



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Uma Introdução a Análise Real: Funções Contínuas não Diferenciáveis e Fractais

Henrique Carvalho Rodrigues

Goiânia

2016

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):	Henrique Carvalho Rodrigues		
E-mail:	henriquecr1982@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	SEC. DE EDUCAÇÃO, CULTURA E ESPORTE DE GOIÁS		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF
		CNPJ:	00.889.834/0001-08
Título:	Uma Introdução a Análise Real: Funções Contínuas não Diferenciáveis e Fractais		
Palavras-chave:	Conceitos Topológicos, Continuidade, Funções Não-Deriváveis, Fractais, Séries de Funções.		
Título em outra língua:	An Introduction to Real Analysis: Continuous Functions not Differentiable and Fractals.		
Palavras-chave em outra língua:	Topological concepts, Continuity, Functions Non-Derivable, Fractals, Function Series.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa:	11/05/2016		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional		
Orientador (a):	Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz		
E-mail:	yunier@impa.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Henrique Carvalho Rodrigues  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 01 / 06 / 2016

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**Henrique Carvalho Rodrigues**

**Uma Introdução a Análise Real: Funções  
Contínuas não Diferenciáveis e Fractais**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração:** Matemática do Ensino Básico

**Orientador:** Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz

Goiânia

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Carvalho Rodrigues, Henrique  
Uma Introdução a Análise Real: Funções Contínuas não  
Diferenciáveis e Fractais [manuscrito] / Henrique Carvalho  
Rodrigues. - 2016.  
LXXIX, 79 f.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de  
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Goiânia, 2016.

Bibliografia.  
Inclui lista de figuras.

1. Conceitos Topológicos. 2. Continuidade. 3. Funções Não  
Deriváveis. 4. Fractais. 5. Séries de Funções. I. Bello Cruz, José  
Yunier, orient. II. Título.

# Henrique Carvalho Rodrigues

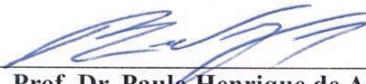
## Uma Introdução a Análise Real: Funções Contínuas não Diferenciáveis e Fractais

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 11 de maio de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca



---

**Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



---

**Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos**  
Membro Externo – IFG/GOIÂNIA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Henrique Carvalho Rodrigues** graduou-se em Matemática, especializou-se em Matemática do Ensino Básico e em Matemática na Universidade Federal de Goiás. Durante a graduação foi bolsista do PROEC-IME/UFG. Foi professor do Departamento de Ciências Econômicas da Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Foi professor e coordenador da OBMEP no Colégio Estadual Juvenal José Pedroso. Foi professor, coordenador da OBMEP e Supervisor PIBID/PUCGO na Escola Municipal Doutor Xavier de Almeida. Foi professor e coordenador pedagógico do Colégio Estadual José David Skaf. Foi aluno do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e bolsista CAPES. Atualmente é professor na rede estadual de educação do Estado de Goiás e na rede municipal de educação de Senador Canedo.

À Lívia.

# Agradecimentos

Agradeço à Deus pela força e sabedoria.

Agradeço à minha amada esposa Priscila que sempre apoiou nos meus estudo.

Agradeço aos meus pais, Neto e Sônia, mesmo diante dos obstáculos nunca deixaram de apoiar meus estudos. E minha mãe sempre disse: tudo nessa vida passa.

Agradeço à minha amada, linda e maravilhosa filha Lívia, que nasceu junto com o PROFMAT na minha vida.

Agradeço a todos professores e colegas do PROFMAT do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás.

Agradeço em especial ao professor e orientador José Yunier Bello Cruz pelo apoio, conselhos e orientação para à realização desse trabalho.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal, o estudo das funções não-diferenciáveis em todos os pontos do seu domínio e sua relação com a construção de fractais. Introduzimos definições e teoremas importantes da análise para o estudo das funções não-diferenciáveis. Os temas estudados incluem: sequências, convergência, bolas, continuidade e séries de funções. Construimos exemplos de funções contínuas sem derivadas e a relação desse processo com a construção de alguns Fractais.

**Palavras-chave:** Conceitos Topológicos; Continuidade; Funções Não-Deriváveis; Fractais; Séries de Funções.

## **Abstract**

This work has as main objective the study of non-differentiable functions at all points of your domain and its relation to the construction of fractals. We have introduced important definitions and theorems of analysis for the study of non-differentiable functions. The subjects studied include sequences, convergence, balls, continuity and series of functions. We built examples of continuous functions without derivatives and the relationship of this process with the construction of some fractals.

**Keywords:** Topological Concepts; Continuity; Functions Non-Derivable; Fractals; Function Series.

# Lista de Figuras

1.1	As coordenadas dos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (-1, -1) \in \mathbb{R}^2$ .	16
1.2	As coordenadas do ponto $P = (5, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ .	16
1.3	Os vetores $u$ e $v$ são ortogonais.	19
1.4	O vetor $w$ é ortogonal a $u$ .	20
1.5	A norma do vetor $u$ .	22
1.6	A esquerda <i>bola aberta</i> e a direita <i>bola fechada</i> .	25
1.7	Norma Euclidiana.	27
1.8	Norma do Máximo.	27
1.9	Norma da Soma.	27
1.10	Relação entre as normas: Euclidiana, Máximo e Soma.	28
1.11	Conjuntos Convexos.	29
1.12	Conjunto não Convexo.	30
1.13	O ponto $P \in \text{int}(X)$ .	31
1.14	O ponto $p = \left(a, -\frac{r}{2}\right) \in B(q; r)$ mas não a $X$ .	31
1.15	Bola aberta $B = B(a; r)$ .	32
1.16	$d(X, Y) = 0$	43
2.1	$f_n(x) = x/n$ tem-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x/n) = 0$ .	52
2.2	$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por $f_n(x) = x^n$	53
2.3	$f_n(x) = x^n(1 - n^n)$	53
3.1	Função de Weierstrass para $a = 7$ e $b = 0, 9$ .	57
3.2	Aproximações da Função de Weierstrass	57
3.3	Função de Riemann, $n = 1, 2, 3$ , e $10$	60
3.4	Função Bolzano para $n = 1$ e $n = 2$ .	62
4.1	Aproximação da Curva de Koch.	70

4.2	Aproximação do Floco de Neve. . . . .	71
4.3	Aproximações do Triângulo de Sierpinski, etapas 1 e 2. . . . .	71
4.4	Aproximações do Triângulo de Sierpinski, etapas 3 e 4. . . . .	72
4.5	Aproximação do Triângulo de Sierpinski, etapa 5. . . . .	72
4.6	Triângulo de Pascal na congruência módulo 2. . . . .	73
4.7	Aproximações do Conjunto de Cantor. . . . .	74

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>1 Algumas Noções Topológicas</b>	<b>15</b>
1.1 Espaço $n$ -dimensional . . . . .	15
1.2 Produto Interno . . . . .	18
1.3 Conjuntos e Bolas em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
1.4 Sequências . . . . .	34
1.5 Conjunto Compactos . . . . .	41
1.6 Aplicações Contínuas . . . . .	46
1.7 Continuidade Uniforme . . . . .	48
<b>2 Séries de Funções</b>	<b>51</b>
<b>3 Funções Não Deriváveis</b>	<b>56</b>
3.1 Função de Weierstrass . . . . .	56
3.2 Função de Riemann . . . . .	60
3.3 Função de Bolzano . . . . .	61
<b>4 Construções Clássicas de Fractais</b>	<b>69</b>
4.1 Curva de Koch . . . . .	69
4.2 Triângulo de Sierpinski . . . . .	71
4.3 Conjunto de Cantor . . . . .	73
4.4 Noção de Comprimento, Área e Volume . . . . .	77
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Introdução

Intuitivamente, em  $\mathbb{R}$  uma função contínua é derivável em um ponto se existir uma única reta tangente ao gráfico da mesma no ponto. Afirmamos que é possível construirmos uma função contínua que não admite derivada em um determinado ponto. Mais, ainda podemos construir uma função contínua que admite um número finito de pontos sem derivadas. Uma questão natural e muito interessante é a seguinte:

*Existe uma função contínua sem derivada em todos os pontos?*

No século XIX, alguns matemáticos tentaram construir “exemplos” de funções contínuas com essa *característica*; veja *Sergio Plaza* [7]. *Karl Weierstrass* (1815–1897), importante matemático alemão, na tentativa de mostrar que o exemplo construído por outro ilustre matemático alemão, *Bernhard Riemann* (1826–1866), tinha derivada em alguns pontos, construiu seu próprio exemplo. Esse foi efetivamente o primeiro exemplo publicado de função contínua sem derivada em *todos* os pontos. Essas funções contínuas (sem derivada em todos os pontos) são consideradas as primeiras construções clássicas de fractais conhecidas.

Nesse trabalho introduziremos um estudo sobre as noções de topologia em  $\mathbb{R}^n$ . As quais serão úteis no estudo de funções contínua não-diferenciáveis e as construções clássicas de alguns fractais. Nos Capítulos 1 e 2, estudaremos definições, teoremas e propriedades do análise real conforme os livros de *Elon Lages Lima* [5] e [2]. No Capítulo 3, mostramos a Função de *Weierstrass*, demonstrando que a mesma é contínua e não derivável em todos os pontos do domínio segundo a dissertação *Johan Thim* [8]. Seguindo *Plaza* [7] mostramos os pontos onde a Função de *Riemann* possui derivada. No final deste capítulo demonstramos que a Função de *Bolzano* é contínua e não derivável num subconjunto denso do seu domínio. Finalmente abordamos, no Capítulo 4, as construções clássicas de alguns importantes fractais, como por exemplo, a Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski e o Conjunto de Cantor.

# Capítulo 1

## Algumas Noções Topológicas

A geometria grega clássica ou Geometria Euclideana<sup>1</sup> definiu o *plano* e o *espaço* euclidiano usando alguns postulados, enquanto as outras propriedades desses espaços foram deduzidas como teoremas. O termo “euclidiano” distingue estes espaços de outros tipos de espaços considerados na geometria moderna. O espaço euclidiano pode ser estendido a qualquer dimensão finita, e tal espaço é chamado *espaço euclidiano  $n$ -dimensional*. Quando a álgebra e a análise matemática tornou-se desenvolvida o suficiente, esta relação inverteu e agora é mais comum definir o espaço euclidiano com coordenadas cartesianas e as ideias da geometria analítica. Isso significa que os pontos do espaço são representados por coleções de *números reais*<sup>2</sup>. Com essa abordagem, temos a vantagem de generalizar o espaço euclidiano com mais dimensões.

### 1.1 Espaço $n$ -dimensional

O espaço euclidiano é talvez o espaço vetorial mais elementar e importante. Vejamos a definição do espaço  $n$ -dimensional.

---

<sup>1</sup>Devido ao matemático grego *Euclides de Alexandria* (325 a.C.–265 a.C.), conhecido como o pai da geometria por ter estudado os primeiros conceitos da Geometria Plana, que trata do estudo de objetos bidimensionais que não possuem volume, e também por ter desenvolvido os conceitos iniciais da Geometria Espacial, que trata do estudo dos objetos no espaço, ou seja, aquelas que possuem mais de duas dimensões

<sup>2</sup>Ver mais sobre números reais em [2].

**Definição 1.** *Seja  $n$  um número inteiro positivo, o espaço euclidiano  $n$ -dimensional representado por  $\mathbb{R}^n$ , é o produto de  $n$  fatores iguais a  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ .*

Os elementos do espaço euclidiano  $n$ -dimensional, são as sequências de  $n$  termos de números reais representado por  $u = (u_1, \dots, u_n)$ . Os elementos de  $\mathbb{R}^n$  são chamados de *pontos* e para cada  $i = 1, \dots, n$ , o termo  $u_i$  chamamos a  $i$ -ésima coordenada de  $u$ .

Vejamos alguns exemplos de espaço euclidiano.

**Exemplo 1.** *O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$  é representado pelo plano.*

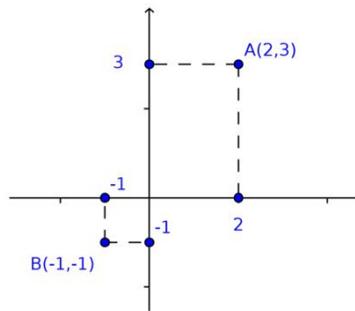


Figura 1.1: As coordenadas dos pontos  $A = (2, 3)$  e  $B = (-1, -1) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.** *O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  é representado pelo espaço tridimensional.*

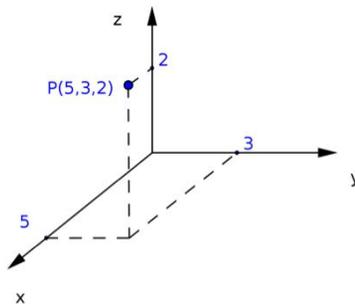


Figura 1.2: As coordenadas do ponto  $P = (5, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ .

Dados os pontos  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$  pertencentes ao  $\mathbb{R}^n$ , tem-se  $u = v$  se, e somente se,  $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$ . Assim, toda igualdade entre dois pontos de  $\mathbb{R}^n$ , equivale a igualdades entre os  $n$ -ésimos termos dos pontos.

A seguir definimos duas operações entre os elementos do espaço euclidiano  $n$ -dimensional, a primeira é a adição que faz corresponder a cada par de pontos  $u, v \in \mathbb{R}^n$  a adição,  $u + v := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$ , e a segunda operação é a multiplicação de um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  por  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \cdot u := (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n)$ .

O ponto  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ , cujas coordenadas são todas nulas, chamamos de ponto *nulo* ou *origem* e para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ , o ponto  $-u = (-u_1, \dots, -u_n)$ , chamamos de *oposto*.

A seguir apresentamos as propriedades das operações de adição e de multiplicação por um escalar:

Dados quaisquer  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , têm-se:

**Propriedades das adição:**

- (i) Comutatividade:  $u + v = v + u$
- (ii) Associatividade:  $u + (v + w) = (u + v) + w$
- (iii) Existência do Elemento neutro da adição:  $u + 0 = u$
- (iv) Existência do Elemento oposto da adição:  $u + (-u) = 0$

**Propriedades da multiplicação por um escalar:**

- (i) Produto Nulo:  $0 \cdot u = 0$
- (ii) Comutatividade do produto escalar:  $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$
- (iii) Distributiva:  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- (iv) Associativa entre produto escalar e produto por escalares:  $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v$

Os pontos,  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ , que têm uma única coordenada não-nula, igual a 1, constituem um conjunto de pontos canônicos de  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Produto Interno

Um *produto interno* em  $\mathbb{R}^n$  é uma correspondência que a cada par de vetores em  $\mathbb{R}^n$  associa um número real, denotado por  $\langle u, v \rangle$ , que satisfaz a seguinte definição.

**Definição 2.** Uma função binária  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um produto interno se, dados  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  e qualquer escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se:

(i) *Positividade:*  $\langle u, u \rangle > 0$ , se  $u \neq 0$  e  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ;

(ii) *Simetria:*  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ;

(iii) *Bi-linearidade:*  $\langle u + v, \alpha w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \alpha \langle v, w \rangle$ ;

O produto interno determina a geometria do espaço vetorial e serve para determinar ângulos e distâncias entre vetores. Aqui, usamos o produto interno para determinar distância entre dois pontos. A seguir, definimos o *produto interno usual* em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.** Sejam os pontos  $u, v \in \mathbb{R}^n$  em que  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , e o escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ . O seguinte produto:

$$\langle u, v \rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n,$$

é chamado de *produto interno usual* em  $\mathbb{R}^n$ .

Vejamos que o produto interno usual, satisfaz as condições da definição de produto interno.

Primeiramente, notemos que  $\langle u, u \rangle = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$ , e que

$$\langle u, u \rangle = u_1^2 + \dots + u_n^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \dots = u_n = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Assim, mostramos que a condição (i) da definição de produto interno esta satisfeita. Para verificarmos a condição (ii), observamos que,

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n = \langle v, u \rangle.$$

Por último, temos,

$$\begin{aligned} \langle u + v, \alpha w \rangle &= (u_1 + v_1)\alpha w_1 + (u_2 + v_2)\alpha w_2 + \dots + (u_n + v_n)\alpha w_n \\ &= \alpha(u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n) + \alpha(v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n) \\ &= \langle u, \alpha w \rangle + \langle v, \alpha w \rangle, \end{aligned}$$

Assim,  $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$  é um produto interno em  $\mathbb{R}^n$ . Um exemplo de produto interno diferente do produto interno usual é o seguinte:

**Exemplo 3.** Sejam os vetores  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Definimos a seguinte função  $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ . Afirmamos que essa função é um produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

Sejam os vetores  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$  e o escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Primeiramente note que,  $\langle u, u \rangle = 3u_1u_1 + 5u_2u_2$ ,  $\langle u, v \rangle = 3u_1^2 + 5u_2^2 \geq 0$  e temos  $\langle u, u \rangle = 3u_1^2 + 5u_2^2 = 0$  se, e somente se,  $u_1 = u_2 = 0$ , assim mostramos que a condição (i) é satisfeita.

Para verificarmos as condições (ii) e (iii), observe que,  $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2 = 3v_1u_1 + 5v_2u_2 = \langle v, u \rangle$  e mais  $\langle u + v, \alpha w \rangle = 3(u_1 + v_1)\alpha w_1 + 5(u_2 + v_2)\alpha w_2 = \alpha(3u_1w_1 + 5u_2w_2) + \alpha(3v_1w_1 + 5v_2w_2) = \langle u, \alpha w \rangle + \langle v, \alpha w \rangle$ . Portanto  $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$  é um produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

O próximo conceito que apresentamos é o de *ortogonalidade* que indica quando dois objetos (retas, vetores ou planos) fazem são perpendiculares, cujo símbolo é  $\perp$ .

**Definição 4.** Dizemos que os vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$  são ortogonais, e escrevemos  $u \perp v$ , quando  $\langle u, v \rangle = 0$ .

**Exemplo 4.** Sejam os vetores,  $u = (1, 1)$  e  $v = (-1, 1)$  e considere o produto interno usual em  $\mathbb{R}^2$ .

Temos,  $\langle u, v \rangle = \langle (1, 1), (-1, 1) \rangle = -1 + 1 = 0$ . Portanto os vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais. Veja a figura.

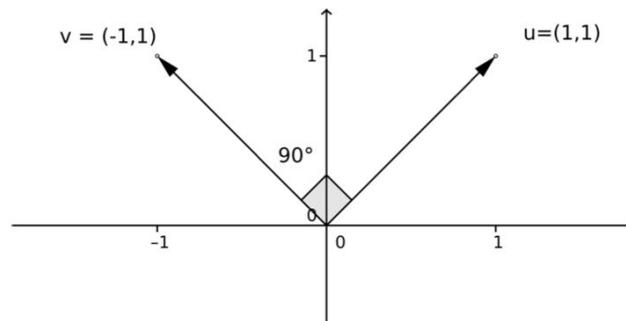


Figura 1.3: Os vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais.

Considerando os vetores  $u$  e  $v$  do exemplo anterior e um produto interno diferente do usual, observe que os vetores não são ortogonais.

**Exemplo 5.** Considere o produto interno definido por  $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$  e os vetores  $u = (1, 1)$  e  $v = (-1, 1)$ . Temos,

$$\langle u, v \rangle = 3(1)(-1) + 5(1)(1) = 2 \neq 0,$$

ou seja, os vetores não são ortogonais.

A seguir apresentamos uma propriedade dos vetores canônicos distintos.

**Propriedade 1.** Dados os vetores canônicos  $e_i, e_j \in \mathbb{R}^n$ , então  $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $i = j$ . Para algum  $i$  temos,

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \times 0 + \cdots + 1 \times 1 + \cdots + 0 \times 0 = 1.$$

□

Dado um vetor  $u \in \mathbb{R}^n$ , apresentamos como obter um vetor  $w \in \mathbb{R}^n$  perpendicular a  $u$ .

**Propriedade 2.** Seja o vetor não-nulo  $u \in \mathbb{R}^n$ . Para todo vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , temos que o vetor  $w = v - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$  é ortogonal a  $u$ .

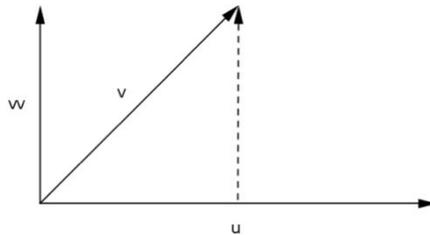


Figura 1.4: O vetor  $w$  é ortogonal a  $u$ .

*Demonstração.* Para que o vetor  $w$  seja ortogonal a  $u$  devemos ter o produto interno  $\langle u, w \rangle = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= \left\langle u, v - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle = \langle u, v \rangle - \left\langle u, \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right\rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Dado um vetor não-nulo  $u \in \mathbb{R}^n$ , podemos escrever o vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  como a soma de um vetor múltiplo e ortogonal a  $u$ , ou seja,

$$v = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u + w.$$

Esta decomposição é única, isto é,  $v = \alpha u + w$  com  $w \perp u$ . Tomamos o produto interno de ambos os membros por  $u$  obtemos,

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \alpha u + w \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

Chamamos o vetor  $\alpha u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$  de *projeção ortogonal* de  $v$  sobre (a reta que contém)  $u$ .

Em seguida, definimos uma função que a cada vetor do espaço associa um número real não-negativo, a *norma*.

**Definição 5.** A função  $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  é chamada de *norma*, se dados os vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , um produto interno e um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , verificamos as seguintes condições:

- (i)  $\|u\| \geq 0$ , valendo  $\|u\| = 0$  somente quando  $u = 0$ ;
- (ii)  $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \|u\|$ ;
- (iii)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

Vejamos um exemplo de norma.

**Exemplo 6.** Seja o vetor  $u \in \mathbb{R}^n$ . Definimos a *norma euclidiana* do vetor  $u$ , ou *comprimento* de  $u$ , denotado por  $\|u\|_n$  o número real,

$$\|u\|_n := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Para  $n = 1$  no exemplo anterior, temos

$$\|u\|_1 := \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u^2} = |u|.$$

Ou seja, a função norma definida em  $\mathbb{R}$  é semelhante a distância de um ponto à origem.

Seja  $n = 2$  e consideremos o vetor  $u = (1, 1)$ .

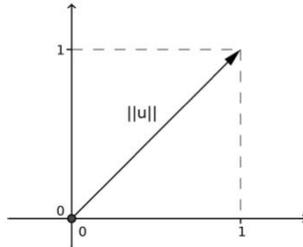


Figura 1.5: A norma do vetor  $u$ .

A norma do vetor é,

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle (1, 1), (1, 1) \rangle} = \sqrt{1 \times 1 + 1 \times 1} = \sqrt{2}.$$

Por definição, temos  $\langle u, u \rangle = \|u\|_n^2$ , dizemos que  $u$  é um *vetor unitário* quando  $\|u\|_n = 1$ . Para todo vetor  $u \neq 0$ , o vetor  $\bar{u} = \frac{u}{\|u\|}$  é unitário. A seguir apresentamos algumas propriedades da norma.

**Propriedade 3.** (*Pitágoras*) Se o vetor  $u \perp v$  então  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

*Demonstração.* Por hipótese o vetor  $u \perp v$ , então  $\langle u, v \rangle = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

□

**Propriedade 4.** (*Cauchy-Schwarz*) Para quaisquer vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , tem-se  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ , valendo a igualdade se, e somente se, os vetores  $u, v$  é múltiplo um do outro.

*Demonstração.* Se o vetor  $u = 0$  não há o que fazer. Suponhamos que o vetor  $u \neq 0$ , de acordo com Propriedade 2, podemos escrever  $v = \alpha u + w$  com  $w \perp u$  e  $\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}$ .

De acordo com a Propriedade 3:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \\ \|v\|^2 &= \|u + (\alpha u + w)\|^2 - \|u\|^2 \\ \|v\|^2 &= \alpha^2 \|u\|^2 + \|w\|^2, \end{aligned}$$

logo  $\|v\|^2 \geq \alpha^2 \|u\|^2$ , valendo a igualdade se, e somente se,  $v = \alpha u$ . Substituindo o valor de  $\alpha$ , temos  $\|v\|^2 \geq \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}$ , ou seja,  $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ , o que nos dá  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ , valendo a igualdade se, e somente se,  $v = \alpha u$ .  $\square$

Há outras duas normas não euclidianas que poderemos utilizar em  $\mathbb{R}^n$  quando for conveniente. São elas, a *norma do máximo* e *da soma*, indicado respectivamente por  $\|u\|_\infty$  e  $\|u\|_1$ .

**Definição 6.** *Seja o vetor  $u \in \mathbb{R}^n$ , a norma do máximo é dada por:*

$$\|u\|_\infty := \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}.$$

**Definição 7.** *Seja o vetor  $u \in \mathbb{R}^n$ , a norma da soma é dada por:*

$$\|u\|_1 := |u_1| + \dots + |u_n|.$$

As condições que definem uma norma são verificadas sem grandes dificuldades para estas duas e para todo vetor  $u \in \mathbb{R}^n$ , vale

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq n \cdot \|u\|_\infty.$$

Vamos omitir o índice 2 da norma euclidiana em caso que fique claro que estamos trabalhando com a mesma.

**Propriedade 5.** *Dados os vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vale a seguinte desigualdade*

$$|(\|u\| - \|v\|)| \leq \|u - v\|.$$

*Demonstração.* Seja,

$$u = (u - v) + v$$

$$\|u\| = \|(u - v) + v\|$$

$$\|u\| \leq \|u - v\| + \|v\|$$

$$\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|.$$

Trocando os papéis de  $u$  e  $v$ , obtemos  $\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\|$ . Mas  $\|v - u\| = \|u - v\|$ , logo  $\|v\| - \|u\| \leq \|u - v\|$ . Conclusão,  $|(\|u\| - \|v\|)| \leq \|u - v\|$ .  $\square$

A seguir apresentamos a definição de *distância* entre dois vetores do  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 8.** Dado um conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^n$ , uma função  $d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  será uma *distância* ou *métrica* se satisfizer as seguintes condições:

- (i)  $d(u, v) \geq 0$ , com  $d(u, v) = 0$  se, e somente se,  $u = v$ ;
- (ii)  $d(u, v) = d(v, u)$ ;
- (iii)  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$  (*desigualdade triangular*).

**Definição 9.** Seja  $d$  uma distância definida em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que o par  $(\mathbb{R}^n, d)$  é um *Espaço Métrico*.

Vejam alguns exemplos de Espaço Métrico.

**Exemplo 7.** Seja  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . O par  $(X, d)$ , onde  $d(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{se } u = v \\ 1, & \text{se } u \neq v \end{cases}$  é denominado de *espaço métrico discreto*.

**Exemplo 8.** Sejam os vetores  $u, v \in \mathbb{R}$  e a distância definida por:

$$d(u, v) = |u - v|.$$

o par  $(\mathbb{R}, d)$  é um *espaço métrico*.

**Exemplo 9.** Consideremos o conjunto  $\mathbb{R}^2$  e a métrica definida por:

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + 4(u_2 - v_2)^2}.$$

o par  $(\mathbb{R}^2, d)$  é um *espaço métrico*.

**Exemplo 10.** Sejam os vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$  e a métrica dada por:

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2},$$

o par  $(\mathbb{R}^n, d)$  é chamado de *Espaço Métrico Euclidiano*.

**Exemplo 11.** Sejam os vetores  $u, v \in \mathbb{R}^2$  e a distância entre os pontos  $u$  e  $v$  é dada por:

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Então o par  $(\mathbb{R}^2, d)$  é um *espaço métrico*.

### 1.3 Conjuntos e Bolas em $\mathbb{R}^n$

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos em  $\mathbb{R}^n$ . A *união* dos conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cup B$ , formado por todos os elementos de  $A$  e  $B$ . Assim, afirmar que  $u \in A \cup B$  significa dizer que pelo menos umas das afirmações são verdadeira:  $u \in A$  ou  $u \in B$ . Podemos escrever:

$$A \cup B = \{u \in \mathbb{R}^n; u \in A \text{ ou } u \in B\}.$$

A *interseção* dos conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cap B$ , formado pelos elementos comuns a  $A$  e  $B$ . Assim, afirmar que  $u \in A \cap B$  significa dizer que se tem, ao mesmo tempo,  $u \in A$  e  $u \in B$ . Escrevemos

$$A \cap B = \{u \in \mathbb{R}^n; u \in A \text{ e } u \in B\}.$$

Caso não exista elemento algum comum a  $A$  e  $B$ , temos  $A \cap B = \emptyset$ . Dizemos que os conjuntos  $A$  e  $B$  são disjuntos.

A *diferença* entre os conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A - B$ , formado pelos elementos de  $A$  que não pertencem a  $B$ . Em símbolos  $A - B = \{u \in \mathbb{R}^n; u \in A \text{ e } u \notin B\}$ .

Quando se tem  $B \subset A$ , a diferença  $A - B$  chama-se o *complementar* de  $B$  em relação a  $A$  e escreve-se  $A - B = B^c$ .

A região interior a uma esfera, vamos chamar de *bola*. Ela pode ser chamado tanto de *bola fechada* (incluindo os pontos de fronteira) ou *bola aberta* (excluindo-os). Por exemplo, uma bola no plano euclidiano é o mesmo que um círculo, ou seja, é a região limitada por uma circunferência.

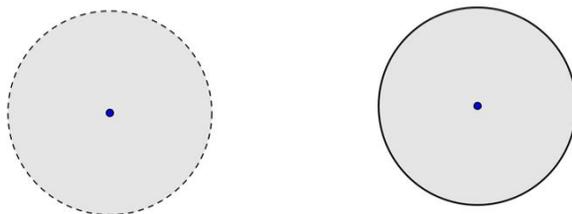


Figura 1.6: A esquerda *bola aberta* e a direita *bola fechada*.

Estes conceitos são definidos não apenas no plano e no espaço euclidiano tridimensional mas também em dimensões maiores, e para espaços métricos em geral.

No espaço euclidiano tridimensional geralmente a esfera consiste somente dos pontos de fronteira. Em outros contextos, o termo esfera se refere à bola como um todo. Daqui em diante vamos considerar o espaço métrico euclidiano.

**Definição 10.** *Dado o ponto  $u \in \mathbb{R}^n$  e o número real  $r > 0$ , a bola aberta de centro  $u$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(u; r)$  dos pontos  $v \in \mathbb{R}^n$  cuja distância ao ponto  $u$  é menor que  $r$ .*

Em símbolos:

$$B(u; r) = \{v \in \mathbb{R}^n; d(u, v) < r\}.$$

Com a definição de bola aberta podemos definir um conjunto aberto.

**Definição 11.** *Dizemos que o conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto se para todo ponto  $u \in A$ , existir  $r > 0$  tal que  $B(u, r) \subset A$ .*

Segue desta definição que o espaço métrico  $(\mathbb{R}^n, d)$  é um conjunto aberto. Um outro exemplo de conjunto aberto é o conjunto vazio ( $\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c$ ). A seguir definimos o conjunto fechado.

**Definição 12.** *Dizemos que o conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  é fechado se, e somente se, seu complementar  $A = \mathbb{R}^n - F$  é aberto.*

O conjunto vazio,  $\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c$ , é um conjunto aberto e fechado, pelas Definições 11 e 12.

**Observação:** Os conceitos de aberto e fechado dependem do conjunto universo  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 13.** *Dado o ponto  $u \in \mathbb{R}^n$  e o número real  $r > 0$ , a bola fechada de centro  $u$  e raio  $r$  é o conjunto  $B[u; r]$  dos pontos  $v \in \mathbb{R}^n$  cuja distância ao ponto  $u$  é menor ou igual a  $r$ .*

Em símbolos:

$$B[u; r] = \{v \in \mathbb{R}^n; d(u, v) \leq r\}.$$

A forma geométrica da bola em  $\mathbb{R}^n$  depende da norma considerada. Vejamos alguns exemplos em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 12.** A forma geométrica da “bola unitária” de raio 1, considerando a norma euclidiana, é o disco de centro na origem e raio igual a 1.

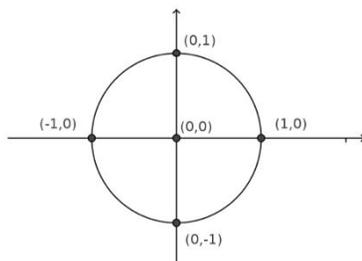


Figura 1.7: Norma Euclidiana.

**Exemplo 13.** A forma geométrica da “bola unitária” de raio 1, considerando a norma do máximo, é a borda do “quadrado” de centro na origem e lados de comprimento 2.

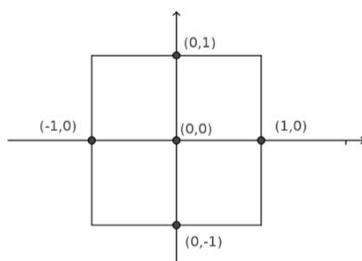


Figura 1.8: Norma do Máximo.

**Exemplo 14.** A forma geométrica da “bola unitária” de raio 1, considerando a norma da soma, é o “quadrado” cujos vértices são os pontos  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(-1,0)$  e  $(0,-1)$ .

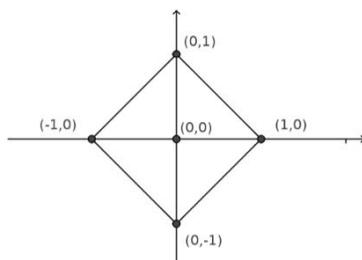


Figura 1.9: Norma da Soma.

**Observação.** Indiquemos com as notações  $B_2, B_\infty$  e  $B_1$  respectivamente as bolas de centro  $u$  e raio  $r$  em  $\mathbb{R}^n$ , relativamente às normas euclidiana, do máximo e da soma. Seja ainda  $B'_\infty$  a bola de centro  $u$  e raio  $r/n$  na norma do máximo. As desigualdades  $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq n\|u\|_\infty$  implicam que  $B'_\infty \subset B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$ . Vejamos as três relações no gráfico seguinte.

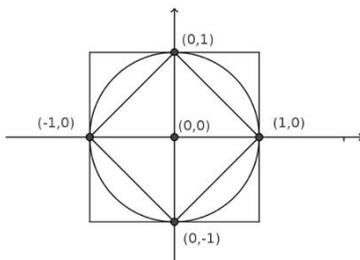


Figura 1.10: Relação entre as normas: Euclidiana, Máximo e Soma.

**Definição 14.** Dizemos que o conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é limitado quando está contido em alguma bola  $B[u; r]$ .

Vejamos um exemplo de conjunto limitado.

**Exemplo 15.** O conjunto  $X = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 4\}$ , é limitado.

**Propriedade 6.** Toda bola,  $B[u; r]$ , de centro  $u$  e raio  $r$  é limitada.

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $B[u; r] \subset B[0; k]$ . Tomemos  $k = r + |u|$ , assim,  $B[u; r] \subset B[0; r + |u|]$ . Primeiro note que se  $v \in B[u; r]$  e que  $|v - u| \leq r$ , então,

$$|v - u + u| \leq |v - u| + |u| \leq r + |u|,$$

portanto, para todo  $v \in B[u; r] \Rightarrow v \in B[0; r + |u|]$ . □

**Definição 15.** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se limitada quando sua imagem  $f(X) \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto limitado, isto é, quando existe  $r > 0$  tal que  $|f(u)| \leq r$  para todo  $u \in X$ .

Sejam os pontos  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , tais que  $u \neq v$ . A reta que une esses dois pontos é o conjunto  $uv = \{(1 - \alpha)u + v\alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$ . E o segmento de reta de extremos  $u$  e  $v$  é o conjunto  $[u, v] = \{(1 - \alpha)u + v\alpha; 0 \leq \alpha \leq 1\}$ .

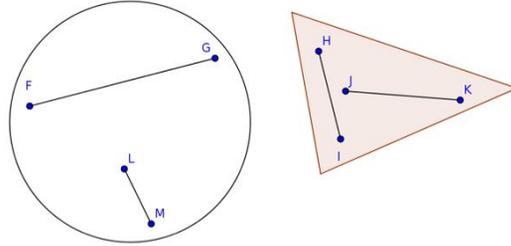


Figura 1.11: Conjuntos Convexos.

**Definição 16.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  chama-se convexo quando o segmento de reta que une dois quaisquer de seus pontos está inteiramente contido em  $X$ .

Dizer que o conjunto  $X$  é convexo equivale a afirmar que

$$u, v \in X, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - \alpha)u + v\alpha \in X.$$

**Propriedade 7.** Toda bola (aberta ou fechada) é um conjunto convexo.

*Demonstração.* Para fixar as ideias, consideremos a bola fechada  $B[x; r]$ . Dadas  $u, v \in B[x; r]$ , temos  $|u - x| \leq r$  e  $|v - x| \leq r$ . Então, para qualquer  $\alpha \in [0, 1]$  vale  $x = (1 - \alpha)x + x\alpha$ . Logo,

$$\begin{aligned} |(1 - \alpha)u + v\alpha - x| &= |(1 - \alpha)u + v\alpha - (1 - \alpha)x - x\alpha| \\ &= |(1 - \alpha)(u - x) + (v - x)\alpha| \\ &\leq (1 - \alpha)|u - x| + |v - x|\alpha \leq (1 - \alpha)r + r\alpha = r. \end{aligned}$$

□

A seguir apresentamos um conjunto não convexo.

**Exemplo 16.** Seja o conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x^2\}$ . O conjunto  $X \subset \mathbb{R}^2$  é não convexo, pois os pontos  $A = (-1, 1)$  e  $B = (1, 1)$  pertencem a  $X$  mas o ponto  $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (0, 1) = F$  não pertence a  $X$ . Veja a figura.

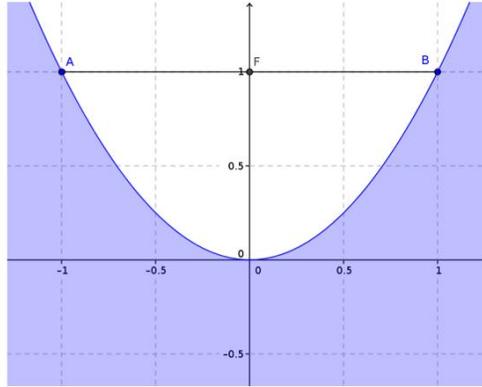


Figura 1.12: Conjunto não Convexo.

**Definição 17.** *Seja o ponto  $u \in X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que o ponto  $u$  é interior ao conjunto  $X$  se, para algum  $r > 0$ , a bola  $B(u; r) \subset X$ .*

Isto significa que todos os pontos suficientemente próximos de  $u$  também pertencem a  $X$ . O conjunto  $\text{int}(X)$  dos pontos interiores a  $X$  chama-se o *interior* do conjunto  $X$ . Evidentemente,  $\text{int}(X) \subset X$ . Quando  $u \in \text{int}(X)$ , diz-se que  $X$  é uma vizinhança de  $u$ .

**Exemplo 17.** *Seja  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ . Se  $p = (a, b)$  e  $r = b > 0$ , então  $p \in \text{int}(X)$ .*

*Afirmamos que  $B(p; b) \subset X$ . Ou seja,*

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in B(p; r) &\Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < b \\
 &\Rightarrow (y - b)^2 < b^2 \\
 &\Rightarrow y^2 - 2by + b^2 < b^2 \\
 &\Rightarrow r^2 < 2by \\
 &\Rightarrow y > 0,
 \end{aligned}$$

*portanto  $(x, y) \in X$ .*

Geometricamente temos,

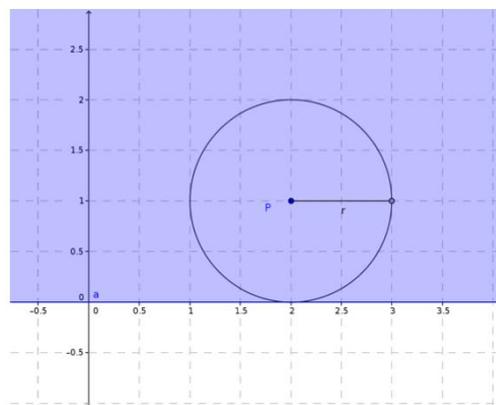


Figura 1.13: O ponto  $P \in \text{int}(X)$ .

**Exemplo 18.** Seja o conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$  e consideremos os pontos da forma  $q = (a, 0)$ , esses pontos pertencem a  $X$  porém não são interiores, pois, nenhuma bola  $B(q; r)$  estar contida em  $X$ . O ponto  $p = \left(a, -\frac{r}{2}\right) \in B(q; r)$  mas não a  $X$ .

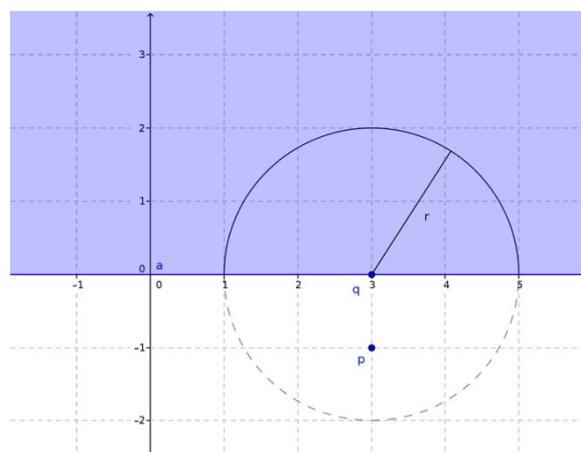


Figura 1.14: O ponto  $p = \left(a, -\frac{r}{2}\right) \in B(q; r)$  mas não a  $X$ .

Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  também é chamado de aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando  $A = \text{int}(A)$ .

**Propriedade 8.** *Toda bola aberta  $B(a; r)$  é um conjunto aberto.*

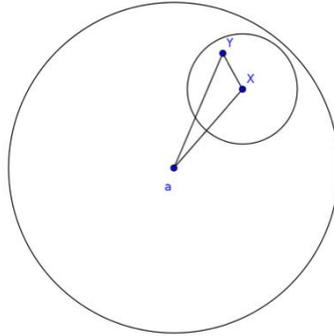


Figura 1.15: Bola aberta  $B = B(a; r)$ .

*Demonstração.* Seja o ponto  $x \in B(a, r)$ . Temos, por definição de bola aberta que  $|x - a| < r$ . Tomemos  $s = r - |x - a| > 0$ . Afirmamos que,  $B(x; s) \subset B$ .

Se  $y \in B(x; s)$ , temos:

$$\begin{aligned} |y - x| &< s \\ |y - x| &< r - |x - a|, \end{aligned}$$

e ainda, se  $y \in B(x; s)$ , temos:

$$\begin{aligned} |y - a| &\leq |y - x| + |x - a| \\ &< r - |x - a| + |x - a| = r. \end{aligned}$$

Daí concluímos que  $y \in B(x; r)$ . □

**Definição 18.** *A fronteira de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto  $fr(X)$  formado pelos pontos de  $X$  que não são interiores a  $X$ , juntamente com os pontos de  $\mathbb{R}^n - X$  que não são interiores a  $\mathbb{R}^n - X$ .*

Mais precisamente, dado um conjunto  $X$  contido em  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $x$  é um ponto de fronteira de  $X$  se qualquer bola aberta centrada em  $x$  contiver pontos de  $X$  e pontos do seu complementar  $\mathbb{R}^n - X$ .

**Exemplo 19.** Seja  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ , observe que todo ponto pertencente à  $\mathbb{R}^2 - X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$  é um ponto interior (ou seja, que  $\mathbb{R}^2 - X$  é um conjunto aberto). Logo, nenhum ponto de  $\mathbb{R}^2 - X$  pode estar na fronteira de  $X$ . Segue-se então que  $fr(X) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ , ou seja, é eixo das abscissas. Veja a figura do Exemplo 18.

**Teorema 1.** (i) Se  $A_1, A_2$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$  então  $A_1 \cap A_2$  é um conjunto aberto.

(ii) Se  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família arbitrária de conjuntos abertos  $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$  então a união  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  é um conjunto aberto.

(iii) Se  $A_1, A_2, \dots, A_k$  são subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  então  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$  é aberto. Ou seja, a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

*Demonstração.* (i) Seja  $x \in A_1 \cap A_2$  então  $x \in A_1$  e  $x \in A_2$ . Como  $A_1$  e  $A_2$  são abertos, existem  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$  tais que  $B(x; \epsilon_1) \subset A_1$  e  $B(x; \epsilon_2) \subset A_2$ . Seja  $\epsilon$  o menor dos números  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Então  $B(x; \epsilon) \subset A_1$  e  $B(x; \epsilon) \subset A_2$  logo  $B(x; \epsilon) \subset A_1 \cap A_2$ . Assim todo ponto  $x \in A_1 \cap A_2$  é um ponto interior, ou seja, o conjunto  $A_1 \cap A_2$  é aberto.

(ii) Se  $x \in A$  então existe  $\lambda \in L$  tal que  $x \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  é aberto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset A_\lambda \subset A$ , logo todo ponto  $x \in A$  é interior, isto é,  $A$  é aberto.

(iii) Aplicando  $k - 1$  vezes os item (i) obtemos  $A_1 \cap A_2$  aberto,  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$  aberto, ...,  $A_1 \cap A_2, \dots, \cap A_k = (A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \cap A_k$  aberto.  $\square$

**Observação:** A interseção de infinitos abertos pode não ser aberta, como mostra o exemplo  $\bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{k}\right) = \{a\}$ ,

$$B_k = \left\{ (x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 < \frac{1}{k} \right\}.$$

**Definição 19.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que um subconjunto  $A \subset X$  é aberto em  $X$  quando cada ponto  $a \in A$  é centro de uma bola aberta  $B(a; r)$ , tal que  $B(a; r) \cap X \subset A$ .

Isto significa que os pontos de  $X$  que estão suficientemente próximos de cada  $a \in A$  pertencem a  $A$ .

A união  $U$  de todas essas bolas é um aberto tal que  $A = U \cap X$ . A recíproca é óbvia, de modo que um conjunto  $A \subset X$  é aberto em  $X$  se, e somente se,  $A = U \cap X$  onde  $U$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 20.** O intervalo  $(0, 1]$  é um subconjunto aberto de  $[0, 1]$ , pois  $(0, 1] = (0, 2) \cap [0, 1]$ .

## 1.4 Sequências

Trataremos agora das sequências em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 20.** Uma sequência em  $\mathbb{R}^n$  é uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que associa a cada número natural  $k$  um ponto  $u^k \in \mathbb{R}^n$ .

As notações para uma sequência são  $(u^1, \dots, u^k, \dots)$ ,  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ou simplesmente  $(u^k)$ . Seja  $(u^k) \in \mathbb{R}^n$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ , indicamos com  $u_i^k$  a  $i$ -ésima coordenada de  $u^k$ ,

$$\begin{aligned} u^1 &= (u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1) \\ u^2 &= (u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2) \\ &\vdots \\ u^k &= (u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k) \\ &\dots \end{aligned}$$

Introduziremos a seguir a definição de sequência limitada.

**Definição 21.** Dizemos que a sequência  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada quando existe uma bola em  $\mathbb{R}^n$  que contém todos os termos  $u^k$ . Isto equivale a dizer que existe  $c > 0$  tal que  $|u^k| \leq c$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Em virtude das desigualdades que relacionam as três normas que consideramos anteriormente em  $\mathbb{R}^n$ , ser limitada é uma propriedade da sequência que independe de qual dessas três normas estamos tratando.

**Teorema 2.** A sequência  $(u^k)$  é limitada, se e somente se, para todo  $1 \leq i \leq n$ , a sequência  $(u_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  das  $i$ -ésimas coordenadas de  $u^k$  é também limitada, ou seja,  $|u_i^k| \leq |u^k|$ .

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Adotaremos em  $\mathbb{R}^n$  a norma do máximo. Então, se  $|u_1^k| \leq c_1, |u_2^k| \leq c_2, \dots, |u_n^k| \leq c_n$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , chamando de  $c$  o maior dos números  $c_1, c_2, \dots, c_n$  teremos  $|u^k| = \max\{|u_1^k|, \dots, |u_n^k|\} \leq c$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, se cada  $(u_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) é limitada, a sequência  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada.  $\square$

**Definição 22.** Uma subsequência de  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  é a restrição desta sequência a um subconjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{k_1 < \dots < k_m < \dots\} \subset \mathbb{N}$ .

As notações  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}'}$ ,  $(u^{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  ou  $(u^{k_1}, \dots, u^{k_m}, \dots)$  são usadas para indicar uma subsequência.

**Definição 23.** Dizemos que o ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  é o limite da sequência  $(u^k)$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, é possível obter  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0 \Rightarrow |u^k - a| < \epsilon$ . Ou seja,

$$k > k_0 \Rightarrow u^k \in B(a; \epsilon).$$

Escrevemos então  $\lim_{k \rightarrow \infty} (u^k) = a$ ,  $\lim_{k \in \mathbb{N}} (u^k) = a$  ou  $\lim u^k = a$ , simplesmente. Se  $\lim u^k = a$  significa que qualquer bola de centro  $a$  e raio  $\epsilon$  contém todos os  $u^k$  com a possível exceção de um número finito de valores de  $k$  (a saber, os índices  $k \leq k_0$ , onde  $k_0$  é escolhido em função do raio  $\epsilon$  da bola dada).

**Definição 24.** Dizemos que a sequência  $(u^k) \in \mathbb{R}^n$  é convergente quando existe o  $\lim u^k = a$ . Caso contrário, dizemos que a sequência é divergente.

**Exemplo 21.** A sequência em  $\mathbb{R}^3$ , dada por  $u^k = \left( \frac{k-1}{k}, 0, \frac{1}{3^k} \right)$  converge para o ponto  $e_1 = (1, 0, 0)$ . Ou seja,

$$\|u^k - e_1\| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3^{2k}}}.$$

**Teorema 3.** Toda sequência convergente é limitada.

*Demonstração.* Seja  $\lim u^k = a$ . Então, tomando  $\epsilon = 1$ , vemos que existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0 \Rightarrow u^k \in B(a-1, a+1)$ . Consideremos o conjunto finito  $F = \{u^1, u^2, \dots, u^{k_0}, a-1, a+1\}$ . Seja  $c$  o menor e  $d$  o maior elemento de  $F$ . Então todos os termos  $u^k$  da sequência estão contidos no intervalo  $[c, d]$ ; logo a sequência é limitada.  $\square$

A recíproca do teorema anterior é falsa, pois a sequência  $(0, 1, 0, 1, \dots)$  é limitada mais não é convergente.

**Teorema 4.** Se o  $\lim u^k = a$  então toda subsequência de  $(u^k)$  converge para  $a$ .

*Demonstração.* Seja  $(u^{k_1}, u^{k_2}, \dots, u^{k_i}, \dots)$  uma subsequência de  $(u^k)$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0 \Rightarrow |u^k - a| < \epsilon$ . Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um  $k_{i_0} > k_0$ . Então  $k_i > k_{i_0} \Rightarrow k_i > k_0 \Rightarrow |u^{k_i} - a| < \epsilon$ . Logo  $\lim u^{k_i} = a$ .  $\square$

**Observação:** A definição de limite faz uso de uma norma, porém as desigualdades  $|u|_\infty \leq |u|_2 \leq |u|_1 \leq n|u|_\infty$  mostram que a existência e o valor do limite não depende de qual das normas (máximo, infinto ou soma) se está considerando. Este fato será empregado na demonstração do teorema a seguir, onde no final usamos a norma do máximo.

**Teorema 5.** A sequência  $(u^k)$  em  $\mathbb{R}^n$  converge para o ponto  $a = (a_1, \dots, a_n)$  se, e somente se, para cada  $1 \leq i \leq n$ , o  $\lim u_i^k = a_i$ , isto é, cada coordenada de  $u^k$  converge para a coordenada correspondente de  $a$ .

*Demonstração.* Para cada  $i = 1, \dots, n$ , temos  $|u_i^k - a_i| \leq |u^k - a|$ , portanto  $\lim u^k = a \Rightarrow \lim u_i^k = a_i$ . Reciprocamente, se vale esta última igualdade então, dado  $\epsilon > 0$ , existem  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  tais que  $k > k_i \Rightarrow |u_i^k - a_i| < \epsilon$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Tomando  $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$  e adotando em  $\mathbb{R}^n$  a norma do máximo, vemos que  $k > k_0 \Rightarrow |u^k - a| < \epsilon$ . Logo  $\lim u^k = a$ .  $\square$

**Corolário 1.** Se o  $\lim u^k = a$ ,  $\lim v^k = b$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\lim \alpha^k = \alpha$  em  $\mathbb{R}$  então:

- (i)  $\lim(u^k + v^k) = a + b$ ,
- (ii)  $\lim \alpha^k u^k = \alpha a$ .

Tomando cada sequência de coordenadas, o Corolário 1 resulta da propriedade correspondente em  $\mathbb{R}$ .

O exemplo seguinte será útil para compreensão da demonstração do próximo teorema.

**Exemplo 22.** Para cada  $k \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ , designamos por  $r^k$  o resto da divisão inteira de  $k$  por 3 ( $r^1 = 1, r^2 = 2, r^3 = 0, \dots$ ) e seja sequência limitada em  $\mathbb{R}^2$  dada por:

$$u^k = \left( r^k, (-1)^k + \frac{1}{k} \right).$$

Para obtermos uma subsequência convergente de  $u^k$ , podemos determinar uma subsequência convergente de  $r^k$ , por exemplo,  $r^{3k}$ , onde a primeira coordenada da sequência terá todos os termos nulos, ou seja:

$$u^{3k} = \left( 0, (-1)^{3k} + \frac{1}{3k} \right).$$

A segunda coordenada da subsequência de  $u^{3k}$  não é convergente, mas podemos dela uma subsequência convergente, por exemplo considerando apenas os valores de  $k$  para os quais o expoente de  $(-1)^{3k}$  seja par (e portanto múltiplo de 6, visto que já era de 3). Obtém-se assim a subsequência  $u^{6k}$  de  $(u_k)$ :

$$u^{6k} = \left( 0, 1 + \frac{1}{6k} \right),$$

que é convergente.

**Teorema 6.** (*Bolzano-Weierstrass em  $\mathbb{R}^n$* ). *Toda sequência limitada em  $\mathbb{R}^n$  possui uma subsequência convergente.*

*Demonstração.* Seja  $(u^k)$  uma sequência limitada em  $\mathbb{R}^n$ . As primeiras coordenadas dos seus termos formam uma subsequência limitada  $(u^{k_1})$  de números reais, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass na reta, ver [4], possui uma subsequência convergente. Isto é, existem um subconjunto infinito  $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$  e um número real  $a_1$  tais que  $\lim_{k \in \mathbb{N}_1} u^{k_1} = a_1$ . Por sua vez, a sequência limitada  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}_1}$  em  $\mathbb{R}^n$  possui uma subsequência convergente: existem um subconjunto infinito  $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$  e um número real  $a_2$  tais que  $\lim_{k \in \mathbb{N}_2} u^{k_2} = a_2$ . E assim por diante, até obtermos  $n$  conjuntos infinitos  $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \dots \supset \mathbb{N}_n$  e números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tais que  $\lim_{k \in \mathbb{N}_i} u^{k_i} = a_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então pomos  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e, pelo Teorema 1, temos  $\lim_{k \in \mathbb{N}} x^k = a$ , o que prova o teorema.  $\square$

Uma Sequência de Cauchy é uma sucessão tal que a distância entre os termos vai se aproximando de zero. O seu nome deve-se ao matemático francês *Augustin Louis Cauchy* (1789 – 1857). Intuitivamente é uma sequência onde seus termos vão ficando cada vez mais próximos.

**Definição 25.** *Uma sequência de pontos  $u^k \in \mathbb{R}^n$  chama-se uma Sequência de Cauchy quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k, r > k_0 \Rightarrow |u^k - u^r| < \epsilon$ .*

A seguir apresentamos alguns resultados referente as Sequência de Cauchy.

**Teorema 7.** *Toda Sequência de Cauchy  $(u^k)$  é limitada.*

*Demonstração.* Com efeito, tomando  $\epsilon = 1$  na definição anterior, vemos que existe um índice  $k_0$  tal que, salvo possivelmente os pontos  $u^1, \dots, u^{k_0}$  todos os demais termos  $u^k$  pertencem à bola  $B(u^{k_0+1}; 1)$ . Portanto o conjunto dos termos da sequência é limitado.  $\square$

A condição para que a sequência  $(u^k)$  seja de Cauchy pode ser reformulada dizendo-se que  $\lim_{k,r \rightarrow \infty} |u^k - u^r| = 0$ , isto é, que  $\lim_{k,r \in \mathbb{N}} |u^k - u^r| = 0$ . Daí resultam que se  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$  é um subconjunto infinito, ou seja, se  $(u^r)_{r \in \mathbb{N}'}$  é uma subsequência de  $(u^k)$  então  $\lim_{k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}'} |u^k - u^r| = 0$ .

**Teorema 8.** *(Critério de Cauchy). Uma sequência em  $\mathbb{R}^n$  converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja  $(u^k)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^n$ . Sendo limitada, ela possui uma subsequência convergente  $(u^r)_{r \in \mathbb{N}'}$ . Seja  $\lim_{r \in \mathbb{N}'} u^r = a$ . Temos  $\lim_{r \in \mathbb{N}'} |u^r - a| = 0$  e  $\lim_{k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}'} |u^k - u^r| = 0$ , como observamos acima. Então, de  $|u^k - a| \leq |u^k - u^r| + |u^r - a|$  resulta que  $\lim_{k \in \mathbb{N}} |u^k - a| = 0$ , ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} u^k = a$ . Reciprocamente, se  $(u^k)$  é convergente, com  $\lim_{k \rightarrow \infty} u^k = a$ , então, como  $|u^k - u^r| \leq |u^k - a| + |u^r - a|$ , concluímos que  $\lim_{k,r \rightarrow \infty} |u^k - u^r| = 0$ , ou seja,  $(u^k)$  é de Cauchy.  $\square$

A seguir, apresentamos as definições de ponto aderente e fecho de um conjunto.

**Definição 26.** *Dizemos que o ponto  $a$  é aderente ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  quando existe uma sequência de pontos  $u^k \in X$  tal que  $\lim u^k = a$ .*

**Definição 27.** *Chamamos de fecho do conjunto  $X \in \mathbb{R}^n$  o conjunto  $\overline{X}$  formado por todos os pontos aderentes a  $X$ .*

O teorema seguinte resume as principais propriedades do fecho de um conjunto.

**Teorema 9.** (i) *O ponto  $a$  é aderente ao conjunto  $X \in \mathbb{R}^n$  se, e somente se, toda bola de centro  $a$  contém algum ponto de  $X$ .*

(ii) *Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  é fechado se, e somente se, seu complementar  $\mathbb{R}^n - F$  é aberto. Equivalentemente:  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto se, e somente se,  $\mathbb{R}^n - A$  é fechado.*

(iii) *O fecho de qualquer conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é fechado. Ou seja, para todo  $X \subset \mathbb{R}^n$  temos  $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ .*

*Demonstração.* **(i)** Se  $a$  é aderente a  $X$  então  $\lim u^k = a$ , com  $u^k \in X$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto qualquer bola  $B(a; r)$  contém pontos de  $X$ , a saber, todos os  $u^k$  com  $k$  suficientemente grande. Reciprocamente, se toda bola de centro  $a$  contém pontos de  $X$ , podemos escolher, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , um ponto  $u^k \in X$  que esteja na bola  $B(a; 1/k)$ , isto é,  $|u^k - a| < 1/k$ . Então  $\lim u^k = a$ , logo  $a$  é aderente a  $X$ .

**(ii)** As seguintes afirmações são equivalentes: (1)  $F$  é fechado. (2) Se  $u \in \mathbb{R}^n - F$  então  $u$  não é aderente a  $F$ . (3) Se  $u \in \mathbb{R}^n - F$  então existe  $r > 0$  tal que  $B(u; r) \subset \mathbb{R}^n - F$  (em virtude da parte (a) acima). (4)  $\mathbb{R}^n - F$  é aberto. Assim,  $F$  fechado  $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n - F$  aberto. Escrevendo  $A = \mathbb{R}^n - F$ , donde  $F = \mathbb{R}^n - A$ , esta última conclusão lê-se assim:  $A$  é aberto se, e somente se,  $\mathbb{R}^n - A$  é fechado.

**(iii)** Se  $u \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$  (isto é,  $u$  não é aderente a  $X$ ) então, por **(i)**, existe uma bola  $B = B(u; r)$  que não contém pontos de  $X$ , ou seja,  $X \subset \mathbb{R}^n - B$ . Logo  $\overline{X} \subset \overline{\mathbb{R}^n - B}$ . Mas, pela parte **(ii)** acima,  $\mathbb{R}^n - B$  é fechado; portanto  $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n - B$  ou, equivalentemente,  $B \subset \mathbb{R}^n - \overline{X}$ . Assim, todo ponto  $u \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$  é um ponto interior e  $\mathbb{R}^n - \overline{X}$  é aberto. Segue-se que  $\overline{X}$  é fechado.  $\square$

Apresentamos a noção de distância entre ponto e conjuntos para provarmos o Teorema 10.

**Definição 28.** Chamamos de distância do ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  o número

$$d(a; X) = \inf\{|u - a|; u \in X\}.$$

Pela definição de ínfimo, ver [4], para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe um ponto  $u^k \in X$  tal que

$$d(a; X) \leq |u^k - a| < d(a, X) + \frac{1}{k},$$

portanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} |u^k - a| = d(a; X)$ . A sequência  $(u^k)$  é certamente limitada, portanto possui uma subsequência convergente. Descartando, por serem desnecessários, os termos  $u^k$  que não estejam nessa subsequência, vemos que existe um ponto  $u^0 = \lim u^k$  tal que  $d(u, X) = |u^0 - a|$ . Temos  $u^0 \in \overline{X}$ . Se o conjunto  $X$  for fechado então  $u^0 \in X$ . Podemos então enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 10.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto fechado. Dado qualquer  $a \in \mathbb{R}^n$  existe pelo menos um  $u^0 \in F$  tal que  $|u^0 - a| \leq |u - a|$  para todo  $u \in F$ .*

Ou seja, se  $F \subset \mathbb{R}^n$  é fechado então, para  $a \in \mathbb{R}^n$  qualquer, a função  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(u) = |u - a|$  assume seu valor mínimo em algum ponto  $u^0 \in F$ . Então tem-se  $d(a, F) = |u^0 - a|$ .

**Definição 29.** *Seja o conjunto  $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $X$  é denso em  $Y$  se  $Y \subset \overline{X}$ .*

Vejam os exemplos de conjunto denso.

**Exemplo 23.** *A bola  $B(a; r)$  é denso em  $B[a; r]$ .*

**Exemplo 24.** *O conjunto  $\mathbb{Q}^n$  é denso em  $\mathbb{R}^n$ .*

Apresentamos a seguir a definição de ponto de acumulação.

**Definição 30.** *Dizemos que  $a \in \mathbb{R}^n$  é ponto de acumulação do conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  quando toda bola de centro  $a$  contém algum ponto de  $X$  diferente de  $a$ . Ou seja, quando  $a \in \overline{X - \{a\}}$ .*

**Exemplo 25.** *Todos os pontos de uma bola são pontos de acumulação.*

Um ponto de acumulação de  $X$  pode pertencer a  $X$  ou não. Se o ponto  $a \in X$  não é ponto de acumulação de  $X$ , dizemos que  $a$  é um *ponto isolado* de  $X$ . Isto significa que existe  $r > 0$  tal que  $B(a; r) \cap X = \{a\}$ .

**Definição 31.** *Dizemos que  $X$ , é um conjunto discreto se todos os seus pontos forem isolados.*

Vejam alguns exemplos de conjunto discreto.

**Exemplo 26.** *O conjunto dos números naturais é conjunto discreto.*

**Exemplo 27.** *O conjunto  $\mathbb{Z}^n$  com coordenadas inteiras é um conjunto discreto.*

**Teorema 11.** *Sejam  $a$  um ponto e  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  *$a$  é um ponto de acumulação de  $X$ .*
- (ii)  *$a$  é limite de uma sequência de pontos  $u^k \in X - \{a\}$ .*
- (iii) *Toda bola de centro  $a$  contém uma infinidade de pontos de  $X$ .*

*Demonstração.* Supondo (i), para todo  $k \in \mathbb{N}$  podemos achar um ponto  $u^k \in X$ ,  $u^k \neq a$ , na vizinhança  $B(a - 1/k, a + 1/k)$ . Logo  $\lim u^k = a$  o que prova (ii).

Por outro lado, supondo (ii), então, para qualquer  $k_0 \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $\{u^k; k > k_0\}$  é infinito porque do contrário existiria um termo  $u^{k_1}$  que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma sequência constante com limite  $u^{k_1} \neq a$ . Pela definição de limite, vê-se portanto que (ii) implica (iii).

Finalmente, a implicação (iii) em (i) é direto da definição de ponto de acumulação. □

**Teorema 12.** *Todo subconjunto infinito limitado  $X \subset \mathbb{R}^n$  admite pelo menos um ponto de acumulação.*

*Demonstração.* Seja  $X \subset \mathbb{R}$  infinito e limitado.  $X$  possui um subconjunto enumerável  $\{u^1, u^2, \dots, u^n, \dots\}$ . Fixando esta enumeração, temos uma sequência  $(u^n)$  de termos dois a dois distintos, pertencentes a  $X$ , portanto uma sequência limitada, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência convergente. Desprezando os termos que estão fora dessa subsequência e mudando a notação, podemos admitir que  $(u^n)$  converge. Seja  $a = \lim u^n$ . Como os termos  $u^n$  são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a  $a$ . Descartando-o, caso exista, teremos  $a$  como limite de uma sequência de pontos  $u^n \in X - \{a\}$ , logo  $a \in X'$ .  $\square$

**Teorema 13.** (i) *Se  $F_1$  e  $F_2$  são subconjuntos fechados de  $\mathbb{R}^n$  então  $F_1 \cup F_2$  é um conjunto fechado.*

(ii) *Se  $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família arbitrária de conjuntos fechados então a interseção  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  é um conjunto fechado.*

*Demonstração.* (i) Os conjuntos  $A_1 = \mathbb{R} - F_1$  e  $A_2 = \mathbb{R} - F_2$  são abertos, pela Definição 12. Logo, pelo Teorema 1,  $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2)$  é aberto. Novamente pelo Teorema 12,  $F_1 \cup F_2$  é um conjunto fechado.

(ii) Para cada  $\lambda \in L$ ,  $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$  é aberto. Segue-se que  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  é aberto.

Mas  $A = \mathbb{R} - F$ . Logo  $F$  é fechado.  $\square$

**Observação:** (i) implica que a união  $F_1 \cup \dots \cup F_k$  de um número finito de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado. Entretanto isto não é válido para uniões infinitas, pois existem conjuntos em  $\mathbb{R}^n$  que não são fechados então a união arbitrária de conjuntos fechados não é necessariamente fechada.

## 1.5 Conjunto Compactos

Nesta seção vamos estudar os conjuntos compactos, que formam uma subclasse dos conjuntos fechados que são limitados.

O início do estudo de espaços compactos se deu no final do século XIX, pelas mãos de Émile Borel e Henri Lebesgue e as observações acerca de intervalos fechados e limitados da reta real. Com o advento de novas classes de espaços topológicos (espaços

de funções, espaços definidos em termos de vizinhanças e espaços métricos) a noção de compacidade modificou-se para acompanhar as generalizações; passando por sequencialmente compacto, enumeravelmente compacto (Riesz - 1908, Vietoris - 1912, Janiszewski - 1913, Kuratowski, Sierpinski e Saks - 1921) e finalmente chegando na definição empregada hoje (Alexandrof e Urysohn - 1923).

**Definição 32.** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  chama-se compacto quando é limitado e fechado.*

A seguir apresentamos alguns exemplos de conjunto compacto.

**Exemplo 28.** *Toda bola fechada  $B[a; r]$  é compacta e nenhuma bola aberta é.*

**Exemplo 29.** *O conjunto  $\mathbb{Z}^n$  é fechado mas não é limitado, logo não é compacto.*

**Exemplo 30.** *Toda esfera  $S[a; r]$  é compacta.*

**Teorema 14.** *As seguintes afirmações sobre o conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  são equivalentes:*

- (i)  *$K$  é compacto;*
- (ii) *Toda sequência de pontos  $u^k \in K$  possui uma subsequência que converge para um ponto de  $K$ .*

*Demonstração.* Se  $K$  é compacto então toda sequência de pontos  $u^k \in K$  é limitada, pois  $K$  é limitado. Por Bolzano-Weierstrass, uma subsequência  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}'}$  converge para um ponto  $a = \lim_{k \in \mathbb{N}'} u^k$ . Como  $K$  é fechado, tem-se  $a \in K$ . Logo (i) implica (ii). Reciprocamente, se vale (ii) então  $K$  é limitado pois do contrário existiria, para cada  $k \in \mathbb{N}$  um ponto  $u^k \in K$  tal que  $|u^k| > k$ . A sequência  $(u^k)$  assim obtida não possuiria subsequência limitada logo nenhuma de suas subsequências seria convergente. Além disso,  $K$  é fechado pois se  $a = \lim u^k$  com  $u^k \in K$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  então, por (ii) uma subsequência de  $(u^k)$  convergiria para um ponto de  $K$ . Mas toda subsequência de  $(u^k)$  converge para  $a$ . Logo  $a \in K$ . Isto mostra que (ii) implica (i) e completa a demonstração.  $\square$

Estendendo a discussão sobre distância, dados os conjuntos  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ , definiremos a distância entre eles como segue:

$$d(X, Y) = \inf\{|u - v|; u \in X, v \in Y\}.$$

Vejam a seguinte questão em relação a distância entre dois conjuntos.

Suponhamos que os conjuntos  $X$  e  $Y$  são fechados, existem  $u^0 \in X$  e  $v^0 \in Y$  tais que  $d(X, Y) = |u^0 - v^0|$ ?

Vejamus que nem sempre é possível, observe o exemplo a seguir.

**Exemplo 31.** Consideremos em  $\mathbb{R}^2$  o conjunto  $X = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$  e  $Y = \{(x, 1/x); x > 0\}$ . Os conjuntos  $X$  e  $Y$  são fechados e disjuntos em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $d(X, Y) = 0$ .

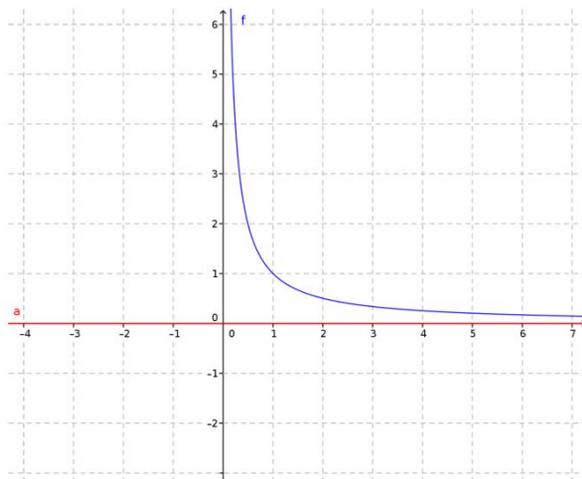


Figura 1.16:  $d(X, Y) = 0$

Entretanto, vale o seguinte resultado, que contém o Teorema 9 como caso particular:

**Teorema 15.** Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto e  $F \subset \mathbb{R}^n$  fechado. Existem  $u^0 \in K$  e  $v^0 \in F$  tais que  $|u^0 - v^0| \leq |u - v|$  para quaisquer  $u \in K$  e  $v \in F$ .

*Demonstração.* Da definição de ínfimo segue-se que existem seqüências de pontos  $u^k \in K$  e  $v^k \in F$  tais que  $d(K, F) = \lim |u^k - v^k|$ . Passando a uma subsequência, se necessário, a compacidade de  $K$  nos permite admitir que  $\lim u^k = u^0 \in K$ . Além disso a seqüência  $(v^k)$  é limitada pois  $|v^k| \leq |v^k - u^k| + |u^k|$ , onde  $|v^k - u^k|$  é limitada por ser convergente e  $|u^k|$  é limitada pois  $u^k \in K$ . Logo, passando novamente a uma subsequência, se necessário, podemos admitir que  $\lim v^k = v^0$ , com  $v^0 \in F$  pois  $F$  é fechado. Então  $|u^0 - v^0| = \lim |u^k - v^k| = d(K, F) \leq |u - v|$  para quaisquer  $u \in K$  e  $v \in F$ .  $\square$

**Corolário 2.** Seja  $K \subset A \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $K$  é compacto e  $A$  é aberto. Existe  $\epsilon > 0$  tal que toda bola  $B(u, \epsilon)$ , com raio  $\epsilon$  centro num ponto  $u \in K$ , está contida em  $A$ .

*Demonstração.* Com efeito, sejam  $u^0 \in K$  e  $v^0 \in F = \mathbb{R}^n - A$  tais que  $|u^0 - v^0| \leq |u - v|$  para quaisquer  $u \in K$  e  $v \in F$ . Ponhamos  $\epsilon = |u^0 - v^0|$ . Como  $K \subset A$ , vemos que  $K \cap F = \emptyset$ , portanto  $u^0 \neq v^0$  e daí  $\epsilon > 0$ . Assim, se  $u \in K$  e  $v \notin A$ , tem-se  $|u - v| \geq \epsilon$ . Noutras palavras, se  $u \in K$  então  $B(u, \epsilon) \subset A$ .  $\square$

Se  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_k \supset \dots$  é uma seqüência decrescente de fechados não-vazios em  $\mathbb{R}^n$ , pode ocorrer que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$ . Isto ocorre, por exemplo, quando tomamos  $F_k = [k, +\infty)$  em  $\mathbb{R}$ . O teorema abaixo mostra que isto não acontece quando um dos  $F_k$  é limitado (portanto todos os seguintes são).

**Teorema 16.** (Cantor). *Seja  $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_k \supset \dots$  uma seqüência decrescente de compactos não-vazios em  $\mathbb{R}^n$ . Existe pelo menos um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  que pertence a todos os  $K_k$ . Ou seja,  $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , escolhamos um ponto  $u^k \in K_k$ . A seqüência  $(u^k)$  é limitada, logo possui uma subsequência  $(u^r)_{r \in \mathbb{N}'}$ , que converge para  $\lim_{r \in \mathbb{N}'} u^r = a$ . Mostremos que  $a \in K_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De fato, dado  $k$ , temos  $K_r \subset K_k$  sempre que  $r \in \mathbb{N}'$  e  $r > k$ . Assim,  $r \in \mathbb{N}', r > k \Rightarrow u^r \in K_k$ . Segue-se que  $\lim_{r \in \mathbb{N}'} u^r = a$  pertence ao conjunto fechado  $K_k$ .  $\square$

**Definição 33.** *Uma cobertura do conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é uma família  $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de subconjuntos  $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$  tais que  $X \subset \bigcup_{x \in L} C_\lambda$ .*

Isto significa que para cada  $x \in X$  existe um  $\lambda \in L$  tal que  $x \in C_\lambda$ .

**Definição 34.** *Uma subcobertura é uma subfamília  $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ ,  $L' \subset L$ , tal que ainda se tem  $X \subset \bigcup_{x \in L'} C_\lambda$ .*

**Definição 35.** *Diz-se que a cobertura  $X \subset \cup C_\lambda$  é aberta quando os  $C_\lambda$  forem todos abertos, ou finita quando  $L$  é um conjunto finito.*

Uma propriedade fundamental dos conjuntos compactos é o fato de que toda cobertura aberta de um compacto possui uma subcobertura finita. Vejamos isto.

**Teorema 17.** (Borel-Lebesgue). *Toda cobertura aberta  $K \subset \cup A_\lambda$  de um compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  admite uma subcobertura finita  $K \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_k}$ .*

Inicialmente, prepararemos um lema que torna a demonstração do teorema quase imediata.

**Definição 36.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado. O diâmetro de  $X$  é o número*

$$\text{diam}(X) = \sup\{|u - v|; u, v \in X\}.$$

Segue-se imediatamente desta definição que se  $\text{diam}(X) = d$  e  $u \in X$  então  $X \subset B[u; d]$ .

**Definição 37.** *Dado  $\alpha > 0$ , um cubo de aresta  $\alpha$  é um produto cartesiano  $C = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + \alpha]$  de  $n$  intervalos de comprimento  $\alpha$ .*

Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  pertencem a  $C$  então, para cada  $i = 1, \dots, n$ , tem-se  $|x_i - y_i| \leq \alpha$  logo  $|x - y| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} = \alpha\sqrt{n}$ . Tomando  $y_i = a_i + \alpha$  temos  $|x - y| = \alpha\sqrt{n}$ , portanto  $\alpha\sqrt{n}$  é o diâmetro do cubo de aresta  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^n$ .

A decomposição  $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m\alpha, (m+1)\alpha]$  da reta em intervalos adjacentes de comprimento  $\alpha$  determina uma decomposição de  $\mathbb{R}^n$  como união de cubos adjacentes de aresta  $\alpha$ . A saber, para cada  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ , pomos  $C_m = \prod_{i=1}^n [m_i\alpha, (m_i+1)\alpha]$  e temos  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} C_m$ .

Para todo  $X \subset \mathbb{R}^n$  tem-se  $X = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} (X \cap C_m)$ . Se  $X$  é limitado apenas um número finito das interseções  $X \cap C_m$  são não-vazias, logo podemos escrever

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k$$

onde cada  $X_i$  é da forma  $X \cap C_m$ , logo tem diâmetro  $\leq \alpha\sqrt{m}$ . Se  $X$  for compacto então cada  $X_i$  é compacto. Isto prova o seguinte lema.

**Lema 1.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Para todo  $\epsilon > 0$  existe uma decomposição  $K = K_1 \cup \dots \cup K_k$  onde cada  $K_i$  é compacto e tem diâmetro  $\leq \epsilon$ .*

*Demonstração. do Teorema de Borel-Lebesgue.* Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Suponhamos, por absurdo, que  $K \subset \cup A_\lambda$  seja uma cobertura aberta que não admite subcobertura finita. Seja  $K$  uma união finita de compactos, todos com diâmetro  $< 1$ . Pelo menos um deles, que chamaremos  $K_1$ , é tal que  $K_1 \subset \cup A_\lambda$  não admite subcobertura finita. Escrevendo  $K_1$  como união finita de compactos de diâmetro  $< 1/2$ , vemos que pelo

menos um deles, digamos  $K_2$ , não pode ser coberto por um número finito de  $A'_\lambda$ s. Prosseguindo assim, obtemos uma sequência decrescente de compactos  $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_k \supset \dots$  com  $\text{diam}K_k < 1/k$  e tal que nenhum deles está contido numa união finita de  $A'_\lambda$ s. Em particular, todos os  $K_k$  são não-vazios. Pelo Teorema 16, existe  $a \in \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$ . Para algum  $\lambda$ , tem-se  $a \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  é aberto, tem-se  $B(a, 1/k) \subset A_\lambda$  para algum  $k$ . Sendo  $a \in K_k$  e  $\text{diam}K_k < 1/k$ , concluímos que  $K_k \subset B(a, 1/k)$ , donde  $K_k \subset A_\lambda$ , o que é uma contradição.  $\square$

## 1.6 Aplicações Contínuas

**Definição 38.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , associa a cada ponto  $x \in X$  sua imagem  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

As funções reais  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , assim definidas, chamam-se as *funções-coordenada* de  $f$  e escreve-se  $f = (f_1, \dots, f_n)$ .

Se  $Y \subset \mathbb{R}^n$  é tal que  $f(X) \subset Y$  podemos (com abuso de notação) escrever  $f : X \rightarrow Y$  em vez de  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definição 39.** Dizemos que  $f$  é contínua no ponto  $a \in X$  quando, para cada  $\epsilon > 0$  arbitrariamente dado, podemos obter  $\delta > 0$  tal que,

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Isto é, para cada bola  $B(f(a), \epsilon)$  dada, existe uma bola  $B(a, \delta)$  tal que  $f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \epsilon)$ . A continuidade de  $f$  no ponto  $a$  independe das normas que se utilizem em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma *aplicação contínua* no conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$  quando  $f$  é contínua em todos os pontos  $a \in X$ .

**Teorema 18.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $f(X) \subset Y$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Se  $f$  é contínua no ponto  $a \in X$  e  $g$  é contínua no ponto  $f(a)$  então  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  é contínua no ponto  $a$ . Ou seja, a composta de duas aplicações contínuas é contínua.

*Demonstração.* Seja dado  $\epsilon > 0$ . A continuidade de  $g$  no ponto  $f(a)$  assegura a existência de  $\lambda > 0$  tal que  $v \in Y, |v - f(a)| < \lambda \Rightarrow |g(v) - g(f(a))| < \epsilon$ . Por outro lado, dado  $\lambda > 0$ , a continuidade de  $f$  no ponto  $a$  fornece  $\delta > 0$  tal que  $u \in X, |u - a| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(a)| < \lambda \Rightarrow |g(f(u)) - g(f(a))| < \epsilon$ , logo  $g \circ f$  é contínua no ponto  $a$ .  $\square$

**Teorema 19.** (i) A aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua no ponto  $a \in X$  se, e somente se, para toda sequência de pontos  $u^k \in X$  com  $\lim u^k = a$ , tem-se  $\lim f(u^k) = f(a)$ .

(ii) A aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua no ponto  $a \in X$  se, e somente se, suas funções-coordenada  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas nesse ponto.

*Demonstração.* (i) Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua no ponto  $a$ . Dada a sequência de pontos  $u^k \in X$  com  $\lim u^k = a$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$ . Correspondente a  $\delta$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0 \Rightarrow u^k \in B(a, \delta)$ , logo  $k > k_0 \Rightarrow f(u^k) \in B(f(a), \epsilon)$ . Isto mostra que  $\lim f(u^k) = f(a)$ . Reciprocamente, suponhamos por absurdo, que  $\lim u^k = a$  implique  $\lim f(u^k) \neq f(a)$ , porém  $f$  seja descontínua no ponto  $a$ . Então existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade: para todo  $k \in \mathbb{N}$ , podemos encontrar  $u^k \in X$  com  $|u^k - a| < 1/k$  e  $|f(u^k) - f(a)| \geq \epsilon$ . Assim, temos  $\lim u^k = a$  mas não temos  $\lim f(u^k) = f(a)$ , uma contradição.

(ii) Isto decorre imediatamente do Teorema 5 junto com a parte (i), que acabamos de provar.  $\square$

**Teorema 20.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Se as aplicações  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas no ponto  $a \in X$  então são também contínuas nesse ponto as aplicações  $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\langle f, g \rangle : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\alpha f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definidas por:

(i)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,

(ii)  $\langle f, g \rangle(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$ ,

(iii)  $|f|(x) = |f(x)|$ ,

(iv)  $(\alpha f)(x) = \alpha(x)f(x)$ .

*Demonstração.* Isto resulta do Teorema 19 (i) juntamente com o Corolário 1.  $\square$

**Teorema 21.** A imagem  $f(K)$  do conjunto compacto  $K \subset X$  pela aplicação contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é também um conjunto compacto.

*Demonstração.* Seja  $(v^k)$  uma sequência de pontos em  $f(K)$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe  $u^k \in K$  tal que  $f(u^k) = v^k$ . Como  $K$  é compacto, uma subsequência  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}'}$  converge para um ponto  $a \in K$ . Sendo  $f$  contínua nesse ponto  $a$ , de  $\lim_{k \in \mathbb{N}'} u^k = a$  resulta, pelo Teorema 19, que  $\lim_{k \in \mathbb{N}'} f(u^k) = f(a)$ . Logo toda sequência de pontos  $v^k = f(u^k) \in f(K)$  possui uma subsequência  $(v^k)_{k \in \mathbb{N}'}$  convergente para um ponto  $f(a) \in f(K)$ . Ou seja  $f(K)$  é compacto.  $\square$

**Corolário 3.** (Weierstrass). *Seja  $K \subset \mathbb{R}^m$  compacto. Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real contínua, então existem  $u_0, u_1 \in K$  tais que  $f(u_0) \leq f(u) \leq f(u_1)$  para todo  $u \in K$ .*

Ou seja, toda função real contínua num conjunto compacto  $K$  atinge seus valores mínimo e máximo em pontos de  $K$ . Para provar o Corolário de Weierstrass basta observar que, sendo  $f(K) \subset \mathbb{R}$  compacto, os números  $v_0 = \inf f(K)$  e  $v_1 = \sup f(K)$  pertencem a  $f(K)$ , isto é,  $v_0 = f(u_0)$  e  $v_1 = f(u_1)$ , com  $u_0, u_1 \in K$ .

## 1.7 Continuidade Uniforme

Sejam as funções contínuas  $s, p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , denominadas função adição e função multiplicação de números reais definidas por  $s(x, y) = x + y$  e  $p(x, y) = xy$ . Examinemos a continuidade de cada uma delas no ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Para isso, usaremos em  $\mathbb{R}^2$  a norma do máximo, segundo a qual tem-se  $(x, y) \in B((a, b), \delta)$  se, e somente se,  $|x - a| < \delta$  e  $|y - b| < \delta$ .

Primeiro vamos examinar a adição: dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \epsilon/2$ . Se  $|x - a| < \epsilon/2$  e  $|y - b| < \epsilon/2$ , isto é,  $(x, y) \in B((a, b), \delta)$ , então,

$$s(x, y) - s(a, b) = |x + y - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b| < \epsilon.$$

Em seguida examinemos a multiplicação: dado  $\epsilon > 0$ , tem-se,

$$xy - ab = (x - a)(y - b) + (x - a)b + a(y - b),$$

logo, tomando  $\delta > 0$  e menor do que cada um dos números,

$$\frac{1}{3}\sqrt{\epsilon}, \quad \frac{\epsilon}{3|a|}, \quad \frac{\epsilon}{3|b|},$$

veremos que se,  $|x - a| < \delta$  e  $|y - b| < \delta$  isto é,  $(x, y) \in B((a, b), \delta)$ , então,

$$\begin{aligned} |p(x, y) - p(a, b)| &= |xy - ab| \\ &\leq |x - a||y - b| + |x - a||b| + |a||y - b| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Note a diferença entre os dois casos examinados: no primeiro caso o da adição,  $\delta$  depende apenas de  $\epsilon$ , mas não do ponto  $(a, b)$  onde a continuidade é testada. Já na multiplicação,  $\delta$  depende não apenas de  $\epsilon$  mas também de  $(a, b)$ . Se um dos números  $a$  ou  $b$  aumentar, para o mesmo  $\epsilon$  deve-se tomar  $\delta$  cada vez menor. Isto significa que a adição é uniformemente contínua mas a multiplicação não é. Segue-se a definição.

**Definição 40.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se uniformemente contínua no conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$  quando, para todo  $\epsilon > 0$ , for possível obter  $\delta > 0$  tal que  $|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \epsilon$ , sejam quais forem  $u, v \in X$ .

**Teorema 22.** A fim de que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja uniformemente contínua no conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$  é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos  $u^k, v^k \in X$  com  $\lim |u^k - v^k| = 0$ , se tenha  $\lim |f(u^k) - f(v^k)| = 0$ .

*Demonstração.* Se  $f$  é uniformemente contínua e  $\lim(v^k - u^k) = 0$ , então, dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $u, v \in X, |u - v| < \delta$  implica  $|f(v) - f(u)| < \epsilon$ . Existe também  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_0$  implica  $|v^k - u^k| < \delta$ . Logo  $k > k_0$  implica  $|f(v^k) - f(u^k)| < \epsilon$  e daí  $\lim[f(v^k) - f(u^k)] = 0$ . Reciprocamente, suponhamos válida a condição estipulada no enunciado do teorema. Se  $f$  não fosse uniformemente contínua, existiria um  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade: para todo  $k \in \mathbb{N}$  poderíamos achar pontos  $u^k, v^k$  em  $X$  tais que  $|v^k - u^k| < 1/k$  e  $|f(v^k) - f(u^k)| \geq \epsilon$ . Então teríamos  $\lim(v^k - u^k) = 0$  sem que fosse  $\lim[f(v^k) - f(u^k)] = 0$ . Esta contradição conclui a prova do teorema.  $\square$

**Teorema 23.** Toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida num conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}^m$ , é uniformemente contínua.

*Demonstração.* Se  $f$  não fosse uniformemente contínua, existiriam  $\epsilon > 0$  e duas sequências  $(u^k), (v^k) \in X$  satisfazendo  $\lim(v^k - u^k) = 0$  e  $|f(v^k) - f(u^k)| \geq \epsilon$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de  $X$ , que  $\lim u^k = a \in X$ . Então, como  $v^k = (v^k - u^k) + u^k$ , vale também  $\lim v^k = a$ . Sendo  $f$  contínua no ponto  $a$ , temos  $\lim[f(v^k) - f(u^k)] = \lim f(v^k) - \lim f(u^k) = f(a) - f(a) = 0$ , contradizendo que seja  $|f(v^k) - f(u^k)| \geq \epsilon$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Definição 41.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$ , chama-se lipschitziana quando existe  $c > 0$  tal que  $|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|$  para quaisquer  $u, v \in X$ .

O número  $c$  é chamado uma *constante de Lipschitz* de  $f$ .

**Exemplo 32.** Toda aplicação lipschitziana é uniformemente contínua: dado  $\epsilon > 0$ , basta tomar  $\delta = \epsilon/c$ .

**Exemplo 33.** A função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sqrt{x}$ , é uniformemente contínua mas não é lipschitziana. Basta ver que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}|x - y|$$

e que, com  $x, y \in [0, 1]$  pode-se tornar  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  tão pequeno, (logo  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-1}$  tão grande), quanto se queira.

# Capítulo 2

## Séries de Funções

Muitas construções de funções contínuas não deriváveis são baseadas em séries infinitas de funções. Iniciaremos com algumas definições e teoremas sobre séries infinitas e sequências de funções.

**Definição 42.** Diz-se que a sequência de funções,  $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , converge simplesmente (convergência pontual ou ponto a ponto) para a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , se para todo  $x \in I$ , tivermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

ou seja, dado qualquer  $\epsilon > 0$ , pode-se obter, para cada  $x \in I$ , um inteiro  $N$ , o qual depende de  $\epsilon$  e  $x$ , tal que para  $n > N$ , temos  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

Graficamente, em cada reta vertical que passa por um ponto  $x \in X$  fica determinada uma sequência de pontos  $(x, f_1(x)), (x, f_2(x)), \dots, (x, f_n(x)), \dots$  interseções dessa reta com os gráficos de  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ . Esses pontos convergem para  $(x, f(x))$ , interseção da reta vertical com o gráfico de  $f$ .

**Exemplo 34.** A seqüência de funções  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f_n(x) = x/n$ , converge simplesmente para a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que é identicamente nula. Com efeito, para todo  $x \in \mathbb{R}$  fixado, tem-se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x/n) = 0$ .

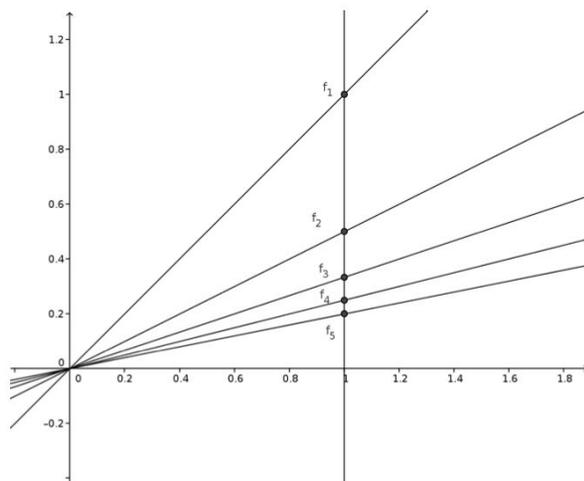


Figura 2.1:  $f_n(x) = x/n$  tem-se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x/n) = 0$ .

**Definição 43.** Diz-se que  $f_n$  converge uniformemente em  $I$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

ou seja, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para  $n \geq N$ , temos  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

Dizer que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $X$  significa que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que o gráfico de  $f_n$ , para todo  $n > n_0$ , está contido na faixa de raio  $\epsilon$  em torno do gráfico de  $f$ .

**Exemplo 35.** Nenhuma faixa de raio  $\epsilon$  em torno do eixo das abscissas pode conter o gráfico de uma função  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f_n(x) = x/n$ . Logo a seqüência  $(f_n)$  do exemplo anterior não converge uniformemente para zero em  $\mathbb{R}$ . Mas, se  $X \subset \mathbb{R}$  é um conjunto limitado, digamos por  $|x| \leq c$  para todo  $x \in X$ , então  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente em  $X$ . Pois, dado  $\epsilon > 0$ , basta tomar  $n_0 > c/\epsilon$ . Então  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |x|/n < c/n_0 < \epsilon$ .

**Exemplo 36.** A sequência de funções contínuas  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_n(x) = x^n$ , converge simplesmente para a função descontínua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$  se  $0 \leq x < 1$ ,  $f(1) = 1$ . A convergência é uniforme em todo o intervalo da forma  $[0, 1 - \delta]$ ,  $0 < \delta < 1$ , mas não é uniforme em  $[0, 1]$ .

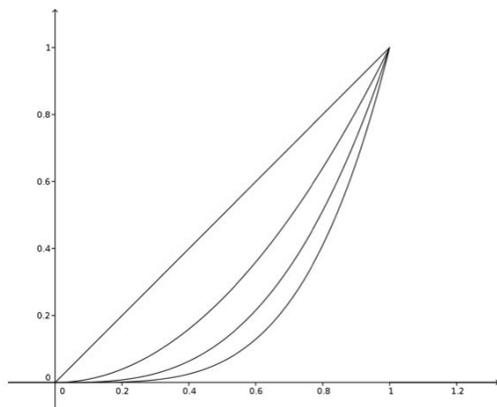


Figura 2.2:  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_n(x) = x^n$

**Exemplo 37.** A sequência de funções contínuas  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_n(x) = x^n(1 - n^n)$ , converge simplesmente para a função identicamente nula. Esta convergência não é uniformemente.

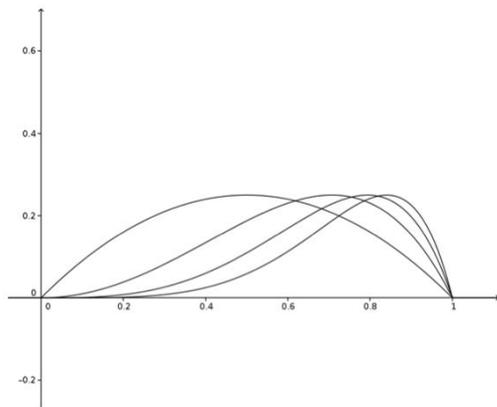


Figura 2.3:  $f_n(x) = x^n(1 - n^n)$

Com efeito, para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos  $f_n(\sqrt[n]{1/2}) = 1/4$ . Logo, para  $\epsilon < 1/4$ , nenhuma função  $f_n$  tem seu gráfico contido na faixa de raio  $\epsilon$  em torno da função 0. Por outro lado, se  $0 < \delta < 1$ , temos  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente no intervalo  $[0, 1 - \delta]$ , pois  $x^n \rightarrow 0$  uniformemente nesse intervalo e  $0 \leq x^n(1 - x^n) \leq x^n$ .

**Definição 44.** Diz-se que uma sequência de funções  $f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de Cauchy se, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $m, n > n_0$ , tivermos  $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ , para qualquer que seja  $x \in X$ .

A convergência uniforme desempenha um papel importante, pois as propriedades dos elementos de uma sequência são transferidos para o limite da sequência.

Os teoremas a seguir serão importantes para estabelecer a convergência uniforme de uma sequência de funções.

**Teorema 24.** Uma sequência  $f_n$  converge uniformemente em  $I$  se, e somente se, é uma sequência de Cauchy em  $I$ , ou seja,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$$

ou, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $m, n \geq N$ , temos  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Primeiro, suponhamos que  $f_n$  convirja uniformemente para  $f$  em  $I$ , isto é, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $m, n \geq N$ , temos  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Para algum  $\epsilon > 0$  e  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $m, n > N$ , temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &\leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in I} |f(x) - f_m(x)| < 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, suponhamos que  $\{f_n(x)\}$  é uma sequência de Cauchy, isto é, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $m, n \geq N$  temos  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Assim, para todo  $x \in I$ ,  $\{f_n(x)\}$  é uma sequência Cauchy de funções e converge para  $f(x)$ . Da hipótese e da convergência estabelecida, temos para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n \geq N$ , temos  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$  e para todo  $\epsilon > 0$  e  $x \in I$  existe  $m_x > N$  tal que  $|f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Se  $\epsilon > 0$  e  $n > N$ , temos,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto,  $f_n$  converge uniformemente para  $f$  em  $I$ . □

**Teorema 25.** *Seja  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma seqüência de funções, tal que,  $\sup_{x \in I} |f_k(x)| \leq M_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ , então a série  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge uniformemente em  $I$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, seja  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $n > m$  e  $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| &= \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - \sum_{k=1}^m f_k(x) \right| \\ &= \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \sup_{x \in I} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k = \sum_{k=1}^n M_k - \sum_{k=1}^m M_k$$

e quando  $m, n \rightarrow \infty$ , temos

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=1}^n M_k - \sum_{k=1}^m M_k = M - M = 0.$$

Logo,  $\{f_n\}$  é uma seqüência de Cauchy em  $I$ . Segue do Teorema 24 que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  é uniformemente convergente em  $I$ .  $\square$

**Teorema 26.** *Se  $\{f_n\}$  é uma seqüência de funções contínuas em  $I$  e  $f_n$  converge uniformemente para  $f$  em  $I$ , então  $f$  é uma função contínua em  $I$ .*

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in X$ , um ponto arbitrário. Por hipótese temos,

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

e

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Seja dado  $\epsilon > 0$ ,  $x \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$  com  $n > N$  e  $|x - x_0| < \delta$ . Então

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3 \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

e portanto  $f$  é contínua em  $x_0$ . Como  $x_0 \in I$  foi escolhido arbitrário,  $f$  é contínua em  $I$ .  $\square$

**Corolário 4.** *Se  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge uniformemente para  $f(x)$  em  $I$ , então  $f$  é uma função contínua em  $I$ .*

# Capítulo 3

## Funções Não Deriváveis

As Funções de Weierstrass e Riemann são de caráter analítico, ou seja, existe uma fórmula explícita para cada uma delas. Essas fórmulas são definidas por séries infinitas de funções, o que torna difícil compreender geometricamente as razões pelas quais os gráficos *não têm tangente em todos os pontos*.

### 3.1 Função de Weierstrass

De acordo com Plaza em [7] e Thim em [8], Weierstrass tentou, sem sucesso, mostrar que a função proposta por Riemann, não tem derivada em todos os pontos, mas isso o levou a fazer o seu próprio exemplo, a função dada por:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (3.1)$$

onde  $0 < b < 1$  e  $a$  é um inteiro ímpar, satisfazendo  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ .

A região sombreada na figura 3.1 mostra uma representação geométrica, no plano dos parâmetros  $a$  e  $b$ , de  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ .

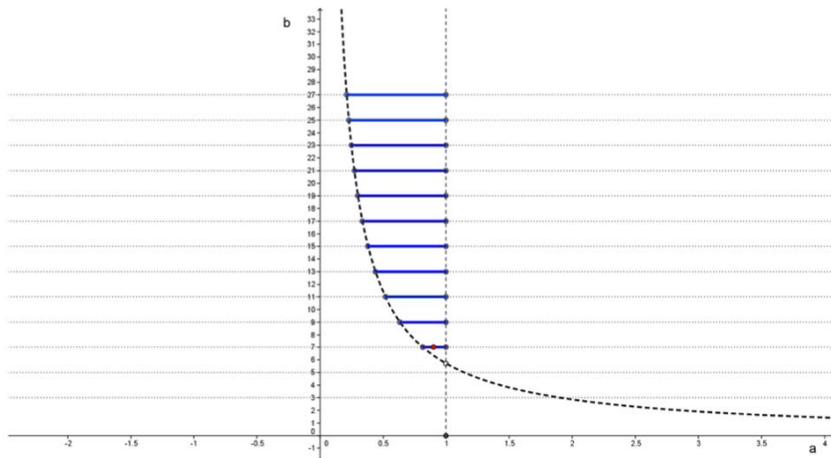


Figura 3.1: Função de Weierstrass para  $a = 7$  e  $b = 0,9$ .

As figuras seguintes são aproximações do gráfico da função de Weierstrass para  $x \in [0, 2\pi]$  e  $n = 1, 2, 3$  e  $10$ .

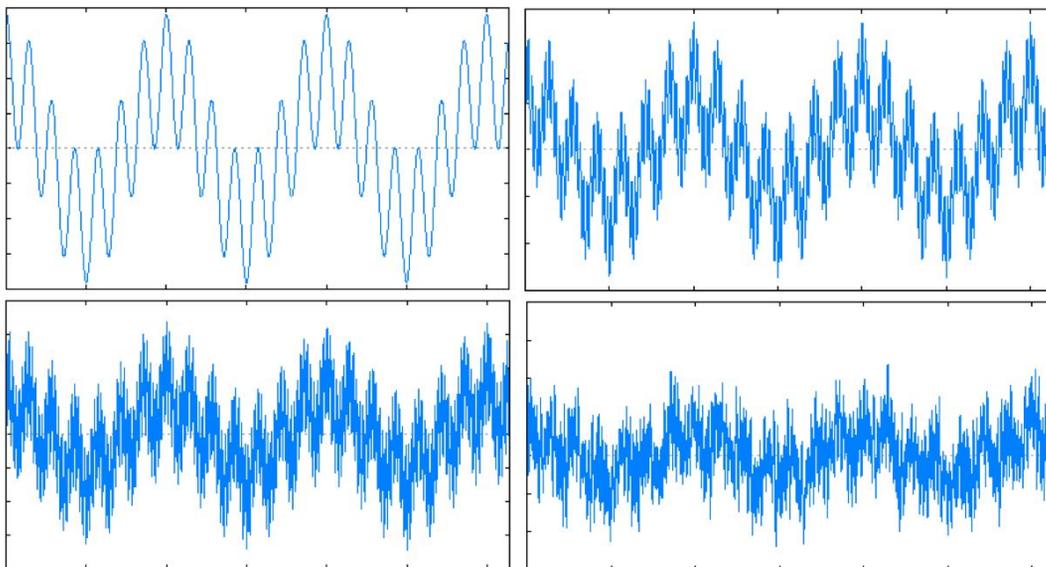


Figura 3.2: Aproximações da Função de Weierstrass

De acordo com Plaza [7], Weierstrass mostrou que a função  $W$  não têm derivada em todo ponto do seu domínio.

**Teorema 27.** *A Função de Weierstrass é contínua e não derivável em  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Inicialmente vamos considerar  $W_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x)$  onde  $a$  e  $b$  satisfazem as condições dadas em (3.1), temos

$$|W_n(x)| = |b^n \cos(a^n \pi x)| \leq |b^n| = b^n$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |W_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} |b^n| = 1 + b + b^2 + \dots + b^n + \dots = \frac{1}{1-b}.$$

Assim, segue do Teorema 25, que a série de funções  $W_n$  é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$  e, pelo Corolário 4, a função de Weierstrass é contínua.

Para mostrar que a função de Weierstrass é não derivável em  $\mathbb{R}$ , vamos supor, por contradição, que a função  $W$  seja derivável em algum  $x \in \mathbb{R}$ , isto é,

$$W'(x) = \lim_{h_m \rightarrow 0} \frac{W(x + h_m) - W(x)}{h_m}, \quad \text{existe para algum } x \in \mathbb{R}.$$

Seja  $h_m \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{1}{2a^m} < h_m < \frac{3}{2a^m}$ , observamos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$ . Assim,

$$\frac{W(x + h_m) - W(x)}{h_m} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos[a^n \pi(x + h_m)] - \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)}{h_m},$$

ou ainda, se tomarmos  $A = a^n \pi(x + h_m)$  e  $B = a^n \pi x$ , podemos reescrever,

$$\frac{W(x + h_m) - W(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n \pi \frac{\cos(A) - \cos(B)}{A - B}.$$

Para  $m$  suficientemente grande podemos reescrever

$$\frac{W(x + h_m) - W(x)}{h_m} = S_1 + S_2,$$

onde

$$S_1 = \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \pi \frac{\cos(A) - \cos(B)}{A - B} \quad \text{e} \quad S_2 = \sum_{n=m}^{\infty} (ab)^n \pi \frac{\cos(A) - \cos(B)}{A - B}.$$

Considerando a função  $f(x) = \cos(x)$ , o *Teorema do Valor Médio*, ver [4], nos garante que existe  $C \in (A, B)$  tal que  $\frac{\cos(A) - \cos(B)}{A - B} = -\sin(C)$ . Como  $|\sin(C)| \leq 1$ , temos,

$$|S_1| = \left| \sum_{n=0}^{m-1} \pi(ab)^n - \sin(C) \right| \leq \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} < \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1}$$

e para  $S_2$  podemos obter,

$$|S_2| > \frac{2(ab)^m}{3}.$$

Como

$$|S_2| = |W'(x) - S_1|,$$

aplicando a desigualdade triangular obtemos

$$|S_2| = |W'(x) - S_1| \leq |W'(x)| + |S_1|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |W'(x)| &\geq |S_2| - |S_1| \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2(ab)^m}{3} - \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} (ab)^m \left[ \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} \right], \end{aligned}$$

como, por hipótese,  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ , isto é,  $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} > 0$ , então

$$|W'(x)| \geq \lim_{m \rightarrow \infty} (ab)^m \left[ \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} \right] = \infty,$$

portanto, a função de Weierstrass é não derivável nos reais. □

## 3.2 Função de Riemann

Foi proposta por Riemann, a seguinte função,

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}.$$

ela é atualmente conhecida como função de Riemann. Os gráficos seguintes são aproximações da função de Riemann para  $x \in [0, 2\pi]$  e  $n = 1, 2, 3$  e 10.

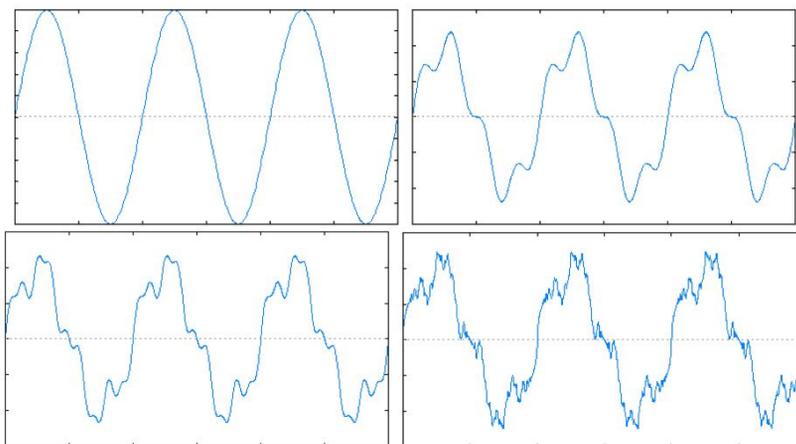


Figura 3.3: Função de Riemann,  $n = 1, 2, 3$ , e 10

Da acordo com Plaza [7], em 1916, Hardy demonstrou que a função de Riemann não tem derivada finita nos pontos irracionais e nos racionais da forma  $\frac{2p}{4q+1}$  e  $\frac{2p+1}{4q+2}$ . Já, J. Gerver [1] demonstrou que a função de Riemann tem derivada igual a  $-\frac{\pi}{2}$  nos pontos da forma  $\frac{2p+1}{2q+1}$  e derivada finita nos pontos da forma  $\frac{2p+1}{2^n}$ ,  $n \geq 1$ . Finalmente, em 1972, Smith mostrou que a função de Riemann não têm derivada nos casos restantes.

### 3.3 Função de Bolzano

Diferente das funções estudadas nas seções anteriores, o exemplo dado por Bolzano de uma função não derivável em todos os pontos é baseado numa construção geométrica.

**Definição 45.** Dados  $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ , com  $b > a$  e  $B > A$ . Seja  $x \in [a, b]$  e considere a sequência de funções  $B_n : [a, b] \rightarrow [A, B]$  dadas por:

$$I) B_1(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a),$$

II) O intervalo  $[a, b]$  é dividido em quatro subintervalos e cada um define uma parte linear de  $B_2(x)$ ,

$$I_1 = [t_1, t_2] = \left[ a, a + \frac{3}{8}(b - a) \right], \quad I_2 = [t_2, t_3] = \left[ a + \frac{3}{8}(b - a), \frac{1}{2}(a + b) \right],$$
$$I_3 = [t_3, t_4] = \left[ \frac{1}{2}(a + b), a + \frac{7}{8}(b - a) \right], \quad I_4 = [t_4, t_5] = \left[ a + \frac{7}{8}(b - a), b \right],$$

tal que,

$$B_2(a) = A, \quad B_2\left(a + \frac{3}{8}(b - a)\right) = A + \frac{5}{8}(B - A),$$
$$B_2\left(\frac{1}{2}(a + b)\right) = A + \frac{1}{2}(B - A), \quad B_2\left(a + \frac{7}{8}(b - a)\right) = B + \frac{1}{8}(B - A),$$
$$B_2(b) = B.$$

III)  $B_3(x)$  é construída de forma análoga ao procedimento da função  $B_2(x)$ , ou seja, cada intervalo de  $B_2$  é dividido em quatro subintervalos (com os valores correspondentes para  $a, b, A$  e  $B$ ). E assim, sucessivamente, para  $B_n$  onde  $n = 4, 5, 6, \dots$

Se existir o limite de  $B_n$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então temos a função de Bolzano.

Vejam as duas primeiras etapas da função de Bolzano.

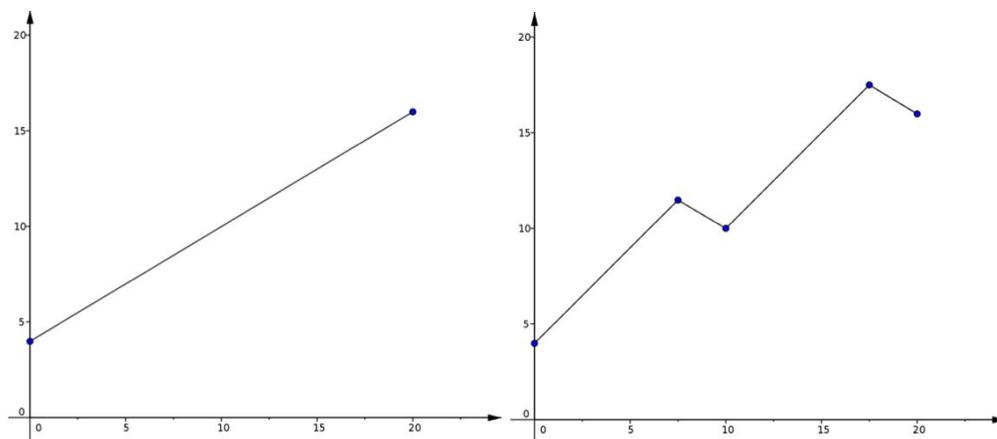


Figura 3.4: Função Bolzano para  $n = 1$  e  $n = 2$ .

**Teorema 28.** *A função de Bolzano é contínua e não derivável em  $[a, b]$ .*

Mostraremos que a função de Bolzano não é derivável em um subconjunto denso de  $[a, b]$ , contendo  $a$  e  $b$ , que será definido ao longo da demonstração a seguir. A demonstração completa pode ser encontrada em Vojtìch [9].

*Demonstração.* Inicialmente vamos mostrar que  $B$  é contínua. Para isso, observamos que para  $n = 1$ , a função  $B_1$ , pela definição 45, é um segmento de reta em  $I_{1,1} = [a_1, b_1] = [a, b]$  cuja a inclinação é

$$M_{1,1} = \frac{B_1(b_1) - B_1(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{B_1 - A_1}{b_1 - a_1} = \frac{B - A}{b - a}.$$

Para  $n = 2$ , pela definição 45, o subintervalo  $[a_1, b_1]$  da função  $B_1$  é dividido em quatro subintervalos,  $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$ , e  $I_{2,4}$ , e cuja as inclinações em cada segmento de reta são dadas respectivamente,

$$1. I_{2,1} = [t_1, t_2] = \left[ a_1, a_1 + \frac{3}{8}(b_1 - a_1) \right],$$

$$M_{2,1} = \frac{B_2(t_2) - B_2(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{5}{8}(B_1 - A_1)}{\frac{3}{8}(b_1 - a_1)} = \frac{5}{3}M_{1,1}.$$

$$2. I_{2,2} = [t_2, t_3] = \left[ a_1 + \frac{3}{8}(b_1 - a_1), \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \right],$$

$$M_{2,2} = \frac{B_2(t_3) - B_2(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right)(B_1 - A_1)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)(b_1 - a_1)} = -M_{1,1}.$$

$$3. I_{2,3} = [t_3, t_4] = \left[ \frac{1}{2}(a_1 + b_1), a_1 + \frac{7}{8}(b_1 - a_1) \right],$$

$$M_{2,3} = \frac{B_2(t_4) - B_2(t_3)}{t_4 - t_3} = \frac{\left(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)(B_1 - A_1)}{\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)(b_1 - a_1)} = \frac{5}{3}M_{1,1}.$$

$$4. I_{2,4} = [t_4, t_5] = \left[ a_1 + \frac{7}{8}(b_1 - a_1), b_1 \right],$$

$$M_{2,4} = \frac{B_2(t_5) - B_2(t_4)}{t_5 - t_4} = \frac{-\frac{1}{8}(B_1 - A_1)}{\left(1 - \frac{7}{8}\right)(b_1 - a_1)} = -M_{1,1}.$$

Para  $n = 3$ , pela definição 45, cada intervalo  $[a_k, b_k]$  obtidos para  $n = 2$  é dividido em quatro subintervalos, e de forma análoga a  $n = 2$ , obtemos

1. Para  $I_{2,1}$ :

$$I_{3,1} \quad \text{com} \quad M_{3,1} = \frac{5}{3}M_{2,1},$$

$$I_{3,2} \quad \text{com} \quad M_{3,2} = -M_{2,1},$$

$$I_{3,3} \quad \text{com} \quad M_{3,3} = \frac{5}{3}M_{2,1} \text{ e}$$

$$I_{3,4} \quad \text{com} \quad M_{3,4} = -M_{2,1}.$$

2. Para  $I_{2,2}$ :

$$I_{3,5} \quad \text{com} \quad M_{3,5} = \frac{5}{3}M_{2,2},$$

$$I_{3,6} \quad \text{com} \quad M_{3,6} = -M_{2,2},$$

$$I_{3,7} \quad \text{com} \quad M_{3,7} = \frac{5}{3}M_{2,2} \text{ e}$$

$$I_{3,8} \quad \text{com} \quad M_{3,8} = -M_{2,2}.$$

3. Para  $I_{2,3}$ :

$$I_{3,9} \quad \text{com} \quad M_{3,9} = \frac{5}{3}M_{2,3},$$

$$I_{3,10} \quad \text{com} \quad M_{3,10} = -M_{2,3},$$

$$I_{3,11} \quad \text{com} \quad M_{3,11} = \frac{5}{3}M_{2,3} \text{ e}$$

$$I_{3,12} \quad \text{com} \quad M_{3,12} = -M_{2,3}.$$

4. Para  $I_{2,4}$ :

$$I_{3,13} \quad \text{com} \quad M_{3,13} = \frac{5}{3}M_{2,4},$$

$$I_{3,14} \quad \text{com} \quad M_{3,14} = -M_{2,4},$$

$$I_{3,15} \quad \text{com} \quad M_{3,15} = \frac{5}{3}M_{2,4} \text{ e}$$

$$I_{3,16} \quad \text{com} \quad M_{3,16} = -M_{2,4}.$$

De uma maneira geral, para  $n \geq 2$  o intervalo  $[a, b]$  é dividido em  $4^{n-1}$  subintervalos,  $I_{n,k} = [a_k, b_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, 4^{n-1}$ , onde o gráfico de  $B_n$  é um segmento de reta em  $I_{n,k}$ , para cada  $k$ , com inclinação  $M_{n,i}$  onde  $i = 4(k-1) + j$ , com  $j = 1, 2, 3, 4$ . Isto é,

$$1. \quad I_{n,i} = [t_1, t_2] = \left[ a_k, a_k + \frac{3}{8}(b_k - a_k) \right],$$

$$M_{n,i} = \frac{B_k(t_2) - B_k(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{5}{8}(B_k - A_k)}{\frac{3}{8}(b_k - a_k)} = \frac{5}{3}M_{n-1,k}.$$

$$2. \quad I_{n,i} = [t_2, t_3] = \left[ a_k + \frac{3}{8}(b_k - a_k), \frac{1}{2}(a_k + b_k) \right],$$

$$M_{n,i} = \frac{B_k(t_3) - B_k(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{5}{8})(B_k - A_k)}{(\frac{1}{2} - \frac{3}{8})(b_k - a_k)} = -M_{n-1,k}.$$

$$3. \quad I_{n,i} = [t_3, t_4] = \left[ \frac{1}{2}(a_k + b_k), a_k + \frac{7}{8}(b_k - a_k) \right],$$

$$M_{n,i} = \frac{B_k(t_4) - B_k(t_3)}{t_4 - t_3} = \frac{(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2})(B_k - A_k)}{(\frac{7}{8} - \frac{1}{2})(b_k - a_k)} = \frac{5}{3}M_{n-1,k}.$$

$$4. I_{n,i} = [t_4, t_5] = \left[ a_k + \frac{7}{8}(b_k - a_k), b_k \right],$$

$$M_{n,i} = \frac{B_k(t_5) - B_k(t_4)}{t_5 - t_4} = \frac{-\frac{1}{8}(B_k - A_k)}{\left(1 - \frac{7}{8}\right)(b_k - a_k)} = -M_{n-1,k}.$$

Para mostrar que a sequência de funções  $\{B_n\}$  é de Cauchy no intervalo  $[a, b]$ , vamos considerar o conjunto de subintervalos  $\{I_{n,k}\} = \{[I_n(s_k), I_n(t_k)]\}$  do intervalo  $[a, b]$ , o *comprimento maximal* dado por

$$L_n = \sup_{I \in \{I_{n+1,k}\}} [I(t_k) - I(s_k)]$$

e a *inclinação maximal* (em módulo),

$$M_n = \sup_{I \in \{I_{n+1,k}\}} |M_n(I)|,$$

em cada parte linear de  $B_{n+1}$ . Assim, da definição 45 temos,

$$L_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^{n+1} |b - a| \quad \text{e} \quad M_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \left| \frac{B - A}{b - a} \right|.$$

Daí,

$$M_n L_n \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1} |B - A|.$$

Logo, para  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\sup_{x \in [a,b]} |B_{k+1}(x) - B_k(x)| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^{k+1} |B - A|. \quad (3.2)$$

Assim, dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m > n$ , temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a,b]} |B_m(x) - B_n(x)| &\leq \sup_{x \in [a,b]} \left( \sum_{k=n+1}^m |B_k(x) - B_{k-1}(x)| \right) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \sup_{x \in [a,b]} |B_k(x) - B_{k-1}(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{5}{8}\right)^k |B - A|, \quad \text{por (3.2)} \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{5}{8}\right)^k &= \left[ \sum_{k=1}^m \left(\frac{5}{8}\right)^k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{8}\right)^k \right] \\
 &= \frac{5}{3} \left[ 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^m \right] - \frac{5}{3} \left[ 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n \right] \\
 &= \frac{5}{3} \left[ \left(\frac{5}{8}\right)^n - \left(\frac{5}{8}\right)^m \right] \\
 &= \frac{5}{3} \left(\frac{5}{8}\right)^n \left[ 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{m-n} \right]
 \end{aligned}$$

e  $m > n$ , temos

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{5}{3} \left(\frac{5}{8}\right)^n \left[ 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{m-n} \right] = 0.$$

Assim, a sequência das funções,  $\{B_n\}$ , é de Cauchy e como cada função  $B_k$  é contínua em  $[a, b]$ , segue do Teoremas 24 e 26 que a Função de Bolzano também é contínua no intervalo  $[a, b]$ .

Agora, considere o conjunto  $M = \{s, t \in [a, b] \text{ tais que } [s, t] \in \{I_{n,k}\}, n, k \in \mathbb{N}\}$ . O conjunto  $M$  é denso em  $[a, b]$ . De fato, seja  $x \in [a, b]$ , vamos construir uma sequência  $a_n$  em  $M$  que converge para  $x$  e estudar o caso para  $x \in M - \{b\}$ , pois para  $x \in M - \{a\}$  a demonstração é análoga.

Na primeira etapa da construção da função de Bolzano consideremos o intervalo  $J_0 = [a, b]$  e de acordo com a definição 45 e a partição

$$\begin{aligned}
 J_0^{(0)} &= \left[ a_1, a_1 + \frac{3}{8}L_1 \right), & J_0^{(1)} &= \left[ a_1 + \frac{3}{8}L_1, a_1 + \frac{1}{2}L_1 \right), \\
 J_0^{(2)} &= \left[ a_1 + \frac{1}{2}L_1, a_1 + \frac{7}{8}L_1 \right) & \text{e } J_0^{(3)} &= \left[ a_1 + \frac{7}{8}L_1, b_1 \right),
 \end{aligned}$$

onde  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$  e  $L_1 = b_1 - a_1$ .

Notemos que  $x \in J_0^{(i_1)}$ , para algum  $i_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$  e a amplitude de  $J_0^{(i_1)} \leq \frac{3}{8}|b - a|$ .

Na segunda etapa, consideramos o intervalo  $J_0^{(i_1)}$  e repetimos o mesmo procedimento da primeira etapa obtendo  $J_0^{(i_2)}$  tal que  $x \in J_0^{(i_2)}$  e a amplitude de  $J_0^{(i_2)} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^2 |b - a|$ .

E, assim sucessivamente, na etapa  $n$ , considere o intervalo  $J_0^{(i_{n-1})}$  tal que  $x \in J_0^{(i_{n-1})}$ , temos

$$J_n^{(0)} = \left[ a_n, a_n + \frac{3}{8}L_n \right), \quad J_n^{(1)} = \left[ a_n + \frac{3}{8}L_n, a_n + \frac{1}{2}L_n \right),$$

$$J_n^{(2)} = \left[ a_n + \frac{1}{2}L_n, a_n + \frac{7}{8}L_n \right) \quad \text{e} \quad J_n^{(3)} = \left[ a_n + \frac{7}{8}L_n, b_n \right).$$

Como anteriormente, existe  $i_n \in \{0, 1, 2, 3\}$  tal que  $x \in J_n^{(i_n)}$  e a

$$\text{amplitude de } J_0^{(i_n)} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n |b - a|.$$

Como  $x \in J_0^{(i_n)}$  e  $a_n \in J_0^{(i_n)}$  temos que

$$|x - a_n| \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n |b - a|.$$

Assim,  $a_n$  converge para  $x$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,  $M$  é denso em  $[a, b]$ .

Agora, vamos mostrar que a função de Bolzano é não derivável para todo  $x \in M$ . Para isso, vamos supor, por contradição, que a função  $B$  é derivável em algum  $x \in M$ , isto significa que existe o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(x) - B(x_n)}{x - x_n}$$

para qualquer sequência  $x_n$  que converge para  $x$ .

Mas, isto não ocorre, pois:

1) Se  $x = a$  basta considerar a sequência

$$x_n = a + \left(\frac{3}{8}\right)^n |b - a|$$

temos que  $x_n \in M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e  $x_n \rightarrow a$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Pela definição da função de Bolzano, temos que  $B(x_n) = B_{n+1}(x_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B(a) = A$  e

$$B_{n+1}(x_n) = A + \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{3}{8}\right)^n |b - a|.$$

Logo,

$$\frac{B(x_n) - B(a)}{x_n - a} = \frac{A + \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{3}{8}\right)^n |b - a| - A}{\left(\frac{3}{8}\right)^n |b - a|} = \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(x_n) - B(a)}{x_n - a} = \infty,$$

portanto não existe e concluímos que a função de Bolzano é não derivável em  $x = a$ .

2) Se  $x \in M - \{a\}$ , basta considerarmos a sequência

$$x_n = x - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+q} |b - a|,$$

para qualquer  $q \in \mathbb{N}$ . Como  $x \in M$ , então, existe  $r \in \mathbb{N}$ , tal que, para todo  $p \geq r$ ,  $B(x) = B_p(x)$ . Escolhamos  $q > r$  de modo que  $x_n \in (a, b]$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como, pela definição da Função Bolzano,  $B(x_n) = B_{n+1}(x_n)$  e

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x_n) &= B_{n+1} \left[ x - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+q} |b - a| \right] \\ &= B_n(x) + (-1)^n K \left(\frac{1}{8}\right)^{n+q} \end{aligned}$$

onde  $K \in \mathbb{R}$  com  $K \geq \frac{|b - a|}{|B - A|} \neq 0$ . Além disso, como  $q > r$  e  $B(x) = B_n(x)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$[B(x) - B_n(x)] 8^{n+q} = [B_n(x) - B_n(x)] 8^{n+q} = 0.$$

Assim, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{B(x) - B(x_n)}{x - x_n} &= 8^{n+q} \left[ B(x) - B_n(x_0) - (-1)^n K \left(\frac{1}{8}\right)^{n+q} \right] \\ &= [B(x) - B_n(x_0)] 8^{n+q} - (-1)^n K \\ &= (-1)^{n+1} K. \end{aligned}$$

Logo, o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(x) - B(x_n)}{x - x_n}$$

não existe e, portanto, a função de Bolzano não derivável em  $M$ . □

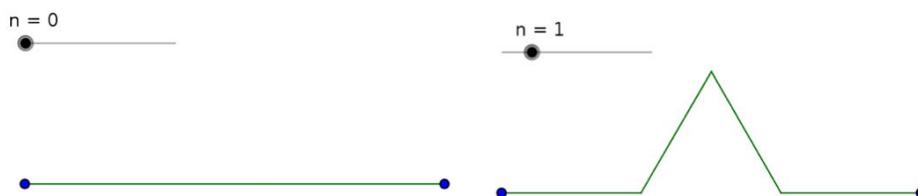
# Capítulo 4

## Construções Clássicas de Fractais

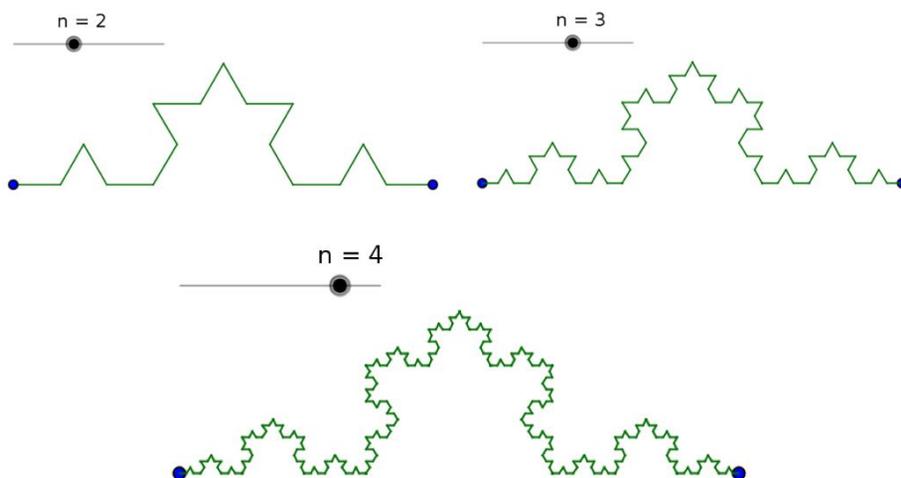
Inicialmente abordaremos as construções clássicas de alguns fractais, tais como a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski e o Conjunto de Cantor. Por último apresentamos uma noção de comprimento, área, volume para esses fractais.

### 4.1 Curva de Koch

A definição mais simples é que fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo (iteração/recursão), apresentando autossimilaridade, dimensão fractal e complexidade infinita. Em 1904, H. Von Koch construiu uma curva contínua e não diferenciável em todos os pontos, chamada Curva de Koch. A construção dessa curva é definida por etapas como segue: inicialmente consideremos um segmento de tamanho 1. Em seguida, dividiremos esse segmento em três partes iguais, a parte central do intervalo é retirada e substituída por dois segmentos de mesmo comprimento, como mostra a figura,



Em seguida, fazemos o mesmo procedimento em cada segmento de reta da etapa  $n = 1$ ,



de acordo com Plaza [7], continuando com esse processo de construção, temos uma aproximação da Curva de Koch, conforme a figura 4.1.

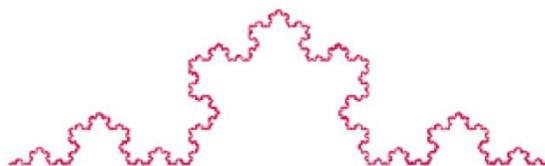


Figura 4.1: Aproximação da Curva de Koch.

Consideremos um triângulo equilátero e o processo de construção da Curva de Koch em cada lado do desse triângulo, obteremos a curva chamada de Floco de Neve, vejamos a figura.

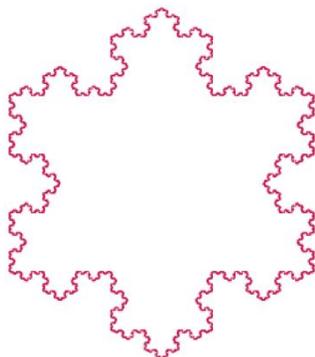


Figura 4.2: Aproximação do Floco de Neve.

## 4.2 Triângulo de Sierpinski

Para construção do Triângulo de Sierpinski, vamos considerar uma região triangular plana. Nela, vamos marcar o ponto médio de cada lado do triângulo e unir os pontos médios por segmentos de reta. Assim, obtemos quatro regiões triangulares, iremos eliminar a região triangular do meio, conforme a figura 4.2.



Figura 4.3: Aproximações do Triângulo de Sierpinski, etapas 1 e 2.

Nas regiões triangulares que permaneceram, façamos o mesmo procedimento da etapa 1 e 2, e obtemos a figura 4.2.

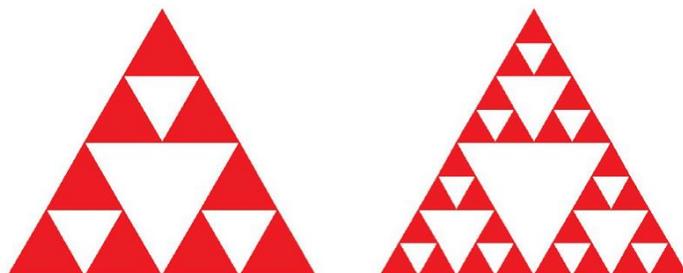


Figura 4.4: Aproximações do Triângulo de Sierpinski, etapas 3 e 4.

Segundo Plaza [7], continuando com o mesmo procedimento sucessivamente, teremos em cada etapa, uma aproximação do Triângulo de Sierpinski.

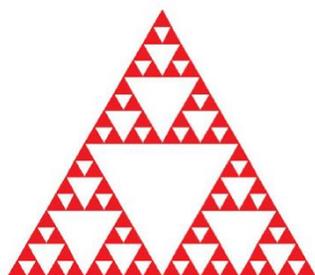


Figura 4.5: Aproximação do Triângulo de Sierpinski, etapa 5.

Uma maneira de obtermos uma imagem do Triângulo de Sierpinski, é utilizando o Triângulo de Pascal que é formado pelos coeficientes binomiais de  $(x + y)^n$ , com  $n = 0, 1, \dots$ . Isso é feito da seguinte forma: consideremos os coeficientes do Triângulo de Pascal na congruência módulo 2, ou seja, o coeficiente é 1 se for ímpar e 0 se for par. Depois, associamos ao número 1 à cor preta e 0 a cor branca, veja a figura 4.2,

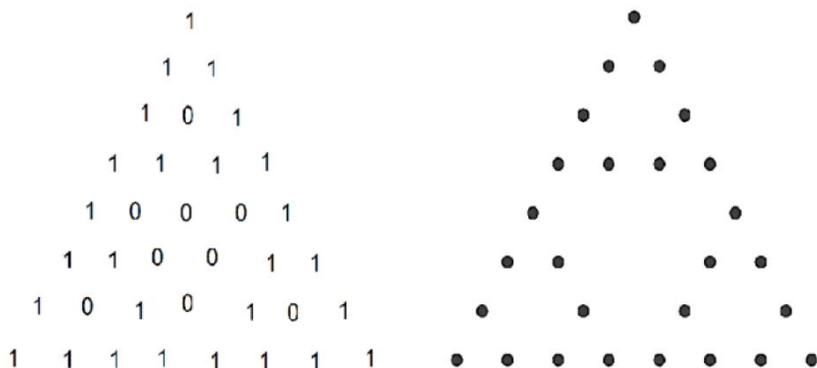


Figura 4.6: Triângulo de Pascal na congruência módulo 2.

### 4.3 Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor é formado pelos pontos  $x \in [0, 1]$  cuja representação na base 3 não contém o algarismo 1, ou seja, os pontos são da forma,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j}$$

onde,  $k_j$  é igual a 0 ou 2.

Para construirmos o Conjunto de Cantor, vamos dividir o intervalo  $[0,1]$  em três partes iguais,

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Denotemos por  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$  os intervalos  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$  e  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , respectivamente, e em cada intervalo  $I_k$  a representação na base 3 começa com  $k_1 = 0$ ,  $k_1 = 1$  e  $k_1 = 2$  respectivamente. Em seguida, vamos eliminar o intervalo aberto  $I_1$  de  $[0,1]$ , permanecendo apenas com os intervalos fechados  $I_0$  e  $I_2$ . Vamos repetir o mesmo processo com os intervalos  $I_0$  e  $I_2$ . Temos,  $k_2 = 0$  nos intervalos  $I_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right]$  e  $I_{20} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ ,  $k_2 = 1$  nos intervalos  $I_{01} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$  e  $I_{21} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$  e finalmente  $k_2 = 2$ , nos intervalos  $I_{02} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$

e  $I_{22} = \left[ \frac{8}{9}, \frac{1}{9} \right]$ . Vamos eliminar os intervalos abertos  $I_{01}$  e  $I_{21}$ . Geometricamente, isto é feito da seguinte forma,



Figura 4.7: Aproximações do Conjunto de Cantor.

Considere  $n \in \mathbb{N}$  e  $A_n = \{a_1 \dots a_n \mid a_i \in \{0, 2\}, i = 1, 2, \dots, n\}$ , isto é,  $A_n$  é formado por todas combinações dos  $a_i$ . Assim,  $I_0$  e  $I_2$  podem ser escritos como  $I_\lambda$ , tal que  $\lambda \in A_1 = \{a_i \mid a_i \in \{0, 2\}, i = 1\} = \{0, 2\}$ . Outro exemplo, para  $n = 2$ , temos  $A_2 = \{a_1 a_2 \mid a_i \in \{0, 2\}, i = 1, 2\} = \{00, 20, 02, 22\}$ , ou seja,  $I_\lambda$  é  $I_{00}$ ,  $I_{02}$ ,  $I_{20}$  ou  $I_{22}$ , com  $\lambda \in A_2$ .

Utilizando esta notação na construção do Conjunto de Cantor, eliminamos em cada subintervalo  $I_{00}$ ,  $I_{02}$ ,  $I_{20}$  e  $I_{22}$  os intervalos abertos  $I_{\lambda 1}$ , onde  $\lambda \in A_2$  e obtemos a união de  $2^3$  intervalos fechados.

Na próxima etapa, eliminamos cada subintervalo aberto da forma  $I_{\lambda 1}$ , com  $\lambda \in A_3$ . Repetindo esse processo, na  $n$ -ésima etapa temos a união de  $2^n$  intervalos fechados. De maneira que devemos eliminar os intervalos abertos da forma  $I_{\lambda 1}$ , com  $\lambda \in A_n$ . Nesse processo obtemos o chamado Conjunto de Cantor, o qual é formado por números do intervalo  $[0, 1]$ , e que não contém o algarismo 1 na sua representação na base 3.

No Conjunto de Cantor, existem alguns pontos interessantes, os quais correspondem aos extremos de alguns subintervalos, determinados no processo de eliminação dos intervalos  $I_{\lambda 1}$  com  $\lambda \in A_n$ . Esses pontos têm o 1 como dígito importante, por exemplo,

$$x = 2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \mathbf{1} \cdot 3^{-5} + 0 \cdot 3^{-6} + \dots = \frac{241}{3^5} = \frac{241}{243}, \quad (4.1)$$

onde os dígitos  $k_i$  são iguais a 0 para  $i \geq 6$ .

Consideremos  $y = 2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + \dots$  onde todos os coeficientes  $k_i$ , são iguais a 2. Então  $y = 1$  (soma dos termos de progressão geométrica infinita), assim

podemos substituir o último dígito importante na equação 4.1 por  $y$ ,

$$x = 2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + 0 \cdot 3^{-5} + 2 \cdot 3^{-6} + \dots,$$

onde os coeficientes são  $k_i = 2$  para  $i \geq 6$ . Isto justifica a afirmação que o Conjunto de Cantor é formado pelos números  $x \in [0, 1]$  cuja a representação na base 3 contém apenas os algarismos 0 ou 2. Um outro exemplo, de número que pertence ao conjunto de Cantor é o  $\frac{1}{4}$ , pois,

$$\frac{1}{4} = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \dots,$$

onde os coeficientes das potências pares são iguais a 2 e os das potências ímpares são iguais a 0.

Outra maneira de obter uma aproximação do Conjunto de Cantor, é a seguinte. Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $L \subset \mathbb{R}$ , definamos o conjunto  $L$  como uma translação de  $L$  por  $x$ ,

$$L + x = \{y + x \mid y \in L\}.$$

Consideremos  $k \in \mathbb{N}$ , a sequência de conjuntos  $L_k = L_{k-1} + s_{k-1}$ , onde a sequência  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é definida por,

$$(s_k) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{3}s_{k-1}, & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Assim sendo o conjunto  $L_k$  para  $k = 0$ ,  $L_0 = \{0\}$  e para  $k \geq 1$ , temos  $L_k = L_{k-1} \cup (L_{k-1} + s_{k-1})$ , ou seja,

$$L_0 = \{0\}, \quad L_1 = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}, \quad L_2 = \left\{0, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right\}, \quad \dots$$

Notemos que  $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_k \subset \dots$  e que  $L_k$  é formado por  $2^k$  pontos distintos. E mais, para cada  $y \in L$  sua representação na base 3 contém os algarismos 0 e 2, portanto cada conjunto  $L_k$  está contido no Conjunto de Cantor. Se  $L = \cup_{k \in \mathbb{N}} L_k$ , então  $L \subset C$ . Por outro lado,  $\frac{1}{4}$  não pertence a  $L$ , ou seja,  $L \neq C$ .

**Propriedade 9.** *Se  $x \in C$ , então  $x$  é limite de alguma sequência de pontos em  $L$ , ou seja,  $L$  é denso em  $C$ .*

*Demonstração.* Se  $x \in C$ , sua representação na base 3 é da forma:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j}$$

onde  $k_j$  é igual a 0 ou 2. Seja  $(x_n)_{k \in \mathbb{N}}$  a sequência  $x_n = \sum_{j=1}^n k_j \cdot 3^{-j}$ , isto é,  $x_n$  corresponde a soma dos  $n$  primeiros termos da representação de  $x$  na base 3. Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $x_n \in L_n$  e,

$$|x - x_n| = \sum_{j=n+1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-j} = 3^{-n}$$

como o  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} = 0$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , o que completa a demonstração.  $\square$

A expansão feita na base 3 pode ser feita para qualquer número  $x \in \mathbb{R}$  e em qualquer base  $b$ , com  $|b| > 1$ . Isso é feito assim,

$$x = \sum_{j=-\infty}^n x_j \cdot b^j$$

com coeficientes  $x_j \in \{0, \dots, |b| - 1\}$  e  $b$  é a base da expansão. A parte finita  $\sum_{j=0}^n k_j \cdot b^j$  da série, é chamada de *parte inteira* de  $x$  na base  $b$ . A outra parte  $x = \sum_{j=-\infty}^{-1} k_j \cdot b^j$  é chamada da *parte fracionária* de  $x$  na base  $b$ . A condição  $|b| > 1$  garante a convergência da série definida por  $x$ . Por exemplo, para  $b = 10$ , temos o número  $x$  escrito na forma decimal.

## 4.4 Noção de Comprimento, Área e Volume

Fractais são formas complexas que não podem ser medidas apenas por dimensão topológica. A dimensão fractal surge então como uma alternativa de medição já que pode assumir valores fracionários, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma. Pode-se afirmar que a dimensão fractal de um conjunto é um valor que diz o quão densamente um conjunto ocupa o espaço métrico em que ele existe.

Consideremos uma curva  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  e um número  $\epsilon$  positivo. Dada uma aproximação poligonal de  $\gamma$ , formada por segmentos de comprimento  $\epsilon$ , denotemos por  $N(\epsilon)$  o número mínimo de segmentos necessários para cobrirmos  $\gamma$ . O número  $N(\epsilon)\epsilon$  é uma aproximação do comprimento  $\ell(\gamma)$  de  $\gamma$ . Para obtermos uma melhor aproximação de  $\gamma$ , basta diminuirmos  $\epsilon$ , de modo que o comprimento  $\ell(\gamma)$  seja dado por:

$$\ell(\gamma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon.$$

Analogamente, se considerarmos uma região  $R$  no plano. Iremos cobrir a região  $R$  com quadrados de lado  $\epsilon$ , onde  $N(\epsilon)$  é o número mínimo de quadrados necessários. Uma aproximação da região  $R$  é dada por,  $A(R) = N(\epsilon)\epsilon^2$  tal que,

$$A(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon^2.$$

Para o volume  $V$  em  $\mathbb{R}^3$  de um sólido proceda da mesma forma, tomando cubos de aresta  $\epsilon$  de modo que se possa cobrir todo o sólido, de maneira que:

$$V(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon^3.$$

Utilizaremos esses resultados para calcular o comprimento e área da Curva de Koch e o comprimento Conjunto de Cantor.

### Exemplo 38. Curva de Koch

Na Curva de Koch,  $(K)$ , na  $n$ -ésima etapa da construção obtemos  $4^n$  segmentos e cada um com comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ . Se  $\epsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ , para cobrirmos a curva  $K$  serão necessários  $4^n$  segmentos, ou seja,  $N(\epsilon) = 4^n$ . Logo, o comprimento da Curva de Koch é,

$$\ell(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

e a área,

$$A(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{9} \right)^n = 0.$$

*Conclusão: a Curva de Koch é limitada, tem comprimento infinito e área nula.*

**Exemplo 39.** *Conjunto de Cantor*

*Para o conjunto de Cantor,  $(C)$ , na  $n$ -ésima etapa obtemos  $2^n$  intervalos de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ . Se  $\epsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ , então o comprimento da Conjunto de Cantor é,*

$$\ell(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left( \frac{1}{3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0.$$

## Referências Bibliográficas

- [1] J. Gerver. *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of  $\pi$* . J. of Math. 92 (1970), 33-55.
- [2] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise - Volume 1. 11 edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2004.*
- [3] Lima, Elon Lages. *Algebrá Linear - 7 edição. Rio de Janeiro, pp. 122-132, IMPA, 2004.*
- [4] Lima, Elon Lages. *Análise Real Volume 1 - 8 edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2006.*
- [5] Lima, Elon Lages. *Análise Real Volume 2 - Rio de Janeiro, IMPA, 1976.*
- [6] Potter, Harrison. *History of Mathematics - The Life and Mathematics of Karl Weierstrass.*, Disponível em < [http : //www.duke.edu/ hdp2/MathHistory4.pdf](http://www.duke.edu/hdp2/MathHistory4.pdf) >. Acesso 09/03/2016.
- [7] Plaza, Sergio, *Fractales Y Generación Computacional de Imágenes*, Monografias del IMCA, N<sup>o</sup> 16, 2000.
- [8] Thim, Johan. *Continuous Nowhere Differentiable Functions*, Master's Thesis, pp. 07-25, 2003.
- [9] Vojtìch, Jarník. *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis*. Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, 1981. pp. 67-81. Disponível em < [http : //dml.cz/dmlcz/400073](http://dml.cz/dmlcz/400073) >. Acesso 09/04/2016.