UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARBY ZULEY BOLAÑOS ORTIZ

Componentes conexas de grupos em teorias NIP

Goiânia
2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Marby Zuley Bolaños Ortiz

Título do trabalho: Componentes conexas de grupos em teorias NIP.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Marby Bolaños O.

Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 30 / 03 /2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

MARBY ZULEY BOLAÑOS ORTIZ

Componentes conexas de grupos em teorias NIP

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Orientadora: Profa. Aline de Souza Lima

Co-Orientador: Prof. Daniel Lima Ventura

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Ortiz, Marby Zuley Bolaños
Componentes conexas de grupos em teorias NIP [manuscrito] / Marby Zuley Bolaños Ortiz. - 2017.
cii, 102 f.

Orientador: Profa. Dra. Aline de Souza Lima; co-orientador Daniel Lima Ventura.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.

Inclui símbolos.

1. Modelo monstro. 2. Grupo de Lascar. 3. componente conexa. 4. tipo-definibilidade. I. Lima, Aline de Souza, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MARBY ZULEY BOLAÑOS ORTIZ – Aos trinta dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (30/03/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profa. Aline de Souza Lima - Orientadora, Prof. Daniel Lima Ventura - Coorientador, Prof. Ricardo Nunes de Oliveira e Prof. Emerson Ferreira de Melo, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada na sala de defesa AS 03, da Faculdade de Ciências Sociais, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **"Componentes conexas de grupos em teorias NIP"**, em nível de Mestrado, área de concentração em Álgebra, de autoria de Marby Zuley Bolaños Ortiz, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela Presidente da Banca, Profa. Aline de Souza Lima, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida à autora da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu a examinanda, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1068 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Álgebra pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pela orientadora. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Aline de S. Lima
Profa. Dra. Aline de Souza Lima
Presidente - IME/UFG

Daniel Lima Ventura
Prof. Dr. Daniel Lima Ventura
Coorientador – INF/UFG

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira
Membro – IME/UFG

Emerson Ferreira de Melo
Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo
Membro – DM/UnB

MARBY ZULEY BOLAÑOS ORTIZ

COMPONENTES CONEXAS DE GRUPOS EM TEORIAS NIP

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 30 de março de 2017, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Aline de Souza Lima

Profa. Dra. Aline de Souza Lima
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Daniel Lima Ventura

Prof. Dr. Daniel Lima Ventura
Instituto de Informática - UFG

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Emerson Ferreira de Melo

Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo
Departamento de Matemática – UnB

Marby Zuley Bolaños Ortiz

Graduou–se bacharela em matemática na UNICAUCA - Universidad del Cauca de Colombia. Durante sua graduação, foi monitora no departamento de Matemática da UNICAUCA e fez parte do projeto de pesquisa VEI 2488:Realización de acciones de grupo en Superficies de Riemann compactas de género 4. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do Cnpq.

A Socorro por seu amor e entrega.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo caminho percorrido. À minha mãe Socorro Ortiz por seu amor e ao meu irmão, Jairo Bolaños, por ser minha motivação. A Milton Ortiz por seu carinho e apoio.

A Sckarleth Martins, Francy Leal e Joelena Mendes pelo apoio, compreensão e companhia.

Aos professores Aline de Souza Lima e Daniel Lima Ventura pela confiança e a disposição para me orientar na elaboração deste trabalho.

Aos professores Emerson Ferreira de Melo e Ricardo Nunes de Oliveira por terem aceitado participar da banca examinadora e a professora Thaynara Arielly de Lima pelas sugestões feitas ao respeito do trabalho.

Ao Cnpq pelo apoio financiero durante o mestrado.

Finalmente, a todas as pessoas que me acompanharam nesta etapa.

Resumo

Neste trabalho estudamos três subgrupos de um grupo G com índices limitados em G: A interseção de todos os subgrupos definíveis de G , o menor subgrupo tipo-definível e o menor subgrupo invariante de G, chamados componentes conexas de G, denotados respectivamente G^0, G^{00} e G^∞. Apresentamos uma demonstração da existência de G^∞ em uma teoria NIP, baseados na prova feita por Gismatullin em [8, 2011].

Palavras–chave

Modelo monstro, Grupo de Lascar, componente conexa, tipo-definibilidade

Abstract

In this work, we estudied three special subgroups of bounded index in G: The intersection of subgroups definables of G, the small type-definable subgroup and the small invariant subgroup of G, called connected components of G and denoted G^0, G^{00} e G^{∞}. We give an exposition of theorem of Gismatullim [8, 2011], where he proved the existence of G^{∞} in a theory with NIP.

Keywords

Monster model, The Lascar group, connected component, type-definable.

Sumário

Introdução

A teoria de modelos é um ramo da matemática que estuda suas estruturas com ajuda de uma linguaguem formal (fórmulas lógicas). Este ramo se distingue da lógica clássica porque, enquanto esta última se preocupa por formalizar teorias axiomáticas, a teoria de modelos se foca em estudar as interpretações (modelos) de uma teoria. Os axiomas de Peano por exemplo, foram pensados por Giuseppe Peano no seculo XIX para definir a aritmética dos números naturais e foi provado por Dedekind (ver [10]) que quaisquer dois modelos dos axiomas de peano são isomorfos ao conjunto dos números naturais e são chamados de modelos padrão. Um dos aportes feito pela teoria de modelos neste caso, foi o teorema de Skolem (ver [10]) que garante a existência de modelos não padrão de cardinal contável em uma linguaguem de primeira ordem[1].

Em teoria de modelos, encontramos a generalização de vários conceitos da álgebra. Pensando no corpo dos números reais por exemplo, o conjunto dos zeros de um polinômio é um conjunto definível, ou seja, um conjunto de elementos que satisfazem uma fórmula. Mas, nem todo polinômio possui raízes em $\mathbb{R}$. Isto é $\mathbb{R}$ não é algebricamente fechado. Em teoria de modelos, o conceito de saturação generaliza a ideia de um corpo algebricamente fechado, pois um modelo de uma teoria T é saturado se todos os conjuntos de fórmulas consistentes com T (sem contradições) possuem realizações no próprio modelo. Assim, Chang e Keisler ([4, 1990]) descreveram a teoria de modelos como

álgebra universal + lógica.

Porém, o desenvolvimento da teoria de modelos no estudo de conjuntos definíveis aproxima mais da teoria de Geometria Algébrica, que estuda conjuntos de pontos definiveis por equações sobre um corpo. Hodges [12, 1997] dá uma descrição mais moderna da teoria de modelos como

geometria algébrica - corpos.

[1] A primera versão do último axioma de Peano, não pode ser expresado em uma linguaguem de primeira ordem.

Uma das estratégias para estudar estruturas em teoria de modelos consiste em analisar um conjunto de teorias que satisfazem certas propriedades e mostrar teoremas sobre seus modelos. Em nosso caso particular, mostrar a existência de certas componentes conexas de grupos em teorias NIP [2].

O estudo de componentes conexas surge em teorias estáveis[3]. Se G é um grupo estável, então existe o menor subgrupo definível de índice finito em G, o qual é a interseção de todos os subgrupos definíveis de índice finito em G. Este subgrupo minimal denotado por G^0, é chamado componente conexa de G, devido a que no caso em que G é um grupo algébrico, G^0 coincide com a componente conexa da unidade de G.

Posteriormente, são estudados grupos definíveis e tipo-definíveis em teorias *o*-minimais[4]. Ou seja, grupos definidos por conjuntos contáveis de fórmulas consistentes com a teoria. Pillay afirma em [16, 2004] que, se T é uma teoria *o*-minimal, M um modelo saturado de T e G um grupo definível em M, então existe o menor subgrupo tipo-definível de índice limitado G^{00}, e é tal que G/G^{00} é isomorfo a um grupo de Lie compacto munido da topologia lógica. Esta conjetura foi provada em [13, 2008] por Hrushovski, Peterzil e Pillay.

A seguir apresentamos algumas definições que ajudam a descrever o objeto de estudo deste trabalho. Sejam G um grupo infinito, $(G,\cdot,\dots)$ é um modelo saturado de uma $\mathcal{L}$-teoria completa, onde $\mathcal{L}=\{\cdot,\dots\}$, $\cdot$ é o produto do grupo e $(\dots)$ denota constantes, funções e relações adicionais em G. Assumimos que o cardinal de G é suficientemente grande e $A\subseteq G$ é conjunto pequeno de parâmetros, ou seja, de cardinal menor do que o cardinal de G:

- a componente conexa de G sobre A, G^0_A, como a interseção de todos os A-definíveis subgrupos de G com índice finito em G;
- a tipo-componente conexa de G sobre A, G^{00}_A, como o menor subgrupo de índice limitado em G (menor do que $|G|$), que é tipo-definível sobre A;
- a ∞-componente conexa de G sobre A, G^{∞}_A, como o menor subgrupo de índice limitado em G (menor do que $|G|$), que é união de uma quantidade limitada de conjuntos tipo-definíveis sobre A.

Se para cada $A\subseteq G$, $G^0_A=G^0_\emptyset$, então G^0 existe, analogamente G^{00} e G^∞ existem se para cada $A\subseteq G$, $G^{00}_A=G^{00}_\emptyset$ e $G^\infty_A=G^\infty_\emptyset$ respectivamente (ver[8]).

Em [20, 2207], Shela prova a existência da componente conexa G^∞ em teorias NIP, para grupos abelianos e em [21, 2008] garante a existência da componente conexa G^{00} sem assumir a comutatividade em G .

[2]Teorias sem propriedade de independência.
[3]Uma teoria é estável se, e somente se é simples e NIP.
[4]Uma classe de teorias NIP não estáveis.

Neste trabalho nos interessamos por estudar estas componentes conexas, principalmente a componente e a relação que a componente G_A^∞ tem com os tipos fortes de Lascar, além da extensão do resultado de Shelah para grupos não necessariamente abelianos. Tal extensão foi obtida por Gismatullin em [8, 2011] e é a referência principal deste trabalho.

Assim, nos capítulos 1 e 2 apresentamos conceitos básicos de topologia, teoria de grupos, grupos topológicos e teoria de modelos: linguagem de primeira ordem, teorias completas, conjuntos definíveis e tipo definíveis, teorema de compacidade e saturação.

No terceiro Capítulo, apresentamos uma descrição do grupo de Lascar, Gal_L, munido da topologia induzida pelo espaço de tipos completos $S_{|L|}(N)$, e consideramos algumas propriedades, que ligam a relação de lascar E_L com sequências indiscerníveis e os teoremas de partição.

Finalmente, no Capítulo 4 estudamos as componentes conexas G_A^0, G_A^{00} e G_A^∞, propriedades topológicas do quociente G/G_A^∞, e o teorema de Gismatullin que garante a existência de G^∞ para grupos em teorias NIP.

Lista de Símbolos

$\mathcal{F}$	Coleção de símbolos de funções.
$\mathcal{R}$	Coleção de símbolos de relações.
$\mathcal{C}$	Conjunto de elementos distinguíveis ou constantes.
M, N	Conjuntos.
$\mathcal{M}, \mathcal{N}$	Estruturas com conjuntos subjacentes M e N respectivamente.
$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$	$\mathcal{M}$ é uma subestrutura de $\mathcal{N}$.
$\mathcal{L}$	Assinatura.
$\lvert\mathcal{L}(A)\rvert$	Cardinal do conjunto de fórmulas com parâmetros em A.
$x, y, v_1, \cdots$	Variáveis.
$\lvert A\rvert$	Cardinal de um conjunto A.
$\overline{a}, \overline{b}$	Uplas de elementos em alguma estrutura.
$\overline{x}, \overline{y}$	Uplas de variáveis.
ϕ, ψ, φ	Fórmulas.
Φ, Σ	Conjuntos de fórmulas.
$\mathcal{M} \models T$	$\mathcal{M}$ é um modelo da teoria T.
$\phi(G)$	Elementos em G que satisfazem ϕ.
$\Phi(G)$	Elementos em G que satisfazem todas as fórmulas em Φ.
$tp(\overline{a}/A)$	Tipo de $\overline{a}$ sobre A (Conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas realizadas por $\overline{a}$)
$Th_A(\mathcal{M})$	Conjunto de sentenças com parâmetros em A que são verdadeiras em $\mathcal{M}$.
$S_n(A)$	Conjunto de tipos em n variáveis com parâmetros em A.
$\Theta_A(x, y)$	Relação Θ: (x, y) satisfaz todas as $\mathcal{L}(A)$-fórmulas densas $\varphi(x, y)$.
$\overset{\equiv}{A}(x, y)$	Relação: $tp(x/A) = tp(y/A)\}$ $(x, y$ tem o mesmo tipo sobre $A)$.
$Aut(\mathcal{M}/A)$	Grupo de automorfismos de $\mathcal{M}$ que fixam $A \subseteq M$.
$Autf_{L_A}(G)$	Automorfismos fortes de lascar: gerado por $\{f \in Aut(G/\mathcal{M}) : A \supseteq M \prec G\}$.
Gal_{L_A}	Grupo de Lascar sobre A: $Aut(G/A)/Autf_{L_A}$.
$E_H(a, b)$	Existe $f \in H \leq Aut(G)$ tal que $a = f(b)$.
$E_L(a, b)$	Relação de Lascar: $E_H(a, b)$ com $H = Autf_L$.
X_E	Conjunto de comutadores da relação $X_E = \{a^{-1}b : E(a, b)\}$.

Capítulo 1

Grupos topológicos

Neste capítulo apresentamos o conceito de grupo topológico juntamente com algumas propriedades básicas que ajudam a compreender sua estrutura. Para isso consideramos primeiramente alguns conceitos e resultados elementares de topologia e da teoria de grupos.

1.1 Espaços Topológicos

Para as demonstrações dos resultados enunciados nesta seção e mais exemplos o leitor pode ver [6].

Definição 1.1 *Uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfazem as seguintes propriedades*

i. $\emptyset,\ X \in \tau$*;*

ii. $\bigcup X_i \in \tau$*, onde* $\{X_i\}$ *é uma coleção arbitrária de elementos de* τ*;*

iii. $\bigcap_{j=1}^{n} X_j \in \tau$ *para n finito.*

O conjunto X com a topologia τ é chamado espaço topológico.

Definição 1.2 *Os conjuntos que pertencem à topologia τ de X são chamados abertos de X e se $B \subseteq X$ é tal que $X \setminus B$ é aberto, então B é chamado fechado. Além disso se, $x \in A$, para $A \in \tau$, dizemos que A é uma vizinhança de x.*

Uma topologia τ pode ser determinada por um subconjunto $\wp \subseteq \tau$. Ou seja, podemos obter todos os elementos de τ a partir dos elementos de $\wp$.

Definição 1.3 *Seja X um conjunto não vazio. Uma base para uma topologia sobre X é uma coleção $\wp$ de subconjuntos de X tais que* *i.* *Para cada* $x \in X$*, existe* $B \in \wp$ *contendo* x*. Isto é* $X = \bigcup_{B \in \wp} B$*;*

ii. *Se* $x \in B_1 \cap B_2$ *com* $B_1, B_2 \in \wp$*, então existe* $B_3 \in \wp$ *tal que* $x \in B_3$ *e* $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$*.*

Os abertos da topologia τ em X gerada por uma base $\wp$ são dados pela seguinte condição: U é um aberto de X se, para cada $x \in U$, existe $B \in \wp$ tal que $x \in B$ e $B \subseteq U$.

Definição 1.4 *Seja* τ *uma topologia sobre o conjunto* X *e* $Y \subseteq X$*. A topologia induzida* τ_Y *sobre* Y *é a coleção* $\{Y \cap U : U \in \tau\}$ *e* Y *munido dessa topologia é chamado subespaço topológico.*

Exemplos

1. Seja X um conjunto não vazio, a coleção τ_1 de todos os subconjuntos de X é chamada de *topologia discreta* e a coleção $\tau_2 = \{\emptyset, X\}$ é a *topologia indiscreta* ou trivial.
2. Seja $X = \mathbb{R}$ e τ a coleção de todos intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Temos que $\mathbb{R}$ é um espaço topológico e τ é conhecida como a *topologia euclidiana* de $\mathbb{R}$.
3. A topologia gerada pelos intervalos da forma $[a,b)$ com $a < b \in \mathbb{R}$ é chamada a *topologia de Sorgenfrey* em $\mathbb{R}$. Verifiquemos que, de fato, a coleção dos conjuntos dados acima é uma base para uma topologia em $\mathbb{R}$. Isto é, verificar as condições da *Definição*1.3.
   - Dado $x \in \mathbb{R}$, existe o conjunto $[x, x+1)$ tal que $x \in [x, x+1)$.
   - Se $x \in B_1 \cap B_2$ com $B_1 = [a_1, b_1)$ e $B_2 = [a_2, b_2)$, então $a_2 < b_1$ e temos que $x \in [a_2, b_1) \subseteq B_1 \cap B_2$.
4. Sejam X e Y espaços topológicos, a família B de conjuntos da forma $U \times V$ onde U e V são abertos de X e Y respectivamente, é a base da *topologia produto* sobre $X \times Y$.

Dado um espaço topologico X e $A \subseteq X$, podemos associar a A os seguintes conjuntos de manera única.

- $A^\circ = \{\bigcup X_i : X_i \subseteq A, X_i \in \tau\}$ $(Interior\ de\ A)$.
- $\overline{A} = \{\bigcap X_i : A \subseteq X_i, X - X_i \in \tau\}$ $(Fecho\ de\ A)$.
- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ $(Fronteira\ de\ A)$.

Na verdade, A° é o maior aberto contido em A e $\overline{A}$ é o menor fechado que contém A. Em algumas ocasiões, a fim de evitar possíveis confusões, usamos $cl(A)$ para denotar o fecho de A.

Exemplo 1.5 *Considere o conjunto* $A = [0,1) \subset \mathbb{R}$*. Então na topologia de Sorgenfrey temos que* A *é um elemento da base e* $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$*, onde*

$$(-\infty, 0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, 0) \text{ e } [1, +\infty) = \bigcup_{k=2}^{\infty} [1, k).$$

Logo $\mathbb{R} \setminus A$ *é aberto, o que implica que* A *é aberto e fechado nesta topologia. Assim* $A^\circ = \overline{A} = A$ *e* $\partial A = \emptyset$*. Enquanto na topologia euclidiana* $A^\circ = (0,1)$*,* $\overline{A} = [0,1]$ *e* $\partial A = \{0,1\}$*.*

Definição 1.6 *Um espaço topológico* X *é chamado um* ***espaço Hausdorff*** *se para cada par de pontos* x_1, x_2 *distintos, existem vizinhanças disjuntas* U_1 *e* U_2 *de* x_1 *e* x_2 *respectivamente.*

Ou seja, em um espaço topológico Hausdorff, pontos distintos são isolados. A definção de espaco Hausdorff tem várias formulações equivalentes, o que nos dá vários critérios para verificar se um espaço topológico é ou não Hausdorff.

Proposição 1.7 *Seja* X *um espaço topológico. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

i. X *é Hausdorff;*
ii. Para cada $x \in X$*,* $\{x\}$ *é um conjunto fechado;*
iii. A diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ *é fechado na topologia produto de* $X \times X$*.*

Demonstração. Ver [6, p.138].

Note que se X é um conjunto munido da topologia indiscreta, então X não pode ser Hausdorff. Por outro lado, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ junto com a topologia euclidiana, é um exemplo de espaço Hausdorff. De fato, se $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 < c < x_2$. Logo $(x_1 - 1, c)$ e $(c, x_2 + 1)$ são vizinhaças disjuntas de x_1 e x_2 respectivamente.

Definição 1.8 *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos. Uma função* $f : X \to Y$ *é dita contínua se para cada subconjunto aberto* V *de* Y*, o conjunto* $f^{-1}(V)$ *é aberto em* X*.*

Assim, a continuidade de uma função depende diretamente da topologia de seu dominio e contradominio. Considerando $\mathbb{R}_s$ e $\mathbb{R}$ como o conjunto dos números reais com a topologia de Sorgenfrey e a topologia euclidiana respectivamente e as aplicações $f_s : \mathbb{R}_s \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_s$ dadas pela identidade. Então temos que f_s é contínua, enquanto f não é.

Teorema 1.9 *Sejam* X*,* Y *espaços topológicos e* $f : X \to Y$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. *f é contínua.*
ii. *A imagem inversa de cada conjunto fechado em Y é fechado em X.*
iii. *Para cada $x \in X$ e cada vizinhança W de $f(x)$ em Y, existe uma vizinhança V de x em X tal que $f(V) \subseteq W$.*
iv. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.*
v. *$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subseteq Y$.*

Demonstração. Ver a demonstração em [6].

Definição 1.10 *Um espaço topológico X é chamado compacto sempre que*

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad (U_\lambda \text{ aberto})$$

existir uma subfamilia finita $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ com

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.$$

Isto é, em cada cobertura de abertos de X, existe uma subcobertura finita de X.

Teorema 1.11 *Sejam X e Y espaços topológicos.*

i. *Todo subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado;*
ii. *Todo subconjunto de um compacto é compacto se, e somente se, é fechado;*
iii. *$f : X \to Y$ é contínua e X é compacto, então $f(X)$ é compacto em Y.*

Ver a demonstração em [6, p.224].

Teorema 1.12 *Sejam Y, Z espaços topológicos e $f : Y \to Z$ tais que, Y é compacto e Z é Hausdorff e f é contínua, então*

i. *f leva fechados em fechados;*
ii. *Se f é uma bijeção, então f é um homeomorfismo.*

Ver a demonstração em [6, p.226].

Definição 1.13 *Um espaço topológico Y é dito conexo se não existem abertos disjuntos A e B tais que $Y = A \cup B$.*

Definição 1.14 *Se Y é um espaço topológico e $y \in Y$.*

i. *A componente conexa de y denotada por $C(y)$ é a união de todos os subconjuntos conexos de Y contendo y.*
ii. *Se $C(y) = \{y\}$ para cada $y \in Y$, dizemos que Y é totalmente desconexo.*

Os números reais com a topologia euclidiana é um exemplo de espaço conexo. No entanto o subespaço topológico dos números racionais $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ não é conexo e para cada $y \in \mathbb{Q}$, $C(y) = \{y\}$, $\mathbb{Q}$ é totalmente desconexo.

Definição 1.15 *Seja Y um espaço topológico, $Y^* = Y/\sim$ o conjunto das classes de equivalência dadas por uma relação $\sim$ e*

$$\begin{aligned} \pi : Y &\longrightarrow Y/\sim \\ a &\longmapsto [a] \end{aligned}$$

a aplicação sobrejetora canônica. Então, definimos a topologia quociente em Y^* como sendo aquela onde $A \subseteq Y^*$ é aberto (fechado) se, e somente se, $\pi^{-1}(A)$ é aberto (fechado) em Y.

1.2 Homomorfismos de Grupos

Definição 1.16 *Sejam $(G_1, *^1)$ e $(G_2, *^2)$ grupos:*

i. Um homomorfismo de G_1 em G_2 é uma aplicação $\sigma : G_1 \to G_2$ tal que

$$\sigma(x *^1 y) = \sigma(x) *^2 \sigma(y) \text{ para cada } x, y \in G;$$

ii. Um isomorfismo entre G_1 e G_2 é um homomorfismo bijetor de G_1 em G_2. Se tal isomorfismo existe, dizemos que G_1 e G_2 são grupos isomorfos. Denotamos isto por $G_1 \cong G_2$;

iii. Se σ é um isomorfismo de G_1 em G_1, então σ é um automorfismo de G_1.

Caso não seja necessário especificar o produto do grupo $(G, *)$, substituímos a expressão $x * y$ por xy a fim de simplificar a notação.

Sejam G um grupo, e $\sigma \in Aut(G)$, onde $Aut(G)$ denota o grupo de automorfismos de G, então o conjunto dos pontos fixos de G por σ é denotado por

$$C_G(\sigma) = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$$

e podemos estender o conjunto dos pontos fixos de G para um subgrupo $M \leq Aut(G)$ da seguinte forma

$$C_G(M) = \{g \in G : \forall \sigma \in M \; \sigma(g) = g\}.$$

Na verdade $C_G(\sigma)$ e $C_G(M)$ são subgrupos de G.

Se $H \leq G$ é tal que $\sigma(H) = H$, então H é dito σ-invariante, e se H é σ-invariante para cada $\sigma \in M$, então H é M-invariante.

Exemplos

1. Sejam G um grupo e $H \neq \{e\}$ tal que, $H \triangleleft G$, então a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : G &\to G/H \\ g &\mapsto gH \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor que não é isomorfismo, pois $\pi(H) = eH$. Mais ainda, se $\sigma : G_1 \to G_2$ é um homomorfismo de grupos com $H_1 \triangleleft G_1$ e $H_2 \triangleleft G_2$, então $\overline{\sigma}$ dado por

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} : G_1/H_1 &\to G_2/H_2 \\ g_1H &\mapsto \sigma(g_1)H \end{aligned}$$

também é um homomorfismo. Em particular se $\tau : G \to G$ é um automorfismo, e H é um subgrupo normal de G τ-invariante, então $\overline{\tau}$ é um automorfismo de G/H.

2. Seja G um grupo, então as aplicações dadas por

$$\begin{aligned} I_g : G &\to G \\ h &\mapsto g^{-1}hg \end{aligned}$$

para cada $g \in G$, são os automorfismos internos de G. Denotamos esse conjunto por $Inn(G)$.
Em particular, se $G = S_3$ temos que $S_3 \cong Inn(S_3)$. Para mostrar isso, basta verificar que τ dado como segue é um isomorfismo

$$\begin{aligned} \tau : S_3 &\to Inn(S_3) \\ g &\mapsto I_g \end{aligned}$$

3. Sejam G, H grupos e seja

$$\begin{aligned} \phi : H &\to Aut(G) \\ h &\mapsto \phi_h \end{aligned}$$

um homomorfismo. O produto cartesiano $G \times H$ munido da operação

$$(a,b) \rtimes_\phi (c,d) = (a\phi_b(c), bd),$$

possui estrutura de grupo, e é chamado o produto semidireto de G e H com respeito a ϕ, denotado por $G \rtimes_\phi H$. Agora, dado um grupo N com subgrupos G e H tais que

   i. $G \triangleleft N$;

ii. $N = GH$;

iii. $G \cap H = \{e\}$.

então $N \cong G \rtimes_\phi H$. Com efeito, seja $\phi : H \to Aut(G)$ o homomorfismo dado por $\phi_h(g) = hgh^{-1}$. Note que se $x \in N$ e $x = gh$, $x = g'h'$ para $g, g' \in G$ e $h, h' \in H$, então $g^{-1}g' = hh'^{-1} \in H \cap G = \{e\}$. Logo $x = gh$ com $g \in G$ e $h \in H$ únicos. Assim a aplicação

$$\begin{aligned} f :& N \to G \rtimes_\phi H \\ & x \mapsto (g,h) \end{aligned}$$

é bem definida e bijetora.

Por outro lado, se $x_1 = g_1h_1$ e $x_2 = g_2h_2$, então

$$x_1x_2 = g_1h_1g_2(h_1^{-1}h_1)h_2 = g_1\phi_{h_1}(g_2)h_1h_2.$$

Portanto,

$$f(x_1x_2) = (g_1\phi_{h_1}(g_2), h_1h_2) = (g_1,h_1) \rtimes (g_2,h_2) = f(x_1) \rtimes f(x_2).$$

e f é um isomorfismo.

1.2.1 Ações de Grupo

Definição 1.17 *Seja X um conjunto e G um grupo. Dizemos que G age em X se existe uma aplicação*

$$\begin{aligned} \rho : G \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

tal que

i. $ex = x$ para todo $x \in X$, onde e é o elemento neutro de G;

ii. $(gh)x = g(hx)$ para todo $g, h \in G$ e $x \in X$.

Esta aplicação é chamada ação à esquerda de G em X. Analogamente, definimos a ação à direita $\gamma(g,x) = xg$ para $g \in G$ e $x \in X$.

Se G é um grupo agindo em um conjunto X. Então

- A ação de G em X induz a seguinte relação de equivalência: $x_1 \sim x_2$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$. Assim, dado $x \in X$, sua classe de equivalência é chamada *órbita* de x por G e é definida como sendo o conjunto

$$G \cdot x = \{gx : g \in G\};$$

- $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ é um subgrupo de G denominado *subgrupo de isotropia* ou *estabilizador* de x;
- O kernel da ação de G em X é

$$K = \{g \in G : gx = x \text{ } para \text{ } todo \text{ } x \in X\} = \bigcap_{x \in X} G_x \subset G.$$

Definição 1.18 *Seja ϕ uma ação de G em X. Então ϕ é uma ação*

i. efetiva se $K = \{e\}$;
ii. livre se $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$;
iii. transitiva se para todo $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $x = gy$. Isto é, X é uma órbita, $X = G \cdot x_0$ para algum $x_0 \in X$.

Quando uma ação é livre e transitiva é chamada de ação *regular*.
Cabe notar que toda ação livre é também efetiva. No entanto a reciproca nem sempre é verdadeira.

Exemplo 1.19 *Seja G um grupo, existe uma ação natural de $Aut(G)$ em G dada por*

$$\begin{aligned} \phi : Aut(G) \times G &\to G \\ (\sigma, g) &\mapsto \sigma(g) \end{aligned}$$

Em particular, se $C \leq Aut(G)$ então C também age em G, e a ação é dada por $\phi|_{C \times G}$.
Seja $G = S_3$ e considere a ação de $Inn(G)$ em G, então

$$\begin{aligned} K =& \{I_g \in Inn(G) : \forall x \in G \; I_g(x) = x\} \\ =& \{I_g \in Inn(G) : \forall x \in g \; gx = xg\} \\ =& \{I_g \in Inn(G) : g \in Z(G)\} = \{I_e\} \end{aligned}$$

e $G_e = \{g \in G : geg^{-1} = e\} = G$. Ou seja, a ação de $Inn(G)$ em G para $G = S_3$, é efectiva mas não é livre.

O seguinte lema mostra que os estabilizadores de elementos de um conjunto X em uma mesma órbita são subgrupos conjugados do grupo G.

Lema 1.20 *Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X, $g \in G$ e $x, y \in X$. Se $y = g \cdot x$ para algum $g \in G$, então $G_y = gG_xg^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ tais que $y = g \cdot x$ para algum $g \in G$ e seja $h \in G_y$. Então

$$\begin{aligned} y &= h \cdot y \\ g \cdot x &= h \cdot (g \cdot x) \\ x &= (g^{-1}hg) \cdot x. \end{aligned}$$

Assim, $g^{-1}hg = t \in G_x$, isto é $h = gtg^{-1} \in gG_xg^{-1}$ e $G_y \subset gG_xg^{-1}$. A outra inclusão se obtém de modo similar. □

Exemplo 1.21 *Seja* ρ *a ação de* $Gl_n(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^n$ *dada por*

$$\begin{aligned} \phi : Gl_n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (A, x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

O kernel é o conjunto $\{I_n\}$*, onde* I_n *é a matriz identidade de ordem n e as órbitas são:* $Gl \cdot 0 = \{0\}$ *e* $Gl \cdot e_1 = \mathbb{R}^n - \{0\}$*, onde* $\{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^n$*. Isto é, para cada* $x \in \mathbb{R}^n$ *com* $x \neq 0$*, existe uma matriz* $A \in Gl(n)$ *tal que* $Ae_1 = x$*. Assim, o grupo de isotropia de* $0 \in \mathbb{R}^n$ *é todo* Gl_n *enquanto o grupo de isotropia de* e_1 *é formado pelas matrizes da forma*

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

onde $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ *e* $C \in Gl(n-1)$ *e pelo lema 1.20, dados* $x \neq 0$ *e* $A \in Gl(n)$ *tais que* $Ae_1 = x$*, temos* $G_x = AG_{e_1}A^{-1}$.

1.3 Grupos Topológicos

Os grupos topológicos são conjuntos que além de ter estrutura de grupo, tem uma estrutura topológica que é compatível com o produto do grupo no seguinte sentido.

Definição 1.22 *Um grupo topológico é uma dupla* (G, τ) *onde G é um grupo munido de uma topologia Hausdorff* τ*, tal que as seguintes operações*

$$\begin{aligned} p : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

são contínuas, considerando a topologia produto de $G \times G$ *no caso de p.*

Note que todo grupo com a topologia discreta é um grupo topológico.

Proposição 1.23 *Um grupo G munido de uma topologia é um grupo topológico se, e somente se, a aplicação $q : G \times G \longrightarrow G$ dada por $q(g,h) = gh^{-1}$ é contínua.*

Demonstração. Primeiro vamos supor que as aplicações i e p são contínuas. A continuidade de q se tem da seguinte expressão

$$q(g,h) = p(g,i(h)) = p \circ \varphi(g,h).$$

Onde φ é a aplicacão contínua dada por $\varphi(g,h) = (id(g),i(h))$.
Agora, dado que

$$i(h) = q(e,h),$$

a continuidade de q implica a continuidade de i e como

$$p(g,h) = q(g,i(h)),$$

temos que p também é contínua. □

Seja G um grupo topológico, cada elemento $g \in G$ define as seguintes aplicações:

- Translação à esquerda $E_g : G \to G$ dada por $E_g(h) = gh$;
- Translação à direita $D_g : G \to G$ dada por $D_g(h) = hg$;
- Conjugação $C_g : G \to G$ dada por $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Para $g,h \in G$ temos que $E_g(h) = p(g,h)$, $D_g(h) = p(h,g)$ e $C_g(h) = D_{g^{-1}} \circ E_g(h)$.

Além do mais $E_g \circ E_{g^{-1}}(h) = D_g \circ D_{g^{-1}}(h) = C_g(h) \circ C_{g^{-1}}(h) = h$, para cada $g,h \in G$. Em consequência disso, se (G,τ) é um grupo topológico, então E_g, D_g e C_g são homeomorfismos para todo $g \in G$. Isto é, são aplicações bijetivas contínuas com inversas contínuas. Isto proporciona uma condição necessária para um grupo G ser um grupo topológico.

Exemplo 1.24 *O grupo $(\mathbb{R},+)$ munido da topologia de Sorgenfrey não é um grupo topológico. De fato, a aplicação i não é contínua pois $i^{-1}([1,2)) = (-2,-1]$ e $(-2,-1]$ não é um aberto na topologia de Sorgenfrey.*

1.3.1 Subgrupos Topológicos

Todo subgrupo de um grupo topológico é de novo um grupo topológico com a topologia induzida. Isto é, se $H \leq G$ e G é um grupo topológico com topologia τ então $A \subseteq H$ é um aberto em H se $A = \tilde{A} \cap H$ para algum $\tilde{A}$ aberto em G.

Exemplo 1.25 *O conjunto das matrizes invertiveis com coeficientes em $\mathbb{R}$, denotado por $Gl_n(\mathbb{R})$ é um grupo topológico considerando a topologia gerada pelos abertos dados como segue.*

$$B_\varepsilon(A) = \left\{ D \in Gl_n(\mathbb{R}) : \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - a_{ij}|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \right\}$$

onde $A = (a_{ij}), D = (d_{ij}) \in Gl_n(\mathbb{R})$. *O subconjunto* $O(n)$ *das matrizes ortogonais é um subgrupo de* $Gl_n(\mathbb{R})$. *Além do mais,* $SO(n) \triangleleft O(n) \leq Gl(n)$*, onde* $SO(n)$ *é o conjunto das matrizes ortogonais com determinante igual* 1. *De fato, sejam* $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}), C = (c_{ij}), D = (d_{ij})$ *matrizes em* $Gl_n(\mathbb{R})$ *e*

$$d(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right) \right)^{1/2}.$$

Considerando

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

onde A_i *é a i-ésima linha de A. Então podemos olhar A como elemento de* $\mathbb{R}^{n^2}$ *do seguinte modo*

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^{n^2} \\ A &\mapsto (A_1, \ldots, A_n). \end{aligned}$$

Assim, $d(A,B)$ *coincide com a métrica euclidiana em* $\mathbb{R}^{n^2}$. *Daí os abertos*

$$B_\varepsilon(A) = \{B \in Gl(n) : d(A,B) < \varepsilon\}$$

geram uma topologia em $Gl_n(\mathbb{R})$.
Note que o produto

$$\begin{aligned} p : Gl_n(\mathbb{R}) \times Gl_n(\mathbb{R}) &\to Gl_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

é tal que $p(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n) = (C_1, \ldots, C_n)$ *com*

$$C_i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kn} \right).$$

Ou seja, todas as entradas de $C = P(AB)$ *são funções contínuas. Temos que a aplicação*

$$\begin{aligned} i : Gl_n(\mathbb{R}) &\to Gl_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

com $A^{-1} = (\hat{a}_{ij})$ *é contínua. De fato, dado que*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)^t,$$

temos que

$$\hat{a}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{det(A)} det(A^{ji})$$

onde A^{ji} é a matriz de ordem $n-1$ que se obtem ao tirar a j-ésima linha e a i-ésima coluna de A. Olhando Gl_n como um conjunto imerso em $\mathbb{R}^{n^2}$, notamos que todos os elementos de A^{-1} são funções contínuas. Daí a aplicação $i(A) = A^{-1}$ é contínua. Na verdade i é diferenciável; ver ([7]).

Lema 1.26 *Seja X um espaço topológico e $\phi : X \to X$ um homeomorfismo. Suponha que $A \subseteq X$ é um subconjunto invariante por ϕ, isto é $\phi(A) \subseteq A$. Então $\overline{A}$ e A° também são invariantes. Além do mais, se $\phi(A) \subseteq \overline{A}$ então $\phi(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$.*

Demonstração. Dado que ϕ é contínua, temos que $\phi(\bar{A}) \subseteq \overline{\phi(A)}$ e, como A é invariante por ϕ, $\overline{\phi(A)} \subseteq \overline{A}$. Daí $\overline{A}$ é invariante por ϕ. Para mostrar que A° é invariante por ϕ, basta notar que pela contínuidade de ϕ^{-1}, a imagem inversa de A° por ϕ^{-1} é $\phi(A^\circ)$ e é um aberto contido em A. Portanto, $\phi(A^\circ) \subseteq A^\circ$.
Por último, se $\phi(A) \subseteq \overline{A}$, temos que $\overline{\phi(A)} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ e pela continuidade de ϕ concluímos que $\phi(\overline{A}) \subseteq \overline{\phi(A)} \subseteq \overline{A}$ □

Proposição 1.27 *Seja H um subgrupo de um grupo topológico G. Então seu fecho $\overline{H}$ também é subgrupo de G. Além do mais, se H é normal em G, o mesmo ocorre com $\overline{H}$.*

Demonstração. Seja $x \in H$, então $xH = E_x(H) = H$ e pelo lema 1.26 temos que $E_x(\overline{H}) \subseteq \overline{H}$. Daí $xy \in \overline{H}$ sempre que $x \in H$ e $y \in \overline{H}$. Ou seja $D_y(H) \subseteq \overline{H}$ para cada $y \in \overline{H}$ e pela última parte do lema 1.26, $D_y(\overline{H}) \subseteq \overline{H}$. Portanto $xy \in \overline{H}$ sempre que $x \in \overline{H}$ e $y \in \overline{H}$.
Por outro lado a aplicação $i : G \to G$ que leva cada elemento no seu inverso é contínua e $i(H) \subseteq H$. Logo $i(\overline{H}) \subseteq \overline{H}$. Agora, dizer que H é normal é equivalente a dizer que H é invariante por C_g para cada $g \in G$. Assim pelo lema 1.26, $C_g(\overline{H}) \subseteq \overline{H}$ para cada $g \in G$. Ou seja, $\overline{H}$ é normal. □

Proposição 1.28 *Seja $H \subseteq G$ um subgrupo e suponha que $H^\circ \neq \emptyset$. Então H é aberto e fechado.*

Demonstração. Para provar que H é aberto, mostramos que $H \subseteq H^\circ$. Para isso, considere $x \in H^\circ$, $y \in H$ e note que $yx^{-1}H^\circ = E_{yx^{-1}}(H^\circ)$ é um aberto contido em H. Na verdade $y(x^{-1}H^\circ)$ é um aberto de y contido em H, pois $x^{-1}(H^\circ)$ é um aberto que contém a identidade e. Ou seja $y \in H^\circ$ e assim $H \subseteq H^\circ$. Com isso temos que $gH = E_g(H)$ é aberto para cada $g \in G$ e

$$H = \left(\bigcup_{g \notin H} gH \right)^c .$$

De fato, se $gh \in H$ para algum $h \in H$ então $g \in H$. Equivalentemente, se $g \notin H$, então $gh \in H^c$ para cada $h \in H$. Logo, H também é fechado por ser o complemento de um aberto. $\square$

Definição 1.29 *Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico. Uma ação de G em X é contínua se a aplicação $\rho : G \times X \to X$, dada por $\rho(g,x) = gx$ é contínua.*

Se ρ é contínua então as aplicações

$$\begin{aligned} \rho_x : G &\to X \\ g &\mapsto gx \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \rho_g : X &\to X \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$$

são contínuas por ser restrições de ρ a $G \times \{x\}$ e $\{g\} \times X$ respectivamente.

Proposição 1.30 *Suponha que a ação de G em X seja contínua e que X seja espaço Hausdorff. Então, qualquer subgrupo de isotropia G_x, $x \in X$, é fechado.*

Demonstração. Basta notar que

$$G_x = \{g \in G : \phi(g,x) = x\} = \phi^{-1}\{x\}.$$

Dado que X é Hausdorff e ϕ_x é contínua, temos que G_x é fechado. $\square$

Sejam G_1 e G_2 grupos topológicos e $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ subgrupos, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) &\longrightarrow (G_1/H_1) \times (G_2/H_2) \\ (g_1, g_2)(H_1 \times H_2) &\longmapsto (g_1 H_1, g_2 H_2) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo em relação às topologias quocientes. Isto pode ser verificado a partir do seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\pi_1"] & G_1 \times G_2 \arrow[d] \\ (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \arrow[r, "\phi"] & (G_1/H_1) \times (G_2/H_2) \end{tikzcd}$$

Proposição 1.31 *A topologia quociente em G/H é Hausdorff se, e somente se, H é fechado.*

Demonstração. Se G/H é Hausdorff, então pela *Proposição* 2.49 o conjunto $\{eH\} \subset G/H$ é fechado. Então pela continuidade da aplicação canônica $\pi : G \to G/H$, temos que

$$\pi^{-1}(eH)\{x \in G : e^{-1}x \in H\} = H$$

é fechado em G.
Reciprocamente, suponha que H é fechado. Pela Proposição 2.49, G/H é Hausdorff se, e somente se, a diagonal

$$\Delta = \{(x,x) \in G/H \times G/H\}$$

é fechada na topologia produto. Mas, $G/H \times G/H$ e $(G \times G)/(H \times H)$ são homeomorfos, então basta mostrar que

$$\Delta_2 = \{(x,x)(H \times H) : x \in G\}$$

é fechado na topologia quociente. Ou seja, mostrar que $(\pi_1)^{-1}(\Delta_2) \subset G \times G$ é fechado, onde $\pi_1 : G \times G \longrightarrow (G \times G)/(H \times H)$ é a aplicação canônica.
Note que $\pi_1(g,h) \in \Delta_2$ se, e somente se, $h^{-1}g \in H$. Logo $\pi_1^{-1}(\Delta_2) = q^{-1}(H)$, onde

$$\begin{aligned} q : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto x^{-1}y \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua pois G é um grupo topológico. Assim $q^{-1}(H) = \pi_1^{-1}(\Delta_2)$ é fechado. $\square$

Proposição 1.32 *A ação de G em G/H é contínua em relação à topologia quociente.*

Demonstração. Considerando o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \times (G/H) \arrow[r, "\phi"] & G/H \end{tikzcd}$$

onde $p(x,y) = xy$ e $\phi : G \times G/H \to G/H$ é a aplicação que define a ação de G em G/H, temos que se $A \subset G/H$ é um aberto, então $(p \circ \pi)^{-1}(A)$ é um aberto de $G \times G$. Daí $(id \times \pi)^{-1}(\phi^{-1}(A))$ é um aberto de $G \times G$. Ou seja $\phi^{-1}(A)$ é um aberto de $G \times G/H$. $\square$

Capítulo 2

Teoria de Modelos

Estrutura

Todos os matemáticos estudam alguma classe de estruturas, suas propriedades e a relação que pode existir entre tais estruturas. Intuitivamente, uma estrutura é um conjunto com alguns elementos destacados, funções e relações entre os elementos do conjunto. Estes fatores determinam uma classe de conjuntos e são armazenados em uma assinatura. Isto é, podemos classificar os conjuntos com sua estrutura correspondente associada a uma assinatura. Neste capítulo introduzimos formalmente estes conceitos, além de propriedades e resultados da Teoria de Modelos, como o Teorema da Compacidade e apresentamos algumas demonstrações importantes que utilizamos nos capítulos três e quatro deste trabalho. Para uma apresentação mais detalhada sobre os assuntos discutidos aqui, sugerimos ao leitor ver [14], [12] e [22].

2.1 Estruturas e Linguagens

Definição 2.1 *Uma assinatura $\mathcal{L}$ é dada pelos seguintes elementos*

i) uma coleção $\mathcal{F}$ de símbolos de funções e um inteiro positivo n_f para cada $f \in \mathcal{F}$.
ii) uma coleção $\mathcal{R}$ de símbolos de relações e um inteiro positivo n_R para cada $R \in \mathcal{R}$.
iii) um conjunto de elementos distinguíveis ou constantes $\mathcal{C}$.

Onde n_f e n_R são o número de argumentos de f e R respectivamente. Dizemos que f é n_f-ária e R n_R-ária.

Em uma assinatura $\mathcal{L}$, não necessariamente todas as coleções $\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$ são diferentes de vazio.

Exemplo 2.2 *Abaixo apresentamos alguns exemplos de assinaturas.*

1. *Assinatura de grupos* $\mathcal{L}_g = \{*, e\}$*, onde* e *é um elemento distinguível e* $*$ *é uma função binária.*
2. *Assinatura de anéis* $\mathcal{L}_r = \{+, \cdot, 0, 1\}$*, onde* $0, 1$ *são elementos distinguíveis e* $+, \cdot$ *são símbolos de funções binárias.*
3. *Assinatura de anéis ordenados* $\mathcal{L}_{or} = \mathcal{L}_r \cup \{<\}$*, onde* $<$ *é um símbolo de relação binária.*

Se M é um conjunto que admite uma interpretação para cada símbolo $\otimes \in \mathcal{L}$, denotamos essa interpretação por $\otimes^M$. Ou seja, se consideramos os grupos $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}, +)$, então $e^{\mathbb{R}} := 1,\ *^{\mathbb{R}} := \cdot,\ e^{\mathbb{Z}} := 0$ e $*^{\mathbb{Z}} := +$.

Definição 2.3 *Uma* $\mathcal{L}$*-estrutura* $\mathcal{M}$ *é dada por*

i. *um conjunto* M *chamado universo, ou conjunto subjacente, de* $\mathcal{M}$*;*
ii. *uma função* $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$ *para cada* $f \in \mathcal{F}$*;*
iii. *um conjunto* $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{m_R}$ *para cada* $R \in \mathcal{R}$*;*
iv. *um conjunto de elementos* $c^{\mathcal{M}} \in M$ *para* $c \in \mathcal{C}$*.*

M e N denotam o conjunto subjacente das estruturas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ respectivamente.

Usamos a notação $R^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_{n_R})$ para dizer que $(a_1, \ldots, a_{n_R}) \in R^{\mathcal{M}}$ e, sempre que $\mathcal{M}$ estiver clara a partir do contexto, escrevemos simplesmente $R(a_1, \ldots, a_{n_R})$.

Exemplo 2.4 *Segue alguns exemplos de* $\mathcal{L}_g$*-estruturas.*

1. $\mathcal{M}_1$ *com o conjunto subjacente* $\mathbb{Q}$*, onde* $e^{\mathbb{Q}} := 1$ *e* $*^{\mathbb{Q}} := \cdot$*;*
2. $\mathcal{M}_2$ *com o conjunto subjacente* $\mathbb{Z}$*, interpretando* $e^{\mathbb{Z}} := 0$ *e* $*^{\mathbb{Z}} := +$*;*
3. $\mathcal{M}_3$ *com o conjunto subjacente* $\mathbb{Z}$*, interpretando* $e^{\mathbb{Z}} := 1$ *e* $*^{\mathbb{Z}} := \cdot$*.*

Observe que $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é um grupo, no entanto é uma* $\mathcal{L}_g$ *estrutura.*

Agora, se temos assinaturas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ tais que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ e $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}'$-estrutura, $\mathcal{M}$ é também uma $\mathcal{L}$ estrutura. Isto induz a seguinte definição.

Definição 2.5 *Sejam* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ *assinaturas e* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{M}'$ *respectivas* $\mathcal{L}$ *e* $\mathcal{L}'$ *estruturas. Suponha que* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{M}'$ *possuem o mesmo conjunto subjacente e que a interpretação dos símbolos de* $\mathcal{L}$ *é igual em cada uma delas, então* $\mathcal{M}'$ *é uma expansão de* $\mathcal{M}$ *a* $\mathcal{L}'$ *e* $\mathcal{M}$ *é uma redução de* $\mathcal{M}'$ *a* $\mathcal{L}$*. A redução de* $\mathcal{M}'$ *a* $\mathcal{L}$ *é denotada por* $\mathcal{M}'|_{\mathcal{L}}$*, e se* $A \subseteq M$*, denotamos por* $\mathcal{L}(A)$ *a assinatura obtida ao adicionar símbolos constantes para cada elemento* $a \in A$*.*

Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$, então $\mathcal{M}$ possui uma expansão natural $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{L}(A)$ onde cada $a \in A$ representa um elemento constante (ou distinguível), interpretado pelo valor correspondente em A.

Linguagem

Uma assinatura $\mathcal{L}$ pode possuir distintas interpretações. Isto é, várias $\mathcal{L}$-estruturas diferentes e para descrever e classificar tais estruturas é preciso estabelecer uma linguaguem ou alfabeto que permita expressar propriedades das estruturas e de seus elementos. O alfabeto, ou linguagem, é constituído por

- um conjunto enumerável de símbolos de variáveis $x, y, v_0, v_1, \ldots$;
- parênteses (,) ;
- símbolos em $\mathcal{L}$;
- símbolos lógicos:

$$\begin{array}{ll} = & \text{“}\textit{igual}\text{”} \\ \neg & \text{“}\textit{não}\text{”} \\ \wedge & \text{“}\textit{e}\text{”} \\ \vee & \text{“}\textit{ou}\text{”} \\ \forall & \text{“}Para\,todo\,elemento\text{”} \\ \exists & \text{“}Existe\,um\,elemento\text{”} \end{array}$$

Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ uma sequência de elementos de M, dizemos que $\overline{a}$ é uma upla de M, e se $\overline{a}$ tem comprimento finito n, dizemos que $\overline{a}$ é uma n-upla de M. Analogamente, $\overline{v} = (v_0, v_1, \ldots)$ é uma upla de variáveis.

Observação 2.6 *Dado que cada linguaguem está associado a uma assinatura $\mathcal{L}$, abusando da notação, usamos $\mathcal{L}$ para denotar tanto a assinatura como a linguaguem associada a $\mathcal{L}$.*

Definição 2.7 *O conjunto de $\mathcal{L}$-termos é o menor conjunto de cadeias de símbolos definidas como segue:*

i. todo símbolo de variável $v \in \mathcal{L}$ é um $\mathcal{L}$-termo;
ii. todo símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$ é um $\mathcal{L}$-termo;
iii. se $t_1, t_2, \ldots t_n$ são termos e f é um símbolo de uma função n-ária de $\mathcal{L}$, então $f(t_1, t_2, \ldots t_n)$ é um $\mathcal{L}$-termo.

Os termos são as expressões básicas e a partir delas, dos símbolos de relação e dos símbolos lógicos listados acima, obtemos cadeias de símbolos mais complexas.

Definição 2.8 *As $\mathcal{L}$-fórmulas atômicas de $\mathcal{L}$ são cadeias de símbolos definidas como segue:*

i. se s e t são termos, $s = t$ é uma fórmula atômica;

ii. *se R é um símbolo de relação n-ária de $\mathcal{L}$ e $t_1, t_2, \ldots t_n$ são termos, então $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica.*

O conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas é o menor conjunto $\mathcal{W}$ contendo as fórmulas atômicas tal que

i. *se $\phi \in \mathcal{W}$ então $\neg\phi \in \mathcal{W}$;*
ii. *se $\phi, \psi \in \mathcal{W}$, então $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{W}$ e $(\phi \vee \psi) \in \mathcal{W}$;*
iii. *se $\phi \in \mathcal{W}$ e v é um símbolo de variável, então $(\exists v\phi) \in \mathcal{W}$ e $(\forall v\phi) \in \mathcal{W}$.*

Observação 2.9 *Note que se W é um conjunto de fórmulas contendo as fórmulas atômicas, para mostrar que $W = \mathcal{W}$ é suficiente verificar*

i. *se $\phi \in \mathcal{W}$ então $\neg\phi \in \mathcal{W}$;*
ii. *se $\phi, \psi \in \mathcal{W}$, então $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{W}$;*
iii. *se $\phi \in \mathcal{W}$ e v é um símbolo de variável, então $(\exists v\phi) \in \mathcal{W}$.*

pois $\phi \vee \psi := \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ *e* $\forall v(\phi(v)) := \neg(\exists v \neg\phi(v))$

Para simplificar a escrita, usamos as seguintes abreviaturas:

$$\begin{aligned}
\phi \to \psi \quad & \textit{para} \;\; (\neg\phi) \vee \psi; \\
\phi \leftrightarrow \psi \quad & \textit{para} \;\; (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi); \\
\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \quad & \textit{para} \;\; \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \phi_n; \\
\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \quad & \textit{para} \;\; \phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \phi_n.
\end{aligned}$$

Neste trabalho as fórmulas são cadeias de símbolos que usam $\wedge$ e $\vee$ para ligar apenas um número finito de expressões que envolvem um número finito de quantificadores. Ou seja fórmulas finitas. Esse tipo de linguaguem é denominada *Linguagem de primeira ordem*.
Dada uma assinatura $\mathcal{L}$ definimos a *cardinalidade* da linguagem associada a $\mathcal{L}$ como sendo o cardinal do conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, $|\mathcal{L}|$. Se A é um conjunto de constantes, $|\mathcal{L}(A)| = |\mathcal{L}| + |A|$. Ou seja $|\mathcal{L}(A)| = \max\{|\mathcal{L}|, |A|\}$, (ver A.18).

Exemplo 2.10 *As seguintes são $\mathcal{L}_{or}$-fórmulas*

1. $v_1 < 0 \vee v_1 > 0$;
2. $\exists v_2(v_2 \cdot v_2 = v_1)$;
3. $\forall v_1(v_1 = 0 \vee \exists v_2(v_2 \cdot v_1 = 1))$.

Note que (1) e (2) são propriedades de elementos em alguma $\mathcal{L}_{or}$-estrutura que podem ser verdadeiras para alguns elementos e falsas para outros. Em $(\mathbb{Z},+,\cdot,<,0,1)$, (2) é falsa para $v_1 = 3$ e verdadeira para $v_1 = 4$. Enquanto (3) é sempre verdadeira ou sempre falsa na estrutura.

Se uma variável está sob a influência de um quantificador universal ou existencial, como v_2 em (2) do exemplo 2.10, a variável é dita *ligada*. De outra maneira dizemos que a variável *ocorre livremente*. Uma fórmula sem variáveis livre é chamada de *sentença*. Assim, no exemplo 2.10 v_1 é ligada em (3), livre em (1) e a fórmula (3) é uma sentença.

Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. Uma interpretação das variáveis em $\mathcal{M}$ é uma aplicação que designa a cada variável v um elemento de M. Assim, se t é um termo com variáveis $\bar{v} = (v_1,\ldots,v_n)$, então na interpretação de $\bar{v}$ como $\bar{a}$, t é denotado por $t^{\mathcal{M}}(\bar{a})$. Logo se ϕ é uma $\mathcal{L}$-fórmula nas variáveis $\bar{v}$, a interpretação $\phi^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ é um enunciado que pode ser verdadeiro ou falso. Se for verdadeiro dizemos que $\bar{a}$ satisfaz ϕ em $\mathcal{M}$ e denotamos

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}).$$

Caso contrário denotamos $\mathcal{M} \not\models \phi(\bar{a})$ ou $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{a})$.

2.1.1 Homomorfismos de Estruturas

Agora, estamos interessados em aplicações entre estruturas que preservam as propriedades dos símbolos da linguagem correspondente. No caso dos grupos, os homomorfismos e em particular os isomorfismos e automorfismos, satisfazem esta condição. A seguir, estendemos esses conceitos para estruturas em geral.

Definição 2.11 *Sejam $\mathcal{M},\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas e $\bar{a}$ uma n-upla de elementos de M com $n \in \mathbb{N}$. Uma função $\sigma : M \to N$ entre os conjuntos subjacentes de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, é um homomorfismo se*

i. $\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ *para cada constante c de $\mathcal{L}$;*

ii. $\sigma(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$ *para cada símbolo de função n-ária f de $\mathcal{L}$;*

iii. Se $R^{\mathcal{M}}(\bar{a})$*, então* $R^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$ *para cada símbolo de relação n-ária R de $\mathcal{L}$. Ou seja* $\sigma(R^{\mathcal{M}}) \subseteq R^{\mathcal{N}}$.

Definição 2.12 *Sejam $\mathcal{M},\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas e $\bar{a}$ uma n-upla de elementos de M com $n \in \mathbb{N}$. Uma função $\sigma : M \to N$ é uma $\mathcal{L}$-imersão se é injetiva, satisfaz (i) e (ii) como na definição acima e:*

iii'. $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$ *se, e somente se,* $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}$ *para cada símbolo R de relação n-ária de $\mathcal{L}$* $(\sigma(R^{\mathcal{M}}) = R^{\mathcal{N}})$*.*

Se $M \subseteq N$ e a função inclusão é uma imersão, dizemos que $\mathcal{M}$ é uma subestrutura de $\mathcal{N}$ ou que $\mathcal{N}$ é uma extensão de $\mathcal{M}$.

Exemplo 2.13 *Seja* $\mathcal{L}_g$ *e* $\eta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *a aplicação dada por* $\eta(x) = e^x$. *Note que* $\eta(0) = 1$, $\eta(x+y) = \eta(x) \cdot \eta(y)$. *Logo* η *é uma* $\mathcal{L}_g$*-imersão de* $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *em* $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$.

Observação 2.14 *Pode-se demonstrar que se* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *são* $\mathcal{L}$*-estruturas e* $\mathcal{M}$ *é uma subestrutura de* $\mathcal{N}$ *então*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{v}) \text{ se, e somente se, } \mathcal{N} \models \phi(\bar{v}),$$

para toda fórmula atômica ϕ *nas variáveis* $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. *Ver detalhes em [14, p. 11].*

Definição 2.15

i. *Um isomorfismo entre* $\mathcal{L}$*-estruturas,* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *é uma imersão bijetora de* $\mathcal{M}$ *em* $\mathcal{N}$. *Assim, se existe tal isomorfismo dizemos que* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *são estruturas isomorfas.*
ii. *Se* σ *é um isomorfismo de* $\mathcal{M}$ *em* $\mathcal{M}$ *dizemos que* σ *é um automorfismo de* $\mathcal{M}$.

O conjunto de automorfismos de uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$, é denotado por $Aut(\mathcal{M})$, igual a notação usada para automorfismos de grupos. Porém, o símbolo $Aut(\mathcal{M}/A)$ para $A \subseteq M$ tem uma interpretação diferente a usada para automorfismos de grupos:

$$Aut(\mathcal{M}/A) = \{f \in Aut(\mathcal{M}) : \forall a \in A, f(a) = a\}.$$

Dizemos que $B \subseteq M$ é A-invariante se B é $Aut(\mathcal{M}/A)$-invariante no sentido usual.

Definição 2.16 *Uma* $\mathcal{L}$*-imersão* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *é elementar se para todo* $\bar{a} \in M^n$ *e toda fórmula* $\phi(\bar{v})$ *se tem que*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \text{ se, e somente se, } \mathcal{N} \models \phi(f(\bar{a})).$$

Se $\mathcal{M}$ *é uma subestrutura de* $\mathcal{N}$ *e a função inclusão de* $\mathcal{M}$ *em* $\mathcal{N}$ *é elementar, então dizemos que* $\mathcal{M}$ *é uma subestrutura elementar de* $\mathcal{N}$ *ou que* $\mathcal{N}$ *é uma extensão elementar de* $\mathcal{M}$ *e denotamos por* $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Observe que ao contrário das expansões, nas extensões elementares a linguaguem não muda, no entanto o conjunto subjacente original pode aumentar.

Definição 2.17 *Sejam* $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$*-estruturas. Dizemos que* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *são elementarmente equivalentes se para toda* $\mathcal{L}$*-sentença*

$$\mathcal{M} \models \phi \text{ se, e somente se, } \mathcal{N} \models \phi.$$

Proposição 2.18 *Se* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *são* $\mathcal{L}$*-estruturas isomorfas, então são elementarmente equivalentes.*

Ou seja, se $j : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um isomorfismo, então

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ se, e somente se, } \mathcal{N} \models \phi(j(a_1), \ldots, j(a_n)).$$

para cada $\mathcal{L}$-fórmula ϕ. A demonstração pode ser vista em [14, p.13].

Lema 2.19 *Seja I uma ordem linear (ver apêndice A.2) e $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ uma cadeia de $\mathcal{L}$-estruturas onde $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ para cada $i < j$. Então*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i,$$

é uma extensão elementar de cada $\mathcal{M}_i$, onde o conjunto subjacente de $\mathcal{M}$ é $M = \cup_{i \in I} M_i$

Demonstração. Queremos mostrar que

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{v}) \text{ se, e somente se, } \mathcal{M}_i \models \phi(\bar{v}), \tag{2-1}$$

para cada $i \in I$ e cada $\mathcal{L}$-fórmula ϕ. Seja $\overline{W}$ o conjunto de todas as $\mathcal{L}$-fórmulas que satisfazem 2-1. Vamos mostrar que $\overline{W}$ é o conjunto de todas as $\mathcal{L}$-fórmulas. Pela observação 2.14 temos que todas as $\mathcal{L}$-fórmulas atômicas estão contidas em $\overline{W}$, e se $\phi, \psi \in \overline{W}$, então $\neg\phi \in \overline{W}$ e $\phi \wedge \varphi \in \overline{W}$.

Por outro lado, para a fórmula $\exists\bar{v}\ \phi(\bar{v})$ temos que se $\mathcal{M}_i \models \exists\bar{v}\ \phi(\bar{v})$ então $\mathcal{M} \models \exists\bar{v}\ \phi(\bar{v})$ porque $M_i \subseteq M$. Reciprocamente, se $\mathcal{M} \models \exists\bar{v}\ \phi(\bar{v})$ então existe $b \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(b)$. Como $M = \bigcup_{i \in I} M_i$, temos que $b \in \mathcal{M}_j$ para algum $j \in I$. Se $j < i$, então $b \in \mathcal{M}_i$ e obtemos o resultado. Se $i < j$, $\mathcal{M}_j \models \exists\bar{v}\ \phi(\bar{v})$ e como $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ temos que $\mathcal{M}_i \models \exists\bar{v}\ \phi(\bar{v})$. Pela observação 2.9, temos que $\overline{W}$ contém todas as $\mathcal{L}$-fórmulas. □

Definição 2.20 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. O diagrama elementar de $\mathcal{M}$, denotado por $Diag_{el}(\mathcal{M})$ é o conjunto dado por*

$$\{\phi(m_1, \ldots, m_n) : \mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n), \phi \text{ uma } \mathcal{L}\text{-fórmula}\} \text{ com } m_i \in M.$$

Ou seja, o diagrama elementar de $\mathcal{M}$ é o conjunto de enunciados verdadeiros em $\mathcal{M}$.

Lema 2.21 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura com conjunto subjacente M e seja $\mathcal{N}$ uma $\mathcal{L}(M)$-estrutura tal que $\mathcal{N} \models Diag_{el}(\mathcal{M})$, então existe uma imersão elementar de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Seja $j : M \to N$ a interpretação dos elementos de M em N. Vamos verificar que j é uma imersão elementar. Se $m_1, m_2 \in M$ são tais que $m_1 \neq m_2$, então a fórmula dada por $m_1 \neq m_2$ pertence a $Diag_{el}$ e $\mathcal{N} \models j(m_1) \neq j(m_2)$. De onde temos que j é injetiva.
Se f é um símbolo de função de $\mathcal{L}$, então para $m_0, m_1, \ldots, m_n \in M$ tais que $f(m_1, \ldots, m_n) = m_0 \in Diag_{el}$ temos que $\mathcal{N} \models f(j(m_1), \ldots, j(m_n)) = j(m_0)$. Ou seja,

$$j(f(m_1, \ldots, m_n)) = f(j(m_1), \ldots, j(m_n)).$$

Se R é um símbolo de relação e $R^{\mathcal{M}}(m_1,\ldots,m_n)$, então $R(m_1,\ldots,m_n) \in Diag_{el}(\mathcal{M})$ e $R^{\mathcal{N}}(j(m_1),\ldots,j(m_n))$. Reciprocamente, se $R^{\mathcal{N}}(j(m_1),\ldots,j(m_n))$ e $\neg R^{\mathcal{M}}(m_1,\ldots,m_n) \in Diag_{el}(\mathcal{M})$, temos que $\neg R^{\mathcal{N}}(j(m_1),\ldots,j(m_n))$. O que é uma contradição.

Concluímos que $\mathcal{N}$ é uma extensão elementar de $\mathcal{M}$. □

2.2 Conjuntos definíveis

Definição 2.22 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. Um conjunto $X \subseteq M^n$ é A-definível ou definível sobre A se, e somente se, existe uma fórmula $\phi(v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m)$ e uma upla $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_m)$ de elementos em A tal que*

$$X = \{(b_1,\ldots,b_n) : \mathcal{M} \models \phi(b_1,\ldots,b_n,a_1,\ldots,a_m)\}$$

A é chamado conjunto de parâmetros.

Denotamos por $\phi(\mathcal{M})$ o conjunto de elementos $c \in M$ tais que $\mathcal{M} \models \phi(c)$.

Cabe notar que se um subconjunto B de uma estrutura $\mathcal{M}$ é tal que

$$B = \{b : \mathcal{M} \models \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n\},$$

então B é definido pela fórmula $\bar{\theta}$ dada por $\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$. Podemos estender o conceito de definibilidade para conjuntos definidos por uma quantidade enumerável de fórmulas. Nesse caso, não temos uma fórmula como conjunção de todas as fórmulas pois a linguagem que consideramos é de primeira ordem. Estes conjuntos são definidos formalmente na seção 3.4.

Exemplo 2.23 *[15, p.17] Considere o corpo dos números reais e seja $\phi(v,\sqrt{2}) := v > \sqrt{2}$. Então identificando o conjunto subjacente $\mathbb{R}$ com a estrutura $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$ temos que*

$$X_1 = \{v : \mathbb{R} \models \phi(v,\sqrt{2})\}$$

é um conjunto definível em $\mathbb{R}$ com parâmetro $\sqrt{2}$. Na verdade, é $\emptyset$-definível. Basta notar que $X_1 = \overline{\phi(v)}$, onde

$$\overline{\phi(v)} := (v \cdot v > 1+1) \wedge v > 0$$

é uma fórmula sem parâmetros.

Definição 2.24 *Dada R uma relação n-ária numa $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$, $R \subseteq M^n$. Dizemos que R é definível sobre $A \subseteq M$ se, existem uma $\mathcal{L}(A)$-fórmula ϕ e $\bar{a} \in A^n$ tais que*

$$R(\bar{c}) \leftrightarrow \phi(\bar{c},\bar{a}).$$

Exemplo 2.25 *Considerando a linguagem dos anéis ordenados $\mathcal{L}_{or}$ e a fórmula*

$$\phi(x,y) := \exists z(z \neq 0 \wedge y = x + z^2)$$

temos que $x < y$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models \phi(x,y)$. Ou seja a relação $<$ é $\emptyset$-definível.

Observação 2.26 *Note que as fórmulas atômicas na linguagem dos anéis $\mathcal{L}_r$ são da forma $p(v_i,\ldots,v_n) = 0$, onde p é um polinômio nas variáveis $v_1,\ldots,v_n$ e os coeficientes são somas e produtos finitos de 0 e 1. Se K é um corpo algebricamente fechado de característica zero e $\phi(v,\overline{a})$ é uma $\mathcal{L}(A)$-fórmula com $\overline{a} \in A^r$, $A \subseteq K$ e $r \in \mathbb{N}$, então existem polinômios $p_1,\ldots,p_n,q_1\ldots q_m \in \mathbb{Q}[x]$ tais que*

$$K \models \phi(c,\overline{a})\textit{se, e somente se, } K \models \left(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i(c) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} q_i(c) \neq 0\right)$$

(Ver demonstração em [14, p.85]). Isto é, se $B \subseteq K$ é um conjunto A-definível, existem polinômios $p_1,\ldots,p_n,q_1\ldots q_m \in \mathbb{Q}[x]$ tais que

$$B = \left\{c \in K : \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(c) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} q_i(c) \neq 0\right\}$$

Proposição 2.27 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $X \subseteq M^n$ um subconjunto A-definível. Se $f \in Aut(\mathcal{M}/A)$, então $f(X) = X$. Ou seja, todo subconjunto A-definível é A-invariante.*

Demonstração. Seja $\varphi(v,\bar{a})$ uma fórmula com parâmetros em A tal que

$$X = \{b : \mathcal{M} \models \varphi(b,\bar{a})\}.$$

Como f é um isomorfismo, temos que

$$\mathcal{M} \models \varphi(b,\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(f(b), f(\bar{a})).$$

Daí, $f(b) \in X$ para cada $b \in X$ ($X \subseteq f(X)$). Similarmente $f^{-1}(X) \subseteq X$ e obtemos $X \subseteq f(X)$. $\square$

Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura tal que o conjunto subjacente é particionado em conjuntos disjuntos $\{N_s : s \in S\}$ onde, para cada símbolo de relação n-ária R, existem $s_1,\ldots,s_n$ tais que $R^{\mathcal{M}} \subseteq N_{s_1} \times \ldots \times N_{s_n}$ e para cada símbolo de função n-ária f, existem $s_0,\ldots,s_n$ tais que $f : N_{s_1} \times \ldots \times N_{s_n} \to N_{s_0}$. Então os conjuntos N_s são chamados *sortes* de $\mathcal{M}$, e $\mathcal{M}$ uma estrutura de S-sortida.

Exemplo 2.28 *Seja $N = (G,X,\cdot)$ a estrutura com conjunto subjacente $G \cup X$, onde G é um grupo e X é um conjunto tal que sua assinatura inclui os símbolos de $\mathcal{L}_g$ e um símbolo* *de função $*$ tal que $*^N : G \times X \to X$ é uma ação de G em X. Então N é uma estrutura 2-sortida.*

Definição 2.29 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e*

$$S = \{S_E : E \text{ é uma relação de equivalência n-ária } \emptyset\text{-definível } \}$$

Então $\mathcal{M}^{eq}$ é a estrutura onde cada N_{S_E} é interpretado como o conjunto de classes de equivalências geradas pela relação E. Ou seja, N_{S_E} é interpretado como M^n/E.

Note que $M^n = M^n/E$ onde E é a relação de equivalência dada pela igualdade. Assim a estrutura $\mathcal{M}$ está contida em $\mathcal{M}^{eq}$ e cada símbolo de função e relação em $\mathcal{L}$ pertence a $\mathcal{L}_{eq}$ e dizemos que M é o sorte que possui a estrutura original.

A linguagem de uma estrutura $\mathcal{M}^{eq}$ contém a linguaguem de cada sorte. As variáveis $v_0^s, \dots, v_k^s$ e as constantes c_s de cada sorte N_s são termos de $\mathcal{M}^{eq}$. Se f é um símbolo de função tal que

$$f : N_{s_1} \times N_{s_2} \times \dots \times N_{s_r} \to N_{s_0},$$

e cada t_i é um termo no respectivo sorte N_{s_i}, então $f(t_1, \dots, t_r)$ é um termo no sorte N_{s_0}. Assim as fórmulas em uma estrutura $\mathcal{M}^{eq}$ são expressões dadas como segue

- $t_1 = t_2$ onde t_1 e t_2 são termos no mesmo sorte.
- $R(t_1, \dots, t_n)$ onde R é um símbolo de relação tal que $R^{\mathcal{M}^{eq}} \subseteq N_{s_1} \times N_{s_2} \times \dots \times N_{s_r}$ e cada t_i é um termo do sorte N_{s_i}.
- Se $\phi(x)$ é uma fórmula em $\mathcal{M}^{eq}$, então $\exists x\, \phi(x)$ também é uma fórmula.

Na estrutura N do exemplo 2.28, temos que $\phi(x) := \exists g(gx = e)$ é uma fórmula em G e portanto uma fórmula em N, mas não é uma fórmula em X porque não temos uma interpretação para "e" nem para o produto gx em X. Enquanto que $\varphi(g) := \forall x \in X\; g * x = x$ é uma fórmula em N mas não em G nem em X.

Para obter mais informações e exemplos de estruturas sortidas, o leitor pode consultar [14, p. 28] e [22, p.5,12].

2.3 Teorias

Dada uma linguagem $\mathcal{L}$, uma *$\mathcal{L}$-teoria T* é um conjunto de $\mathcal{L}$-sentenças.

Definição 2.30 *Uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ é um modelo de uma teoria T, em símbolos $\mathcal{M} \models T$ se $\mathcal{M} \models \phi$ para cada sentença ϕ de T. Uma sentença ϕ é uma consequência lógica de T, se e somente se, $\mathcal{M} \models \phi$ para cada modelo $\mathcal{M}$ de T. Em símbolos $T \models \phi$.*

Uma teoria pode conter $\mathcal{L}$-sentenças contraditórias e nesse caso não possuir nenhum modelo. Se T é uma teoria que possui algum modelo, dizemos que é *satisfatível*. Assim, temos um critério para agrupar as estruturas em classes segundo as teorias que satisfaçam. Usualmente, as sentenças de uma teoria T que determinam uma classe de estruturas são conhecidas como axiomas da classe. Por exemplo, o conjunto de sentenças que axiomatiza a classe dos grupos é chamado a teoria dos grupos.

Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, então $\mathcal{M}$ é um modelo da teoria $Th(\mathcal{M})$ formada por todas a sentenças verdadeiras em $\mathcal{M}$. Note que $Th(\mathcal{M}) \subset Diag_{el}(\mathcal{M})$ e se $\mathcal{N}$ é uma $\mathcal{L}$ estrutura tal que $Th(\mathcal{N}) = Th(\mathcal{M})$, então $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são elementarmente equivalentes.

Exemplo 2.31 *Seja $\mathcal{L}_g = \{*, e\}$. A classe dos grupos é axiomatizada por:*

- $\forall v_1(e * v_1 = v_1 * e = v_1)$;
- $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3(v_1 * (v_2 * v_3) = (v_1 * v_2) * v_3)$;
- $\forall v_1 \exists v_2(v_1 * v_2 = v_2 * v_1 = e)$.

Se acrescentamos a seguinte sentença, obtemos a axiomatização dos grupos abelianos.

- $\forall v_1 \forall v_2(v_1 * v_2 = v_2 * v_1)$.

Exemplo 2.32 *Seja $\mathcal{L}_r = \{+, \cdot, 0, 1\}$. Os axiomas da classe dos anéis são as sentenças do exemplo 2.31 para grupos abelianos interpretando e como 0 e $*$ como $+$ e, as seguintes sentenças.*

- $\forall v_1(v_1 \cdot 0 = 0)$;
- $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3(v_1 \cdot (v_2 \cdot v_3) = (v_1 \cdot v_2) \cdot v_3)$;
- $\forall v_1(1 \cdot v_1 = v_1 \cdot 1 = v_1)$;
- $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3(v_1 \cdot (v_2 + v_3) = ((v_1 \cdot v_2) + (v_1 \cdot v_3))$;
- $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3((v_1 + v_2) \cdot v_3 = ((v_1 \cdot v_3) + (v_2 \cdot v_3))$.

Acrescentando as sentenças abaixo obtemos os axiomas da teoria dos corpos T_C.

- $\forall v_1 \forall v_2(v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1)$;
- $\forall v_1(v_1 \neq 0 \to \exists v_2(v_1 \cdot v_2 = 1))$.

Finalmente, acrescentando a seguinte sentença obtemos os axiomas para os corpos algebricamente fechados.

- $\forall v_0 \forall v_1 \cdots \forall v_n \exists x \left(x^n + \sum_{i=0}^{n-1} v_i x^i = 0 \right)$

A teoria dos corpos algebricamente fechados é denotada por ACF.

A notação $T \vdash \phi$ indica que existe uma prova de ϕ a partir das sentenças de T. Isto é, existe uma sequência finita ordenada de fórmulas α, tais que se $\varphi \in \alpha$, então $\varphi \in T$ ou φ se segue das fórmulas anteriores por regras lógicas. Na classe dos grupos por exemplo a fórmula

$$\forall v_1 (\forall v_2 \; v_1 v_2 = v_2) \rightarrow v_1 = e,$$

indica a unicidade do elemento neutro e é consequência dos axiomas de grupo.

Definição 2.33 *Uma $\mathcal{L}$-teoria é inconsistente se $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$ para alguma sentença ϕ. Caso contrário T é consistente. Isto é, T é consistente se, não é possível deduzir formalmente uma contradição a partir de T.*

Teorema 2.34 (Teorema de Completude) *Seja T uma $\mathcal{L}$-teoria de primera ordem e ϕ uma $\mathcal{L}$-sentença, então $T \models \phi$ se, e somente se, $T \vdash \phi$.*

Demonstração.(Ver [4, p.67])

Corolário 2.35 *Uma $\mathcal{L}$-teoria T é consistente se, e somente se, é satisfatível*

Demonstração. Se T não for satisfatível, o conjunto K de modelos de T é vazio. Logo para $\phi \in T$, podemos definir K como sendo o conjunto de $\mathcal{L}$-estruturas $\mathcal{M}$ tais que $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \neg\phi)$. Ou seja, $T \models (\phi \wedge \neg\phi)$ e pelo teorema 2.34, $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$ e T é inconsistente. Para mostrar a volta basta notar que se T é inconsistente, então não possui nenhum modelo e portanto não é satisfatível. □

Teorema 2.36 (Teorema de Compacidade) *Seja T uma $\mathcal{L}$-teoria. Todo subconjunto finito de T é satisfatível se, e somente se, T também o é.*

Demonstração. Se T não for satisfatível, então pelo corolário 2.35 T é inconsistente. Ou seja $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$ e como na prova usamos finitas fórmulas que se seguem de sentenças em T, então há um subconjunto finito de T que é inconsistente e portanto insatisfatível.

Por outro lado, é claro que se T é satisfatível, existe um modelo $\mathcal{M} \models \phi$ para toda $\phi \in T$ e portanto, todo subconjunto finito é satisfatível. □

Definição 2.37 *Uma $\mathcal{L}$-teoria T é completa se, para toda $\mathcal{L}$-sentença ϕ,*

$$T \models \phi \text{ ou } T \models \neg\phi.$$

Observação 2.38 *Seja T uma $\mathcal{L}$-teoria. As seguintes afirmações são equivalentes*

i. T é completa.

ii. Quaisquer dois modelos de T são elementarmente equivalentes.

De fato, seja $\mathcal{M} \models T$ e ϕ uma $\mathcal{L}$-sentença, então $\mathcal{M} \models \phi$ ou $\mathcal{M} \models \neg\phi$. Como todos os modelos de T são elementarmente equivalentes dois a dois temos que $T \models \phi$ ou $T \models \neg\phi$ e portanto T é completa. Agora, suponha que T é uma teoria completa e que $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ são modelos de T. Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ não são elementarmente equivalentes, então existe uma $\mathcal{L}$-sentença ϕ tal que $\mathcal{M} \models \phi$ e $\mathcal{N} \models \neg\phi$ e como T é completa $\phi \in T$ ou $\neg\phi \in T$. Em todo caso temos uma contradição. De fato, se $\phi \in T$, então $\mathcal{N} \models (\phi \wedge \neg\phi)$ e se $\neg\phi \in T$, temos que $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \neg\phi)$.

Exemplo 2.39 *A teoria T_C dos corpos não é completa. De fato, seja p um número primo e ψ_p a sentença dada por*

$$\forall x(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{p\ vezes}=0),$$

ψ_p nem $\neg\psi_p$ são consequências da teoria T_C. Temos que o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o corpo dado pelos inteiros módulo 5, denotado por F_5 são modelos não elementarmente equivalentes de T_C pois $F_5 \models \psi_5$ e $\mathbb{Q} \models \neg\psi_5$.

2.4 Tipos

Nesta seção apresentamos vários resultados sobre tipos e extensões de modelos, baseados em [14]. Incluímos várias demonstrações, a fim de ilustrar o uso do Teorema de Compacidade 2.36 para construir modelos, pois é uma estratégia que nos ajudará a resolver algumas questões importantes dos próximos capítulos.

Suponha que $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$. Seja $\mathcal{L}(A)$ a linguagem obtida ao adicionar símbolos constantes para todos os elementos de A e $Th_A(\mathcal{M})$ o conjunto de todas as $\mathcal{L}(A)$-sentenças verdadeiras em $\mathcal{M}$. Note que as $\mathcal{L}(A)$ fórmulas podem ser vistas como $\mathcal{L}$-fórmulas com parâmetros em A e que $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}(A)$-estrutura.

Definição 2.40 *Um n-tipo p sobre A é um conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas em variáveis livres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que $p \cup Th_A(\mathcal{M})$ é consistente. Um n-tipo completo p sobre A é um tipo maximal. Isto é, p é um n-tipo sobre A tal que para toda $\mathcal{L}(A)$-fórmula $\phi(\bar{x})$, temos que $\phi(\bar{x}) \in p$ ou $\neg\phi(\bar{x}) \in p$.*

Denotamos por $S_n(A)$ o conjunto de todos os n-tipos completos sobre A e se $p \in S_n(A)$, com $B \subseteq A$, denotamos por $p|_B$ o conjunto $\{\phi \in p : \phi \in \mathcal{L}(B)\}$.

Exemplo 2.41 *Seja $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <)$ a $\mathcal{L} = \{<\}$-estrutura com os números racionais como conjunto subjacente, $<$ a ordem estrita em $\mathbb{Q}$ e A o conjunto dos números inteiros. Consideremos os seguintes conjuntos de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas.*

- $p(v) = \{v > 1, v > 2, v > 3, \ldots\}$;
- $q(v) = \{\phi(v) \in \mathcal{L}(A) : \mathcal{M} \models \phi(1/2)\}$.

Seja Δ um subconjunto finito de $p(v) \cup Th_A(\mathcal{M})$ então Δ é a união de um subconjunto finito de $Th_A(\mathcal{M})$, com um conjunto do tipo

$$\{v > k_1, v > k_2, \ldots, v > k_s\},$$

onde $k_s \in A$ e s é um inteiro positivo. Assim, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x > k_i$ para todo $i = 1, \ldots s$, e Δ é satisfatível. Logo pelo Teorema da Compacidade 2.36 e pelo corolário 2.35 temos que $p \cup Th_A(\mathcal{M})$ é consistente. Portanto p é um 1-tipo sobre A.
No segundo caso q é o conjunto de todas as $\mathcal{L}(A)$-fórmulas que $1/2$ fatisfaz. Ou seja, q contém todas as propriedades de $1/2$ e como $\mathcal{M} \models \phi(1/2)$ então $q(v) \cup Th_A(\mathcal{M})$ é satisfatível. Neste caso é satisfatível no proprio $\mathcal{M}$. Além disso, se $\psi(x) \in \mathcal{L}(A)$ temos

$$\mathcal{M} \models \psi(1/2) \ \ ou \ \ \mathcal{M} \models \neg\psi(1/2).$$

Isto é, $\psi \in q(v)$ ou $\neg\psi \in q(v)$. Portanto q é um 1-tipo completo sobre A.

Podemos generalizar o segundo caso do exemplo 2.41 para estruturas arbitrárias da seguinte forma: Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, $A \subseteq M$ e $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, então

$$tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \{\phi(v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}(A) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}$$

é um n-tipo completo. Se $A = \emptyset$ usamos a notação $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ e em geral $tp(\bar{a}/A)$ quando não é necessário especificar que $\bar{a} \in M^n$.

Definição 2.42 *Se p é um n-tipo sobre A, dizemos que $\bar{a}$ realiza p se $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ para toda $\phi \in p$. Se nenhum $\bar{a} \in M^n$ realiza p em $\mathcal{M}$, então $\mathcal{M}$ omite p.*

No exemplo 2.41 $p(v)$ não é realizado em $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <)$, enquanto $1/2$ realiza $q(v)$.

Observação 2.43 *Note que se p e q são tipos completos tais que $p \subseteq q$, então $p = q$. Caso contrário, existe φ tal que $\varphi \in q$ e $\varphi \notin p$, logo $\neg\varphi \in p \subset q$. Isto leva à contradição $(\varphi \wedge \neg\varphi) \in q$.*

Proposição 2.44 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, $A \subseteq M$ e p um n-tipo sobre A. Existe uma extensão elementar $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que p é relizado em $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Seja $\Gamma = \{\phi(c_1, \ldots, c_n) : \phi \in p\} \cup Diag_{el}(\mathcal{M})$, sendo $c_1, \ldots, c_n$ novas constantes. Primeiro vamos mostrar que Γ é satisfatível. Para isso, seja Δ um subconjunto finito de Γ e, sem perda de generalidade, suponha que Δ é uma fórmula $\phi \wedge \psi$, onde $\phi(\bar{c}, \bar{a}) \in p$, $\bar{a} \in A$ e $\psi \in Diag_{el}(\mathcal{M})$. Assim, podemos exprimir Δ como

$$\phi(c_1,\ldots,c_n,\bar{a}) \wedge \psi(\tilde{a},b_1,\ldots,b_s)$$

onde $\bar{a}$ e $\tilde{a}$ são uplas finitas de elementos de A e $b_1,\ldots,b_s \in M\setminus A$. Olhando ψ como uma $\mathcal{L}(A)$-fórmula, temos que

$$\exists\overline{w}\ \psi(\tilde{a},\overline{w})$$

é uma sentença verdadeira em $\mathcal{M}$ e como p é um tipo de $\mathcal{M}$ sobre A, existe um modelo $\mathcal{N}_0$ tal que $\mathcal{N}_0 \models p \cup Th_A(\mathcal{M})$. Logo

$$\mathcal{N}_0 \models \exists\overline{v}\ \phi(\overline{v},\overline{a}) \wedge \exists\overline{w}\ \psi(\tilde{a},\overline{w})$$

e $\mathcal{N}_0 \models \phi(\bar{d},\bar{a}) \wedge \psi(\tilde{a},\bar{e})$ e tendo $\bar{d}$ como as constantes $\bar{c}$, segue que Δ é satisfatível e pelo Teorema de Compacidade 2.36, temos que Γ é satisfatível.

Seja $\mathcal{N}$ um modelo de Γ. Como $\mathcal{N} \models Diag_{el}(\mathcal{M})$, a aplicação inclusão de M em N é elementar. Assim $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ e, sendo $\bar{d} \in \mathcal{N}$ a interpretação de $\bar{c}$ em $\mathcal{N}$, $\bar{d}$ é a realização de p em $\mathcal{N}$ sobre A. □

Definição 2.45 *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são $\mathcal{L}$-estruturas e $B \subseteq M$, então $f : B \to N$ é uma aplicação parcialmente elementar se, e somente se,*

$$\mathcal{M} \models \phi(b_1,\ldots,b_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(f(b_1),\ldots,f(b_n)),$$

para toda $\mathcal{L}$-fórmula ϕ e toda sequência finita $\bar{b}$ de B.

Lema 2.46 *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estrutura, $A \subseteq M$ e $f : A \to N$ uma aplicação parcialmente elementar. Se $b \in M\setminus A$, então existe uma extensão elementar $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{N}$ e $g : A\cup\{b\} \to N_1$, uma extensão de f parcialmente elementar.*

Demonstração. Seja

$$\Gamma = \{\phi(v, f(a_1),\ldots,f(a_n)) : \mathcal{M} \models \phi(b,a_1,\ldots,a_n),\ a_1,\ldots,a_n \in A\} \cup Diag_{el}(\mathcal{N}).$$

Para provar o lema, basta mostrar que Γ é satisfatível. De fato, se existe uma $\mathcal{L}$ estrutura $\mathcal{N}_1$ e um elemento $c \in \mathcal{N}_1$ tal que $\mathcal{N}_1 \models \Gamma$, então $\mathcal{N}_1$ é uma extensão elementar de $\mathcal{N}$ pois $\mathcal{N}_1 \models Diag_{el}$ (ver lema 2.21).
Por outro lado, a aplicacão g dada por

$$\begin{aligned} g : A\cup\{b\} &\to \mathcal{N}_1 \\ a &\mapsto f(a) \\ b &\mapsto c \end{aligned}$$

é parcialmente elementar. Com efeito, sejam $a_1,\ldots,a_{n+1} \in A \cup \{b\}$. No caso em que $a_i \in A$, temos que $g = f$ e o resultado segue. Suponha sem perda de generalidade que $a_1 = b$.
Temos que $\mathcal{M} \models (b,a_1,\ldots,a_n)$ implica que $\phi(v,g(a_1),\ldots,g(a_n)) \in \Gamma$. Logo

$$\mathcal{N}_1 \models \phi(g(b),g(a_1),\ldots,g(a_n)).$$

Reciprocamente

$$\mathcal{N}_1 \models \phi(g(b),g(a_1)\ldots,g(a_n)) \Rightarrow \mathcal{M} \models \phi(b,a_1,\ldots,a_n).$$

Caso contrário $\mathcal{M} \models \psi(b,a_1,\ldots,a_n)$, onde ψ é a negação de $\phi(b,a_1,\ldots,a_n)$ e, usando o mesmo argumento acima, obtemos $\mathcal{N}_1 \models \psi(g(b),g(a_1),\ldots,g(a_n))$, o que é uma contradição.

Agora, pelo Teorema de Compacidade 2.36, para provar que Γ é satisfatível, é suficiente mostrar que todo subconjunto finito de Γ é satisfatível.

Seja Δ um subconjunto finito de Γ. Sem perda de generalidade, vamos supor Δ como sendo uma fórmula $\phi(v,f(a_1),f(a_n))$ tal que

$$\mathcal{M} \models \phi(b,a_1,\ldots,a_n).$$

Então $\mathcal{M} \models \exists v(\phi(v,a_1,\ldots,a_n))$ e como f é uma aplicação parcialmente elementar, temos que $\mathcal{N} \models \exists\, \phi(v,f(a_1),\ldots,f(a_n))$. Logo $\mathcal{N} \models \phi(d,f(a_1),\ldots,f(a_n))$ para algum $d \in N$ e portanto Δ é satisfatível. □

Corolário 2.47 *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas, $B \subseteq M$ e $f : B \to N$ uma aplicação elementar. Existe uma extensão elementar $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ e $g : M \to N'$ uma imersão elementar.*

Demonstração. Sejam $\kappa = |M|$, $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma enumeração de M (Note que M não necessariamente é um conjunto enumerável pois κ é um cardinal infinito qualquer) e $B_0 = B$, $g_0 = f$. Construímos uma sequência de modelos $\{\mathcal{N}_\alpha\}$ tais que $\mathcal{N}_i \prec \mathcal{N}_j$ sempre que $i < j < \kappa$ e uma sequência de subconjuntos $B_\alpha = \{a_\beta : \beta < \alpha\}$. Usando indução transfinita, (Ver apêndice A.11) temos que para todo $\alpha < \kappa$ existe uma aplicação elementar $g_\alpha : B_\alpha \to \mathcal{N}_\alpha$. De fato

- se $\alpha = 0$, $g_0 : B_0 \to N$, pelo lema 2.46, existe uma extensão elementar $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{N}_0$ e uma aplicação $g_1 : B \cup \{a_1\} \to N_1$ parcialmente elementar que extende g_0.
- Suponhamos que para $\alpha < \kappa$ se tem o resultado e $g_\alpha : B_\alpha \to N_\alpha$ é parcialmente elementar. Então, pelo lema 2.46, existe uma extensão $\mathcal{N}_{\alpha+1}$ de $\mathcal{N}_\alpha$ tal que

$$g_{\alpha+1} : B_\alpha \cup \{a_{\alpha+1}\} \to \mathcal{N}_{\alpha+1}$$

é parcialmente elementar e $g_{\alpha+1}|B_\alpha = g_\alpha$.

- Se α é um ordinal limite, (ver Apêndice A.8) sejam

$$N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta \ \text{ e } \ g_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} g_\beta.$$

  Pelo lema 2.19 temos que $\mathcal{N}_\alpha$ é uma extensão de $\mathcal{N}_\beta$ para cada $\beta < \alpha$ e g_α é parcialmente elementar. Caso contrário, existe uma $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(v)$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(b)$ e $\mathcal{N}_\alpha \models \neg\phi(g_\alpha(b))$ para $b \in B_\alpha$. Logo $\mathcal{N}_\beta \models \neg\phi(g_\alpha(b))$ para algum $\beta < \alpha$ e como $g_\alpha|_{B_\beta} = g_\beta$ e g_β é parcialmente elementar, temos que $\mathcal{M} \models \neg\phi(b)$, o que é contraditório.

  Seja agora

$$\mathcal{N}' = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{N}_\alpha \ \text{ e } \ g = \bigcup_{\alpha<\kappa} g_\alpha.$$

Note que $dom(g) = M$ e pelo lema 2.19 temos que $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ e g é parcialmente elementar. Daí $g : M \to N'$ é uma imersão elementar. □

Proposição 2.48 *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, $A \subseteq M$ e $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ tais que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = tp^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$. Então existe uma extensão elementar $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ e um $\mathcal{L}$-automorfismo $\sigma \in Aut(\mathcal{N}/A)$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Demonstração. Seja $f : A \cup \{a_1, \dots, a_n\} \to A \cup \{b_1, \dots, b_n\}$ a função definida por $f|A = id$ e $f(a_i) = b_i$, onde $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Como $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = tp^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$, temos que f é parcialmente elementar e, pelo corolário 2.47, existe uma extensão elementar $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{M}$ e $f_0 : M \to N_0$ uma imersão elementar.
Por outro lado $g_0 = f_0^{-1} : f(M) \to M$ é uma imersão elementar e, pelo corolário anterior, existe uma extensão $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{M}$ e uma imersão elementar $f_1 : N_0 \to M_1$. Indutivamente temos que se $f_i : M_i \to N_i$ é uma imersão elementar, a aplicação $f_i^{-1} : f_i(M_i) \to M_i$ com $f_i(M_i) \subseteq N_i$ é extendida pela imersão elementar $g_i : N_i \to M_{i+1}$ e $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{N}_i \prec \mathcal{M}_{i+1}$. Assim, obtemos uma sequência de extensões elementares

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{N}_1 \prec \mathcal{M}_2 \dots$$

e de imersões elementares $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ tais que $f_i : M_i \to N_i$. Logo, pelo lema 2.19

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{N}_i = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i$$

é uma extensão elementar de $\mathcal{M}$ e $\sigma = \cup_{i<\omega} f_i$ uma aplicação parcialmente elementar sobrejetora tal que $\sigma|_A = id$ e $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$. □

2.4.1 Espaço de Stone $S_n(A)$

Note que, se $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$, então $Th_A(\mathcal{M}) = Th_A(\mathcal{N})$ para $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Daí $S_n^{\mathcal{M}}(A) = S_n^{\mathcal{N}}(A)$. Além disso,

$$S_n^{\mathcal{M}}(A) = \{tp(\bar{a}/A) : \bar{a} \in N^n \text{ para algum } \mathcal{M} \prec \mathcal{N}\}.$$

De fato, pela proposição 2.44, se $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, existe uma extensão elementar $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que $p \subseteq tp(\bar{a}/A)$ e, pela observação 2.43, $p = tp(\bar{a}/A)$. A outra inclusão segue de que, se $\mathcal{N}$ é uma extensão elementar de $\mathcal{M}$, então $S_n^{\mathcal{M}}(A) = S_n^{\mathcal{N}}(A)$. Como $Th_A(\mathcal{M}) = T$ é uma teoria completa, pela observação 2.38, temos que o conjunto de n-tipos completos de T sobre A está caracterizado da seguinte forma:

$$S_n^T(A) = \{tp(\bar{a}/A) : a \in N^n \text{ para algum } \mathcal{N} \models Th_A(\mathcal{M})\}.$$

Agora, para cada $\mathcal{L}(A)$-fórmula ϕ consideremos o conjunto:

$$B_\phi = \{p \in S_n(A) : \phi \in p\}$$

e note que dado p, um tipo completo, ϕ e ψ $\mathcal{L}(A)$-fórmulas, temos que:

1. $S_n^{\mathcal{M}}(A) = B_\phi \cup B_{\neg\phi}$ para quaisquer ϕ;

2. $B_{\phi\wedge\psi} = B_\phi \cap B_\psi$ para quaisquer ϕ e ψ;

3. $B_{\phi\vee\psi} = B_\phi \cup B_\psi$ para toda ϕ e toda ψ;

4. $S_n^{\mathcal{M}}(A) \setminus B_\phi = \{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) : \phi \notin p\} = B_{\neg\phi}$.

Logo a coleção de todos os B_ϕ é base de uma topologia em $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ e pelo item 4, temos que cada B_ϕ é aberto e fechado.

Além do mais, os conjuntos fechados são caracterizados como segue: F é um fechado em $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ se, e somente se,

$$F = \{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) : \Sigma \subseteq p\},$$

onde Σ é um conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas em $\mathcal{M}$. De fato, se F é um fechado em $S_n^{\mathcal{M}}(A)$, então $S_n^{\mathcal{M}}(A) \setminus F = \bigcup_{\phi\in\Sigma} B_\phi$, com Σ sendo algum conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas em $\mathcal{M}$ e assim, pelo item 4, $F = \bigcap_{\phi\in\Sigma} B_{\neg\phi}$.

Proposição 2.49 *$S_n^{\mathcal{M}}(A)$ é um espaço compacto e Hausdorff.*

Demonstração. Suponha que $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ não seja compacto. Seja $\Delta = \{B_{\phi_\lambda}\}$ um recobrimento de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ tal que nenhum subconjunto finito de Δ cobre todo $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ e

$$\Gamma = \{\neg\phi_\lambda : B_{\phi_\lambda} \in \Delta\}.$$

Dado que $\bigcup_{i=1}^{k} B_{\phi_{\lambda_i}}$ não é um cubrimento, existe $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ tal que $p \notin \bigcup_{i=1}^{k} B_{\phi_{\lambda_i}}$. Logo $\{\neg\phi_{\lambda_1}, \dots, \neg\phi_{\lambda_k}\} \in p$ e

$$\{\neg\phi_{\lambda_1}, \dots, \neg\phi_{\lambda_k}\} \cup Th_A(\mathcal{M})$$

é satisfatível. Pelo Teorema de Compacidade 2.36 $\Gamma \cup Th_A(\mathcal{M})$ é satisfatível. Ou seja Γ é um n-tipo e pela proposição 2.44, existe uma extensão elementar $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ e $\bar{a} \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{a}$ realiza Γ. Ou seja, $tp^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A) \in S_n^{\mathcal{M}}(A) \setminus \bigcup_{\lambda} B_{\phi_\lambda}$. O que é uma contradição.

Agora, sejam $p, q \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Se $p \neq q$, existe uma $\mathcal{L}(A)$-fórmula ϕ tal que $\phi \in p$ e $\phi \notin q$. Logo $p \in B_\phi$ e $q \in B_{\neg\phi}$ e portanto $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ é Hausdorff. □

Agora vamos considerar uma generalização do conceito de definibilidade apresentado na definição 2.22.

Definição 2.50 *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$. Então $B \subseteq M^n$ é chamado tipo definível sobre A se*

$$B = \{\bar{b} \in M^n : \mathcal{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a}), \forall \varphi(v, \bar{a}) \in \Phi(\bar{v})\}$$

onde $\Phi(\bar{v})$ é uma coleção de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas em n variáveis livres. Escrevemos A-$\bigwedge$-definível ou $\bigwedge$-definível sobre A

Se $B \neq \emptyset$, então $\Phi(\bar{v})$ é um tipo realizado por cada $\bar{b} \in B$. Seja $\bar{c} \in M^n$, o símbolo $\Phi(\bar{c})$ indica que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{c})$ para cada $\phi \in \Phi$ e o conjunto de todas as n-uplas $\bar{c}$ de elementos de M tais que $\Phi(\bar{c})$ é denotado por $\Phi(\mathcal{M})$.

Lema 2.51 *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$. Se $U, V \subseteq M$ são $\bigwedge$-definíveis sobre A, então $U \cap V$ e $U \cup V$ também são $\bigwedge$-definíveis sobre A.*

Demonstração. Sejam

$$U = \{u \in M : \mathcal{M} \models \varphi(u, \bar{a}) \forall \varphi \in p\}$$
$$W = \{w \in M : \mathcal{M} \models \psi(w, \bar{a}) \forall \psi \in q\}$$

e $r = \{\varphi(v, \bar{a}) \vee \psi(v, \bar{a}) : \varphi \in p \text{ e } \psi \in q\}$. Então

$$U \cup V = \{c \in M : \mathcal{M} \models \varphi(c, \bar{a}) \forall \varphi \in r\}$$
$$U \cap V = \{c \in M : \mathcal{M} \models \theta(c, \bar{a}) \forall \theta \in p \cup q\}$$

□

Lema 2.52 *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A,B \subseteq M$, então B é A-invariante se, e somente se, existe uma familia de conjuntos tipo definíveis sobre A, $\{B_i : i \in I\}$, tais que*

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Demonstração. Basta considerar I como uma enumeração de B ($I = |B|$), e $B_i = \Phi_i(\mathcal{M})$ com $\Phi_i = tp(b_i/A)$.

Observação 2.53 *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, $B \subseteq M$ e $A \subseteq M$, um conjunto de parâmetros. A aplicação traço sobre A, denotada π_A é dada dada por:*

$$\begin{aligned} \pi_A : M^n &\to S_n^{\mathcal{M}}(A) \\ \bar{b} &\mapsto tp(\bar{b}/A) \end{aligned}$$

Note que se B é A-invariante, então

$$b \in B \text{ se, e somente se, } \pi_A(b) \in \pi_A(B)$$

e podemos considerar B como um subconjunto de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$, identificando B com $\pi(B)$. Além disso, se B é $\bigwedge$-definível sobre A, então

$$B = \{\bar{b} \in M^n : \varphi(\bar{b},\bar{a}) \forall \varphi \in \Phi\},$$

para algum conjunto de fórmulas Φ e

$$\pi_A(B) = \{tp(b/A) : \Phi \subseteq tp(b/A)\}.$$

Ou seja, se B é $\bigwedge$-definível sobre A, sua imagem pela aplicação traço é um fechado em $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

2.5 Modelos saturados e homogêneos

Na seção anterior, vimos que é necessário estender modelos para obter a realização de alguns tipos ou para obter certas propriedades como no caso da Proposição 2.48. Gostaríamos de ter modelos nos quais essas extensões não sejam necessárias. A seguir, formalizamos estas ideias.

A partir de agora considere κ um cardinal infinito e T uma teoria completa com modelos infinitos.

Definição 2.54

i. *Seja* $A \subseteq M$ *com* $|A| < \kappa$. *Dizemos que* $\mathcal{M}$ *é* κ*-homogêneo se toda aplicação parcial elementar* $f : A \to M$ *pode ser estendida a uma aplicação parcial elementar* $\bar{f} : A \cup \{b\} \to M$. *Ainda mais,* $\mathcal{M}$ *é homogêneo se é* $|M|$*-homogêneo.*

ii. $\mathcal{M}$ *é dito fortemente* λ*-homogêneo se, para toda aplicação parcial elementar* $f : A \to M$ *com* $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, *existe um automorfismo* σ *de* $\mathcal{M}$ *tal que* $\sigma|_A = f$.

Proposição 2.55 *Se* $\mathcal{M}$ *é um modelo homogêneo, então* $\mathcal{M}$ *é fortemente* $|M|$*-homogêneo.*

Demonstração. Ver [14, p.133]

Sejam $\mathcal{M}$ fortemente κ-homogêneo e $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ tais que $tp(\bar{a}) = tp(\bar{b})$. Então existe um automorfismo σ de $\mathcal{M}$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$. De fato, definindo $f(a_i) = b_i$, temos que f é parcialmente elementar e portanto existe $\sigma \in Aut(\mathcal{M})$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.

A partir de agora, além de tipos de n-uplas, vamos considerar tipos de I-sequências, onde I é um conjunto ordenado possivelmente infinito. Para isto, temos que ampliar a linguaguem introduzindo novas variáveis $\{v_i : i \in I\}$. Denotamos por $\mathcal{L}_I$ o conjunto de fórmulas com variáveis em $\{v_i : i \in I\}$ e temos que $|\mathcal{L}_I| = |I| + |\mathcal{L}|$.

Definição 2.56 *Um* I*-tipo* p *da* $\mathcal{L}$*-teoria* T *sobre um conjunto de parâmetros* A*, é um conjunto consistente de* $\mathcal{L}_I(A)$*-fórmulas. Denotamos por* $S_I^T(A)$ *o conjunto de* I*-tipos completos de* T *sobre* A.

Como o Teorema da Completude 2.34 vale para um conjunto infinito de símbolos, temos que, todos os resultados apresentados na seção anterior que envolvem o Teorema da Compacidade 2.36 também valem para I-tipos. Em particular $S_I(A)$ é um espaço topológico, Hausdorff e compacto.

Definição 2.57 *Um modelo* $\mathcal{M}$ *é* κ*-saturado se para cada* $A \subseteq M$ *com* $|A| < \kappa$ *se tem que todo* $p \in S_1(A)$ *é realizado por algum* $b \in M$. *Dizemos que* $\mathcal{M}$ *é saturado se é* $|M|$*-saturado.*

Temos que, se todo 1-tipo completo sobre A é realizado em $\mathcal{M}$, então todo n- tipo completo sobre A também o é. De fato, vamos supor por indução que todo $q \in S_{n-1}(A)$ é realizado em $\mathcal{M}$.

Seja $p \in S_n(A)$, então o tipo $\overline{p} = \{\exists x\, \phi(v_1, \ldots, v_{n-1}, x) : \phi \in p\}$ é realizado por algum $\bar{a} \in M^{n-1}$.

Agora, seja $r \in S_1(A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\})$ o 1-tipo dado por

$$\{\varphi(\bar{a}, w) : \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in p\}.$$

Como $\mathcal{M}$ realiza todo tipo em $S_1(A)$ com $|A| < \kappa$ e $|A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}| < \kappa$, então existe $b \in M$ tal que $(\bar{a}, b)$ realiza p.

Lema 2.58 *Se $\mathcal{M}$ é saturado, $A \subseteq M$ e $|A| < |M|$, então $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A)$ se, e somente se, existe $\sigma \in Aut(\mathcal{M}/A)$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Demonstração. Se $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A)$, pela proposição 2.48, existe uma extensão $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ e um automorfismo de $\mathcal{N}$ fixando A e levando $\bar{a}$ em $\bar{b}$. Esta extensão $\mathcal{N}$ que garante a proposição é um modelo que realiza um tipo em $\mathcal{M}$ e neste caso $\mathcal{M}$ também o realiza por ser saturado. Logo existe um automorfismo σ de $\mathcal{M}$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.
Reciprocamente, se existe um automorfismo σ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$, temos que, se $\phi \in tp(\bar{a}/A)$, então

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi(\sigma(\bar{a})).$$

Daí $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A)$. □

Lema 2.59 *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura saturada e A, B subconjuntos de M. Se R é uma relação $\bigwedge$-definível sobre A e B-invariante, então R é $\bigwedge$-definível sobre B.*

Demonstração. Seja Φ um conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas tais que $\mathcal{M} \models R(\bar{c}) \leftrightarrow \Phi(\bar{c})$, onde $\bar{c}$ é uma n-upla de elementos de M, então a aplicação

$$\begin{aligned} f : S_n(A \cup B) &\to S_n(B) \\ p &\mapsto p|_B \end{aligned}$$

é contínua. De fato, seja $F = \{p \in S_n(B) : \Sigma \subseteq p\}$ com Σ um conjunto de $\mathcal{L}(B)$-fórmulas, então

$$f^{-1}(F) = \{p \in S_n(A \cup B) : \Sigma \subseteq p|_B\}$$

e como toda $\mathcal{L}(B)$-fórmula é também uma $\mathcal{L}(A \cup B)$-fórmula e cada p é completo, temos que

$$f^{-1}(F) = \{p \in S_n(A \cup B) : \Sigma \subseteq p\}$$

é fechado em $S_n(A \cup B)$. Além disso, f também é fechada (ver Teorema 1.11).
Agora, seja

$$[\pi] = \{p \in S_n(A \cup B) : \pi \subseteq p\}$$

temos que $[\pi]$ e $f([\pi])$ são fechados. Ou seja $f([\pi]) = \{p \in S_n(B) : \sigma \subseteq p\}$ para algum conjunto de $\mathcal{L}(B)$-fórmulas.

Note que, se $\bar{c}$ é uma n-upla de M tal que $\pi(\bar{c})$, então $tp(\bar{c}/A \cup B) \in [\pi]$ e $tp(\bar{c}/A \cup B)|_B = tp(\bar{c}/B)$ é tal que $\Sigma \subseteq tp(\bar{c}/B)$. Daí $\Sigma(\bar{c})$ e portanto $\pi(\mathcal{M}) \subseteq \Sigma(\mathcal{M})$.
Por outro lado, se $\Sigma(\bar{c})$, então $\Sigma \subseteq tp(\bar{c}/B)$ e $tp(\bar{c}/B) \in f([\pi])$. Logo, existe $\bar{a} \in M^n$ tal que $R(\bar{a})$, $tp(\bar{a}/A \cup B) \in [\pi]$ e $tp(\bar{a}/A \cup B)|_B = tp(\bar{a}/B) = tp(\bar{c}/B)$. Como $\mathcal{M}$ é saturado, pelo lema 2.58, existe $\sigma \in Aut(\mathcal{M}/B)$ tal que $\sigma(\bar{a}) = \bar{c}$, e assim $R(\bar{c})$ pois R é B-invariante.

Isto é $\Sigma(\mathcal{M}) \subseteq \pi(\mathcal{M})$ e concluímos que $R(\bar{a})$ se, e somente se, $\Sigma(\bar{a})$ para cada $\bar{a} \in M^n$ $\square$

Temos a seguinte relação entre modelos κ-saturados e κ-homogêneos.

Proposição 2.60 *Se $\mathcal{M}$ é um modelo κ-saturado, então $\mathcal{M}$ é κ-homogêneo.*

Demonstração. Sejam $A \subseteq M$ com $|A| < \kappa$, $b \in M \setminus A$, $f : A \to M$ parcialmente elementar e

$$\Gamma = \{\phi(v, f(\bar{a})) : \bar{a} \in A^n \text{ e } \mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})\}.$$

Sem perda de generalidade, considere o subconjunto finito de Γ, $\Delta = \{\phi(v, f(\bar{a}))\}$. Então $\mathcal{M} \models \exists v\phi(v, f(\bar{a}))$ e como f é parcialmente elementar segue que $\mathcal{M} \models \exists v\phi(v, f(\bar{a}))$. Assim, Δ é satisfatível e Γ é um tipo sobre A. Como $\mathcal{M}$ é κ-saturado e $|A| < \kappa$, então existe $c \in M$ que realiza Γ e daí a aplicação

$$\bar{f} : A \cup \{b\} \to M$$

tal que $\bar{f}|A = f$ e $\bar{f}(b) = c$ é parcialmente elementar. $\square$

Proposição 2.61 *Seja $\kappa \geq \aleph_0$ e $\mathcal{M} \models T$. Se $\mathcal{M}$ é κ-saturado, então para todo modelo $\mathcal{N} \models T$ com $|N| < \kappa^+$ existe uma imersão elementar de $\mathcal{N}$ em $\mathcal{M}$.*

Um modelo que satisfaz a condição acima é chamado κ^+ *universal*. Se $\mathcal{M}$ é $|M|^+$ universal, dizemos que é universal.
Demonstração. Sejam $\mathcal{N} \models T$ com $|N| \leq \kappa$ e $\{n_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma enumeração de N e $A_\alpha = \{n_\beta : \beta < \alpha\}$. Construímos uma sequência de aplicações parcialmente elementares tal que $f_0 = \emptyset$ e cada $f_\alpha : A_\alpha \to \mathcal{M}$ é parcialmente elementar. De fato, se f_α é parcialmente elementar, consideramos

$$\Gamma = \{\phi(v, f(\bar{a})) : \mathcal{M} \models \phi(n_\alpha, \bar{a})\}, \bar{a} \in A_\alpha.$$

Como f_α é parcial elementar, todo subconjunto finito de Γ é satisfatível em $\mathcal{M}$ e por compacidade Γ é satisfatível. Logo, existe um elemento $c \in M$ que realiza Γ, pois $|A_\alpha| < \kappa$
$\square$

Note que se $\mathcal{M}$ é um modelo saturado e $A \subseteq M$ com $|A| < |M|$, então $|S_1(A)| \leq |M|$ pois cada $p \in S_1(A)$ é da forma $tp(b/A)$ para algum $b \in M$, e pela Observação 2.43, se a realiza $tp(b/A)$, então $tp(b/A) = tp(a/A)$. Desta forma, temos uma condição necessária para a existência de modelos saturados. A seguir, apresentamos condições suficientes para garantir a existência desses modelos.

Teorema 2.62 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura, tal que $\mathcal{M} \models T$ e κ um cardinal infinito tal que $|\mathcal{L}| < \kappa$, então existe uma extensão elementar $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, κ^+-saturada tal que $|N| \leq |M|^\kappa$*

Demonstração. Ver [14, p.133].

Assim, dada uma teoria T completa com modelos infinitos, existem modelos saturados $\mathcal{M}$ com $|M| = \kappa^+$ para todo cardinal infinito κ. Note que se $\mathbb{C}$ é um modelo saturado de T, de cardinal suficientemente grande, pela Proposição 2.61 todos os modelos de T são submodelos de $\mathbb{C}$. Logo, para verificar ou refutar alguma propriedade dos modelos de T, basta fazer considerações sob um submodelo qualquer de $\mathbb{C}$. Um modelo $\mathbb{C}$ com estas características é chamado, *modelo monstro* de T.

Capítulo 3

Grupo de Lascar

Neste capítulo apresentamos o grupo de Lascar de uma teoria T completa com modelos infinitos, denotada por Gal_{L_A}, junto com o grupo de automorfismos fortes de Lascar, $Autf_L(G)$, e algumas propriedades que envolvem a topologia de Gal_{L_A}. Para tanto, consideramos os teoremas de partição e os conceitos de sequência indiscernível, fórmulas densas e posteriormente algumas propriedades que envolvem a denominada relação de Lascar. A fim de simplificar a notação, a partir de agora, identificamos as estruturas $\mathcal{M}$ com o seu respectivo conjunto subjacente M.

3.1 indiscerníveis

Seja X um conjunto e κ, λ cardinais possivelmente finitos. Escrevemos $[X]^\kappa$ para designar a coleção de todos os subconjuntos B de X tal que $|B| = \kappa$ e se f é uma aplicação tal que

$$f : [X]^\kappa \to \lambda,$$

dizemos que f é uma partição de $[X]^\kappa$.

Definição 3.1 *Seja X um conjunto, f uma partição de $[X]^\kappa$ e $Y \subseteq X$. Dizemos que Y é f-indiscernível se existe $\alpha < \lambda$ tal que $f(A) = \alpha$ para todo $A \in [Y]^\kappa$.*

Sejam κ, η, μ e λ cardinais. Escrevemos

$$\kappa \to (\eta)^\mu_\lambda$$

para dizer que se X é um conjunto linearmente ordenado qualquer, (ver Apêndice A.2) tal que $|X| \geq \kappa$, com uma partição $f : [X]^\mu \to \lambda$, então existe $Y \subseteq X$, f-indiscernível tal que $|Y| \geq \eta$.

A prova dos seguintes teoremas podem ser vistas em [14].

Teorema 3.2 (Teorema de Ramsey infinito) *Se $k,n < \omega$, então $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k$.*

Observação 3.3 *Ou seja, para quaisquer conjunto I com $|I| \geq \aleph_0$ e $f : [I]^n \to k$ uma partição, existe $J \subseteq I$ e $\alpha < k$ tal que $|J| \geq \aleph_0$ e*

$$f : [J]^n \to \alpha.$$

Em particular se $I^n = A_0 \cup A_1$ com $|I| \geq \aleph_0$ e $f : [I]^n \to 2$ dada por $f(A_0) = 0$, $f(A_1) = 1$, então pelo Teorema 3.2 existe $J \subseteq I$ tal que $|J| \geq \aleph_0$ e $[J]^n \subseteq A_0$ ou $[J]^n \subseteq A_1$.

Note que no caso em que $n = 1$ o teorema se reduz ao princípio da casa dos pombos.

Teorema 3.4 (Teorema de Ramsey finito) *Para todo $k,n,m < \omega$, existe $l < \omega$ tal que*

$$l \to (m)^n_k.$$

Agora, para κ um cardinal infinito e α um ordinal, definimos indutivamente $\beth_\alpha(\kappa)$ como sendo

- $\beth_0(\kappa) = \kappa$.
- $\beth_\alpha(\kappa) = \sup\limits_{\beta<\alpha} 2^{\beth_\beta(\kappa)}$.

Note que $\beth_1(\kappa) = 2^\kappa$ e assumindo a hipótese generalizada do contínuo (ver Apêndice A) $\beth_\alpha(\aleph_0) = \aleph_\alpha$. A seguir uma generalização do Teorema de Ramsey.

Teorema 3.5 (Teorema de Erdös-Rado)

$$\beth_n(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa.$$

Observação 3.6 *Note que, assumindo a hipótese generalizada do contínuo, se $\kappa = \aleph_0$ e $n = 0$ o teorema diz que para toda conjunto ordenado I com $|I| \geq \aleph_1$ e toda partição de I*

$$f : I \to \aleph_0,$$

existe um subconjunto $A \subseteq I$, tal que $f(A) = \alpha < \aleph_0$ e $|A| \geq \aleph_1$.

Definição 3.7 *Sejam M uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$, $(I,<)$ uma ordem total e $(x_i)_{i\in I}$ uma sequência de elementos em M. Dizemos que $(x_i : i \in I)$ é uma sequência indescernível sobre A se, para quaisquer n-uplas crescentes $\bar{i}$, $\bar{j}$ em I, dadas por $(i_1 < \ldots < i_2)$ e $(j_1 < \ldots < j_n)$,*

$$M \models \phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \leftrightarrow \phi(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}),$$

para qualquer $\mathcal{L}(A)$-fórmula ϕ.
Equivalentemente, $tp((x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})/A) = tp((x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})/A)$. No caso em que $A = \emptyset$, dizemos simplesmente que $(x_i : i \in I)$ é uma sequência indiscernível.

Note que se $(a_i)_{i\in I}$ é uma sequência indiscernível e $a_i = a_j$ para alguns $i, j \in I$, então $\varphi(x,y) := x = y$ é uma fórmula tal que $\mathcal{M} \models \varphi(a_i,a_j)$ e portanto todos os elementos da sequência são iguais. Logo, consideramos sequências indiscerníveis que não têm elementos iguais.

Definição 3.8 *Sejam M uma $\mathcal{L}$-estrutura e $A \subseteq M$. Uma $\mathcal{L}$-fórmula $\theta(x,y)$, com x,y κ-uplas em M, é chamada uma fórmula densa se, é simétrica e, para algum $n \in \mathbb{N}$, toda sequência $(a_i)_{i<n}$ é tal que existem $i < j < n$ e*

$$M \models \varphi(a_i,a_j).$$

Denotamos por Θ_A a conjunção de todas as $\mathcal{L}(A)$-fórmulas densas

$$\Theta_A(x,y) = \bigwedge_{\theta \text{ densa}} \theta(x,y)$$

e por $\Theta_A \circ \Theta_A(x,y)$ o produto irracional, definido como

$$\Theta_A \circ \Theta_A(x,y) \text{ se, e somente se, } \exists z(\Theta_A(x,z) \wedge \Theta_A(z,y)).$$

Indutivamente, $\Theta_A^n(x,y) = \Theta_A^{n-1} \circ \Theta_A(x,y)$. Se $A = \emptyset$, usamos a notação $\Theta(x,y)$ e $\Theta^n(x,y)$.

Lema 3.9 *Sejam T uma $\mathcal{L}$-teoria completa com modelos infinitos, $M \models T$, I,J ordens lineares e $I = (a_i)_{i\in I}$ uma sequência de elementos de M, então existe um modelo $N \models T$ e uma sequência indiscernível $(b_j)_{j\in J}$ tal que para cada $\varphi \in \Phi_I$*

$$N \models \varphi(b_{j_1},\dots,b_{j_n}) \text{ para cada } j_1 < j_2 < \dots < j_n, n < \omega$$

onde $\Phi_I = \{\varphi(x_1,\dots,x_n) : M \models \varphi(a_{i_1},\dots,a_{i_n}) \forall i_1 < i_2 < \dots < i_n, n < \omega\}$.

Demonstração. Seja C um conjunto de novas constantes com uma ordem isomorfa a J e considere

$$T' = \{\varphi(\overline{c}) : \varphi(\overline{x}) \in \phi_I\}$$

e

$$T'' = \{\psi(\overline{c}) \leftrightarrow \psi(\overline{d}) : \overline{c},\overline{d} \in C\},$$

onde , $\overline{c},\overline{d}$ são uplas do mesmo comprimento e ψ é uma $\mathcal{L}$-fórmula. Se $T \cup T' \cup T''$ é consistente, existe um modelo $N \models T$ e uma sequência indiscernível $(b_j)_{j\in J}$ de elementos de N que realiza Φ_I. Pelo teorema de compacidade 2.36 é suficiente mostrar que

$$\Gamma = T \cup \{\varphi(\overline{c}) \in T' : \overline{c} \in C_0\} \cup \{\psi(\overline{c}) \leftrightarrow \psi(\overline{d}) : \psi(\overline{x}) \in \Delta, \overline{c},\overline{d} \in C_0\}$$

é consistente, onde C_0 é um subconjunto finito de C e Δ é um conjunto finito de $\mathcal{L}$-fórmulas nas variáveis $x_1,\dots,x_n$. Seja $A = \{a_i : i \in I\}$ um conjunto ordenado de elementos distintos dois a dois, definimos a relação de equivalência em $[A]^n$, dada por

$$\overline{a} \sim \overline{b} \Leftrightarrow M \models \psi(\overline{a}) \leftrightarrow \psi(\overline{b}) \text{ para cada } \psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta,$$

onde $\overline{a}, \overline{b}$ são n-uplas crescentes segundo a ordem de A. Como $M \models \psi(\overline{a})$ ou $M \models \neg\psi(\overline{a})$ para cada $\psi \in \Delta$, a classe de $\overline{a}$ está determinada pelos valores de verdade de $\psi(\overline{a})$ para cada $\psi \in \Delta$. Ou seja, existem no máximo $2^{|\Delta|} < \omega$ classes de equivalência e

$$f : [A]^n \to 2^{|\Delta|}$$

é uma partição de $[A]^n$. Agora, pelo teorema de Ramsey 3.2, existe $B \subseteq A$ infinito tal que todas as n-uplas de elementos de B pertencem a mesma classe de equivalência. Interpretando as constantes $c \in C_0$ como elementos b_c de B, temos que a expansão N de M a $\mathcal{L} \cup \{b_c : c \in C_0\}$, satisfaz Γ. □

Lema 3.10 *Sejam M uma $\mathcal{L}$-estrutura, $A \subseteq M$, e $a, b \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes*

i) $M \models \Theta_A(a, b)$.

ii) a e b pertencem a uma sequência A-indiscernível.

Demonstração.

ii.$\to$ i. Vamos supor que $(a_i)_{i \in I}$ é uma sequência A-indiscernível com $a_0 = a$ e $a_1 = b$. Se $M \models \neg\theta(a, b)$ para alguma $\mathcal{L}(A)$-fórmula densa θ, então $M \models \neg\theta(a_i, a_j)$ para todo $i < j$. O que contradiz o fato de que θ é densa, e portanto, $M \models \Theta(a, b)$.

i. $\to$ ii. Pelo lema 3.9, se existe uma sequência $(a_i)_{i \in I}$ tal que $tp(a_i, a_j) = tp(a, b)$, então existe uma sequência indiscernível $(b_j)_{j \in J}$ tal que, para cada $n < \omega$, existem $i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_n$ tais que

$$tp(c_{i_0}, \ldots, c_{i_n}) = tp(b_{j_0}, \ldots, b_{j_n}),$$

onde $\{c_i : i \in I\} = \{a, b\} \cup \{a_i : i \in I\}$. Ou seja, devemos mostrar que o conjunto

$$\Delta = \{\psi_{ij}(x_i, x_j) := x_i \neq x_j, i < j < \omega\} \cup \{\varphi(x_i, x_j) : \varphi \in tp(a, b), i < j < \omega\}$$

é consistente.

Note que se $\varphi \in tp(a, b)$, então $\neg\varphi(x, y)$ não é densa. Caso contrário, $M \models \neg\varphi(a, b)$ pois $M \models \Theta(a, b)$, o que é uma contradição. Daí, existe uma sequência infinita (a_i)

tal que $M \models \varphi(a_i, a_j)$, para cada $i < j$. Isto é, Δ é finitamente satisfatível e pelo teorema de compacidade 2.36, temos que Δ é consistente.

□

Assim, podemos estender (a_0, a_1) a uma sequência A-indiscernível, sempre que $\Theta_A(a_0, a_1)$ vale. Além disso temos que $\theta_1 \wedge \theta_2$ é densa, sempre que θ_1 e θ_2 são densas. De fato, se assumirmos que $\theta_1 \wedge \theta_2$ não é densa, então existe uma sequência $(a_i)_i \in I$ tal que

$$M \models \neg(\theta_1 \wedge \theta_2(a_i, a_j)), \quad \text{para todo } i < j.$$

Ou seja, $\forall i < j\ (M \models \neg\theta_1(a_i, a_j) \vee \neg\theta_2(a_i, a_j))$.

Por outro lado, definindo uma aplicação f

$$f : [I]^2 \to 3$$

de forma que $f(A_0) = 0$, $f(A_1) = 1$ e $f(A_1) = 2$, para $A_0 = \{i_1 < i_2 \in I : M \models \neg\theta_1(a_{i_1}, a_{i_2}) \wedge \theta_2(a_{i_1}, a_{i_2})\}$, $A_1 = \{i_1 < i_2 \in I : M \models \neg\theta_2(a_{i_1}, a_{i_2}) \wedge \theta_1(a_{i_1}, a_{i_2})\}$ e $A_2 = \{i_1 < i_2 \in I : M \models \neg\theta_2(a_{i_1}, a_{i_2}) \wedge \neg\theta_1(a_{i_1}, a_{i_2})\}$. Como $[I]^2 \subseteq A_0 \cup A_1 \cup A_2$, pelo Teorema de Ramsey 3.2, existe um subconjunto infinito $B \subseteq I$ tal que $[B]^2 \subseteq A_0$, $[B]^2 \subseteq A_1$ ou $B^2 \subseteq A_2$. Qualquer um dos casos contradiz o fato de que θ_1 e θ_2 são fórmulas densas.

Observação 3.11 *$\Theta_A(x,y)$ é uma relação reflexiva e simétrica pois dado $a \in M$, temos que $(a_i)_{i \in I}$ com $a_i = a$ é uma sequência A-indiscernível e cada $\mathcal{L}(A)$-fórmula θ densa é simétrica. Além do mais se M é saturado Θ_A é uma relação A-invariante. De fato, se $f \in Aut(M/A)$ e $M \models \Theta_A(a,b)$, pelo lema 2.58, temos que $tp((a,b)/A) = tp((f(a), f(b))/A)$. Daí $M \models \Theta_A(f(a), f(b))$.*

3.2 Grupo de Lascar

Nesta seção $(G, \cdot, \ldots)$ é um grupo com uma estrutura adicional de primera ordem de uma assinatura $\mathcal{L}$ e G é um modelo monstro de uma $\mathcal{L}$-teoria completa, $A \subseteq G$ é um conjunto de parâmetros com $|A| < |G|$ e $|G| > 2^{|\mathcal{L}(A)|}$. Dizemos que um submodelo M de G é pequeno, sempre que $|M| < |G|$. Em geral, um subconjunto de elementos de G é pequeno se tem cardinalidade menor do que $|G|$. Assim, A é um conjunto pequeno de parâmetros.

O conjunto de automorfismos fortes de Lascar sobre A dado por

$$Autf_{L_A}(G) = \langle \{f \in Aut(G/M) : A \subseteq M \prec G\} \rangle$$

é um subgrupo normal de $Aut(G/A)$. De fato, o automorfismo dado pela identidade de G pertence a $Autf_{L_A}(G)$, logo $Autf_{L_A}(G) \neq \emptyset$, se $f \in Autf_{L_A}(G)$, então f fixa algum $M \prec G$ e temos que $f^{-1} \in Autf_{L_A}(G)$ pois também fixa M. Agora, note que se M e N são submodelos de G que contem A, então M e N contem as constantes da assinatura $\{\cdot,\dots\}$ e a interpretação dos símbolos de funções e relações da assinatura $\{\cdot,\dots\}$ se mantem. Isto é, se σ é um símbolo de função n-ária de $\{\cdot,\dots\}$, $\sigma^M : M^n \to M$, $\sigma : N^n \to N$ e temos que $\sigma^{M\cap N} : (M\cap N)^n \to (M\cap N)$ coincide com $\sigma^M|_{M\cap N} = \sigma^N|_{M\cap N}$. Similarmente se R é um símbolos de relação n-ária de $\{\cdot,\dots\}$, temos que $R^{M\cap N}$ coincide com $R^M \cap N^n = R^N \cap M^n$. Assim, $M\cap N$ é de novo um submodelo de G que contem A, e se f, g são automorfismos de G que fixam M e N respectivamente, então $f\circ g$ fixa $M\cap N$ e $f\circ g \in Autf_L(G)$. Portanto $Autf_{L_A}(G)$ é subgrupo de $Aut(G/A)$.

Seja $f \in Autf_{L_A}(G)$ e $h \in Aut(G/A)$. Sem perda de generalidade, vamos supor $f \in Aut(G/M)$, então hfh^{-1} fixa $h(M) \supseteq A$ e $hfh^{-1} \in Autf_{L_A}(G)$. Logo

$$Gal_{L_A}(G) = Aut(G/A)/Autf_{L_A}(G)$$

é um grupo. Se $A = \emptyset$, escrevemos simplesmente $Autf_L(G)$ e $Gal_L(G)$.

Seja I um conjunto linearmente ordenado, dizemos que duas uplas $\overline{a} = (a_i)_{i\in I}, \overline{b} = (b_i)_{i\in I}$ de comprimento I, têm o mesmo tipo forte de Lascar sobre A se, existe $Autf_{L_A}(G)$ tal que $a_i = f(b_i)$ para cada $i \in I$. A fim de simplificar a notação, escrevemos simplesmente $\overline{a} = f(\overline{b})$.

Lema 3.12 *Sejam M e N dois submodelos de G contendo $A \subseteq G$ e $f \in Aut(G/A)$. Então a classe de f em $Gal_{L_A}(G)$ é determinada pelo tipo de $f(M)$ sobre N.*

Demonstração. Seja I um conjunto linearmente ordenado tal que $|I| = |M|$, podemos ver M como $(m_i)_{i\in I}$, onde $m_i \in M$. O tipo de $f(M)$ sobre N é o I-tipo da upla infinita $(f(m_i))_{i\in I}$ sobre N (ver definição 2.56). Vamos mostrar que se $g \in Aut(G/A)$ e o tipo de $g(M)$ sobre N é igual ao tipo de $f(M)$ sobre N, então g e f pertencem a mesma classe de equivalência em $Gal_{L_A}(G)$. De fato, se $g(M)$ e $f(M)$ tem o mesmo tipo sobre N, pelo lema 2.58, existe $\sigma \in Aut(G/N)$ tal que $\sigma(f(m_i)) = g(m_i)$, $\forall i \in I$.

Seja $t = f^{-1}\circ\sigma^{-1}\circ g$ então $t \in Aut(G/A)$. De fato,

$$\begin{aligned}
t(m_i) =& f^{-1}\circ\sigma^{-1}\circ g(m_i)\\
=& f^{-1}(\sigma^{-1}(g(m_i)))\\
=& f^{-1}(f(m_i))\\
=& m_i.
\end{aligned}$$

Ou seja, $t,\sigma \in Autf_{L_A}(G)$ e assim $g\circ t^{-1} = \sigma\circ f$, e como $Autf_{L_A} \lhd Aut(G/A)$, temos que $\sigma\circ f = g\circ t^{-1} = \tilde{t}\circ g$ para algum $\tilde{t} \in Autf_{L_A}(G)$. Daí $g = (\tilde{t}^{-1}\circ\sigma)\circ f$ e a classe de f e g

em $Gal_{L_A}(G)$ é a mesma. $\square$

Lema 3.13 *Se $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são uplas possivelmente infinitas com o mesmo tipo forte de Lascar em uma extensão elementar de G, então $\bar{a}$ e $\bar{b}$ tem o mesmo tipo forte de Lascar em G.*

Demonstração. Ver [23]

Teorema 3.14 *$Gal_{L_A}(G)$ depende só da teoria $T = Th(G)$ e não da escolha de G.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor $A = \emptyset$. Seja $\mathbb{C}$ outro modelo monstro de $Th(G)$, vamos mostrar que $Gal_L(G) \cong Gal_L(\mathbb{C})$. Como $\mathbb{C}$ é universal, podemos assumir que $G \prec \mathbb{C}$, e dado que $\mathbb{C}$ é fortemente $|\mathbb{C}|$-homogêneo, podemos estender cada $f \in Aut(G)$ a $f' \in Aut(\mathbb{C})$. Sejam f' e f'' duas extensões de $f \in Aut(G)$ a $Aut(\mathbb{C})$, então $(f'')^{-1} \circ f' \in Autf_L(\mathbb{C})$, pois $(f'')^{-1} \circ f' \in Aut(\mathbb{C}/G)$. Assim, f' e f'' pertencem a mesma classe lateral em $Gal_L(\mathbb{C})$. Daí a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : & Aut(G) \to Gal_L(\mathbb{C}) \\ & f \mapsto f' Autf_L(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

está bem definida e é um homomorfismo sobrejetor. De fato, sejam $f, g \in Aut(G)$, podemos estender f, g e $f \circ g$, a $Aut(\mathbb{C})$ da seguinte forma: f°, g° e $(f \circ g)^\circ \in Aut(\mathbb{C})$, tais que $f^\circ|_{(\mathbb{C} \setminus G)} = g^\circ|_{(\mathbb{C} \setminus G)} = (f \circ g)|_{(\mathbb{C} \setminus G)} = id_{\mathbb{C} \setminus G}$ e $f^\circ|_G = f$, $g^\circ|_G = g$ e $(f \circ g)^\circ|_G = f \circ g$. Como $(f \circ g)^\circ = f^\circ \circ g^\circ$ temos que

$$\sigma(f \circ g) = (f \circ g)^\circ Autf_L(\mathbb{C}) = f^\circ \circ g^\circ Aut_L(\mathbb{C}) = \sigma(f)\sigma(g).$$

Agora, para mostrar a sobrejetividade de σ, seja $h \in Aut(\mathbb{C})$ e M, N dois submodelos pequenos de G, então pela saturação de G, existe $M' \subseteq G$ que realiza o tipo de $h(M)$ sobre N. Ou seja $tp(M'/N) = tp(h(M)/N)$ e pelo lema 2.58, existe $g \in Aut(G/N)$ tal que $g(h(M)) = M'$. Note que $h|_M : M \to h(M)$ é parcialmente elementar e como G é fortemente $|G|$-homogêneo, existe $\overline{g} \in Aut(G)$ tal que $\overline{g}|_M = h$. Logo $f = g \circ \overline{g} \in Aut(G)$ é tal que $f(M) = g(h(M)) = M'$ e se f' é uma extensão de f a $Aut(\mathbb{C})$, então

$$tp(f'(M)/N) = tp(h(M)/N).$$

Isto é $\sigma(f) = hAutf_L(\mathbb{C})$.

Seja $K = \{f \in Aut(G) : f' \in Autf_L(\mathbb{C})\}$ o kernel de σ, onde f' é uma extensão de f a $Aut(\mathbb{C})$ e M um submodelo pequeno de G. Se $f \in K$, então $f'(M)$ e M têm o mesmo tipo forte de Lascar em $\mathbb{C}$, e pelo lema 3.13, existe $\tilde{f} \in Autf_L(G)$ tal que $\tilde{f}(M) = f(M)$. Logo $fAutf_L(G) = \tilde{f}Autf_L(G)$ e portanto $f \in Autf_L(G)$. Ou seja $K = Autf_L(G)$, e pelo teorema de isomorfismos de grupos temos que

$$Gal_L(G) = Aut(G)/Autf_L(G) \cong Gal_L(\mathbb{C}).$$

$\square$

Definição 3.15 *O grupo de Lascar de T é o quociente*

$$Gal_L(T) = Aut(G)/Aut_L(G)$$

onde G é um modelo monstro de T.

Definição 3.16 *Seja R uma relação de equivalência em G*

i. dizemos que R é limitada se o conjunto das classes geradas pela relação R, denotado por G/R, é tal que $|G/R| < |G|$;

ii. se R satisfaz certas propriedades, dizemos que R é a melhor relação de equivalência em G, com tais propriedades, se for a mais fina. Ou seja, $|G/R| > |G/E|$ para qualquer outra relação de equivalência E de G, com as mesmas propriedades. Equivalentemente, $R \subseteq E$ para qualquer outra relação E em G, com as mesmas propriedades de R.

Lembremos que, se R é um símbolo de relação n-ária e $\bar{a}$ é uma n-upla, denotamos $\bar{a} \in R$ por $R(\bar{a})$.

Seja $H \leq Aut(G)$, temos a relação dada por, $E_H(a,b)$ se, e somente se, existe $f \in H$ tal que $a = f(b)$, o seu correspondente conjunto de E-comutadores

$$X_E = \{a^{-1}b : a,b \in G, E(a,b)\}$$

e o grupo G_E gerado por X_E. Note que E_H é uma relação de equivalência.

Lema 3.17 *Seja G um grupo, $A \subseteq G$ e E uma relação de equivalência em G, temos que*

i. se $E = E_H$ para algum $H \leq Aut(G)$ então

$$(X_E)^G \subseteq X_E^2,$$

onde $(X_E)^G = \bigcup_{a \in X_E, b \in G} \{a^b\}, \quad a^b = b^{-1}ab;$

ii. se E é A-invariante, então X_E e G_E são A-invariantes;

iii. Se E é limitada, então G_E tem índice limitado em G. Ainda mais, $[G : G_E] \leq |G/E|$.

Demonstração.

i. Seja $(a^{-1}h(a))^x \in (X_{E_H})^G$ com $a, x \in G$ e $h \in H$, então

$$\begin{aligned}(a^{-1}h(a))^x =& x^{-1}a^{-1}h(a)x\\ =&(ax)^{-1}h(ax)(h(x))^{-1}x,\end{aligned}$$

e como $(ax)^{-1}h(ax), h(x)^{-1}x \in X_{E_H}$, temos que $(X_{E_H})^G \subseteq X^2_{E_H}$;

ii. Seja $f \in Aut(G/A)$ e $a, b \in G$ tais que $E(a,b)$. Como E é A-invariante, $E(a,b)$ se, e somente se, $E(f(a), f(b))$. Assim, se $a^{-1}b \in X_E$, então $f(a^{-1}b) = f(a)^{-1}f(b) \in X_E$. Portanto, X_E é A-invariante e G_E também o é, pois $G_E = \langle X_E \rangle$.

iii. Temos que se $E(a,b)$ então $a^{-1}b \in G_E$. Equivalentemente, se $a^{-1}b \notin G_E$, então $\neg E(a,b)$. Isto é, se a e b representam classes laterais distintas em G/G_E, a, b representam classes de equivalência distintas em G/E. Daí $[G : G_E] < |G/E|$.

□

Lema 3.18 *Se E é uma relação de equivalência em G limitada e A-invariante e $(a_i)_{i \in I}$ é uma sequência A-indiscernível de n-uplas em G, então $E(a_i, a_j)$ para cada $i < j$.*

Demonstração. Note que pelo lema 2.58, para cada (a_{i_1}, a_{i_2}) e (a_{j_1}, a_{j_2}), existe $f \in Aut(G/A)$ tal que $f(a_{i_1}, a_{i_2}) = (a_{j_1}, a_{j_2})$ pois $tp((a_{i_1}, a_{i_2})/A) = tp((a_{j_1}, a_{j_2})/A)$. Assim, dado que E é A-invariante, se existem (a_{i_1}, a_{i_2}) tais que $\neg E(a_{i_1}, a_{i_2})$, então $\neg E(a_i, a_j)$ para cada $i < j$. Portanto, E não é limitada, o que é uma contradição. □

Seja $H = Autf_{L_A}(G)$, a relação de equivalência E_{H_A} é chamada relação de Lascar sobre A, denotada por E_{L_A}. Ou seja, duas uplas a, b de elementos de G, de mesmo comprimento, tem o mesmo tipo forte de Lascar sobre $A \subseteq G$ se, e somente se, $E_{L_A}(a,b)$. Caso em que $A = \emptyset$ denotamos simplesmente E_L. O seguinte resultado apresenta uma importante relação entre Θ_A e E_{L_A}

Lema 3.19

i. Se $G \models \Theta_A(a,b)$, então $E_{L_A}(a,b)$;

ii. Se $E_{L_A}(a,b)$ então $\Theta_A \circ \Theta_A(a,b)$. Isto é, existe uma upla a' de elementos de G tal que $\Theta_A(a,a') \wedge \Theta_A(a',b)$.

A segunda propriedade diz que E_{L_A} é o fecho transitivo de Θ_A.

Demonstração. Ver [23].

Corolário 3.20 *E_{L_A} é a melhor relação de equivalência limitada, A-invariante e $|G/E_{L_A}| \leq 2^{|\mathcal{L}(A)|}$.*

Demonstração. Sejam a, b k-uplas de elementos de G. Se $a = f(b)$ com $f \in Autf_{L_A}$e $h \in Aut(G/A)$, então para $h(a)$ e $h(b)$, existe $h \circ f^{-1} \circ h^{-1} \in Autf_{L_A}(G)$ tal que

$$h(a) = h \circ f^{-1} \circ h^{-1}(h(b)).$$

Ou seja $E_{L_A}(h(a), h(b))$.

Por outro lado, se $\neg E_{L_A}(a,b)$ então não existe $f \in Aut(G/M)$ tal que $a = f(b)$ para nenhum submodelo M de G com $A \subseteq M$, e como $\mathbb{C}$ é saturado temos que $tp(a/M) \neq tp(b/M)$. Logo $|G/E_{L_A}| < |S_1(M)| \leq 2^{|L(A)|}$.

Dada uma relação de equivalência limitada e A-invariante E, vamos mostrar que $E_{L_A}(a,b)$ implica $E(a,b)$. Suponha $E_{L_A(a,b)}$, então, pelo lema 3.19 existe $z \in G$ tal que $G \models \Theta(a,z)$ e $G \models \Theta(z,b)$. Ou seja, existem sequências indiscerníveis $(a, z, a_0, a_1, \ldots)$ e $(z, b, b_0, b_1, \ldots)$, e pelo lema 3.18 temos que $E(a,z)$ e $E(z,b)$. Portanto $E(a,b)$. □

Lema 3.21 *G_{L_A} é gerado por*

$$X_{\Theta_A} = \{a^{-1}b : a, b \in G \ \text{ e } \ \Theta_A(a,b)\}.$$

Demonstração. Devemos mostrar que $G_{L_A} = \langle X_{L_A} \rangle$. Pelo lema 3.19(item i.), temos que $X_{\Theta_A} \subseteq X_{L_A}$. Para mostrar a inclusão $X_{L_A} \subseteq X_{\Theta_A}$, vamos supor $a^{-1}b \in X_{L_A}$, logo a e b tem o mesmo tipo sobre algum submodelo de G e pelo lema 3.19 (parte ii.), existe $c \in G$ tal que $\Theta(a,c) \wedge \Theta(c,b)$. Isto é,

$$a^{-1}b = (a^{-1}c)(c^{-1}b),$$

onde $(a^{-1}c), (c^{-1}b) \in X_{\Theta_A}$. Ou seja, $G_{L_A} \subseteq \langle X_{\Theta_A} \rangle$. A contença segue . □

Lema 3.22 *Seja $N = (G, X)$ uma $\mathcal{L}$-estrutura 2-sortida que estende G, onde G age regularmente em X, então*

$$\{y \in X : \Theta^n(x,y)\} = X_\Theta \cdot x,$$

onde $x \in X$ e $n < \omega$.

Demonstração. Ver [9].

Topologia em $Gal_{L_A}(T)$

Sejam M e N submodelos pequenos de G que contém $A \subseteq G$. O conjunto

$$S_M(N) = \{tp(M'/N) : tp(M'/A) = tp(M/A)\},$$

é um fechado de $S_{|\mathcal{L}(A)|}(N)$ e portanto $S_M(N)$ herda a topologia compacta de $S_{|\mathcal{L}(A)|}(N)$.

Pelo lema 2.58 $S_M(N)$ pode ser visto como

$$\{tp(f(M)/N) : f \in Aut(G/A)\}$$

e podemos definir as aplicações

$$\begin{aligned} \mu : Aut(G/A) &\to S_M(N) \\ f &\mapsto tp(f(M)/N) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \nu :\ S_M(N) &\to Gal_{L_A}(T) \\ tp(f(M)/N) &\mapsto fAut f_{L_A} \end{aligned}$$

Note que μ e ν são sobrejetoras, e pelo Lema 3.12, ν está bem definida. Assim, a aplicação quociente $j : Aut(G/A) \to Gal_{L_A}(T)$ é tal que, $j = \nu \circ \mu$ e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} Aut(G/A) \arrow[rr, "j=\nu\circ\mu"] \arrow[dr, "\mu"'] & & Gal_{L_A}(T) \\ & S_M(N) \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

Induzimos uma topologia em $Gal_{L_A}(T)$ a partir de ν da seguinte forma. $B \subseteq Gal_{L_A}(T)$ é fechado se, e somente se, $\nu^{-1}(B)$ é fechado em $S_M(N)$. Assim, ν é uma aplicação contínua e, da compacidade de $S_M(N)$, temos que $Gal_{L_A}(T)$ também é compacto.

Sem perda de generalidade a partir de agora e até o final desta seção assumimos que $A = \emptyset$.

Teorema 3.23 *Para $p \in S_M(N)$, seja*

$$[p]_\Theta = \{q \in S_M(N) : p(x) \cup q(y) \cup \Theta(x,y) \text{ é consistente }\}.$$

Se $p \in S_M(N)$ e $U \subseteq S_M(N)$ são tais que $[p]_\Theta \subseteq int(U)$, então $v(p) \in int(v[U])$.

Demonstração. Ver [23].

Teorema 3.24 *$Gal_L(T)$ é um grupo topológico.*

Demonstração. Ver [23].

Lema 3.25 *Sejam $j : Aut(G) \to Gal_L(T)$ a aplicação quociente e $H \leq Aut(G)$ então*

i. E_H é $\emptyset$-invariante se, e somente se, para cada submodelo $M \prec G$ e cada $f \in Aut(G)$

$$H \subseteq H^f Aut(G/M)$$

onde $H^f = fHf^{-1}$. Em particular, se $\bigcup_{f \in Aut(G)} Aut(G/f(M)) \subseteq H$ para qualquer submodelo pequeno M de G, então E_H é $\emptyset$-invariante se, e somente se, $H \lhd Aut(G)$;

ii. *se $Autf_L(G) \subseteq H$, então $j[H]$ é fechado em $Gal_L(T)$ se, e somente se, E_H é $\bigwedge$-definível sobre algum submodelo pequeno de G.*

Demonstração.

i. Sejam $h \in H$, $f \in Aut(G)$, $M \prec G$ e suponha que E_H é $\emptyset$-invariante. Vamos mostrar que $h \in f \circ h' \circ f^{-1}Aut(G/M)$. Para isto, note que $E_H(M, h(M))$ e como E_H é $\emptyset$-invariante, temos que $E_H(f(M), f(h(M)))$. Logo, existe $h' \in H$ tal que $f(h(M)) = h'(f(M))$. Ou seja $f^{-1} \circ h'^{-1} \circ f \circ h \in Aut(G/M)$ e $h \in f^{-1}h'fAut(G/M)$.
Para a volta, temos que, existe $h' \in H$ tal que $f^{-1} \circ h'^{-1} \circ f \circ h(M) = M$. Ou seja

$$h'^{-1}(f(h(M))) = f(M) \text{ } e \text{ } E_H(f(M), f(h(M))) \subseteq .$$

Agora, suponha que para cada $M \prec G$ e cada $f \in Aut(G)$, $H \subseteq H^f Aut(G/M)$ e para algum $M' \prec G$, temos que

$$\bigcup_{f \in Aut(G)} Aut(G/f(M')) \subseteq H,$$

então $h = f \circ h' \circ f^{-1} \circ g$ para algum $h' \in H$ e $g \in Aut(G/M')$. Daí,

$$f^{-1} \circ h \circ f = h' \circ (f^{-1} \circ g \circ f)$$

onde $f^{-1} \circ g \circ f \in Aut(G/M') \subseteq H$. Ou seja, para cada $f \in Aut(G)$

$$H^f \subseteq HAut(G/f(M')) = H.$$

Por outro lado, se $H^f = H$, então $H \subseteq H^f Aut(G/M)$ para cada $f \in Aut(G)$ e cada $M \prec G$. Portanto E_H é $\emptyset$-invariante.

ii. Note que $j^{-1}(j[H]) = HAutf_L(G)$, então, se $H \subseteq Autf_L(G)$, temos que $j^{-1}(j[H]) = H$. Isto é $\mu^{-1} \circ \nu^{-1}(j[H]) = H$ e daí $\nu^{-1}(j[H]) = \mu(H)$. Agora, seja M um submodelo pequeno de G e suponha que $j[H]$ seja fechado em $Gal_L(G)$, então $\mu(H) = \nu^{-1}(j[H])$ um fechado em $S_M(M)$. Ou seja

$$\begin{aligned} \mu(H) = \nu^{-1}(j[H]) =& \{tp(M'/M) : \Phi(\bar{x}, M) \subseteq tp(M'/M)\} \\ =& \{tp(M'/M) : G \models \Phi(M', M)\}, \end{aligned}$$

onde Φ é um I-tipo sobre M, onde $|I| = |M'|$ Logo, se $f \in H$ temos que $G \models \Phi(f(M), M)$ e assim

$$E_H(a,b) \Leftrightarrow \exists f \in Aut(G)(G \models a = f(b) \wedge \Phi(f(M), M))$$

e pelo lema 2.58

$$E_H(a,b) \Leftrightarrow \exists z(tp(b,M) = tp(a,z)G \wedge \Phi(z,M)).$$

Equivalentemente, $E_H(a,b)$ se, e somente se, (a,b) satisfaz o seguinte tipo

$$\left\{ \exists z \left(\Phi(z,M) \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Psi} (\varphi(y,M) \leftrightarrow \varphi(a,z)) \right) \Psi \subseteq \mathcal{L}, \Psi finito \right\}.$$

Isto é E_H é $\bigwedge$-definível sobre M.

Reciprocamente, se E_H é $\bigwedge$-definível sobre M, existe um conjunto de $\mathcal{L}(M)$-fórmulas tal que

$$E_H(a,b) \Leftrightarrow G \models \Phi(a,b).$$

Logo $f \in H$ se, e somente se, $G \models \Phi(f(a),a)$ para cada $a \in G$ e temos que

$$\begin{aligned} \mu(H) = &\{tp(f(M)/M) : f \in H\} \\ = &\{tp(f(M)/M) : \Phi(f(M),M)\} \\ = &\{tp((M'/M) : G \models \Phi(M',M)\}. \end{aligned}$$

Portanto $\mu(H)$ é fechado em $S_M(M)$ e como $\nu^{-1}(j[H]) = \mu(H)$ o resultado segue.

□

Teorema 3.26 *Sejam $Autf_L(G) \subseteq H \leq Aut(G)$, $\overline{\overline{H}} = j^{-1}[cl(j[H])]$ e a,b uplas pequenas de elementos de G tais que $|a|,|b| \leq \kappa < |G|$, então*

i. $E_{\overline{\overline{H}}} = \{(a,b) : b = f(a), f \in \overline{\overline{H}}\}$ é a melhor relação de equivalência limitada, e $\bigwedge$-definível sobre qualquer submodelo de G, tal que $E_H \subseteq E_{\overline{\overline{H}}}$.

ii. Se além disso $H \triangleleft Aut(G)$ então

$$E_{\overline{\overline{H}}} = \Theta \circ \overline{E_H},$$

onde $\overline{E_H}$ é $cl(E_H)$ em $S_{\kappa+\kappa}(\emptyset)$.

Demonstração.

i. Como $Autf_L \subseteq H \subseteq \overline{\overline{H}}$, então $E_L \subseteq E_{\overline{\overline{H}}}$, e como E_L é limitada, $E_{\overline{\overline{H}}}$ também o é, pois se duas classes são diferentes na relação $E_{\overline{\overline{H}}}$, também são diferentes na relação E_L. Por outro lado, como $j[\overline{\overline{H}}] = cl(j[H])$ é fechado, pelo lema 3.25, $E_{\overline{\overline{H}}}$ é $\bigwedge$-definível sobre qualquer submodelo pequeno de G.

Agora, vamos supor que E é uma relação de equivalência $\bigwedge$-definível sobre qualquer submodelo M de G, tal que $E_H \subseteq E$ e consideramos o conjunto

$$W = \{f \in Aut(G) : E(f(b), b)\}.$$

Devemos mostrar que $E_{\overline{\overline{H}}} \subseteq E$ (Equivalentemente $\overline{\overline{H}} \subseteq W$). Note que se $f \in Autf_L(G)$ e $b \in M$, então $E_L(b, f(b))$ implica $E(b, f(b))$. Logo $Autf_L(G) \subseteq W$ e $H \subseteq W$ pois $E_H \subseteq E$. Daí $j[W] = WAutf_L(G)$ e

$$j^{-1}[j(W)] = WAutf_L(G) = W.$$

Agora, note que, $j[W]$ é fechado pois

$$\begin{aligned} v^{-1}(j[W]) =& \mu(W) \\ =& \{tp(f(M)/M) : f \in W\} \\ =& \{tp(f(M)/M) : E(f(b), b) \ e \ f \in Aut(G)\} \\ =& \{tp(M'/M) : \Phi(M', M)\}, \end{aligned}$$

onde Φ é um tipo sobre algum submodelo M de G. Logo, $cl\,(j[H]) \subseteq j[W]$ e

$$\overline{\overline{H}} = j^{-1}[cl\,(j[H])] \subseteq j^{-1}\,(j[W]) = W.$$

ii. Suponha que $E_{\overline{\overline{H}}}(a, b)$ e $f \in \overline{\overline{H}}$ tal que $a = f(b)$. Sem perda de generalidade asumimos que b é uma enumeração de $M \prec G$ e $p = \mu(f) = tp(f(M)/M)$, então $\nu(p) = j(f) \in j[\overline{\overline{H}}] = cl(j[H])$.
Note que

$$[p]_\Theta \cap cl(\nu^{-1}(j[H])) \neq \emptyset.$$

Caso contrario, $[p]_\Theta \subset int(\nu^{-1}(j[H]^c))$ e, pelo Teorema 3.23

$$\nu(p) \in int(\nu(\nu^{-1}(j[H])^c)) = int(j[H]^c) = (cl(j[H]))^c.$$

O que é uma contradição. Assim, existe $q \in [p]_\Theta \cap cl(\nu^{-1}(j[H]))$. Isto é $p(x) \cup q(y) \cup \Theta(x, y)$ é consistente e $q \in cl(\nu^{-1}(j[H]))$. Daí, existe $c = M'$ que realiza $q = tp(M'/M)$ e como $p = tp(f(M)/M)$ então $\Theta(f(M, M'))$. Além disso

$$\begin{aligned} cl(\nu^{-1}(j[H])) =& cl(\nu[H]) \\ =& cl\{tp(h(M)/M) : E_H(h(M), M)\} \\ =& cl(E_H). \end{aligned}$$

Pelo lema 3.25 item i, E_H é $\emptyset$-invariante e podemos considerar E_H como um subconjunto de $S_{\kappa+\kappa}(\emptyset)$, identificando E_H com sua imagem pela aplicação traço $\pi(E_H) = \{tp(a, b) : E(a, b)\}$. Como $q = tp(M'/M) \in cl(E_H)$ temos que $E_{\overline{\overline{H}}}(a, b)$ implica $\Theta(a, c) \wedge \overline{E_H}(c, b)$. Isto é $E_{\overline{\overline{H}}}(a, b)$ implica $\Theta \circ \overline{E_H}(a, b)$.

Por outro lado, como $j(H) \triangleleft Gal_L(T)$ e $Gal_L(T)$ é um grupo topológico, $cl(j[H]) \triangleleft Gal_L(T)$ e $\overline{\overline{H}} = j^{-1}(cl(j[H])) \triangleleft Aut(G)$. Pelo lema 3.25 item ii, temos que $E_{\overline{\overline{H}}}$ é $\bigwedge$-definível, e podemos ver $E_{\overline{\overline{H}}}$ como subconjunto fechado de $S_{\kappa+\kappa}(\emptyset)$, identificando $E_{\overline{\overline{H}}}$ com sua imagem pela aplicação traço. Assim, $\overline{E_H} \subseteq E_{\overline{\overline{H}}}$ e como $\Theta \subseteq E_L$ e $E_L \subseteq E_{\overline{\overline{H}}}$, temos que $\Theta \circ \overline{E_H}(a,b) := \exists c(\Theta(a,c) \wedge \overline{E_H}(c,b))$ implica $\exists c E_{\overline{\overline{H}}}(a,c) \wedge E_{\overline{\overline{H}}}(c,b)$. Isto é, $\Theta \circ \overline{E_H} \subseteq E_{\overline{\overline{H}}}$.

□

Corolário 3.27 *Se $H \triangleleft Aut(G)$, tal que $Autf_L(G) \subseteq H$ e $j[H]$ é fechado em $Gal_L(G)$, então E_H é $\bigwedge$-definível sobre $\emptyset$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.25, temos que E_H é $\emptyset$-invariante e $\bigwedge$-definível sobre todo $M \prec G$. Logo, pelo lema 2.59 temos que E_H é $\bigwedge$-definível sobre $\emptyset$. □

Lembremos que, uma ação de um grupo G em um conjunto X é regular se, é efetiva e transitiva. Isto é respectivamente, $K = \{g \in G : g \cdot x = x \, \forall x \in X\} = \{e\}$ e $X = G \cdot x_0$ para algum $x_0 \in X$.

Observação 3.28 *Suponha que $N = (G,X)$ é uma estrutura de 2-sortida onde G é um modelo monstro agindo regularmente em X. Logo $X = G \cdot x_0$, para $x_0 \in X$ fixo. Definimos as seguintes aplicações*

$$\alpha : Aut(G) \to Aut(N) \qquad \beta : G \to Aut(N)$$
$$f \mapsto \overline{f} \qquad\qquad g \mapsto \overline{g}$$

onde para $x \in X$,

$$\overline{f}|_G = f, \quad \overline{f}(x) = \overline{f}(h \cdot x_0) = f(h) \cdot x_0, \quad \overline{g}|_G = id \quad \overline{g}(x) = \overline{g}(h \cdot x_0) = (hg^{-1}) \cdot x_0.$$

Note que $\overline{f}^{-1} \circ \overline{f}(u) = u$ para cada $u \in N$, em particular $\overline{f}^{-1}(f(g)) = g$ para cada $g \in G$. Por tanto $\overline{f}^{-1}|_G = f^{-1}$.

Pela regularidade da ação de G em X, temos que α e β são homomorfismos injetores. De fato, se $\alpha(f) = \alpha(l)$, então $\overline{f}(x) = \overline{l}(x)$ para cada $x \in X$. Logo

$$f(h) \cdot x_0 = l(h) \cdot x_0,$$

e como G age regularmente em X, temos que $f = l$. Analogamente se

$$(gh^{-1}) \cdot x_0 = (lh^{-1}) \cdot x_0, \text{ para cada } h \in G,$$

temos que $l = g$ e

$$\begin{aligned}\alpha(f \circ l)(x) =& (f \circ g(h)) \cdot x_0 \\ =& f(l(h)) \cdot x_0 \\ =& \overline{f}(l(h) \cdot x_0) \\ =& \alpha(f) \circ \alpha(l)(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(gk)(x) =& \overline{gk}(h \cdot x_0) \\ =& (hk^{-1}g^{-1}) \cdot x_0 \\ =& \overline{g}(hk^{-1} \cdot x_0) \\ =& \overline{g}(\overline{k}(x)) \\ =& (\beta(g) \circ \beta(k))(x).\end{aligned}$$

Além disso, notamos que se $f \in Aut(G)$ e $g \in G$ então

$$\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{f(g)} \circ \overline{f} \;\; e \quad \overline{g} \circ \overline{f} = \overline{f} \circ \overline{f^{-1}(g)}. \tag{3-1}$$

Com efeito, se $x = h \cdot x_0 \in X$, então

$$\overline{f} \circ \overline{g}(x) = \overline{f}(hg^{-1} \cdot x_0) = f(hg^{-1}) \cdot x_0 = f(h)f(g)^{-1} \cdot x_0 = \overline{f(g)}(f(h) \cdot x_0) = \overline{f(g)} \circ \overline{f}(x)$$

e

$$\begin{aligned}\overline{g} \circ \overline{f}(x) =& \overline{g}(f(h) \cdot x_0) \\ =& f(h)g^{-1} \cdot x_0 \\ =& f(hf^{-1}(g^{-1})) \cdot x_0 \\ =& f(h(f^{-1}(g))^{-1}) \cdot x_0 \\ =& \overline{f}(\overline{f^{-1}(g)}(h \cdot x_0)) \\ =& \overline{f} \circ \overline{f^{-1}(g)}(x).\end{aligned}$$

Para $y \in G$

$$\overline{f} \circ \overline{g}(y) = f(y) = \overline{f(g)}(f(y)) = \overline{f(g)} \circ \overline{f}(y)$$

e

$$\overline{g} \circ \overline{f}(y) = f(y) = \overline{f} \circ id(y) = \overline{f} \circ \overline{f^{-1}(g)}(y).$$

Identificando $Aut(G)$ e G com $\alpha(Aut(G))$ e $\beta(G)$, respectivamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.29 *Se $N = (G,X)$ é uma estrutura 2-sortida com G um grupo agindo regularmente em X. Então*

i. $Aut(N) \cong G \rtimes Aut(G)$, *para* $F \in Aut(N)$, $F = \overline{g} \circ \overline{f}$, *onde* $f = F|_G$ *e* $F(x_0) = g^{-1} \cdot x_0$;

ii. *Seja* $(N',X') \prec (N,X)$ *e* $X' = G' \cdot (h_0 \cdot x_0)$ *para algum* $h_0 \cdot x_0 \in X'$. *Então*

$$F \in Aut(N/N') \Leftrightarrow (\exists f \in Aut(G/G'))(F = \overline{f}^{\overline{h_0}});$$

iii. $Autf_L(N) \cong G_L \rtimes Autf_L(G)$.

Demonstração.

i. Sejam $F \in Aut(N)$ e $f = F|_G$, então $F(G) = G$ e $F(X) = X$ pois F preserva as fórmulas de N, em particular, as fórmulas que determinam os sortes de X e G. Logo

$$F \cdot \overline{f}^{-1}(h \cdot x_0) = F(f^{-1}(h) \cdot x_0) = hF(x_0) = h(g^{-1} \cdot x_0) = \overline{g}(h \cdot x_0),$$

para algum $g \in G$, pois $F(x_0) \in X$, e como $\overline{g}$ é a identidade em G temos que $F = \overline{g} \circ \overline{f}$. Ou seja, $Aut(N) = G\,Aut(G)$. Além disso, $G \triangleleft Aut(N)$. Com efeito, sem perda de generalidade sejam, $f \in Aut(G)$ e $g \in G$

$$\begin{aligned}
\overline{f} \circ \overline{g} \circ \overline{f}^{-1}(h \cdot x_0) =& \overline{f} \circ \overline{g}(f^{-1}(h) \cdot x_0) \\
=& \overline{f}(f^{-1}(h)g^{-1} \cdot x_0) \\
=& hf(g^{-1}) \cdot x_0 \\
=& \overline{f(g)}(h \cdot x_0).
\end{aligned}$$

Então, $\overline{g}^{\overline{f}} = \overline{f(g)} \in G$ e, como $\overline{g}|_G = id \in Aut(G)$, temos que $G \cap Aut(G) = \{id\}$. Portanto $Aut(N)$ é isomorfo a $G \rtimes Aut(G)$.

ii. Seja $f \in Aut(G/G')$ e $F = \overline{f}^{\overline{h_0}}$, então $F|_{G'} = id_{G'}$ e

$$\begin{aligned}
\overline{h_0^{-1}} \circ \overline{f} \circ \overline{h_0}(h'h_0 \cdot x_0) =& \overline{h_0^{-1}} \circ \overline{f}(h' \cdot x_0) \\
=& \overline{h_0^{-1}}(h' \cdot x_0) \\
=& (h'h_0) \cdot x_0.
\end{aligned}$$

Ou seja, $F|_{X'} = id_{X'}$ e portanto $F \in Aut(N/N')$.

Para mostrar a ida, vamos supor que $F \in Aut(N/N')$ e $f = F|_G$. Como $h_0 \cdot x_0 \in X'$

$$h_0 x_0 = F(h_0 \cdot x_0) = f(h_0) \cdot F(x_0).$$

Daí $F(x_0) = f(h_0^{-1})h_0 \cdot x_0$ e, por (i) $g^{-1} \cdot x_0 = F(x_0) = (f(h_0^{-1})h_0) \cdot x_0$. Assim, de

$$(gf(h_0^{-1})h_0) \cdot x_0 = g(g^{-1} \cdot x_0) \cdot x_0$$

temos que $g = h_0^{-1}f(h_0)$, pois a ação de G em X é efetiva e em consequência,

$$F = \overline{h_0^{-1}f(h_0)} \circ \overline{f} = \overline{h_0^{-1}} \circ \overline{f} \circ \overline{h_0} = \overline{f}^{\overline{h_0}};$$

iii. Note que $G_L \cap Autf_L(G) = \emptyset$ e $G_L \triangleleft GAutf_L(G)$. Com efeito, sem perda de generalidade, seja $g = a^{-1}b \in G_L$ e $f \in Autf_L(G)$, então

$$\overline{f} \circ \overline{g}\overline{f}^{-1} = \overline{f(g)} \circ \overline{f} \circ \overline{f}^{-1} = \overline{f(a)^{-1}f(b)},$$

e como E_L é $\emptyset$-invariante, temos que $\overline{f} \circ \overline{g} \circ \overline{f}^{-1} \in G_L$. Logo, $G_L \rtimes Autf_L(G) \cong G_L Autf_L(G)$. Agora, só precisamos mostrar que $Autf_L(N) = G_L\, Autf_L(G)$.

De (ii), temos que se $F \in Autf_L(N)$, então existem $h_1, \ldots, h_n \in G$ e $f_1, \ldots, f_n \in Autf_L(G)$ tais que $F = \overline{f_1}^{\overline{h_1}} \circ \ldots \circ \overline{f_n}^{\overline{h_n}} \in Autf_L(N)$. Assim

$$F = \overline{h_1^{-1}f_1(h_1)} \circ \overline{f_1} \circ \overline{h_2^{-1}f_2(h_2)} \circ \overline{f_2} \circ \cdots \circ \overline{h_n^{-1}f_n(h_n)} \circ \overline{f_n},$$

e pela regra $\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{f(g)} \circ \overline{f}$, temos que

$$\overline{f_1} \circ \overline{h_2^{-1}f_2(h_2)} = \overline{f_1(h_2^{-1})f_1(f_2(h_2))} \circ \overline{f_1},$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(h_2^{-1})f_1(f_2(h_2)) =& f_1(h_2^{-1})f_1(f_2(f_1^{-1}(f_1(h_2)))) \\ =& f_1(h_2^{-1})f_2^{f_1^{-1}}(f_1(h_2)) \\ =& (f_1(h_2))^{-1}f_2^{f_1^{-1}}(f_1(h_2)) \in X_L, \end{aligned}$$

pois $f_2^{f_1^{-1}} \in Autf_L(G)$. Logo, se $g_0 = h_1^{-1}f_1(h_1)$, e $g_1 = (f_1(h_2))^{-1}f_2^{f_1^{-1}}(f_1(h_2))$ temos que

$$F = \overline{g_0} \circ \overline{g_1} \circ \overline{f_1 \circ f_2} \circ \overline{h_3^{-1}f_3(h_3)} \circ \ldots \circ \overline{h_n^{-1}f_n(h_n)} \circ \overline{f_n}.$$

Repetindo o procedimento para $\overline{f_1 \circ \ldots \circ f_i} \circ \overline{h_{i+1}^{-1}f_{i+1}(h_{i+1})}$ com $i \in \{2, \ldots n-1\}$, podemos exprimir $F = \overline{g} \circ \overline{f_1 \cdots f_n}$ com $g \in G_L$ e $\overline{f_1 \cdots f_n} \in Autf_L(G)$ e portanto, $Autf_L(N) \subseteq G_L\, Autf_L(G)$.

Para mostrar que $G_L\, Autf_L(G) \subseteq Autf_L(N)$ é suficiente verificar que $Autf_L(G) \subseteq Autf_L(N)$ e $X_L \subseteq Autf_L(N)$. O primero fato segue de (ii) e para verificar o segundo vamos supor que $a, b \in G$ tais que $b = f(a)$ para algum $f \in Autf_L(G)$. De (ii) temos que $\overline{f}^{\overline{a}} \in Autf_L(N)$ e

$$\overline{a^{-1}b} = \overline{a^{-1}f(a)} \circ \overline{f} \circ \overline{f}^{-1} = \overline{a^{-1}} \circ (\overline{f(a)} \circ \overline{f}) \circ \overline{f}^{-1} = \overline{f}^{\overline{a}} \circ \overline{f}^{-1} \in Autf_L(N).$$

□

Corolário 3.30 $Gal_L(N) \cong (G/G_L) \rtimes Gal_L(G)$.

Demonstração. Seja $f \in Aut(G)$, então $f \in Aut(G/G_L)$, pois G_L é $\emptyset$-invariante. Logo o produto em $Gal_L(N) \cong (G/G_L) \rtimes Gal_L(G)$ é dado por

$$(aG_L, bAutf_L(G)) \rtimes (cG_L, dAutf_L(G)) = (a \circ b(c)G_L, b \circ dAutf_L(G)).$$

Daí, a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : Gal_L(N) &\longrightarrow (G/G_L) \rtimes Gal_L(G) \\ \overline{g} \circ \overline{f} &\longrightarrow (\overline{g}G_L, \overline{f}Autf_L(G)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. De fato, sejam $\overline{g} \circ \overline{f}$, $\overline{g'} \circ \overline{f'} \in Gal_L(N)$, com $\overline{g}, \overline{g'} \in G$ e $f, \overline{f} \in Aut(G)$, então

$$\overline{g} \circ \overline{f} \circ \overline{g'} \circ \overline{f'} = \overline{g \circ f(g')} \circ \overline{f \circ f'}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma((\overline{g} \circ \overline{f}) \circ (\overline{g'} \circ \overline{f'})) = &(\overline{g \circ f(g')}G_L, \overline{f \circ f'}Autf_L(G)) \\ = &(\overline{g}G_L, fAutf_L(G)) \rtimes (g'G_L, f'Autf_L(G)). \end{aligned}$$

Pela proposição 3.29, parte i, temos que σ é sobrejetora e pela parte iii, σ é injetiva. $\square$

Capítulo 4

Componentes conexas

Neste capítulo seguimos asumindo que $(G,\ldots)$ é um grupo com uma estrutura de primeira ordem na linguaguem L e G é um modelo monstro com $\overline{\kappa} = |G| > 2^{|\mathcal{L}(A)|}$, um cardinal limite, onde $A \subseteq G$ é um conjunto pequeno de parâmetros. Definimos as componentes conexas sobre A; G^0_A, G^{00}_A e G^{∞}_A, com foco especial em G^{∞}_A.

Definição 4.1

i. $G^0_A = \bigcap\{H \leq G : H \textit{ é } A\textit{-definível e } [G:H] < \omega\}$
ii. $G^{00}_A = \bigcap\{H \leq G : H \textit{ é } \bigwedge\textit{-definível sobre } A \textit{ e } [G:H] < \bar{\kappa}\}$
iii. $G^{\infty}_A = \bigcap\{H \leq G : H \textit{ é } A\textit{-invariante e } [G:H] < \bar{\kappa}\}$

Se $G^{\infty}_A = G^{\infty}_{\emptyset}$ para cada conjunto pequeno de parametros A, então dizemos que G^{∞} existe e é definido como $G^{\infty}_{\emptyset}$. Analogamente definimos a existência de G^{00}_A e G^0_A.

G^{∞}_A e G^{00}_A são os menores subgrupos de índice limitado, $\bigwedge$-definível sobre A e A-invariante respectivamente. Isto segue do seguinte lema.

Lema 4.2 *Seja G um grupo como acima*

1. *Se C_d e C_i são respectivamente a coleção de subconjuntos $\bigwedge$-definíveis sobre A e A-invariantes, então $|C_d| < \overline{\kappa}$ e $|C_i| < \overline{\kappa}$.*
2. *Se $\{H_i : i \in I\}$ é uma coleção limitada de subgrupos de índice limitado com $[G:H_i] < \overline{\kappa}$ então*

$$\overline{H} = \bigcap_{i \in I} H_i$$

é tal que $[G:\overline{H}] < \overline{\kappa}$.

Demonstração.

1. Se B é um conjunto $\bigwedge$-definível sobre A, então B é definido por um conjunto p de fórmulas, logo $|C_d| < 2^{|L(A)|}$.

   Agora, dado um subconjunto H, A-invariante, H é a união de alguns conjuntos $\bigwedge$-definíveis sobre A (ver lema 2.52). Assim $|C_i| < 2^{|S_1(A)|} < 2^{2^{|\mathcal{L}(A)|}} < \overline{\kappa}$, pois $2^{|\mathcal{L}(A)|} < \overline{\kappa}$ e $\overline{\kappa}$ é um cardinal limite.

2. Seja $\{\kappa_i : i \in ß\}$ uma família de cardinais tais que, $[G : H_i] < \kappa_i$ e $\kappa = \sup\{\kappa_i : i \in I\}$. Vamos supor por contradição que existe uma sequência $X = \{g_1, g_2, \ldots\}$ de elementos diferentes de G com cardinal não limitado, tal que para cada par $g_r, g_s \in X$, $g_r g_s^{-1} \notin \overline{H}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $|X| = (2^{\kappa})^+$. Definimos uma aplicação f

$$f : [X]^2 \to I$$

   que a cada par $g_s, g_r \in X$, com $s \neq r$ designa um índice $i \in I$, tal que $g_s g_r^{-1} \notin H_i$. Então pelo Teorema de Erdös-Rado 3.5, existe uma subfamília C de X tal que $|C| \geq \kappa^+$ e para algum H_i temos que $g_s g_r^{-1} \notin H_i$ para cada $g_s, g_r \in C$, o que contradiz a escolha de κ. Portanto, $\overline{H}$ tem índice limitado em G.

□

A seguir algumas propriedades importantes que as componentes conexas satisfazem.

Lema 4.3

i. $G_A^{\infty} = G_{L_A} = \langle X_{\Theta_A} \rangle$ *e* $[G : G_A^{\infty}] \leq 2^{|\mathcal{L}(A)|}$.

ii. $G_A^{\infty} \subseteq G_A^{00} \subseteq G_A^{0}$ *e cada um é subgrupo normal de* G.

Demonstração.

i. Seja E a relação de equivalência dada por: $E(a,b) \Leftrightarrow a^{-1}b \in G_A^{\infty}$, se $E(a,b)$, então $a^{-1}b \in H$ para cada $H \leq G$, A-invariante. Daí, para cada $f \in Aut(G/A)$ e cada $H \leq G$, A-invariante, $f(a^{-1}b) = f(a)^{-1}f(b) \in H$. Ou seja, $E(f(a), f(b))$ e temos que E é uma relação de equivalência limitada e A-invariante. Agora, como E_{L_A} é a melhor relação de equivalência limitada e A-invariante em G (ver corolario 3.20), temos que $E_{L_A} \subseteq E$. Daí, $[G : G_A^{\infty}] = |G/E| \leq |G/E_{L_A}| < 2^{|\mathcal{L}(A)|}$ e

$$\begin{aligned}
G_{L_A} =& \big\langle \{a^{-1}b : a,b \in G, f(a) = b, f \in Autf_L(G)\} \big\rangle \\
\subseteq& \big\langle \{a^{-1}b : a,b \in G, E(a,b)\} \big\rangle \\
=& G_A^{\infty}.
\end{aligned}$$

   Por outro lado, dado que G_{L_A} é A-invariante e de índice limitado então $G_A^{\infty} \subseteq G_{L_A}$.

ii. Note que, se H é um subgrupo de índice limitado,

$$\overline{H} = \bigcap_{g \in G} H^g = \bigcap_{i<[G:H]} H^{g_i},$$

onde $(g_i)_{i<[G:H]}$ é o conjunto de representantes das classes a esquerda de H em G, então pelo lema 4.2, $\overline{H}$ tem índice limitado. Se H é um subgrupo A-definível, $H = \{b \in G : G \models \phi(b, \bar{a}), \bar{a} \in A\}$, então

$$\begin{aligned}\overline{H} =& \{b \in G : \exists h \in H \ \forall g_i \in G, b = g_i h g_i^{-1}\}\\ =& \{b \in G : \forall g_i \in G, g_i^{-1} b g_i \in H\}\\ =& \{b : G \models (\forall g_i \in G)\phi(g_i^{-1} b g_i)\}.\end{aligned}$$

Daí, $\overline{H}$ é também A-definível. Analogamente, se H é $\bigwedge$-definível sobre A, então $\overline{H}$ é $\bigwedge$-definível sobre A.

Se H é um subgrupo A-invariante, $\overline{H}$ também é A-invariante. De fato,

$$f(\overline{H}) = \bigcap_{g_i \in G} H^{f(g_i)} = \overline{H}$$

para cada $f \in Aut(G/A)$. Logo, na definição de G_A^∞, G_A^0 e G_A^{00} podemos considerar, sem perda de generalidade, H como $\overline{H}$, e dado que $\overline{H} \lhd G$, temos que G_A^∞, G_A^0 e G_A^{00} são subgrupos normais de G.

Finalmente, como todo conjunto definível sobre A de índice finito é também $\bigwedge$-definível sobre A de índice limitado, temos que $G_A^{00} \subseteq G_A^0$. Similarmente, como todo conjunto H, tipo definível sobre A é A-invariante, temos que $G_A^\infty \subseteq G_A^0$.

□

No capítulo anterior vimos que $Gal_{L_A}(G)$ possui uma topologia induzida do espaço de tipos $S_M(N)$. Agora, vamos considerar uma topologia em G induzida pelo conjunto de tipos sobre A, onde os fechados são definidos como segue: $C \subseteq G$ é fechado se C é $\bigwedge$-definível sobre A. Verifiquemos que tal definição de fechado determina uma topologia em G. Seja $\{H_i, i \in I\}$ uma coleção de fechados $H_i = \{b \in G : \Phi_i(b)\}$ onde Φ_i é um conjunto de $\mathcal{L}_A$-fórmulas então

$$\bigcap_{i \in I} H_i = \{b \in G : G \models \Sigma(b)\},$$

com $\Sigma = \bigcup_{i \in I} \Phi^i$, $|\sigma| < \omega\kappa = \max\{\omega, \kappa\} = \kappa$. Logo $\bigcap_{i \in I} H_i$ é fechado.

Se $\{H_i, i < n\}$, $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{i<n} H_i$ é definido pelo tipo

$$\{\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i : \phi_i \in \Phi_i\}.$$

Esta topologia é chamada de *topologia lógica* de G, e se $H \subseteq G$, denotamos por $cl_A(H)$ o fecho de H. Além disso, esta topologia é tal que a aplicação produto e a aplicação inversa do grupo G são continuas. Com efeito, seja $C = \{b : G \models \phi(b), b \in \Phi\}$. logo

$$\begin{aligned} p^{-1}(C) =& \{(a,b) \in G \times G : G \models \Phi(ab)\} \\ =& \{(a,b) \in G \times G : G \models \Sigma(a,b)\} \end{aligned}$$

Onde $\Sigma = \{\varphi(x,y) := \phi(xy) : \phi \in \Phi\}$ e

$$i^{-1}(C) = \{b \in G : \Phi'(b)\},$$

com $\Phi' = \{\phi'(y) : \phi'(y) = \exists x(\phi(x) \wedge xy = 1)\}$. Mas, pode acontecer $p^{-1}(C) \neq C_1 \times C_2$ com C_1 e C_2 $\bigwedge$-definíveis. Ou seja, a topologia acima pode não coincidir com a topologia produto, e mesmo que i e p sejam continuas, G não é necessariamente um grupo topológico. Lembremos que em um grupo topológico, o fecho de um subgrupo é de novo um subgrupo (ver proposição 1.27). Assim, obtemos um critério para determinar que um espaço topológico não tem estrutura de grupo topológico.

A seguir apresentamos um exemplo onde a topologia dada acima não coincide com a topologia produto (ver [8]).

Exemplo 4.4 *Seja K um corpo algebricamente fechado de característica 0 e $G = (K^*, \cdot)$ o grupo multiplicativo K com a topologia gerada pelos conjuntos $\bigwedge$-definíveis sobre $\emptyset$. O subgrupo $\emptyset$-invariante, $H = (2^{\mathbb{Z}}, \cdot)$ das potências de 2 de K, é tal que $cl(H)$ não é um subgrupo de G. De fato, verifiquemos que*

$$cl(H) = (K \setminus \hat{\mathbb{Q}}) \cup H,$$

onde $\hat{\mathbb{Q}}$ é o fecho algébrico de $\mathbb{Q}$. Seja $r \in K \setminus \hat{\mathbb{Q}}$ e B um aberto de r, então pela observação 2.26, B^c é definido por um conjunto de fórmulas Φ dadas por

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i(v) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} q_i(v) \neq 0.$$

Como r é trascendente, $p_i \neq 0$ para algum i e B^c é finito. Logo $H \cap B \neq \emptyset$, caso contrário $H \subseteq B^c$, o que é uma contradição pois H é infinito e, como B é um aberto qualquer de r, temos que $r \in cl(H)$.

Portanto $(K \setminus \hat{\mathbb{Q}}) \cup H \subseteq cl(H)$. Por outro lado, se $u \in (\hat{\mathbb{Q}} \setminus H)$, existe $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irredutível tal que $p(u) = 0$ e $B = \{x \in K : p(x) \neq 0\}$ é um fechado e $B^c = \{x \in K : p(x) =$

$0\}$ *é uma vizinhança de u tal que $B^c \cap H = \emptyset$ pois, dado que H é $\emptyset$-invariante, se alguma raiz de p pertence a H, então todas pertencem a H, o que contradiz o fato de $u \in (\hat{\mathbb{Q}} \setminus H)$, logo $u \notin cl(H)$. Portanto $cl(H) \subseteq (\hat{\mathbb{Q}} \setminus H)^c = (K \setminus \hat{\mathbb{Q}}) \cup H$.*

Agora, se $t \in K \setminus \hat{\mathbb{Q}}$ então $\frac{3}{t} \in K \setminus \hat{\mathbb{Q}}$. Caso contrário existe $p \in \mathbb{Q}[x]$ tal que

$$0 = p\left(\tfrac{3}{t}\right) = a_n\left(\tfrac{3}{t}\right)^n + a_{n-1}\left(\tfrac{3}{t}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\tfrac{3}{t}\right) + a_0 = \tfrac{1}{t^n}\left(\sum_{i=0}^{n} 3^i a_i t^{n-i}\right).$$

Logo $q(x) = \sum_{i=0}^{n} 3^i a_i x^{n-i}$ é tal que $q(t) = 0$ e $t \in \hat{\mathbb{Q}}$, o que é uma contradição. Assim, $t, \frac{3}{t} \in cl(H)$ mas $t \cdot \frac{3}{t} = 3 \notin cl(H)$ pois $3 \in \hat{\mathbb{Q}}$ e $3 \notin H$.

Se $i : G \to G/G_A^\infty$ é a aplicação quociente, definimos a topologia lógica em G/G_A^∞ como segue. Um subconjunto $X \subseteq G/G_A^\infty$ é fechado se, e somente se, $i^{-1}(X) \subseteq G$ é $\bigwedge$-definível sobre G', onde $G' \prec G$ e $A \subseteq G'$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\subseteq"] & G/G_A^\infty \arrow[d, "\subseteq"] \\ Aut(N/A) \arrow[r, "j"] & Gal_{L_A}(Th(N)) \end{tikzcd} \qquad (I)$$

Por outro lado, considerando $N = (G, X)$ e $G \subseteq Aut(N/A)$ como na observação 3.28, temos que

- $G_A^\infty = G \cap Autf_{L_A}(N)$ pela proposição 3.29, item iii;
- $Gal_{L_A}(N) \cong (G/G_A^\infty) \rtimes Gal_{L_A}(G)$ pelo corolario 3.30.

Daí, $G/G_A^\infty = Gal_{L_A}(N) \cap j(G)$, $j|_G = i$, o diagrama acima comuta e podemos considerar a topologia induzida de $Gal_{L_A}(N)$ em G/G^∞. Na verdade, esta topologia coincide com a topologia lógica em G/G_A^∞.

Proposição 4.5 *G/G^∞ com a topologia lógica é um grupo topológico compacto.*

Demonstração. Seja $N = (G, X)$ como na observação 3.28, e $X = G \cdot x_0$, vamos mostrar que a topologia lógica e a topologia induzida de $Gal_{L_A}(N)$ em G/G_A^∞ coincidem. Assim, como $Gal_{L_A}(N)$ é um grupo topológico compacto, e $G = i^{-1}(G/G_A^\infty)$, então G/G_A^∞ é um grupo topológico compacto.

Seja $X \subseteq G/G_A^\infty$ tal que, existe $C \subseteq Gal_{L_A}(N)$ fechado e $X = C \cap (G/G_A^\infty)$, então $\nu^{-1}(C)$ é um fechado em $S_M(M)$, onde $M \prec N$ e $A \subseteq M$.

$$\begin{tikzcd} Aut(N/A) \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\mu"'] & & Gal_{L_A}(Th(N)) \\ & S_M(M) \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\nu^{-1}(C) =& \{tp(M'/M) : \Phi(\bar{x}, M) \subseteq tp(M'M/)\}\\ =& \{tp(M'/M) : \Phi(M', M)\},\end{aligned}$$

onde $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ é um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, e como $\nu^{-1}(C) = \mu(j^{-1}(C))$, então $\nu^{-1}(C) = \{tp(f(M)/M) : f \in j^{-1}(C)\}$.

Note que, para $g \in G$

$$g \in i^{-1}(X) \Leftrightarrow \overline{g} \in j^{-1}(C) \Leftrightarrow \Phi(\overline{g}(M), M).$$

De fato, dado que o diagrama (I), (página 74) comuta, temos que $g \in i^{-1}(X) \Leftrightarrow \overline{g} \in j^{-1}(C)$.

Agora, se $\overline{g} \in j^{-1}(C)$, então $\mu(\overline{g}) \in \nu^{-1}(C)$ pois $\nu^{-1}(C) = \mu(j^{-1}(C))$ e temos que $\Phi(\overline{g}(M), M)$.

Por outro lado, se $\Phi(\overline{g}(M), M)$, então $tp(\overline{g}(M)/M) \in \mu(j^{-1}(C))$. Ou seja, $tp(\overline{g}(M)/M) = tp(f(M)/M)$ para algum $f \in j^{-1}(C)$ e $j(\overline{g}) = j(f) \in C$.

Suponha que $i^{-1}(X)$ é $\bigwedge$-definível sobre $G' \prec G$ com $A \subseteq G'$, então $g \in i^{-1}(X)$ se, e somente se, $\Psi(g, G')$, onde $\Psi(x, \bar{y})$ é um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas.

Seja $C = XGal_{L_A}(G)$, então $X = C \cap (G/G_A^{\infty})$ e mostremos que C é fechado em $Gal_{L_A}(N)$. Considere

$$\begin{aligned}\nu^{-1}(C) =& \mu(j^{-1}(C))\\ =& \{tp(F(G')/G') : F \in j^{-1}(C)\}\\ =& \{tp(F(G')/G') : F \in i^{-1}(X)Aut(G/A)\}\\ =& \{tp(F(G')/G') : F = \overline{g} \circ \overline{f}, \overline{g} \in i^{-1}(X), \overline{f} \in Aut(G/A)\}\\ =& \{tp(F(G')/G') : F(x_0) = g^{-1} \cdot x_0, \Psi(g, G')\},\end{aligned}$$

onde a última igualdade vale pois, $F(x_0) = \overline{g}(\overline{f}(x_0)) = \overline{g}(x_0) = g^{-1} \cdot x_0$.

□

Note que se $H \leq G$ é A-invariante tal que $G_A^{\infty} \leq H$, então $i(H) \leq G/G_A^{\infty}$ e como G/G_A^{∞} é um grupo topológico, segue que $cl(i[H])$ é um subgrupo topológico fechado de G/G_A^{∞}, (ver proposição 1.27). Logo, $i^{-1}(cl(i[H]))$ é um subgrupo de G contindo H e, é $\bigwedge$-definível sobre algum submodelo pequeno de G que contém A.

Teorema 4.6 *Seja $H \leq G$, A-invariante de índice limitado, então*

i. $i^{-1}(cl[i(H)])$ é o menor subgrupo $\bigwedge$-definível sobre quaisquer $G' \prec G$, com $A \subseteq G'$ que contém H,

ii. *se além disso, $H \lhd G$ então*

$$i^{-1}(cl(i[H])) = cl(H) \cdot X_{\Theta_A}.$$

Em particular $G_A^{00} = cl(G_A^{\infty}) \cdot X_{\Theta_A}$.

Demonstração.

i. Seja $\tilde{H} \leq G$ $\bigwedge$-definível sobre quaisquer $G' \prec G$, tal que $H \subseteq \tilde{H}$. Como H é um subgrupo A-invariante de índice limitado, temos que $G_A^{\infty} \subseteq H \subseteq \tilde{H}$ e, $i^{-1}(i(\tilde{H})) = \tilde{H}G_A^{\infty} = \tilde{H}$ é $\bigwedge$-definível sobre quaisquer $G' \prec G$. Ou seja, $i(\tilde{H})$ é um fechado tal que $i(H) \subseteq i(\tilde{H})$. Logo $cl(i(H)) \subseteq i(\tilde{H})$ e portanto $i^{-1}(cl[i(H)]) \subseteq \tilde{H}$.

ii. Note que $i^{-1}(cl[i(H)])$ é A-invariante. De fato, seja $\sigma \in Aut(G/A)$, como G_A^{∞} é invariante por σ, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} : G/G_A^{\infty} &\to G/G_A^{\infty} \\ gG_A^{\infty} &\mapsto \sigma(g)G_A^{\infty} \end{aligned}$$

é um automorfismo de G/G_A^{∞}, e como H é A-invariante $\overline{\sigma}(HG_A^{\infty}) = HG_A^{\infty}$. Ou seja, $i(H)$ também é invariante por σ, e pelo lema 1.26, $cl(i(H))$ também o é. Logo, se $x \in i^{-1}(cl[i(H)])$, então $i(x) \in cl[i(H)]$ e $i(\sigma(x)) = \overline{\sigma}(i(x)) \in cl(i(H))$. Isto é, $\sigma(x) \in i^{-1}(cl[i(H)])$ e portanto $i^{-1}(cl[i(H)])$ é A-invariante. Dado que $i^{-1}(cl[i(H)])$ também é $\bigwedge$-definível sobre quaisquer submodelo pequeno de G, temos pelo lema 2.59 que $i^{-1}(cl[i(H)])$ é $\bigwedge$-definível sobre A e daí $cl_A(H) \subseteq i^{-1}(cl[i(H)])$. Assim, dado que $\langle X_{\Theta_A} \rangle = G_A^{\infty}$ temos que

$$i(cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A}) = (cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A})G/G_A^{\infty} = cl_A(H)G/G_A^{\infty} = i(cl_A(H)) \subseteq cl(i(H)),$$

de onde, $cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A} \subseteq i^{-1}(cl[i(H)])$.

Por outro lado, se $cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A}$ é um subgrupo $\bigwedge$-definível sobre A, então $i^{-1}(cl[i(H)]) \subseteq cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A}$ e concluímos que $i^{-1}(cl[i(H)]) = cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A}$. Logo, basta mostrar que $cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A}$ é um subgrupo $\bigwedge$-definível sobre A. Como $cl_A(H)$ é $\bigwedge$-definível sobre A, existe um conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas Ψ que define $cl_A(H)$ e temos que $cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A}$ é definido pelo seguinte tipo sobre A,

$$\{\exists u,a,b \in G(x = ua^{-1}b \wedge \Psi(u) \wedge \Phi_A(a,b)) : \Phi_A \subseteq \hat{\Theta_A}, \Phi_A \text{finito}\}$$

onde $\hat{\Theta_A}$ é o conjunto de todas as fórmulas densas sobre A. Para mostrar que $cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A}$ é um subgrupo de G, consideramos uma extensão de G, $N = (G,X)$, como na observação 3.28 e sem perda de generalidade, vamos supor $A = \emptyset$.

Seja $H' = H \rtimes Autf_L(G)$, então $H' \lhd Aut(N)$. De fato, sejam $\overline{h}\circ\overline{e} \in H'$, $\overline{g}\circ\overline{f} \in Aut(N)$, com $h \in H$, $e \in Autf_L(G)$, $g \in G$ e $f \in Aut(G)$, então

$$\begin{aligned}(\overline{h}\circ\overline{e})^{\overline{g}\circ\overline{f}} =& \overline{f}^{-1}\circ\overline{g}^{-1}\circ(\overline{h}\circ\overline{e})\circ\overline{g}\circ\overline{f}\\ =& \overline{f}^{-1}\circ\overline{g^{-1}h}\circ\overline{e(g)}\circ\overline{e\circ f}\\ =& \overline{f^{-1}}\circ\overline{g^{-1}he(g)}\circ\overline{e\circ f}\\ =& \overline{f^{-1}(g^{-1}he(g))}\circ\overline{f^{-1}\circ e\circ f}\\ =& \overline{f^{-1}(h^g g^{-1}e(g))}\circ\overline{e}^{\overline{f}}\\ =& \overline{f^{-1}(h^g)f^{-1}(g^{-1}e(g))}\circ\overline{e}^{\overline{f}},\end{aligned}$$

como $H \lhd G$, temos que $h^g \in H$ e $f^{-1}(h^g) \in H$ e como $g^{-1}e(g) \in X_{E_L}$, temos pelo lema 3.17 que $f(g^{-1}e(g)) \in X_{E_L}$. Assim,

$$f^{-1}(h^g)f^{-1}(g^{-1}e(g)) \in H^G X_{E_L} \subseteq HG_L = H,$$

pois $G_L = G^\infty \subseteq H$ e dado que $\overline{e}^{\overline{f}} \in Autf_L(G)$, temos que

$$(\overline{h}\circ\overline{e})^{\overline{g}\circ\overline{f}} = \overline{f^{-1}(h^g)f^{-1}(g^{-1}e(g))}\circ\overline{e}^{\overline{f}} \in H',$$

e portanto $H' \lhd Aut(N)$.
Note que $Autf_L(N) \subseteq H'$, pois $Autf_L(N) = G^\infty \rtimes Autf_L(G)$ (ver proposição 3.29, item iii) e $H' = H \rtimes Autf_L(G)$ com $G^\infty \subseteq H$. Logo, aplicando o teorema 3.26 a H' segue que

$$E_{\overline{\overline{H'}}} = \Theta\circ\overline{E_{H'}},$$

onde $\overline{\overline{H'}} = j^{-1}(cl[j(H')])$ e $E_{H'}(a,b) \Leftrightarrow a = f(b)$ para $f \in H'$, e pelo lema 3.22

$$\begin{aligned}X_\Theta\cdot\{y\in X : \overline{E_{H'}}(y,x_0)\} =& \{z \in X : \Theta(y,z)\wedge\overline{E_{H'}}(y,x_0)\}\\ =& \{z\in X : E_{\overline{\overline{H'}}}(z,x_0)\}\\ =& \{f(x_0) : f\in\overline{\overline{H'}}\}\\ =& \overline{\overline{H'}}(x_0).\end{aligned}$$

Note que se $\{y \in X : \overline{E_{H'}}(y,x_0)\} = cl_\emptyset(H)(x_0)$, então $X_\Theta cl_\emptyset(H)(x_0) = \overline{\overline{H'}}(x_0)$.
Seja $F = \overline{g}\circ\overline{f} \in \overline{\overline{H'}}$ com $\overline{g} \in G\cap\overline{\overline{H'}}$ e $\overline{f} \in Aut(G)\cap\overline{\overline{H'}}$. Temos que $F(x_0) = g^{-1}\cdot x_0$ e para algum $u \in X_\Theta cl_\emptyset(H)$,

$$u^{-1}\cdot x_0 = u(x_0) = F(x_0) = g^{-1}\cdot x_0$$

e como a ação de G em X é efetiva (ver definição 1.18), $u = g$. Ou seja, $X_\Theta cl_\emptyset(H) = \overline{\overline{H'}} \cap G \lhd Aut(N)$ e portanto $X_\Theta cl_\emptyset(H)$ é um subgrupo de G.
Para mostrar que $\{y \in X : \overline{E_{H'}}(y, x_0)\} = cl_\emptyset(H)(x_0)$ consideremos

$$\begin{aligned} \Psi: \ S_2^X(\emptyset) &\to S_1^G(\emptyset) \\ tp(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) &\mapsto tp(g_2 g_1^{-1}). \end{aligned}$$

Temos que Ψ é um homeomorfismo. De fato, sejam $(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0)$ e $(g_1' \cdot x_0, g_2' \cdot x_0)$ em X^2 tais que $tp(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) = tp(g_1' \cdot x_0, g_2' \cdot x_0)$, então existe $F = g\overline{f} \in Aut(N)$ com $g \in G$ e $f \in Aut(G)$ tal que

$$F(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) = (f(g_1)g^{-1} \cdot x_0, f(g_2)g^{-1} \cdot x_0) = (g_1' \cdot x_0, g_2' \cdot x_0),$$

e como a ação de G em X é efetiva $g_1' = f(g_1)g^{-1}$ e $g_2' = f(g_2)g^{-1}$. Ou seja, $g_2' g_1'^{-1} = f(g_2)f(g_1^{-1}) = f(g_2 g_1^{-1})$. Isto é, $tp(g_1' g_2'^{-1}) = tp(g_1 g_2^{-1})$ e portanto Ψ é uma função.
Por outro lado, se $tp(g_2 g_1^{-1}) = tp(g_2' g_1'^{-1})$, então existe $f \in Aut(G)$ tal que $f(g_2 g_1^{-1}) = g_2' g_1'^{-1}$. Daí $\overline{g_1'^{-1} f(g_1)} \circ \overline{f} \in Aut(N)$ é tal que

$$\begin{aligned} \overline{g_1'^{-1} f(g_1)} \circ \overline{f}(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) =& \overline{g_1'^{-1} f(g_1)}(f(g_1) \cdot x_0, f(g_2) \cdot x_0) \\ =& (f(g_1)f(g_1)^{-1} g_1' \cdot x_0, f(g_2)f(g_1)^{-1} g_1' \cdot x_0) \\ =& (g_1' \cdot x_0, f(g_2 g_1^{-1}) g_1' \cdot x_0) \\ =& (g_1' \cdot x_0, g_2' \cdot x_0). \end{aligned}$$

Logo $tp(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) = tp(g_1' \cdot x_0, g_2' \cdot x_0)$. Além disso, se $tp(g) \in S_1^G(\emptyset)$, então existe $tp(x_0, g \cdot x_0)$ tal que $\psi(tp(x_0, g \cdot x_0)) = tp(g)$ e portanto Ψ é sobrejetora.
Note que as fórmulas atômicas no sorte X são da forma:

- $\phi_1(x_1, x_2) := x_1 = x_2$;
- $\phi_2(x_1, x_2) := \exists g \ (g \cdot x_1 = x_2)$ para algum $g \in G$,

e como $x_i = g_i \cdot x_0$, onde $x_i \in X$ e $g \in G$, temos que se $\phi_1(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0)$ vale, então $g_1 \cdot x_0 = g_2 \cdot x_0$ e como a ação de G em X é efetiva, $g_1 = g_2$ e $g_2 g_1^{-1} = e$. Ou seja, definindo $\overline{\phi_1}(e, g_2 g_1^{-1}) := e = g_2 g_1^{-1}$ temos que

$$N \models \phi_1(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) \text{ se, e somente se, } \overline{\phi_1}(e, g_2 g_1^{-1}),$$

como e é uma constante no sorte G, denotamos $\overline{\phi_1}(e, g_2 g_1^{-1})$ por $\overline{\phi_1}(g_2 g_1^{-1})$. Similarmente definimos $\overline{\phi_2}$ associada a ϕ_2 como $\overline{\phi_2}(e, g_2 g_1^{-1}) := \exists g \ (g \cdot e = g_2 g_1^{-1})$ e temos que

$$N \models \phi_2(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) \text{ se, e somente se, } \overline{\phi_2}(g_2 g_1^{-1}).$$

Portanto, se $\phi(x,y)$ é uma fórmula no sorte X

$$X \models \phi(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) \text{ se, e somente se, } G \models \overline{\phi}(g_2 g_1^{-1}).$$

Agora, seja

$$B = \{tp(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) : \Phi(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0)\}$$

um fechado em $S_2^X(\emptyset)$, então

$$\Psi(B) = \{tp(g_2 g^{-1}) : \overline{\Phi}(g_2 g_1^{-1})\},$$

onde $\overline{\Phi} = \{\overline{\phi} : \phi \in \Phi\}$. Daí ψ é fechada. Isto é, Ψ^{-1} é contínua e pelo teorema 1.12, temos que Ψ é um homeomorfismo.

Por outro lado, como $E_{H'}$ e H são $\emptyset$-invariante, podemos identificar $E_{H'}$ e H com sua respectiva imagem pela aplicação traço e dizer que $X^2 \cap E_{H'} \subseteq S_2^X(\emptyset)$ e $H \subseteq S_1^G(\emptyset)$. Sejam $x_1 = g_1 \cdot x_0$, $x_2 = g_2 \cdot x_0$ tais que $E_{H'}(x_1, x_2)$, então existe $F = \overline{h} \circ \overline{f}$ com $h \in H$ e $f \in Autf_L(G)$ tal que

$$x_2 = F(x_1) = \overline{h} \circ \overline{f}(g_1 \cdot x_0) = f(g_1)h^{-1} \cdot x_0.$$

Logo

$$\begin{aligned}\Psi(tp(x_1, x_2)) =& \Psi(tp(g_1 \cdot x_0, f(g_1)h^{-1} \cdot x_0)) \\ =& tp(g_1(f(g_1)h^{-1})^{-1}) \\ =& tp(g_1 h f(g_1)^{-1}),\end{aligned}$$

onde $g_1 h f(g_1)^{-1} = g_1 h g_1^{-1}(g_1 f(g_1)^{-1}) \in HX_{E_L} = H$. Além disso, se $tp(h) \in S_1^G(\emptyset)$ com $h \in H$, então $tp(x_0, h \cdot x_0) \in S_2^X(\emptyset)$ é tal que $E_H(x_0, h \cdot x_0)$ pois $h \cdot x_0 = h^{-1}(x_0)$. Portanto, $E_{H'} \cap X^2 \subseteq S_2^X(\emptyset)$ é equivalente a $H \subseteq S_1^G(\emptyset)$. Se $y = g \cdot x_0$, então

$$\begin{aligned}\overline{E_{H'}}(y, x_0) \Leftrightarrow& tp(g \cdot x_0, x_0) \in cl_\emptyset(E_{H'}) \\ \Leftrightarrow& tp(g^{-1}) \in cl_\emptyset(H).\end{aligned}$$

Ou seja $y = g \cdot x_0 = g^{-1}(x_0)$ com $g^{-1} \in cl_\emptyset(H)$ e concluímos que $\{y \in X : \overline{E_{H'}}(y, x_0)\} = cl_\emptyset(H)(x_0)$.

Finalmente, como $i^{-1}(cl[i(G_A^\infty)])$ é o menor subgrupo $\bigwedge$-definível de G que contém G_A^∞, então $cl_A(G_A^\infty) \cdot X_{\Theta_A} = i^{-1}(cl[i(G_A^\infty)]) \subseteq G_A^{00}$ e como $G_A^\infty \subseteq cl_A(G_A^\infty) \cdot X_{\Theta_A}$, então $cl_A(G_A^\infty)\cdot X_{\Theta_A}$ é um subgrupo $\bigwedge$-definível de índice limitado e temos que $G_A^{00} \subseteq cl_A(G_A^\infty)\cdot X_{\Theta_A}$.

□

4.1 Existência de G^∞

A existência da componente conexa G^∞ para grupos G abelianos sem propriedade de independência (NIP) foi provada por Shelah em [20]. Nesta seção apresentamos uma prova da existência de G^∞ para grupos com NIP sem a hipótese da comutatividade de G, baseada na prova feita por Gismatullin em [8]. Para isto, assumimos que $(G,\cdot,\dots)$ é um grupo com uma estrutura de primera ordem com uma assinatura $\mathcal{L}$ e G um modelo monstro de uma $\mathcal{L}$-teoria completa com modelos infinitos. Ou seja, $\overline{\kappa}$-saturado, fortemente $\overline{\kappa}$-homogêneo, onde $\overline{\kappa}$ é um cardinal limite suficientemente grande. Consideramos os conceitos de conjuntos densos, teorias NIP e algumas propriedades das componentes conexas de grupos em teorias NIP.

Definição 4.7 *Seja $X \subseteq G$ e $n \in \mathbb{N}$:*

i. dizemos que X é n-genérico à direita (respectivamente à esquerda) se são necessárias no máximo n translações à direita (respectivamente à esquerda) de X por elementos de G para cobrir o grupo G. Isto é,

$$G = \bigcup_{i \leq n} X g_i.$$

Dizemos que X é genérico se é n-genérico para algum $n \in \mathbb{N}$;

ii. X é n-denso se, $X = X^{-1}$ e

$$\forall g_0,\dots,g_{n-1} \in G, \exists i < j < n : (g_i^{-1} g_j) \in X,$$

onde $g_0,\dots,g_{n-1}$ não são necessariamente, diferentes dois a dois. Dizemos que X é denso se é n-denso para algum $n \in \mathbb{N}$. O índice de densidade de X é o menor n tal que X é n-denso;

iii. se X é definível, $\varphi_X(x,y) := x^{-1}y \in X$. Ou seja, se $X = \phi(G)$, então $\varphi_X(x,y) := \phi(x^{-1}y)$.

Note que se $X \leq G$ tal que $[G : X] = n < \omega$, então X é denso com índice n.

As seguintes propriedades de conjuntos densos, valem para grupos em geral.

Lema 4.8 *Sejam G um grupo, $X \subseteq G$ e $\psi(x,y)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula, então*

i. *se X é definível,* $X = X_{\varphi_X} = \{a^{-1}b : \varphi_X(a,b)\}$*;*

ii. *se* $\psi(x,y)$ *é densa, então as fórmulas* φ_{X_ψ}, $\varphi(x^{-1},y^{-1})$ *e o conjunto* X_ψ *também são densos. Se X é A-definível e* $X = X^{-1}$*, então X é denso se, e somente se,* $\varphi_X \in \mathcal{L}(A)$ *é densa;*

iii. *se X é denso e A-definível, então em uma extensão* G^* *de G,* G^* *um modelo monstro temos que, para cada sequência A-indiscernível* $(a_i)_{i<\omega} \subseteq G^*$*,*

$$a_i^{-1}a_j \in X \textit{ para todo } i < j < \omega;$$

iv. *se X é n-denso, então X é n-genérico à esquerda e direita. Se X é n-genérico à direita (esquerda), então* $X^{-1}X$ *(respectivamente* XX^{-1}*) é* $n+1$*-denso*

Demonstração.

i. Note que $X_{\varphi_X} = \{a^{-1}b \in X\} \supseteq X$ e se $x \in X$, $x = y^{-1}(yx) \in X$. Ou seja $X \subseteq X_{\varphi_X}$.

ii. Seja $u \in X_\psi$, $u = a^{-1}b$, onde $G \models \psi(a,b)$, e como ψ é simétrica, temos que $G \models \varphi(b,a)$, logo $u = (b^{-1}a)^{-1} \in X_\varphi^{-1}$. Ou seja, $X_\psi \subseteq X_\psi^{-1}$.
Por outro lado, como $u^{-1} = b^{-1}a$ onde $G \models \psi(b,a)$, então $X_\psi^{-1} \subseteq X_\psi$. Daí $X_\psi = X_\psi^{-1}$ e como ψ é densa

$$\forall g_0,\ldots,g_{n-1} \in G\ \exists i < j < n : G \models \psi(g_i,g_j).$$

Isto é,

$$\forall g_0,\ldots,g_{n-1} \in G\ \exists i < j < n : g_i^{-1}g_j \in X_\psi,$$

equivalentemente

$$\forall g_0,\ldots,g_{n-1} \in G\ \exists i < j < n : G \models \varphi_{X_\psi}(g_i,g_j)$$

e portanto X_ψ é denso e φ_{X_ψ} é uma fórmula densa. Como

$$\forall g_0^{-1},\ldots,g_{n-1}^{-1} \in G\ \exists i < j < n : G \models \psi(g_i^{-1},g_j^{-1})$$

então $\psi(x^{-1},y^{-1})$ é densa.

iii. Seja $(b_j)_{j<\omega}$, uma sequência em G, como X é denso, por iii, $\varphi_X \in \mathcal{L}(A)$ é densa. Daí, exitem b_i,b_j tais que, $G \models \varphi_X(b_i,b_j)$ e pelo lema 3.9, existe uma sequência indiscernínvel sobre A em um modelo de T, $(a_i)_{i<\omega}$, que tem o mesmo tipo que $(b_j)_{j<\omega}$. Assim, existe um modelo monstro G^* tal que $G \prec G^*$, $(a_i)_{i<\omega} \subseteq G^*$ e $a_i^{-1}a_j \in X$ para cada $i < j < \omega$, pois $(a_i)_{i<\omega}$ é indiscernível.

iv. Seja $(g_0,\ldots,g_{k-1})$ a maior sequência de elementos de G tais que $g_i^{-1}g_j \notin X$, para cada $i < j < k < n$ e seja $g \in G$. Considere a sequência $g_0,\ldots,g_{k-1},g$, temos que

existe $i \in \{0,\dots,k-1\}$ tal que $g_i^{-1}g \in X$ e assim $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} g_iX$. Analogamente, considerando a sequência $g, g_0, \dots, g_{k-1}$ temos que, $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} Xg_i$.
Agora, sejam X n-genérico à esquerda e $g_0, \dots, g_n$ elementos de G

$$G = \bigcup_{i=0}^{n} h_iX.$$

Então pelo princípio da casa dos pombos, para algum $i < j < n$ existe $0 \leq k < n$ tal que $g_i, g_j \in h_kX$ e

$$g_i^{-1}g_j = (h_kx_i)^{-1}(h_kx_j) = x_i^{-1}x_j \in X^{-1}X.$$

Portanto $X^{-1}X$ é $n+1$-denso. Analogamente, se $G = \bigcup_{i<n} Xh_i$, temos que para algum g_i^{-1}, g_j^{-1} existe $0 \leq k < n$ tal que $g_i^{-1}, g_j^{-1} \in Xh_k$ e $g_ig_j^{-1} = (x_ih_k)(x_jh_k)^{-1} = x_ix_j^{-1} \in XX^{-1}$.

□

Lema 4.9 *Seja $n \in \mathbb{N}$, então*

$$X_{\Theta_A} = \bigcap \{P : P \subseteq G, A\text{-definível e denso}\}$$

Demonstração. ver [8].

Teorema 4.10 *Seja $H \triangleleft G$, A-invariante e de índice limitado, então*

$$i^{-1}(cl[i(H)]) = \bigcap \{P \cdot Q : P, Q \subseteq G \text{ densos, } A\text{-definíveis e } Q \cup H \subseteq P\}.$$

Em particular, $G_A^{00} = \bigcap \{P \cdot Q : P, Q \subseteq G$ densos, A-definíveis e $Q \cup G_A^\infty \subseteq P\}$.

Demonstração. Seja P um conjunto A-definível, $P = \varphi(G)$, contendo H, então $H \subseteq P \cup P^{-1} = (P \cup P^{-1})^{-1}$ e $P \cup P^{-1}$ tem índice limitado. Além disso, $P \cup P^{-1}$ é A-definível, pois $P \cup P^{-1}$ é definido pela fórmula $\varphi(x) \vee \varphi(x^{-1})$.

Suponha $\Delta = \{\psi_2, \psi_3, \dots\}$, onde para $k \geq 2$

$$\psi_k := \exists g_0, \dots, g_{k-1}, \forall i < j < k \ (g_i^{-1}g_j \notin P \cup P^{-1}),$$

e seja Δ' um subconjunto finito de Δ. Sem perda de generalidade, vamos supor $\Delta' = \{\psi_k\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $P \cup P^{-1}$ não é denso, então $P \cup P^{-1}$ não for k-denso e Δ' é satisfatível. Logo, pelo teorema de compacidade 2.36, Δ é satisfatível e existe um conjunto infinito $\{g_0, g_1, \ldots\}$ tal que $g_i^{-1}g_j \notin (P \cup P^{-1}) \supseteq H$. Isto é, existe um conjunto infinito de representantes de classes laterais distintas de H em G, o que é uma contradição pois $P \cup P^{-1}$ tem índice limitado. Portanto, para cada P, A-definível, que contém H, podemos considerar o conjunto $P \cup P^{-1}$ A-satisfatível e denso tal que $P \subseteq (P \cup P^{-1})$. Daí

$$\bigcap\{P : H \subseteq P, P \text{ é A-definível }\} = \bigcap\{P : H \subseteq P, P \text{ é A-definível e denso }\}$$

e pelo teorema 4.6 e lema 4.9, temos que

$$\begin{aligned} i^{-1}(cl[i(H)]) =& cl_A(H) \cdot X_{\Theta_A} \\ =& \bigcap\{P : H \subseteq P,\ P \text{ é denso e A-definível}\} \cdot \{Q :\ Q \text{ é denso e A-definível}\} \\ =& \bigcap\{P \cdot Q : P, Q \text{ são densos, A-definíveis e } H \subseteq P\} \end{aligned}$$

□

Lema 4.11 *Seja $A \subseteq G$ um conjunto pequeno de parâmetros.*

Todo subgrupo de G $\bigwedge$-definível sobre A de índice limitado é a interseção de uma família de conjuntos densos A-definíveis.

Demonstração. Se H é um subgrupo $\bigwedge$-definível de índice limitado, com $H = \Sigma(G)$ onde Σ é um conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas, então E^H dada por $E^H(a,b) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ é uma relação de equivalência limitada e

$$x^{-1}y \in H \Leftrightarrow G \models \varphi(x^{-1}y) \text{ para cada } \varphi \in \Sigma.$$

Seja $\overline{\varphi}(x,y) := \varphi(x^{-1}y)$, temos que cada $\overline{\varphi}$ é densa pois H é de índice finito, e $E^H(a,b) \Leftrightarrow \overline{\Sigma}(a,b)$ onde $\overline{\Sigma} = \{\overline{\varphi}(x,y) : \varphi \in \Sigma\}$. Assim, se $H_{\overline{\varphi}} = \{a^{-1}b : \overline{\varphi}(a,b)\}$, então

$$\begin{aligned} \bigcap_{\overline{\varphi} \in \overline{\Sigma}} H_{\overline{\varphi}} =& \{a^{-1}b : \overline{\Sigma}(a,b)\} \\ =& \{a^{-1}b : \forall \varphi \in \Sigma (G \models \varphi(a^{-1}b))\} \\ =& H, \end{aligned}$$

e pelo lema 4.8 item ii, cada $H_{\overline{\varphi}}$ é um conjunto denso. □

Proposição 4.12

i. $G_A^0 = \bigcap\left\{(G|_{\mathcal{L}_0})^0_{A_0} : A_0 \subseteq A, \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \textit{ finitas}\right\}$

ii. $G_A^{00} = \bigcap \left\{ (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{00} : A_0 \subseteq A, \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \text{ contáveis} \right\}$

iii. $G_A^{\infty} = \bigcap \left\{ (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{\infty} : A_0 \subseteq A, \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \text{ contáveis} \right\}$

Demonstração. Como $(G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^0 \leq G|_{\mathcal{L}_0}$, A_0-definível e $\left[G|_{\mathcal{L}_0} : (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^0 \right] < \omega$, então $\left[G : (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^0 \right] < \omega$ e

$$G_A^0 \subseteq \bigcap \left\{ (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^0 : A_0 \subseteq A, \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \text{ finitos} \right\}.$$

Analogamente temos que

$$G_A^{00} \subseteq \bigcap \left\{ (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{00} : A_0 \subseteq A, \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \text{ contáveis} \right\}$$

e

$$G_A^{\infty} \subseteq \bigcap \left\{ (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{\infty} : A_0 \subseteq A, \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L} \text{ contáveis} \right\}.$$

Resta mostrar a inclusão $\supseteq$ em cada caso.

i. Se $a \notin G_A^0$, então $a \notin H$, para algum $H \leq G$, A-definível de índice finito. Suponha $\mathcal{L}_0(A_0)$ uma sublinguagem de $\mathcal{L}$ onde H é A_0-definível, então $a \notin (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^0$.

ii. Seja $a \notin G_A^{00}$, pelo lema 4.11 existe uma família de conjuntos densos A-definíveis $\{Q_j : j < \overline{\kappa}\}$ tal que

$$G_A^{00} = \bigcap_{j < \overline{\kappa}} Q_j.$$

Além disso, podemos supor que $\{Q_j : j < \overline{\kappa}\}$ é tal que

$$\forall j < \overline{\kappa}\, \exists i < \overline{\kappa}\, Q_i^2 \subseteq Q_j.$$

De fato, seja Σ um conjunto de $\mathcal{L}(A)$-fórmulas tal que $G_A^{00} = \Sigma(G)$ e $Q_j = \varphi_j(G)$ onde $\varphi_j \in \Sigma$ e seja

$$B_{j,l} = \{x : \exists y \varphi_l(x) \wedge \varphi_l(y) \wedge \varphi_j(xy)\} \subseteq Q_l,$$

temos que, pela definição de $B_{l,j}$, $B_{l,j}^2 = (Q_l^2 \cap Q_j) \subseteq Q_j$. Note que $B_{l,j}$ é A-definível pois φ_l e φ_j são $\mathcal{L}(A)$-fórmulas e $Q_l \cap Q_j \subseteq B$, pois para $x \in Q_l \cap Q_j$ temos e tal que $\varphi_l(x) \wedge \varphi_l(e) \wedge \varphi_j(xe)$. Além disso, $B_{l,j}$ é um conjunto denso. Com efeito, se $x \in B_{l,j} \subseteq Q_l$, $x^{-1} \in Q_l$, então, para x^{-1} temos x tal que $\varphi_l(x^{-1}) \wedge \varphi_l(x) \wedge \varphi_j(xx^{-1})$. Isto é $x^{-1} \in B_{l,j}$ e $B_{l,j}^{-1} \subseteq B_{l,j}$, analogamente obtemos $B_{l,j} \subseteq B_{l,j}^{-1}$. Agora, pelo lema 4.8, basta mostrar que $\varphi_{B_{l,j}}$ é densa. De fato, se $\varphi_{B_{l,j}}$ não for densa, para cada $k \in \mathbb{N}$

existe uma sequência $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ tal que

$$\forall i < k \ \left(G \models \neg\varphi_{B_{l,j}}(a_i, a_k)\right).$$

Ou seja, para todo $y \in G$

$$G \models \neg\varphi_l(y) \vee \neg\varphi_l(a_i^{-1}a_k) \vee \neg\varphi_j(a_i^{-1}a_k y).$$

O primeiro e o segundo caso, não são possíveis pois Q_l é denso e no terceiro caso, com $y = e$ em particualr, temos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ tal que

$$\forall i < k \ \left(G \models \neg\varphi_{Q_j}(a_i, a_k)\right).$$

O contradiz o fato de que Q_j é denso. Portanto $\varphi_{B_{l,j}}$ é uma fórmula densa, e segue que $B_{l,j}$ é denso. Por outro lado, como $Q_l \cap Q_j \subseteq B_{l,j}$

$$G_A^{00} = \left(\bigcap_{\varphi_i \in \Sigma} Q_i\right) \cap B_{l,j}.$$

Ou seja, ao incluir os conjuntos densos e A-definíveis $B_{l,j}$ para cada l, j, obtemos uma família $\{\hat{Q}_j : j < \overline{\kappa}\}$ tal que

$$G_A^{00} = \bigcap_{j < \overline{\kappa}} \hat{Q}_j \quad e \ \forall j < \overline{\kappa} \ \exists i < \overline{\kappa}, \ \hat{Q}_i^2 \subseteq \hat{Q}_j.$$

Assim, podemos obter uma subfamilia $\{Q_{j_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $Q_{j_{n+1}}^2 \subseteq Q_{j_n}$ e $a \notin Q_{j_0}$. Seja $\mathcal{L}_0(A_0)$ uma linguagem contavel tal que, todos os conjuntos Q_{j_n} dados como acima estão definidos, então pelo teorema 4.10 temos que

$$(G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{00} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_{j_{n+1}}^2$$

e como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_{j_{n+1}}^2 \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_{j_n}$, temos que $a \notin (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{00}$.

iii. Como $G_A^{\infty} = \langle X_{\Theta_A} \rangle$ e pelo lema 4.9 $X_{\Theta_A} = \bigcap\{P : P \subseteq G, A\text{-definível e denso}\}$, então se $a \notin G_A^{\infty}$, temos que para cada natural n, existe um subconjunto denso P_n de G tal que $a \notin P_n^n$. Seja $\mathcal{L}_0(A_0)$ uma sublinguagem contavel de $\mathcal{L}$ tal que todos os P_n são A_0-definíveis, então $a \notin (G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{\infty}$ pois $(G|_{\mathcal{L}_0})_{A_0}^{\infty} = \left\langle X_{\Theta_{A_0}}|_{\mathcal{L}_0} \right\rangle$.

$\square$

Lema 4.13 *Se $P \subseteq G$ é m-genérico tal que $e \in P$ e $P = P^{-1}$, então P^{3m-2} é um subgrupo de G de índice finito.*

Demonstração. Sejam $g_1, \ldots, g_n \in G$, com $n \leq m$, tais que $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i P$ e

$$l : G \to \omega \cup \{\infty\}$$

a aplicação dada por, $l(g) = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists p_0, \ldots, p_{k-1} \in P\ (g = p_0 \cdots p_{k-1})\}$, temos que $l(G)$ é um intervalo inicial de $\mathbb{N}$ (ver apêndice A.6). De fato, sejam $x, y \in \mathbb{N}$, tais que $x \in l(G)$ e $y < x$, então $y + u = x$ para algum $u \in \mathbb{N}$ e como $x \in l(G)$, para algum $g \in G$, x é o menor natural tal que $g = p_0 \cdots p_{x-1}$.

Agora, seja $\overline{g} = p_0 \cdots p_{y-1}$, tal que $g = \overline{g} p_y \cdots p_{x-1}$, então se $l(\overline{g}) = r < y$, temos que $\overline{g} = \overline{p}_0 \cdots \overline{p}_{r-1}$ e $g = \overline{p}_0 \cdots \overline{p}_{r-1} \cdot p_y \cdots p_{x-1}$, de onde $l(g) \leq r + (x - y) < x$. O que é uma contradição e portanto $y = l(\overline{g}) \in l(G)$.

Note que $l(p) = 1$, para cada $p \in P$, e dado $g_i P$ com $g_i \neq e$, suponha $x, y \in g_i P$ com $x = g_i p$ e $y = g_i p'$, para algum $p, p' \in P$ e $l(x) = k < \infty$, então $g_i = xp^{-1}$. Daí $l(g_i) \leq k + 1$ e $l(y) = l(g_i p') \leq k + 2$. Ou seja, $l(g_i P) \subseteq \{k, k+1, k+2, \infty\}$ para algum natural k.

Seja $M = \max\{l(g) < \infty : g \in G\}$, dado que $e \in P$, temos que P^M é um subgrupo de G. De fato, se $a, b \in P^M$,

$$a = p_0 \cdots p_{s-1}, \quad b = p'_0 \cdots p'_{s-1} \text{ para algum } r, s \leq M$$

e pela definição de M, $l(a^{-1}b) \leq M$. Por outro lado, $g_i P \subseteq g_i P^M$ pois $e \in P$. Daí,

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_i P^M$$

e assim, $[G : P^M]$ é finito. Como P é m-genérico, $M \leq 3(m-1) = 3m-2$ e P^{3m-2} é um subgrupo de índice finito. □

Proposição 4.14

i. se G^∞ existe, então G^{00} existe;
ii. se G^{00} existe, então G^0 existe.

Demonstração.

i. Como $G^\infty_A \subseteq G^{00}_A$ para cada $A \subseteq G$ então

$$G^\infty \subseteq \bigcap_{f \in Aut(G)} G^{00}_{f(A)} = D,$$

e $D \subseteq G_A^{00} \subseteq G_{\emptyset}^{00}$. Note que se $H \leq G$, $\bigwedge$-definível sobre A, tal que $[G:H] < \overline{\kappa}$ e $f \in Aut(G)$, então $f(H) \leq G$, $\bigwedge$-definível sobre $f(A)$ e $[G:f(H)] < \overline{\kappa}$. Caso contrário, existe uma sequência infinita não limitada $(a_0, a_1, \ldots)$ tal que $a_i^{-1}a_j \notin f(H)$ para cada i, j. Ou seja, existe uma sequência infinita $(f^{-1}(a_0), f^{-1}(a_1), \ldots)$ tal que $f^{-1}(a_i^{-1})f^{-1}(a_j) \notin H$, o que é uma contradição.
por outro lado, se $H' \leq G$ é $\bigwedge$-definível sobre $f(A)$, para algum $f \in Aut(G)$ e $[G:H'] < \overline{\kappa}$, então $H' = f(f^{-1}(H'))$, onde $f^{-1}(H') \leq G$ é $\bigwedge$-definível sobre $f^{-1}(f(A)) = A$ e $[G:f^{-1}(H')] < \overline{\kappa}$. Isto é

$$\bigcap_{f \in Aut(G)} \{f(H) : H \leq G, \bigwedge\text{-definível sobre } A, [G:H] < \overline{\kappa}\}$$

e

$$\bigcap_{f \in Aut(G)} \{H' : H' \leq G, \bigwedge\text{-definível sobre } f(A), [G:H'] < \overline{\kappa}\}.$$

coincidem. Daí,

$$D = \bigcap_{f \in Aut(G)} \{f(H) : H \leq G, \bigwedge\text{-definível sobre } A, [G:H] < \overline{\kappa}\},$$

e assim, D é $\emptyset$-invariante.
Seja $\mathcal{H} = \{H_\alpha \ \bigwedge\text{-definível sobre A } : \alpha < 2^{|\mathcal{L}(A)|}\}$ e seja Φ_α o tipo sobre A que define H_α, então o seguinte tipo sobre A

$$\Psi_\alpha(y,A) = \{\exists z(\Phi_\alpha(y,z) \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi'} \varphi(z) \leftrightarrow \varphi(A)) : \Phi' \subseteq \mathcal{L}(\emptyset), \Phi' \text{ finito }\},$$

é realizado por $f(H_\alpha)$ para cada $f \in Aut(G)$. Daí, D é definido pelo tipo

$$\bigcup_{\alpha < 2^{|\mathcal{L}(A)|}} \Psi_\alpha(y,A),$$

e pelo lema 2.52, D é $\bigwedge$-definível sobre $\emptyset$. Assim $G_{\emptyset}^{00} \subseteq D$ e como $D \subseteq G_A^{00}$, temos que, $G_{\emptyset}^{00} = G_A^{00}$ para cada $A \subseteq G$.

ii. Seja $D' = \bigcap_{f \in Aut(G)} G^0_{f(A)}$, temos que $D' \subseteq G_A^0 \subseteq G_{\emptyset}^0$ e similarmente a (i), D' é $\bigwedge$-definível. Pelo lema 4.11

$$D = \bigcap_{i < |\mathcal{L}(\emptyset)|} P_i$$

onde P_i é denso e $\emptyset$-definível. Se $H \leq G$ é $f(A)$-definível de índice limitado, onde $f \in Aut(G)$, então existe $i < |\mathcal{L}(\emptyset)|$ tal que $P_i \subseteq H$ e P_i é n-denso para algum $n \in \mathbb{N}$. Pelo lema 4.8 parte iv, P_i é n-genérico e pelo lema 4.13, P^{3n-2} é um subgrupo de

H, $\emptyset$-definível de índice finito. Daí

$$G^0_\emptyset \subseteq \bigcap_{i<|\mathcal{L}(\emptyset)|} P_i^{3n-2} \subseteq \bigcap_{f\in Aut(G)} \{H : H \leq G, f(A)\text{-definível}, [G:H] < \omega\} = D'$$

□

Definição 4.15

i. *Uma fórmula $\phi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{L}$ tem propriedade de indepêndencia se existe uma sequência $(a_n)_{n<\omega}$ tal que para todo $I \subset \omega$, existe $\bar{b}$ tal que*

$$G \models \phi(\bar{b}, a_n) \Leftrightarrow n \in I.$$

Dizemos que uma fórmula $\phi(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{L}$ é dependente, ou tem NIP, se não tem propriedade de indepêndencia.

ii. *T é uma teoria com NIP se todas as fórmulas têm NIP.*

Exemplo 4.16 *A teoria da aritmética (ver [10]) não tem NIP. De fato, a fórmula*

$$\phi(x,y) := \exists u(x \cdot u = y)$$

tem propriedade de indepêndencia. Seja $A = \{p_1, \ldots, p_N\}$, um conjunto de primos distintos e $N \in \mathbb{N}$. Para cada $I \subseteq \mathbb{N}$, existe $\bar{b} = \prod_{i\in I} p_i$ tal que

$$\mathbb{N} \models \phi(p_i, \bar{b}) \Leftrightarrow i \in I.$$

Proposição 4.17 *Seja G um modelo monstro de uma teoria NIP, então para cada $m \in M$ e $\alpha < \bar{\kappa}$ existe $\lambda < \bar{\kappa}$ e uma família de subconjuntos $\{A_i : i < \lambda\}$ de G com $|A_i| < \alpha$ tais que, para cada $A \subseteq G$ com $|A| < \alpha$*

$$\bigcap_{i<\lambda} \left(X_{\underset{A_i}{\equiv}}\right)^m \subseteq \left(X^{m+4}_{\underset{A}{\equiv}}\right)$$

onde $X_{\underset{A}{\equiv}} = \{a^{-1}b : a,b \in G, tp(a/A) = tp(b/A)\}$.

Demonstração. Suponha por contradição que para algum $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha < \bar{k}$, existe $\lambda < \bar{\kappa}$ tal que para toda família de subconjuntos $\{A_i : i < \lambda\}$ de G, com $|A_i| < \alpha$,

$$\text{existe } A \subseteq G, \text{ com } |A| < \alpha \text{ tal que, } \in \left(\bigcap_{i<\lambda} X^m_{\underset{A}{\equiv}}\right) \setminus X^{m+4}_{\underset{A}{\equiv}} \neq \emptyset.$$

Ou seja, para algum $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha < \overline{\kappa}$, existe uma sequência $(c_i, A_i)_{i<\overline{\kappa}}$ tal que

i. $A_i \subseteq G$, $|A_i| < \alpha$;
ii. $c_i \in \left(\bigcap_{j<i} X^m_{\overline{\overline{\overline{A_j}}}}\right) \setminus \left(X_{\overline{\overline{\overline{A_i}}}}\right)^{m+4}$.

Definindo a relação

$$(c_i, A_i) \sim (c_j, A_j) \text{ se, e somente se, } \forall \varphi \in \mathcal{L}(\emptyset) \big(\varphi(c_i, A_i) \leftrightarrow \varphi(c_j, A_j)\big)$$

temos que existem no máximo $2^{|\mathcal{L}|}$ classes de equivalência. Logo, a aplicação que leva cada (c_i, A_i) na sua classe de equivalência é uma partição de $(A_i, c_i)_{i<\overline{\kappa}}$ e pelo teorema de Erdös-Rado 3.5, existe uma subsequência infinita de $(A_i, c_i)_{i<\omega}$ que pertence a mesma classe de equivalência. Ou seja, uma sequência indiscernível $(A_i, c_i)_{i<\omega}$ e como $X_{\overline{\overline{\overline{A_j}}}}$ é definido pelo conjunto de fórmulas

$$q_j = \{\exists a, b \in G\ (x = a^{-1}b \wedge \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi(a, A_j) \leftrightarrow \varphi(b, A_j)) : \Phi \subseteq \mathcal{L}, \Phi\text{-finito}\},$$

então $\bigcap_{j<i} X^m_{\overline{\overline{\overline{A_j}}}}$ é tipo definível sobre $\bigcup_{j<i} A_j$ e cada (c_i, A_i) na sequência indiscernível satisfaz (i) e (ii).

Agora, para um conjunto finito de fórmulas $\Phi(x, \bar{y}) = \{\phi_1(x, \bar{y}), \phi_2(x, \bar{y}), \ldots, \phi_k(x, \bar{y})\} \subset \mathcal{L}(\emptyset)$ e $\tilde{A}$ um pequeno conjunto indexado, definimos a relação

$$E_{\Phi/\tilde{A}}(x, y) \text{ se, e somente se } G \models \bigwedge_{i=1}^{k} (\varphi_i(x, \tilde{A}) \leftrightarrow \varphi_i(y, \tilde{A})).$$

Logo $E_{\Phi/\tilde{A}}$ é definível e $X^m_{E_{\Phi/\tilde{A}}}$, com $m \in \mathbb{N}$ também o é

$$X^m_{E_{\Phi/\tilde{A}}} = \{c \in G : \exists x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m \in G(c = x_1^{-1} y_1 \cdots x_m^{-1} y_m \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} E_{\Phi/\tilde{A}}(x_j, y_j))\}.$$

Note que

a) $\overline{\overline{\overline{A}}} = E_H$ com $H = Aut(G/A)$ como no lema 3.17 e

$$\overline{\overline{\overline{A}}} := \{(a, b) : tp(a/A) = tp(b/A)\} = \bigcap_{\Phi \subseteq \mathcal{L}(\emptyset), \Phi\text{-finito}} E_{\Phi/A};$$

b)

$$
\begin{aligned}
X^r_{\overline{\overline{A}}} &= \{a_1^{-1}b_1a_2^{-1}b_2\cdots a_r^{-1}b_r \in G : \bigwedge_{i=1}^{r} tp(a_i/A) = tp(b_i/A)\}\\
&= \bigcap_{\varphi\in\mathcal{L}(\emptyset)} \{a_1^{-1}b_1a_2^{-1}b_2\cdots a_r^{-1}b_r \in G : \bigwedge_{i=1}^{r} E_{\Phi/A}(a_i,b_i)\}\\
&= \bigcap_{\varphi\in\mathcal{L}(\emptyset)} X^r_{E_{\Phi/A}};
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
X^g_{\overline{\overline{A}}} &= \{(a^{-1}b)^g : g \in G \wedge tp(a/A) = tp(b/A)\}\\
&= \bigcap_{\Phi\subseteq\mathcal{L}(\emptyset),\Phi\text{-finito}} \{(a^{-1}b)^g : g \in G \wedge E_{\Phi/A}(a,b)\}\\
&= \bigcap_{\Phi\subseteq\mathcal{L}(\emptyset),\Phi\text{-finito}} X^G_{E_{\Phi/A}}.
\end{aligned}
$$

Seja Γ_i^{m+4} o tipo sobre A_i, dado por

$$\{\varphi(x,A_i) : \neg(\exists x_1,y_1,\ldots,x_{m+4},y_{m+4} \in G(x = x_1^{-1}y_1\cdots x_{m+4}^{-1}y_{m+4} \wedge \bigwedge_{j=1}^{m+4} \varphi(x_j,A_i) \leftrightarrow \varphi(y_j,A_i))\},$$

como $c_i \notin X^{m+4}_{\overline{\overline{A_i}}}$ para cada $i < \omega$, temos que Γ_i^{m+4} é satisfatível e pelo Teorema de Compacidade 2.36 existe um subconjunto finito $\hat{\Phi}$ de Γ_i^{m+4} tal que $c_i \notin X^{m+4}_{E_{\hat{\Phi}}/A_i}$ e, como $(c_i,A_i)_{i<\omega}$ é insdiscernível, $\hat{\Phi}$ independe de (c_i,A_i).

Assim, existem conjuntos finitos de fórmulas $\hat{\Phi},\Phi'$ tais que para cada $i < \omega$

iii. $c_i \notin X^{m+4}_{E_{\hat{\Phi}/A_i}}$,

iv. $\left(X_{E_{\Phi'/A}}\right)^G \subseteq X^2_{E_{\hat{\Phi}/A}}$.

Agora, sejam $I = (i_1,i_2,\ldots,i_n)$ uma sequência finita crescente de elementos distintos dois a dois de ω

$c_{I,0} = c_{2i_1}\cdot c_{2i_2}\cdots c_{2i_n}$, $\quad c_{I,1} = c_{2i_1+1}\cdot c_{2i_2+1}\cdots c_{2i_n+1}$ e $\varphi(x,\overline{y})$ uma fórmula tal que $G \models \varphi(c_{I,0},A_2)$. Podemos ver φ como um fórmula nas variáveis $x_1,\overline{y_1},x_2,\overline{y_2},\ldots,x_n,\overline{y_n},x_{n+1},\overline{y_{n+1}}$ da seguinte maneira

$$\overline{\varphi}(x_1,\overline{y_1},x_2,\overline{y_2},\ldots,x_n,\overline{y_n},x_{n+1},\overline{y_{n+1}}) := \varphi(x_1\cdots x_n,\overline{y_{n+1}}).$$

Note que se $j \neq I$, podemos considerar $\varphi(c_{I,0},A_{2j})$ e $\varphi(c_{I,1},A_{2j})$ como fórmulas com parâmetros em A_{2j} e temos que

$$G \models \big(\varphi(c_{I,0},A_{2j}) \leftrightarrow \varphi(c_{I,1},A_{2j})\big)$$

pois $(c_i,A_i)_{i<\omega}$ é indiscernível. Ou seja, se $j \notin I$, então $c_{I,0}$ e $c_{I,1}$ tem o mesmo tipo sobre A_{2j} e $c_{I,1}c_{I,0}^{-1} \in X_{\underset{A_{2j}}{\equiv}}$, em particular $c_{I,1}c_{I,0}^{-1} \in X_{E_{\Phi'/A_{2j}}}$. Equivalentemente, se $j \notin I$, então $G \models \psi'(A_2, c_{I,1}c_{I,0}^{-1})$, onde

$$\psi'(A_{2j}, c_{I,1}c_{I,0}^{-1}) := \bigwedge_{\varphi\in\Phi'} \big(\varphi(c_{I,0},A_{2j}) \leftrightarrow \varphi(c_{I,1},A_{2j})\big).$$

Além disso, se $j \in I$, então $G \models \neg\psi'(A_2, c_{I,0}c_{I,1}^{-1})$. De fato, sejam $I_1 = \{i_1^1,\ldots,i_n^1\}$, $I_2 = \{i_1^2,\ldots,i_n^2\}$, $I = \{i_1^1,\ldots,i_n^1, j, i_1^2,\ldots,i_n^2\}$ e suponha por contradição que $j \in I$, $c_{I,0}c_{I,1}^{-1} \in X_{E_{\Phi'/A_{2j}}}$, então

$$\begin{aligned}
c_{I,1}\cdot c_{I,0}^{-1} &= \left(c_{I_1,1}\cdot c_{2j+1}\cdot c_{I_2,1}\right)\left(c_{I_1,0}\cdot c_{2j}\cdot c_{I_2,0}\right)^{-1}\\
c_{I,1}\cdot c_{I,0}^{-1} &= c_{I_1,1}\cdot c_{2j+1}\cdot c_{I_2,1}c_{I_2,0}^{-1}\cdot c_{2j}^{-1}\cdot c_{I_1,0}^{-1}\\
c_{I,1}\cdot c_{I,0}^{-1}\cdot c_{I_1,0}\cdot c_{2j} &= c_{I_1,1}\cdot c_{2j+1}\cdot c_{I_2,1}\cdot c_{I_2,0}^{-1}\\
c_{2j} &= c_{I_1,0}^{-1}\cdot c_{I,0}\cdot c_{I,1}^{-1}\cdot c_{I_1,1}\cdot c_{2j+1}\cdot (c_{I_2,1}\cdot c_{I_2,0}^{-1})\\
c_{2j} &= \underbrace{[c_{I_1,0}^{-1}(c_{I,0}\cdot c_{I,1}^{-1})c_{I_1,0}]}_{1}\cdot\underbrace{(c_{I_1,0}^{-1}\cdot c_{I_1,1})}_{2}\cdot c_{2j+1}\cdot\underbrace{(c_{I_2,1}\cdot c_{I_2,0}^{-1})}_{3}.
\end{aligned}$$

Como $j \notin I_1$ e $j \notin I_2$, as expressões 2 e 3 pertencem a $X_{\underset{A_{2j}}{\equiv}} \subset X_{E_{\Phi/A_2}}$. A expressão 1 pertence a $\left(X_{E_{\Phi'/A}}\right)^G \subseteq X^2_{E_{\hat{\Phi}/A}}$ pois $c_{I,1}\cdot c_{I,0}^{-1} \in X_{E_{\Phi'/A_2}}$ e por (ii) temos que $c_{2j} \in X^m_{\underset{A_{2j}}{\equiv}}$. Daí

$$c_{2j} \in \left(X_{E_{\Phi'/A}}\right)^G \cdot X^{m+2}_{E_{\Phi'/A}} \subseteq X^{m+4}_{E_{\Phi'/A}},$$

o que contradiz (iii). Portanto, existe $\psi'(\bar{x},\bar{y})$ e elementos $\{A_{2j}, c_I : j < \omega, I \subset \omega\}$, com $c_I = c_{I,1}c_{I,0}^{-1}$ tais que

$$G \models \neg\psi'(A_{2j}, c_{I,1}c_{I,0}^{-1}) \text{ se, e somente se } j \in I$$

o que não é possível numa teoria com NIP. □

Teorema 4.18 *Se G é um modelo monstro de uma teoria NIP, então G^∞ existe.*

Demonstração. Seja $B \subseteq G$ um conjunto pequeno de parâmetros,

$$B' = B \cup \{y_i, i < |\mathcal{L}(B)| : \forall i \neq j, \neg E_{L_B}(j_i, j_j)\},$$

e $\alpha = |B'|^+ \leq (2^{|B|})^+$. Ou seja, B' é a união de B com um conjunto de representantes das classes da relação de Lascar sobre B em G.

Pela proposição 4.17, para cada natural m, e $\alpha < \overline{\kappa}$, existe $\lambda_m < \overline{\kappa}$ e uma família de conjuntos $\{A_i : i < \lambda_m\}$, onde $A_i \subseteq G$, $|A_i| < \alpha$, tais que

$$\text{para cada } A \subseteq G \text{ com } |A| < \alpha, \bigcap_{i<\lambda} \left(X_{\underset{A_i}{\equiv}}\right)^m \subseteq \left(X_{\underset{A}{\equiv}}\right)^{m+4} \tag{4-1}$$

Como $cof(\overline{\kappa}) > \omega$, para cada função $f : \omega \to \overline{\kappa}$, existe $\xi < \overline{\kappa}$ tal que para todo $\delta < \omega$, $f(\delta) < \xi$. Ou seja $\lambda = \sum_{m<\omega} \lambda_m < \overline{\kappa}$ e obtemos a família $\mathcal{A} = \{A_i : i < \lambda\}$ que satisfaz (4-1). Note que se $tp(a/(A_1 \cup A_2)) = tp(b/(A_1 \cup A_2))$, então $tp(a/A_1) = tp(b/A_1)$ e $tp(a/A_2) = tp(b/A_2)$ pois $\mathcal{L}(A_1), \mathcal{L}(A_2) \subseteq \mathcal{L}(A_1 \cup A_2)$. Ou seja $\mathcal{A}$ é uma família fechada para uniões finitas.

Definimos

$$S_m = \bigcap_{i<\lambda} \left(X_{\underset{A_i}{\equiv}}\right)^m, \quad T_m = \bigcap_{A \subset G, |A| < \alpha} \left(X_{\underset{A}{\equiv}}\right)^m,$$

e para cada natural m temos que

a) $T_m \subseteq S_m \subseteq T_{m+4}$,
b) $S_m = (S_1)^m$, $T_m = (T_1)^m$,
c) $T_1 \subseteq X_{\underset{B'}{\equiv}} \subseteq X_{L_B} = \{a^{-1}b : E_{L_B}(a,b)\}$,
d) $X_{\Theta_{\hat{A}}} \subseteq S_1$, onde $\hat{A} = \bigcup_{i<\lambda} A_i$.

De fato

a) $T_m \subseteq S_m$ pois $\{A_i : i < \lambda\} \subseteq \{A \subseteq G, |A| < \alpha\}$ e pela proposição 4.17

$$S_m \subseteq \bigcap_{A \subset G, |A| < \alpha} \left(X_{\underset{A}{\equiv}}\right)^{m+4} = T_{m+4}.$$

b) Como $\mathcal{A}$ é fechado por uniões finitas, pelo Teorema de Compacidade 2.36, temos que $S_m = (S_1)^m$, $T_m = (T_1)^m$.
c) se $x \in T_1$, $x \in X_{\underset{A}{\equiv}}$ para cada $A \subseteq G$, $|A| < \alpha$, em particular $x = a^{-1}b$ tais que $tp(a/B') = tp(b/B')$. Ou seja, $T_1 \subseteq X_{\underset{B'}{\equiv}}$. Agora, se $a^{-1}b \in X_{\underset{B'}{\equiv}}$, existe $f \in Aut(G/B')$ tal que $f(a) = b$. Note que se y é um representante de uma classe de E_{L_B}, então

$f(y) = y$ e se $E_{L_B}(y,z)$, existe $g \in Aut f_{L_B}$ tal que $g(y) = z$. Dai

$$f(z) = (f \circ g \circ f^{-1})(f(y)) = (f \circ g \circ f^{-1})(y),$$

onde $f \circ g \circ f^{-1} Aut f_{L_B}$ pois $Aut f_{L_B} \lhd Aut(G/B)$. Ou seja, $E_{L_B}(y, f(z))$. Isto é, f preserva as classes de E_{L_B} e temos que $E_{L_B}(a,b)$ pois $f(a) = b$.

d) se $a^{-1}b \in X_{\Theta_{\hat{A}}}$, então pelo lema 3.10, a,b pertencem a uma sequência indiscernível sobre $\hat{A}$ e temos que $tp(a/A_i) = tp(b/A_i)$ para cada $A_i \subseteq \hat{A}$. Ou seja $a^{-1}b \in \bigcap_{i<\lambda} X_{\underset{A_i}{\equiv}}$.

Por a) temos que $\bigcup_{m<\omega} S_m = \bigcup_{m<\omega} T_m$ e podemos definir $H = \bigcup_{m<\omega} S_m = \bigcup_{m<\omega} T_m$. Note que se $c \in X_{\underset{A}{\equiv}}$ para algum $A \subseteq G$, então $c^{-1} \in X_{\underset{A}{\equiv}}$. Daí se $c \in H$, $c \in S_m$ para algum $m < \omega$ e $c^{-1} \in S_m$. Além disso, se $a,b \in H$, por b), temos que $ab \in H$. Logo H é um subgrupo $\emptyset$-invariante de G pois cada T_m é $\emptyset$-invariante. Por c) temos que

$$H \subseteq \bigcup_{m<\omega} X_{L_B}^m \subseteq < X_{L_B} >= G_B^{\infty} \subseteq G_{\emptyset}^{\infty}$$

(ver 4.3) e de d), temos que

$$G_{\hat{A}}^{\infty} = \langle X_{\Theta_A} \rangle \subseteq S_m \subseteq H,$$

de onde H tem índice limitado. Como $G_{\emptyset}^{\infty}$ é o menor subgrupo $\emptyset$-invariante de índice limitado, $G_{\emptyset}^{\infty} \subseteq H$. Portanto $G_B^{\infty} = G_{\emptyset}^{\infty}$ e como B é um conjunto pequeno de parâmetros arbitrário, conluímos que G^{∞} existe.

□

Referências Bibliográficas

[1] BALDWIN, J. T.; SAXL, J. **Logical stability in group theory**. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 21(3):267–276, 005 1976.

[2] CASANOVAS, E. **Simple theories and hyperimaginaries**, volume 39. Cambridge University Press, 2011.

[3] CASANOVAS, E. **Lascar strong types and forking in nip theories**. *Preprint, March*, 2014.

[4] CHANG C.C., KEISLER H.J., T. A. **Model Theory**. 3 edition edition, 1990.

[5] DI PRISCO, C. **Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas**. Col. CLE. UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciência, 1997.

[6] DUGUNDJI, J. **Topology**. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., 1st edition, 1966.

[7] ELON, L. **Curso de analise vol. 2**. *Projeto Euclides IMPA*, 2009.

[8] GISMATULLIN, J. **Model theoretic connected components of groups**. *Israel Journal of Mathematics*, 184(1):251, 2011.

[9] GISMATULLIN, J.; NEWELSKI, L. **G-compactness and groups**. *Arch. Math. Logic*, 47(5):479–501, 2008.

[10] H.-D. EBBINGHAUS, J. FLUM, W. T. **Mathematical Logic**. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2nd edition, 1994.

[11] HERSTEIN, I. N. **Álgebra moderna**. Número 512 H569a. México, MX: Trillas, 1988.

[12] HODGES, W. **A shorter model theory**. Cambridge University Press, 1997.

[13] HRUSHOVSKI, E.; PETERZIL, Y.; PILLAY, A. **Groups, measures, and the nip**. *Journal of the American Mathematical Society*, 21(2):563–596, 2008.

[14] MARKER, D. **Model Theory An Introduction**. Graduate Texts in Mathematics 217. Springer, 2002.

[15] MARKER, D. **Introduction to model theory**. *Model theory, algebra, and geometry*, 39:15–35, 2000.

[16] PILLAY, A. **Type-definability, compact lie groups, and o-minimality**. *Journal of Mathematical Logic*, 4(02):147–162, 2004.

[17] POIZAT, B. **A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic**. Universitext. Springer, 1 edition, 2000.

[18] SAN MARTIN, L. A. **Grupos de lie**. 2015.

[19] SHELAH, S. **Stability, the f.c.p., and superstability; model theoretic properties of formulas in first order theory**. *Annals of Mathematical Logic*, 3(3):271 – 362, 1971.

[20] SHELAH, S. **Definable groups for dependent and 2-dependent theories**. *arXiv preprint math/0703045*, 2007.

[21] SHELAH, S. **Minimal bounded index subgroup for dependent theories**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(3):1087–1091, 2008.

[22] TENT, K.; ZIEGLER, M. **A course in model theory**, volume 40. Cambridge University Press, 2012.

[23] ZIEGLER, M. **Introduction to the lascar group**. *London Math. Soc. Lecture Note Ser*, 291:279–298, 2002.

Apêndice A

Ordinais e Cardinais

Definição A.1 *Uma relação binária* $\leq$ *em um cojunto* A *é dita de ordem parcial se*

- $\forall x \in A(x \leq x)$.

- $\forall x \forall y \in A((x \leq y) \wedge (y \leq x) \to y = x)$.

- $\forall x \forall y \forall z \in A(((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \to x \leq z)$.

Dizemos que $<$ *é uma relação de ordem parcial estrita se*

- $\forall x \in A \neg(x < x)$.

- $\forall x \forall y \in A(x < y) \to \neg(y < x)$.

Definição A.2 *Seja* A *um conjunto e* $<$ *uma relação de ordem parcial estrita, dizemos que* $(A, <)$ *é uma ordem linear ou total se*

$$\forall x \forall y \in A(x < y \vee x = y \vee y < x).$$

Se $(A, <)$ é uma ordem parcial e $C \subseteq A$, C é dito cadeia em A se é ordenado totalmente por $<$.

Definição A.3 *Seja* $(A, <)$ *uma ordem parcial,* $x \in A$ *é um elemento mínimo (máximo) de* $B \subseteq A$ *se* $x \in B$ *e não existe nenhum* $y \in B$, $y \neq x$ *tal que* $y < x$ $(x < y)$.

Definição A.4 *Seja* $<$ *uma relação de ordem em um conjunto* A, $<$ *é uma boa ordenação se para cada subconjunto não vazio* B, *existe um elemento mínimo* $x \in B$.

Teorema A.5 *(Principio da boa ordenação).*
Seja A *um subconjunto, então existe uma ordenação de* A.

Definição A.6 *Um intervalo inicial de um conjunto bem ordenado $(A,<)$ é um subconjunto $B \subseteq A$ tal que:*

$$\forall x \forall y (x \in B \wedge y < x) \rightarrow y \in B.$$

Definição A.7 *Um conjuto α é um ordinal se a relação $\in$ é uma boa ordenação e sempre que $x \in \alpha$ e $y \in x$, então $y \in \alpha$.*

A última condição é conhecida como *transitividade* de α.
Como nos ordinais $\in$ é uma boa ordenação, denotamos $\alpha \in \beta$ como $\alpha < \beta$ para α, β ordinais.
Notemos que cada ordinal α é o conjunto dos ordinais β tais que $\beta < \alpha$.

Propriedades dos Ordinais

.

- Todo intervalo inicial de um ordinal é um ordinal.

- Seja α um ordinal. Os segmentos iniciais de α são α e os elementos de α.

- $\emptyset \in \alpha$ para todo ordinal α. Ou seja $\emptyset$ é o menor ordinal.

- Para todo ordinal α se tem $\alpha \notin \alpha$.

- Dados α e β ordinais, temos que ocorre somente uma das seguintes condições $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.

- Se α é um ordinal $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ é também um ordinal e é o menor ordinal maior que α. β é denotado por α' e é chamado o sucessor de α.

- Se C é um conjunto de ordinais, então α dado por

  $$\delta = \bigcup_{\alpha \in C} \alpha$$

  é o menor ordinal tal que $\alpha < \delta$ para todo $\alpha \in C$.

Os números naturais são um intervalo inicial dos ordinais. De fato, $0 = \emptyset$ é o menor ordinal, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,.... Em geral $n+1 = n'$ e $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. O primeriro ordinal infinito é $\omega = \{0, 1, \ldots\}$.

Definição A.8 *Um ordinal α é chamado sucessor ordinal se existe um ordinal β tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Se $\alpha \neq 0$ e não é sucessor ordinal, dizemos que é um ordinal limite.*

Definição A.9 *Seam $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ conjuntos ordenados*

i. A e B são equipotentes se, existe uma bijeção entre A e B.

ii. A e B isomorfos se existe uma bijeção $f : A \to B$ tal que

$$x \leq_A y \text{ se e somente se } f(x) \leq_B f(y)$$

Teorema A.10 *Para cada conjunto bem ordenado $(A, <)$, existe um único isomorfismo de $(A, <)$ sobre um ordinal α. Ou seja, existe $f : A \to \alpha$ tal que $x < y \Leftrightarrow f(x) \in f(y)$.*

Teorema A.11 *(Indução transfinita) Seja C uma coleção de ordinais tais que*

i) $0 \in C$;
ii) Se $\alpha \in C$, então $\alpha' \in C$;
iii) Se α é ordinal limite e para todo $\beta < \alpha$ $\beta \in C$, então $\alpha \in C$.

Então C é a coleção de todos os ordinais.

Aritmética de Ordinais

Seja $X = (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ com α e β ordinais, definimos $\alpha + \beta$ como a ordem lexicográfica em X. Isto é, a ordem que se obtem colocando β depois de α.
O produto $\alpha \cdot \beta$ é definido como o conjunto $\beta \times \alpha$ com a ordem lexicográfica.
É importante notar que a soma e o produto de ordinais, não são operções comutativas.

$$\begin{aligned}
\omega \cdot 2 =& \{(0,0),(0,1),(0,2),\ldots,(0,n),\ldots,(1,o),(1,1),\ldots\} \\
=& \{\{0\} \times \omega\} \cup \{\{1\} \times \omega\} \\
=& \omega + \omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\omega =& \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),\ldots\} \\
=& \omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 + \omega =& \{\{0\} \times \{0\}\} \cup \{\{1\} \times \omega\} \\
=& \{(0,0),(1,0),(1,1),\ldots\} \\
=& \omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega + 1 =& \{\{0\} \times \omega\} \cup \{\{1\} \times \{0\}\} \\
=& \{(0,0),(0,1),\ldots,(1,0)\}
\end{aligned}$$

Na ordem lexicográfica o elemento $(1,0)$ é maior que quaisquer outro $c \in \omega$, daí $(1,0) \notin \omega$ e $1+\omega \neq \omega$.
Temos a seguinte ordem, $\omega, \omega+1, \ldots, \sup\{\omega+n : n < \omega\} = \omega+\omega = \omega_2$, $\omega_2+1, \ldots$

Lema A.12 *Dados* α, β, γ *ordinais, se tem*

i. $\alpha' = \alpha + 1$.
ii. $(\alpha+\beta)' = \alpha + \beta'$.
iii. $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.
iv. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.
v. $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\gamma$.
vi. *Se* $\beta = \sup\limits_{\gamma\in C} \gamma$, *então* $\alpha+\beta = \sup\limits_{\gamma\in C} \alpha+\gamma$

Definimos α^β inductivamente como segue

i. $\alpha^0 = 1$.
ii. $\alpha^{\beta'} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
iii. Se β é um ordinal limite, então $\alpha^\beta = \{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\} = \cup_{\gamma<\beta}\alpha^\gamma$

Cardinais

Seja A um subconjunto, existe uma boa ordenação para A (A.5) e um único ordinal α tal que $(A,<)$ é isomorfo a α. $|A|$ denota o menor ordinal α tal que existe uma boa ordenação de A isomorfo a α.

Definição A.13 *Um ordinal* α *é um cardinal se* $|\alpha| = \alpha$.

$\omega_1 = \{\alpha : \alpha$ é um ordinal numerável $\}$ é o primeiro ordinal não numerável e $|\omega_1| = \omega_1$.
Dado um ordinal α definimos α^+ como sendo $\alpha^+ = \{\beta : \beta$ é equipotente com algum subconjunto de $\alpha\}$ Denotamos os cardinais por $\aleph$ e definimos recursivamente

i. $\aleph_0 = \omega$;
ii. $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$;
iii. Se α é um ordinal limite, então $\aleph_\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha} \omega_\beta$.

Dizemos que $\aleph_{\alpha+1}$ é o cardinal sucessor de $\aleph_\alpha$ e se α é um ordinal limite, $\aleph_\alpha$ é chamado cardinal limite.

Teorema A.14 *Dado um ordinal* α, *existe um cardinal maior que* α.

Definição A.15 *A cofinalidade de um ordinal limite* $\alpha > \omega$, *denotada por* $cof(\alpha)$ *é o menor cardinal* λ *tal que existe uma função*

$$f : \lambda \to \alpha$$

tal que

$$\forall \xi < \alpha \exists \delta < \lambda (f(\delta) \geq \xi).$$

Note que, se α é um ordinal sucessor, $cof(\alpha) = 1$.

Definição A.16 *Um cardinal infinito κ é dito regular se $\kappa = cof(\kappa)$. Caso contrario κ é singular.*

Aritmética de Cardinais

Definição A.17 *Dados cardinais κ, λ e μ. Se existem conjuntos A e B tais que $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, então*

i. $\kappa + \lambda = \mu$ *sempre que* $\mu = |(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)|$;
ii. $\kappa \cdot \lambda = \mu$ *sempre que* $\mu = |A \times B|$;
iii. $\kappa^\lambda = \mu$ *sempre que* $\mu = |A^B|$, *onde* A^B *é o conjunto de funções de* A *em* B.

Lema A.18 *Sejam λ e κ cardinais, se κ ou λ é infinito, então*

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

Teorema A.19 *Sejam κ, λ e μ cardinais, então*

i. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;
ii. $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$, $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$;
iii. *Se* $\kappa \leq \lambda$ *então* $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$ *e* $\kappa \cdot \mu = \lambda \cdot \mu$;
iv. $\kappa(\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

Teorema A.20 *Sejam κ, λ e μ cardinais, então*

i. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$;
ii. $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$;
iii. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$;
iv. *se* $\kappa \geq \aleph_0$ *e* $2 \leq \lambda < \kappa$, *então* $2^\kappa = \lambda^\kappa = \kappa^\kappa$.

Para finalizar, enunciamos as igualdades conhecidas como a hipotese do continuo e a hipotese generalizada do continuo respectivamente

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$
$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

para todo ordinal α.