\begin{aligned} |f_1(u, y_1) - f_1(v, y_1)| &= \left| \left(\frac{(b_1 A_1 u_1 + d_1) y_1 g(u_1)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{q_1(u_1 - u_2)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (u_1 - u_E) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(b_1 A_1 v_1 + d_1) y_1 g(v_1)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{q_1(v_1 - v_2)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (v_1 - u_E) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(A_1 b_1 v_1 + d_1) y_1 g(u_1)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{(A_1 b_1 v_1 + d_1) y_1 g(v_1)}{a_1 + b_1 y_1} \right| \\ &= \left| \frac{(b_1 A_1 u_1 + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{u_1}}}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{q_1(u_1 - u_2)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (u_1 - u_E) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(b_1 A_1 v_1 + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{v_1}}}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{q_1(v_1 - v_2)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1(v_1 - u_E)}{a_1 + b_1 y_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(A_1 b_1 v_1 + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{u_1}}}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{(A_1 b_1 v_1 + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{v_1}}}{a_1 + b_1 y_1} \right| \\ &= \left| \frac{A_1 b_1 y_1 e^{-\frac{E}{u_1}}}{a_1 + b_1 y_1} (u_1 - v_1) + \frac{(A_1 b_1 v_1 + d_1) y_1 (e^{-\frac{E}{u_1}} - e^{-\frac{E}{v_1}})}{a_1 + b_1 y_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q_1(u_1 - v_1)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{q_1(v_2 - u_2)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1(u_1 - v_1)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1(u_E - u_E)}{a_1 + b_1 y_1} \right| \\ &\leq |a_1|^{-1} [y_1 A_1 b_1 |u_1 - v_1| e^{-\frac{E}{u_1}} + |A_1 b_1 v_1 + d_1| |e^{-\frac{E}{u_1}} - e^{-\frac{E}{v_1}}| y_1 \\ &\quad + q_1 |u_1 - v_1| + q_1 |u_2 - v_2| + \bar{q}_1 |u_1 - v_1|]. \end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que a derivada da função $g(w) = e^{-\frac{E}{w}}$, $w \in \mathbb{R}$, é

limitada superiormente por $\frac{4e^{-2}}{E}$. Daí, segue-se que

$$\begin{aligned}
|f_1(u_1, \dots, u_n, y_1) - f_1(v_1, \dots, v_n, y_1)| &\leq a_1^{-1} \left\{ \|y_1\|_\infty [A_1 b_1 + (A_1 b_1 |v_1| + d_1) \frac{4e^{-2}}{E}] + q_1 \right. \\
&\quad \left. + \bar{q}_1 \right\} |u_1 - v_1| + a_1^{-1} q_1 |u_2 - v_2| \\
&= a_1^{-1} \|y_1\|_\infty K_1 |u_1 - v_1| + a_1^{-1} q_1 |u_1 - v_1| \\
&\quad + a_1^{-1} \bar{q}_1 |u_1 - v_1| + a_1^{-1} q_1 |u_2 - v_2|, \\
&= a_1^{-1} (\|y_1\|_\infty K_1 + q_1 + \bar{q}_1) |u_1 - v_1| \\
&\quad + a_1^{-1} q_1 |u_2 - v_2|,
\end{aligned}$$

em que

$$K_1 = A_1 b_1 + (A_1 b_1 |v_1| + d_1) \frac{4e^{-2}}{E}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f_1(u, y_1) - f_1(v, y_1)| &\leq a_1^{-1} (\|y_1\|_\infty K_1 + q_1 + \bar{q}_1) |u_1 - v_1| \\
&\quad + a_1^{-1} q_1 |u_2 - v_2|.
\end{aligned}$$

Calculamos $|f_i(u, y_i) - f_i(v, y_i)|$, para $1 < i < n$:

$$\begin{aligned}
|f_i(u_1, \dots, u_n, y_i) - f_i(v_1, \dots, v_n, y_i)| &= \left| \frac{(b_i A_i u_i + d_i) y_i e^{\frac{-E}{u_i}}}{a_i + b_i y_i} - \frac{q_{i-1} (u_i - u_{i-1})}{a_i + b_i y_i} \right. \\
&\quad \left. + \frac{q_i (u_{i+1} - u_i)}{a_i + b_i y_i} - \frac{(A_i b_i v_i + d_i) y_i e^{\frac{-E}{v_i}}}{a_i + b_i y_i} + \frac{q_{i-1} (v_i - v_{i-1})}{a_i + b_i y_i} \right. \\
&\quad \left. - \frac{q_i (v_{i+1} - v_i)}{a_i + b_i y_i} + \frac{(A_i b_i v_i + d_i) y_i e^{\frac{-E}{u_i}}}{a_i + b_i y_i} - \frac{(A_i b_i v_i + d_i) y_i e^{\frac{-E}{v_i}}}{a_i + b_i y_i} \right| \\
&= \left| \frac{b_i A_i (u_i - v_i) y_i e^{\frac{-E}{u_i}}}{a_i + b_i y_i} + \frac{(A_i b_i v_i + d_i) y_i (e^{\frac{-E}{u_i}} - e^{\frac{-E}{v_i}})}{a_i + b_i y_i} \right. \\
&\quad \left. - \frac{q_{i-1}}{a_i + b_i y_i} [(u_i - v_i) - (u_{i-1} - v_{i-1})] + \frac{q_i}{a_i + b_i y_i} [(u_{i+1} - v_{i+1}) - (u_i - v_i)] \right| \\
&\leq |a_i|^{-1} [b_i A_i |y_i| |u_i - v_i| + |A_i b_i v_i + d_i| |y_i| \frac{4e^{-2}}{E} |u_i - v_i|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{i-1}(|u_i - v_i| + |u_{i-1} - v_{i-1}|) + q_i(|u_{i+1} - v_{i+1}| + |u_i - v_i|) \\
& = |a_i|^{-1} \{ \|y_i\|_\infty (b_i A_i + (A_i b_i |v_i| + d_i) \frac{4e^{-2}}{E}) + q_{i-1} + q_i \} |u_i - v_i| \\
& + |a_i|^{-1} q_{i-1} |u_{i-1} - v_{i-1}| + |a_i|^{-1} q_i |u_{i+1} - v_{i+1}| \\
& = |a_i|^{-1} \{ \|y_i\|_\infty K_i + q_{i-1} + q_i \} |u_i - v_i| + |a_i|^{-1} q_{i-1} |u_{i-1} - v_{i-1}| \\
& + |a_i|^{-1} q_i |u_{i+1} - v_{i+1}|,
\end{aligned}$$

em que

$$K_i = b_i A_i + (A_i b_i |v_i| + d_i) \frac{4e^{-2}}{E}.$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
|f_n(u_1, \dots, u_n, y_n) - f_n(v_1, \dots, v_n, y_n)| & = \left| \frac{(b_n A_n u_n + d_n) y_n e^{\frac{-E}{u_n}}}{a_n + b_n y_n} - \frac{q_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{a_n + b_n y_n} \right. \\
& - \frac{\bar{q}_2(u_n - u_E)}{a_n + b_n y_n} - \frac{(b_n A_n v_n + d_n) y_n e^{\frac{-E}{v_n}}}{a_n + b_n y_n} - \frac{q_{n-1}(v_n - v_{n-1})}{a_n + b_n y_n} \\
& \left. + \frac{\bar{q}_2(v_n - v_E)}{a_n + b_n y_n} + \frac{(A_n b_n v_n + d_n) y_n e^{\frac{-E}{v_n}}}{a_n + b_n y_n} - \frac{(A_n b_n v_n + d_n) y_n e^{\frac{-E}{u_n}}}{a_n + b_n y_n} \right| \\
& = \frac{1}{|a_n + b_n y_n|} |A_n b_n (u_n - v_n) y_n e^{-\frac{E}{u_n}} + (A_n b_n v_n + d_n) y_n (e^{\frac{-E}{u_n}} \\
& - e^{\frac{-E}{v_n}}) - q_{n-1}(u_n - v_n) + q_{n-1}(u_{n-1} - v_{n-1}) - \bar{q}_2(u_n - v_n) \\
& + \bar{q}_2(u_E - v_E)| \\
& \leq |a_n|^{-1} \{ \|y_n\|_\infty A_n b_n |u_n - v_n| e^{\frac{-E}{u_n}} + (A_n b_n |v_n| \\
& + d_n) y_n \frac{4e^{-2}}{E} |u_n - v_n| + q_{n-1} |u_n - v_n| + q_{n-1} |u_{n-1} - v_{n-1}| \\
& + \bar{q}_2 |u_n - v_n| \} \\
& = a_n^{-1} \{ \|y_n\|_\infty [A_n b_n + (A_n b_n |v_n| + d_n) \frac{4e^{-2}}{E}] + q_{n-1} + \bar{q}_2 \} |u_n - v_n| \\
& + a_n^{-1} q_{n-1} |u_{n-1} - v_{n-1}| \\
& = a_n^{-1} \{ \|y_n\|_\infty K_n + q_{n-1} + \bar{q}_2 \} |u_n - v_n| + a_n^{-1} q_{n-1} |u_{n-1} - v_{n-1}|,
\end{aligned}$$

sendo

$$K_n = A_n b_n + (A_n b_n |v_n| + d_n) \frac{4e^{-2}}{E}.$$

□

Seja

$$K = \max \left\{ \begin{array}{l} a_1^{-1}(\|y_1\|_\infty K_1 + q_1 + \bar{q}_1), a_1^{-1}q_1, a_1^{-1}\bar{q}_1, a_1^{-1}(q_1 + \bar{q}_1) \\ \vdots \\ a_{n-1}^{-1}(\|y_{n-1}\|_\infty K_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2}), a_{n-1}^{-1}q_{n-2}, a_{n-1}^{-1}q_{n-1}, a_{n-1}^{-1}(q_{n-2} + q_{n-1}) \\ a_n^{-1}(\|y_n\|_\infty K_n + q_{n-1} + \bar{q}_2), a_n^{-1}q_{n-1}, a_n^{-1}\bar{q}_2, a_n^{-1}(q_{n-1} + \bar{q}_2) \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

Somando-se Ku_i em cada membro das EDPs em (3.1), obtemos o seguinte problema de valor inicial e de contorno equivalente a (3.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_i u_i = F_i(u, y_i), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}(x), \quad x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad t \in (0, T], \end{array} \right. \quad (3.5)$$

em que $\mathcal{L}_i u_i = (u_i)_t - L_i u_i + K u_i$ e $F_i(u, y_i) = K u_i + f_i(u, y_i)$.

A justificativa para a definição do problema (3.5) é que agora a função $F = (F_1, \dots, F_n)$ é monótona não-decrescente, enquanto $f = (f_1, \dots, f_n)$ em (3.1) é apenas quase-monótona não-decrescente em $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$. De fato, tome $u = (u_1, \dots, u_n) \geq v = (v_1, \dots, v_n)$ em $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle$. Para $i = 1$, temos

$$\begin{aligned} F_1(u, y_1) - F_1(v, y_1) &= K u_1 + f_1(u, y_1) - (K v_1 + f_1(v, y_1)) \\ &= K(u_1 - v_1) + f_1(u, y_1) - f_1(v, y_1) \\ &= K(u_1 - v_1) + \frac{(b_1 A_1 u_1 + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{u_1}}}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{q_1(u_2 - u_1)}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1(u_1 - u_E)}{a_1 + b_1 y_1} \\ &\quad - \frac{(b_1 A_1 v_1 + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{v_1}}}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{q_1(v_2 - v_1)}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{\bar{q}_1(v_1 - u_E)}{a_1 + b_1 y_1} \\ &= K(u_1 - v_1) + \frac{b_1 A_1 y_1 (u_1 e^{-\frac{E}{u_1}} - v_1 e^{-\frac{E}{v_1}}) + d_1 y_1 (e^{-\frac{E}{u_1}} - e^{-\frac{E}{v_1}})}{a_1 + b_1 y_1} \\ &\quad + \frac{q_1(u_2 - u_1 - v_2 + v_1) - \bar{q}_1(u_1 - v_1)}{a_1 + b_1 y_1} \\ &= K(u_1 - v_1) + \frac{b_1 A_1 y_1 (u_1 e^{-\frac{E}{u_1}} - v_1 e^{-\frac{E}{v_1}}) + d_1 y_1 (e^{-\frac{E}{u_1}} - e^{-\frac{E}{v_1}})}{a_1 + b_1 y_1} \\ &\quad + \frac{q_1(u_2 - v_2) - (q_1 + \bar{q}_1)(u_1 - v_1)}{a_1 + b_1 y_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(K - \frac{q_1 + \bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} \right) (u_1 - v_1) + \frac{b_1 A_1 y_1 (u_1 e^{\frac{-E}{u_1}} - v_1 e^{\frac{-E}{v_1}})}{a_1 + b_1 y_1} \\
&+ \frac{d_1 y_1 (e^{\frac{-E}{u_1}} - e^{\frac{-E}{v_1}})}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{q_1 (u_2 - v_2)}{a_1 + b_1 y_1} > 0.
\end{aligned}$$

Para $2 \leq i \leq n-1$, obtemos

$$\begin{aligned}
F_i(u, y_i) - F_i(v, y_i) &= K u_i + f_i(u, y_i) - (K v_i + f_i(v, y_i)) \\
&= K(u_i - v_i) + f_i(u, y_i) - f_i(v, y_i) \\
&= K(u_i - v_i) + \frac{(b_i A_i u_i + d_i) y_i e^{\frac{-E}{u_i}}}{a_i + b_i y_i} - \frac{q_{i-1}(u_i - u_{i-1})}{a_i + b_i y_i} \\
&+ \frac{q_i(u_{i+1} - u_i)}{a_i + b_i y_i} - \frac{(b_i A_i v_i + d_i) y_i e^{\frac{-E}{v_i}}}{a_i + b_i y_i} + \frac{q_{i-1}(v_i - v_{i-1})}{a_i + b_i y_i} \\
&- \frac{q_i(v_{i+1} - v_i)}{a_i + b_i y_i} \\
&= K(u_i - v_i) + \frac{b_i A_i y_i (u_i e^{\frac{-E}{u_i}} - v_i e^{\frac{-E}{v_i}}) + d_i y_i (e^{\frac{-E}{u_i}} - e^{\frac{-E}{v_i}})}{a_i + b_i y_i} \\
&- \frac{q_{i-1}(u_i - u_{i-1}) - q_i(u_{i+1} - u_i) - q_{i-1}(v_i - v_{i-1}) - q_i(v_i - v_{i-1})}{a_i + b_i y_i} \\
&= K(u_i - v_i) + \frac{b_i A_i y_i (u_i e^{\frac{-E}{u_i}} - v_i e^{\frac{-E}{v_i}}) + d_i y_i (e^{\frac{-E}{u_i}} - e^{\frac{-E}{v_i}})}{a_i + b_i y_i} \\
&+ \frac{q_{i-1}(u_{i-1} - v_{i-1}) + q_i(u_{i+1} - v_{i+1}) - (q_{i-1} + q_i)(u_i - v_i)}{a_i + b_i y_i} \\
&= \left(K - \frac{q_{i-1} + q_i}{a_i + b_i y_i} \right) (u_i - v_i) + \frac{b_i A_i y_i (u_i e^{\frac{-E}{u_i}} - v_i e^{\frac{-E}{v_i}})}{a_i + b_i y_i} \\
&+ \frac{d_i y_i (e^{\frac{-E}{u_i}} - e^{\frac{-E}{v_i}})}{a_i + b_i y_i} + \frac{q_{i-1}(u_{i-1} - v_{i-1}) + q_i(u_{i+1} - v_{i+1})}{a_i + b_i y_i} > 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $i = n$, obtemos

$$\begin{aligned}
F_n(u, y_n) - F_n(v, y_n) &= K u_n + f_n(u, y_n) - (K v_n + f_n(v, y_n)) \\
&= K(u_n - v_n) + f_n(u, y_n) - f_n(v, y_n) \\
&= K(u_n - v_n) + \frac{(b_n A_n u_n + d_n) y_n e^{\frac{-E}{u_n}}}{a_n + b_n y_n} - \frac{q_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{a_n + b_n y_n} \\
&- \frac{\bar{q}_2(u_n - u_E)}{a_n + b_n y_n} - \frac{(b_n A_n v_n + d_n) y_n e^{\frac{-E}{v_n}}}{a_n + b_n y_n} + \frac{q_{n-1}(v_n - v_{n-1})}{a_n + b_n y_n} \\
&+ \frac{\bar{q}_2(v_n - u_E)}{a_n + b_n y_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K(u_n - v_n) + \frac{b_n A_n y_n (u_n e^{\frac{-E}{u_n}} - v_n e^{\frac{-E}{v_n}}) + d_n y_n (e^{\frac{-E}{u_n}} - e^{\frac{-E}{v_n}})}{a_n + b_n y_n} \\
&+ \frac{-q_{n-1}(u_n - v_n) + q_{n-1}(u_{n-1} - v_{n-1}) - \bar{q}_2(u_n - v_n)}{a_n + b_n y_n} \\
&= K(u_n - v_n) + \frac{b_n A_n y_n (u_n e^{\frac{-E}{u_n}} - v_n e^{\frac{-E}{v_n}}) + d_n y_n (e^{\frac{-E}{u_n}} - e^{\frac{-E}{v_n}})}{a_n + b_n y_n} \\
&+ \frac{q_{n-1}(u_{n-1} - v_{n-1}) - (q_{n-1} + \bar{q}_2)(u_n - v_n)}{a_n + b_n y_n} \\
&= \left(K - \frac{q_{n-1} + \bar{q}_2}{a_n + b_n y_n} \right) (u_n - v_n) + \frac{b_n A_n y_n (u_n e^{\frac{-E}{u_n}} - v_n e^{\frac{-E}{v_n}})}{a_n + b_n y_n} \\
&+ \frac{d_n y_n (e^{\frac{-E}{u_n}} - e^{\frac{-E}{v_n}})}{a_n + b_n y_n} + \frac{q_{n-1}(u_{n-1} - v_{n-1})}{a_n + b_n y_n} > 0.
\end{aligned}$$

Nas desigualdades anteriores, utilizamos o fato de que as funções $g_1(s) = e^{-\frac{E}{s}}$ e $g_2(s) = s e^{-\frac{E}{s}}$, com $s \in \mathbb{R}$ e $E > 0$, são estritamente crescentes para $s > 0$, juntamente à definição da constante K , dada em (3.4).

A seguir, usamos o Lema B.1.4 para construir uma sequência monótona de funções que converge para a solução do problema parabólico semilinear (3.1). Dada uma iteração inicial $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)})$, construímos, através de um processo iterativo, uma sequência $\{u^{(k)}\} = \{(u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})\}$, $k = 0, 1, \dots$, em que cada termo é solução do seguinte problema linear desacoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_i u_i^{(k)} = F_i(u_1^{(k-1)}, \dots, u_{n-1}^{(k-1)}, u_n^{(k-1)}, y_i), \\ u_i^{(k)}(x, 0) = u_{i,0}(x), \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Agora, seja $\{\bar{u}^{(k)}\}$, com $\bar{u}^{(0)} = \tilde{u}$, uma sequência superior, em que cada termo $\bar{u}_i^{(k)}$ é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_i \bar{u}_i^{(k)} = F_i(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_{n-1}^{(k-1)}, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_i), \\ \bar{u}_i^{(k)}(x, 0) = u_{i,0}(x), \\ \frac{\partial \bar{u}_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_{n-1}^{(k-1)}, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) &= K\bar{u}_1^{(k-1)} + f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_{n-1}^{(k-1)}, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) \\
&= K\bar{u}_1^{(k-1)} + \frac{(b_1 A_1 \bar{u}_1^{(k-1)} + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{\bar{u}_1^{(k-1)}}}}{a_1 + b_1 y_1} \\
&\quad + \frac{q_1(\bar{u}_2^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k-1)})}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1(\bar{u}_1^{(k-1)} - u_E)}{a_1 + b_1 y_1}, \\
F_i(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_{n-1}^{(k-1)}, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_i) &= K\bar{u}_i^{(k-1)} + f_i(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_{n-1}^{(k-1)}, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_i) \\
&= K\bar{u}_i^{(k-1)} + \frac{(b_i A_i \bar{u}_i^{(k-1)} + d_i) y_i e^{-\frac{E}{\bar{u}_i^{(k-1)}}}}{a_i + b_i y_i} \\
&\quad - \frac{q_{i-1}(\bar{u}_i^{(k-1)} - \bar{u}_{i-1}^{(k-1)})}{a_i + b_i y_i} + \frac{q_i(\bar{u}_{i+1}^{(k-1)} - \bar{u}_i^{(k-1)})}{a_i + b_i y_i},
\end{aligned}$$

com $i = 2, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned}
F_n(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_{n-1}^{(k-1)}, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_n) &= K\bar{u}_n^{(k-1)} + f_n(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_{n-1}^{(k-1)}, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_n) \\
&= K\bar{u}_n^{(k-1)} + \frac{(b_n A_n \bar{u}_n^{(k-1)} + d_n) y_n e^{-\frac{E}{\bar{u}_n^{(k-1)}}}}{a_n + b_n y_n} \\
&\quad - \frac{q_{n-1}(\bar{u}_n^{(k-1)} - \bar{u}_{n-1}^{(k-1)})}{a_n + b_n y_n} - \frac{\bar{q}_2(\bar{u}_n^{(k-1)} - u_E)}{a_n + b_n y_n}.
\end{aligned}$$

Analogamente, definimos a sequência inferior $\{\underline{u}^{(k)}\}$, com $\underline{u}^{(0)} = \hat{u}$, em que cada termo \underline{u}_i é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_i \underline{u}_i^{(k)} = F_i(\underline{u}_1^{(k-1)}, \dots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}, y_i), \\ \underline{u}_i^{(k)}(x, 0) = u_{i,0}(x), \\ \frac{\partial \underline{u}_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial \underline{u}_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

sendo

$$\begin{aligned}
F_1(\underline{u}_1^{(k-1)}, \dots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}, y_1) &= K\underline{u}_1^{(k-1)} + f_1(\underline{u}_1^{(k-1)}, \dots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}, y_1) \\
&= K\underline{u}_1^{(k-1)} + \frac{(b_1 A_1 \underline{u}_1^{(k-1)} + d_1) y_1 e^{-\frac{E}{\underline{u}_1^{(k-1)}}}}{a_1 + b_1 y_1} \\
&\quad + \frac{q_1(\underline{u}_2^{(k-1)} - \underline{u}_1^{(k-1)})}{a_1 + b_1 y_1} - \frac{\bar{q}_1(\underline{u}_1^{(k-1)} - u_E)}{a_1 + b_1 y_1}, \\
F_i(\underline{u}_1^{(k-1)}, \dots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}, y_i) &= K\underline{u}_i^{(k-1)} + f_i(\underline{u}_1^{(k-1)}, \dots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}, y_i) \\
&= K\underline{u}_i^{(k-1)} + \frac{(b_i A_i \underline{u}_i^{(k-1)} + d_i) y_i e^{-\frac{E}{\underline{u}_i^{(k-1)}}}}{a_i + b_i y_i} \\
&\quad - \frac{q_{i-1}(\underline{u}_i^{(k-1)} - \underline{u}_{i-1}^{(k-1)})}{a_i + b_i y_i} + \frac{q_i(\underline{u}_{i+1}^{(k-1)} - \underline{u}_i^{(k-1)})}{a_i + b_i y_i},
\end{aligned}$$

com $i = 2, \dots, n-1$ e

$$\begin{aligned}
F_n(\underline{u}_1^{(k-1)}, \dots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}, y_n) &= K\underline{u}_n^{(k-1)} + f_n(\underline{u}_1^{(k-1)}, \dots, \underline{u}_{n-1}^{(k-1)}, \underline{u}_n^{(k-1)}, y_n) \\
&= K\underline{u}_n^{(k-1)} + \frac{(b_n A_n \underline{u}_n^{(k-1)} + d_n) y_n e^{-\frac{E}{\underline{u}_n^{(k-1)}}}}{a_n + b_n y_n} \\
&\quad - \frac{q_{n-1}(\underline{u}_n^{(k-1)} - \underline{u}_{n-1}^{(k-1)})}{a_n + b_n y_n} - \frac{\bar{q}_2(\underline{u}_n^{(k-1)} - u_E)}{a_n + b_n y_n}.
\end{aligned}$$

Lema 3.0.4. As seqüências $\{\bar{u}^{(k)}\} = \{(\bar{u}_1^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)})\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\} = \{(\underline{u}_1^{(k)}, \dots, \underline{u}_n^{(k)})\}$ dadas por (3.7) e (3.8) estão bem definidas e possuem a propriedade monótona

$$\hat{u}_i \leq \underline{u}_i^{(k)} \leq \underline{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k)} \leq \tilde{u}_i \text{ em } \bar{\Omega}_T.$$

Além disso, para cada $k = 0, 1, \dots$, $\{\bar{u}^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\}$ são super e subsoluções, respectivamente, do sistema acoplado (3.1).

Demonstração. Seja $\{u^{(k)}\} = \{(u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})\}$ uma seqüência inferior ou superior e defina

$$q_i^{(k)}(x, t) = F_i(x, t, u^{(k)}(x, t)).$$

Pelo Teorema B.1.1, a função $u_i^{(k)}$ está bem definida se $q_i^{(k-1)}$ for contínua em Ω_T e Hölder contínua em x , uniformemente em t . Considere o caso $k = 1$. Uma

vez que $u_i^{(0)}$ é Hölder contínua em Ω_T , a Hölder continuidade de F_i implica que

$$\begin{aligned} |q_i^{(0)}(x, t) - q_i^{(0)}(\xi, \tau)| &\leq |F_i(x, t, u^{(0)}(x, t)) - F_i(\xi, \tau, u^{(0)}(x, t))| \\ &\quad + |F_i(\xi, \tau, u^{(0)}(x, t)) - F_i(\xi, \tau, u^{(0)}(\xi, \tau))| \\ &\leq H_i(|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}) + K_i |u_i^{(0)}(x, t) - u_i^{(0)}(\xi, \tau)| \\ &\leq H_i(|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}) + K_i H_i^{(0)}(|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}) \\ &\leq (H_i + K_i H_i^{(0)})(|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}), \end{aligned}$$

em que H_i , $H_i^{(0)}$ e K_i são constantes de Hölder e $\alpha \in (0, 1)$.

Logo, $q_i^{(0)}$ é Hölder contínua em Ω_T , com expoente α . Usando o Teorema B.1.1, existe uma única solução $u_i^{(1)}$ para o problema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_i u_i^{(k)} = F_i(u_1^{(k-1)}, \dots, u_{n-1}^{(k-1)}, u_n^{(k-1)}, y_i), \\ u_i^{(k)}(x, 0) = u_{i,0}(x), \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

e $u_i^{(1)} \in C^\alpha(\Omega_T)$.

Trocando $u_i^{(0)}$ por $u_i^{(1)}$, o mesmo argumento mostra que $q_i^{(1)}(x, t)$ é Hölder contínua em Ω_T (expoente α). Daí, a solução $u_i^{(2)}$ para o problema linear acima existe e $u_i^{(2)} \in C^\alpha(\Omega_T)$. Indutivamente, mostramos que $\{u_i^{(k)}\}$ está bem definida.

Demonstramos agora que

$$\widehat{u}_i \leq \underline{u}_i^{(k)} \leq \underline{u}_i^{(k+1)} \leq \overline{u}_i^{(k+1)} \leq \overline{u}_i^{(k)} \leq \widetilde{u}_i \text{ em } \overline{\Omega}_T.$$

A prova é feita por indução sobre k . Ilustramos apenas o caso $k = 0$, pois os demais passos da indução são provados de forma análoga. Assim sendo, provamos que

$$\underline{u}_i^{(0)} \leq \underline{u}_i^{(1)} \leq \overline{u}_i^{(1)} \leq \overline{u}_i^{(0)} \leq \widetilde{u}_i \text{ em } \overline{\Omega}_T.$$

Seja $w_i^{(0)} = \overline{u}_i^{(0)} - \overline{u}_i^{(1)} = \widetilde{u}_i - \overline{u}_i^{(1)}$. Veja que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i w_i^{(0)} &= \mathcal{L}_i \widetilde{u}_i - F_i(\overline{u}^{(0)}, y_i) = (\widetilde{u}_i)_t - L_i \widetilde{u}_i - f_i(\widetilde{u}, y_i) \geq 0, \\ w_i^{(0)}(x, 0) &= u_{i,0}(x) - u_{i,0}(x) = 0, \\ \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial x} \Big|_{x=0, \ell} &= 0. \end{aligned}$$

Conforme o Lema B.1.4, temos que $w_i^{(0)}(x, t) \geq 0$. Logo, $\overline{u}_i^{(1)} \leq \overline{u}_i^{(0)}$.

Analogamente, podemos mostrar que $\underline{u}_i^{(1)} \geq \underline{u}_i^{(0)}$. Se $w_i^{(1)} = \overline{u}_i^{(1)} - \underline{u}_i^{(1)}$,

segue-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i w_i^{(1)} &= F_i(\bar{u}^{(0)}, y_i) - F_i(\underline{u}^{(0)}, y_i) \geq 0, \\ w_i^{(1)}(x, 0) &= u_{i,0}(x) - u_{i,0}(x) = 0, \\ \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0,\ell} &= 0.\end{aligned}$$

De acordo com o Lema B.1.4, temos que $w_i^{(1)} \geq 0$ em $\bar{\Omega}_T$. Daí, $\bar{u}_i^{(1)} \geq \underline{u}_i^{(1)}$ em $\bar{\Omega}_T$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $\underline{u}_i^{(k-1)} \leq \underline{u}_i^{(k)} \leq \bar{u}_i^{(k)} \leq \bar{u}_i^{(k-1)}$ em $\bar{\Omega}_T$. Defina $w_i^{(k)} = \bar{u}_i^{(k)} - \bar{u}_i^{(k+1)}$. Da hipótese de indução e da propriedade monótona de F_i , obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i w_i^{(k)} &= F_i(\bar{u}^{(k-1)}, y_i) - F_i(\bar{u}^{(k)}, y_i) \geq 0, \\ w_i^{(k)}(x, 0) &= u_{i,0}(x) - u_{i,0}(x) = 0, \\ \frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0,\ell} &= 0.\end{aligned}$$

Com base no Lema B.1.4, notamos que $w_i^{(k)} \geq 0$. Daí, $\bar{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k)}$. Analogamente, pode-se mostrar que $\underline{u}_i^{(k+1)} \geq \underline{u}_i^{(k)}$ e $\bar{u}_i^{(k+1)} \geq \underline{u}_i^{(k+1)}$, $k = 0, 1, \dots$

Falta agora provar que $\bar{u}^{(k)}$ e $\underline{u}^{(k)}$ são super e subsoluções de (3.1). De fato, basta observar, para $i = 1$, que

$$\begin{aligned}(\bar{u}_1^{(k)})_t - L_1 \bar{u}_1^{(k)} &= (\bar{u}_1^{(k)})_t - L_1 \bar{u}_1^{(k)} + K \bar{u}_1^{(k)} - K \bar{u}_1^{(k)} \\ &= ((\bar{u}_1^{(k)})_t - L_1 \bar{u}_1^{(k)} + K \bar{u}_1^{(k)}) - K \bar{u}_1^{(k)} \\ &= \mathcal{L}_1 \bar{u}_1^{(k)} - K \bar{u}_1^{(k)} \\ &= F_1(\bar{u}^{(k-1)}, y_1) - K \bar{u}_1^{(k)} \\ &= K \bar{u}_1^{(k-1)} + f_1(\bar{u}^{(k-1)}, y_1) - K \bar{u}_1^{(k)} \\ &= K(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) \\ &\quad - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) \\ &= K(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + (f_1(\bar{u}_1^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) \\ &\quad - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1)) + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) \\ &\geq K(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) - K(\bar{u}_1^{(k-1)} - \bar{u}_1^{(k)}) + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) \\ &= f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}, y_1) \\ &\quad + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}, y_1).\end{aligned}$$

Como f_1 é quase-monótona não-decrescente, temos que

$$f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}, y_1) > 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (\bar{u}_1^{(k)})_t - L_1 \bar{u}_1^{(k)} &= [f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k-1)}, \dots, \bar{u}_n^{(k-1)}, y_1) - f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}, y_1)] \\ &\quad + f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}, y_1) \\ &\geq f_1(\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}, y_1). \end{aligned}$$

Para $2 \leq i \leq n$, prova-se de forma similar. Analogamente, mostra-se que $\{\underline{u}^{(k)}\}$ é subsolução de (3.1). \square

Como $\{\bar{u}_i^{(k)}\}$ é uma sequência não-crescente e limitada inferiormente por \hat{u}_i , temos que ela converge pontualmente para \bar{u}_i em $\bar{\Omega}_T$. Da mesma forma, $\{\underline{u}_i^{(k)}\}$ é uma sequência não-decrescente e limitada superiormente por \tilde{u}_i . Logo, $\{\underline{u}_i^{(k)}\}$ converge pontualmente para \underline{u}_i em $\bar{\Omega}_T$. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k)}(x, t) = \bar{u}(x, t) \quad (3.10)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}^{(k)}(x, t) = \underline{u}(x, t), \quad (3.11)$$

em que $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ e $\underline{u} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$, $(x, t) \in \bar{\Omega}_T$.

Agora, demonstramos que estas funções limites são soluções clássicas de (3.1).

Lema 3.0.5. Os limites \bar{u} e \underline{u} definidos por (3.10) e (3.11), respectivamente, são soluções clássicas do problema (3.1), isto é, satisfazem as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{u}_i)_t - L_i \bar{u}_i = f_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n, y_i), \\ (\underline{u}_i)_t - L_i \underline{u}_i = f_i(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n, y_i), \\ \bar{u}_i(x, 0) = \underline{u}_i(x, 0) = u_{i,0}(x), \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Além do mais,

$$\hat{u}(x, t) \leq \underline{u}(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_T.$$

Demonstração. Utilizamos a notação $\{u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)}\}$ para representar a sequência $\{\bar{u}_1^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}\}$ ou $\{\underline{u}_1^{(k)}, \dots, \underline{u}_n^{(k)}\}$ e os resultados do Apêndice A.

Como $u_i^{(k)}$ é solução do problema linear (3.7), sua representação integral, dada pelo Teorema B.1.1, é

$$u_i^{(k)}(x, t) = \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, 0)u_{i,0}(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, \tau)(F_i(u^{(k-1)}, y_i))(\xi, \tau)d\xi, \quad (3.13)$$

sendo Γ_i a solução fundamental de $\mathcal{L}_i u_i = 0$.

Observação 1. É importante ressaltar que uma vez que a solução fundamental Γ_i está definida em $[-\varepsilon, \ell + \varepsilon] \times [0, T]$, conforme visto no apêndice 2 desta tese, a representação integral de cada solução do problema linear (3.7) é dada por

$$u_i^{(k)}(x, t) = \int_{-\varepsilon}^{\ell+\varepsilon} \Gamma_i(x, t; \xi, 0)u_{i,0}(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\varepsilon}^{\ell+\varepsilon} \Gamma_i(x, t; \xi, \tau)(F_i(u^{(k-1)}, y_i))(\xi, \tau)d\xi.$$

Por motivos de simplicidade, continuaremos a utilizar em todo o trabalho a notação (3.13).

Conforme o Teorema da Convergência Dominada, segue-se que o limite $u = (u_1, \dots, u_n)$ satisfaz a equação integral

$$u_i(x, t) = \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, 0)u_{i,0}(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, \tau)(F_i(u, y_i))(\xi, \tau)d\xi.$$

Aqui vale também o que foi dito na Observação 1.

Observamos que $\int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, 0)u_{i,0}(\xi)d\xi \in C^{2+\alpha}(\Omega_T)$. Segundo o Lema B.1.3, o potencial $V_i(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, \tau)(F_i(u, y_i))(\xi, \tau)d\xi$ é contínuo em $\bar{\Omega}_T$. Usando o Lema B.1.3 novamente, temos que $V_i(x, t)$ é Hölder contínua, uma vez que q é contínua. Assim sendo, u_i é Hölder contínua em $\bar{\Omega}_T$. O Teorema B.1.1 mostra que $u = (u_1, \dots, u_n)$ é solução clássica do problema (3.1). \square

Mostramos adiante a unicidade da solução encontrada. Para isso, fizemos uma mudança de variável adequada e estudamos um problema auxiliar.

Seja $w_i = e^{-\gamma t}u_i$, em que γ é uma constante positiva a ser escolhida. Com a mudança de variável acima, o problema (3.1) fica na forma

$$\begin{cases} (w_i)_t - L_i w_i + \gamma w_i = f_i^*(w, y_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ w_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in (0, \ell), \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

em que $w = (w_1, \dots, w_n)$ e $f_i^*(w) = e^{-\gamma t}f_i(e^{\gamma t}w, y_i)$.

Suponha que existam funções limitadas $K_i \equiv K_i(x, t)$ em Ω_T , tais que

$$|f_i(u, y_i) - f_i(v, y_i)| \leq K_i \|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \quad (3.15)$$

sendo $\|u - v\| \equiv |u_1 - v_1| + \dots + |u_n - v_n|$.

Então

$$|f_i^*(w, y_i) - f_i^*(v, y_i)| \leq K_i \|w - v\|, \quad \forall w, v \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $w^{(0)} = (w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)})$, com $w_i^{(0)} \in C^\alpha(\overline{\Omega}_T)$ (conjunto das funções Hölder contínuas de expoente $\alpha \in (0, 1)$), construímos a sequência $\{w^{(k)}\} = \{(w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})\}$ pelo processo iterativo

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i^{(0)}(x, t) = w_{i,0}(x), \quad x \in (0, \ell), \\ (w_i^{(k)})_t - L_i w_i^{(k)} + \gamma w_i^{(k)} = f_i^*(w^{(k-1)}, y_i) \quad \text{em } \Omega_T, \\ w_i^{(k)}(x, 0) = u_{i,0}(x) \quad \text{em } (0, \ell) \\ \frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial w_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Como cada $w_i^{(k)}$ é solução de um problema linear, de acordo com o Teorema B.1.1 a sequência $\{w^{(k)}\}$ está bem definida e $w_i^{(k)} \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$, para todo i .

Supondo (3.15), mostramos que $\{w^{(k)}\}$ converge para uma única solução do problema (3.14), com $w^{(0)} \in C^\alpha(\overline{\Omega}_T)$. A prova da convergência da sequência $\{w^{(k)}\}$ é baseada no Teorema do Ponto Fixo de Banach no espaço $(C^0(\overline{\Omega}_T))^n$, equipado com a norma

$$\|w\|_0 = |w_1|_0 + \dots + |w_n|_0,$$

em que $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Sejam $X = C^\alpha(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$, ($\alpha \in (0, 1]$), $X^n = (C^\alpha(\Omega_T))^n \cap (C^0(\overline{\Omega}_T))^n$ e defina os operadores $A_i : D(A_i) \subset X \rightarrow C^0(\Omega_T)$ e $f_i^* : X^n \rightarrow X$ por $A_i w_i = (w_i)_t - L_i w_i + \gamma w_i$, $w_i \in D(A_i)$ e $f_i^*(w) = f_i^*(x, t, w, y_i)$, $w \in X^n$, sendo $D(A_i)$ o domínio de A_i , dado por

$$D(A_i) = \{w_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) : \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, w_i(x, 0) = u_{i,0}(x)\}.$$

Defina agora os operadores $\mathcal{A} : D(A_1) \times \dots \times D(A_n) \subset X^n \rightarrow (C^0(\Omega_T))^n$ e $\mathcal{F} : X^n \rightarrow X^n$ da seguinte forma:

$$\mathcal{A}w = (A_1 w_1, \dots, A_n w_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n) \in D(A_1) \times \dots \times D(A_n) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(w) = (f_1^*(w), \dots, f_n^*(w)), \quad w \in X^n.$$

Assim, (3.14) é equivalente à equação

$$\mathcal{A}w = \mathcal{F}(w), \quad w \in D(A_1) \times \cdots \times D(A_n),$$

e a sequência de iterações (3.16) torna-se

$$\mathcal{A}w^{(k)} = \mathcal{F}(w^{(k-1)}), \quad w^{(k)} \in D(A_1) \times \cdots \times D(A_n).$$

Os lemas a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em [24], mostram algumas propriedades dos operadores A_i e \mathcal{A} .

Lema 3.0.6. Para todo $\gamma > 0$, os operadores A_i^{-1} e \mathcal{A}^{-1} existem e

$$|A_i^{-1}v_i - A_i^{-1}v'_i|_0 \leq \gamma^{-1}|v_i - v'_i|_0, \quad v_i, v'_i \in \text{Im}(A_i),$$

e

$$\|\mathcal{A}^{-1}v - \mathcal{A}^{-1}v'\|_0 \leq \gamma^{-1}\|v - v'\|_0, \quad v, v' \in \text{Im}(\mathcal{A}),$$

em que $\text{Im}(\mathcal{A})$ é o conjunto imagem do operador \mathcal{A} .

Lema 3.0.7. Seja $\gamma > \bar{K}$, onde $\bar{K} = \sup_{\Omega_T} (K_1(x, t) + \cdots + K_n(x, t))$, sendo $K_i(x, t)$ a função que aparece em (3.15). Seja $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{F} : X^n \rightarrow (C^0(\bar{\Omega}_T))^n$. Então

$$\|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}(w) - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}(w')\|_0 \leq \left(\frac{\bar{K}}{\gamma}\right)\|w - w'\|_0, \quad w, w' \in X^n.$$

Estamos em condições para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.0.1. Sejam $f_i(u, y_i)$ funções definidas em \mathbb{R}^{n+1} , satisfazendo a propriedade de Lipschitz na variável u , isto é, para cada i , existem funções limitadas $K_i(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_T$, tais que $f_i(u, y_i)$ satisfaz a condição

$$|f_i(u, y_i) - f_i(v, y_i)| \leq K_i\|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n. \quad (3.17)$$

Então o problema

$$\begin{cases} (u_i)_t - L_i u_i = f_i(u, y_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

possui uma única solução u . Além disso, u_i é limite da sequência $\{u_i^{(k)}\}$ definida pelo

processo iterativo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(0)}(x, t) = u_{i,0}(x), \quad x \in (0, \ell), \\ (u_i^{(k)})_t - L_i u_i^{(k)} = f_i(u^{(k-1)}, y_i) \quad \text{em } \Omega_T, \\ u_i^{(k)}(x, 0) = u_{i,0}(x) \quad \text{em } (0, \ell), \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Demonstração. Basta mostrar a existência e unicidade da solução para o problema (3.14), visto que (3.18) e (3.14) são equivalentes.

De acordo com o Lema 3.0.7, temos que $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{F} : X^n \rightarrow (C^0(\overline{\Omega}_T))^n$ é uma contração. Daí, temos que a sequência $\{w^{(k)}\} = \{(w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})\}$, dada por

$$w^{(k)} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}(w^{(k-1)}), \quad w^{(k)} \in D(A_1) \times \dots \times D(A_n), \quad (3.20)$$

converge para uma única solução $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ de $w = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}(w)$ em $(C^0(\overline{\Omega}_T))^n$, com $\overline{w}^{(0)}$ definida em X^n .

Desde que (3.20) é equivalente a (3.14), as funções $w_i^{(k)}$ podem ser representadas pela fórmula integral

$$w_i^{(k)}(x, t) = \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, \tau) (f_i(w^{(k-1)}, y_i))(\xi, \tau) d\xi.$$

Como $\{w_i^{(k)}\}$ converge uniformemente para w_i^* em Ω_T , temos que w_i^* é a única solução da equação integral

$$w_i^*(x, t) = \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_i(x, t; \xi, \tau) (f_i(w^*, y_i))(\xi, \tau) d\xi.$$

Como w_i^* e $q_i(x, t) = f_i(x, t, w^*(x, t), y_i(x, t))$ são contínuas em $\overline{\Omega}_T$, podemos mostrar que w_i^* é a única solução de (3.14). Este fato garante a existência e unicidade de solução para o problema (3.18).

Como $u_i^{(k)} = e^{\gamma t} w_i^{(k)}$, a sequência dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_i^{(k)})_t - L_i u_i^{(k)} = f_i(u^{(k-1)}, y_i), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \\ u_i^{(k)}(x, 0) = u_{i,0}(x), \quad x \in [0, \ell], \end{array} \right. \quad (3.21)$$

se reduz a (3.16) e satisfaz as condições iniciais e de contorno.

Como $\{w^{(k)}\} \rightarrow w^*$ em $(C^0(\overline{\Omega}_T))^n$, temos que $u^{(k)} \rightarrow u \equiv e^{\gamma t} w^*$, quando $k \rightarrow \infty$. Isto conclui a demonstração do teorema. \square

Provamos agora a unicidade do problema (3.1), utilizando o Teorema

3.0.1. Basta definir as funções $\widehat{f}_i \equiv \widehat{f}_i(u, y_i)$, satisfazendo $\widehat{f}_i(u, y_i) = f_i(u, y_i)$, $\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \langle \widehat{u}, \widetilde{u} \rangle$ e (3.17). Substituindo as funções f_i em (3.1) por \widehat{f}_i , o problema se transforma em (3.18). Conforme o Teorema 3.0.1, o problema (3.18) possui uma única solução $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$.

Desde que $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ e $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ são também soluções do problema (3.18), a propriedade da unicidade da solução implica que $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n) = u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$. Logo, existe uma única solução para o problema (3.1). Assim, apresentamos o teorema principal de todo este capítulo.

Teorema 3.0.2. Sejam \widehat{u} e \widetilde{u} o par acoplado de sub e supersoluções do problema (3.1) e $f = f(u, y_i)$ a função definida em (1.6). Então, o problema (3.1) tem uma única solução $u = (u_1, \dots, u_n)$ em $\langle \widehat{u}, \widetilde{u} \rangle$. Além disso, as sequências $\{\bar{u}^{(k)}\} = \{\bar{u}_1^{(k)}, \dots, \bar{u}_n^{(k)}\}$ e $\{\underline{u}^{(k)}\} = \{\underline{u}_1^{(k)}, \dots, \underline{u}_n^{(k)}\}$, dadas por (3.7), convergem monotonicamente para u e satisfazem a relação

$$\widehat{u}_i \leq \underline{u}_i^{(k)} \leq \underline{u}_i^{(k+1)} \leq u_i \leq \bar{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k)} \leq \widetilde{u}_i \text{ em } \overline{\Omega}_T.$$

Note que a solução do problema (3.1) é não nula, pois, por exemplo, a condição inicial $u_{i,0}$ não é necessariamente nula.

Existência de Solução Local para o Problema de Combustão Completo

Neste capítulo, procuramos soluções para o problema de valor inicial e de contorno (1.9), retirando a hipótese de que as funções de concentração y_i sejam conhecidas. Isto faz com que as equações parabólicas envolvidas passem de semilineares para quasilineares, o que impõe sérias dificuldades para a aplicação do método monótono utilizado na seção anterior.

Para contornar esta situação, definimos um operador em um conjunto de funções Hölder Contínuas que deixa uma bola invariante nesse conjunto, desde que T seja suficientemente pequeno. Este mesmo método foi usado em [9]. A seguir, usamos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para mostrar que este operador possui um ponto fixo e verificamos que o mesmo é solução local para o problema (1.9).

A solução local é, no sentido clássico, de acordo com a seguinte definição:

Definição 4.0.1. Uma solução clássica local para o problema (1.9) é um par de funções vetoriais $u = (u_1, \dots, u_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, em que $u_i, y_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$ satisfazem as equações de (1.9), para algum $T > 0$.

Para determinarmos a solução clássica local de (1.9), usamos, num processo iterativo, o problema linear associado, definido a seguir.

Seja

$$\Sigma = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in (C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T))^n : \|u_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i\}, \quad (4.1)$$

em que $T > 0$ e M_i é uma constante positiva a ser escolhida de modo adequado.

Agora, vamos definir um operador no conjunto Σ da seguinte forma: Dados $u = (u_1, \dots, u_n) \in \Sigma$, $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$ não negativas, limitadas e lipschitzianas em $[0, \ell]$, definimos o operador $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ por

$$S(u_1, \dots, u_n) = (w_1, \dots, w_n), \quad (4.2)$$

em que w_i é a solução do seguinte problema linear:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{[v(u_i)]}(w_i) = f_i(u, y_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ (y_i)_t = -A_i y_i g(u_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ (w_i(x, 0), y_i(x, 0)) = (u_{i,0}(x), y_{i,0}(x)), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, & t \in (0, T], \end{cases} \quad (4.3)$$

com

$$\mathcal{L}_{[v(u_i)]}u_i = (u_i)_t - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}(u_i)_{xx} + \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}(u_i)_x, \quad (4.4)$$

$$f_i(u, y_i) = \begin{cases} \frac{(b_1 A_1 u_1 + d_1) y_1 g(u_1)}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{q_1}{a_1 + b_1 y_1}(u_2 - u_1) - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1}(u_1 - u_E), & i = 1, \\ \frac{(b_i A_i u_i + d_i) y_i g(u_i)}{a_i + b_i y_i} - \frac{q_{i-1}}{a_i + b_i y_i}(u_i - u_{i-1}) + \frac{q_i}{a_i + b_i y_i}(u_{i+1} - u_i), & 2 \leq i \leq n-1, \\ \frac{(b_n A_n u_n + d_n) y_n g(u_n)}{a_n + b_n y_n} - \frac{q_{n-1}}{a_n + b_n y_n}(u_n - u_{n-1}) - \frac{\bar{q}_2}{a_n + b_n y_n}(u_n - u_E), & i = n, \end{cases} \quad (4.5)$$

e

$$g(u_i) = \begin{cases} e^{-\frac{E}{u_i}}, & \text{se } u_i > 0, \\ 0, & \text{se } u_i \leq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

sendo E uma constante positiva. Observamos aqui que a notação $\mathcal{L}_{[v(u_i)]}$ significa que os coeficientes deste operador são formados pelas componentes do vetor $v(u_i) = (v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, 0\right)$. Veja que, dado (u_1, \dots, u_n) , tanto os coeficientes de $\mathcal{L}_{[v(u_i)]}$ quanto os de f_i ficam determinados. Além do mais, y_i fica também definida como solução da equação diferencial ordinária em (4.3).

Assim, w_i é obtida como a solução de um problema de valor inicial e de contorno para uma equação linear. Neste caso, se o operador S estiver bem definido, suas componentes $S_i(u) = w_i$ podem ser representadas na forma integral por

$$\begin{aligned} S_i(u) = w_i &= \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, \tau) f(u, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

O próximo lema mostra que o operador S está bem definido.

Lema 4.0.1. Dados $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$ funções não negativas, limitadas e lipschitzianas em $[0, \ell]$, sejam $0 < T \leq 1$, $R_i = \frac{\lambda_i + c_i}{a_i} (1 + \frac{2b_i}{a_i} \|y_{i,0}\|_1)$ e $K_i = \sup_{0 \leq T \leq 1} K_7 \left(R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_\infty}, T, \|u_{i,0}\|_1 \right)$, em que K_7 é a constante definida na demonstração do Lema B.1.1, equação (B.45). Nestas condições, o operador

$S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ está bem definido, desde que T seja suficientemente pequeno e

$$M_i > K_i \|u_{i,0}\|_1, \quad (4.8)$$

sendo M_i a constante que define Σ em (4.1).

Demonstração. Dado $(u_1, \dots, u_n) \in \Sigma$, podemos obter $y_i(u_i)$ explicitamente resolvendo a equação $(y_i)_t = -A_i y_i g(u_i)$. Segue-se que

$$y_i(x, t) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x, \ell)) d\ell}. \quad (4.9)$$

Daí,

$$0 \leq y_i \leq \|y_{i,0}\|_\infty, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.10)$$

Calculando a norma de Hölder de y_i , obtemos

$$\|y_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq \|y_{i,0}\|_1 \|e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x, \ell)) d\ell}\|_{1, \frac{1}{2}}.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \|e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x, \ell)) d\ell}\|_{1, \frac{1}{2}} &= \sup_{\Omega_T} (e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x, \ell)) d\ell}) \\ &+ \sup_{\substack{(x,t), (x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \frac{|e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x, \ell)) d\ell} - e^{-A_i \int_0^{t'} g(u_i(x', \ell)) d\ell}|}{|x - x'| + |t - t'|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq 1 + \sup_{\substack{(x,t), (x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \frac{|e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x, \ell)) d\ell} - e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x', \ell)) d\ell}|}{|x - x'|} \\ &+ \sup_{\substack{(x,t), (x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \frac{|e^{-A_i \int_0^t g(u_i(x', \ell)) d\ell} - e^{-A_i \int_0^{t'} g(u_i(x', \ell)) d\ell}|}{|t - t'|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq 1 + \sup_{\substack{(x,t), (x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \left(A_i \int_0^t \frac{|g(u_i(x, \ell)) - g(u_i(x', \ell))|}{|x - x'|} d\ell \right) \\ &+ \sup_{\substack{(x,t), (x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \left(A_i \frac{\int_{t'}^t |g(u_i(x', \ell))| d\ell}{|t - t'|^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \sup_{\substack{(x,t),(x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \left(A_i \int_0^t \|g'\|_\infty \|u_i\|_{1,\frac{1}{2}} dl \right) \\
&+ \sup_{\substack{(x,t),(x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} (A_i \|g\|_\infty |t - t'|^{\frac{1}{2}}) \\
&\leq 1 + T A_i \|u_i\|_{1,\frac{1}{2}} \|g'\|_\infty + T^{\frac{1}{2}} A_i.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|y_i(x, t)\|_{1,\frac{1}{2}} \leq \|y_{i,0}\|_1 (1 + T A_i \|u_i\|_{1,\frac{1}{2}} \|g'\|_\infty + T^{\frac{1}{2}} A_i).$$

Tomando $T > 0$, tal que $T A_i \|u_i\|_{1,\frac{1}{2}} \|g'\|_\infty + T^{\frac{1}{2}} A_i \leq 1$, encontramos

$$\|y_i\|_{1,\frac{1}{2}} \leq 2 \|y_{i,0}\|_1. \quad (4.11)$$

Além disso, $v(u_i) \in B(0, R_i)$, sendo

$$B(0, R_i) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in (C^{1,\frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T]))^3 : \|v\|_{1,\frac{1}{2}} \leq R_i\},$$

com

$$\|v\|_{1,\frac{1}{2}} = \|v_1\|_{1,\frac{1}{2}} + \|v_2\|_{1,\frac{1}{2}} + \|v_3\|_{1,\frac{1}{2}}$$

e

$$\|v_i\|_{1,\frac{1}{2}} = \sup_{[0,\ell] \times [0,T]} |v_i(x, t)| + \sup_{(x,t) \neq (y,s)} \frac{|v_i(x, t) - v_i(y, s)|}{|x - y| + |t - s|^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

De fato, como $v(u_i) = \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, 0 \right)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1,\frac{1}{2}} &= \sup_{\Omega_T} \left| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right| + \sup_{\substack{(x,t),(x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \frac{\left| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i(x,t))} - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i(x',t'))} \right|}{|x - x'| + |t - t'|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{\lambda_i}{a_i} + \frac{\lambda_i b_i}{a_i^2} \sup_{\substack{(x,t),(x',y') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \frac{|y_i(u_i(x, t)) - y_i(u_i(x', t'))|}{|x - x'| + |t - t'|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{\lambda_i}{a_i} + \frac{\lambda_i b_i}{a_i^2} \|y_i\|_{1,\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\lambda_i}{a_i} + \frac{2b_i \lambda_i \|y_{i,0}\|_1}{a_i^2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, calculando $\left\| \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}} &= \sup_{\Omega_T} \left| \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right| + \sup_{\substack{(x,t), (x',t') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \frac{\left| \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i(x,t))} - \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i(x',t'))} \right|}{|x - x'| + |t - t'|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{c_i}{a_i} + \frac{c_i b_i}{a_i^2} \sup_{\substack{(x,t), (x',t') \in \Omega_T \\ x \neq x', t \neq t'}} \frac{|y_i(u_i(x,t)) - y_i(u_i(x',t'))|}{|x - x'| + |t - t'|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{c_i}{a_i} + \frac{c_i b_i}{a_i^2} \|y_i\|_{1, \frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{c_i}{a_i} + \frac{2c_i b_i \|y_{i,0}\|_1}{a_i^2}.
\end{aligned}$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}} + \left\| \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}} &\leq \frac{\lambda_i + c_i}{a_i} \left(1 + \frac{b_i \|y_i\|_{1, \frac{1}{2}}}{a_i} \right) \\
&\leq \frac{\lambda_i + c_i}{a_i} \left(1 + \frac{2b_i \|y_{i,0}\|_1}{a_i} \right) = R_i.
\end{aligned}$$

Logo, $v(u_i) \in B(0, R_i)$. Note que para cada i , a função $f_i(u_i(x, t), y_i(x, t))$, (como função de (x, t)) é Hölder contínua de expoente $\alpha = 1$. Desta forma, segue-se, com base no Teorema B.1.1 que o problema (4.3) possui uma única solução clássica no espaço das funções $(C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T))^n$.

O próximo passo é mostrar que $(w_1, \dots, w_n) \in \Sigma$. Para isso, calculamos $\|g\|_{1, \frac{1}{2}}$ e $\|f_i\|_{1, \frac{1}{2}}$.

Calculando $\|g\|_{1, \frac{1}{2}}$, encontramos:

$$\begin{aligned}
\|g\|_{1, \frac{1}{2}} &= \sup_{\Omega_T} |g(u_i(x, t))| + \sup_{\substack{(x,t), (\xi, \tau) \in \Omega_T \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|g(u_i(x, t)) - g(u_i(\xi, \tau))|}{|x - \xi| + |t - \tau|^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \sup_{\Omega_T} |e^{-\frac{E}{u_i(x,t)}}| + \sup_{\substack{(x,t), (\xi, \tau) \in \Omega_T \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|g(u_i(x, t)) - g(u_i(\xi, t)) + g(u_i(\xi, t)) - g(u_i(\xi, \tau))|}{|x - \xi| + |t - \tau|^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&\leq \sup_{\Omega_T} |e^{-\frac{E}{u_i(x,t)}}| + \sup_{\substack{(x,t), (\xi, \tau) \in \Omega_T \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|g(u_i(x, t)) - g(u_i(\xi, t))|}{|x - \xi|} \right) \\
&\quad + \sup_{\substack{(x,t), (\xi, \tau) \in \Omega_T \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|g(u_i(\xi, t)) - g(u_i(\xi, \tau))|}{|t - \tau|^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= 1 + \|g'\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} |t - t'|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 1 + \|g'\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} T^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\|g\|_{1,\frac{1}{2}} \leq 1 + \|g'\|_{\infty}(1 + T^{\frac{1}{2}}). \quad (4.12)$$

Calculando $\|f_i\|_{1,\frac{1}{2}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{1,\frac{1}{2}} &= \left\| \frac{(b_1 A_1 u_1 + d_1) y_1 g(u_1)}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{q_1}{a_1 + b_1 y_1} (u_2 - u_1) - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (u_1 - u_E) \right\|_{1,\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{\Omega_T} \left| \frac{1}{a_1 + b_1 y_1(x, t)} \right| \left((1 + \|a_1 + b_1 y_1\|_{1,\frac{1}{2}}) ((b_1 A_1 \|u_1\|_{1,\frac{1}{2}} + d_1) \|y_1\|_{1,\frac{1}{2}} \|g(u_1)\|_{1,\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + q_1 \|u_2 - u_1\|_{1,\frac{1}{2}} + \bar{q}_1 \|u_1 - u_E\|_{1,\frac{1}{2}}) \right) \\ &\leq \frac{1}{a_1} (1 + a_1 + b_1 \|y_1\|_{1,\frac{1}{2}}) ((b_1 A_1 \|u_1\|_{1,\frac{1}{2}} + d_1) \|y_1\|_{1,\frac{1}{2}} \|g\|_{1,\frac{1}{2}} \\ &\quad + q_1 \|u_2\|_{1,\frac{1}{2}} + q_1 \|u_1\|_{1,\frac{1}{2}} + \bar{q}_1 \|u_1\|_{1,\frac{1}{2}} + \bar{q}_1 u_E) \\ &\leq \frac{1}{a_1} (1 + a_1 + 2b_1 \|y_{1,0}\|_1) (b_1 A_1 M_1 + d_1) 2 \|y_{1,0}\|_1 (1 + \|g'\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} T^{\frac{1}{2}}) \\ &\quad + q_1 M_2 + q_1 M_1 + \bar{q}_1 M_1 + \bar{q}_1 u_E) \\ &\leq \bar{K}_1(M_1, M_2, \|y_{1,0}\|_1, T), \end{aligned}$$

em que \bar{K}_1 é uma constante que depende de $M_1, M_2, \|y_{1,0}\|_1$ e T .

Analogamente, mostramos que $\|f_i\|_{1,\frac{1}{2}} \leq \bar{K}_i(M_i, M_{i+1}, \|y_{1,0}\|_1, T)$ e $\|f_n\|_{1,\frac{1}{2}} \leq \bar{K}_n(M_{n-1}, M_n, \|y_{1,0}\|_1, T)$, em que \bar{K}_i depende de $M_i, M_{i+1}, \|y_{1,0}\|_1, T$ e \bar{K}_n depende de $M_{n-1}, M_n, \|y_{1,0}\|_1$ e T .

Portanto,

$$\|f_i\|_{1,\frac{1}{2}} \leq \bar{\bar{K}}(M_1, \dots, M_n, \|y_{i,0}\|_{1,\frac{1}{2}}, T), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.13)$$

Agora, mostramos que $(w_1, \dots, w_n) \in \Sigma$. De fato, aplicando o Corolário B.1.1, temos:

$$\|w_i\|_{1,\frac{1}{2}} \leq K_7 (\|u_{i,0}\|_1 + T^{\frac{1}{2}} (\|f_i(u, y_i)\|_{1,\frac{1}{2}} + 1) \|f_i(u, y_i)\|_{1,\frac{1}{2}}).$$

Segue-se de (4.8) que $\|w_i\|_{1,\frac{1}{2}} \leq K_7 (\|u_{i,0}\|_1 + T^{\frac{1}{2}} \bar{\bar{K}}(M_1, \dots, M_n, \|y_{i,0}\|_1, T))$, em que K_7 depende de $R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_{\infty}}, T, \|u_{i,0}\|_1$ e $\bar{\bar{K}}$ é uma constante dependendo de $M_1, \dots, M_n, \|y_{i,0}\|_1$ e T .

Portanto,

$$\|w_i\|_{1,\frac{1}{2}} \leq M_i,$$

desde que T seja suficientemente pequeno. \square

Assim, mostramos que o operador $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ está bem definido. Além disso, o operador S deixa Σ invariante no espaço das funções Hölder contínuas.

Para provar o principal resultado desta seção que é um teorema de existência local de solução para o problema (1.9), vamos usar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (ver enunciado em B.2.2). Neste caso, precisamos mostrar que Σ é convexo, fechado, que S é contínuo e que $S(\Sigma)$ é pré-compacto. Isto é feito nos próximos lemas.

Lema 4.0.2. O conjunto Σ definido em (4.1) é fechado e convexo.

Demonstração. Inicialmente, provamos que Σ é fechado. De fato, seja (u^k) uma sequência contida em Σ convergindo na norma de Hölder para uma função $\bar{u} \in (C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T))^n$. Como $\|u_i^k\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$, para todo $k \in \mathbb{N}$, M_i não depende de k , e a norma $\|\cdot\|_{1, \frac{1}{2}}$ é uma aplicação contínua, temos que $\|\bar{u}_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$. Assim, $\bar{u} \in \Sigma$, mostrando que Σ é um conjunto fechado.

Vamos mostrar agora que Σ é um conjunto convexo. Sejam $u, v \in \Sigma$. Desta forma, $u, v \in (C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T))^n$ e para cada i , $\|u_i\|_{1, \frac{1}{2}}, \|v_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$. Segue-se que $tu + (1-t)v \in (C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T))^n$, para $t \in (0, 1)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|tu_i + (1-t)v_i\|_{1, \frac{1}{2}} &\leq t\|u_i\|_{1, \frac{1}{2}} + (1-t)\|v_i\|_{1, \frac{1}{2}} \\ &\leq tM_i + (1-t)M_i \\ &= tM_i + M_i - tM_i \\ &= M_i. \end{aligned}$$

Logo, $tu + (1-t)v \in \Sigma$. Portanto, Σ é convexo. \square

Lema 4.0.3. O operador definido em (4.2) é contínuo e o conjunto $S(\Sigma)$ é pré-compacto.

Demonstração. Inicialmente provamos que S é um operador contínuo. De fato, dada uma sequência de funções (u^k) em Σ , convergindo na norma de Hölder para uma função $\bar{u} \in \Sigma$, devemos mostrar que $(S(u^k))$ converge para $S(\bar{u})$. Faça $w^k = S(u^k)$ e $\bar{w} = S(\bar{u})$. Assim, cada componente w_i^k de w^k é solução do problema linear parabólico

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{[v(u_i^k)]}(w_i^k) = f_i(u^k, y_i^k), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ (y_i^k)_t = -A_i y_i^k g(u_i^k), \quad \text{em que } y_i^k = y_i(u_i^k), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ (w_i^k(x, 0), y_i^k(x, 0)) = (u_{i,0}(x), y_{i,0}(x)), \quad x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial w_i^k}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_i^k}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad t \in (0, T]. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Como (u_i^k) converge na norma de Hölder para $\bar{u}_i \in C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, temos que $[v(u_i^k)]$, $y_i^k = y_i(u_i^k)$, $g(u_i^k)$ e $f_i(u^k, y_i(u_i^k))$ convergem pontualmente para $[v(\bar{u}_i)]$, $\bar{y}_i = y_i(\bar{u}_i)$, $g(\bar{u}_i)$ e $f_i(\bar{u}, y_i(\bar{u}_i))$, respectivamente. Pelo Teorema B.1.1, temos

que $\bar{w}_i = S_i(\bar{u})$ é solução do problema parabólico linear

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{[v(\bar{u}_i)]}(\bar{w}_i) = f_i(\bar{u}, \bar{y}_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ (\bar{y}_i)_t = -A_i \bar{y}_i g(\bar{u}_i), \quad \bar{y}_i = y_i(\bar{u}_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ (\bar{w}_i(x, 0), \bar{y}_i(x, 0)) = (u_{i,0}(x), y_{i,0}(x)), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (4.15)$$

Portanto, (w^k) converge para $\bar{w} = S(\bar{u})$, o que conclui que S é contínuo.

Vamos provar agora que o conjunto $S(\Sigma)$ é pré-compacto. Seja (w^k) uma sequência em $S(\Sigma)$. Devemos mostrar que (w^k) possui uma subsequência (w^{k_n}) que converge na norma de Hölder para um elemento $\bar{w}^k \in \Sigma$. É importante ressaltar que \bar{w}^k pode ou não pertencer a $S(\Sigma)$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$, $w^k \in S(\Sigma) \subset \Sigma$, segue do Lema 4.0.1 que cada componente w_i^k de w^k satisfaz $\|w_i^k\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$, onde M_i é uma constante positiva que independe de k . Portanto, seguindo [9], temos, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, que (w_i^k) possui uma subsequência $(w_i^{k_n})$ convergindo uniformemente para um elemento $\bar{w}_i \in C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, com $\|\bar{w}_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$. Desta forma, (w^k) converge para $\bar{w} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n) \in \Sigma$, e portanto, $S(\Sigma)$ é pré-compacto. \square

Usando os Lemas 4.0.2 e 4.0.3, podemos provar o resultado principal desta seção.

Teorema 4.0.1. Sejam $u_{i,0}, y_{i,0}$ funções positivas, limitadas e lipschitzianas em $[0, \ell]$. Então, o problema (1.9) possui uma solução local $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$, com $u_i, y_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, para algum $T > 0$.

Demonstração. Seja $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ o operador definido em (4.2). Pelo Lema 4.0.2, o conjunto Σ é fechado e convexo. O Lema 4.0.3 mostra que S é contínuo e $S(\Sigma)$ é pré-compacto. Usando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, temos que S possui um ponto fixo, isto é, existe um ponto $u \in \Sigma$ tal que $S(u) = u$. Assim, por (4.7), as componentes u_i de u podem ser dadas na forma integral por

$$\begin{aligned} S_i(u) = u_i &= \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, \tau) f(u, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Agora, considere o seguinte problema linear, onde u é o ponto fixo achado acima:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{[v(u_i)]}(w_i) = f_i(u, y_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ w_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Note que este problema linear possui uma única solução cuja representação integral é a mesma como em (4.16). Portanto, $w_i = u_i$, o que implica que $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$ é solução do problema não linear (1.9), com $u_i, y_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^{1,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, o que completa a demonstração. \square

No Capítulo 3, mostramos que $\hat{u} = (0, \dots, 0)$ e $\tilde{u} = (\varphi(t), \dots, \varphi(t))$ (φ definida em (3.3)) constituem um par de sub e supersolução do sistema parabólico em (1.9), quando as funções y_i em $\bar{\Omega}_T$ são conhecidas.

Aplicando o Teorema 3.0.2, mostramos que a solução clássica local (u, y) , dada pelo Teorema 4.0.1, é tal que u pertence ao setor

$$\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle_T = \{u \in (C^0([0, \ell]) \times [0, T])^n : \hat{u} \leq u \leq \tilde{u}\}.$$

De forma mais precisa, vale o seguinte teorema:

Teorema 4.0.2. Sejam $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$ funções não negativas, limitadas e lipschitzianas em $[0, \ell]$. Se $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$ é uma solução local de (1.9) definida em $[0, \ell] \times [0, T]$, obtida pelo Teorema 4.0.1, então $u = (u_1, \dots, u_n) \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle_T$, em que \hat{u} e \tilde{u} são as sub e supersoluções definidas no Lema 3.0.1.

Demonstração. Consideremos o problema semilinear

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{[v(u_i)]}(w_i) = f_i(w, y_i), & (x, t) \in \Omega_T, \\ w_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in [0, \ell], \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, & \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Note que os coeficientes do operador \mathcal{L} estão dependendo somente de $u = (u_1, \dots, u_n)$ e não da variável dependente $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Tomemos $M = M_1 + \dots + M_n$, sendo M_i , $i = 1, \dots, n$, as constantes definidas no Lema 4.0.1. Nestas condições, $\hat{v} = (-M, \dots, -M)$ e $\tilde{v} = (\phi(t), \dots, \phi(t))$, com $\phi(t) = (M + \beta)e^{\alpha t} - \beta$, formam um par ordenado de sub e supersoluções para o problema (4.18).

Como (u, y) é solução de (4.18) em $(C^{2,1}(\Omega_T))^n \cap (C^1(\tilde{\Omega}_T))^n \cap (C^{1,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T))^n$, e, com base no Lema 4.0.1, $\hat{v} \leq (u_1, \dots, u_n) \leq \tilde{v}$, e ainda $f = (f_1, \dots, f_n)$ é quase-monótona não-decrescente, segue, segundo o Teorema 2.0.1, que (u, y) é a única solução do problema (4.18) no setor $\langle \hat{v}, \tilde{v} \rangle_T$. Observamos também que \hat{u} e \tilde{u} formam um par ordenado de sub e supersoluções do problema (4.18). Logo, o Teorema 2.0.1 garante também a existência de uma solução no setor $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle_T$. Como $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle_T \subset \langle \hat{v}, \tilde{v} \rangle_T$ e temos a unicidade nesse setor maior, concluímos que $u \in \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle_T$. \square

Existência de Solução Global para o Problema de Combustão Completo

A demonstração da existência de uma solução global no tempo para o problema (1.9) depende de uma limitação das derivadas espaciais da temperatura em cada camada. Para o problema com duas camadas, a prova pode ser feita de modo similar, como em [9, 23], onde o método recaiu no problema de provar que um sistema algébrico de duas inequações possui solução numa região limitada de \mathbb{R}^2 . Já para o caso de n camadas, esta limitação ficou em aberto.

A demonstração para a existência da solução global pode ser feita da seguinte forma. Dada uma solução local definida em $\overline{\Omega}_T$, estendemos esta solução até um T^* maximal. Em seguida, definimos a solução fundamental em $[0, \ell] \times [0, T^*]$, sendo T^* o tempo maximal de existência da solução. Para isto, é necessário provar que os coeficientes das equações do sistema pertencem a $C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^*])$. Continuando, usamos a representação integral da solução para obter a regularidade da mesma em T^* . O objetivo é mostrar que $T^* = \infty$. Isto é feito, como usual, supondo que $T^* < \infty$ e obtendo uma contradição.

Empregando a representação integral da solução, mostramos que ela tem, em T^* , a mesma regularidade que o dado inicial. Assim, podemos reaplicar o método usado para obter a solução local para um tempo maior que T^* , revelando a impossibilidade da existência de um tempo maximal finito para a existência da solução.

Definição 5.0.1. Uma solução clássica global em relação ao tempo para o problema (1.9) é um par de funções vetoriais $u = (u_1, \dots, u_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, em que $u_i, y_i \in C^{2,1}((0, \ell) \times (0, +\infty)) \cap C^1([0, \ell] \times (0, +\infty)) \cap C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, +\infty))$, e satisfazem as equações de (1.9).

Suponha que $u_{i,0}$ são funções lipschitzianas, limitadas, não negativas em $[0, \ell]$ e $y_{i,0} \in C^2(0, \ell)$, com $y_{i,0}$ e $y'_{i,0}$ limitadas em $[0, \ell]$. Demonstramos que o

problema (1.9) possui uma solução $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$, com

$$u, y \in X = \left(C^{2,1}((0, \ell) \times (0, +\infty)) \cap C^1([0, \ell] \times (0, +\infty)) \cap C_{loc}^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, +\infty)) \right)^n, \quad (5.1)$$

e tal que $0 \leq u_i(x, t) \leq \varphi(t)$, $\forall (x, t) \in [0, \ell] \times \mathbb{R}^+$, em que $\varphi(t)$ foi definida em (3.3).

A expressão “loc” na notação acima quer dizer localmente em relação ao tempo, ou seja, $u = (u_1, \dots, u_n)|_{\Omega_T}$ é tal que $u_i|_{\Omega_T}$ pertence ao espaço $C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, para qualquer $T > 0$. De agora em diante, utilizamos a seguinte notação

$$X_T \equiv (C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T))^n. \quad (5.2)$$

Relembramos aqui que $\Omega_T = (0, \ell) \times (0, T]$.

A seguir, vamos mostrar a existência de um intervalo maximal para a solução local do problema (1.9).

Definição 5.0.2. Uma função (u^*, y^*) é dita solução maximal de (1.9) se ela for uma solução definida em $[0, \ell] \times [0, T^*)$, em que

$$T^* = \sup\{T > 0 : u^* \in X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T \text{ e } y^* \in X_T\}. \quad (5.3)$$

Note que, neste caso, se (u, y) for solução de (1.9), com $u \in X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T$ e $T \geq T^*$, então $T = T^*$. O intervalo $[0, T^*)$, $0 < T^* \leq \infty$, é dito intervalo maximal para a solução (u^*, y^*) .

A existência de T^* pode ser obtida da forma padrão, usando o Lema de Zorn. Ordenamos o conjunto dos pares $(u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T)$, em que (u, y) é solução de (1.9), com $u \in X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T$, $T > 0$, pela relação $(u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T) \leq (u', X_{T'} \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_{T'})$, se $T \leq T'$ e u' restrita a $[0, \ell] \times [0, T]$ coincide com u .

Todo subconjunto \mathcal{C} desse conjunto de pares que seja totalmente ordenado tem a cota superior $(\bar{u}, X_{\bar{T}} \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_{\bar{T}})$, em que o intervalo $[0, \bar{T})$ é a união dos intervalos $[0, T)$, tais que $(u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T) \in \mathcal{C}$ e $\bar{u}|_{[0, \ell] \times [0, T]} \equiv u$, qualquer que seja $(u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T) \in \mathcal{C}$.

Logo, de acordo com o Lema de Zorn, o conjunto de todos os pares $(u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T)$ tem um elemento maximal, ou seja, existe um par $(u^*, X_{T^*} \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_{T^*})$, tal que se $(u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T)$ é outro par com $(u^*, X_{T^*} \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_{T^*}) \leq (u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T)$, então $(u, X_T \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_T) \leq (u^*, X_{T^*} \cap < \hat{u}, \tilde{u} >_{T^*})$, isto é, $T \leq T^*$ e $u|_{[0, \ell] \times [0, T^*]} = u^*$.

No que se segue, denotamos por $(u^*, y^*) = (u_1^*, \dots, u_n^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ uma solução maximal do problema (1.9), em que supomos $T^* < \infty$. Inicialmente, provamos que a solução é limitada.

Lema 5.0.1. Seja $(u^*, y^*) = (u_1^*, \dots, u_n^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ uma solução maximal de (1.9), com $u^* \in X_{T^*} \cap \langle \widehat{u}, \widetilde{u} \rangle_{T^*}$ e $T^* < \infty$. Então u_i^* é limitada por $\varphi(T^*)$, em que φ é dada pelo Lema 3.0.1.

Demonstração. Pela definição de solução maximal, temos que $u^* \in \langle \widehat{u}, \widetilde{u} \rangle_{T^*}$.

Portanto, $0 \leq u_i^* \leq \varphi(t) \leq \varphi(T^*)$, e como φ é crescente e positiva, temos que $|u_i^*(x, t)| \leq \varphi(T^*)$, para todo $(x, t) \in [0, \ell] \times [0, T^*]$.

No que se refere a (4.10), temos que $|y_i(x, t)| \leq \|y_{i,0}\|_\infty$. Logo, a solução maximal (u^*, y^*) é limitada. \square

Lema 5.0.2. Seja $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$ uma solução local do problema (1.9), definida em $[0, \ell] \times [0, T]$, com $T > 0$. Então, dado $t \in (0, T]$, temos que $\partial_x u_i(\cdot, t)$ é Hölder contínua (de expoente $\alpha = 1$) em $(0, \ell)$ e, além disso, se $y_{i,0} \in C^2(0, \ell) \cap C^1([0, \ell])$, então $\partial_x^3 u_i$ e $\partial_t \partial_x u_i$ existem em Ω_T .

Demonstração. Uma vez fixado T , $w_i = u_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\widetilde{\Omega}_T) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\overline{\Omega}_T)$ é solução da equação parabólica linear

$$\mathcal{L}_{[v(u_i)]}(w_i) = f_i(u, y_i(u_i)) \quad (5.4)$$

em Ω_T , temos que a função f_i e os coeficientes do operador $\mathcal{L}_{[v(u_i)]}$ são Hölder contínuos em Ω_T . Conforme o Teorema B.1.3, temos que $\partial_x u_i$ é Hölder contínua em Ω_T .

Da mesma forma, o fato de $\partial_x u_i$ ser Hölder contínua implica que os coeficientes da equação (5.4) têm derivadas em relação a x Hölder contínuas e que $(f_i)_x$ também é Hölder contínua em Ω_T . Logo, novamente, com base no Teorema B.1.3, temos que $\partial_x^3 u_i$ e $\partial_t \partial_x u_i$ existem e são Hölder contínuas em Ω_T . \square

Para mostrar que os coeficientes de (1.9) podem ser definidos em $t = T^*$, deve-se mostrar que existe uma constante, independente de T , que limita $(u_i)_x$ em $[0, \ell] \times (0, T]$, para todo $T < T^*$.

Observação 2. Veja que uma vez fixado $T_1 < T^*$, tal que uma solução $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$ de (1.9) exista, com $u^*, y^* \in X_{T_1} = (C^{2,1}(\Omega_{T_1}) \cap C^1(\widetilde{\Omega}_{T_1}) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\overline{\Omega}_{T_1}))^n$, como consequência do Lema 5.0.2, Teorema B.2.1, e do fato de que $\partial_x u_i(0, t) = \partial_x u_i(\ell, t) \equiv 0$, existe uma constante que limita $\partial_x u_i$ em $[0, \ell] \times (0, T_1]$. Este argumento não garante a limitação da derivada em $[0, \ell] \times (0, T^*)$, tendo em vista que $\|u_i\|_{1, \frac{1}{2}}$ em $[0, \ell] \times [0, T_1]$ poderia tender ao infinito quando T_1 se aproximasse de T^* .

A seguir, vamos mostrar a existência de uma constante $K > 0$ que independe de T , tal que $|\partial_x u_i(x, t)| \leq K$, para $(x, t) \in [0, \ell] \times [T_1, T]$, onde $T_1 > 0$, quando os pontos de máximos de $|\partial_x u_i(x, t)|$ ocorrem em $(0, \ell) \times (T_1, T]$.

Lema 5.0.3. Sejam $0 < T < T^*$, $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$ funções não negativas, limitadas e lipschitzianas em $[0, \ell]$, com $y_{i,0} \in C^2(0, \ell)$ e $y'_{i,0}$ limitadas em $(0, \ell)$, e $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$ uma solução de (1.9), com $u_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$. Dado $0 < T_1 < T$, se os pontos de máximo de $|\partial_x u_i|$ em $[0, \ell] \times [T_1, T]$ ocorrem apenas em $(0, \ell) \times (T_1, T]$, então existe uma constante K , independente de T , tal que $|\partial_x u_i(x, t)| \leq K$ em $[0, \ell] \times [T_1, T]$.

Demonstração. Observemos que os pontos de máximo de $|\partial_x u_i|$ não podem ocorrer em $\{0\} \times [T_1, T]$ ou em $\{\ell\} \times [T_1, T]$, pois $\partial_x u_i|_{x=0} = 0 = \partial_x u_i|_{x=\ell}$. Note também que se $|\partial_x u_i|$ atingir o valor máximo em $[0, \ell] \times \{T_1\}$, ele será limitado pela constante que aparece na Observação 2. Assim, os pontos de máximo de $|\partial_x u_i|$ em $[0, \ell] \times [T_1, T]$ ocorrem apenas em $(0, \ell) \times (T_1, T]$.

Para demonstrarmos este lema, seguimos [23]. Para cada i , fazemos a mudança de variável $u_i = h_i(v_i)$, onde

$$h_i(v_i) = \varphi(T^*)(-2 + 3e \int_0^{v_i} e^{-s^{m_i}} ds),$$

sendo m_i uma constante positiva a ser escolhida.

Note que $h_i(v_i)$ é de fato uma mudança de variável, pois $\frac{\partial h_i}{\partial v_i} > 0$.

Como $0 \leq u_i \leq \varphi(T) < \varphi(T^*)$, afirmamos que

$$\frac{2}{3e} \leq v_i \leq \bar{v} < 1,$$

onde $\bar{v} = \frac{\varphi(T)}{\varphi(T^*)} + 2$, para qualquer número real $m_i > 0$.

Para provar isto, observamos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_i \leq \varphi(T), \\ 0 &\leq \varphi(T^*)(-2 + 3e \int_0^{v_i} e^{-s^{m_i}} ds) \leq \varphi(T), \\ 0 &\leq -2 + 3e \int_0^{v_i} e^{-s^{m_i}} ds \leq \frac{\varphi(T)}{\varphi(T^*)} < 1. \end{aligned}$$

De um lado, fazendo $\bar{v} = \frac{\varphi(T)}{\varphi(T^*)} + 2$, temos, para $0 < s < \bar{v} < 1$, que $s^{m_i} < 1$ e, conseqüentemente, $-s^{m_i} > -1$, o que implica $e^{-s^{m_i}} > e^{-1}$.

Assim,

$$-2 + 3e \int_0^{\bar{v}} e^{-s^{m_i}} ds \geq -2 + 3e \int_0^{\bar{v}} e^{-1} ds = \frac{\varphi(T)}{\varphi(T^*)},$$

donde $h_i(v_i) = u_i \leq \varphi(T) \leq \varphi(T^*)(-2 + 3e \int_0^{\bar{v}} e^{-s^{m_i}} ds) = h_i(\bar{v})$. Logo, $v_i \leq \bar{v}$.

Por outro lado, como $u_i = h_i(v_i) \geq 0$ e

$$h\left(\frac{2}{3e}\right) = \varphi(T^*)\left(-2 + 3e \int_0^{\frac{2}{3e}} e^{-s^{m_i}} ds\right) \leq \varphi(T^*)\left(-2 + 3e \int_0^{\frac{2}{3e}} ds\right) = 0,$$

segue que $\frac{2}{3e} \leq v_i$.

Com esta mudança de variável, temos que v_i satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} (v_i)_t - \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i}\right)(v_i)_{xx} + \left(\frac{c_i}{a_i + b_i y_i}\right)(v_i)_x \\ - \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i}\right) \frac{h_i''(v_i)}{h_i'(v_i)} [(v_i)_x]^2 = \frac{f_i(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n))}{h_i'(v_i)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Derivando (5.5) em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} (v_i)_{tx} + \frac{\lambda_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} (v_i)_{xx} - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} (v_i)_{xxx} - \frac{c_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} (v_i)_x \\ + \frac{c_i}{a_i + b_i y_i} (v_i)_{xx} + \frac{\lambda_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} \frac{h_i''(v_i)}{h_i'(v_i)} (v_i)_x^2 - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \left(\frac{h_i''}{h_i'}\right)' (v_i)_x^3 \\ - \frac{2\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \frac{h_i''}{h_i'} (v_i)_x (v_i)_{xx} = \left(\frac{f_i(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n))}{h_i'(v_i)}\right)_x. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Como $(v_i)_x$ é contínua em $[0, \ell] \times (0, T]$, podemos tomar $p_i = \max_{[0, \ell] \times [T_1, T]} \{|(v_i)_x|\}$. Da definição de v_i , temos que se o ponto de máximo de $|(u_i)_x|$ em $[0, \ell] \times [T_1, T]$ ocorre apenas em $(0, \ell) \times (T_1, T]$, então o mesmo vale para $\frac{1}{3e\varphi(T^*)} |(u_i)_x|$ e, conseqüentemente, para $|(v_i)_x|$. Segue-se que

$$|(u_i)_x(x, t)| = 3e\varphi(T^*)e^{-v_i(x, t)^{m_i}} |(v_i)_x(x, t)|.$$

Logo, para todo $(x, t) \in [0, \ell] \times [T_1, T]$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{3e\varphi(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| - |(v_i)_x(x, t)| \right| &= \left| \frac{1}{3e\varphi(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| - \frac{|(u_i)_x|}{|h_i'(v_i)|} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3e\varphi(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| - \frac{e^{v_i(x, t)^{m_i}}}{3e\varphi(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| \right| \\ &= \left| 1 - e^{v_i(x, t)^{m_i}} \right| \frac{1}{3e\varphi(T^*)} |(u_i)_x(x, t)|. \end{aligned}$$

Segue-se que $|(v_i)_x|$ converge para $\frac{1}{3e\varphi(T^*)}|(u_i)_x(x, t)|$, uniformemente em (x, t) , quando $m_i \rightarrow \infty$. A convergência uniforme, junto com o fato do máximo de $|(u_i)_x|$ ocorrer apenas em $(0, \ell) \times (T_1, T]$, garante que o máximo de $|(v_i)_x|$ também ocorre apenas em $(0, \ell) \times (T_1, T]$, desde que m_i seja suficientemente grande.

Como os máximos de $|(v_i)_x|$ em $[0, \ell] \times [T_1, T]$ ocorrem em $(0, \ell) \times (T_1, T]$, temos que existe pelo menos um ponto $(x_i, t_i) \in (0, \ell) \times (T_1, T]$ tal que $|(v_i)_x(x_i, t_i)| = p_i$ é máximo. Neste ponto de máximo, temos que $(v_i)_x(x_i, t_i) = \pm p_i$.

Analisamos o caso em que $(v_i)_x(x_i, t_i) = p_i$. Os outros casos são análogos. Se $p_i = 0$, tomamos $K = 0$. Supondo $p_i > 0$, temos que $(v_i)_{xt}(x_i, t_i) \geq 0$, $(v_i)_{xx}(x_i, t_i) = 0$ e $(v_i)_{xxx}(x_i, t_i) \leq 0$.

Calculando (5.6) em $(x_i, t_i) \in (0, \ell) \times (T_1, T]$, obtemos

$$-\frac{c_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i + \frac{\lambda_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} \frac{h_i''}{h_i'} p_i^2 - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \left(\frac{h_i''}{h_i'} \right)' p_i^3 \leq \left(\frac{f_i(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n))}{h_i'(v_i)} \right)'_x. \quad (5.7)$$

Segue da definição da função h_i , que

$$\begin{aligned} h_i' &= 3e\varphi(T^*)e^{-v_i^{m_i}}, \\ h_i'' &= -3e\varphi(T^*)m_i v_i^{m_i-1} e^{-v_i^{m_i}}, \\ \frac{h_i''}{h_i'} &= -m_i v_i^{m_i-1} \\ \left(\frac{h_i''}{h_i'} \right)' &= -m_i(m_i - 1)v_i^{m_i-2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Da definição de y_i , segue-se que

$$\begin{aligned} (y_i)_x &= y'_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(h_i(v_i)) d\ell} \\ &+ y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(h_i(v_i)) d\ell} \left(-A_i \int_0^t g'(h_i(v_i)) \right) h_i'(v_i) (v_i)_x(x, \ell) d\ell. \end{aligned} \quad (5.9)$$

No ponto $(x_i, t_i) \in (0, \ell) \times (T_1, T]$, obtemos a estimativa

$$|(y_i)_x| \leq K(1 + 3T^* e\varphi(T^*) p_i) \leq K_1(1 + p_i), \quad (5.10)$$

onde a constante K_1 independe de T .

Da definição de f_i , temos, para $i = 1$,

$$f_1(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n)) = \frac{(b_1 A_1 h_1(v_1) + d_1) y_1 g(h_1(v_1))}{a_1 + b_1 y_1} + \frac{q_1}{a_1 + b_1 y_1} (h_2(v_2) - h_1(v_1)) - \frac{\bar{q}_1}{a_1 + b_1 y_1} (h_1(v_1) - u_E).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} (f_1(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n)))_x &= - \frac{[q_1(h_2(v_2) - h_1(v_1)) - \bar{q}_1(h_1(v_1) - u_E)]}{(a_1 + b_1 y_1)^2} b_1(y_1)_x \\ &\quad - \frac{(b_1 A_1 h_1(v_1) + d_1) y_1 g(h_1(v_1))}{(a_1 + b_1 y_1)^2} b_1(y_1)_x \\ &\quad + \frac{[b_1 A_1 h'_1(v_1)(v_1)_x y_1 g(h_1(v_1)) + (b_1 A_1 h_1(v_1) + d_1)(y_1)_x g(h_1(v_1))]}{a_1 + b_1 y_1} \\ &\quad + \frac{(b_1 A_1 h_1(v_1) + d_1) y_1 g'(h_1(v_1)) h'_1(v_1)(v_1)_x}{a_1 + b_1 y_1} \\ &\quad + \frac{q_1[h'_2(v_2)(v_2)_x - h'_1(v_1)(v_1)_x] - \bar{q}_1 h'_1(v_1)(v_1)_x}{a_1 + b_1 y_1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$|f_1(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n))_x| \leq K_0(1 + p_1 + p_2)$$

e K_0 independe de T .

Para $2 \leq i \leq n - 1$, temos

$$\begin{aligned} (f_i(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n)))_x &= \frac{[q_{i-1}(h_i(v_i) - h_{i-1}(v_{i-1}))]}{(a_i + b_i y_i)^2} b_i(y_i)_x \\ &\quad - \frac{q_i(h_{i+1}(v_{i+1}) - h_i(v_i))}{(a_i + b_i y_i)^2} b_i(y_i)_x - \frac{(b_i A_i h_i(v_i) + d_i) y_i g(h_i(v_i))}{(a_i + b_i y_i)^2} b_i(y_i)_x \\ &\quad + \frac{b_i A_i h'_i(v_i)(v_i)_x y_i g(h_i(v_i))}{a_i + b_i y_i} \\ &\quad + \frac{[(b_i A_i h_i(v_i) + d_i)(y_i)_x g(h_i(v_i)) + (b_i A_i h_i(v_i) + d_i) y_i g'(h_i(v_i)) h'_i(v_i)(v_i)_x]}{a_i + b_i y_i} \\ &\quad + \frac{(-q_{i-1})[h'_i(v_i)(v_i)_x - h'_{i-1}(v_{i-1})(v_{i-1})_x] + q_i[h'_{i+1}(v_{i+1})(v_{i+1})_x - h'_i(v_i)(v_i)_x]}{a_i + b_i y_i}. \end{aligned}$$

Segue-se que $|(f_i(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n)))_x| \leq K_1(1 + p_{i-1} + p_i + p_{i+1})$ e K_1 independe de T .

Analogamente,

$$\begin{aligned}
(f_n(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n)))_x &= \frac{[q_{n-1}(h_n(v_n) - h_{n-1}(v_{n-1})) + \bar{q}_2(h_n(v_n) - u_E)]}{(a_n + b_n y_n)^2} b_n(y_n)_x \\
&\quad - \frac{(b_n A_n h_n(v_n) + d_n) y_n g(h_n(v_n))}{(a_n + b_n y_n)^2} b_n(y_n)_x \\
&\quad + \frac{b_n A_n h'_n(v_n)(v_n)_x y_n g(h_n(v_n))}{a_n + b_n y_n} \\
&\quad + \frac{(b_n A_n h_n(v_n) + d_n)(y_n)_x g(h_n(v_n))}{a_n + b_n y_n} \\
&\quad + \frac{(b_n A_n h_n(v_n) + d_n) y_n g'(h_n(v_n)) h'_n(v_n)(v_n)_x}{a_n + b_n y_n} \\
&\quad - \frac{q_{n-1}[h'_n(v_n)(v_n)_x - h'_{n-1}(v_{n-1})(v_{n-1})_x]}{a_n + b_n y_n} - \frac{\bar{q}_2 h'_n(v_n)(v_n)_x}{a_n + b_n y_n}.
\end{aligned}$$

Logo, $|(f_n(h_1(v_1), \dots, h_n(v_n)))_x| \leq K_2(1 + p_{n-1} + p_n)$ e K_2 independe de T .

Como $\left(\frac{f_i}{h'_i(v_i)}\right)_x = \frac{(f_i)_x h'_i(v_i) - f_i h''_i(v_i)(v_i)_x}{(h'_i(v_i))^2}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{f_i}{h'_i(v_i)}\right)_x\right| &\leq \frac{|(f_i)_x| |h'_i(v_i)| + |f_i| |h''_i(v_i)| |(v_i)_x|}{(h'_i(v_i))^2} \leq \\
&\begin{cases} \widehat{K}_0(1 + p_1 + p_2), & i = 1, \\ \widehat{K}_1(1 + p_{i-1} + p_i + p_{i+1}), & 2 \leq i \leq n-1, \\ \widehat{K}_2(1 + p_{n-1} + p_n), & i = n, \end{cases} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

sendo \widehat{K}_0 , \widehat{K}_1 e \widehat{K}_2 constantes independentes de T .

Substituindo (5.8), (5.10), (5.11) em (5.7), temos

$$\begin{aligned}
-\frac{c_i b_i K_1 (1 + p_i)}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i - \frac{\lambda_i b_i K_1 (1 + p_i) m_i v_i^{m_i-1}}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i^2 + \frac{\lambda_i m_i (m_i - 1) v_i^{m_i-2}}{a_i + b_i y_i} p_i^3 \leq \\
\begin{cases} \widehat{K}_0(1 + p_1 + p_2), & i = 1, \\ \widehat{K}_1(1 + p_{i-1} + p_i + p_{i+1}), & 2 \leq i \leq n-1, \\ \widehat{K}_2(1 + p_{n-1} + p_n), & i = n, \end{cases} \quad (5.12)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
-\frac{c_i b_i K_1 (1 + p_i)}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i - \frac{\lambda_i b_i K_1 m_i v_i^{m_i-1}}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i^2 + \left((m_i - 1) - \frac{b_i v_i K_1}{a_i + b_i y_i} \right) \frac{\lambda_i m_i v_i^{m_i-2}}{a_i + b_i y_i} p_i^3 \leq \\
\begin{cases} \widehat{K}_0(1 + p_1 + p_2), & i = 1, \\ \widehat{K}_1(1 + p_{i-1} + p_i + p_{i+1}), & 2 \leq i \leq n-1, \\ \widehat{K}_2(1 + p_{n-1} + p_n), & i = n. \end{cases} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Como $0 \leq y_i \leq \|y_{i,0}\|_\infty$ e $\frac{2}{3e} \leq v_i \leq 1$, temos que

$$-\frac{c_i b_i K_1 (1 + p_i)}{a_i^2} p_i - \frac{\lambda_i b_i K_1 m_i}{a_i^2} p_i^2 + \left((m_i - 1) - \frac{b_i K_1}{a_i} \right) \frac{\lambda_i m_i v_i^{m_i - 2}}{a_i + b_i y_i} p_i^3 \leq \begin{cases} \widehat{K}_0 (1 + p_1 + p_2), & i = 1, \\ \widehat{K}_1 (1 + p_{i-1} + p_i + p_{i+1}), & 2 \leq i \leq n - 1, \\ \widehat{K}_2 (1 + p_{n-1} + p_n), & i = n. \end{cases} \quad (5.14)$$

Observe que K_1 , na desigualdade (5.10), independe de m_i .

Assim, podemos tomar m_i suficientemente grande, tal que

$$\begin{cases} \alpha_1 p_1^3 - \beta_1 p_1^2 - \gamma_1 p_1 - 1 \leq p_2, \\ \alpha_i p_i^3 - \beta_i p_i^2 - \gamma_i p_i - 1 \leq p_{i-1} + p_{i+1}, & 2 \leq i \leq n - 1, \\ \alpha_n p_n^3 - \beta_n p_n^2 - \gamma_n p_n - 1 \leq p_{n-1}, \end{cases} \quad (5.15)$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ são reais positivos e independem da escolha de T . Se o sistema de inequações (5.15) tiver uma solução (p_1, \dots, p_n) em alguma região limitada do \mathbb{R}^n , então $(v_i)_x$ será limitada na norma do supremo em $[0, \ell] \times [T_1, T]$, por alguma constante positiva que independe de T . Como $(u_i)_x = h'(v_i)(v_i)_x$ e h'_i é limitada, então $(u_i)_x$ também será limitada na norma do supremo em $[0, \ell] \times [T_1, T]$.

Neste trabalho, não provamos que o sistema de inequações (5.15) possui solução numa região limitada de \mathbb{R}^n . No problema de duas camadas ($n = 2$), o sistema (5.15) se reduz a

$$\begin{cases} \alpha_1 p_1^3 - \beta_1 p_1^2 - \gamma_1 p_1 - 1 \leq p_2, \\ \alpha_2 p_2^3 - \beta_2 p_2^2 - \gamma_2 p_2 - 1 \leq p_1, \end{cases} \quad (5.16)$$

e neste caso, foi provado em [9] que o sistema (5.16) possui solução numa região limitada do \mathbb{R}^2 , isto é, existe uma constante positiva K , independente de T , tal que $0 < |p_1| + |p_2| \leq K$. Evidências numéricas sugerem que o resultado continua verdadeiro para $n \geq 3$, ver Figura 5.1 para $n = 3$. Claramente, esta figura mostra uma região limitada em \mathbb{R}^3 .

□

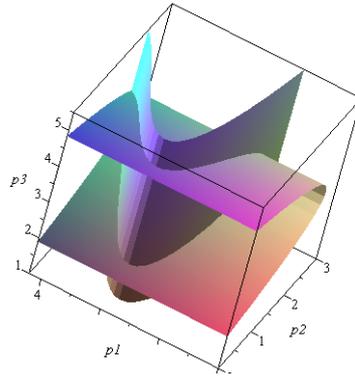


Figura 5.1: Solução do sistema (5.15) para $n = 3$

De agora em diante, vamos continuar a demonstração considerando que existe uma constante independente de T , que limita $(u_i)_x$ na norma do supremo em $[0, \ell] \times (0, T]$, para todo $T < T^*$.

Lema 5.0.4. Seja $(u^*, y^*) = (u_1^*, \dots, u_n^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ uma solução maximal de (1.9) em $X_{T^*} \cap \langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle_{T^*}$. Nestas condições, os coeficientes de (1.9) podem ser definidos em T^* de modo a pertencerem a $C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^*])$.

Demonstração. Uma vez que os coeficientes das equações parabólicas em (1.9) são da forma $v(u_i^*) = \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i^*(u_i^*)}, \frac{c_i}{a_i + b_i y_i^*(u_i^*)}, 0 \right)$, com $y_i^*(u_i^*)(x, t) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell)) d\ell}$, e $i = 1, \dots, n$, temos

$$\partial_x y_i^*(x, t) = \left(y'_{i,0}(x) - A_i y_{i,0}(x) \int_0^t g'(u_i^*(x, \ell)) \partial_x u_i^*(x, \ell) d\ell \right) e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell)) d\ell}$$

e segue das hipóteses sobre $y_{i,0}$ e das limitações de g' e de $(u_i^*)_x$ que

$$|(y_i^*)_x(x, t)| \leq K_{10}(1 + T^* \|(u_i^*)_x\|_\infty), \quad (x, t) \in (0, \ell) \times (0, T^*).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|y_i^*(x, t) - y_i^*(x, t')| &= |y_{i,0}(x)e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell))d\ell} - y_{i,0}(x)e^{-A_i \int_0^{t'} g(u_i^*(x, \ell))d\ell}| \\
&\leq |y_{i,0}(x)| \left| e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell))d\ell} - e^{-A_i \int_0^{t'} g(u_i^*(x, \ell))d\ell} \right| \\
&\leq K_{10} \left| \int_0^t g(u_i^*(x, \ell))d\ell - \int_0^{t'} g(u_i^*(x, \ell))d\ell \right| \\
&\leq K_{10} \left| \int_{t'}^t g(u_i^*(x, \ell))d\ell \right| \\
&\leq K_{10}|t - t'| \\
&\leq K_{10}(t - t')^{\frac{1}{2}}(t - t')^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_{10}(T^*)^{\frac{1}{2}}(t - t')^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (x, t) \in [0, \ell] \times (0, T^*).
\end{aligned}$$

Daí, $y_i^* \in C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^*])$ e, uma vez que y_i^* é uniformemente contínua neste conjunto, podemos definir

$$y_i^*(x, T^*) \equiv \lim_{t \rightarrow T^*} y_i^*(x, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.17)$$

obtendo $y_i^* \in C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^*])$. Como os coeficientes das equações parabólicas são dados pela composição de y_i^* com uma função de derivada limitada, podemos concluir que tais coeficientes também pertencem a $C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^*])$.

Definindo $y_i^*(x, T^*)$ como em (5.17), temos que

$$v(u_i^*) \in (C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^*]))^3.$$

□

Como consequência do Lema 5.0.4, podemos definir a solução fundamental $\Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, \tau)$ de (1.9) em $[0, \ell] \times [0, T^*]$. A seguir, provamos a existência da solução clássica global para o problema (1.9) conforme a Definição 5.0.1, desde que as derivadas espaciais de u_i sejam limitadas.

Teorema 5.0.1. Sejam $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$ funções não negativas, limitadas e lipschitzianas em $[0, \ell]$, com $y_{i,0} \in C^2(0, \ell)$ e $y'_{i,0}$ limitadas em $(0, \ell)$. Então o problema (1.9) admite solução em X , onde X foi definido em (5.1).

Demonstração. Conforme o Lema 5.0.4, temos que os coeficientes das equações parabólicas que aparecem em (1.9) pertencem a $C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^*])$. Isto garante a existência da solução fundamental em $[0, \ell] \times [0, T^*]$, associada ao operador $\mathcal{L}_{[v(u_i^*)]}$.

Observe que a solução fundamental já existia para cada $T < T^*$. Contudo, a constante que aparece nas estimativas da solução fundamental poderia tender ao

infinito quando T se aproximasse de T^* , uma vez que ela depende da norma de Hölder dos coeficientes.

Da definição de T^* em (5.3), segue-se que para todo $T \in (0, T^*)$, o problema (1.9) admite solução $(u, y) = (u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n)$, com $u_i \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\tilde{\Omega}_T) \cap C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$.

Seja

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, \tau) (f_i(u, y_i(u_i)))(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

a representação integral de u_i .

Uma vez que $u_{i,0}$ é limitada, segue de (B.15) que

$$|\Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, \tau) u_{i,0}(\xi)| \leq \frac{K_8}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{C_3|x-\xi|^2}{t-\tau}},$$

para todo $(x, t), (\xi, \tau) \in [0, \ell] \times [0, T^*]$, $t > \tau$, em que K_8 é uma constante que não depende de T .

Ademais, temos que

$$|\Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, \tau) f_i(u, y_i(u_i))(\xi, \tau)| \leq \frac{K_9}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{C_3|x-\xi|^2}{t-\tau}},$$

para todo $(x, t), (\xi, \tau) \in [0, \ell] \times [0, T^*]$, $t > \tau$, uma vez que f_i é contínua em $[0, \|u_1\|_\infty] \times \dots \times [0, \|u_n\|_\infty] \times [0, \|y_i(u_i)\|_\infty]$ e limitada em virtude da definição de y_i e da limitação de u_i , $i = 1, \dots, n$, dada no Lema 5.0.1. Veja que a constante K_9 também não depende de T .

Com isto, segundo o Teorema da Convergência Dominada, podemos passar o limite, quando t tende a T^* , para dentro do sinal da integral e obter

$$\begin{aligned} u_i(x, T^*) &\equiv \lim_{t \rightarrow T^*} \left(\int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i)]}(x, t; \xi, \tau) (f_i(u, y_i(u_i)))(\xi, \tau) d\xi \right) \\ &= \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, 0) u_{i,0} d\xi + \int_0^{T^*} d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, \tau) f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned}$$

Assim, podemos estender $u_i(x, t)$ até $t = T^*$, da seguinte forma, onde continuamos denotando esta extensão por $u_i^*(x, t)$:

$$u_i^*(x, t) = \begin{cases} u_i(x, t), & \text{se } (x, t) \in [0, \ell] \times [0, T], \quad T < T^*, \\ u_i(x, T^*), & \text{se } x \in [0, \ell] \text{ e } t = T^*. \end{cases} \quad (5.18)$$

A seguir, mostramos que $u_i^*(x, t)$ tem uma representação integral como $u_i(x, t)$. Para isso, provamos que $y_i(x, T^*)$, obtido no Lema 5.0.4, é dado por

$$y_i^*(x, T^*) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^{T^*} g(u_i^*(x, \ell)) d\ell}.$$

Da Hölder continuidade de y_i^* em $[0, \ell] \times [0, T^*]$, temos que

$$\begin{aligned} |y_i^*(x, T^*) - y_i^*(x, t)| &\leq K_{10}(T^* - t)^{\frac{1}{2}} \\ y_i^*(x, t) - K_{10}(T^* - t)^{\frac{1}{2}} &\leq y_i^*(x, T^*) \leq y_i^*(x, t) + K_{10}(T^* - t)^{\frac{1}{2}} \\ y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell)) d\ell} - K_{10}(T^* - t)^{\frac{1}{2}} &\leq y_i^*(x, T^*) \leq y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell)) d\ell} \\ &\quad + K_{10}(T^* - t)^{\frac{1}{2}} \\ y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell)) d\ell} - K_{10}(T^* - t)^{\frac{1}{2}} &\leq y_i^*(x, T^*) \leq y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t g(u_i^*(x, \ell)) d\ell} \\ &\quad + K_{10}(T^* - t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Fazendo $t \rightarrow T^*$, segue que

$$y_i^*(x, T^*) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^{T^*} g(u_i^*(x, \ell)) d\ell}.$$

A seguir, mostramos que

$$\begin{aligned} u_i^*(x, t) &= \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, \tau) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))) (\xi, \tau) d\xi, \end{aligned}$$

para todo $(x, t) \in [0, \ell] \times [0, T^*]$. Para isso, deve-se mostrar que $u_i^*(x, t)$ converge a $u_i^*(x, T^*)$, uniformemente, quando $t \rightarrow T^*$. De fato,

$$\begin{aligned} u_i^*(x, T^*) - u_i^*(x, t) &= \int_0^\ell (\Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, 0) - \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, 0)) u_{i,0}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^{T^*} d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, \tau) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))) (\xi, \tau) d\xi \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, \tau) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))) (\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\ell (\Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, 0) - \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, 0)) u_{i,0}(\xi) d\xi \\
&+ \int_t^{T^*} d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, \tau) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))) (\xi, \tau) d\xi \\
&+ \int_0^t d\tau \int_0^\ell (\Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, \tau) - \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, \tau)) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))) (\xi, \tau) d\xi \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Calculamos o módulo de cada parcela separadamente:

Considerando $\frac{T^*}{2} \leq t \leq T^*$, temos

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left| \int_0^\ell (\Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, 0) - \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, 0)) u_{i,0}(\xi) d\xi \right| \\
&= \left| \int_0^\ell \partial_t \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, s; \xi, 0) (T^* - t) u_{i,0}(\xi) d\xi \right| \\
&\leq \int_0^\ell \frac{K_3}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s}} |T^* - t| \|u_{i,0}\|_\infty d\xi \\
&= \frac{K_3}{s} |T^* - t| \\
&\leq \frac{2K_3}{T^*} |T^* - t|. \\
|I_2| &= \left| \int_t^{T^*} d\tau \int_0^\ell \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, \tau) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))) (\xi, \tau) d\xi \right| \\
&\leq \int_t^{T^*} d\tau \int_0^\ell \|f_i\|_\infty \frac{K_3}{(T^* - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{C_3|x-\xi|^2}{T^*-\tau}} d\xi \\
&\leq \int_t^{T^*} K_3 \|f_i\|_\infty d\tau \\
&= K_3 \|f_i\|_\infty (T^* - t). \\
|I_3| &= \left| \int_0^t d\tau \int_0^\ell (\Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, T^*; \xi, \tau) - \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, t; \xi, \tau)) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*))) (\xi, \tau) d\xi \right| \\
&= \left| \int_0^t d\tau \int_0^\ell d\xi \int_t^{T^*} \partial_t \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, s; \xi, \tau) f_i(u^*, y_i^*(u_i^*)) (\xi, \tau) ds \right| \\
&= \left| \int_0^t d\tau \int_t^{T^*} ds \int_0^\ell \partial_t \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, s; \xi, \tau) f_i(u^*, y_i^*(u_i^*)) (\xi, \tau) d\xi \right| \\
&= \left| \int_0^t d\tau \int_t^{T^*} ds \int_0^\ell \partial_t \Gamma_{[v(u_i^*)]}(x, s; \xi, \tau) (f_i(u^*, y_i^*(u_i^*)) (\xi, \tau) - f_i(u^*, y_i^*(u_i^*)) (x, t)) d\xi \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t d\tau \int_t^{T^*} ds \int_0^\ell \frac{K_3}{(s-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} \|\nabla f_i\|_\infty (\|(u_1^*)_x\|_\infty \\
&+ \cdots + \|(u_n^*)_x\|_\infty + \|(y_i^*)_x\|_\infty) |x - \xi| d\xi \\
&\leq \int_0^t d\tau \int_t^{T^*} ds \int_0^\ell \frac{K_3}{(s-\tau)} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi \\
&\leq K_3 \int_0^t d\tau \int_0^\ell d\xi \int_t^{T^*} \frac{1}{(s-\tau)^{\frac{1}{2}}} ds \\
&= K_3 \int_0^t [(T^* - \tau)^{\frac{1}{2}} - (t - \tau)^{\frac{1}{2}}] d\tau \\
&\leq K_3 \int_0^t (T^* - t)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leq K_3 T^* (T^* - t)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

As desigualdades anteriores mostram que a convergência de $u_i^*(x, t)$ para $u_i^*(x, T^*)$, quando t tende a T^* , é uniforme. Agora, vejamos mais algumas propriedades de $u_i^*(x, T^*)$.

Observemos que $u_i^*(x, T^*)$ é limitada em virtude do Lema 5.0.1 e é lipschitziana devido à Observação 2. Com isso, temos que $u_i^*(x, T^*)$ e $y_i^*(x, T^*)$ estão nas mesmas condições que os dados iniciais $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$ no Teorema 4.0.1. Isso permite aplicar o Teorema 4.0.1 para obter a existência da solução do problema (1.9) em $[0, \ell] \times [0, T^* + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, isto é, com $u_i^* \in (C^{2,1}((0, \ell) \times (0, T^* + \varepsilon))) \cap (C^1([0, \ell] \times (0, T^* + \varepsilon))) \cap (C^{1, \frac{1}{2}}([0, \ell] \times [0, T^* + \varepsilon]))$, contrariando o fato de que T^* é maximal.

O argumento para concluir que $(u_1^*, \dots, u_n^*) \in \langle \widehat{u}, \widetilde{u} \rangle_{T^* + \varepsilon}$ é o mesmo utilizado no Teorema 4.0.2, sendo $M_i = \|u_i^*\|_{1, \frac{1}{2}}$ em $[0, \ell] \times [0, T^* + \varepsilon]$. Concluimos que T^* não é finito e, portanto, o teorema está provado. \square

CONCLUSÃO

Neste trabalho, provamos a existência de solução para um problema de combustão num meio poroso com n camadas. No caso particular, em que as concentrações de combustível são funções conhecidas, usamos o método iterativo monótono de sub e supersoluções para provar a existência e unicidade de solução.

Retirando a hipótese de que as concentrações de combustível em cada camada são funções conhecidas, obtemos o problema completo, no qual as equações parabólicas envolvidas passam de semilineares para quasilineares. Neste caso, o método iterativo monótono não se aplica diretamente, pois as equações que representam as concentrações não são do tipo reação-difusão.

Diante disso, obtivemos inicialmente a solução local do problema como um ponto fixo de um operador definido em um conjunto de funções Hölder contínuas. Para isto, usamos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para mostrar a existência de um ponto fixo para este operador e verificamos que o mesmo é a solução do problema neste conjunto de funções. Através deste método, não foi possível obter a unicidade da solução local, visto que o Teorema do Ponto Fixo de Schauder não garante a unicidade do ponto fixo.

A solução local pode ser estendida a uma solução global no tempo, desde que a derivada espacial da temperatura seja limitada em cada camada. Um dos métodos para provar esta limitação recai no problema de provar que um sistema de n inequações algébricas possui solução numa região limitada do \mathbb{R}^n . Neste trabalho, esta prova ficou em aberto. O resultado está demonstrado para o problema de Cauchy para o modelo de duas camadas, e evidências numéricas sugerem que o mesmo continua válido para o problema com mais de duas camadas.

Para um problema com origem nas equações de conservação da Física, é de se esperar que a solução do problema seja única. Sendo assim, este estudo ficou em aberto, pois nem mesmo foi possível provar a unicidade da solução local.

Para trabalhos futuros, podemos considerar os seguintes temas:

- Obtenção de estimativas para as derivadas espaciais da temperatura em cada camada.
- A prova da unicidade da solução global para o problema completo.

- A extensão do problema para o espaço \mathbb{R}^n .
- A análise do problema supondo os parâmetros que aparecem como coeficientes do operador parabólico como funções dependentes da variável espacial.
- Problemas mais realísticos, envolvendo outras variáveis dependentes além da temperatura e da concentração de combustível, como a fração de massa de oxigênio na fase gasosa, a velocidade de Darcy e a pressão em cada camada, conforme a dedução original do modelo.

Lista de Símbolos

- $\Omega_T = \{(x, t) : x \in (0, \ell) \text{ e } 0 < t \leq T\}$.
- $\bar{\Omega}_T = \{(x, t) : x \in [0, \ell] \text{ e } 0 \leq t \leq T\}$.
- $C^0(\Omega_T)$: Espaço das funções contínuas definidas em Ω_T .
- $C^n(\Omega_T)$: Espaço das funções definidas em Ω_T com derivadas contínuas até a ordem n .
- $C^{2,1}(\Omega_T)$: Espaço das funções que possuem duas derivadas espaciais contínuas e uma derivada temporal contínua.
- $\tilde{\Omega}_T = \{(x, t) : x \in [0, \ell] \text{ e } 0 < t \leq T\}$.
- $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$: Espaço vetorial normado das funções Hölder contínuas com expoente $\alpha \in (0, 1]$, ou seja, o espaço das funções $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|u\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} < \infty$, onde $\|u(x, t)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} = \sup_{\Omega_T} |u(x, t)| + \sup_{(x,t) \neq (y,s)} \frac{|u(x, t) - u(y, s)|}{|x - y|^\alpha + |t - s|^{\frac{\alpha}{2}}}$ é a norma de Hölder em Ω_T .
- $\|\cdot\|_\alpha$: Norma de Hölder em $\Omega = (0, \ell)$, isto é, $\|u\|_\alpha = \sup_{\Omega} |u(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$.
- $\|\cdot\|_\infty$: $\|u\|_\infty = \sup_{\Omega} |u(x)|$, sendo Ω o domínio de u .
- $L_{[v]}$: O operador $\partial_t - a\partial_{xx} + b\partial_x + c$, sendo $v = (a, b, c)$.
- $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$: Solução fundamental da equação $Lu = 0$.
- $Z(x, \xi, t, \tau)$: Solução fundamental da equação $\partial_t u - a(\xi, \tau)\partial_{xx} u = 0$.
- $\phi(x, \xi, t, \tau)$: Solução da equação integral de Volterra com núcleo $LZ(x, \xi, t, \tau)$.
- $D_x, \frac{\partial}{\partial x}, \partial_x$: Derivada parcial em relação a x .
- ∇F : Gradiente de F .
- $\nabla_u F(u, t)$: Gradiente de F em relação a u .

- $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$: Supersolução de um sistema de equações parabólicas.
- $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$: Subsolução de um sistema de equações parabólicas.
- $\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle = \{u = (u_1, \dots, u_n) : u_i \in C^0(\Omega_T), \hat{u}_i \leq u_i \leq \tilde{u}_i \text{ e } i = 1, \dots, n\}$.
- $B(0, R) = \{p = (p_1, \dots, p_n) \in (C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T))^n : \|p\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \leq R\}$: Bola de centro na origem $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $R > 0$, no espaço das funções Hölder contínuas $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$, onde $\|p\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} = \|p_1\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} + \dots + \|p_n\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$.
- $\Sigma = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in (C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}([0, \ell] \times [0, T]))^n : \|u_i\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \leq M_i\}$, onde $T > 0$ e $M_i > 0$.
- $K = K(c_1, \dots, c_n)$: Constante determinada pelos parâmetros c_1, \dots, c_n .

Resultados Preliminares

Neste apêndice, descrevemos alguns resultados sobre soluções fundamentais para equações diferenciais parabólicas e também alguns resultados sobre Análise Global.

B.1 Soluções Fundamentais para Equações Parabólicas

A solução fundamental de equações parabólicas de segunda ordem possui uma importância essencial neste trabalho. Um dos métodos para a construção dessa solução fundamental, denominado Método Parametrix, é devido a E. E. Levi e pode ser visto com detalhes em [14].

Nesta seção, apresentamos apenas um esboço da construção, juntamente a algumas de suas propriedades. Inicialmente, definimos as funções Hölder contínuas que são de suma importância para garantir a existência da solução fundamental.

Definição B.1.1. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado em \mathbb{R} , onde $a < b$. Dizemos que uma função $u : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua de expoente $\alpha \in (0, 1]$ se

$$H_\alpha \equiv \sup \left\{ \frac{|u(x, t) - u(\xi, \tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} : (x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T], (x, t) \neq (\xi, \tau) \right\} < \infty. \quad (\text{B.1})$$

A norma de u no espaço das funções contínuas $C^0([a, b] \times [0, T])$ é definida por

$$|u|_0 = \sup_{[a, b] \times [0, T]} |u(x, t)|.$$

A norma de Hölder de u em $C^0([a, b] \times [0, T])$ é definida por

$$\|u\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} = |u|_0 + H_\alpha.$$

O conjunto de todas as funções Hölder contínuas de expoente α será representado por $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}([a, b] \times [0, T])$. A seguir, apresentamos duas propriedades importantes da norma de Hölder definida em (B.1).

Proposição B.1.1. Sejam $u_1, u_2 : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funções Hölder contínuas de expoente $\alpha \in (0, 1]$. Valem as seguintes propriedades:

- $\|u_1 u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \leq \|u_1\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$

Demonstração. De fato, por um lado, basta calcularmos $\|u_1 u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\|u_1 u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} &= \sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_1(x, t) u_2(x, t)| \\
&+ \sup_{\substack{(x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_1(x, t) u_2(x, t) - u_1(\xi, \tau) u_2(\xi, \tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&\leq \sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_1(x, t) u_2(x, t)| \\
&+ \sup_{\substack{(x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_1(x, t)(u_2(x, t) - u_2(\xi, \tau))|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&+ \sup_{\substack{(x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(\xi, \tau)(u_1(x, t) - u_1(\xi, \tau))|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&\leq \sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_1(x, t)| \sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_2(x, t)| \\
&+ \sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_1(x, t)| \sup_{\substack{(x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(x, t) - u_2(\xi, \tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&+ \sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_2(\xi, \tau)| \sup_{\substack{(x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_1(x, t) - u_1(\xi, \tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

Por outro lado, observamos que

$$\begin{aligned}
\|u_1\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} &= \left(\sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_1(x, t)| + \sup_{\substack{[a, b] \times [0, T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_1(x, t) - u_1(\xi, \tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right) \\
&\left(\sup_{[a, b] \times [0, T]} |u_2(x, t)| + \sup_{\substack{[a, b] \times [0, T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(x, t) - u_2(\xi, \tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{[a,b] \times [0,T]} |u_1(x,t)| \sup_{[a,b] \times [0,T]} |u_2(x,t)| \\
&+ \sup_{[a,b] \times [0,T]} |u_1(x,t)| \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(x,t) - u_2(\xi,\tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&+ \sup_{[a,b] \times [0,T]} |u_2(x,t)| \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_1(x,t) - u_1(\xi,\tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&+ \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_1(x,t) - u_1(\xi,\tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(x,t) - u_2(\xi,\tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_1 u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \leq \|u_1\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}. \quad (\text{B.2})$$

□

- $\left\| \frac{1}{u_2} \right\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \leq \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| (1 + \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}})$, em que supomos $\frac{1}{|u_2(x,t)|}$ limitada em $[a, b] \times [0, T]$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{u_2} \right\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} &= \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| + \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{\left| \frac{1}{u_2(x,t)} - \frac{1}{u_2(\xi,\tau)} \right|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&= \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| + \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{\left| \frac{u_2(\xi,\tau) - u_2(x,t)}{u_2(x,t)u_2(\xi,\tau)} \right|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&\leq \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| \\
&+ \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)u_2(\xi,\tau)} \right| \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(\xi,\tau) - u_2(x,t)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&\leq \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| + \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(x,t) - u_2(\xi,\tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&\leq \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| + \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(x,t) - u_2(\xi,\tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \\
&+ \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| \sup_{[a,b] \times [0,T]} |u_2(x,t)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| \left(1 + \sup_{[a,b] \times [0,T]} |u_2(x,t)| \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\substack{[a,b] \times [0,T] \\ x \neq \xi, t \neq \tau}} \left(\frac{|u_2(x,t) - u_2(\xi,\tau)|}{|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) \right) \\
&\leq \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| (1 + \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\left\| \frac{1}{u_2} \right\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \leq \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| (1 + \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}). \quad (\text{B.3})$$

□

- $\left\| \frac{u_1}{u_2} \right\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \leq \|u_1\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| (1 + \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}).$

Demonstração. De (B.2) e (B.3), temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u_1}{u_2} \right\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} &= \|u_1\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \left\| \frac{1}{u_2} \right\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \\
&\leq \|u_1\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \sup_{[a,b] \times [0,T]} \left| \frac{1}{u_2(x,t)} \right| (1 + \|u_2\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}).
\end{aligned}$$

□

A seguir, fizemos o esboço da construção da solução fundamental.

Seja

$$Lu = a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{B.4})$$

e consideramos o operador

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu + c(x,t)u \quad (\text{B.5})$$

em que as funções $a(x,t)$, $b(x,t)$ e $c(x,t)$ estão definidas em $[a,b] \times [0,T]$.

Definição B.1.2. Dizemos que o operador \mathcal{L} em (B.5) é parabólico em $[a,b] \times [0,T]$, se $a(x,t) > 0$, para todo $(x,t) \in [a,b] \times [0,T]$.

Neste estudo, supomos as seguintes hipóteses sobre o operador \mathcal{L} :

- a) \mathcal{L} é uniformemente parabólico em $[a,b] \times [0,T]$, isto é, existem constantes positivas λ_0 e λ_1 , tais que

$$\lambda_0 \leq a(x,t) \leq \lambda_1, \quad (x,t) \in [a,b] \times [0,T]; \quad (\text{B.6})$$

b) Para todos os pontos $(x, t), (x_0, t_0) \in [a, b] \times [0, T]$, os coeficientes de \mathcal{L} são funções limitadas e satisfazem as condições de Hölder

$$\begin{aligned} |a(x, t) - a(x_0, t_0)| &\leq A(|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\frac{\alpha}{2}}), \\ |b(x, t) - b(x_0, t)| &\leq A|x - x_0|^\alpha \\ &\text{e} \\ |c(x, t) - c(x_0, t)| &\leq A|x - x_0|^\alpha, \end{aligned} \tag{B.7}$$

em que $A > 0$ é a constante de Hölder e $\alpha \in (0, 1]$.

Definição B.1.3. Uma solução fundamental de $\mathcal{L}u = 0$ em $[a, b] \times [0, T]$ é uma função $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, definida para todos os pontos $(x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T]$, $t > \tau$, satisfazendo as seguintes condições:

- a) Fixado $(\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T]$, $u(x, t)$ satisfaz, como função de (x, t) , a equação $\mathcal{L}u = 0$.
- b) Para toda função contínua $f(x)$ definida em $[a, b]$,

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_a^b \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi = f(x).$$

Com as hipóteses a) e b) sobre o operador \mathcal{L} , pode-se mostrar que existe uma única solução fundamental Γ de $\mathcal{L}u = 0$ em $[a, b] \times [0, T]$.

Uma vez que neste trabalho é estudado um problema de valor inicial e de contorno, precisamos que as derivadas espaciais de $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ sejam definidas e contínuas em x e ξ também numa vizinhança de $[a, b]$. Desta forma, vamos construir a solução fundamental em $\bar{\Omega}_0 \times [0, T]$, em que $\Omega_0 = (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Para isto, basta estender os coeficientes do operador \mathcal{L} para o conjunto $\bar{\Omega}_0 \times [0, T]$, satisfazendo as condições (B.6) e (B.7).

Usando o Método Parametrix, construímos a solução fundamental $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ de $\mathcal{L}u = 0$ em $\bar{\Omega}_0 \times [0, T]$.

Definimos

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^t d\sigma \int_{\Omega_0} Z(x, t; \eta, \sigma) \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta, \tag{B.8}$$

em que

$$Z(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(4\pi a(\xi, \tau)(t - \tau))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\xi, \tau)(t-\tau)}} \tag{B.9}$$

e $\Phi(x, t; \xi, \tau)$, para cada (ξ, τ) fixo, é solução da equação integral de Volterra

$$\Phi(x, t; \xi, \tau) = \mathcal{L}Z(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^t d\sigma \int_{\Omega_0} \mathcal{L}Z(x, t; y, \sigma) \Phi(y, \sigma; \xi, \tau) dy, \tag{B.10}$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}Z(x, t; y, \sigma) &= (a(x, t) - a(y, \sigma)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(x, t; y, \sigma) + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} Z(x, t; y, \sigma) \\ &\quad + c(x, t) Z(x, t; y, \sigma). \end{aligned}$$

Pode-se mostrar, ver [14], que

$$\Phi(x, t; \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} (\mathcal{L}Z)_m(x, t; \xi, \tau),$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{L}Z)_1 = \mathcal{L}Z, \\ (\mathcal{L}Z)_{m+1}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t dy \int_{\Omega_0} [\mathcal{L}Z(x, t; y, \sigma)] (\mathcal{L}Z)_m(y, \sigma; \xi, \tau) d\sigma. \end{array} \right. \quad (\text{B.11})$$

Para a função $Z(x, t; \xi, \tau)$ e suas derivadas, valem as estimativas

$$D_t^r D_x^s Z(x, t; \xi, \tau) \leq K_1 (t - \tau)^{-\frac{1+2r+s}{2}} e^{-C_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (\text{B.12})$$

em que r e s são inteiros não negativos quaisquer, $K_1 = K_1(\lambda_0, \lambda_1)$ e $C_1 = C_1(\lambda_1)$ são constantes positivas.

Fixado (ξ, τ) , a função $Z(x, t; \xi, \tau)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(\xi, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Para a função $\Phi(x, t; \xi, \tau)$, temos as estimativas

$$|\Phi(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{K_2}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C_2 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (\text{B.14})$$

em que $K_2 = K_2(\lambda_0, \lambda_1, \|a\|_{\infty}, \|b\|_{\infty}, \|c\|_{\infty}, T)$ e $C_2 = C_2(\lambda_1)$ são constantes positivas, sendo que a primeira é contínua em T .

De [14], temos a estimativa para a solução fundamental e suas derivadas

$$|D_t^r D_x^s \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{K_3}{(t - \tau)^{\frac{1+2r+s}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (\text{B.15})$$

sendo r e s inteiros não negativos, tais que $2r + s \leq 2$,

$$K_3 = K_3(\lambda, \|a\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|b\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|c\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, T) \quad (\text{B.16})$$

e $C_3 = C_3(\lambda_1)$ são constantes positivas, sendo que a primeira é contínua em T .

Definição B.1.4. A bola de centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$ e raio $R > 0$, no espaço das funções Hölder contínuas $C^{1, \frac{1}{2}}([a, b] \times [0, T])$, é o conjunto

$$B(0, R) = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in (C^{1, \frac{1}{2}}([a, b] \times [0, T]))^3 : \|p\|_{1, \frac{1}{2}} \leq R\},$$

em que

$$\|p\|_{1, \frac{1}{2}} = \|p_1\|_{1, \frac{1}{2}} + \|p_2\|_{1, \frac{1}{2}} + \|p_3\|_{1, \frac{1}{2}},$$

sendo

$$\|p_i\|_{1, \frac{1}{2}} = \sup_{[a, b] \times [0, T]} |p_i(x, t)| + \sup_{(x, t) \neq (y, s)} \frac{|p_i(x, t) - p_i(y, s)|}{|x - y| + |t - s|^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dado $v = (a, b, c) \in B(0, R)$, denotamos a equação parabólica com coeficientes a , b e c por

$$\mathcal{L}_{[v]}u = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u = 0 \quad (\text{B.17})$$

e por

$$\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau) = Z_{[v]}(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\sigma \int_{\Omega_0} Z_{[v]}(x, t; y, \sigma) \Phi_{[v]}(y, \sigma; \xi, \tau) dy \quad (\text{B.18})$$

sua respectiva solução fundamental.

Adiante, avaliamos o comportamento da solução fundamental quando seus parâmetros convergem pontualmente para determinadas funções. Este é o objetivo do próximo lema.

Lema B.1.1. Sejam $v_n = (a^{(n)}, b^{(n)}, c^{(n)})$, $v = (a, b, c) \in B(0, R)$ e $\Gamma_{[v_n]}$ e $\Gamma_{[v]}$ as respectivas soluções fundamentais de $\mathcal{L}_{[v_n]}u = 0$ e $\mathcal{L}_{[v]}u = 0$. Se $v_n(x, t)$ converge para $v(x, t)$, para todo $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$, então $\Gamma_{[v_n]}(x, t; \xi, \tau)$ converge para $\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau)$, para todos $(x, t), (\xi, \tau) \in [a, b] \times [0, T]$, com $t > \tau$.

Demonstração. Uma vez que

$$\Gamma_{[v_n]}(x, t; \xi, \tau) = Z_{[v_n]}(x, t; \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\sigma \int_{\Omega_0} Z_{[v_n]}(x, t; y, \sigma) \Phi_{[v_n]}(y, \sigma; \xi, \tau) dy,$$

vamos inicialmente estudar a convergência pontual de $Z_{[v_n]}$ e $\Phi_{[v_n]}$.

Como

$$Z_{[v_n]}(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(4\pi a^{(n)}(\xi, \tau)(t - \tau))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^{(n)}(\xi, \tau)(t - \tau)}}, \quad (\text{B.19})$$

temos que

$$D_t^r D_x^s Z_{[v_n]} \rightarrow D_t^r D_x^s Z_{[v]}, \quad (\text{B.20})$$

pontualmente, sendo r e s inteiros não negativos.

Visando mostrar que $\Phi_{[v_n]}$ converge pontualmente a $\Phi_{[v]}$, observamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[v_n]}(Z_{[v_n]})(x, t; y, \sigma) &= (a^{(n)}(x, t) - a^{(n)}(y, \sigma)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_{[v_n]}(x, t; y, \sigma) \\ &\quad + b^{(n)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} Z_{[v_n]}(x, t; y, \sigma) + c^{(n)}(x, t) Z_{[v_n]}(x, t; y, \sigma). \end{aligned}$$

Segue-se de (B.20) que $\mathcal{L}_{[v_n]} Z_{[v_n]} \rightarrow \mathcal{L}_{[v]} Z_{[v]}$, pontualmente.

De [14], temos também que

$$|\mathcal{L}_{[v_n]}(Z_{[v_n]})(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{K_4}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C_4 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (\text{B.21})$$

em que K_4 e C_4 são constantes positivas que independem de n .

Seja $(\mathcal{L}_{[v_n]})_n$ definido em (B.11). Por indução sobre m , temos que

$$(\mathcal{L}_{[v_n]})_m \rightarrow (\mathcal{L}_{[v]})_m, \quad (\text{B.22})$$

pontualmente, quando n tende ao infinito.

Para ver isso, basta seguir a construção da solução fundamental em [14], em que

$$|(\mathcal{L}_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]})(x, t; \xi, \tau)| \leq K_4^m \left(\frac{\pi}{C_4} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma^m(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}} e^{-C_4 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (\text{B.23})$$

sendo K_4, C_4 constantes positivas e $\Gamma(t)$ a função gama.

Desta forma,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}_{[v_n]})(Z_{[v_n]})(x, t; y, \sigma)(\mathcal{L}_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]})(y, \sigma; \xi, \tau)| &\leq \\ \frac{K_4 e^{-C_4 \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}}}{(t - \sigma)^{\frac{3-\alpha}{2}}} K^m \left(\frac{\pi}{C_4} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma^m(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{e^{-C_4 \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}}}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}}, & \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

e pela hipótese de indução

$$(\mathcal{L}_{[v_n]})(Z_{[v_n]})(\mathcal{L}_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]}) \rightarrow (\mathcal{L}_{[v]})(Z_{[v]})(\mathcal{L}_{[v]})_m(Z_{[v]}),$$

pontualmente.

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue-se que

$$(\mathcal{L}_{[v_n]})_{m+1}(Z_{[v_n]})(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\sigma \int_{\Omega_0} (\mathcal{L}_{[v_n]})(Z_{[v_n]})(x, t; y, \sigma) ((\mathcal{L}_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]}))(y, \sigma; \xi, \tau) dy$$

converge para $(\mathcal{L}_{[v]})_{m+1}(Z_{[v]})(x, t; \xi, \tau)$.

A estimativa (B.24) assegura a convergência uniforme de

$\Phi_{[v_n]}(x, t; \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}_{[v_n]}(Z_{[v_n]})_m(x, t; \xi, \tau)$ em relação a (x, ξ) e $t - \tau > \delta$, para cada $\delta > 0$ fixado, e, daí,

$$\Phi_{[v_n]} \rightarrow \Phi_{[v]},$$

pontualmente.

De (B.12) e (B.14), temos que

$$|Z_{[v_n]}(x, t; y, \sigma) \Phi_{[v_n]}(y, \sigma; \xi, \tau)| \leq \frac{K_5}{(t - \sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-C_1 \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{1}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C_2 \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}},$$

em que K_5 é constante e $Z_{[v_n]} \Phi_{[v_n]}$ converge pontualmente para $Z_{[v]} \Phi_{[v]}$.

Utilizando o Teorema da Convergência Dominada novamente, segue-se que

$$\int_{\tau}^t d\sigma \int_{\Omega_0} Z_{[v_n]} \Phi_{[v_n]} dy \rightarrow \int_{\tau}^t d\sigma \int_{\Omega_0} Z_{[v]} \Phi_{[v]} dy.$$

Portanto, $\Gamma_{[v_n]} \rightarrow \Gamma_{[v]}$, pontualmente. \square

Lema B.1.2. Sejam $v, \bar{v} \in B(0, R)$ e $0 < \beta < 1$. Se $\Gamma_{[v]}$ e $\Gamma_{[\bar{v}]}$ são as respectivas soluções fundamentais de $\mathcal{L}_{[v]}u = 0$ e $\mathcal{L}_{[\bar{v}]}u = 0$, então

$$|(D_x^s \Gamma_{[v]} - D_x^s \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{K_3 \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{s+1}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad s = 0, 1, \quad (\text{B.25})$$

e

$$|(D_t \Gamma_{[v]} - D_t \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, \tau)| \leq K_3 (\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta}) \left(\frac{1}{|x - \xi|^{1-(\alpha(1-\beta))} (t - \tau)^{1-\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (\text{B.26})$$

em que $C_3 < \frac{1}{4R}$ e $K_3 = K_3(R, \lambda, \alpha, T)$ são constantes positivas, sendo K_3 contínua em T .

Demonstração. Ver [9]. \square

Definição B.1.5. Seja $q(x, t)$ uma função mensurável em $[a, b] \times [0, T]$. O potencial da função $q(x, t)$, em relação à solução fundamental $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, é definido por

$$V(x, t) = \int_0^t d\tau \int_a^b \Gamma(x, t; \xi, \tau) q(\xi, \tau) d\xi. \quad (\text{B.27})$$

Lema B.1.3. Se $q(x, t)$ é uma função contínua em $[a, b] \times [0, T]$, então o potencial $V(x, t)$ definido em (B.27) é uma função contínua em $[a, b] \times [0, T]$ e $\frac{\partial V}{\partial x}$ é contínua em $x \in (a, b)$, $0 < t \leq T$. Se, além disso, $q(x, t)$ é Hölder contínua em $x \in [a, b]$, uniformemente em relação a t , então $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial V}{\partial t}$ são funções contínuas em $x \in (a, b)$, $0 < t \leq T$ e

$$\mathcal{L}(x, t) = q(x, t) \text{ em } (a, b) \times (0, T]. \quad (\text{B.28})$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em ([14], p. 21). \square

Definição B.1.6. Uma solução clássica para o problema linear

$$\begin{cases} u_t - Lu + cu = q \text{ em } (a, b) \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

em que $q : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, é uma função $u \in C^{2,1}((a, b) \times (0, T]) \cap C^1([a, b] \times (0, T]) \cap C^0([a, b] \times [0, T])$ que satisfaz as equações de (B.29).

O teorema a seguir (ver [24], p. 52) nos dá informações sobre a existência e unicidade de soluções de (B.29).

Teorema B.1.1. Seja \mathcal{L} o operador parabólico definido em (B.5), satisfazendo as condições (B.6) e (B.7). Seja $q(x, t)$ uma função Hölder contínua em x , uniformemente em t . Então, para qualquer função contínua $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, o problema (B.29) possui uma única solução u que é Hölder contínua em x , uniformemente em t . Além disso,

$$u(x, t) = \int_a^b \Gamma(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_a^b \Gamma(x, t; \xi, \tau) q(\xi, \tau) d\xi, \quad (\text{B.30})$$

Observação 3. Note que a derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ é contínua em $[a, b] \times (0, T]$, pois a solução fundamental Γ foi construída para $(x, t) \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon] \times [0, T]$, para algum $\varepsilon > 0$.

Teorema B.1.2. As derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ da solução u do problema (B.29) são uniformemente contínuas em $(a, b) \times (\varepsilon, T]$, para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração. A prova segue de ([14], Teorema 6, p. 148.) \square

Teorema B.1.3. Seja \mathcal{L} o operador parabólico definido em (B.5), em que as funções a, b e c estão definidas em $[a, b] \times [0, T]$. Assuma que a função $q(x, t)$ está também definida em $[a, b] \times [0, T]$. Se

$$\frac{\partial^m a}{\partial x^m}, \frac{\partial^m b}{\partial x^m}, \frac{\partial^m c}{\partial x^m} \text{ e } \frac{\partial^m q}{\partial x^m} \quad (0 \leq m \leq p)$$

são funções Hölder contínuas (expoente α , $\alpha \in (0, 1]$) em $[a, b] \times [0, T]$, e se u é uma solução de $\mathcal{L}u = q$ em $(a, b) \times (0, T]$, então

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \text{ e } \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \quad (0 \leq m \leq p+2, 0 \leq k \leq p)$$

existem e são Hölder contínuas (expoente α) em $(a, b) \times (0, T]$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em ([14], p. 72). \square

Um resultado de suma importância para o desenvolvimento do Método Monótono, que foi apresentado no Capítulo 2, é o Lema da Positividade para operadores parabólicos.

Lema B.1.4. (Lema da Positividade) Seja $u \in C^{2,1}((a, b) \times (0, T]) \cap C^1([a, b] \times (0, T]) \cap C^0([a, b] \times [0, T])$, tal que

$$u_t - Lu + cu \geq 0 \text{ em } (a, b) \times (0, T], \quad (\text{B.31})$$

$$u(x, 0) \geq 0, \quad x \in [a, b], \quad (\text{B.32})$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) \geq 0, \quad t > 0, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) \geq 0, \quad t > 0, \quad (\text{B.34})$$

sendo $c = c(x, t)$ uma função limitada em $[a, b] \times [0, T]$.

Então $u(x, t) \geq 0$ em $[a, b] \times [0, T]$.

Demonstração. Consideremos o caso em que $c \geq 0$ em $[a, b] \times [0, T]$.

Se u fosse estritamente negativa, existiria um ponto $(x_0, t_0) \in [a, b] \times [0, T]$, tal que $u(x_0, t_0)$ seria um mínimo negativo. Como $u(x_0, 0) \geq 0$, (x_0, t_0) seria um ponto de $(a, b) \times (0, T]$, $\{a\} \times [a, b]$ ou de $\{b\} \times [0, T]$.

Suponhamos que $(x_0, t_0) \in (a, b) \times (0, T]$. Neste caso, $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) > 0$. Uma vez que o operador $\mathcal{L}u = u_t - Lu + cu$ é parabólico em $(a, b) \times (0, T]$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) - a(x_0, t_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) - b(x_0, t_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) + c(x_0, t_0)u(x_0, t_0) < 0$, contrariando a hipótese.

Se $(x_0, t_0) \in \{a\} \times [a, b]$, temos por hipótese que $\frac{\partial u}{\partial x}(a, t_0) \leq 0$. Segue-se por continuidade que existe uma vizinhança $V_1 = (a - \delta_1, a + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, tal que a função $g(x) = u(x, t_0)$ é não-crescente em V_1 , contrariando o fato de que (a, t_0) é um ponto de mínimo de u .

Analogamente, se $(x_0, t_0) \in \{b\} \times [a, b]$, temos por hipótese que $\frac{\partial u}{\partial x}(b, t_0) \geq 0$. Por continuidade, existe uma vizinhança $V_2 = (b - \delta_2, b + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$, tal que a função $g(x) = u(x, t_0)$ é não-decrescente em V_2 , contrariando o fato de que (b, t_0) é um ponto de mínimo de u . Logo, $u(x, t) \geq 0$ em $[a, b] \times (0, T]$.

Provamos agora o Lema para o caso em que c é uma função limitada arbitrária. Para tanto, escolhemos uma constante $\gamma \geq -c$ e definimos a função

$$v(x, t) = e^{-\gamma t} u(x, t).$$

Observamos que v satisfaz as seguintes desigualdades

$$v_t - Lv + (\gamma + c)v \geq 0 \text{ em } (a, b) \times (0, T], \quad (\text{B.35})$$

$$v(x, 0) \geq 0, \quad x \in [a, b], \quad (\text{B.36})$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(a, t) \geq 0, \quad t > 0, \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(b, t) \geq 0, \quad t > 0. \quad (\text{B.38})$$

Uma vez que $\gamma + c \geq 0$, pelo caso anterior, temos que $v \geq 0$ em $[a, b] \times [0, T]$. Segue-se que $u(x, t) \geq 0$ em $[a, b] \times [0, T]$. \square

A seguir, apresentamos um resultado de suma importância que será usado neste trabalho.

Teorema B.1.4. Sejam $T > 0$, $v = (v_1, v_2, 0)$, $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, 0) \in B(0, R)$, $f, \bar{f} \in C^{1, \frac{1}{2}}([a, b] \times [0, T])$ e u_0, \bar{u}_0 funções limitadas e lipschitzianas em $[a, b]$.

Se u e \bar{u} são as respectivas soluções dos seguintes problemas escalares:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{[v]} u = f \text{ em } (a, b) \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \end{array} \right. \quad (\text{B.39})$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{[\bar{v}]} \bar{u} = \bar{f} \text{ em } (a, b) \times (0, T], \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in [a, b], \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(a, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(b, t) = 0, \quad t \in (0, T], \end{array} \right. \quad (\text{B.40})$$

então

$$\|u - \bar{u}\|_{1, \frac{1}{2}} \leq K_3 \left(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 + T^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1) \right) \\ \left(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}} \right),$$

sendo $K_3 = K_3(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ contínua em T e $0 < \beta < 1$.

Demonstração. Segue de (B.30) que

$$u(x, t) - \bar{u}(x, t) = \int_a^b (\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, 0)u_0(\xi) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, 0)\bar{u}_0(\xi))d\xi \\ + \int_0^t d\tau \int_a^b (\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau)f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau)\bar{f}(\xi, \tau))d\xi \\ = V(x, t) + W(x, t).$$

Basta determinarmos estimativas para V e W . Aplicando o Lema B.1.2 em V , temos

$$|V(x, t)| \leq \int_a^b |\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, 0)u_0(\xi) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, 0)\bar{u}_0(\xi)|d\xi \\ \leq \int_a^b |(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, 0)u_0(\xi)| + |\Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, 0)(u_0(\xi) - \bar{u}_0(\xi))|d\xi \\ \leq \int_a^b \frac{K_3\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t}} \|u_0\|_\infty + \frac{K_3}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t}} \|u_0 - \bar{u}_0\|_\infty d\xi \\ \leq K_3(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_\infty),$$

sendo $K_3 = K_3(R, \lambda, T, \|u_0\|_\infty)$ contínua em relação a T , pois as constantes que aparecem no Lema B.1.2 são contínuas em relação a T .

Observe que

$$\partial_x V(x, t) = \int_a^b \partial_x \Gamma_{[v]}(x, t; \xi, 0)u_0(\xi) - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, 0)\bar{u}_0(\xi)d\xi \\ = \int_a^b (\partial_x \Gamma_{[v]} - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, 0)(u_0(\xi) - u_0(x))d\xi \\ + \int_a^b \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, 0)[(u_0(\xi) - \bar{u}_0(\xi)) - (u_0(x) - \bar{u}_0(x))]d\xi.$$

Aplicando o Lema B.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
|\partial_x V(x, t)| &\leq \int_a^b \left(\frac{K_3 \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|u_0\|_1 |x - \xi|}{t} + \frac{K_3 \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 |x - \xi|}{t} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi \\
&\leq \int_a^b \left(\frac{K_3 \|u_0\|_1 \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{K_3 \|u_0 - \bar{u}_0\|_1}{t^{\frac{1}{2}}} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi \\
&\leq K_3 (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1).
\end{aligned}$$

A seguir, obtemos a Hölder continuidade com respeito a t .

$$\begin{aligned}
V(x, t) - V(x, t') &= \int_a^b (\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, 0) - \Gamma_{[v]}(x, t'; \xi, 0)) u_0(\xi) d\xi \\
&\quad - \int_a^b (\Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, 0) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t'; \xi, 0)) \bar{u}_0(\xi) d\xi \\
&= \int_a^b d\xi \int_{t'}^t \partial_t \Gamma_{[v]}(x, s; \xi, 0) u_0(\xi) - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s; \xi, 0) \bar{u}_0(\xi) ds \\
&= \int_{t'}^t ds \int_a^b (\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}) (x, s; \xi, 0) u_0(\xi) \\
&\quad + \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s; \xi, 0) (u_0 - \bar{u}_0)(\xi) d\xi \\
&= \int_{t'}^t ds \int_a^b (\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}) (x, s; \xi, 0) (u_0(\xi) - u_0(x)) d\xi \\
&\quad + \int_{t'}^t ds \int_a^b \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s; \xi, 0) [(u_0 - \bar{u}_0)(\xi) - (u_0 - \bar{u}_0)(x)] d\xi.
\end{aligned}$$

Mais uma vez aplicando o Lema B.1.2, temos

$$\begin{aligned}
&|V(x, t) - V(x, t')| \\
&\leq \int_{t'}^t ds \int_a^b |(\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}) (x, s; \xi, 0)| |u_0(\xi) - u_0(x)| d\xi \\
&\quad + \int_{t'}^t ds \int_a^b |\partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s; \xi, 0)| |(u_0 - \bar{u}_0)(\xi) - (u_0 - \bar{u}_0)(x)| d\xi \\
&\leq \int_{t'}^t ds \int_a^b K_3 (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta) \|u_0\|_1 |x - \xi| \left(\frac{1}{|x - \xi|^{\gamma(1-\beta)} s^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi + \int_{t'}^t ds \int_a^b \frac{K_3 \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 |x - \xi|}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi \\
&\leq \int_{t'}^t ds \int_a^b K_3 (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta) \|u_0\|_1 \left(\frac{T^{\frac{1}{2}}}{s} + \frac{1}{s} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi \\
&\quad + \int_{t'}^t ds \int_a^b \frac{K_3 \|u_0 - \bar{u}_0\|_1}{s} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_3(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1) \int_{t'}^t ds \int_a^b \frac{1}{s} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi \\
&\leq K_3(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1) \int_{t'}^t \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq K_3(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1) (t - t')^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

sendo $K_3 = K_3(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ contínua em relação a T .

Das estimativas acima, temos

$$\|V\|_{1, \frac{1}{2}} \leq K_3(R, \lambda, T, \|u_0\|_1) (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1), \quad (\text{B.41})$$

sendo $K_3 = K_3(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ contínua em relação a T .

Analogamente, estimamos W . De fato,

$$\begin{aligned}
W(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_a^b \Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) \bar{f}(\xi, \tau) d\xi \\
&= \int_0^t d\tau \int_a^b (\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) + \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau) d\xi.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema B.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
|W(x, t)| &\leq \int_0^t d\tau \int_a^b |(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)| + |\Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau)| d\xi \\
&\leq \int_0^t d\tau \int_a^b K_3(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|f\|_\infty + \|f - \bar{f}\|_\infty) \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi \\
&\leq K_3(R, \lambda, T) (\|f\|_\infty + 1) T (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|f - \bar{f}\|_\infty).
\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
|\partial_x W(x, t)| &\leq \int_0^t d\tau \int_a^b (|\partial_x \Gamma_{[v]} - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)| \\
&\quad + |\partial_x \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau)| d\xi \\
&\leq \int_0^t d\xi \int_a^b K_3(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|f\|_\infty + \|f - \bar{f}\|_\infty) \frac{1}{(t - \tau)} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi \\
&\leq K_3(R, \lambda, T) (\|f\|_\infty + 1) T^{\frac{1}{2}} (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|f - \bar{f}\|_\infty).
\end{aligned}$$

Seguimos para a Hölder continuidade em t .

$$\begin{aligned}
W(x, t) - W(x, t') &= \int_0^t d\tau \int_a^b [\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)] d\xi \\
&\quad - \int_0^{t'} d\tau \int_a^b [\Gamma_{[v]}(x, t'; \xi, \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t'; \xi, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)] d\xi \\
&= \int_{t'}^t d\tau \int_a^b [\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)] d\xi \\
&\quad + \int_0^{t'} d\tau \int_a^b [(\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau) - \Gamma_{[v]}(x, t'; \xi, \tau)) f(\xi, \tau) \\
&\quad - (\Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t'; \xi, \tau)) \bar{f}(\xi, \tau)] d\xi \\
&= \int_{t'}^t d\tau \int_a^b [(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, t; \xi, \tau)] f(\xi, \tau) + \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau) d\xi \\
&\quad + \int_{t'-\varepsilon}^{t'} d\tau \int_a^b [(\Gamma_{[v]}(x, t; \xi, \tau) - \Gamma_{[v]}(x, t'; \xi, \tau))] f(\xi, \tau) \\
&\quad - (\Gamma_{[\bar{v}]}(x, t; \xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t'; \xi, \tau)) \bar{f}(\xi, \tau)] d\xi \\
&\quad + \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_a^b d\xi \int_{t'}^t [\partial_t \Gamma_{[v]}(x, s; \xi, \tau) f(\xi, \tau) - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s; \xi, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)] ds \\
&\equiv W_1 + W_2 + W_3.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema B.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
|W_1| &\leq \int_{t'}^t d\tau \int_a^b (K_3 \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|f\|_\infty + K_3 \|f - \bar{f}\|_\infty) \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi \\
&\leq K_3(R, \lambda, T) (\|f\|_\infty + 1) T^{\frac{1}{2}} (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|f - \bar{f}\|_\infty) (t - t')^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
|W_2| &\leq \int_{t'-\varepsilon}^{t'} d\tau \int_a^b \left(\frac{K_3}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} + \frac{K_3}{(t' - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{t'-\tau}} \right) (\|f\|_\infty + \|\bar{f}\|_\infty) d\xi \\
&\leq K_3 (\|f\|_\infty + \|\bar{f}\|_\infty) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
W_3 &= \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_a^b d\xi \int_{t'}^t [\partial_t \Gamma_{[v]}(x, s; \xi, \tau) f(\xi, \tau) - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s; \xi, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)] ds \\
&= \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_{t'}^t ds \int_a^b [(\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]})(x, s; \xi, \tau) (f(\xi, \tau) - f(x, \tau)) \\
&\quad + \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s; \xi, \tau) ((f - \bar{f})(\xi, \tau) - (f - \bar{f})(x, \tau))] d\xi.
\end{aligned}$$

Novamente, aplicando o Lema B.1.2 e denotando por $K_5 = K_3(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta) \|f\|_{1, \frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}
|W_3| &\leq \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_{t'}^t ds \int_a^b K_5 \left(\frac{1}{|x - \xi|^{\gamma(1-\beta)} (s - \tau)^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(s - \tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} |x - \xi| \\
&+ \frac{K_3}{(s - \tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}} |x - \xi| d\xi \\
&\leq K_6(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
&+ \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_{t'}^t ds \int_a^b \left(\frac{|x - \xi|^{1-\gamma(1-\beta)}}{(s - \tau)^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{|x - \xi|}{(s - \tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi \\
&\leq K_6(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
&+ \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_{t'}^t ds \int_a^b \left(\frac{1}{(s - \tau)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{s - \tau} \right) e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi \\
&\leq K_6(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
&+ \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] (T^{\frac{1}{2}} + 1) \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_{t'}^t ds \int_a^b \frac{1}{s - \tau} e^{-C_3 \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi \\
&\leq K_6(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
&+ \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] (T^{\frac{1}{2}} + 1) \int_0^{t'-\varepsilon} d\tau \int_{t'}^t \frac{1}{(s - \tau)^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq K_6(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] T(t - t')^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como a estimativa para W_2 vale para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
|W(x, t) - W(x, t')| &\leq K_7(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
&+ \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] T^{\frac{1}{2}}(t - t')^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{B.42}$$

sendo $K_7 = K_7(R, \lambda, T)$ contínua em relação a T .

Segue-se que

$$\|W\|_{1, \frac{1}{2}} \leq K_7(R, \lambda, T) T^{\frac{1}{2}} (1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}]. \tag{B.43}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|_{1, \frac{1}{2}} &= \|V\|_{1, \frac{1}{2}} + \|W\|_{1, \frac{1}{2}} \\ &\leq K_7 \left(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 + T^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1) \right) \\ &\quad \left(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

sendo $K_7 = K_7(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ contínua em T . \square

Corolário B.1.1. Nas condições do Teorema B.1.4, se u é solução de (B.39), então

$$\|u\|_{1, \frac{1}{2}} \leq K_7(R, \lambda, T, \|u_0\|_1) [\|u_0\|_1 + T^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1)\|f\|_{1, \frac{1}{2}}], \quad (\text{B.44})$$

sendo

$$K_7 = K_7(R, \lambda, T, \|u_0\|_1) \quad (\text{B.45})$$

uma constante positiva e contínua em relação a T .

Demonstração. A demonstração segue com base no Teorema B.1.4 fazendo $\bar{v} = v$, $\bar{f} = 2f$ e $\bar{u}_0 = 2u_0$. \square

B.2 Resultados Clássicos de Análise

Os dois próximos teoremas são resultados clássicos de Análise que serão usados ao longo da tese. O primeiro pode ser encontrado em ([11], p. 158) e o segundo em ([14], p. 187 – 189).

Teorema B.2.1. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado, então toda aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada.

Definição B.2.1. Seja T um operador definido em um subconjunto Y de um espaço de Banach X e suponha que T mapeia Y em X . Dizemos que $T : Y \rightarrow X$ é contínuo em um ponto $x_0 \in Y$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$, sempre que $\|x - x_0\| < \delta$, $x \in Y$. Isto é equivalente dizer que para toda sequência (x_m) em Y , convergindo para um elemento x_0 , a sequência $(T(x_m))$ converge para $T(x_0)$. Se T é contínua em todos os pontos de Y , dizemos que T é contínua em Y .

Definição B.2.2. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que $Y \subset X$ é pré-compacto se toda sequência (x_m) em Y possui uma subsequência $(x_{m'})$ convergindo para algum elemento $x \in X$. O elemento x pode não pertencer ao conjunto Y . Se toda sequência (x_m) em Y possui uma subsequência que converge para um elemento de Y , dizemos que Y é um conjunto compacto.

Claramente, Y é compacto se, e somente se, Y é pré-compacto e fechado.

Definição B.2.3. Dizemos que $K \subset X$ é convexo se para quaisquer $x, y \in K$,

$$tx + (1 - t)y \in K, \quad t \in (0, 1).$$

Teorema B.2.2 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder). Seja Y um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach X e seja $T : Y \rightarrow Y$ um operador contínuo tal que $T(Y) \subset Y$ é um conjunto pré-compacto. Então T possui um ponto fixo, isto é, existe um ponto $y_0 \in Y$ tal que $T(y_0) = y_0$.

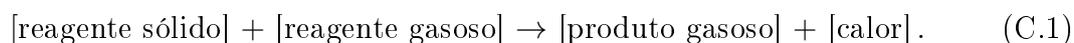
O Modelo de Combustão em um meio poroso com n camadas

O processo de combustão em meios porosos tem sido estudado por muitos autores durante as últimas décadas. Aqui, estamos interessados em entendê-lo em um meio poroso com n camadas, em que cada uma delas está saturada com um combustível sólido, quando a porosidade e a condutividade do meio em cada são funções da variável espacial.

No levantamento de algumas hipóteses, obtemos um modelo simples cujas variáveis são a temperatura e a concentração de combustível não queimado em cada camada. O modelo inclui transferência de calor entre as camadas.

Consideramos um meio poroso unidimensional horizontal, consistindo em n camadas paralelas, cada uma contendo uma concentração inicial de combustível sólido como o coque. A variável espacial é x , $0 < x < L$, e a variável temporal é t , $t > 0$.

Um esboço da geometria do meio pode ser vista na Figura [C.1](#). A reação química em cada camada toma a forma simples



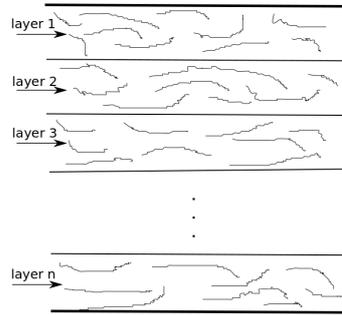


Figura C.1: *Meio poroso com n camadas paralelas*

Para formular as equações de balanço, assumimos que o gás, a rocha porosa e o combustível estão em equilíbrio térmico localmente no espaço e globalmente em relação ao tempo, em cada camada. Consequentemente, apenas uma temperatura é usada para o balanço de energia em cada uma delas. Porosidade e condutividade em cada camada são assumidas como funções da variável espacial.

Efeitos de radiação, dissipação viscosa e trabalho por mudanças de pressão são desconsiderados. Entretanto, uma taxa de reação, condução de calor longitudinal, transferência de calor entre as camadas e perda de calor para a formação rochosa circundante são consideradas.

Os índices g , r e c referem-se ao oxigênio, à rocha e ao coque, respectivamente. Já o s refere-se a uma camada inteira, enquanto i , $i = 1, \dots, n$, denota a i -ésima camada. Na i -ésima camada, as variáveis de estado dependendo de (x, t) são a temperatura T_i , a concentração de combustível η_i , a fração de massa de oxigênio na fase gasosa Y_i , a velocidade de Darcy v_i e a pressão p_i .

As outras grandezas relevantes na i -ésima camada são a densidade do gás ρ_{g_i} , dada por uma equação de estado independente da camada $\rho_{g_i} = \rho_g(T_i, p_i)$; densidade da rocha ρ_{r_i} ; porosidade Φ_i ; condutividade térmica λ_i ; calores específicos do gás, da rocha e do coque, dados respectivamente por c_{g_i} , c_{r_i} e c_{c_i} ; pressão constante; taxa de consumo de coque na reação química f_i ; calor de reação Q_{c_i} ; resistência ao fluxo que aparece na Lei de Darcy K_{s_i} , que é diretamente proporcional à permeabilidade da rocha e inversamente proporcional à viscosidade do gás; coeficientes estequiométricos relativos às massas de oxigênio e do gás inerte são m_{o_i} e m_{g_i} , respectivamente, ver [1]. A temperatura do meio externo é denotada por T_E .

A grandeza m_{g_i} pode ser positiva, negativa ou nula se a quantidade de gás produzida pela reação é maior, menor ou igual à quantidade de gás consumida por

ele. Finalmente, o coeficiente de transferência de calor entre as camadas i e $i + 1$ é denotado por Q_i , para $i = 1, \dots, n - 1$.

Na i -ésima camada, valem as seguintes equações:

Balanço de energia

Para $i = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 \rho_{g_1} c_{g_1} T_1 + (1 - \phi_1) \rho_{r_1} c_{r_1} T_1 + \eta_1 c_{c_1} T_1) = \\ - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{g_1} c_{g_1} v_1 T_1) + Q_{f_1} f_1 - \hat{Q}_1 (T_1 - T_E) + Q_1 (T_2 - T_1) \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{s_1} \frac{\partial T_1}{\partial x}). \end{aligned} \quad (C.2)$$

Para $i = 1, \dots, n - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_{g_i} c_{g_i} T_i + (1 - \phi_i) \rho_{r_i} c_{r_i} T_i + \eta_i c_{c_i} T_i) = \\ - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{g_i} c_{g_i} v_i T_i) + Q_{f_i} f_i - Q_{i-1} (T_i - T_{i-1}) + Q_i (T_{i+1} - T_i) \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{s_i} \frac{\partial T_i}{\partial x}). \end{aligned} \quad (C.3)$$

Para $i = n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_n \rho_{g_n} c_{g_n} T_n + (1 - \phi_n) \rho_{r_n} c_{r_n} T_n + \eta_n c_{c_n} T_n) = \\ - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{g_n} c_{g_n} v_n T_n) + Q_{f_n} f_n - Q_{n-1} (T_n - T_{n-1}) - \hat{Q}_2 (T_n - T_E) \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{s_n} \frac{\partial T_n}{\partial x}). \end{aligned} \quad (C.4)$$

Balanço de massa de combustível

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -f_i. \quad (C.5)$$

Balanço de massa de oxigênio

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_{g_i} Y_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{g_i} v_i Y_i) = -m_i f_i. \quad (C.6)$$

Balanço de massa do gás total

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_{g_i}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{g_i} v_i) = m_{g_i} f_i. \quad (C.7)$$

Lei de Darcy

$$v_i = -K_{s_i} \frac{\partial p_i}{\partial x}. \quad (\text{C.8})$$

Consideramos a condutividade em cada camada dada por uma média das condutividades da matéria sólida (rocha e coque) e da fase gasosa

$$\lambda_{s_i} = (1 - \phi_i)((1 - l_i)\lambda_{r_i} + l_i\lambda_{c_i}) + \phi_i\lambda_{g_i}, \quad (\text{C.9})$$

em que λ_{r_i} , λ_{c_i} e λ_{g_i} são as condutividades da rocha, do coque e da fase gasosa, respectivamente, l_i é uma constante, tal que $0 \leq l_i \leq 1$.

A taxa de consumo de coque na reação química em cada camada é dada por uma versão da Lei de Arrhenius

$$f_i = A_{c_i}(Y_i p_i)^\alpha \eta_i e^{-\frac{\hat{E}}{RT_i}}, \quad (\text{C.10})$$

em que A_{c_i} é a constante de Arrhenius, \hat{E} é a energia de ativação, α é a ordem da taxa de reação gasosa e R é a constante gasosa. \hat{E} e α são iguais em todas as camadas.

Introduzimos variáveis adimensionais para o espaço e tempo,

$$\tilde{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t^*}, \quad (\text{C.11})$$

em que x^* e t^* são valores de referência para o espaço e o tempo, respectivamente.

A velocidade adimensional de Darcy na i -ésima camada é dada por

$$\tilde{v}_i = \frac{t^* v_i}{x^*}. \quad (\text{C.12})$$

Também introduzimos as variáveis adimensionais para a temperatura, concentração de combustível, pressão e densidade de gás na i -ésima camada,

$$\tilde{T}_i = \frac{T_i}{T^*}, \quad \tilde{p}_i = \frac{p_i}{p^*}, \quad \tilde{\rho}_{g_i} = \frac{\rho_{g_i}}{\rho_g^*}, \quad \text{e} \quad \tilde{\eta}_i = \frac{\eta_i}{\eta_i^o}, \quad (\text{C.13})$$

em que T^* , p^* e ρ_g^* são valores de referência para a temperatura, pressão e densidade do gás, respectivamente; e η_i^o é a concentração inicial de combustível na i -ésima camada, que pode ser uma função da variável x . Desta forma, $\tilde{\eta}_i$ é a fração de coque, remanescente na i -ésima camada, $0 \leq \tilde{\eta}_i \leq 1$. A densidade do gás ρ_g^* é obtida a partir da temperatura e da pressão de referência, usando a equação de estado.

Ao definir a função adimensional

$$h(T, \eta, Y, p) = (Yp)^\alpha \eta e^{-\frac{E}{T}}, \quad (\text{C.14})$$

em que $E = \frac{\hat{E}}{RT^*}$, a função da taxa de reação pode ser escrita como $f_i = A_{c_i} h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i)$.

Com estas variáveis adimensionais e retirando os tís (\sim) de (C.11)-(C.13) e de $\tilde{T}_E = T_E/T^*$, para simplificar a notação, o sistema (C.2)-(C.8) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left((\phi_1 \rho_g^* \rho_1 c_{g_1} + (1 - \phi_1) \rho_{r_1} c_{r_1} + \eta_1^o c_{c_1} \eta_1) T_1 \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_g^* \rho_1 c_{g_1} v_1 T_1) \\ &+ \frac{t^* \eta_1^o A_{c_1} Q_{f_1}(p^*)^\alpha}{T^*} h(T_1, \eta_1, Y_1, p_1) - t^* \hat{Q}_1 (T_1 - T_E) \\ &+ t^* Q_1 (T_2 - T_1) + \frac{t^*}{(x^*)^2} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{s_1} \frac{\partial T_1}{\partial x}), \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left((\phi_i \rho_g^* \rho_i c_{g_i} + (1 - \phi_i) \rho_{r_i} c_{r_i} + \eta_i^o c_{c_i} \eta_i) T_i \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_g^* \rho_i c_{g_i} v_i T_i) \\ &+ \frac{t^* \eta_i^o A_{c_i} Q_{f_i}(p^*)^\alpha}{T^*} h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i) - t^* Q_{i-1} (T_i - T_{i-1}) \\ &+ t^* Q_i (T_{i+1} - T_i) + \frac{t^*}{(x^*)^2} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{s_i} \frac{\partial T_i}{\partial x}), \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left((\phi_n \rho_g^* \rho_n c_{g_n} + (1 - \phi_n) \rho_{r_n} c_{r_n} + \eta_n^o c_{c_n} \eta_n) T_n \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_g^* \rho_n c_{g_n} v_n T_n) \\ &+ \frac{t^* \eta_n^o A_{c_n} Q_{f_n}(p^*)^\alpha}{T^*} h(T_n, \eta_n, Y_n, p_n) - t^* Q_{n-1} (T_n - T_{n-1}) \\ &- t^* \hat{Q}_2 (T_n - T_E) + \frac{t^*}{(x^*)^2} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{s_n} \frac{\partial T_n}{\partial x}), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -t^* A_{c_i} (p^*)^\alpha h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i), \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_g^* \rho_{g_i} Y_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g^* \rho_{g_i} v_i Y_i) = -t^* m_{o_i} \eta_i^o A_{c_i} (p^*)^\alpha h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i), \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_g^* \rho_{g_i}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g^* \rho_{g_i} v_i) = t^* m_{g_i} \eta_i^o A_{c_i} (p^*)^\alpha h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i), \quad (\text{C.20})$$

$$v_i = -\frac{t^* p^* K_{s_i}}{(x^*)^2} \frac{\partial p_i}{\partial x}. \quad (\text{C.21})$$

Agora, dividimos (C.15), (C.16) e (C.17) pelo valor médio

$$\rho_r \bar{c}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{r_i} c_{r_i}, \quad (\text{C.22})$$

(C.18) por $\eta_{f_i}^o$, (C.19) e (C.20) por ρ_g^* . A razão para dividir as equações (C.15), (C.16) e (C.17) é porque todos os coeficientes das equações resultantes variam em um intervalo conveniente para cálculos numéricos. Para $i = 1, \dots, n$, obtemos o seguinte sistema adimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((a_1 + b_1 \eta_1) T_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\hat{c}_1 v_1 T_1) = \\ \hat{d}_1 h(T_1, \eta_1, Y_1, p_1) - \hat{q}_1 (T_1 - T_E) + q_1 (T_2 - T_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}), \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((a_i + b_i \eta_i) T_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\hat{c}_i v_i T_i) = \\ \hat{d}_i h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i) - q_{i-1} (T_i - T_{i-1}) + q_i (T_{i+1} - T_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x}), \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((a_n + b_n \eta_n) T_n) + \frac{\partial}{\partial x} (\hat{c}_n v_n T_n) = \\ \hat{d}_n h(T_n, \eta_n, Y_n, p_n) - q_{n-1} (T_n - T_{n-1}) - \hat{q}_2 (T_n - T_E) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial x}), \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -\hat{A}_i h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i), \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_{g_i} Y_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{g_i} v_i Y_i) = -B_i h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i), \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_{g_i}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{g_i} v_i) = D_i h(T_i, \eta_i, Y_i, p_i), \quad (\text{C.28})$$

$$v_i = -K_i \frac{\partial p_i}{\partial x}. \quad (\text{C.29})$$

sendo $0 < x < L$, $t > 0$. Em (C.24) $i = 2, \dots, n-1$; em (C.26), (C.27), (C.28) e (C.29) $i = 1, \dots, n$. Os coeficientes são dados por

$$a_i = \frac{\phi_i \rho_g^* \rho_{g_i} c_{g_i} + (1 - \phi_i) \rho_{r_i} c_{r_i}}{\rho_r \bar{c}_r}, \quad b_i = \frac{\eta_i^o c_{c_i}}{\rho_r \bar{c}_r}, \quad \hat{c}_i = \frac{\rho_g^* \rho_{g_i} c_{g_i}}{\rho_r \bar{c}_r}, \quad \hat{d}_i = \frac{A_i \eta_i^o Q_{f_i}}{T^* \rho_r \bar{c}_r}, \quad (\text{C.30})$$

$$\hat{A}_i = t^* A_{c_i} (p^*)^\alpha, \quad \lambda_i = \frac{t^* \lambda_{s_i}}{(x^*)^2 \rho_r \bar{c}_r}, \quad B_i = \frac{m_{o_i} A_i \eta_i^o}{\rho_g^*}, \quad D_i = \frac{m_{g_i} A_i \eta_i^o}{\rho_g^*}, \quad K_i = \frac{t^* p^* K_{s_i}}{(x^*)^2}, \quad (\text{C.31})$$

$$q_i = \frac{t^* Q_i}{\rho_r \bar{c}_r}, \quad \hat{q}_1 = \frac{t^* \hat{Q}_1}{\rho_r \bar{c}_r}, \quad \hat{q}_2 = \frac{t^* \hat{Q}_2}{\rho_r \bar{c}_r}, \quad (\text{C.32})$$

sendo que em (C.30) e (C.31), $i = 1, \dots, n$, e em (C.32), $i = 1, \dots, n-1$.

Os coeficientes definidos em (C.30)–(C.32) dependem das grandezas físicas nas camadas. Muitas destas grandezas físicas podem depender de x e de t , tais como ϕ_i , λ_i e η_i^o , mas, neste estudo, consideraremos todas elas como constantes. Desta forma, a_i , b_i , c_i , d_i , λ_i , A_i , B_i , D_i , q_i , \hat{q}_1 , \hat{q}_2 , e K_i são todas constantes não negativas, exceto D_i , que, dependendo do coeficiente estequiométrico m_{g_i} , pode ser positivo, negativo ou zero.

Uma maneira conveniente de tratar o sistema (C.23)–(C.29) é assumir, em uma primeira análise, que os fluidos são incompressíveis. Daí, podemos negligenciar as mudanças de volume e de pressão devido à reação química. Estas hipóteses simplificam nossas equações e isolam os principais efeitos da temperatura. Assim, para $i = 1, \dots, n$, assumimos que ρ_i é um valor médio constante, denotado por $\bar{\rho}_i$, que independe da temperatura e da pressão; $m_{g_i} = 0$ e, desta forma, $\tilde{D}_i = 0$.

Estamos interessados na situação física em que o oxigênio é injetado no meio poroso em $x = 0$. Assim, todo o combustível sólido se queima e uma frente de reação propaga-se para a direita. Desde que $\tilde{D}_i = 0$, de (C.28), temos que $\frac{\partial v_i}{\partial x} = 0$. Logo, v_i depende somente do tempo e pode-se relacionar com condições de contorno no final da injeção. Por simplicidade, assumimos que v_i é constante. Além disso, em (C.29) vemos que p_i pode ser facilmente calculado usando a pressão de injeção.

Com estas simplificações, as equações (C.28) e (C.29) são automaticamente satisfeitas, e (C.23)–(C.26) estão acopladas com (C.27) somente pelo fator $(Y_i p_i)^\alpha$

na função h . Por simplicidade, tomamos este fator como uma constante conhecida. Desta forma, obtemos o seguinte sistema adimensional modelando a temperatura e a concentração do combustível:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}((a_1 + b_1\eta_1)T_1) + \frac{\partial}{\partial x}(c_1T_1) = \\ d_1 f(T_1, \eta_1) - \hat{q}_1(T_1 - \hat{T}_E) + q_1(T_2 - T_1) + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}((a_i + b_i\eta_i)T_i) + \frac{\partial}{\partial x}(c_iT_i) = \\ d_i f(T_i, \eta_i) - q_{i-1}(T_i - T_{i-1}) + q_i(T_{i+1} - T_i) + \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}((a_n + b_n\eta_n)T_n) + \frac{\partial}{\partial x}(c_nT_n) = \\ d_n f(T_n, \eta_n) - q_{n-1}(T_n - T_{n-1}) - \hat{q}_2(T_n - \hat{T}_E) + \lambda_n \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -A_i f(T_i, \eta_i), \quad (\text{C.36})$$

em que $0 < x < l$, $t > 0$.

A função f é definida por

$$f(T, \eta) = \eta e^{-\frac{E}{T}}, \quad (\text{C.37})$$

e os novos coeficientes são

$$c_i = \hat{c}_i v_i, \quad d_i = (Y_i p_i)^\alpha \hat{d}_i, \quad A_i = (Y_i p_i)^\alpha \hat{A}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{C.38})$$

Os outros coeficientes a_i , b_i e λ_i , para $i = 1, \dots, n$, q_i , para $i = 1, \dots, n-1$, e \hat{q}_i , para $i = 1, 2$, são os mesmos definidos em (C.30)-(C.32). Consideramos todos estes coeficientes como constantes não negativas.

Referências Bibliográficas

- [1] AKKUTLU, Y.; YORTSOS, Y. The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. **Combustion and Flame**, Los Angeles, v. 134, p. 229-247, 2003.
- [2] BRAILOVSKY, I.; GOLDSHTEIN, V.; SHREIBER, I.; SIVASHINSKY, G. On combustion waves driven by diffusion of pressure. **Combustion Science and Technology**, v. 124, p. 145-165, 1997.
- [3] CHAPIRO, G.; MARCHESIN, D.; SCHECTER, S. Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam. **Journal of Hyperbolic Differential Equations**, v. 11, n. 2, p. 295-328, 2014.
- [4] COATS, K. H. In-situ combustion model. **Society of Petroleum Engineers Journal**, v. 20, p. 533-554, 1980.
- [5] CROOKSTON, R. B.; CULHAM, W. E.; CHEN, W. H. A numerical simulation model for thermal recovery processes. **Society of Petroleum Engineers Journal**, v. 19, p. 37-58, 2013.
- [6] DA MOTA, J. C.; DANTAS, W.; MARCHESIN, D. Combustion fronts in porous media. **SIAM J. Appl. Math.**, v.62, n. 6, p. 2175-2198, 2002.
- [7] DA MOTA, J. C.; SCHECTER, S. Combustion fronts in a porous medium with two layers. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, v. 18, n. 3, p. 615-665, 2006.
- [8] DA MOTA, J. C.; SANTOS, M. M. An application of the monotone iterative method to a combustion problem in porous media. **Nonlinear Analysis Real World Applications**, v. 12, n. 2, p. 1192-1201, 2011.
- [9] DA MOTA, J. C.; SANTOS, M. M.; SANTOS, R. A. The cauchy problem for a combustion model in a porous medium with two layers. **Monatshefte für Mathematik**, v. 188, n. 1, p. 131-162, 2019.
- [10] DA MOTA, J. C.; SOUZA, A. J. Multiple traveling waves for dry forward combustion through a porous medium. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 78, p. 1056-1077, 2018.

- [11] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2011.
- [12] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Berkeley: American Mathematical Society, 2010.
- [13] FOLLAND, G. B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. 2.ed. Wiley, 1999.
- [14] FRIEDMAN, A. **Partial Differential Equations of Parabolic Type**. 2.ed. New York: Dover Publications, 2015.
- [15] GHAZARYAN, A. *et al.* Stability of gasless combustion fronts in one-dimensional solids. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 198, p. 981-1030, 2010.
- [16] GHAZARYAN, A.; SCHECTER, S.; SIMON, P. L. Gasless combustion fronts with heat loss. **SIAM J. Appl. Math.**, v.73, p. 1303-1326, 2013.
- [17] GORDON, P.V. Recent mathematical results on combustion in hydraulically resistant porous media. **Mathematical Modelling of Natural Phenomena**, v. 2, p. 56-76, 2007.
- [18] GOTTFRIED, B. S. A mathematical model of thermal oil recovery in linear systems. **Society of Petroleum Engineers Journal**, v. 5, p. 196-210, 1965.
- [19] II'YN, A. M.; KALASHNIKOV, A. S.; OLEINIK, O. A. Linear equations of the second order of parabolic type. **Russian Mathematical Surveys**, v. 17, n. 3, p. 1-143, 1962.
- [20] II'YN, A. M.; KALASHNIKOV, A. S.; OLEINIK, O. A. Linear second-order partial differential equations of the parabolic type. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 108, n. 4, p. 435-542, 2002.
- [21] MARCHESIN, D.; SCHECTER, S. Geometric singular perturbation analysis of oxidation heat pulses for two-phase flow in porous media. **Bulletin Brazilian Mathematical Society**, v. 32, n. 3, p. 237-270, 2001.
- [22] MARCHESIN, D.; SCHECTER, S. Oxidation heat pulses for two-phase expansive flow in porous media. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, v. 54, p. 48-83, 2003.
- [23] OLEINIK, O. A.; KRUSHKOV, S. N. Quasilinear second order parabolic equations with many independent variable. **Russian Mathematical Surveys**, v. 16, n. 5, p. 105-146, 1961.

-
- [24] PAO, C. V. **Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations**. 1.ed. New York: Springer US, 1992.
- [25] ROTHE, F. **Global solutions of reaction-diffusion systems. Lecture Notes in Mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [26] WIDDER, D.V. **The Heat Equation**. 1.ed. New York: Academic Press, 1975.