

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VÍTOR EMANOEL RESPLANDES DE SOUZA

Unicidade dos Solitons de Ricci Gradiente Estáveis

Goiânia
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Vítor Emanuel Resplandes de Souza

3. Título do trabalho

Unicidade dos Solitons de Ricci Gradiente Estáveis

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
 - b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
- O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 18/11/2022, às 14:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vitor Emanuel Resplandes De Souza, Discente**, em 16/12/2022, às 13:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3344616** e o código CRC **1B78EBDB**.

VÍTOR EMANOEL RESPLANDES DE SOUZA

Unicidade dos Solitons de Ricci Gradiente Estáveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Benedito Leandro Neto

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza, Vítor Emanuel Respandes de
Unicidade dos Solitons de Ricci Gradiente Estáveis [manuscrito]
/ Vítor Emanuel Respandes de Souza. - 2022.
LXXXII, 82 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2022.
Bibliografia.

1. Soliton de Ricci. 2. Estável. 3. soliton de Bryant. I. Neto,
Benedito Leandro, orient. II. Título.

CDU 514.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 09 da sessão de Defesa de Dissertação de **Vítor Emanuel Resplandes de Souza**, que confere o título de Mestre em Matemática, **na área de Geometria Diferencial**.

Ao décimo oitavo dia do mês de novembro do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das dez horas, de forma híbrida, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “ **Unicidade dos Solitons de Ricci Gradiente Estáveis**.” Os trabalhos foram instalados pelo presidente da banca e orientador, Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Marcelo Bezerra Barboza - IME/UFG** , membro titular interno e o Professor Doutor **João Paulo dos Santos - MAT/UnB**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao décimo oitavo dia do mês de novembro do ano de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Unicidade dos Solitons de Ricci Gradiente Estáveis



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Bezerra Barboza, Professor do Magistério Superior**, em 18/11/2022, às 11:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 18/11/2022, às 15:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Paulo dos Santos, Usuário Externo**, em 18/11/2022, às 15:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3289521** e o código CRC **70ACCEFB**.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Vítor Emanuel Resplandes de Souza

Bacharel em matemática pela Universidade Federal de Goiás -UFG. Durante sua graduação foi bolsista de iniciação científica PICME na área de geometria diferencial. No decorrer do mestrado foi bolsista CAPES e desenvolveu sua pesquisa em Sólitons de Ricci Gradiente estáveis.

À minha mãe, Marina Resplandes

Agradecimentos

A Deus, por mais essa conquista alcançada.

Aos meus pais, James Silva e Marina Resplandes que, com muito esforço, lutaram para que eu pudesse ter acesso a educação de qualidade, sempre me acompanharam e me apoiaram durante toda minha trajetória acadêmica. Às minhas irmãs Ana Letícia e Jamily Radassa, amo muito vocês.

À minha namorada, Emanuella Lopes, pelo apoio durante todo o processo de mestrado, inclusive na formatação da dissertação, pela paciência, pela compreensão e força oferecida para enfrentar os diversos problemas durante esse período.

Aos meus familiares, que sempre estiveram muito próximos me auxiliando e torcendo para que eu pudesse chegar ao final de mais essa etapa com êxito, em especial a minha avó Maria Resplandes, que nos momentos mais complicados esteve ao meu lado me ajudando para que eu pudesse concluir mais essa etapa.

Ao meu orientador, Professor Benedito, pela disposição, paciência e todo o incentivo passado durante nossas reuniões.

Ao professor Romildo Pina pelo cuidado durante a graduação, pelas orientações e por ter guiado com zelo todo o processo até o meu mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Souza.. **Unicidade dos Solitons de Ricci Gradiente Estáveis**. Goiânia, 2022. 83p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho apresentamos os sólitons de Ricci, objetos que surgem como soluções auto-similares do fluxo de Ricci. Mostraremos algumas propriedades e resultados relacionados a esses sólitons, além disso, provaremos que um sóliton de Ricci gradiente estável tridimensional que é assintótico ao sóliton de Bryant, deve ser isométrico ao sóliton de Bryant, esse teorema foi provado por Brendle. O mesmo teorema foi enunciado de maneira mais geral por Cao et al. para dimensão arbitrária. Nesse artigo, Cao et al. apenas enuncia o resultado sem uma demonstração, dessa forma, o objetivo final de nossa pesquisa é demonstrar o teorema enunciado por Cao et al. generalizando o resultado de Brendle para dimensões maiores ou iguais a 3.

Palavras-chave

sóliton de Ricci, estável, Sóliton de Bryant

Abstract

Souza.. **Uniqueness of gradient steady Ricci solitons**. Goiânia, 2022. 83p. MSc. Dissertation. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

We present the Ricci solitons, objects that appear as self-similar solutions of the Ricci flow. We show some properties and results related to these solitons. In addition, we study [2] and prove that a three-dimensional gradient steady Ricci soliton that is asymptotic to the Bryant soliton must be isometric to the Bryant soliton. This theorem was proved by Brendle [1], and more generally stated by Cao et al. However Cao states the result without any proof, thus, the ultimate goal of our research is to demonstrate the theorem stated by Cao by generalizing Brendle's result to dimensions greater than or equal to 3.

Keywords

Ricci Sliton, Steady, Bryant Soliton

Sumário

Introdução	12
1 Sólitons de Ricci	16
1.1 Produto torcido	23
1.2 Sóliton de Bryant	25
1.3 Sólitons de Ricci gradiente estáveis	32
2 Unicidade dos Sólitons de Ricci gradiente estáveis em dimensão $n = 3$	46
3 Unicidade dos Sólitons de Ricci gradiente estáveis em dimensão $n > 3$	69
Referências Bibliográficas	82

Introdução

Um problema clássico em geometria diferencial é procurar métricas especiais numa variedade, dentre essas métricas estão as métricas canônicas, onde a variedade admite curvatura seccional constante. Encontrar uma métrica canônica em um variedade qualquer, em geral, é uma tarefa difícil. Em dimensão dois o teorema da uniformização afirma que toda superfície fechada admite uma métrica de curvatura constante. A partir disso, é natural conjecturar esse resultado para dimensões maiores que dois, W. Thurston, conjecturou o resultado em dimensão três, essa conjectura afirma que toda variedade tridimensional compacta e orientável possui uma decomposição em partes, onde cada parte admite uma estrutura geométrica canônica, uma consequência direta dessa afirmação é a conjectura de Poincaré.

A conjectura de Poincaré é um problema proposto pelo matemático francês Henri Poincaré que afirma que qualquer variedade tridimensional fechada e simplesmente conexa é homeomorfa a uma esfera tridimensional. O problema foi proposto em 1900 e grandes matemáticos tentaram resolvê-lo, isso culminou na criação de várias ferramentas matemáticas produzidas com intuito de solucionar tal problema, dentre essas ferramentas a que teve maior êxito na resolução de problema foi o fluxo Ricci.

O estudo de fluxos geométricos começou em 1956 por Mullins [22], mais tarde, em 1982 o fluxo de Ricci,

$$\frac{dg}{dt} = -2Ric_g,$$

foi introduzido por Hamilton [18] com o objetivo de estudar variedades tridimensionais com curvatura positiva. Hamilton propôs uma maneira de atacar a conjectura de Poincaré.

A estratégia de Hamilton para solucionar o problema, foi propor um fluxo que deformava a métrica de uma variedade Riemanniana compacta, esse fluxo iria agir sobre a métrica de maneira análoga à equação do calor, e como consequência a curvatura iria se dissipar por toda a variedade como o calor se dissipa por uma superfície metálica ao ser esquentada. Hamilton provou o resultado para variedades com curvatura de Ricci inicialmente positiva, em [18]. Ele prova que a métrica evolui até chegar em uma métrica com curvatura constante e positiva, provando que a variedade é topologicamente a esfera tridimensional.

Um problema encontrado por Hamilton foram as singularidades que o fluxo

desenvolve em variedades tridimensionais, essas singularidades foram estudadas ao longo dos anos. Contornar esse problema foi um passo muito grande na solução da conjectura de Poincaré. Nas equações diferenciais parciais existe um conceito fundamental que é o de reescalonar e aplicar a fórmula da monotonicidade para obter soluções auto-similares. No fluxo de Ricci, tais soluções são modelos para as singularidades do fluxo.

Uma variedade Riemanniana completa (M, g) é chamada sóliton de Ricci gradiente se, existe uma função suave f em M , tal que, o tensor de Ricci Ric , e a métrica g satisfazem a equação

$$Ric_g + Hess_g(f) = \rho g. \quad (0-1)$$

Note que, se f for constante, o Ricci sóliton gradiente torna-se uma variedade de Einstein, dessa forma, Ricci Solitons são naturalmente generalizações de variedades de Einstein. Se $\rho = 0$, o Ricci sóliton gradiente é dito estável, se $\rho > 0$ teremos o sóliton de Ricci gradiente contrátil, se $\rho < 0$ teremos o sóliton de Ricci gradiente expansivo.

Um exemplo de sóliton de Ricci gradiente estável é o charuto de Hamilton [15], que é uma variedade Riemanniana completa (\mathbb{R}^2, g) com métrica

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2},$$

e, com função potencial,

$$f = \log(1 + x^2 + y^2).$$

O Charuto tem curvatura seccional positiva, além disso, não é compacto, sua curvatura escalar decai exponencialmente no infinito.

Outros exemplos de sólitons de Ricci gradiente estáveis, são os sólitons de Bryant [16], encontrados por Robert Bryant, os sólitons encontrados por Bryant são variedades não compactas que se caracterizam por ter curvatura seccional positiva e por serem rotacionalmente simétricos com curvatura escalar decaindo linearmente no infinito.

Estudar a geometria dos sólitons de Ricci gradiente é de fundamental importância para o estudo das singularidades do fluxo de Ricci, pois sempre existe uma solução auto-similar $g(t)$ tal que $g(0) = g_0$, logo, a partir de propriedades geométricas de um sóliton de Ricci gradiente é possível extrair informações sobre as singularidades do fluxo de Ricci.

Dentre essas propriedades geométricas temos os resultados sobre classificação e rigidez de sólitons de Ricci gradiente. Em [10], Cao et al. classificaram os n -dimensionais, ($n \geq 3$), sólitons de Ricci gradiente estáveis completos, não-compactos e localmente conformemente planos. Em particular, Cao et al. provaram que um sóliton de Ricci Gradiente estável completo, não-compacto e localmente conformemente plano com curvatura positiva é, a menos de homotetia, o sóliton de Bryant.

Em [3], Brendle prova que todo Sóliton de Ricci tridimensional, não plano e não colapsado, é rotacionalmente simétrico, isto é, isométrico ao sóliton de Bryant. Em dimensão superior a três, motivado em parte pelos trabalhos de Simon e Solomon [21], Brendle prova que, se (M^n, g, f) é um sóliton de Ricci gradiente estável de dimensão $n \geq 4$, com curvatura seccional positiva e assintoticamente cilíndrico, então (M^n, g, f) é rotacionalmente simétrico, em particular (M^n, g, f) é a menos de homotetia o sóliton de Bryant. Outro resultado de rigidez para sólitons de Ricci gradiente é provado por Brendle [2]. Estudaremos este resultado em detalhes.

Seja (M^3, g_{ij}, f) um sóliton de Ricci gradiente estável tridimensional. Suponha que a curvatura escalar de (M, g) é positiva e se aproxima de 0 no infinito. Denote por $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o campo vetorial $X = \nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sóliton de Bryant e defina $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$u(s) = \log(\psi(s)) + \int_{1/2}^s \left(\frac{3}{2(1-t)} - \frac{1}{(1-t)\psi(t)} \right) dt$$

Além disso, assuma que existe uma exaustão de M por domínios limitados Ω_l tal que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle \nabla R + \psi(R)\nabla f, \nu \rangle = 0$$

Então (M, g) é rotacionalmente simétrico.

No Capítulo 1, é feito um estudo sobre sólitons de Ricci. Na primeira parte mostramos que os sólitons de Ricci aparecem como soluções auto similares do fluxo de Ricci. Também são apresentados alguns exemplos de sólitons de Ricci e o conceito de sólitons de Ricci gradiente estáveis, como o caso das variedades de Einstein, que satisfazem trivialmente a Equação 0-1. Além disso, apresentamos o sóliton de Bryant que tem papel central na demonstração dos principais teoremas da dissertação. Para isso, é necessário entender as propriedades desse sóliton que, sendo um produto torcido da semi-reta \mathbb{R}^+ pela esfera \mathbb{S}^n , naturalmente herda as características desse conjunto de variedades. Provamos ainda que, nesse sóliton, os campos ∇f , ∇R são linearmente dependentes, onde f é a função potencial e R a curvatura escalar. Em particular, em dimensão dois, o sóliton cigarro satisfaz a seguinte equação:

$$\nabla R + R\nabla f = 0.$$

Para concluir o capítulo, apresentamos algumas propriedades gerais de sólitons de Ricci gradiente estáveis. Dentre essas propriedades, provamos que todo sóliton de Ricci gradiente estável satisfaz a seguinte equação

$$R + |\nabla f|^2 = c_0.$$

A partir dessa equação provamos que todo sóliton de Ricci gradiente estável compacto satisfaz $R + |\nabla f|^2 = 0$. Essa expressão é útil para provar que esse sóliton é Ricci flat. Cientes dessa classificação, a partir do capítulo seguinte tratamos apenas de variedades não compactas.

No Capítulo 2, baseados no trabalho de Brendle [2], na primeira parte do capítulo, apresentaremos o teorema principal que garante a rigidez do sóliton de Bryant em dimensão 3; apresentamos os tensores de Cotton e Weyl e, a partir de uma relação entre esses dois tensores, definimos o tensor D . Nesse capítulo, calculamos a norma desse tensor D e mostramos que, sobre uma variedade tridimensional com as propriedades do teorema, esse tensor é identicamente nulo. O fato do tensor D ser identicamente nulo em toda a variedade, garante que essa variedade é localmente conformemente plana, então, para concluir, utilizamos resultados de Cao e Chen presentes em [10]. Nesse artigo, os autores demonstram que um sóliton de Ricci gradiente estável completo e localmente conformemente plano (não-compacto) com curvatura seccional positiva é isométrico ao sóliton de Bryant.

No Capítulo 3 analisamos o teorema 3.0.1 em dimensão superior. Esse teorema foi enunciado por Cao et al. em [7], no entanto, não foi provado. Em sequência, também aplicamos o mesmo método utilizado para provar o teorema de Brendle no Capítulo 2. Ademais, enquanto refazemos a demonstração em dimensão maior, encontramos problemas que naturalmente surgem em dimensão superior a 3, problemas que no decorrer do capítulo são contornados. E, por fim, provamos uma generalização do teorema em dimensão maior ou igual a três.

Sólitons de Ricci

Neste capítulo, realizamos uma breve abordagem sobre sólitons de Ricci, apresentamos algumas definições e resultados básicos que serão utilizados no trabalho. Mais detalhes podem ser encontrados em [12],[15], [20] ou [23].

Iniciamos definindo o fluxo de Ricci, que é uma equação de evolução dentro do espaço das métricas Riemannianas de uma variedade que se comporta de maneira análoga à equação do calor.

Definição 1.0.1 *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma solução para o fluxo de Ricci definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é uma família a um parâmetro de métricas $g(t)$, $t \in I$, em M satisfazendo a equação*

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}. \quad (1-1)$$

A seguir definiremos as soluções auto-similares da Equação 1-1. As soluções auto-similares são constantes ao longo do fluxo no sentido de preservar a geometria da métrica inicial.

Definição 1.0.2 *Uma solução $g(t)$ da equação 1-1 em M^n é uma solução auto-similar se existe uma função positiva e uma família a um parâmetro de difeomorfismos $\varphi(t) : M \rightarrow M$ tal que*

$$g(t) = \sigma(t)\varphi_t^*g(0). \quad (1-2)$$

Observe que, $\varphi(t)^*g(0)$ é a métrica induzida por φ em M definida por

$$g_t(V, W) := g_0(d\varphi_t(V), d\varphi_t(W)).$$

Denotaremos como \mathfrak{Met} o espaço das métricas Riemannianas em uma variedade diferenciável M , \mathfrak{Dif} o grupo de difeomorfismos de M e \mathcal{F} o conjunto das funções diferenciáveis em M .

Começamos analisando quais condições iniciais dão origem a uma solução da equação 1-1. Derivando a equação (1-2) obtemos

$$-2Ric_{g(t)} = \frac{\partial}{\partial t} g_t = \frac{d\sigma}{dt} \varphi_t^* g_0 + \sigma(t) \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X(t)} g_0). \quad (1-3)$$

Aqui, $g_0 = g(0)$, X é o campo vetorial que depende do tempo t donde, $X(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p)$ para cada $p \in M$.

Observe que,

$$X(t) = X(\varphi^{-1}(\varphi(t))) = d\varphi_t^{-1} \left(\frac{d}{dt} \varphi_t \right).$$

Além disso, como $Ric_{g(t)} = \varphi_t^* Ric_{g_0}$, podemos reescrever a expressão (1-3), como

$$\begin{aligned} -2\varphi_t^* Ric_{g_0} &= \frac{d\sigma}{dt} \varphi_t^* g_0 + \sigma(t) \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X(t)} g_0) \\ &= \varphi_t^* \left(\frac{d\sigma}{dt} g_0 \right) + \varphi_t^* (\mathcal{L}_{\sigma(t)X(t)} g_0) \end{aligned}$$

Se tomarmos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} -2Ric_{g_0}(V, W) &= -2(\varphi_t^*)^{-1} \varphi_t^* Ric_{g_0}(V, W) \\ &= -2(\varphi_t^*)^{-1} Ric_{\varphi_t^* g_0}(V, W) \\ &= -2(\varphi_t^*)^{-1} Ric_{\sigma(t)\varphi_t^* g_0}(V, W) \\ &= -2(\varphi_t^*)^{-1} Ric_{g_t}(V, W) \\ &= (\varphi_t^*)^{-1} \left(\frac{d\sigma}{dt} \varphi_t^* g_0(V, W) + \sigma(t) \varphi_t^* (\mathcal{L}_{X(t)} g_0(V, W)) \right) \\ &= \frac{d\sigma}{dt} g_0(V, W) + \mathcal{L}_{\sigma(t)X(t)} g_0(V, W). \end{aligned}$$

O que nos dá a seguinte igualdade

$$-2Ric_{g_0} = \frac{d\sigma}{dt} g_0 + \mathcal{L}_{\sigma(t)X(t)} g_0. \quad (1-4)$$

Muito embora g_0 não dependa de t , o mesmo pode não ocorrer com σ ou X .

Exemplo 1 (*Espaço Euclidiano*) O espaço euclidiano $(M^n, g(t)) \equiv (\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$ é uma solução auto-similar do fluxo de Ricci. Com $\sigma(t) \equiv 1$ e os difeomorfismos φ_t iguais a identidade.

De maneira mais geral, podemos tomar $\sigma(t)$ uma função diferenciável positiva com $\sigma(0) = 1$, considerando os difeomorfismos $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $\varphi_t(x) = \frac{x}{\sqrt{\sigma(t)}}$

para $x \in \mathbb{R}^n$. Isso nos permite chegar ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}\Phi_t^* g_{can}(u, v) &= g_{can}(d\Phi_t(u), d\Phi_t(v)) \\ &= \frac{1}{\sigma(t)} g_{can}(u, v),\end{aligned}$$

onde $g_t = g_{can}$. Podemos concluir que

$$g_t = \sigma(t) \Phi_t^* g_{can} = \sigma(t) \frac{1}{\sigma(t)} g_{can} = g_{can}.$$

Definição 1.0.3 Dizemos que g_t está expandindo, estável ou encolhendo em um tempo t_0 se $\frac{d}{dt}\sigma(t_0)$ é maior, igual ou menor que zero, respectivamente.

No Exemplo 1 o espaço euclidiano admite métrica g_t expandindo, encolhendo ou estável, pois não colocamos restrições sobre a derivada de σ .

Em geral uma solução do fluxo de Ricci evolui puramente por homotetia, como a derivada da métrica em t é um múltiplo do tensor de Ricci que é invariante por homotetia, é natural perguntar se é possível reescrever a equação de uma solução auto-similar com $\sigma(t)$ sendo uma função linear. A proposição seguinte nos dá condições para que isso aconteça.

Proposição 1.0.4 [[14], Proposição 1.3] Seja (M, g_t) uma solução para o fluxo de Ricci e suponha que a solução g_t com a métrica inicial g_0 é única entre as soluções. Então, existe uma família a um parâmetro de difeomorfismos $\Psi_t : M \rightarrow M$ e uma constante $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$g_t = (1 - 2\rho t) \Psi_t^* g_0 \tag{1-5}$$

Demonstração. Derivando (1-4) com respeito ao tempo, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t)g_0 + \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\sigma(t)X(t)} = 0. \tag{1-6}$$

A partir daí, temos dois casos:

Caso 1- Se $\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t) = 0$, então $\sigma(t) = 1 - 2\rho t$, para alguma constante ρ . Consequentemente, por (1-2), $g(t) = (1 - 2\rho t) \Phi_t^* g_0$.

Daí, podemos simplesmente tomar $\Psi_t \equiv \Phi(t)$.

Caso 02- Se $\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t)$ não é nula, tome

$$Y_0 = -\frac{1}{\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t)} \frac{d}{dt}\sigma(t)X(t) \Big|_{t_0}, \tag{1-7}$$

para algm t_0 onde $\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t) \neq 0$, dessa forma

$$\mathcal{L}_{Y_0}g_0 = \mathcal{L}_{-\frac{1}{\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t)}\frac{d}{dt}\sigma(t)X(t)}\Big|_{t_0}g_0 = -\frac{1}{\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t)}\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\sigma(t)X(t)}g_0 = \frac{1}{\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t)}\frac{d^2}{dt^2}\sigma(t)g_0 = g_0.$$

Substituindo (1-7) em (1-3) obtemos

$$\begin{aligned} -2Ric(g_0) &= \frac{d\sigma}{dt}(t)g_0 + \mathcal{L}_{\sigma(t)X(t)}g_0 \\ &= \frac{d\sigma}{dt}(t)\mathcal{L}_{Y_0}g_0 + \mathcal{L}_{\sigma(t)X(t)}g_0 - 2Ric(g_0) \\ &= \frac{d\sigma}{dt}(t)g_0 + \mathcal{L}_{\sigma(t)X(t)}g_0 \\ &= \mathcal{L}_{\frac{d\sigma}{dt}(t)Y_0}g_0 + \mathcal{L}_{\sigma(t)X(t)}g_0 \\ &= \mathcal{L}_{\left[\frac{d\sigma}{dt}(t)Y_0 + \sigma(t)X(t)\right]}g_0. \end{aligned}$$

Considere o campo vetorial $X_0 = \frac{d\sigma}{dt}(0)Y_0 + \sigma(0)X(0)$

Então,

$$-2Ric(g_0) = \mathcal{L}_{X_0}g_0.$$

Seja $\psi(t)$ um grupo a um parâmetro de difeomorfismos gerados por X_0 . Então $\tilde{g} = \psi_t^*g_0$, satisfaz o fluxo de Ricci com as mesmas condições iniciais g_0 e é uma solução estável.

Assim, pela nossa hipótese de unicidade para solução do fluxo de Ricci com métrica inicial g_0 , substituindo φ_t por ψ_t , nós temos $\sigma(t) \equiv 1$. Provando o que queríamos. \square

Se (M^n, g_t) é uma solução para o fluxo de Ricci satisfazendo a E quação 1-5 então dizemos que essa solução está na forma canônica.

Observação 1.0.5 *A proposição mostra que sob a hipótese de unicidade, uma solução do fluxo de Ricci que não está na forma canônica pode se tornar uma solução estável.*

Podemos assumir que $\rho \in \{1, 0, -1\}$. Esses casos correspondem a soluções encolhendo, estáveis ou expadindo, respectivamente.

Uma forma de contornar o problema de assumir a unicidade na Proposição 1.0.4 é observando que uma vez que a geometria de cada solução para o fluxo de Ricci é a mesma de g_0 , podemos começar com g_0 e então construir outra solução na forma canônica e com a mesma métrica inicial. Escolha qualquer tempo t_0 e seja $\rho = -\frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dt}(t_0)$

e $X_0 = \sigma(t_0)X(t_0)$, de modo que a equação 1-2 assuma a seguinte forma

$$-2Ricg_0 = -2\rho g_0 + \mathcal{L}_{X_0}g_0,$$

ou ainda,

$$Ricg_0 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{X_0}g_0 = \rho g_0. \quad (1-8)$$

A partir daí, podemos definir os sólitons de Ricci como estruturas munidas de uma métrica satisfazendo a equação 1-8.

Definição 1.0.6 Dizemos que a quádrupla (M^n, g, X, ρ) é um sólito de Ricci se M^n é uma variedade Riemanniana e $X \in \chi(M)$ um campo de vetores satisfazendo a equação

$$Ric_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \rho g, \rho \in \mathbb{R}. \quad (1-9)$$

Se tomarmos o campo X como o gradiente de uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, $X = -\nabla f$, dados $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{L}_{-\nabla f}g(Y_1, Y_2) &= \frac{1}{2}g(\nabla_{Y_1} - \nabla f, Y_2) + g(\nabla_{Y_2} - \nabla f, Y_1) \\ &= -\frac{1}{2}(Y_1g(\nabla f, Y_2) - g(\nabla f, \nabla_{Y_1}Y_2)) - \frac{1}{2}(Y_2g(\nabla f, Y_1) - g(\nabla f, \nabla_{Y_2}Y_1)) \\ &= -\frac{1}{2}[Y_1\nabla_{Y_2}f - \nabla_{Y_1}Y_2(f) + Y_2\nabla_{Y_1}f - \nabla_{Y_2}Y_1(f)] \\ &= -Hess_g(f). \end{aligned}$$

Desse modo, a equação (1-9) fica da seguinte forma

$$Ric_g - Hess_g(f) = \rho g.$$

Definição 1.0.7 Seja M^n uma variedade Riemanniana com métrica g , dizemos que M^n é um sólito de Ricci gradiente se existe $\rho \in \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$Ric_g - Hess_g(f) = \rho g. \quad (1-10)$$

Dizemos que o sólito é estável, expandido ou contrátil, quando $\rho = 0$, $\rho < 0$ ou $\rho > 0$, respectivamente.

Representamos o Sólito de Ricci gradiente por (M^n, g, f, ρ) , dizemos que a função f é a função potencial do sólito.

Observe que em coordenadas locais, temos

$$R_{ij} - \text{Hess}(f)_{ij} = \rho g_{ij},$$

onde,

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)_{ij} &= \nabla^2 f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f - \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

O próximo resultado mostra uma relação entre sóliton de Ricci gradiente e uma solução auto-similar do fluxo de Ricci.

Teorema 1.0.8 *[[14], Proposição 1.7] Seja (M^n, g_0, f_0, ρ) um sóliton de Ricci gradiente. Se g_0 é uma métrica completa então existe uma solução $g_t = g(t)$ do fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$, uma família a um parâmetro de difeomorfismos φ_t , com $\varphi_0 = Id_M$, e funções f_t definidas para todo t com*

$$\tau(t) = 1 - 2\rho t > 0$$

tais que:

1. $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n$ uma família a um parâmetro de difeomorfismos gerados por

$$X(t) = \frac{1}{\tau(t)} (\nabla_{g_0} f_0)$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = \frac{1}{\tau(t)} (\nabla_{g_0} f_0)(\varphi_t(x)).$$

2. g_t é o pullback por φ_t de g_0 multiplicado pelo fator escalar $\tau(t)$

$$g_t = \tau(t) \varphi_t^*.$$

3. f_t é o pullback por φ_t de f . isto é,

$$f_t = f_0 \circ \varphi_t = \varphi_t^* f_0.$$

Além disso,

$$\text{Ric}_{g_t} + \text{Hess}_{g_t} f_t - \frac{\rho}{\tau(t)} g_t = 0.$$

$$\text{Onde } \frac{\partial}{\partial t} f_t = |\nabla_{g_0} f_t|_{g_t}^2$$

Demonstração. Ver [15] □

Exemplo 2 (Variedades de Einstein) *Uma variedade de Einstein pode ser vista como um sólito de Ricci gradiente, onde f é uma função constante, lembre-se que as variedades de Einstein satisfazem $\text{Ric}_{g_0} = \rho g_0$. Dessa forma, podemos tomar $g_t = (1 - 2\rho t)g_0$, como o grupo de difeomorfismos $\phi_t = \text{Id}_M$. Logo,*

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\rho g_0 = -2\text{Ric}_{g_0}$$

O que demonstra que uma variedade de Einstein é um Sólito de Ricci, além disso, se tomarmos $f(x) = \rho$, temos

$$\text{Ric}_{g_0} + \text{Hess}_{g_0}(\rho) = \text{Ric}_{g_0} = \rho g_0.$$

Provando que uma variedade de Einstein é um sólito de Ricci Gradiente.

Exemplo 3 *Considere a seguinte variedade produto $(S^2 \times \mathbb{R}^2, (1 - 2t)g_{S^2} + dx^2 + dy^2)$, podemos então calcular a derivada da métrica g_t dada por*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(g_t) &= -2g_{S^2} - 0(dx^2 + dy^2) \\ &= -2\text{Ric}_{S^2} - 2\text{Ric}_{\mathbb{R}^2} \\ &= -2(\text{Ric}_{S^2} + \text{Ric}_{\mathbb{R}^2}) \\ &= -2\text{Ric}_{S^2 \times \mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Isso prova que a variedade produto $S^2 \times \mathbb{R}^2$ é um sólito de Ricci.

De maneira mais geral, dadas (M, g_t) e (N, \tilde{g}_t) soluções do fluxo de Ricci em um mesmo intervalo I , a variedade produto $(M \times N, \pi^*(g_t) + \sigma^*(\tilde{g}_t))$ é solução para o fluxo de Ricci. Onde π e σ são projeções naturais de $M \times N$ sobre M e N respectivamente.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\pi^* g_t + \sigma^* \tilde{g}_t) &= \pi^* \frac{\partial}{\partial t}(g_t) + \sigma^* \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{g}_t) \\
&= -2\pi^* Ric_{g_t} - 2\sigma^* Ric_{\tilde{g}_t} \\
&= -2(\pi^* Ric_{g_t} + \sigma^* Ric_{\tilde{g}_t}) \\
&= -2Ric_{\pi^* g_t + \sigma^* \tilde{g}_t}.
\end{aligned}$$

O que nos permite concluir que $(M \times N, \pi^*(g_t) + \sigma^*(\tilde{g}_t))$ é solução para o fluxo de Ricci.

1.1 Produto torcido

Um outro exemplo não trivial de sólitons de Ricci é o sóliton de Bryant, esse sóliton tem um papel muito importante para este trabalho, dessa forma estudaremos o sóliton de Bryant com maior atenção e iremos apresentar algumas propriedades e particularidades desse sóliton que serão utilizadas como ferramentas na demonstração dos principais teoremas dos próximos capítulos.

O sóliton de Bryant é definido como um produto torcido, logo esse sóliton naturalmente herda todas as propriedades de um produto torcido, assim iniciaremos essa seção enunciando alguns fatos básicos sobre produtos torcidos. Para mais detalhes ver [?] e [23].

Definição 1.1.1 (Produto torcido) *Sejam (B, g_B) e (F, g_F) variedades Riemannianas, e seja $\varphi \in \mathcal{F}(B)$ tal que $\varphi > 0$. O produto torcido $M = B \times_{\varphi} F$ é a variedade produto $B \times F$ munida da métrica*

$$g = \pi^*(g_B) + (\varphi \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

onde $\pi : M \rightarrow B$ e $\sigma : M \rightarrow F$ são as projeções naturais de $B \times F$ sobre B e F , respectivamente. Além disso, chamamos φ de função torção, F a variedade fibra, B variedade base de M .

Se $\varphi \equiv 1$, então $M = B \times_{\varphi} F$ é simplesmente a variedade produto $B \times F$.

Exemplo 4 *Considere o plano \mathbb{R}^2 com a parametrização em coordenadas polares*

$$x(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$$

Os coeficientes da métrica são dados por

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 1; \\ g_{12} &= g_{21} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = 0; \\ g_{22} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = r^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Nesse caso, \mathbb{R}^2 é a variedade produto $(\mathbb{R}^+, dr^2) \times_r (\mathbb{S}^1, d\theta^2)$, a função torção é a projeção $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^+, (r, \theta) \mapsto r$.

Exemplo 5 (Superfícies de Revolução) Seja S uma superfície de revolução com a seguinte parametrização $X : (a, b) \times (0, 2\pi) \rightarrow S$, dada por

$$X(u, \theta) = (f(u) \cos \theta, f(u) \sin \theta, g(u)),$$

onde, $f > 0$ e C é a curva parametrizada por $\alpha : (a, b) \rightarrow C$, $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, com α parametrizada pelo comprimento de arco. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= (f'(u) \cos \theta, f'(u) \sin \theta, g'(u)); \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= (-f(u) \sin \theta, f(u) \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

Os coeficientes da métrica são dados por

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = (f'(u) \cos \theta)^2 + (f'(u) \sin \theta)^2 + (g'(u))^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1; \\ g_{12} &= g_{21} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = -f(u) f'(u) \cos \theta \sin \theta + f(u) f'(u) \cos \theta \sin \theta = 0; \\ g_{22} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = (-f(u) \sin \theta)^2 + (f(u) \cos \theta)^2 = f(u)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a métrica é dada por

$$g = du^2 + f(u)^2 d\theta^2.$$

Nesse caso, S é a variedade produto $C \times_f \mathbb{S}^1$, a função torção é f .

Uma pergunta natural sobre produtos torcidos é o comportamento de funções diferenciáveis e vetores sobre a variedade, muitas vezes uma função está definida apenas

sobre a base (ou fibra) da variedade, então uma maneira de "levantar" a função sobre a variedade produto é usando o conceito de levantamento, que iremos definir abaixo.

Definição 1.1.2 (Levantamento) *Sejam B e F variedades diferenciáveis e $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável, considere a variedade produto $B \times F = M$ e $\pi : M \rightarrow B$ a projeção da base B .*

1. O levantamento de φ a $B \times F$ é definido por $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$, é naturalmente diferenciável.
2. Se $v \in T_p B$ e $q \in F$, então o levantamento de v a $(p, q) \in M$ é um vetor $\tilde{v} \in T_{(p,q)} M$ tal que $d\pi(\tilde{v}) = v$. Além disso, $d\sigma(\tilde{v}) = 0$.

Agora, estudaremos o comportamento do gradiente de funções que são levantamentos da base B e da fibra F , para isso enunciaremos a seguinte proposição:

Proposição 1.1.3 *Seja $M = B \times_{\varphi} F$ um produto torcido, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V \in \mathfrak{X}(F)$, então:*

1. $\nabla f = \widetilde{\nabla^B f}$, onde $\tilde{f} = f \circ \pi$ e $\widetilde{\nabla^B f}$ são os levantamentos de f e $\nabla^B f$.
2. $\nabla \tilde{h} = \frac{\nabla^F h}{\varphi^2}$, onde $\tilde{h} = h \circ \sigma$ e $\widetilde{\nabla^F h}$ são os levantamentos de h e ∇h , e ∇ , ∇^B , ∇^F são os gradientes com respeito a métrica de M , B e F respectivamente.
3. $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X^B Y}$ onde $\widetilde{\nabla_X^B Y}$ é o levantamento de $\nabla_X^B Y$.
4. $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{v} = \nabla_{\tilde{v}} \tilde{X} = \left(\frac{\tilde{X}(\tilde{\varphi})}{\tilde{f}} \tilde{V} \right)$

Demonstração. Ver [23] □

Por fim, iremos enunciar uma proposição que nos dá explicitamente a curvatura de ricci em um produto torcido.

Proposição 1.1.4 *Seja $M = B^d \times_{\varphi} F^m$ um produto torcido com $m > 1$, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(F)$, então:*

1. $Ric(\tilde{X}, \tilde{Y}) = Ric^B(X, Y) - \frac{m}{f} \widetilde{Hess f}(\tilde{X}, \tilde{Y})$.
2. $Ric(\tilde{X}, \tilde{V}) = 0$
3. $Ric(\tilde{V}, \tilde{W}) = Ric^F(V, W) - \left(\frac{\Delta_B f}{f} + (m-1) \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi^2} \right) g(\tilde{V}, \tilde{W})$.

Demonstração. Ver [23] □

1.2 Sóliton de Bryant

Munido das proposições e resultado apresentados na seção anterior, nessa seção apresentamos o sóliton de Bryant, para mais detalhes, ver [16].

Seja $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ a métrica padrão na esfera unitária. Tome $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ e considere a seguinte métrica

$$g = dr^2 + \varphi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}. \quad (1-11)$$

Considere a função radial $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $f(r, \rho) = f(r)$, $\rho \in \mathbb{S}^1$. Lembre-se que $Ric_{g_{\mathbb{S}^{n-1}}} = (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Considere a base $\{e_r, e_2, \dots, e_n\} \in T_{(r,p)}M$, onde $e_r = \frac{\partial}{\partial r}$ é o vetor tangente a \mathbb{R}^+ e $\{e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{S}^{n-1} . Utilizando a fórmula para o tensor de Ricci em produtos torcidos, temos

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -(n-1) \frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)}, \\ R_{ri} &= 0 \quad \text{para } 2 \leq i \leq n; \\ R_{ij} &= (n-2)(1 - \varphi'(r)^2) - \varphi(r)\varphi''(r), \quad \text{para } 2 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Assim, o tensor de Ricci pode ser visto da seguinte maneira:

$$Ric_g = -(n-1) \frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} dr^2 + ((n-2)(1 - \varphi'(r)^2) - \varphi(r)\varphi''(r)) g_{\mathbb{S}^{n-1}}. \quad (1-12)$$

Nós podemos calcular a hessiana da função f em coordenadas locais usando as fórmulas da proposição 1.1.3, dessa forma obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^r \nabla^r f &= f''; \\ \nabla^r \nabla^i f &= g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla f, e_i) = f'' g(e_r, e_i) = 0; \\ \nabla^i \nabla^j f &= g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_j) = \frac{f'(r)\varphi'(r)}{\varphi(r)} g(e_i, e_j) = f'(r)\varphi'(r)\varphi(r) (g_{\mathbb{S}^{n-1}})_{ij}. \end{aligned}$$

Assim a Hessiana de f é o seguinte tensor

$$Hess f = f'' dr^2 + \varphi\varphi' f' g_{\mathbb{S}^{n-1}}. \quad (1-13)$$

Supondo que M é um sóliton de Ricci gradiente estável, isto é $Ric_g - Hess f_g = 0$ em M , nós temos

$$\left(f'' + (n-1) \frac{\varphi''}{\varphi} \right) dr^2 + (-\varphi\varphi' f' + (n-2)(1 - \varphi'^2) - \varphi\varphi'') g_{\mathbb{S}^{n-1}} = 0.$$

A partir dessa equação chegamos no seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f'' + (n-1)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0, \\ -\varphi\varphi'f' + (n-2)(1-(\varphi')^2) - \varphi\varphi'' = 0. \end{cases} \quad (1-14)$$

Iremos separar a análise desse sistema em 2 casos,

Caso 1 - $\dim(M) = 2$

Nesse caso, a equação se simplifica para

$$\begin{cases} f'' = -\frac{\varphi''}{\varphi}; \\ f' = -\varphi'\varphi''. \end{cases}$$

Dividindo a primeira pela segunda igualdade obtemos

$$\frac{f''}{f'} = \frac{\varphi''}{\varphi},$$

Integrando o sistema, temos:

$$\log(|f'|) = \log(|\varphi|) + \log(|c_1|),$$

o que nos permite concluir que $f' = c_1\varphi$, c_1 constante.

Substituindo em $-\varphi\varphi'f' - \varphi\varphi'' = 0$, obtemos

$$c_1\varphi\varphi' + \varphi'' = 0.$$

Integrando a igualdade obtemos

$$\varphi' + \frac{c_1}{2}\varphi^2 = c_2$$

Considerando a seguinte condição inicial $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = 0$, $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi'(s) = 1$, obtemos, $c_2 = 1$. Já para c_1 temos três casos a se considerar.

- Para $c_1 = 0$ temos,

$\varphi'(r) = 1$, o que dá $\varphi(r) = r$. Dessa maneira, a métrica é dada por $g = dr^2 + r d\theta^2$

Fazendo a substituição

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

obtendo $g = dx^2 + dy^2$ Assim, para esse caso, nós temos o plano euclidiano.

- Para $c_1 < 0$, vamos supor $c_1 = -2$, a equação diferencial se reduz à

$$\varphi' - \varphi^2 = 1.$$

Podemos então resolver a equação por variáveis separáveis

$$\begin{aligned}\varphi' - \varphi^2 &= 1 \\ \frac{d\varphi}{dr} &= 1 + \varphi^2 \\ d\varphi &= (1 + \varphi^2)dr \\ \int \frac{d\varphi}{1 + \varphi^2} &= \int dr \\ \arctang(\varphi) &= r.\end{aligned}$$

Aplicando *tan* em ambos os lados da equação obtemos,

$$\varphi(r) = \tan(r).$$

Assim, a métrica nesse caso é dada por $g = dr^2 + \tan^2(r)d\theta^2$, a variedade M nesse caso não é completa, uma vez que nos pontos $(\frac{(2n-1)\pi}{2}, p) \in M$ a métrica g não está bem definida.

- Se $c_1 > 0$

Para simplificar os cálculos, vamos supor $c_1 = 2$, a equação diferencial se reduz à

$$\varphi' + \varphi^2 = 1.$$

Podemos resolvê-la por variáveis separáveis

$$\begin{aligned}\varphi' + \varphi^2 &= 1 \\ \frac{d\varphi}{dr} &= 1 - \varphi^2 \\ d\varphi &= (1 - \varphi^2)dr \\ \int \frac{d\varphi}{1 - \varphi^2} &= \int dr \\ \operatorname{arctanh}(\varphi) &= r \\ \varphi &= \tanh(r).\end{aligned}$$

Nesse caso, temos a seguinte métrica

$$g = dr^2 + \tanh^2(r)d\theta^2,$$

com curvatura

$$\begin{aligned} Ric_g &= \frac{\varphi''}{\varphi} dr^2 - \varphi \varphi'' d\theta^2 \\ &= 2\operatorname{sech}^2(r) dr^2 + 2\tanh^2(r) \operatorname{sech}^2(r) d\theta^2. \end{aligned}$$

A função potencial é dada por $f' = 2\varphi$, isto nos dá

$$\begin{aligned} f'(r) &= 2\tanh(r) \\ f(r) &= 2\log(\cosh(r)). \end{aligned}$$

Podemos ainda, tomar a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \sinh(r)\cos(\theta) \\ y = \sinh(r)\sin(\theta) \end{cases}$$

obtendo

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (dr^2 + \tanh^2(r)d\theta^2)(\sinh^2(r)\cos^2(\theta) + \cosh^2(r)\sin^2(\theta) + 1) \\ &= (dr^2 + \tanh^2(r)d\theta^2)(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

Desse modo, a métrica é dada por $g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}$. Esse sólito é chamado sólito Cigarro. Veremos abaixo um resultado de rigidez relacionado ao Sólito Cigarro.

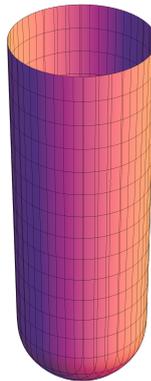


Figura 1.1: Sólito Cigarro

Proposição 1.2.1 *O único sólito de Ricci gradiente estável completo com métrica conforme ao plano euclidiano é sólito Cigarro.*

Demonstração. Veja [15].

□

Voltando ao caso geral, ao realizarmos uma análise qualitativa no sistema

$$\begin{cases} f'' - (n-1)\frac{\phi''}{\phi} = 0 \\ \phi\phi'f' + (n-2)(1-(\phi')^2) - \phi\phi'' = 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

Podemos garantir a existência do Sóliton de Bryant.

Um outro problema que temos é que a princípio não podemos garantir que o sóliton de Bryant seja completo, dessa forma, precisamos estabelecer algumas condições a mais sobre ϕ para que essa métrica seja completa, para isso temos a seguinte proposição.

Proposição 1.2.2 *Seja $(M = \mathbb{R}^+ \times_{\phi} \mathbb{S}^{n-1}, g = dr^2 + \phi^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}})$, a métrica g é completa se e somente se,*

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \phi'(r) &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^{2k}\phi(r)}{dr^{2k}} &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Demonstração. ver [15] □

Teorema 1.2.3 *Para $n \geq 3$ existe um único (a menos de homotetia) sóliton de Ricci gradiente estável completo rotacionalmente simétrico sobre \mathbb{R}^n , esse sóliton é chamado sóliton de Bryant.*

Demonstração. ver [15] □

O sóliton de Bryant será fundamental no desenvolvimento dos próximos capítulos, assim iremos enunciar alguns resultados que serão utilizados nos capítulos 2 e 3.

Proposição 1.2.4 *Seja $(M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}, g = dr^2 + \phi^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ o sóliton de Bryant, então os vetores, ∇f e ∇R são linearmente dependentes, onde f é a função potencial do sóliton e R é sua curvatura escalar.*

Demonstração. Utilizando a Proposição 1.1.3 para qualquer função radial $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(r, \rho) = f(r)$, temos

$$\nabla f = f' \frac{\partial}{\partial r}$$

Além disso, podemos calcular a curvatura escalar de M uma vez que já conhecemos seu tensor de Ricci. Por cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} R &= \text{Tr}(\text{Ric}) \\ &= -(n-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + [(n-2)(1 - (\varphi')^2) - \varphi\varphi'']\frac{n-1}{\varphi^2} \\ &= \frac{n-1}{\varphi^2} ((n-2)(1 - (\varphi')^2) - 2\varphi\varphi''). \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que a curvatura escalar é uma função radial, isto é $R(r, \rho) = R(r)$. Dessa forma, o gradiente de R é dado por $\nabla R = R' \frac{\partial}{\partial r}$. Logo, basta tomarmos a função R'/f' , que teremos

$$\nabla R - \frac{R'}{f'} \nabla f = 0.$$

O que demonstra a dependência linear dos dois vetores. □

Em particular, para $n = 2$ podemos calcular explicitamente o termo R'/f' , uma vez que no sóliton cigarro

$$\begin{aligned} R &= \frac{-2\varphi''}{\varphi} = 4\text{sech}^2(r); \\ \nabla R &= R' \frac{\partial}{\partial r} = -8\tanh(r)\text{sech}^2(r) \frac{\partial}{\partial r}; \\ \nabla f &= f' \frac{\partial}{\partial r} = -2\tanh(r) \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Logo, $-R'/f' = 4\text{sech}^2(r) = R$

Dessa forma, no sóliton Cigarro, vale a seguinte igualdade

$$\nabla R + R\nabla f = 0.$$

Para finalizar esta seção provaremos que o Sóliton de Bryant é um produto torcido localmente conformemente plano.

Para isso lembremos que uma aplicação $f : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ é chamada aplicação conforme se

$$g_M(df(u), df(v))_{f(p)} = \lambda^2(p)g_N(U, V)_p \quad \text{para todo } p \in M \quad \text{e} \quad U, V \in T_pM.$$

A métrica g_M é chamada métrica conforme. Se g_N é a métrica euclidiana, dizemos que g_M é conformemente plana. Além disso, dizemos que g_M é localmente conformemente plana se para cada ponto p de M , existir uma vizinhança coordenada \mathcal{U}

que é conforme ao espaço euclidiano.

Uma vez que o sólito de Bryant é um produto torcido, iremos utilizar o resultado abaixo que nos dá condições necessárias e suficientes para que um produto torcido seja localmente conformemente plano.

Proposição 1.2.5 *Seja $M = B \times_{\varphi} F$ um produto torcido. Então um dos seguintes ocorre:*

1. *Se $\dim B = 1$, então $M = B \times_{\varphi} F$ é localmente conformemente plano se, e somente se, (F, g_F) é um espaço de curvatura constante.*
2. *Se $\dim B > 1$ e $\dim F > 1$, então $M = B \times_{\varphi} F$ é localmente conformemente plano se, e somente se,*
 - a) *(F, g_F) é um espaço de curvatura constante c_F .*
 - b) *A função $f : B \rightarrow \mathbb{R}^+$ define uma deformação conforme global em B tal que $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é um espaço de curvatura constante $c_B = c_F$.*
3. *Se $\dim F = 1$, então $M = B \times_{\varphi} F$ é localmente conformemente plano se, e somente se, a função $f : B \rightarrow \mathbb{R}^+$ define uma deformação conforme em B tal que $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é um espaço de curvatura constante.*

Demonstração. ver [4]. □

Corolário 1.2.6 *O sólito de Bryant é uma variedade localmente conformemente plana.*

Demonstração. O sólito de Bryant é o produto torcido $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$, e a esfera \mathbb{S}^{n-1} com métrica canônica é conformemente plana, logo pela proposição anterior, o sólito de Bryant é localmente conformemente plano. □

1.3 Sólitos de Ricci gradiente estáveis

Nessa seção, iremos enunciar alguns resultados relacionados a Sólitos de Ricci gradiente estáveis, esses resultados irão servir de base para a demonstração do teorema principal dos capítulos 2 e 3. Além disso, apresentaremos algumas propriedades relacionadas aos sólitos de Ricci gradiente estáveis.

Para Sólitos de Ricci gradiente estáveis a equação (1-11), se reduz à

$$Ric_g - Hess(f) = 0. \quad (1-16)$$

Em coordenadas Locais, obtemos a equação

$$R_{ij} - \nabla^i \nabla^j (f) = 0.$$

Tomando o traço da expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{ij}R_{ij} - g^{ij}\nabla^i\nabla^j(f) \\ &= R - \Delta f. \end{aligned}$$

Agora, vamos apresentar a dupla contração da identidade de Bianchi. Para simplificar, a partir dessa seção utilizamos a notação de Einstein para somatório, essa notação consiste em omitir o símbolo do somatório quando os índices aparecem repetidamente em um mesmo termo da expressão.

Um exemplo simples ocorre quando calculamos a curvatura escalar, dada por

$$R = \sum_{i,j=1}^n R_{ij}g^{ij},$$

Na convenção de Einstein, esse somatório é omitido, logo, reescrevemos a equação da seguinte maneira:

$$R = R_{ij}g^{ij}.$$

Proposição 1.3.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, então vale que :*

$$g_i^{im}R_{jklm} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_j R_{kl} \quad (\text{Primeira contração da identidade de Bianchi})$$

e

$$\nabla^m R_{km} = g^{im}\nabla_i R_{km} = \frac{1}{2}\nabla_k R \quad (\text{Dupla contração da identidade de Bianchi}).$$

Demonstração. Pela segunda identidade de Bianchi temos:

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0.$$

Tomando o traço em im , temos:

$$g^{im}\nabla_i R_{jklm} + g^{im}\nabla_j R_{kilm} + g^{im}\nabla_k R_{ijlm} = 0$$

$$g^{im}\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j g^{im}R_{kilm} + \nabla_k g^{im}R_{ijlm} = 0$$

$$g^{im}\nabla_i R_{jklm} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_j R_{kl}.$$

Para a segunda contração, basta tomarmos o traço da segunda identidade bianchi em im e jl .

$$\begin{aligned}
g^{im}g^{jl}\nabla_i R_{jklm} + g^{im}g^{jl}\nabla_j R_{kilm} + g^{im}g^{jl}\nabla_k R_{ijlm} &= 0 \\
g^{im}\nabla_i R_{km} + g^{jl}\nabla_j R_{kl} - g^{im}\nabla_k R_{im} &= 0 \\
g^{im}\nabla_i R_{km} + g^{jl}\nabla_j R_{kl} &= g^{im}\nabla_k R_{im} \\
2g^{jl}\nabla_j R_{kl} &= \nabla_k R \\
g^{jl}\nabla_j R_{kl} &= \frac{1}{2}\nabla_k R.
\end{aligned}$$

Como queríamos. □

Para a próxima proposição iremos precisar utilizar os símbolos de Christoffel, símbolos já conhecidos em geometria riemanniana, para facilitar a compreensão iremos relembrar sua definição e algumas propriedades. Uma vez que, em uma variedade riemanniana M , existe uma única conexão ∇ satisfazendo:

- $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$;
- $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

onde, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Esta conexão é chamada Conexão de Levi-Civita de M , essa conexão satisfaz a fórmula de Koszul, dada por

$$2g(\nabla_Y Z, X) = Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - Xg(Y, Z) - g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) + g(X, [Y, Z]).$$

Em coordenadas locais, isto é, utilizando um sistema de coordenadas (U, x) $U \subset M$ aberto e $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas cartesianas em U , a conexão é dada por:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

As funções $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ são chamados de símbolos de Christoffel da conexão, podemos explicitar esses símbolos uma vez que eles satisfazem a seguinte equação:

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

como a métrica g_{ij} é uma matriz inversível, podemos calcular explicitamente os símbolos de Christoffel que são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

Outra definição importante que também relembramos é o tensor de Curvatura de Riemann que é definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Em coordenadas locais, as componentes desse tensor são dadas por:

$$\begin{aligned} R_{ijk} &= R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

A curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante, de maneira mais geral a curvatura é uma maneira de traduzir quantitativamente o quanto uma variedade deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.3.2 *Se (M, g) é um Sólito de Ricci gradiente estável, então:*

$$\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} = -R_{ijkl} \nabla^l f.$$

Demonstração. Substituindo R_{ij} por $-\nabla^i \nabla^j f$ podemos fazer o cálculo direto, obtendo

$$\begin{aligned} \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} &= +\nabla_i (\nabla^j \nabla^k f) - \nabla_j (\nabla^i \nabla^k f) \\ &= +\frac{\partial}{\partial x^i} (\nabla^j \nabla^k f) - \Gamma_{ij}^s \nabla^s \nabla^k f - \Gamma_{ik}^s \nabla^j \nabla^s f - \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla^i \nabla^k f) \\ &\quad + \Gamma_{ji}^s \nabla^s \nabla^k f - \Gamma_{jk}^s \nabla^i \nabla^s f \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\nabla^j \nabla^k f) - \Gamma_{ik}^s \nabla^j \nabla^s f - \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla^i \nabla^k f) + \Gamma_{jk}^s \nabla^i \nabla^s f \\ &= +\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\nabla_j \nabla_k f - \Gamma_{jk}^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right) - \Gamma_{ik}^s \left(\nabla_j \nabla_s f - \Gamma_{js}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\nabla_i \nabla_k f - \Gamma_{ik}^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \right) + \Gamma_{jk}^s \left(\nabla_i \nabla_s f - \Gamma_{is}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \right) \\ &= +\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right) - \Gamma_{ik}^s \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^s} - \Gamma_{js}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma_{ik}^s \frac{\partial f}{\partial x^s} \right) + \Gamma_{jk}^s \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^s} - \Gamma_{is}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \right) \\ &= -\frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^s} - \Gamma_{jk}^s \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^s} - \Gamma_{ik}^s \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^s} - \Gamma_{js}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^s} + \Gamma_{ik}^s \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^s} + \Gamma_{jk}^s \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^s} - \Gamma_{is}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \right) \\
&= -\frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^s} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^s} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \\
&= -\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^r}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^r - \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^r \right) \frac{\partial f}{\partial x^r} \\
&= R_{ijk}^r \frac{\partial f}{\partial x^r} \\
&= R_{ijk}^r g_{rl} g^{ls} \frac{\partial f}{\partial x^s} \\
&= R_{ijk}^r g_{rl} \nabla^l f \\
&= R_{ijkl} \nabla^l f.
\end{aligned}$$

Obtendo a igualdade desejada. \square

Para demonstrar a próxima proposição utilizaremos o conceito de divergente de um campo, para isso, tome o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e considere a seguinte aplicação,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\
Y &\longmapsto \nabla_Y X.
\end{aligned}$$

O divergente de X é o traço da aplicação $Y \longmapsto \nabla_Y X$. Dessa forma, se considerarmos um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um ponto $p \in M$, tal que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$, teremos,

$$\operatorname{div}(X) = g(\nabla_{e_i} X, e_i),$$

para $X = x^j e_j$, com $x^j : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis,

$$\operatorname{div}(X) = g(\nabla_{e_i} X, e_i) = g(\nabla_{e_i} x^j e_j, e_i) = g(e_i(x^j) e_j + x^j \nabla_{e_i} e_j, e_i) = e_i(x^i).$$

Além disso, o divergente de um campo age de maneira análoga a derivada do produto quando tomamos o divergente do produto de uma função por um campo, isto é, dados $f \in \mathfrak{F}$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + X(f)$. Para provarmos isso basta calcularmos utilizando o referencial geodésico, observe que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= g(\nabla_{e_i} fX, e_i) \\
&= g(e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i) \\
&= fg(\nabla_{e_i} X, e_i) + X(f) \\
&= f\operatorname{div}(X) + X(f).
\end{aligned}$$

Se $X = \nabla f$ é um campo gradiente, então dizemos que o divergente desse campo é o laplaciano da função f , representado por $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$. Observe que utilizando o referencial geodésico,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) \\
&= \operatorname{div}(e_i(f)e_i) \\
&= e_i(e_i(f)) \\
&= g(e_j(f)\nabla_{e_i} e_j + e_i(e_j(f))e_j, e_i) \\
&= g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i) \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f).
\end{aligned}$$

Logo, o laplaciano de f também pode ser visto como o traço do tensor Hessiana da função f .

Proposição 1.3.3 [Hamilton [19]] *Seja (M^n, g_{ij}, f) um sólito de Ricci gradiente estável, satisfazendo*

$$R_{ij} = \nabla^i \nabla^j f$$

Então, temos:

$$\nabla_i R = -2R_{ij} \nabla^j f.$$

Demonstração. Pela proposição anterior, temos:

$$\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} = R_{ijkl} \nabla^l f$$

Tomando o traço da equação, nós obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla_i R_{jk} g^{jk} - g^{jk} \nabla_j R_{ik} &= g^{jk} R_{ijkl} \nabla^l f \\ \nabla_i R - g^{jk} \nabla_j R_{ik} &= -R_{il} \nabla^l f \\ \nabla_i R - \frac{1}{2} \nabla_i R &= -R_{il} \nabla^l f \\ \nabla_i R - \frac{1}{2} \nabla_i R &= -R_{il} \nabla^l f \\ \nabla_i R &= -2R_{il} \nabla^l f.\end{aligned}$$

□

Corolário 1.3.4 [Hamilton [19]] *Se (M, g) é um Sóliton de Ricci gradiente estável, então*

$$R + |\nabla f|^2 = c_0,$$

com c_0 constante.

Demonstração. Tomando a derivada, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_i (R + |\nabla f|^2) &= \nabla_i R + 2\langle \nabla_i \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= -2R_{il} \nabla^l f + 2\left\langle \nabla_i \nabla f, \nabla^l f \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\nabla_i (R + |\nabla f|^2) &= -2R_{il} \nabla^l f + 2\nabla^l f \text{Hess} f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= 2R_{il} \nabla^l f - 2\nabla^l f R_{il} \\ &= 0.\end{aligned}$$

O fato de todas as derivadas parciais da expressão serem nulas garante que a função $R + |\nabla f|^2$ é constante em toda a variedade M . □

O Corolário 1.3.4 nos permite concluir que há uma limitação superior para a curvatura escalar de um sóliton de Ricci gradiente estável, para uma limitação inferior, Zhu Hong Zhang prova em [25] o seguinte resultado:

Teorema 1.3.5 *Seja (M^n, g, f) um sóliton de Ricci gradiente. Suponha que a métrica g é completa, então:*

1. $R \geq 0$ se o sóliton é estável ou contrátil.

2. Existe $C \geq 0$ tal que $R \geq -C$, se o sólito está expandindo.

Aqui, C é uma constante não negativa e R é a curvatura escalar da variedade (M^n, g, f) .

Demonstração. Ver [25]. □

Utilizando o resultado acima aliado a Proposição 1.3.4, podemos garantir que a curvatura escalar de um sólito de Ricci gradiente estável satisfaz $0 \leq R \leq c_0$.

Observação 1.3.6 A constante c_0 pode ser nula, mas neste caso o sólito deve ser Ricci flat. Seja $(M^n, g, f, 0)$ um sólito de Ricci gradiente estável satisfazendo $R + |\nabla f|^2 = 0$, então como $R \geq 0$ e $|\nabla f|^2 \geq 0$, temos, $R = |\nabla f|^2 = 0$ em cada ponto de M , desse modo $\nabla f = 0$, o que nos permite concluir que a função potencial f é constante com hessiana nula, o fato de M ser um sólito de Ricci gradiente estável nos dá $\text{Ric} = \text{Hess}f = 0$ provando assim que (M^n, g, f) é Ricci flat.

Nesse trabalho iremos tomar sólitos onde c_0 é não nulo, dessa forma a constante pode ser tomada como $c_0 = 1$ uma vez que podemos redimensionar o sólito para que a igualdade seja satisfeita. Dessa forma, dado um sólito de Ricci gradiente estável (M^n, g, f) , podemos redimensioná-lo com a seguinte métrica

$$\tilde{g} = c_0 g,$$

o primeiro passo é provar que a nova variedade com métrica \tilde{g} é um sólito de Ricci gradiente estável.

Os componentes da métrica são dados por:

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = c_0 g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = c_0 g_{ij}.$$

Os componentes da inversa da matriz \tilde{g}_{ij} são dados por $\tilde{g}^{ij} = \frac{1}{c_0} g^{ij}$. Calculando os símbolos de Christoffel na nova métrica obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_{ij}^k\right)_{\tilde{g}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{g}_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{g}_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{g}_{ij} \right) \tilde{g}^{mk} \\ &= \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right) \frac{1}{c_0} g^{mk} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right) g^{mk} \\ &= \left(\Gamma_{ij}^k\right)_g. \end{aligned}$$

Isso mostra que os símbolos de Christoffel são os mesmos nas duas métricas. Agora, calculemos os componentes do tensor de Ricci e da Hessiana de f na métrica \tilde{g} ,

$$\begin{aligned}
(R_{ij})_{\tilde{g}} &= \tilde{g}^{kn}(R_{kijn})_{\tilde{g}} \\
&= \tilde{g}^{kn}\tilde{g}\left(R_{\tilde{g}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\
&= \tilde{g}^{kn}\tilde{g}\left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\
&= \tilde{g}^{kn}\left[\Gamma_{ij}^m\Gamma_{kn}^l - \Gamma_{kj}^m\Gamma_{im}^l + \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{ij}^l - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{kj}^l\right]\tilde{g}^{ln} \\
&= g^{kn}\left[\Gamma_{ij}^m\Gamma_{kn}^l - \Gamma_{kj}^m\Gamma_{im}^l + \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma_{ij}^l - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{kj}^l\right]g^{ln} \\
&= g^{kn}(R_{kijn}) \\
&= (R_{ij})_g.
\end{aligned}$$

Para o tensor Hessiana, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos:

$$\begin{aligned}
(Hess_{\tilde{g}}f)(X, Y) &= \tilde{g}\left(\nabla_X\nabla^{\tilde{g}}f, Y\right) \\
&= g\left(\nabla_X\nabla^{\tilde{g}}f, Y\right)c_0 \\
&= g\left(\nabla_X\tilde{g}^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}, Y\right)c_0 \\
&= g\left(\nabla_Xg^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}, Y\right)\frac{c_0}{c_0} \\
&= g(\nabla_X\nabla^g f, Y) \\
&= (Hess_g f)(X, Y).
\end{aligned}$$

Dessa forma, a variedade (M^n, \tilde{g}, f) satisfaz:

$$Ric_{\tilde{g}} - Hess_{\tilde{g}}f = Ric_g - Hess_g f = 0,$$

provando que a variedade (M^n, \tilde{g}, f) é um sólito de Ricci gradiente estável. Agora,

provaremos que M satisfaz $R_{\tilde{g}} + |\nabla^{\tilde{g}} f|_{\tilde{g}}^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{g}} &= \tilde{g}^{ij}(R_{ij})_{\tilde{g}} \\
&= \tilde{g}^{kn}\tilde{g}^{ij}(R_{kijn})_{\tilde{g}} \\
&= \tilde{g}^{kn}\tilde{g}^{ij}\tilde{g} \left(R_{\tilde{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\
&= \tilde{g}^{kn}\tilde{g}^{ij}\tilde{g} \left(\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \right) \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \tilde{g}^{kn}\tilde{g}^{ij} \left[\Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{im}^l + \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^l - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{kj}^l \right] \tilde{g}_{ln} \\
&= \frac{1}{c_0} g^{kn} g^{ij} \left[\Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{im}^l + \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^l - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{kj}^l \right] g_{ln} \\
&= \frac{1}{c_0} g^{kn} g^{ij} (R_{kijn})_g \\
&= \frac{1}{c_0} R_g.
\end{aligned}$$

Calculando a norma de $\nabla^{\tilde{g}} f$ obtemos,

$$\begin{aligned}
|\nabla^{\tilde{g}} f|_{\tilde{g}}^2 &= c_0 |\nabla^g f|_g^2 \\
&= c_0 \left| \frac{1}{c_0} \nabla^g f \right|_g^2 \\
&= \frac{1}{c_0} |\nabla^g f|_g^2.
\end{aligned}$$

Podemos então concluir que $(\tilde{M}^n, \tilde{g}, f)$ satisfaz:

$$R_{\tilde{g}} + |\nabla^{\tilde{g}} f|_{\tilde{g}}^2 = \frac{1}{c_0} (R_g + |\nabla^g f|_g^2) = \frac{c_0}{c_0} = 1. \quad (1-17)$$

A demonstração acima nos garante que para qualquer sóliton de Ricci gradiente estável podemos tomar sem perda de generalidade $c_0 = 1$, nesse trabalho, para simplificar as demonstrações iremos tomar todos os sólitos satisfazendo $R + |\nabla f|^2 = 1$. Sabendo que todo sóliton de Ricci gradiente estável (M, g_{ij}, f) satisfaz a equação (1-17), podemos provar que o conjunto $\{p \in M : R(p) < 1\}$ é denso na variedade M .

Proposição 1.3.7 *Seja (M^n, g, f) um sóliton de Ricci gradiente estável, então o conjunto $\{p \in M : R(p) < 1\}$ é denso em M .*

Demonstração. Sabemos que $M_0 = \{p \in M : R(p) < 1\}$ é um aberto de M , queremos provar que $\overline{M_0} = M$. Suponha por contradição que a afirmação seja falsa. Então, $M/\overline{M_0}$ é um aberto não vazio de M . Tome um conjunto aberto $\Omega \subset M/\overline{M_0}$, $\Omega \neq \emptyset$.

Para cada $p \in \Omega$, temos

$$1 \leq R(p) \leq R(p) + |\nabla f(p)|^2 = 1.$$

Isso implica que

$$R|_{\Omega} \equiv 1.$$

Restringindo a equação (1-17) ao conjunto Ω nós temos

$$R|_{\Omega} + |\nabla f|_{\Omega}^2 \equiv 1 \equiv R|_{\Omega} \quad \forall p \in \Omega.$$

Isso nos permite concluir que $\nabla f = 0$ em todo o Ω . Aplicando o divergente na igualdade, obtemos

$$\Delta f|_{\Omega} = \operatorname{div}(\nabla f)|_{\Omega} = \operatorname{div}(\vec{0}) = 0.$$

Aplicando esse resultado à equação $R + \Delta f = 0$, obtemos

$$R|_{\Omega} = 0,$$

Dessa forma, temos $0 = R = 1$ em todo o conjunto Ω o que é uma contradição. Logo, o conjunto $\{p \in M : R(p) < 1\}$ é denso em M . \square

Proposição 1.3.8 *Seja (M^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente estável então*

$$\nabla(|\nabla f|^2) = -\nabla R, \tag{1-18}$$

além disso,

$$\nabla(|\nabla f|^2) = 2\operatorname{Ric}(\nabla f, \cdot). \tag{1-19}$$

Demonstração.

Para a primeira igualdade, basta tomarmos o corolário 1.3.4 que nos dá

$$-\nabla_i R = \nabla_i(|\nabla f|^2) \quad 1 \leq i \leq n$$

o que é suficiente para afirmamos que $-\nabla R = \nabla(|\nabla f|^2)$.

Para a segunda igualdade, tome $X \in \mathfrak{X}(M)$, por definição, temos

$$\begin{aligned} X(|\nabla f|^2) &= X(g(\nabla f, \nabla f)) \\ &= 2g(\nabla_X \nabla f, \nabla f) \\ &= 2\text{Hess}f(\nabla f, X) \\ &= 2\text{Ric}(\nabla f, X). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.3.9 *Se (M^n, g, f) é um sólito de Ricci gradiente estável, então temos,*

$$\Delta R + 2|\text{Ric}|^2 = -\langle \nabla f, \nabla R \rangle. \quad (1-20)$$

Demonstração. Para provarmos a afirmação, tome um referencial geodésico $\{e, \dots, e_n\}$, isto é, satisfazendo $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\nabla_{e_i} e_j = 0$.

Pela proposição anterior, temos $\nabla R = 2\text{Ric}(\nabla f, \cdot)$, em coordenadas geodésicas temos, $e_i(R) = 2\text{Ric}(e_i, \nabla f) = 2\text{Ric}(e_i, e_j(f)e_j)$, tomando o divergente dessa igualdade obtemos,

$$\begin{aligned} \text{div}(\nabla R) &= \text{div}(2\text{Ric}(e_i, e_j(f)e_j)e_i) \\ \Delta R &= \langle \nabla_{e_k} 2\text{Ric}(e_i, e_j)e_j(f)e_i, e_k \rangle \\ \Delta R &= \langle 2e_k(\text{Ric}(e_i, e_j)e_j(f))e_i, e_k \rangle \\ \Delta R &= 2e_k(\text{Ric}(e_i, e_j)e_j(f))\delta_{ik} \\ \Delta R &= 2e_i(\text{Ric}(e_i, e_j))e_j(f) + 2\text{Ric}(e_i, e_j)e_i(e_j(f)) \end{aligned}$$

Pela proposição 1.3.3, temos $2e_i(\text{Ric}(e_i, e_j)) = e_j(R)$, associando isso à igualdade acima, temos,

$$\Delta R = e_j(R)e_j(f) + 2\text{Ric}(e_i, e_j)e_i(e_j(f)). \quad (1-21)$$

Para concluir, pela equação (1-16), temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(e_i, e_j) &= -\text{Hess}f(e_i, e_j) \\ \text{Ric}(e_i, e_j) &= -\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle \\ \text{Ric}(e_i, e_j) &= -e_i \langle \nabla f, e_j \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_j \rangle \\ \text{Ric}(e_i, e_j) &= -e_i \langle \nabla f, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Associando isso à (1-21) obtemos,

$$\begin{aligned}\Delta R &= e_j(R)e_j(f) - 2\text{Ric}(e_i, e_j)^2 \\ \Delta R &= \langle \nabla R, \nabla f \rangle - 2|\text{Ric}|^2.\end{aligned}$$

Provando a assertiva. □

Para concluir esse capítulo introdutório, provamos que todo sólito de Ricci gradiente estável compacto é Ricci flat.

Proposição 1.3.10 [Hamilton [19]] *Seja (M^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente estável e compacto. Então, a variedade M^n é Ricci flat com respeito à métrica g .*

Demonstração. Em coordenadas locais a equação (1-16) é dada por $R_{ij} = \nabla^i \nabla^j f$, aplicando o traço, obtemos $R = \Delta f$, aplicando a igualdade à Proposição 1.3.4, temos $|\nabla f|^2 + \Delta f = c_0$.

Tome a função:

$$\begin{aligned}h : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = e^{f(x)},\end{aligned}$$

Derivando a função obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(e^f)}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} e^f \\ \text{e} \\ \frac{\partial^2(e^f)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} e^f \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) e^f.\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos calcular o laplaciano de h ,

$$\begin{aligned}\Delta(e^f) &= g^{ij} \nabla^i \nabla^j (e^f) \\ &= g^{ij} \left[\frac{\partial^2(e^f)}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial(e^f)}{\partial x_s} \right] \\ &= g^{ij} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) e^f - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial f}{\partial x_s} e^f \right] \\ &= e^f \left[g^{ij} (\nabla^i \nabla^j f) + g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \\ &= e^f [\Delta f + |\nabla f|^2] \\ &= e^f [R + |\nabla f|^2]\end{aligned}$$

Pela compacidade de M , temos:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_M \Delta(e^f) \\
 &= \int_M e^f (R + |\nabla f|^2) \\
 &= \int_M e^f c_0. \\
 &= c_0 \int_M e^f
 \end{aligned}$$

Observe que $0 = \int_M \Delta h = \int_M e^f \geq 0$. Isso implica que h é constante, consequentemente f é constante. Dessa forma, $Ric = Hess f = 0$, provando que a variedade M é Ricci flat com respeito à métrica g . \square

Observação 1.3.11 *Nesse trabalho iremos considerar apenas sólitos de Ricci gradiente estáveis não-compactos, uma vez que trabalhamos com sólitos satisfazendo $R + |\nabla f|^2 = 1$. Excluindo os sólitos compactos, pois pela proposição anterior eles não satisfazem a equação acima, uma vez que esses sólitos são Ricci flat.*

Unicidade dos Sólitos de Ricci gradiente estáveis em dimensão $n = 3$

Neste capítulo, iremos provar que todo sólito de Ricci gradiente estável tridimensional é rotacionalmente simétrico, desde que satisfaça algumas condições assintóticas. Mais precisamente, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.0.1 (Brendle) *Seja (M^3, g_{ij}, f) um sólito de Ricci gradiente estável tridimensional. Suponha que a curvatura escalar de (M, g) é positiva e se aproxima de 0 no infinito. Denote por $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o campo vetorial $X = \nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sólito de Bryant e defina $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$u(s) = \log(\psi(s)) + \int_{1/2}^s \left(\frac{3}{2(1-t)} - \frac{1}{(1-t)\psi(t)} \right) dt$$

Além disso, assumamos que existe uma exaustão de M por domínios limitados Ω_l tal que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle \nabla R + \psi(R)\nabla f, \nu \rangle = 0$$

Então (M, g) é rotacionalmente simétrico.

Para a demonstração desse teorema iremos precisar definir os seguintes tensores

Definição 2.0.2 [23]

O tensor de Weyl é dado por

$$W(X, Y, Z, S) = R(X, Y, Z, S) - \frac{1}{n-2} \left(Ric - \frac{R}{2(n-1)}g \right) \odot g(X, Y, Z, S).$$

O tensor de Cotton é dado por

$$\begin{aligned} C(X, Y, Z) &= (\nabla_X Ric)(Y, Z) - (\nabla_Y Ric)(X, Z) \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} (g(Y, Z)\nabla_X R - g(X, Z)\nabla_Y R). \end{aligned}$$

Em coordenadas locais, temos

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= W \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2} (R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} + R_{jk}g_{il}) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned}$$

Já o tensor Cotton fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= C \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} (g_{jk} \nabla_i R - g_{ik} \nabla_j R). \end{aligned}$$

Esses dois tensores se relacionam em um sóliton de Ricci gradiente estável através da seguinte equação:

Lema 2.0.3 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um sóliton gradiente estável. Então,*

$$C_{ijk} = -W_{ijks} \nabla^s f + D_{ijk},$$

onde,

$$\begin{aligned} D_{ijk} &= \frac{1}{n-2} R_{ik} \nabla_j f - R_{jk} \nabla_i f \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} ((\nabla_i R + 2R \nabla_i f) g_{jk} - (\nabla_j R + 2R \nabla_j f) g_{ik}). \end{aligned} \quad (2-1)$$

Demonstração. Utilizando as Proposição 1.3.2 e Proposição 1.3.3, podemos fazer um cálculo direto:

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} (g_{jk} \nabla_i R - g_{ik} \nabla_j R) \\ &= R_{ijkl} \nabla^l f - \frac{1}{2(n-1)} (g_{jk} \nabla_i R - g_{ik} \nabla_j R) \\ &= W_{ijkl} \nabla^l f - \frac{1}{n-2} (R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} + R_{jk}g_{il}) \nabla^l f \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \nabla^l f - \frac{1}{2(n-1)} (g_{jk} \nabla_i R - g_{ik} \nabla_j R) \\ &= W_{ijkl} \nabla^l f - \frac{1}{n-2} (R_{ik} \nabla_j f - R_{jk} \nabla_i f) + \frac{1}{2(n-2)} (g_{ik} \nabla_j R - g_{jk} \nabla_i R) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{ik} \nabla_j f - g_{jk} \nabla_i f) - \frac{1}{2(n-1)} (g_{jk} \nabla_i R - g_{ik} \nabla_j R). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla^l f - \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(g_{ik}\nabla_j R - g_{jk}\nabla_i R) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) \\
&= W_{ijkl}\nabla^l f - \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(g_{ik}\nabla_j R - g_{jk}\nabla_i R) \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}(2Rg_{ik}\nabla_j f - 2Rg_{jk}\nabla_i f) \\
&= W_{ijkl}\nabla^l f + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}((\nabla_i R + 2R\nabla_i f)g_{jk} - (\nabla_j R + 2R\nabla_j f)g_{ik}) \quad (2-2) \\
&\quad - \frac{1}{n-2}R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f \\
&= W_{ijkl}\nabla^l f + D_{ijk}
\end{aligned}$$

Como queríamos. □

Esse tensor D será de extrema importância na demonstração do teorema, uma vez que, em dimensão 3, o tensor curvatura pode ser escrito da seguinte forma

$$R_{ijkl} = \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} + R_{jk}g_{il}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Isso nos garante que, em dimensão 3, o tensor de Weyl é sempre nulo. Assim, o Lema 2.0.3 se reduz à seguinte igualdade

$$C_{ijk} = D_{ijk}.$$

Nosso objetivo será provar que o tensor D é identicamente nulo em toda o sólito de Ricci gradiente estável (M^3, g, f) , uma vez que se o tensor D é igual a zero em toda a variedade o tensor de Cotton também é nulo, a partir daí podemos utilizar os seguintes resultados:

Teorema 2.0.4 *Seja (M^3, g, f) uma variedade Riemanniana de dimensão 3, então (M^3, g, f) é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Cotton é nulo.*

Teorema 2.0.5 *Seja (M^n, g, f) uma variedade riemanniana n -dimensional, então M é localmente conformemente plana se e somente se o tensor de Weyl é nulo.*

Demonstração. Ver [20]. □

Para concluir que M^3 é isométrica ao sólito de Bryant, utilizaremos o seguinte teorema provado por Cao e Chen em [10]:

Teorema 2.0.6 *Seja (M^n, g, f) $n \geq 3$, um sóliton de Ricci gradiente estável localmente conformemente plano completo, não compacto. Então, (M^n, g, f) é plano ou isométrico ao sóliton de Bryant.*

Assim, nessa seção provaremos que o tensor D é nulo em M^3 . Iniciaremos calculando a norma desse tensor em função de f e da curvatura escalar R .

Definição 2.0.7 [23] *Seja T um (r, s) tensor, a norma de T é dada por*

$$|T|^2 = g^{i_1 k_1} \dots g^{i_r k_r} g_{j_1 l_1} \dots g_{j_s l_s} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} T_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}.$$

Onde $T_{i_r}^{j_s}$ são as componentes do tensor T .

Proposição 2.0.8 *Se (M, g) é um Sóliton de Ricci gradiente estável, então nós temos*

$$|D|^2 = -(1-R)\Delta R - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - \langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2(1-R). \quad (2-3)$$

Demonstração. Por cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} |D|^2 &= |R_{ik}\nabla_j f - R_{ij}\nabla_k f|^2 + \frac{1}{4}|\nabla R + 2R\nabla f|^2 - (R_{ik}\nabla_j f R_{ij}\nabla_k f)(\nabla^j R + 2R\nabla^j f)g^{ik} \\ &= |R_{ik}\nabla_j f - R_{ij}\nabla_k f|^2 - \frac{1}{4}|\nabla R + 2R\nabla f|^2 \\ &= 2|\text{Ric}|^2|\nabla f|^2 - 2|R_{ij}\nabla_j f R_{ik}\nabla_k f| - \frac{1}{4}|\nabla R + 2R\nabla f|^2 \\ &= 2|\text{Ric}|^2|\nabla f|^2 - \frac{2}{4}|\nabla f|^2 - \frac{1}{4}|\nabla R + 2R\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.3.3 temos:

$$\begin{aligned} |D|^2 &= -(\Delta R + \langle \nabla f, \nabla R \rangle)|\nabla f|^2 - \frac{1}{2}|\nabla f|^2 - \frac{1}{4}|\nabla R + 2R\nabla f|^2 \\ &= -|\nabla f|^2\Delta R - |\nabla f|^2\langle \nabla f, \nabla R \rangle - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - R\langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2|\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 1-17, isto é, $|\nabla f|^2 + R = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} |D|^2 &= -|\nabla f|^2\Delta R - |\nabla f|^2\langle \nabla f, \nabla R \rangle - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - R\langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2|\nabla f|^2 \\ &= -(1-R)\Delta R - (1-R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - R\langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2(1-R) \\ &= -(1-R)\Delta R - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - \langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2(1-R). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Para o próximo passo utilizaremos a Proposição 1.2.4 que garante a dependência linear entre os vetores ∇f e ∇R no sólito de Bryant. Escolha uma função diferenciável $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla R + \psi(R)\nabla f = 0,$$

no sólito de Bryant.

Proposição 2.0.9 *Se (M, g) é um Sólito de Ricci gradiente estável, então o campo de vetores $X = \nabla R + \psi(R)\nabla f$ satisfaz*

$$\begin{aligned} (1-R)\operatorname{div}(X) &= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle - \frac{3}{4}(1-R)\psi(R)^2 + (1-R)\psi(R) \\ &\quad - R^2(1-R) + R(1-R)\psi(R) - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R). \end{aligned} \quad (2-4)$$

Demonstração. Calculando o $\operatorname{div}X$, obtemos:

$$(1-R)\operatorname{div}(X) = (1-R)\Delta R + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle. \quad (2-5)$$

Pela proposição anterior,

$$(1-R)\Delta R = -|D|^2 - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - \langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2(1-R).$$

Substituindo na equação 2-5:

$$\begin{aligned} (1-R)\operatorname{div}(X) &= -|D|^2 - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - \langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f \\ &\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\ &= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle + \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 \\ &\quad - \langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\ &= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle + \frac{3}{4}|\nabla R|^2 - \frac{3}{4}\psi(R)^2|\nabla f|^2 - \frac{3}{4}|\nabla R|^2 \\ &\quad - \langle \nabla f, \nabla R \rangle - R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\ &= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \frac{3}{4}\psi(R)^2|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla R \rangle \\ &\quad - R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(1-R)\operatorname{div}(X) &= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, \psi\nabla f \rangle + \langle \nabla f, \psi(R)\nabla f \rangle \\
&\quad - \frac{3}{4}\psi(R)^2|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla R \rangle + R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f \\
&\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\
&= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle + \psi(R)|\nabla f|^2 - \frac{3}{4}\psi(R)^2|\nabla f|^2 \\
&\quad - \langle \nabla f, X \rangle + R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\
&= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle + \psi(R)(1-R) \\
&\quad - \frac{3}{4}\psi(R)^2(1-R) + R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f \\
&\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle - (1-R)\psi(R)\psi'(R)|\nabla f|^2 \\
&= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle + \psi(R)(1-R) \\
&\quad - \frac{3}{4}\psi(R)^2(1-R) + R^2(1-R) + (1-R)\psi(R) \\
&\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R).
\end{aligned}$$

□

Observe que, o tensor D é constante igual a zero no sóliton de Bryant, uma vez que já provamos na proposição 1.2.6 que o sóliton de Bryant é localmente conformemente plano, associando isso ao Teorema 2.0.4 garantimos que o tensor D é nulo no sóliton de Bryant. Essa propriedade será útil na demonstração do próximo corolário.

Corolário 2.0.10 *A função ψ satisfaz, localmente, a seguinte equação diferencial ordinária:*

$$\frac{3}{4}\psi(s)^2 + \psi(s) - s^2 + s\psi(s) - (1-s)\psi\psi'(s) = 0.$$

Demonstração. Pela proposição anterior, temos que a Equação 2-4 é válida em todo Sóliton de Ricci gradiente estável, em particular no Sóliton de Bryant, cujo campo X e o tensor D são nulos. Desse modo,

$$\begin{aligned}
0 &= (1-R)\operatorname{div}(X) \\
&= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle + \psi(R)(1-R) - \frac{3}{4}\psi(R)^2(1-R) \\
&\quad + R^2(1-R) + (1-R)\psi(R) + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R) \\
&= \psi(R)(1-R) - \frac{3}{4}\psi(R)^2(1-R) + R^2(1-R) + R(1-R)\psi(R) - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R).
\end{aligned}$$

Desse modo, a função ψ satisfaz a seguinte equação diferenciável

$$\psi(s)(1-s) - \frac{3}{4}\psi(s)^2(1-s) + s^2(1-s) + s(1-s)\psi(s) - (1-s)^2\psi(s)\psi'(s) = 0.$$

Dividindo a equação por $(1-s)$ obtemos:

$$\psi(s) - \frac{3}{4}\psi(s)^2 + s^2 + s\psi(s) - (1-s)\psi(s)\psi'(s) = 0.$$

O que prova a assertiva desejada. □

Podemos então refinar a Proposição 2.0.9, usando o corolário acima o que nos dá a seguinte proposição.

Proposição 2.0.11 *Assuma que ψ é escolhida de tal forma que $\nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sóliton de Bryant. Então, localmente, tem-se:*

$$(1-R)\operatorname{div}X = -|D|^2 - \frac{3}{4}\nabla R - \psi(R)\nabla f, X - \langle \nabla f, X \rangle + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle. \quad (2-6)$$

Para o próximo passo, considere a seguinte função $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(s) = \log(\psi(s)) + \int_{1/2}^s \left(\frac{3}{2(1-t)} - \frac{1}{(1-t)\psi(t)} \right) dt.$$

Proposição 2.0.12 *Seja (M^3, g_{ij}, f) um sóliton de Ricci gradiente estável, então o campo X satisfaz:*

$$(1-R)e^{-u(R)}\operatorname{div}(e^{u(R)}X) = -|D|^2 - \frac{R(R-\psi(R))}{\psi(R)^2}|X|^2. \quad (2-7)$$

Demonstração. Por cálculo direto, obtemos:

$$(1-R)e^{-u(R)}\operatorname{div}(e^{u(R)}X) = (1-R)\operatorname{div}(X) + (1-R)u'(R)\langle X, \nabla R \rangle. \quad (2-8)$$

Usando a proposição anterior, podemos substituir 2-6 em 2-8 o que nos dá

$$\begin{aligned} (1-R)e^{-u(R)}\operatorname{div}(e^{u(R)}X) &= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle + (1-R)u'(R)\langle X, \nabla R \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(1-R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)}X) &= -|D|^2 - \frac{3}{4} \langle \nabla R - \psi(R) \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\
&\quad + (1-R) \left(\frac{\psi'}{\psi} + \frac{3}{2(1-R)} - \frac{1}{(1-R)\psi(R)} \right) \langle X, \nabla R \rangle \\
&\quad + (1-R)\psi'(R) \langle \nabla f, X \rangle \\
&= -|D|^2 + \frac{3}{4} \langle \nabla R + \psi(R) \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\
&\quad + (1-R) \frac{\psi'}{\psi} \langle X, \nabla R \rangle - \frac{1}{\psi(R)} \langle X, \nabla R \rangle \\
&= -|D|^2 + \frac{3}{4} |X|^2 - \frac{1}{\psi(R)} |X|^2 + (1-R) \frac{\psi'(R)}{\psi(R)} |X|^2 \\
&= -|D|^2 + |X|^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\psi(R)} + (1-R) \frac{\psi'(R)}{\psi(R)} \right). \quad (2-9)
\end{aligned}$$

Além disso, por 2-6, temos:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4} \psi(s)^2 + \psi(s) - s^2 + s\psi(s) - (1-s)\psi\psi'(s) &= 0 \\
-\frac{3}{4} + \frac{1}{\psi(s)} - \frac{s^2}{\psi(s)^2} + \frac{s}{\psi(s)} - \frac{(1-s)\psi'(s)}{\psi(s)} &= 0 \\
\frac{3}{4} - \frac{1}{\psi(s)} + \frac{(1-s)\psi'(s)}{\psi(s)} &= -\frac{s^2}{\psi(s)^2} + \frac{s}{\psi(s)} \\
\frac{3}{4} - \frac{1}{\psi(s)} + \frac{(1-s)\psi'(s)}{\psi(s)} &= \frac{s(\psi(s) - s)}{\psi(s)^2}. \quad (2-10)
\end{aligned}$$

Substituindo 2-9 em 2-10 ficamos com

$$\begin{aligned}
(1-R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)}X) &= -|D|^2 + |X|^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\psi(R)} + (1-R) \frac{\psi'(R)}{\psi(R)} \right) \\
&= -|D|^2 + |X|^2 \left(\frac{R(\psi(R) - R)}{\psi(R)^2} \right) \\
&= -|D|^2 - \left(\frac{R(R - \psi(R))}{\psi(R)^2} \right) |X|^2.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

A seguir, veremos algumas propriedades assintóticas da função ψ . Para a próxima proposição precisamos da definição de ordem de uma função, essa função descreve o comportamento assintótico de uma função, essa ordem caracteriza as funções de acordo com a sua taxa de crescimento.

Definição 2.0.13 *Sejam $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha g estritamente positiva para todos os valores próximos de b . Dizemos que f é da ordem de g , $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow b$, se*

existem números reais positivos δ e K tais que, para x satisfazendo $0 < |x - b| < \delta$, as funções satisfazem:

$$f(x) \leq Kg(x).$$

Exemplo 6 Se tomarmos f como o polinômio:

$$\begin{aligned} f: (0, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^n - b^n, \end{aligned}$$

então, $f(x) = O(x^n)$, uma vez que $\frac{f(x)}{x^n} < 1 \quad \forall x \in (a, b)$.

Podemos então tomar $\delta = b > 0$, $K = 1$. $b > 0$ implica $b^n > 0$ Isso nos dá,

$$f(x) = x^n - b^n \leq x^n.$$

Lema 2.0.14 Para $s \rightarrow 1$, nós temos $\psi(s) = \frac{2}{3} + O(\sqrt{1-s})$.

Demonstração. Como $X = 0$ no sóliton de Bryant, temos

$$0 = X = \nabla_i R + \psi(R) \nabla_i f$$

Pela Proposição 1.3.3, temos $\nabla_i R = -2R_{ij} \nabla^j f$, isso garante que,

$$-2R_{ij} \nabla^j f + \psi(R) \nabla_i f = 0.$$

Logo, o vetor ∇f é autovetor do tensor de Ricci com autovalor $\frac{\psi(R)}{2}$.

Por outro lado, próximo da origem nós temos,

$$R_{ij} = \frac{1}{3} g_{ij} + O(|x|).$$

Pois, próximo da origem o sóliton de Bryant converge para uma esfera. Tomando E_1, E_2, E_3 base ortonormal de autovetores do tensor R_{ij} , como o tensor de Ricci é simétrico, podemos escolher esta base sendo ortonormal com os auto-valores todos reais.

Assim, podemos escrever $R_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ Então, próximo da origem, temos

$$\lambda_i \delta_{ij} = \frac{1}{3} g_{ij} + O(|x|).$$

Como $\frac{\psi(R)}{2}$ é autovalor, temos

$$\frac{\psi(R)}{2} = \frac{1}{3} + O(|x|).$$

Segue daí que

$$\psi(s) = \frac{2}{3} + O(\sqrt{1-s}) \quad \text{para } s \rightarrow 1.$$

□

Munido de algumas propriedades assintóticas da função ψ podemos então calcular o limite da função $u(s)$ quando $s \rightarrow 1$.

Lema 2.0.15 *O limite $\lim_{s \rightarrow 1} u(s)$ existe.*

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} u(s) &= \log(\psi(s)) + \int_{1/2}^s \left(\frac{3}{2(1-t)} - \frac{1}{(1-t)\psi(t)} \right) dt \\ u(s) - \log(\psi(s)) &= \int_{1/2}^s \left(\frac{3}{2(1-t)} - \frac{1}{(1-t)\psi(t)} \right) dt. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2(1-s)} - \frac{1}{(1-s)\psi(s)} &= \frac{1}{1-s} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\psi(s)} \right) \\ &= \frac{1}{1-s} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\frac{2}{3} + O(\sqrt{1-s})} \right) \\ &= \frac{1}{1-s} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2 + O(\sqrt{1-s})} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2(1-s)} - \frac{1}{(1-s)\psi(s)} &= \frac{3}{1-s} \left(\frac{2 + O(\sqrt{1-s}) - 2}{2(2 + O(\sqrt{1-s}))} \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{O(\sqrt{1-s})}{1-s} \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{1-s}}\right). \end{aligned}$$

Logo, para $s \rightarrow 1$

$$u(s) - \log(\psi(s)) = O(\sqrt{1-s}).$$

O que garante a existência do limite.

Observe ainda que podemos calcular explicitamente o valor do limite

$$\lim_{s \rightarrow 1} u(s) - \log(\psi(s)) = \lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{1-s} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{s \rightarrow 1} u(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \log(\psi(s)) = \log\left(\lim_{s \rightarrow 1} \psi(s)\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log(2) - \log(3).$$

□

Observação 2.0.16 Na demonstração anterior tomamos a primitiva da função $\frac{1}{\sqrt{1-s}}$, isso é possível, pelo fato de que se $f(s) = O(g(s))$, então suas primitivas também satisfazem essa relação de ordem. Isso sai diretamente da seguinte desigualdade:

$$F(s) = \int_{s-\delta}^s f(r)dr \leq M \int_{s-\delta}^s g(r)dr = MG(s).$$

Proposição 2.0.17 Nós temos $\psi(s) < s$, para todo $s \in (0, 1)$.

Demonstração. Suponha por contradição que a afirmação seja falsa. Logo,

$$S = \{s \in (0, 1) : \psi(s) \geq s\}.$$

Seja $s_0 = \sup\{S\}$.

Observe que, S é um conjunto não vazio e fechado de \mathbb{R} . Logo, $S = \bar{S} \subset \overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

Isso implica $s_0 \in [0, 1]$.

Além disso,

$$\lim_{s \rightarrow 1} \psi(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{2}{3} + O(\sqrt{1-s})\right) = \frac{2}{3}.$$

Isso nos permite concluir que $s_0 \in (0, 1)$. Pois $\lim_{s \rightarrow 1} \psi(s) = \frac{2}{3} < 1$.

Além disso, $\psi(s_0) = s_0$. Caso contrário, se $\psi(s_0) > s_0$, pela continuidade de ψ e da função identidade existiria $\varepsilon > 0$, tal que

$$\psi(s) > s \quad \forall \quad s \in (s_0, s_0 + \varepsilon).$$

Logo, existiria $s_1 = s_0 + \varepsilon/2 \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$ satisfazendo $s_1 > s_0$ e $s_1 \in S$. Contradizendo o fato de s_0 ser supremo. Notemos também que $\psi'(s_0) \leq 1$, pois $\psi(s_0) = s_0$ e

$$\psi(s_0 + \varepsilon) < s_0 + \varepsilon \quad \forall \quad \varepsilon \in (0, 1 - s_0).$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \psi(s_0 + \varepsilon) - \psi(s_0) &< s_0 + \varepsilon - s_0 \\ \frac{\psi(s_0 + \varepsilon) - \psi(s_0)}{\varepsilon} &< \frac{s_0 + \varepsilon - s_0}{\varepsilon} \\ \psi'(s_0) &\leq 1. \end{aligned}$$

Usando (2-10), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{s_0(s_0 - \psi(s_0))}{\psi(s_0)^2} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{\psi(s_0)} + (1 - s_0) \frac{\psi'(s_0)}{\psi(s_0)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{s_0} + (1 - s_0) \frac{\psi'(s_0)}{s_0} \\ &\leq \frac{3}{4} - \frac{1}{s_0} + (1 - s_0) \frac{1}{s_0} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{2-11}$$

O que é uma contradição. Logo, $\psi(s) < s$ em todo o intervalo $(0, 1)$. \square

Proposição 2.0.18 *Seja (M^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente estável, então,*

$$|\langle X, \nabla R \rangle| \leq (4|\text{Ric}|^2 + 2|\text{Ric}|)(1 - R). \tag{2-12}$$

em cada ponto de M .

Demonstração. Dados $p \in M^n$, tome $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em torno de p , em coordenadas geodésicas, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle &= \langle \nabla R, \nabla R + \psi(R) \nabla f \rangle \\ &= \langle e_j(R) e_j, e_i(R) e_i + \psi(R) e_i(f) e_i \rangle \\ &= e_i(R) e_j(R) \delta_{ij} + \psi(R) e_i(f) e_j(R) \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2-13}$$

Pela proposição 1.3.8, temos,

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, e_i \rangle &= -2\text{Ric}(\nabla f, e_i) \\ \langle e_j(R) e_j, e_i \rangle &= -2\text{Ric}(e_j(f) e_j, e_i) \\ \langle e_j(R) \delta_{ij} &= -2e_j(f) \text{Ric}(e_i, e_j) \\ e_i(R) &= -2e_j(f) \text{Ric}(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Associando a igualdade acima à (2-13), obtemos,

$$\begin{aligned}\langle \nabla R, X \rangle &= 4e_k(f)Ric(e_i, e_k)e_l(f)Ric(e_j, e_l)\delta_{ij} + 2\psi(R)e_i(f)e_l(f)Ric(e_j, e_l)\delta_{ij} \\ &= 4e_k(f)Ric(e_i, e_k)e_l(f)Ric(e_i, e_l) + 2\psi(R)e_i(f)e_l(f)Ric(e_i, e_l).\end{aligned}$$

Observe que $|\nabla f| = |e_i(f)^2 \langle e_i, e_i \rangle| = (\sum e_i(f)^2)^{1/2} \geq |e_k(f)|$, para todo $1 \leq k \leq n$, além disso, $\psi(R) < R < 1$, isso nos permite concluir que,

$$\begin{aligned}|\langle \nabla R, X \rangle| &\leq |4e_k(f)Ric(e_i, e_k)e_l(f)Ric(e_i, e_l) + 2\psi(R)e_i(f)e_l(f)Ric(e_i, e_l)| \\ &\leq 4|e_k(f)||Ric(e_i, e_k)||e_l(f)||Ric(e_i, e_l)| + 2|\psi(R)||e_i(f)||e_l(f)||Ric(e_i, e_l)| \\ &\leq 4|Ric|^2|\nabla f|^2 + 2|\psi(R)||Ric||\nabla(f)|^2 \\ &\leq 4|Ric|^2|\nabla f|^2 + 2|Ric||\nabla(f)|^2 \\ &= (4|Ric|^2 + 2|Ric|)(1 - R).\end{aligned}$$

□

Corolário 2.0.19 *Seja (M^3, g, f) um sóliton de Ricci gradiente estável, se $\Omega \subset M$ é um domínio limitado, então,*

$$|\langle X, \nabla R \rangle| \leq c_0(1 - R).$$

em cada ponto de Ω .

Demonstração. Pela proposição anterior, temos $|\langle \nabla R, \nabla f \rangle| \leq (4|Ric|^2 + 2|Ric|)(1 - R)$, então, basta provarmos que a função $|Ric|$ é limitada em Ω , observe que, se $|Ric|$ não fosse limitada em Ω , então existiria uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Ric|(p_n) = +\infty.$$

A sequência p_n é limitada, pois está em Ω , logo possui uma subsequência p_{n_k} convergindo para p em M^3 , isso nos dá,

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} |Ric|(p_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} |Ric|(p_{n_k}) = |Ric|(p).$$

O que é uma contradição, uma vez que a função $|Ric|$ está bem definida em toda a variedade M . □

Observação 2.0.20 *Uma outra maneira de ver que $|Ric|$ é limitada em Ω . Basta notarmos que $\Omega \subset M^n$ é limitado, isso implica que $\overline{\Omega}$ é compacto em M^n , logo $|Ric|$ é limitado em $\overline{\Omega}$, e portanto é limitado em $\Omega \subset \overline{\Omega}$.*

Para a próxima proposição, considere a seguinte função,

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 1; \\ \left(1 + e^{\frac{1}{s-2}}\right)^{\frac{1}{1-s}} & \text{se } s \in (1, 2); \\ 1 & \text{se } s \geq 2. \end{cases}$$

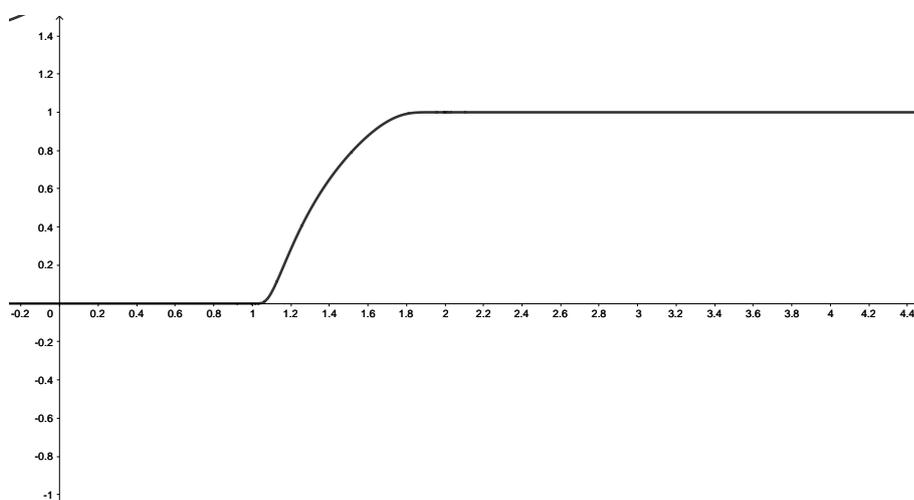


Figura 2.1: Gráfico de χ

Essa função χ é diferenciável em $(0, +\infty)$, uma vez que, se $s \in (0, 1)$ ou $s \in (2, +\infty)$ a função χ é constante, logo, diferenciável. Se $s \in (1, 2)$ a função é composição de funções exponenciais, que por sua vez são diferenciáveis, isso garante a diferenciabilidade de χ . Resta então, sabermos se a função χ é diferenciável nos pontos $\{1, 2\}$. Primeiro precisamos garantir continuidade, para isso, basta calcularmos os limites laterais, que são dados por,

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \chi(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(1 + e^{\frac{1}{s-2}}\right)^{\frac{1}{1-s}} = 0 = \lim_{s \rightarrow 1^-} 0 = \lim_{s \rightarrow 1^-} \chi(s).$$

De maneira análoga,

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} \chi(s) = \lim_{s \rightarrow 2^-} \left(1 + e^{\frac{1}{s-2}}\right)^{\frac{1}{1-s}} = 1 = \lim_{s \rightarrow 2^+} 1 = \lim_{s \rightarrow 2^+} \chi(s).$$

Por fim, provaremos que a derivada $\chi'(s)$ é contínua em $\{1, 2\}$ para garantirmos

a diferenciabilidade de χ em todo o $(0, +\infty)$, uma vez que a função χ' é dada por,

$$\chi'(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 1 \\ \left(1 + e^{\frac{1}{s-2}}\right)^{\frac{1}{1-s}} \left(\frac{\log(1 + e^{\frac{1}{s-2}})}{(1-s)^2} - \frac{e^{\frac{1}{s-2}}}{(1 + e^{\frac{1}{s-2}})(s-2)^2(1-s)} \right) & \text{se } s \in (1, 2) \\ 0 & \text{se } s \geq 2. \end{cases}$$

Mais uma vez, podemos calcular os limites laterais para verificarmos a continuidade da

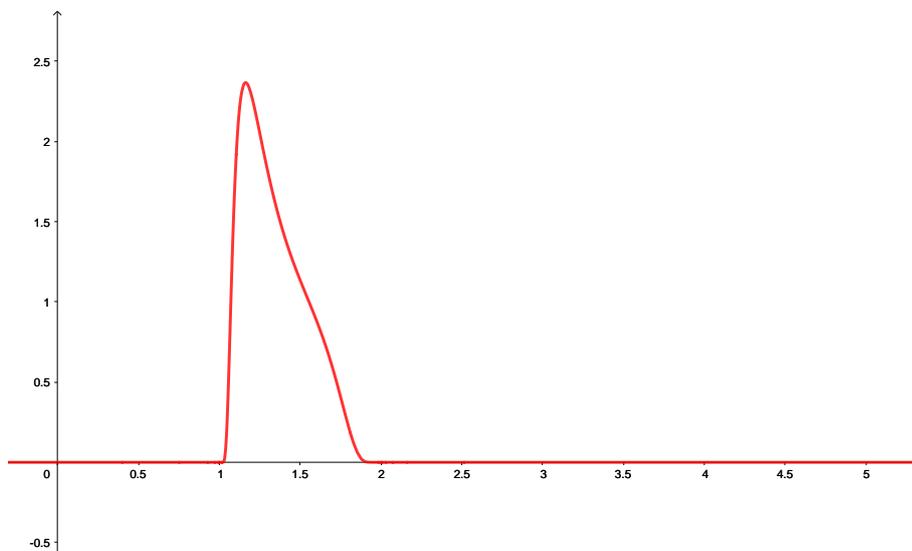


Figura 2.2: Gráfico de χ'

função χ' , isto é,

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \chi'(s) = \lim_{s \rightarrow 2^-} \chi'(s) = 0.$$

Os resultados anteriores nos garantem a diferenciabilidade de χ .

Defina agora o seguinte conjunto de funções,

$$\left\{ \chi_\varepsilon : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \chi_\varepsilon(s) = \chi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \right\}_{\varepsilon > 0}.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ a função χ_ε é dada por,

$$\chi_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq \varepsilon; \\ \left(1 + e^{\frac{\varepsilon}{s-2\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-s}} & \text{se } s \in (\varepsilon, 2\varepsilon); \\ 1 & \text{se } s \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

Um fato direto é que χ_ε é diferenciável com derivada $\chi'_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \chi'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$.

Cada χ'_ε é limitada, pois, $\chi'((0, +\infty)) \subset \chi'([1, 2])$, o conjunto $\chi'([1, 2])$ é imagem de um compacto por uma função contínua, logo, é um conjunto limitado, isto é, existe

$c_1 = c_1(\varepsilon)$ constante real tal que $\chi_\varepsilon(s) < c_1$, $\forall s \in (0, \infty)$. De maneira mais geral, temos que,

$$\chi'_\varepsilon(s) \leq \frac{1}{\varepsilon} \chi' \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup \chi'([1, 2]).$$

Proposição 2.0.21 *A função $e^{u(R)}$ é limitada quando restrita a $\Omega \subset M$, Ω domínio limitado em M^n .*

Demonstração. Seja $\Omega \subset M$ domínio limitado, afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $R(p) > \delta > 0$ para todo $p \in \Omega$.

Suponha por contradição que, para todo $\Omega \subset M^n$ domínio limitado, e $\delta > 0$ exista $p \in M^n$ tal que $R(p) < \delta$. Então $R \equiv 0$ em Ω . M^n é completa, logo, existe uma exaustão por domínios limitados $\Omega_k \subset \text{int}(\Omega_{k+1})$ tal que $R_{\Omega_k} \equiv 0$ em M^n , isso garante que $R \equiv 0$ em toda a variedade M^n , o que é uma contradição, logo, existe $\delta_\Omega = \delta(\Omega)$ tal que $R(p) > \delta_\Omega > 0$.

Além disso, pela proposição 2.0.15, temos,

$$\lim_{s \rightarrow 1} e^{u(s)} = e^{\log(2/3)} = 2/3,$$

logo, temos,

$$e^{u(R(\Omega))} \subset e^{u([\delta_\Omega, 1])}.$$

O conjunto $e^{u([\delta_\Omega, 1])}$ é a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua, logo, é um conjunto limitado, dessa forma, tome, $c_3 = c_3(\Omega) = e^{u([\delta_\Omega, 1])}$, isto nos dá,

$$e^{u(R(p))} \leq c_3 \quad \forall p \in \Omega \subset M.$$

□

Proposição 2.0.22 *Seja Ω um domínio limitado em M com bordo diferenciável. Além disso, suponha que $R < 1$ em cada ponto de $\partial\Omega$. Então,*

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1-R) e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle \rightarrow \int_{\partial\Omega} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0 \\ e & \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \rightarrow \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiro provaremos que $\int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1-R) e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle \rightarrow \int_{\partial\Omega} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle$.

Dado $\varepsilon > 0$, temos,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \mathbf{v} \rangle - \int_{\partial\Omega} e^{u(R)} \langle X, \mathbf{v} \rangle \right| &= \left| \int_{\partial\Omega} (\chi_\varepsilon(1-R) - 1)e^{u(R)} \langle X, \mathbf{v} \rangle \right| \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |\langle X, \mathbf{v} \rangle| \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |X|. \end{aligned}$$

Observe que, $\partial\Omega = (\partial\Omega \cap \{p \in \Omega : 1 - R(p) < 2\varepsilon\}) \cup (\partial\Omega \cap \{p \in \Omega : 2\varepsilon \leq 1 - R(p)\})$.

Observe também que $\chi_\varepsilon(s) = 1$ para $s > 2\varepsilon$. Assim,

$$\int_{\partial\Omega \cap \{2\varepsilon \leq 1 - R\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |X| = 0.$$

Isso nos dá,

$$\int_{\partial\Omega} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |X| = \int_{\partial\Omega \cap \{1 - R < 2\varepsilon\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |X|.$$

Observe que, e $s < 2\varepsilon$, temos

$$\chi_\varepsilon(s) = \chi(s/\varepsilon) \leq \left| 1 + e^{\frac{\varepsilon}{s-2\varepsilon}} \right|^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-s}} \leq \left| 1 + e^{\frac{\varepsilon}{s-2\varepsilon}} \right| \leq 1 + 1 = 2.$$

Restrito ao conjunto $\partial\Omega \cap \{1 - R < 2\varepsilon\}$,

$$|\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |X| \leq |2 - 1| e^{u(R)} |X| \leq e^{u(R)} |X| \leq c_3 |X|,$$

onde, c_3 é dado pela Proposição 2.0.21.

Por fim, restrito ao conjunto $\partial\Omega$, temos

$$|X| = |\nabla R|^2 + 2\langle \nabla R, \psi(R)\nabla f \rangle + \psi(R)^2 |\nabla f|^2.$$

Tomando $\{e_1, \dots, e_n\}$, referencial geodésico, podemos rescrever a norma de X ,

$$\begin{aligned} |\nabla R|^2 &= e_i(R)^2 \\ &= 4Ric^2(e_i, e_i(f)e_i) \\ &= 4Ric^2(e_i, e_j)e_k(f)^2 \\ &\leq 4|Ric|^2 |\nabla f|^2 \\ &< c_5(1-R). \end{aligned}$$

Já provamos que, $|\langle \nabla R, \nabla f \rangle| \leq c_0(1-R) \leq c_0$, isso nos permite concluir que,

$$2|\psi(R)\langle \nabla R, \nabla f \rangle| \leq 2R|\langle \nabla R, \nabla f \rangle| \leq 2c_0, \quad \text{onde } R \leq 1.$$

Podemos então majorar a norma do campo X ,

$$|X|^2 \leq c_5(1-R) + 2C_0 + \psi(R)^2(1-R) \leq c_5 + 2c_0 + 1 = c_6.$$

O que nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |X| &= \int_{\partial\Omega \cap \{1-R < 2\varepsilon\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| e^{u(R)} |X| \\ &\leq c_6 c_3 \int_{\partial\Omega \cap \{1-R < 2\varepsilon\}}. \end{aligned}$$

Observe que, $\Omega \cap \{1-R < 2\varepsilon\} \rightarrow \Omega \cap \{1=R\}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, uma vez que $\partial\Omega \cap \{1=R\}$ é vazio, temos que a parte direita da desigualdade acima tende à 0, isso prova nossa afirmação inicial.

Para a segunda assertiva provemos que

$$\int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \rightarrow \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 - \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \right| \\ &= \left| \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} (\chi_\varepsilon(1-R) - 1) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \right| \\ &\leq \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2. \end{aligned}$$

Se $2\varepsilon < 1-R$, então $\chi_\varepsilon(1-R) = 1$. Isto nos dá,

$$\int_{\Omega \cap \{2\varepsilon < 1-R\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 = 0.$$

Utilizando que $e^{u(R)}$ é limitada em Ω , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 &= \int_{\Omega \cap \{1-R \leq 2\varepsilon\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \\ &\leq \int_{\Omega \cap \{1-R \leq 2\varepsilon\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \\ &\leq c_3 \int_{\Omega \cap \{1-R \leq 2\varepsilon\}} \frac{|D|^2}{1-R}. \end{aligned}$$

Para concluir provaremos que $\frac{|D|^2}{1-R}$ é limitada em Ω .

$$\begin{aligned} \frac{|D|^2}{1-R} &= -\Delta R - \frac{3}{4} \frac{|\nabla R|^2}{1-R} - \frac{\langle \nabla f, \nabla R \rangle}{1-R} - R^2 \\ &\leq |\Delta R| + \frac{3}{4} \frac{|\nabla R|^2}{1-R} - \frac{\langle \nabla f, \nabla R \rangle}{1-R} + R^2 \\ &\leq |\Delta R| + \frac{3}{4} \frac{4|Ric|^2(1-R)}{1-R} + c_0 \frac{c_0(1-R)}{1-R} \\ &\leq |\Delta R| + 3|Ric|^2 + c_0. \end{aligned}$$

Além disso, $|\Delta R| = 2|Ric|^2 + \langle \nabla R, \nabla f \rangle \leq 2c_5^2 + |\nabla R||\nabla f| \leq c_8$.

As funções $|\Delta R|$ e $|Ric|^2$ são limitadas em Ω , isso nos garante que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} |\chi_\varepsilon(1-R) - 1| \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 &\leq c_3 \int_{\Omega \cap \{1-R \leq 2\varepsilon\}} \frac{|D|^2}{1-R} \\ &\leq c_3 c_8 \int_{\Omega \cap \{1-R \leq 2\varepsilon\}} \\ &\leq c_3 c_8 \text{vol}\{1-R < 2\varepsilon\}. \end{aligned}$$

A parte direita da inequação tende à zero quando ε tende a 0, isso é suficiente para provar a assertiva. \square

Proposição 2.0.23 *Seja Ω um domínio limitado em M com bordo diferenciável. Além disso, suponha que $R < 1$ em cada ponto de $\partial\Omega$. Então:*

$$\int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \leq - \int_{\partial\Omega} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle.$$

Demonstração. Seguem das proposições 2.0.12 e 2.0.17,

$$\begin{aligned}\psi(R) &< R \\ \frac{R(\psi(R) - R)}{\psi(R)^2} |X|^2 &< 0 \\ -\frac{R(R - \psi(R))}{\psi(R)^2} |X|^2 &< 0 \\ -|D|^2 - \frac{R(R - \psi(R))}{\psi(R)^2} |X|^2 &< -|D|^2.\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que,

$$(1 - R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)} X) = -|D|^2 - \frac{R(R - \psi(R))}{\psi(R)^2} |X|^2 < -|D|^2. \quad (2-14)$$

Usando o teorema da divergência, nós obtemos:

$$\int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1 - R)e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle = \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \operatorname{div}(\chi_\varepsilon(1 - R)e^{u(R)} X). \quad (2-15)$$

Vamos então, calcular o divergente do campo $\chi_\varepsilon(1 - R)e^{u(R)} X$. Utilizando a regra do produto para o divergente, obtemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\chi_\varepsilon(1 - R)e^{u(R)} X) &= X(\chi_\varepsilon(1 - R))e^{u(R)} + \chi_\varepsilon(1 - R)\operatorname{div}(e^{u(R)} X) \\ &= [\nabla R(\chi_\varepsilon(1 - R)) + \psi(R)\nabla f(\chi_\varepsilon(1 - R))]e^{u(R)} \\ &\quad + \chi_\varepsilon(1 - R)\operatorname{div}(e^{u(R)} X).\end{aligned}$$

Tomando um referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\chi_\varepsilon(1 - R)e^{u(R)} X) &= [\nabla R(\chi_\varepsilon(1 - R)) + \psi(R)\nabla f(\chi_\varepsilon(1 - R))]e^{u(R)} \\ &\quad + \chi_\varepsilon(1 - R)\operatorname{div}(e^{u(R)} X) \\ &= -e_i(R)\chi'_\varepsilon(1 - R)(e_i(R) + \psi(R)e_i(f))e^{u(R)} \\ &\quad + \chi_\varepsilon(1 - R)\operatorname{div}(e^{u(R)} X) \\ &= -e^{u(R)}\chi'_\varepsilon(1 - R)\langle \nabla R, X \rangle + \chi_\varepsilon(1 - R)\operatorname{div}(e^{u(R)} X).\end{aligned}$$

Associando a equação acima à (2-15) e à Proposição 2.0.12, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle &= \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \operatorname{div}(e^{u(R)} X) \\
&\quad - \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle \\
&\leq - \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \\
&\quad - \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle.
\end{aligned}$$

Nós afirmamos que,

$$\int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2-16)$$

Tome o conjunto $\Omega \cap \{p \in M : \varepsilon \leq 1 - R(p) \leq 2\varepsilon\}$. Em cada ponto desse conjunto, temos $\frac{1-R}{\varepsilon} \leq 2$. Dessa forma, em cada ponto de $\Omega \cap \{p \in M : \varepsilon \leq 1 - R(p) \leq 2\varepsilon\}$, temos,

$$\begin{aligned}
\chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} |\langle X, \nabla R \rangle| &\leq \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} c_0(1-R) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \sup \chi'([1, 2]) c_3 c_0(1-R). \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \sup \chi'([1, 2]) c_3 c_0(2\varepsilon) \\
&= 2c_0 c_3 \sup \chi'([1, 2]) = c_7.
\end{aligned}$$

As constantes c_0 e c_3 são constantes obtidas das Proposições 2.0.19 e 2.0.21 respectivamente, nessas proposições, provamos que essas constantes não dependem de ε .

Podemos então, calcular $\int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle \right| &\leq \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} |\langle X, \nabla R \rangle| \\
&= \int_{\Omega \cap (\{0 < 1-R < \varepsilon\} \cup \{2\varepsilon < 1-R\})} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} |\langle X, \nabla R \rangle| \\
&\quad + \int_{\Omega \cap \{\varepsilon < 1-R < 2\varepsilon\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} |\langle X, \nabla R \rangle|.
\end{aligned}$$

Se $1 - R > 2\varepsilon$ ou $1 - R < \varepsilon$, vale que, $\chi'_\varepsilon(1 - R) = 0$, então, temos,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1 - R) e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle \right| &\leq \int_{\Omega \cap \{\varepsilon < 1 - R < 2\varepsilon\}} \chi'_\varepsilon(1 - R) e^{u(R)} |\langle X, \nabla R \rangle| \\ &\leq \int_{\Omega \cap \{\varepsilon < 1 - R < 2\varepsilon\}} 2c_0 c_3 \sup \chi'([1, 2]) \\ &= 2c_0 c_3 \sup \chi'([1, 2]) \int_{\Omega \cap \{\varepsilon < 1 - R < 2\varepsilon\}} \\ &\leq c_4 \text{Vol}\{\varepsilon < 1 - R < 2\varepsilon\}. \end{aligned}$$

A parte direita da desigualdade tende a 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$ uma vez que o conjunto $\{R = 1\}$ tem medida nula, basta lembrarmos que $\{R = 1\}$, é fechado, uma vez que toda sequencia $x_n \in \{R = 1\}$ convergindo para $x \in M$, satisfaz $p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = 1$, além disso, o conjunto $\{R = 1\}$ tem interior vazio, caso possuísse pontos interiores, teríamos um aberto de M contido em $\{R = 1\}$, nesse aberto, a função $|\nabla f|$ seria nula, consequentemente $\Delta f = \text{div}(\nabla f) = 0 = R$, o que é uma contradição.

Isso prova a afirmação 2-16, combinando com 2-15, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1 - R) e^{u(R)} \langle X, \mathbf{v} \rangle &\leq - \int_{\Omega \cap \{\varepsilon \leq 1 - R\}} \chi_\varepsilon(1 - R) \frac{e^{u(R)}}{1 - R} |D|^2 \\ &\quad + 2c_0 c_3 \text{Vol}\{\varepsilon \leq 1 - R \leq 2\varepsilon\} \end{aligned}$$

Tome $\varepsilon \rightarrow 0$. Sabendo que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(s) = 1$, temos,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1 - R) e^{u(R)} \langle X, \mathbf{v} \rangle &\leq - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap \{\varepsilon \leq 1 - R\}} \chi_\varepsilon(1 - R) \frac{e^{u(R)}}{1 - R} |D|^2 \\ &\quad + 2c_0 c_3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Vol}\{\varepsilon \leq 1 - R \leq 2\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\int_{\partial\Omega} e^{u(R)} \langle X, \mathbf{v} \rangle \leq - \int_{\Omega} \frac{e^{u(R)}}{1 - R} |D|^2.$$

Isso prova a assertiva. □

Teorema 2.0.24 *Seja (M^3, g, f) um sóliton de Ricci gradiente estável tridimensional. Suponha que a curvatura escalar de (M, g) é positiva e se aproxima de 0 no infinito. Denote por $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o campo vetorial $X = \nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sóliton de Bryant e defina $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$u(s) = \log(\psi(s)) + \int_{1/2}^s \left(\frac{3}{2(1-t)} - \frac{1}{(1-t)\psi(t)} \right) dt$$

Além disso, assumamos que existe uma exaustão de M por domínios limitados Ω_l tal que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle \nabla R + \psi(R) \nabla f, \nu \rangle = 0$$

Então (M, g) é o sóliton de Bryant.

Demonstração. Assumindo que exista uma exaustão de M por domínios limitados Ω_l tais que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle = 0.$$

Lembre-se que uma exaustão Ω_l de M satisfaz:

- Cada Ω_l é uma região pré compacta com fronteira suave;
- $\Omega_l \subset \Omega_k$ desde que $l < k$.
- $\bigcup_l \Omega_l = M$.

Associando essa hipótese à proposição 2.0.23, nós obtemos

$$0 \leq \int_{\Omega_l \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \leq - \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle$$

Tomando o limite de $l \rightarrow +\infty$, temos

$$0 \leq \int_{\{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 = 0.$$

Consequentemente $\frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2(p)$ se anula no conjunto $\{x \in M^3 : R(x) < 1\}$. Se $R(p) \neq 1$ em $\{R < 1\}$, temos $|D|^2(p) = 0$. $\{x \in M^3 : R(x) < 1\}$ é denso em M^3 , pela continuidade do tensor D , temos

$$\{0\} = D(\{R < 1\}) = D(\overline{\{R < 1\}}) = D(M^3).$$

Isso é suficiente para provar que o tensor D é nulo em toda a variedade M^3 .

Pela Proposição 2.0.6 e Proposição 2.0.4 a variedade (M^3, g, f) é isométrica ao sóliton de Bryant. \square

Unicidade dos Sólitos de Ricci gradiente estáveis em dimensão $n > 3$

O objetivo central desse capítulo é analisar a seguinte afirmativa enunciado por Cao et al. em [7].

Teorema 3.0.1 [[7] Proposição 5.2] *Seja (M^n, g, f) , $n \geq 3$, um sólito de Ricci gradiente estável. Suponha que a curvatura escalar R é positiva e se aproxima de zero no infinito. Denote por $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o campo vetorial $X = \nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sólito de Bryant e defina $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$u(s) = \log(\psi(s)) + \frac{1}{n-1} \int_{1/2}^s \left(\frac{n}{1-t} - \frac{n-1-(n-3)t}{(1-t)\psi(t)} \right) dt.$$

Além disso, assuma que exista uma exaustão de M^n por domínios limitados Ω_l tal que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle \nabla R + \psi(R)\nabla f, \nu \rangle = 0.$$

Então, $D = 0$. Em particular, para $n = 3$, (M^3, g, f) é isométrico ao Sólito de Bryant.

Dessa maneira, construímos uma demonstração do Teorema 3.0.1, pois ela não está publicada. Iniciamos calculando a norma do tensor D . Lembre-se que o tensor D é definido da seguinte maneira:

$$D_{ijk} = \frac{1}{n-2} R_{ik} \nabla_j f - R_{jk} \nabla_i f + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} ((\nabla_i R + 2R\nabla_i f)g_{jk} - (\nabla_j R + 2R\nabla_j f)g_{ik}).$$

Lembre-se que, em dimensão três, o tensor de Weyl é sempre nulo. Assim, o Lema 2.0.3 se reduz à seguinte igualdade,

$$C_{ijk} = D_{ijk}.$$

Em dimensão maiores essa afirmação não é válida, mas podemos provar que para dimensão maior ou igual a quatro o tensor de Cotton é igual a derivada do tensor de Weyl

multiplicada por uma constante,

$$\frac{n-2}{n-3} \nabla^l W_{ijkl} = -C_{ijk}.$$

Demonstração. Ver [1] □

Proposição 3.0.2 *Se (M^n, g, f) é um sóliton de Ricci gradiente estável, então temos que,*

$$\begin{aligned} |D|^2 &= \frac{-(1-R)\Delta R}{(n-2)^2} - \frac{\langle \nabla R, \nabla f \rangle}{(n-2)^2} - \frac{n|\nabla R|^2}{2(n-1)(n-2)^2} \\ &\quad + \frac{(n-3)R\langle \nabla R, \nabla f \rangle}{(n-1)(n-2)^2} - \frac{2R^2(1-R)}{(n-1)(n-2)^2}. \end{aligned}$$

Demonstração.

Por cálculo direto, obtemos

$$\begin{aligned} |D|^2 &= \frac{2}{(n-2)^2} |\text{Ric}|^2 |\nabla f|^2 - \frac{2}{(n-2)^2} R_{ik} \nabla_j f R_{jk} \nabla_i f \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} |\nabla R + 2R\nabla f|^2 \\ &\quad + \frac{2}{(n-1)(n-2)^2} (R_{ik} \nabla f - R_{jk} \nabla_i f) (\nabla_i R + 2R\nabla_i f) g_{jk} \\ &= \frac{2}{(n-2)^2} |\text{Ric}|^2 |\nabla f|^2 - \frac{2}{(n-2)^2} \nabla_i f \nabla_k f \nabla_j f \nabla_j f \nabla_k f \nabla_i f \\ &\quad + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} |\nabla R + 2R\nabla f|^2 \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)(n-2)^2} (\nabla_i R + 2R\nabla_i f) (\nabla_i R + 2R\nabla_i f). \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} |D|^2 &= \frac{2}{(n-2)^2} |\text{Ric}|^2 |\nabla f|^2 - \frac{1}{(n-2)^2} |\nabla R|^2 - \frac{1}{2(n-1)(n-2)^2} |\nabla R + 2R\nabla f|^2 \\ &= \frac{2}{(n-2)^2} |\text{Ric}|^2 |\nabla f|^2 - \frac{1}{(n-2)^2} |\nabla R|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)(n-2)^2} (|\nabla R|^2 + 4R^2 |\nabla f|^2 + 2R\langle \nabla f, \nabla R \rangle). \end{aligned}$$

Fazendo $|\nabla f|^2 = 1 - R$, temos

$$\begin{aligned} |D|^2 &= \frac{2(1-R)}{(n-2)^2} |Ric|^2 - \frac{1}{(n-2)^2} |\nabla R|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)(n-2)^2} (|\nabla R|^2 + 4R^2(1-R) + 2R\langle \nabla f, \nabla R \rangle) \end{aligned}$$

Usando a seguinte identidade $2|Ric|^2 + \langle \nabla R, \nabla f \rangle = -\Delta R$, obtemos

$$\begin{aligned} |D|^2 &= -\frac{(1-R)}{(n-2)^2} (\Delta R - \langle \nabla R, \nabla f \rangle) - \frac{1}{(n-2)^2} |\nabla R|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)(n-2)^2} (|\nabla R|^2 + 4R^2(1-R) + 2R\langle \nabla f, \nabla R \rangle) \\ &= -\frac{(1-R)}{(n-2)^2} \Delta R + \frac{\langle \nabla R, \nabla f \rangle}{(n-2)^2} - \frac{1}{(n-2)^2} |\nabla R|^2 \\ &\quad - \frac{n-3}{(n-1)(n-2)^2} R\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{|\nabla R|^2}{2(n-1)(n-2)^2} - \frac{2R^2(1-R)}{(n-1)(n-2)^2} \\ &= -\frac{(1-R)}{(n-2)^2} \Delta R + \frac{\langle \nabla R, \nabla f \rangle}{(n-2)^2} - \frac{n-3}{(n-1)(n-2)^2} R\langle \nabla R, \nabla f \rangle \\ &\quad - \frac{-n}{2(n-1)(n-2)^2} |\nabla R|^2 - \frac{2R^2(1-R)}{(n-1)(n-2)^2}. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Para o próximo passo utilizaremos mais uma vez a Proposição 1.2.4, que garante a dependência linear entre os vetores ∇f e ∇R no sóliton de Bryant. Escolha uma função diferenciável $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sóliton de Bryant.

Proposição 3.0.3 *Seja (M^n, g) um sóliton de Ricci gradiente estável. Então*

$$\begin{aligned} (1-R)\operatorname{div}(X) &= -(n-2)^2|D|^2 - \frac{n}{2(n-1)} \langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle + \frac{n-3}{n-1} R\langle \nabla f, X \rangle - \frac{n}{2(n-1)} (1-R)(\psi(R))^2 \\ &\quad + (1-R)\psi(R) - \frac{2R^2}{n-1} (1-R) + R(1-R)\psi(R) - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R) \\ &\quad - \frac{n-3}{n-1} R(1-R)\psi(R) \end{aligned}$$

Demonstração. Por cálculo direto temos,

$$\begin{aligned} (1-R)\operatorname{div}(X) &= (1-R)(\Delta R + \psi(R)\Delta f + \psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle) \\ &= (1-R)\Delta R + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \end{aligned}$$

Podemos então utilizar a proposição anterior, somando e subtraindo a equação pela norma do tensor que acabamos de calcular. O que nos dá,

$$\begin{aligned}
(1-R)divX &= -(n-2)^2|D|^2 - (1-R)\Delta R - \langle \nabla R, \nabla f \rangle \\
&\quad - \frac{n}{2(n-1)}|\nabla R|^2 + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla R, \nabla f \rangle + (1-R)\Delta R \\
&\quad + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\
&= -(n-2)^2|D|^2 - \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{n}{2(n-1)}(\psi(r))^2|\nabla f|^2 \\
&\quad - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla R, \nabla f \rangle \\
&= -(n-2)^2|D|^2 - \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{n}{2(n-1)}(\psi(r))^2|\nabla f|^2 \\
&\quad - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla R, \nabla f \rangle \\
&\quad - \frac{2}{n-1}R^2(1-R) + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(1-R)divX &= -(n-2)^2|D|^2 - \langle \nabla f, X \rangle + \psi(R)|\nabla f|^2 \\
&\quad - \frac{n}{2(n-1)}(\psi(r))^2|\nabla f|^2 - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle \\
&\quad + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{2}{n-1}R^2(1-R) \\
&\quad + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\
&= -(n-2)^2|D|^2 - \langle \nabla f, X \rangle + \psi(R)|\nabla f|^2 \\
&\quad - \frac{n}{2(n-1)}(\psi(r))^2|\nabla f|^2 - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle \\
&\quad + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{n-3}{n-1}R\psi(R)|\nabla f|^2 - \frac{2}{n-1}R^2(1-R) \\
&\quad + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, \nabla R \rangle \\
&= -(n-2)^2|D|^2 - \langle \nabla f, X \rangle + \psi(R)|\nabla f|^2 \\
&\quad - \frac{n}{2(n-1)}(\psi(r))^2|\nabla f|^2 - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle \\
&\quad + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{n-3}{n-1}R\psi(R)|\nabla f|^2 - \frac{2}{n-1}R^2(1-R) \\
&\quad + (1-R)\psi(R)\Delta f + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle - (1-R)\psi'(R)\psi(R)|\nabla f|^2 \\
&= -(n-2)^2|D|^2 - \langle \nabla f, X \rangle + \psi(R)(1-R) \\
&\quad - \frac{n}{2(n-1)}(\psi(r))^2(1-R) - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle \\
&\quad + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla f, X \rangle - \frac{n-3}{n-1}R(1-R)\psi(R) - \frac{2}{n-1}R^2(1-R) \\
&\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle - (1-R)^2\psi'(R)\psi(R) + R(1-R)\psi(R).
\end{aligned}$$

□

Observação 3.0.4 Se tomarmos $n = 3$ na identidade obtida na proposição acima, temos

$$\begin{aligned} (1-R)\operatorname{div}(X) &= -|D|^2 - \frac{3}{4}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle - \frac{3}{4}(1-R)\psi(R)^2 + (1-R)\psi(R) \\ &\quad - R^2(1-R) + R(1-R)\psi(R) - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R). \end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que a Proposição 2.0.9 é um corolário da proposição provada acima.

Feito isso, iremos novamente refinar a Proposição 3.0.3, para isso temos o seguinte corolário. Veja a primeira versão de Brendle [2].

Corolário 3.0.5 A função ψ satisfaz a equação diferencial abaixo,

$$-\frac{n}{2(n-1)}\psi(s)^2 + \psi(s) - \frac{2}{n-1}s^2 + s\psi(s) - (1-s)\psi(s)\psi'(s) - \frac{n-3}{n-1}s\psi(s) = 0$$

Demonstração. Admitindo que X e D são nulos no Sóliton de Bryant, obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= (1-R)\operatorname{div}X \\ &= -(n-2)^2|D|^2 - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla f, X \rangle - \frac{n}{2(n-1)}(1-R)(\psi(R))^2 + (1-R)\psi(R) - \frac{2R^2}{n-1}(1-R) \\ &\quad + R(1-R)\psi(R) - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R) - \frac{n-3}{n-1}R(1-R)\psi(R) \\ &= -\frac{n}{2(n-1)}(1-R)(\psi(R))^2 + (1-R)\psi(R) - \frac{2R^2}{n-1}(1-R) + R(1-R)\psi(R) \\ &\quad - (1-R)^2\psi(R)\psi'(R) - \frac{n-3}{n-1}R(1-R)\psi(R). \end{aligned}$$

Isso prova que ψ satisfaz, localmente, a equação. □

Corolário 3.0.6 A função ψ satisfaz a seguinte equação diferencial,

$$\frac{n}{2(n-1)} - \frac{1}{\psi(R)} + (1-R)\frac{\psi'(R)}{\psi(R)} + \frac{n-3}{n-1}\frac{R}{\psi(R)} = -\frac{R}{(\psi(R))^2} \left(\frac{2}{n-1}R - \psi(R) \right) \quad (3-1)$$

Demonstração. Pela proposição anterior temos,

$$-\frac{n}{2(n-1)}\psi(R)^2 + \psi(R) - \frac{2}{n-1}R^2 + R\psi(R) - (1-R)\psi(R)\psi'(R) - \frac{n-3}{n-1}R\psi(R) = 0.$$

Reordenando os termos e dividindo a igualdade por $(1-R)$, obtemos

$$-\frac{n}{2(n-1)}\psi(R)^2 + \psi(R) - (1-R)\psi(R)\psi'(R) - \frac{n-3}{n-1}R\psi(R) = \frac{2}{n-1}R^2 - R\psi(R).$$

Finalmente, dividindo a igualdade por $\psi(R)^2$, temos os resultado desejado

$$-\frac{n}{2(n-1)} + \frac{1}{\psi(R)} - (1-R)\frac{\psi'(R)}{\psi(R)} - \frac{n-3}{n-1}\frac{R}{\psi(R)} = \frac{R}{(\psi(R))^2} \left(\frac{2}{n-1}R - \psi(R) \right).$$

□

Observação 3.0.7 Utilizamos o fato de D ser nulo no sóliton de Bryant, porém mencionamos esse fato apenas em dimensão três, então, provaremos que esse resultado é válido em dimensões superiores

Lema 3.0.8 O tensor D é constante igual a no zero sóliton de Bryant.

Demonstração. Provamos em (1.2.6) que o Sóliton de Bryant é localmente conformemente plano, associando isso ao Teorema 2.0.5, podemos afirmar que o tensor de Weyl é nulo no sóliton de Bryant, além disso, em dimensões superiores a 3 o tensor de Cotton pode ser reescrito da seguinte forma $C_{ijk} = \frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl}$, Dessa maneira, temos no sóliton de Bryant

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= -W_{ijkl}\nabla^l f + D_{ijk} \\ \frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl} &= -W_{ijkl}\nabla^l f + D_{ijk} \\ D_{ijk} &= \frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl} - W_{ijkl}\nabla^l f \\ D_{ijkl} &= 0. \end{aligned}$$

Provando a assertiva.

□

Corolário 3.0.9 Seja (M^n, g) um sóliton de Ricci gradiente estável. Então

$$\begin{aligned} (1-R)\operatorname{div}(X) &= -(n-2)^2|D|^2 - \frac{n}{2(n-1)}\langle \nabla R - \psi(R)\nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + (1-R)\psi'(R)\langle \nabla f, X \rangle + \frac{n-3}{n-1}R\langle \nabla f, X \rangle. \end{aligned}$$

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior. \square

Para a próxima proposição definimos a função $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(s) = \log(\Psi(s)) + \frac{1}{n-1} \int_{\frac{1}{2}}^s \left(\frac{n}{1-t} - \frac{n-1-(n-3)t}{(1-t)\Psi(t)} \right) dt$$

Proposição 3.0.10 *Seja (M^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente estável, então o campo X satisfaz:*

$$(1-R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)}X) = -(n-2)^2|D|^2 - \frac{R}{\Psi^2(R)} \left(\frac{2}{n-1}R - \Psi(R) \right) |X|^2$$

Demonstração. Nós temos que,

$$\begin{aligned} (1-R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)}X) &= (1-R)e^{-u(R)} \left(e^{u(R)} \operatorname{div}X + e^{u(R)} u'(R) \langle \nabla R, X \rangle \right) \\ &= (1-R) \operatorname{div}X + (1-R) u'(R) \langle \nabla R, X \rangle. \end{aligned}$$

Note que,

$$u'(s) = \frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)} + \frac{1}{n-1} \left[\frac{n}{1-s} - \frac{n-1-(n-3)s}{(1-s)\Psi(s)} \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1-R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)}X) &= -(n-2)^2|D|^2 - \frac{n}{2(n-1)} \langle \nabla R - \Psi(R) \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + (1-R) \Psi'(R) \langle \nabla f, X \rangle \frac{n-3}{n-1} R \langle \nabla f, X \rangle + (1-R) \frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)} \langle \nabla R, X \rangle \\ &\quad + \frac{1-R}{n-1} \left[\frac{n}{1-s} - \frac{n-1-(n-3)s}{(1-s)\Psi(s)} \right] \langle \nabla R, X \rangle \\ &= -(n-2)^2|D|^2 - \frac{n}{2(n-1)} \langle \nabla R - \Psi(R) \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, X \rangle \\ &\quad + (1-R) \Psi'(R) \langle \nabla f, X \rangle \frac{n-3}{n-1} R \langle \nabla f, X \rangle + (1-R) \frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)} \langle \nabla R, X \rangle \\ &\quad + \frac{n}{n-1} \langle \nabla R, X \rangle - \frac{1}{\Psi(R)} \langle \nabla R, X \rangle + \frac{n-3}{n-1} \frac{R}{\Psi(R)} \langle \nabla R, X \rangle \\ &= -(n-2)^2|D|^2 + \frac{n}{2(n-1)} |X|^2 + \frac{n-3}{n-1} \frac{R}{\Psi(R)} |X|^2 \\ &\quad + (1-R) \frac{\Psi'(R)}{\Psi(R)} |X|^2 - \frac{1}{\Psi(R)} |X|^2 \\ &= -(n-2)^2|D|^2 \\ &\quad + \left(\frac{n}{2(n-1)} + \frac{n-3}{n-1} \frac{R}{\Psi(R)} + (1-R) \frac{\Psi'(R)}{\Psi(R)} - \frac{1}{\Psi(R)} \right) |X|^2. \end{aligned}$$

Podemos então usar o Corolário 3.0.6, que nos dá

$$(1 - R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)} X) = -(n - 2)^2 |D|^2 - \frac{R}{(\psi(R))^2} \left(\frac{2}{n - 1} R - \psi(R) \right) |X|^2.$$

Provando o que queríamos. \square

A função $u(s)$ é uma composição de funções diferenciáveis, logo é diferenciável em todo o seu domínio $(0, 1)$, porém precisamos conhecer seu comportamento quando s está próximo de 1. Para isso, seguindo os passos realizados na demonstração do capítulo 02, iremos calcular o limite de $u(s)$ quando s tende a 1, iniciamos observando o comportamento de ψ próximo de 1.

Lema 3.0.11 Para $s \rightarrow 1$, nós temos $\psi(s) = \frac{2}{n} + O(\sqrt{1 - s})$.

Demonstração. Como $X = 0$ no sóliton de Bryant, temos

$$0 = X = \nabla_i R + \psi(R) \nabla_i f$$

Pela Proposição 1.3.3, temos $\nabla_i R = -2R_{ij} \nabla^j f$, isso garante que,

$$-2R_{ij} \nabla^j f + \psi(R) \nabla_i f = 0.$$

Logo, o vetor ∇f é autovetor do tensor de Ricci com autovalor $\frac{\psi(R)}{2}$.

Por outro lado, próximo da origem o sóliton de Bryant se comporta da seguinte maneira,

$$R_{ij} = \frac{1}{n} g_{ij} + O(|x|)$$

Isso se acontece devido ao fato de que próximo da origem o sóliton de Bryant converge para uma esfera. Tomando E_1, \dots, E_n base ortonormal de autovetores do tensor R_{ij} , como o tensor de Ricci é simétrico, podemos escolher esta base sendo ortonormal com os autovalores todos reais.

Assim, podemos escrever $R_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ Então, próximo da origem, temos

$$\lambda_i \delta_{ij} = \frac{1}{n} g_{ij} + O(|x|)$$

Como $\frac{\psi(R)}{2}$ é autovalor, temos

$$\frac{\psi(R)}{2} = \frac{1}{n} + O(|x|) \tag{3-2}$$

Uma vez que o sóliton de Bryant satisfaz $R + |x|^2 = 1$, temos $|x| = \sqrt{1 - R}$. Fazendo a mudança de variáveis $R = s$, obtemos $|x| = \sqrt{1 - s}$, além disso, $s \rightarrow 1$ quando $|x| \rightarrow 0$,

substituindo em 3-2,

$$\psi(s) = \frac{2}{n} + O(\sqrt{1-s}) \quad \text{para } s \rightarrow 1.$$

□

Lema 3.0.12 *O limite $\lim_{s \rightarrow 1} u(s)$ existe.*

Demonstração. Por cálculo direto

$$\lim_{s \rightarrow 1} \log(\psi(s)) = \log\left(\frac{2}{n}\right)$$

Daí, $\lim_{s \rightarrow 1} u(s)$ existe se e somente se $\lim_{s \rightarrow 1} u(s) - \log(\psi(s))$ existe.

Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(u(s) - \log(\psi(s))) &= \frac{1}{n-1} \left(\frac{n}{1-s} - \frac{n-1-(n-3)s}{(1-s)\psi(s)} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \frac{n\psi(s) - n + 1 + (n-3)s}{(1-s)\psi(s)} \\ &= \frac{1}{n-1} \frac{(n-3)(1-s) + O(\sqrt{1-s})}{(1-s)\psi(s)} \\ &= \frac{1}{n-1} \left(O\left(\frac{1}{\sqrt{1-s}}\right) - \frac{n-3}{\psi(s)} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(O\left(\frac{1}{\sqrt{1-s}}\right) - \frac{n(n-3)}{2 + O(\sqrt{1-s})} \right). \end{aligned}$$

Isso nos garante que, próximo de 1, temos

$$u(s) - \log(\psi(s)) = O(\sqrt{1-s}) - \frac{n^2(n-3)^2}{(n-1)^2} \frac{1}{2 + O(\sqrt{1-s})}.$$

Assim, o $\lim_{s \rightarrow 1} u(s)$ é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} u(s) &= \lim_{s \rightarrow 1} \log(\psi(s)) + \lim_{s \rightarrow 1} \left(O(\sqrt{1-s}) + \frac{n^2(n-3)^2}{2(n-1)^2} \frac{1}{2 + O(\sqrt{1-s})} \right) \\ &= \frac{2}{n} - \frac{n^2(n-3)^2}{4(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Em particular, para $n = 3$, o limite é $2/3$ uma vez que a segunda parcela da identidade obtida acima é nula. □

Proposição 3.0.13 *Nós temos $\psi(s) < \frac{2}{n-1}s$ para todo $s \in (0, 1)$.*

Demonstração. Suponha que a afirmação seja falsa. Defina

$$A = \{s \in (0, 1) : \psi(s) \geq \frac{2}{n-1}s\}.$$

Tome $s_0 = \sup A$. Observe que,

$$\lim_{s \rightarrow 1} \psi(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{2}{n} + O(\sqrt{1-s}) \right] < \frac{2}{n-1}.$$

Logo, $s_0 \in (0, 1)$.

Afirmação: $\psi(s_0) = \frac{2}{n-1}s_0$

Caso contrário, pela continuidade de ψ , existiria $\varepsilon > 0$ tal que, se $s \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$, então $\psi(s) > \frac{2s}{n-1}$ dessa forma existiria $s > s_0$ com $s \in A$, o que contraria o fato de s_0 ser supremo de A .

Além disso, $\psi'(s_0) \leq \frac{2}{n-1}$.

Pois, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} \psi(s_0 + \varepsilon) &< \frac{2}{n-1}(s_0 + \varepsilon) \\ \psi(s_0 + \varepsilon) - \psi(s_0) &< \frac{2}{n-1}(s_0 + \varepsilon) - \frac{2}{n-1}s_0 \\ \psi(s_0 + \varepsilon) - \psi(s_0) &< \frac{2}{n-1}\varepsilon \\ \frac{\psi(s_0 + \varepsilon) - \psi(s_0)}{\varepsilon} &< \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

O que nos permite concluir que

$$\psi'(s_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\psi(s_0 + \varepsilon) - \psi(s_0)}{\varepsilon} \leq \frac{2}{n-1}.$$

Daí, pelo Corolário 3.0.6

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{s_0}{(\psi(s_0))^2} \left(\frac{2}{n-1}s_0 - \psi(s_0) \right) \\ &= \frac{n}{2(n-1)} - \frac{1}{\psi(s_0)} + (1-s_0) \frac{\psi'(s_0)}{\psi(s_0)} + \frac{n-3}{n-1} \frac{s_0}{\psi(s_0)} \\ &= \frac{n}{2(n-1)} - \frac{n-1}{2s_0} \left(1 - \frac{n-3}{n-1}s_0 \right) + (1-s_0) \frac{\psi'(s_0)}{\psi(s_0)} \\ &\leq \frac{n}{2(n-1)} - \frac{n-1}{2s_0} \left(1 - \frac{n-3}{n-1}s_0 \right) + \frac{(1-s_0)}{(s_0)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{n}{2(n-1)} - \frac{n-1}{2s_0} \left(1 - \frac{n-3}{n-1}s_0\right) + \frac{(1-s_0)}{(s_0)} \\
&= \frac{n}{2(n-1)} - \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{n-3}{n-1}\right) + \frac{(1-s_0)}{(s_0)} - \frac{n-1}{2} \frac{1-s_0}{s_0} \\
&= \frac{n}{2(n-1)} - \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{n-3}{n-1}\right) - \frac{n-1}{2s_0}(1-s_0) \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \\
&\leq \frac{n}{2(n-1)} - \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{n-3}{n-1}\right) \\
&= -\frac{n-2}{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

O que é uma contradição. Logo, $\psi(s) < \frac{2}{n-1}s$ para todo $s \in (0, 1)$. \square

Proposição 3.0.14 *Seja Ω um domínio limitado em M com bordo diferenciável. Além disso, suponha que $R < 1$ em cada ponto de $\partial\Omega$. Então:*

$$(n-2)^2 \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \leq - \int_{\partial\Omega} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle.$$

Demonstração. Segue da proposição 3.0.13 que,

$$\begin{aligned}
\psi(R) &< \frac{2}{n-1}R \\
-(n-2)^2 |D|^2 - \frac{R(R-\psi(R))}{\psi(R)^2} |X|^2 &< -(n-2)^2 |D|^2.
\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que,

$$(1-R)e^{-u(R)} \operatorname{div}(e^{u(R)} X) = -(n-2)^2 |D|^2 - \frac{R(R-\psi(R))}{\psi(R)^2} |X|^2 < -(n-2)^2 |D|^2.$$

Usando o teorema da divergência, nós obtemos:

$$\int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon (1-R) e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle = \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \operatorname{div}(\chi_\varepsilon (1-R) e^{u(R)} X). \quad (3-3)$$

Vamos então, calcular o divergente do campo $\chi_\varepsilon (1-R) e^{u(R)} X$. Utilizando a regra do produto do divergente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\chi_\varepsilon (1-R) e^{u(R)} X) &= X(\chi_\varepsilon (1-R)) e^{u(R)} + \chi_\varepsilon (1-R) \operatorname{div}(e^{u(R)} X) \\
&= \chi_\varepsilon (1-R) \operatorname{div}(e^{u(R)} X) - \chi'_\varepsilon (1-R) e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle.
\end{aligned}$$

Associando a equação acima à (3-3) e à Proposição 2.0.12, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle &= \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \operatorname{div}(e^{u(R)} X) \\ &\quad - \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle \\ &\leq -(n-2)^2 \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \\ &\quad - \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle. \end{aligned}$$

Já sabemos, pela Proposição 2.0.23 que

$$\int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi'_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nabla R \rangle \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pela Proposição 2.0.22, obtemos

$$\int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \chi_\varepsilon(1-R) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \rightarrow \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0$$

Isso nos permite concluir que,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \chi_\varepsilon(1-R)e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle &\leq -(n-2)^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \cap \{\varepsilon \leq 1-R\}} \chi_\varepsilon(1-R) \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 \\ &\quad + 2c_0c_3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Vol} \{ \varepsilon \leq 1-R \leq 2\varepsilon \} \\ &= -(n-2)^2 \int_{\Omega \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2. \end{aligned}$$

Isso prova a assertiva. □

Por fim, temos as ferramentas suficientes para provar o principal teorema.

Teorema 3.0.15 *Seja (M^n, g, f) , $n \geq 3$, um sólito de Ricci gradiente estável. Suponha que a curvatura escalar R é positiva e se aproxima de zero no infinito. Denote por $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o campo vetorial $X = \nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sólito de Bryant e defina $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$u(s) = \log(\psi(s)) + \frac{1}{n-1} \int_{1/2}^s \left(\frac{n}{1-t} - \frac{n-1-(n-3)t}{(1-t)\psi(t)} \right) dt.$$

Além disso, assuma que exista uma exaustão de M^n por domínios limitados Ω_l tal que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle \nabla R + \psi(R)\nabla f, \nu \rangle = 0.$$

Então, $D = 0$. Em particular, para $n = 3$, (M^3, g, f) é isométrico ao Sóliton de Bryant.

Demonstração. Assumindo que exista uma exaustão de M por domínios limitados Ω_l tais que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle = 0.$$

Associando essa hipótese à Proposição 3.0.14, nós obtemos

$$\int_{\Omega_l \cap \{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} (n-2)^2 |D|^2 \leq - \int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)} \langle X, \nu \rangle.$$

Tomando o limite de $l \rightarrow +\infty$, temos

$$\int_{\{R < 1\}} \frac{e^{u(R)}}{1-R} |D|^2 = 0.$$

Consequentemente o tensor D se anula no conjunto $\{x \in M : R(x) < 1\}$. Por fim, lembre-se que pela Proposição 1.3.7 o conjunto $\{x \in M : R(x) < 1\}$ é denso em M . Consequentemente D é nulo em toda a variedade M . \square

Para concluir, utilizaremos os seguintes resultados de Cao, Yu e Chen, Teoremas de rigidez para sólitons de Ricci gradiente estáveis.

Teorema 3.0.16 *Seja (M^4, g, f) um sólito de Ricci gradiente estável completo com $D_{ijk} = 0$. Então, (M^4, g, f) é Ricci flat ou isométrico ao sólito de Bryant.*

Demonstração. Ver [11] \square

Teorema 3.0.17 *Seja (M^n, g, f) , $n \geq 5$ um sólito de Ricci gradiente estável completo não compacto com curvatura escalar positiva e com tensor D nulo. Então (M^n, g, f) é isométrico ao sólito de Bryant.*

Demonstração. Ver [9] \square

Assim sendo, o resultado enunciado por Cao pode ser demonstrado em dimensão maior ou igual a 3.

Referências Bibliográficas

- [1] BESSE, A. L. **Einstein manifolds**. Springer, Berlin, 2008.
- [2] BRENDLE, S. **Uniqueness of gradient ricci solitons**. *Math. Res. Lett.* 18, no. 3:531–538, 2011.
- [3] BRENDLE, S. **Rotational symmetry of self-similar solutions to the ricci flow**. *Invent. Math.*, 194:731–764, 2013.
- [4] BROZOS-VÁZQUEZ, M; GARCÍA-RÍO, E. V.-L. **R. warped product metrics and locally conformally flat structures**. *Matemática Contemporânea*, 28:91110, 2005.
- [5] CAO, XIAODONG; WANG, B. Z. Z. **On locally conformally flat gradient shrinking ricci solitons**. *Commun. Contemp. Math.*, 13:269–282, 2011.
- [6] CAO, HUI-DONG; ZHOU, D. **On complete gradient steady ricci solitons with vanishing d-tensor**. *J. Differential Geom.*, 85:175–185, 2010.
- [7] CAO, HUI-DONG; CATINO, G. C. Q. M. C. M. L. **Bach-flat gradient steady ricci solitons**. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49:125–138., 2014.
- [8] CAO, H.-D. **Recent progress on ricci solitons - recent advances in geometric analysis**,. *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 11:1–38, 2010.
- [9] CAO, HUI-DONG; YU, J. **On complete gradient shrinking ricci solitons**. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 149:1733–1742, 2021.
- [10] CAO, HUI-DONG ; CHEN, Q. **On locally conformally flat gradient steady ricci solitons**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364:2377–2391, 2012.
- [11] CAO, HUI-DONG ; CHEN, Q. **On bach-flat gradient shrinking ricci solitons**. *Duke Math. J.*, .162:1149–1169, 2013.
- [12] CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. IMPA, 2011.
- [13] CATINO, GIOVANNI ; MASTROLIA, P. . M. D. D. **Classification of expanding and steady ricci solitons with integral curvature decay**. *Geom. Topol.*, 20:2665–2685, 2016.

- [14] CHOW, B. E. A. **The Ricci flow: Techniques and Applications.** Mathematical Surveys and Monographs, 110. American Mathematical Society, Providence, 2007.
- [15] CHOW, BENNETT; KNOPE, D. **The Ricci flow: an introduction.** Mathematical Surveys and Monographs, 110. American Mathematical Society, Providence, 2004.
- [16] CHOW, BENNETT; LU, P. N. L. **Hamilton's Ricci flow.** Graduate Studies in Mathematics, 77. American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press Beijing, 2006.
- [17] EELLS, JAMES JR.; SAMPSON, H. **Harmonic mappings of riemannian manifolds.** *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [18] HAMILTON, R. S. **Three-manifolds with positive ricci curvature.** *J. Differential Geometry*, 17:255–306, 1982.
- [19] HAMILTON, R. S. **The formation of singularities in the ricci flow.** *Surveys in Differential Geometry*, II:7–136, 1995.
- [20] KUHNEL, W. **Differential geometry: curves - surfaces - manifolds.** American Mathematical Society, 2006.
- [21] L. SIMON, B. S. **Minimal hyper-spaces asymptotic to quadratic cones in \mathbb{R}^{n+1} .** *Invent. Math.*, 9:535–551, 1986.
- [22] MULLINS, W. W. **Two-dimensional motion of idealized grain boundaries.** *J. Appl. Phys.*, 27:900–904, 1956.
- [23] ONEILL, B. **Semi Riemannian Geometry.** American Press, 1983.
- [24] YOKOTA, T. **Perelman's reduced volume and a gap theorem for the ricci flow.** *Comm. Anal. Geom.*, 17:227–263, 2009.
- [25] ZHANG, Z.-H. **On the completeness of gradient ricci solitons.** *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137:2755–2759, 2009.