

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

KARINY DE ANDRADE DIRINO

**Um Estudo sobre Álgebras  
Associadas a alguns Grafos  
Orientados em Níveis**

Goiânia  
2017

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**     **Dissertação**     **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

Nome completo do autor: Kariny de Andrade Dirino

Título do trabalho: Um Estudo sobre Álgebras Associadas a alguns Grafos Orientados em Níveis

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  **SIM**     **NÃO**<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

  
Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 21 / 09 / 2017

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

KARINY DE ANDRADE DIRINO

# Um Estudo sobre Álgebras Associadas a alguns Grafos Orientados em Níveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Álgebra.

**Orientador:** Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva

Goiânia  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Dirino, Kariny de Andrade

Um Estudo sobre Álgebras Associadas a alguns Grafos Orientados em Níveis [manuscrito] / Kariny de Andrade Dirino. - 2017.

76 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Grafos orientados em níveis. 2. Álgebras associadas a grafos. 3. Série de Hilbert. 4. Grupo de automorfismos. 5. Grafo de Petersen. I. Silva, Jhone Caldeira, orient. II. Título.

CDU 512.5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.  
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 [www.ime.ufg.br](http://www.ime.ufg.br)

**ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE KARINY DE ANDRADE DIRINO** – Aos vinte e oito dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezessete (28/08/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Jhone Caldeira Silva - Orientador, Prof. Ricardo Nunes de Oliveira, Prof. Emerson Ferreira de Melo e Prof. José Eder Salvador de Vasconcelos, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **“Um estudo sobre álgebras associadas a alguns grafos orientados em níveis”**, em nível de Mestrado, área de concentração em Álgebra, de autoria de Kariny de Andrade Dirino, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Jhone Caldeira Silva, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida à autora da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu a examinanda, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Álgebra pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

  
Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva  
Presidente - IME/UFG

  
Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira  
Membro – IME/UFG

  
Prof. Dr. Emerson Ferreira de Melo  
Membro – MAT/UnB

  
Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos  
Membro - DAA2/IFG

*Dedico àquele que foi irmão, primo, pai, tio, melhor amigo e hoje é um anjo,  
Lindimar Ferreira dos Santos. O som do teu sorriso me encorajou no início deste  
desafio e o silêncio da tua lembrança me fortaleceu no fim. Te amo eternamente!*

---

## Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de seguir este árduo caminho, por me capacitar e fortalecer nos momentos de desânimo, pela saúde, pelas pessoas que estiveram ao meu lado, pelas portas que se abriram, pela luz em meu coração quando todo o resto parecia escuridão.

Agradeço à minha família e amigos por todo apoio e por terem confiado em mim.

Agradeço a todos os meus colegas de turma, em especial, ao Lucas Gabriel pela extrema sinceridade, à Laena pelo apoio e cobranças, ao Gregório por ser um amigo sempre à disposição, ao Nielson pelas palavras de ânimo e fé ao início que cada novo passo de nossa caminhada. Agradeço também ao meu grande amigo, com quem tenho uma dívida eterna, Mayk, socorrista de todas as horas. Não existem palavras que expressem minha gratidão a minhas amigas Bruna e Maria, elas foram minha família pelos últimos dois anos, sempre me ouviram, apoiaram, ajudaram, cobraram, incentivaram, aconselharam, torceram por mim. Foram elas que tornaram suportável todo o processo até aqui. (Vencemos mais essa etapa, juntas! Guardarei na lembrança todas as noites em que nossa casa se tornou pequena pra tanto papel, livro, ansiedade e xícaras de café às vésperas das provas, meu eterno carinho e torcida por vocês).

Agradeço a todos os professores do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, especialmente àqueles que contribuirão diretamente para minha formação, os professores Abiel, Aline, Edcarlos, Leandro, Marcos Leandro, Maurício, Paulo Henrique e Romildo. Agradeço também a todos os professores do Departamento de Matemática do IFG, principalmente ao professor José Eder (o culpado por tudo isso). Agradeço à banca examinadora pelas contribuições a este trabalho, professores Emerson e Ricardo.

Por último e mais importante, sou infinitamente grata a meu orientador, professor Jhone, exemplo de profissionalismo e humanidade. Levarei para a vida todas as experiências de nosso tempo de convivência, todas as palavras de apoio, incentivo, cobrança e fé. Grata por sua paciência e disposição.

---

## Resumo

---

Dirino, Kariny de Andrade . **Um Estudo sobre Álgebras Associadas a alguns Grafos Orientados em Níveis**. Goiânia, 2017. 76p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Dado um grafo orientado em níveis  $\Gamma$  podemos associar a ele uma álgebra, denotada por  $A(\Gamma)$ , cujos geradores são as arestas do grafo e as relações são definidas mediante: todos os caminhos com o mesmo vértice inicial e mesmo vértice final determinam fatorações distintas para o mesmo polinômio com coeficientes em um anel não comutativo. Exibimos um estudo sobre essas álgebras e suas principais propriedades, apresentando algumas classes de exemplos e tendo como foco central o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Petersen,  $\Gamma_{P_5}$ . Abordamos resultados sobre bases para álgebras do tipo  $A(\Gamma)$ , calculamos as suas séries de Hilbert e o grupo dos automorfismos dessas álgebras, determinamos os subgrafos induzidos pelo conjunto dos vértices fixados por cada  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$  e calculamos as funções geradoras do traço graduado, a fim de introduzirmos problemas relacionados à koszulidade.

### Palavras-chave:

Grafos orientados em níveis. Álgebras associadas a grafos. Série de Hilbert. Grupo de automorfismos. Grafo de Petersen. Koszulidade.

---

## Abstract

---

Dirino, Kariny de Andrade . **A Study on Algebras Associated with Some Layered Directed Graphs**. Goiânia, 2017. 76p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Considering a layered directed graphs  $\Gamma$  we may associate it to an algebra, denoted as  $A(\Gamma)$ , whose generators are the edges of the graph and the relations are defined through: every ways with the same initial vertex and the same final vertex determine different factorizations for the same polynomial with coefficients in a non-commutative ring. We present a study about these algebras and their main properties, presenting some classes of examples and having as central focus the Hasse graph of the partially ordered set of  $k$ -faces of Petersen graph,  $\Gamma_{P_5}$ . We discuss the results on basis for algebras of type  $A(\Gamma)$ , we calculate their Hilbert series and the automorphisms group of these algebras, we determine the subgraphs induced by the set of vertices fixed by each  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$  and we calculate the graded trace generating functions, in order to introduce problems related to Koszulity.

### keywords

Layered directed graphs. Algebras associated to graphs. Hilbert series. Automorphism group. Petersen graph. Koszulity.

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	8
Introdução	9
1 Grafos	13
1.1 Definições e Exemplos	13
1.2 O grafo de Hasse	17
1.3 O Grafo de Hasse associado ao Grafo de Petersen	22
2 Álgebras Associadas a Grafos	25
2.1 Espaço quociente e espaço graduado	25
2.2 Álgebras graduadas e álgebras filtradas	28
2.3 A álgebra tensorial	30
2.4 Álgebra quadrática e sua dual	32
2.5 A álgebra $A(\Gamma)$	34
2.6 Alguns exemplos da álgebra $A(\Gamma)$	38
3 As Séries de Hilbert de Álgebras $A(\Gamma)$	48
3.1 Série de Hilbert de $A(\Gamma)$	48
3.2 A Série de Hilbert de $A(\Gamma_{P_5})$	53
4 O grupo $Aut(A(\Gamma))$	55
4.1 A estrutura de $Aut(A(\Gamma))$	55
4.2 Representações de $Aut(A(\Gamma))$ sobre $A(\Gamma)$	57
4.3 Alguns exemplos de grupos $Aut(A(\Gamma))$	58
4.4 O grupo de automorfismos de $A(\Gamma_{P_5})$	59
4.5 Funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma_{P_5}))$ sobre $A(\Gamma_{P_5})$	62
5 A Álgebra $A(\Gamma)^\dagger$ e a Propriedade da Koszulidade	68
5.1 A álgebra graduada associada $gr(A(\Gamma))$	68
5.2 As álgebras $A(\Gamma)^\dagger$ e $A(\Gamma^\sigma)$	70
5.3 Representações de $Aut(A(\Gamma))$ sobre $A(\Gamma)^\dagger$	71
5.4 Álgebras Koszul e numericamente Koszul	71
Considerações Finais	74
Referências Bibliográficas	75

---

## Lista de Figuras

---

1	Grafo dos divisores à direita de um polinômio em variáveis não comutativas	10
2	Relações em $Q_n$	11
1.1	$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}\})$	13
1.2	$G(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{12, 14, 23, 24, 25, 34, 35\})$	14
1.3	$G'(\{2, 3, 4, 6\}, \{23, 24, 34\})$	14
1.4	Grafos isomorfos	15
1.5	Caminho $P^3$	15
1.6	Grafo orientado e em níveis	16
1.7	Sequência <i>down-up</i>	16
1.8	Grafos uniforme e não uniforme	17
1.9	Grafo de Hasse associado ao conjunto das partes de $A = \{1, 2, 3\}$	19
1.10	$\Gamma_{D_3}$ e $\Gamma_{D_n}$	20
1.11	$\Gamma_{\diamond}$	21
1.12	Grafo $L(2, q)$	22
1.13	Grafo de Petersen	23
1.14	Grafo de Petersen	23
1.15	Grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das $k$ -faces do Grafo de Petersen	24
2.1	Espaço Quociente	27
2.2	Grafo dos divisores à direita de um polinômio em variáveis não comutativas	35
2.3	Exemplo 2.23	36
2.4	Exemplo 2.25	37
2.5	Teorema 2.27	37
4.1	$\Gamma_{D_3}$	60
4.2	$\Gamma_{P_5}^{\sigma_1}, \Gamma_{P_5}^{\sigma_2}, \Gamma_{P_5}^{\sigma_3} = \Gamma_{P_5}^{\sigma_4}, \Gamma_{P_5}^{\sigma_5}$ e $\Gamma_{P_5}^{\sigma_6}$	64

---

## Introdução

---

Sejam  $P(t) = t^2 + a_1t + a_2$  um polinômio com coeficientes em um anel não comutativo,  $x_1$  e  $x_2$  suas raízes à direita com a diferença  $x_1 - x_2$  invertível e  $t$  uma variável central. Isto é,  $x_1t = tx_1$  e  $x_2t = tx_2$ . Temos,

$$x_1^2 + a_1x_1 + a_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_2^2 + a_1x_2 + a_2 = 0. \quad (0-1)$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 - x_2^2 + a_1(x_1 - x_2) \\ &= x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 - x_2^2 + a_1(x_1 - x_2) \\ &= x_1(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)x_2 + a_1(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

e, multiplicando por  $(x_1 - x_2)^{-1}$  à direita, temos

$$0 = x_1 + (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1} + a_1.$$

Logo,

$$a_1 = -x_1 - (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1} = -x_1 - x_{1,2},$$

onde  $x_{1,2} = (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1}$ .

Agora, substituindo  $x_{1,2}$  na primeira equação de (0-1), temos

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 - (x_1 + (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1})x_1 + a_2 \\ &= x_1^2 - x_1^2 - (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1}x_1 + a_2. \end{aligned}$$

Escrevendo  $a_2 = (x_1 - x_2)x_2(x_1 - x_2)^{-1}x_1 = x_{1,2}x_1$ , chegamos à seguinte fato-

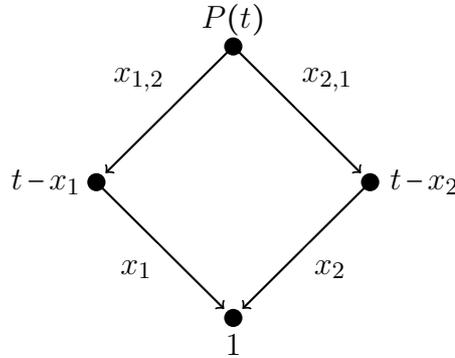
ração para o polinômio  $P(t)$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= t^2 + (-x_1 - x_{1,2})t + x_{1,2}x_1 = t^2 - x_1t - x_{1,2}t + x_{1,2}x_1 \\ &= (t - x_{1,2})t + (t - x_{1,2})(-x_1) \\ &= (t - x_{1,2})(t - x_1). \end{aligned}$$

Com um procedimento análogo, ou seja, subtraindo a primeira equação da segunda em (0-1), pode-se mostrar que  $P(t) = (t - x_{2,1})(t - x_2)$  com  $x_{2,1} = (x_1 - x_2)x_1(x_1 - x_2)^{-1}$ . Assim temos duas fatorações diferentes de  $P(t)$ . Essas duas fatorações implicam as seguintes identidades entre as pseudo raízes:

$$\begin{aligned} x_{1,2} + x_1 &= x_{2,1} + x_2, \\ x_{1,2}x_1 &= x_{2,1}x_2. \end{aligned} \tag{0-2}$$

Podemos representar essa situação por meio de um grafo onde os vértices correspondem aos divisores à direita do polinômio  $P(t)$  e suas arestas às raízes de  $(t - x_{1,2})(t - x_1) = (t - x_{2,1})(t - x_2)$ . A álgebra  $Q_2$  foi definida como um quociente da álgebra associativa livre com unidade tendo como geradores livres os elementos  $x_{1,2}, x_{2,1}, x_1, x_2$  satisfazendo as relações (0-2).



**Figura 1:** Grafo dos divisores à direita de um polinômio em variáveis não comutativas

Em [11] foram definidas as álgebras  $Q_n$  relacionadas à fatoração de polinômios em variáveis não comutativas (generalizando a construção de  $Q_2$  acima). Sejam  $R$  um anel associativo (não comutativo) com unidade e  $P(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$  um polinômio mônico em  $R[t]$ . Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$  raízes à direita de  $P(t)$ , isto é,  $x_i^n + a_1x_i^{n-1} + \dots + a_n = 0$ . Para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos que os elementos  $x_{A,i}$  definidos por pares  $(A, i)$ , em que  $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  e  $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus A$ , satisfazem as seguintes

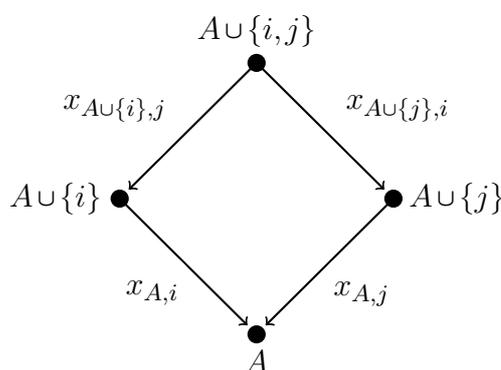
relações

$$\begin{aligned} x_{A \cup \{i,j\}} + x_{A,i} &= x_{A \cup \{j\},i} + x_{A,j} \\ x_{A \cup \{i,j\}} \cdot x_{A,i} &= x_{A \cup \{j\},i} \cdot x_{A,j} \end{aligned} \quad (0-3)$$

e

$$P(t) = (t - x_{A_{n-1},i_n})(t - x_{A_{n-2},i_{n-1}}) \cdots (t - x_{A_0,i_1}).$$

Assim, a álgebra  $Q_n$  é a álgebra gerada pelos elementos  $x_{A,i}$ , onde  $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  e  $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus A$  satisfazendo as relações (0-3). Tais relações podem ser representadas pelo grafo diamante a seguir.



**Figura 2:** Relações em  $Q_n$

Em [10], Gelfand, Retakh, Serconek e Wilson, introduziram uma nova classe de álgebras associadas a grafos orientados em níveis. Dado um grafo orientado em níveis  $\Gamma$ , escreveremos  $A(\Gamma)$  para indicar a álgebra a ele associada. A álgebra  $A(\Gamma)$  é gerada pelas arestas do grafo. As relações são definidas associando cada caminho em  $\Gamma$  a um polinômio com coeficientes na álgebra associativa livre sobre o conjunto de arestas e determinando quais caminhos distintos com mesmo início e mesmo fim representam a fatoração do mesmo polinômio em variáveis não comutativas.

As álgebras  $A(\Gamma)$  são quadráticas e admitem uma graduação em subespaços de dimensão finita. Tal fato nos permite calcular a Série de Hilbert dessas álgebras conforme apresentado em [14]. Além disso, cada automorfismo  $\sigma$  do grafo  $\Gamma$  determina o grafo  $\Gamma^\sigma$  (subgrafo de  $\Gamma$  obtido pelos vértices fixados por  $\sigma$ ) e um automorfismo da álgebra  $A(\Gamma)$ . Em [5], Duffy mostrou que, sob certas condições,  $Aut(A(\Gamma)) = K^* \times Aut(\Gamma)$ , em que  $Aut(A(\Gamma))$ ,  $Aut(\Gamma)$  e  $K$  denotam, o grupo dos automorfismos de  $A(\Gamma)$ , o grupo dos automorfismos de  $\Gamma$  e um corpo, respectivamente. E recentemente, em [15], Vasconcelos apresentou uma generalização para esse resultado, abrangendo uma classe consideravelmente maior de grafos.

Apresentaremos aqui um estudo a respeito das álgebras associadas a grafos

---

orientados em níveis, focando suas Séries de Hilbert, seus grupos de automorfismos, além de definir álgebras duais relacionadas e discutir questões sobre koszulidade. O foco central deste trabalho está na álgebra  $A(\Gamma_{P_5})$ , onde  $\Gamma_{P_5}$  representa o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Petersen.

No primeiro capítulo, apresentamos as definições e terminologias próprias da Teoria de Grafos e apresentamos a construção dos principais grafos referidos no decorrer dos próximos capítulos. O Capítulo 2 é dedicado aos conceitos algébricos, propriedades e construção das álgebras  $A(\Gamma)$  e apresentamos ainda resultados que nos permitem determinar uma base para  $A(\Gamma_{P_5})$ . No Capítulo 3 mostramos a expressão geral que nos permite calcular a Série de Hilbert das álgebras associadas a grafos e calculamos a série para  $A(\Gamma_{P_5})$ . Já no Capítulo 4 apresentamos os grupos de automorfismos de algumas álgebras  $A(\Gamma)$  e, como um resultado nosso, em particular o grupo de automorfismos de  $A(\Gamma_{P_5})$ . Além disso, apresentamos os subgrafos fixados e calculamos as funções geradoras do traço graduado de  $Aut(A(\Gamma))$  sobre  $A(\Gamma)$ , em especial, fazemos o mesmo no caso do grafo de Petersen, ou seja,  $Aut(A(\Gamma_{P_5}))$  sobre  $A(\Gamma_{P_5})$ . No Capítulo 5 definimos a álgebra graduada associada,  $gr(A(\Gamma))$ , sua dual,  $A(\Gamma)^\dagger$ , e as subálgebras  $A(\Gamma^\sigma)$  para  $\sigma \in Aut(\Gamma)$ . O estudo dessas álgebras é importante pois nos permite verificar a *propriedade da koszulidade*, o que pode tornar a teoria de representação dessas álgebras particularmente simples. Dessa forma, finalizamos com os resultados que nos permitem verificar se uma álgebra é ou não Koszul e alguns exemplos de álgebras do tipo  $A(\Gamma)$  que satisfazem tal propriedade.

---

# Grafos

---

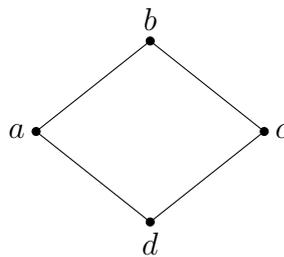
Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos da teoria de grafos pertinentes ao entendimento deste trabalho. Para mais detalhes veja [4].

## 1.1 Definições e Exemplos

**Definição 1.1** Um **grafo** é um par  $G = (V, E)$  de conjuntos tais que  $E \subseteq [V]^2$ , onde  $[V]^2$  é o conjunto de todos os subconjuntos de  $V$  com exatamente 2 elementos.

Dessa forma, os elementos de  $V$  são os *vértices* do grafo  $G$  e os elementos de  $E$  são suas *arestas*. Se  $u, v \in V$  e  $f = \{u, v\} \in E$ , dizemos que a aresta  $f$  incide em  $u$  e  $v$ . Vértices ligados por arestas são ditos *vértices adjacentes*.

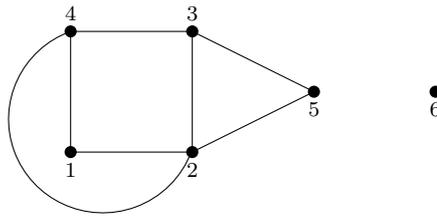
**Exemplo 1.2** A Figura 1.1 representa o grafo que possui  $V = \{a, b, c, d\}$ , e  $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}\}$  como os conjuntos de vértices e arestas, respectivamente.



**Figura 1.1:**  $G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}\})$

Quando não houver risco de confusão, representaremos a aresta  $f = \{u, v\}$  que liga os vértices  $u$  e  $v$  apenas por  $uv$ , como no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.3** O grafo apresentado na Figura 1.2 tem conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e conjunto de arestas  $E = \{12, 14, 23, 24, 25, 34, 35\}$ .

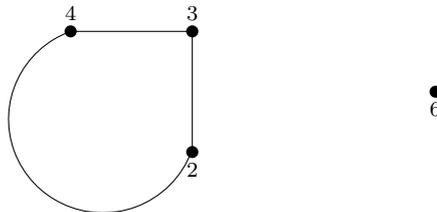


**Figura 1.2:**  $G(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{12, 14, 23, 24, 25, 34, 35\})$

**Definição 1.4** *Sejam  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  grafos. Se  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$  dizemos que  $G'$  é um **subgrafo** de  $G$  e escrevemos  $G' \subseteq G$ .*

Uma forma de obter subgrafos de um dado grafo  $G = (V, E)$  é tomar  $V' \subseteq V$  (qualquer) e  $E' = \{\{v, w\} \in E : v, w \in V'\}$ . O grafo  $G' = (V', E')$  é um subgrafo de  $G$ , chamado o *subgrafo de  $G$  induzido por  $V'$* .

**Exemplo 1.5** *Nos termos do Exemplo 1.3, o subgrafo de  $G$  induzido por  $V' = \{2, 3, 4, 6\}$ , é o grafo  $G' = (V', E')$ , onde  $E' = \{23, 24, 34\}$ , apresentado na Figura 1.3.*



**Figura 1.3:**  $G'(\{2, 3, 4, 6\}, \{23, 24, 34\})$

**Definição 1.6** *Sejam  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  grafos.*

- i. Uma função  $\sigma : V \rightarrow V'$  é um **homomorfismo** de  $G$  em  $G'$  se para cada par  $x, y \in V$  formando uma aresta em  $G$ , as imagens  $\sigma(x), \sigma(y) \in V'$  formam uma aresta em  $G'$ . Escrevemos  $\sigma : G \rightarrow G'$ .*
- ii. Se um homomorfismo de grafos  $\sigma$  é bijetor, dizemos que  $\sigma$  é um **isomorfismo** de grafos e que  $G$  e  $G'$  são isomorfos, denotamos por  $G \cong G'$ .*
- iii. Um isomorfismo de  $G$  em  $G$  é chamado um **automorfismo** de  $G$ . Denotamos por  $\text{Aut}(G)$  o grupo dos automorfismos do grafo  $G$ .*

**Exemplo 1.7** *Na Figura 1.4 a função  $\sigma : V \rightarrow V'$  dada por:  $\sigma(1) = a_1$ ,  $\sigma(2) = a_4$ ,  $\sigma(3) = a_2$ ,  $\sigma(4) = a_5$ ,  $\sigma(5) = a_3$ , é um isomorfismo de  $G$  em  $G'$ .*

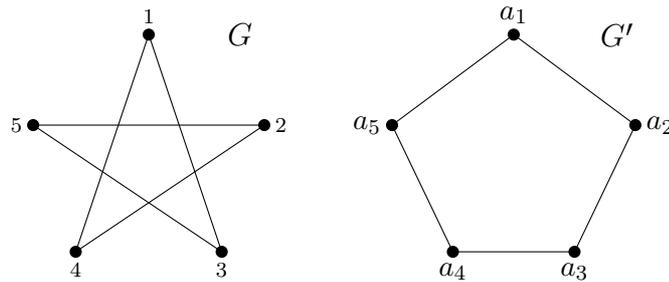


Figura 1.4: Grafos isomorfos

**Definição 1.8** Um grafo  $G = (V, E)$  é **orientado** se os elementos de  $E$  são pares ordenados. Nesse caso, usamos  $(v_1, v_2)$  para indicar que a aresta que incide nos vértices  $v_1$  e  $v_2$  é orientada com início em  $v_1$  e fim em  $v_2$ . Graficamente, utilizaremos setas para indicar a orientação das arestas.

**Definição 1.9** Um **caminho** é um grafo não vazio  $P = (V, E)$  com vértices  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  e arestas  $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ , onde os  $x_i$  são todos distintos. O número  $k$  de arestas em um caminho  $P$  é o seu **comprimento**, um caminho de comprimento  $k$  é denotado por  $P^k$ .

Dizemos que os vértices  $x_0$  e  $x_k$  são ligados por  $P$  e são os **fin**s do caminho. Os vértices  $x_1, \dots, x_{k-1}$  são **vértices internos** de  $P$ . Agora, considerando as funções  $t, h: E \rightarrow V$ , onde

$$t(e) = \text{vértice inicial de } e, \quad h(e) = \text{vértice final de } e,$$

e  $v, w \in V$ , definimos um **caminho de  $v$  a  $w$**  como sendo uma sequência de arestas  $\pi = e_1, \dots, e_m$  tal que  $t(e_1) = v$ ,  $h(e_m) = w$  e  $t(e_{i+1}) = h(e_i)$ . Nesse caso, escrevemos  $t(\pi) = v$ ,  $h(\pi) = w$  e denotamos por  $l(\pi)$  o comprimento de  $\pi$ . Escrevemos  $v > w$  se existe um caminho de  $v$  a  $w$ .

**Exemplo 1.10** Na Figura 1.5, apresentamos o caminho  $P^3$  com conjunto de vértices  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ .

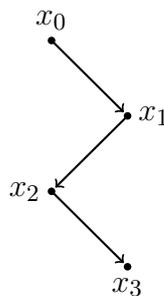


Figura 1.5: Caminho  $P^3$

**Definição 1.11** Dizemos que um grafo orientado  $G = (V, E)$  é um **grafo em níveis** se podemos escrever

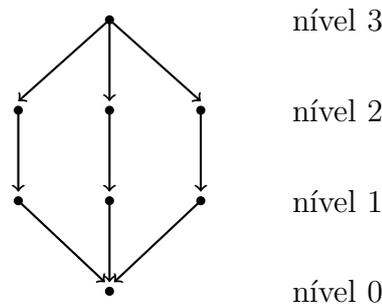
$$V = \bigcup_{i=0}^n V_i \quad e \quad E = \bigcup_{i=0}^n E_i$$

e para  $e \in E_i$  temos  $t(e) \in V_i$  e  $h(e) \in V_{i-1}$ , onde  $t, h: E \rightarrow V$

$t(e) :=$  vértice inicial de  $e$ ,  $h(e) :=$  vértice final de  $e$ .

Se  $v \in V_i$  ( $e \in E_i$ ) dizemos que o **nível** de  $v$  (de  $e$ ) é  $i$  e denotamos por  $|v| = i$  ( $|e| = i$ ).

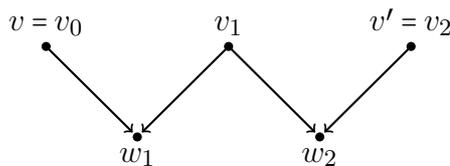
O grafo a seguir é um exemplo de grafo orientado e em níveis, onde os níveis 0 e 3 possuem um vértice apenas e os níveis 1 e 2 possuem 3 vértices cada.



**Figura 1.6:** Grafo orientado e em níveis

Sejam  $\Gamma$  um grafo orientado em níveis e  $v \in V_j, j \geq 2$ . Para  $1 \leq i \leq j$  defina  $S_i(v) = \{w \in V_{j-i} : v > w\}$ , ou seja,  $S_i(v)$  é o conjunto de vértices que estão conectados a  $v$  por um caminho de comprimento  $i$ . Particularmente,  $S_1(v) = \{w \in V_{|v|-1} : v > w\}$  é o conjunto de vértices adjacentes a  $v$ .

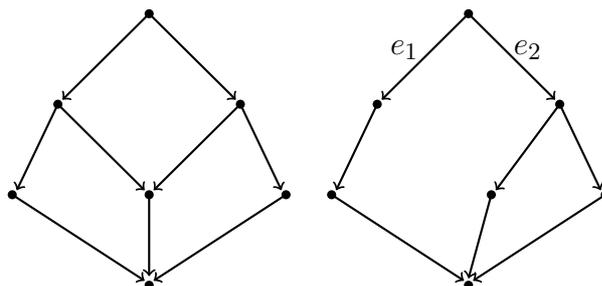
Dizemos que dois vértices  $v$  e  $v'$  no mesmo nível  $i > 0$  estão conectados por uma **sequência down-up** se existem vértices  $v = v_0, \dots, v_k = v' \in V_i$  e  $w_1, \dots, w_k \in V_{i-1}$  tais que  $v_{j-1} > w_j$  e  $v_j > w_j$  com  $j = 1, \dots, k$ . Veja a Figura 1.7:



**Figura 1.7:** Sequência down-up

**Definição 1.12** Um grafo em níveis  $G$  é dito **uniforme** se para qualquer par de arestas  $e, f \in E$  com  $t(e) = t(f)$  seus vértices finais  $h(e), h(f)$  estão conectados por uma sequência down-up  $v_0, \dots, v_k$  tal que  $t(e) > v_i, i = 0, \dots, k$ .

Na Figura 1.8 temos dois grafos: o primeiro uniforme, o segundo, não uniforme, pois as arestas  $e_1$  e  $e_2$  têm mesmo início, mas seus fins não estão conectados por uma sequência down-up.



**Figura 1.8:** Grafos uniforme e não uniforme

Temos que para cada  $v \in V$  existe um caminho  $\pi_v = \{e_i, \dots, e_m\}$ , chamado **caminho indicativo**, de  $v$  a  $\star$ , definido por  $e_1 = e_v, e_{i+1} = e_{h(e_i)}$ , para  $1 \leq i < m$ , e  $h(e_m) = \star$ . Quando  $\pi_v$  é o caminho indicativo de  $v$  a  $\star$ , escrevemos  $e(v, k)$  em vez de  $e(\pi_v, k)$ .

Observe que os grafos uniformes satisfazem a condição de que, dado qualquer vértice em  $G$ , quaisquer arestas distintas que partem deste vértice podem ser estendidas a caminhos que terminam em um mesmo vértice, essa propriedade é chamada **condição diamante**. Neste trabalho consideraremos grafos uniformes, orientados em níveis. Além disso, tomaremos grafos com um único vértice minimal, ou seja, apresenta um único vértice no menor nível, este vértice denotaremos por  $\star$ , ( $V_0 = \{\star\}$ ). Escreveremos  $V^+$  para indicar  $\bigcup_{i=1}^l V_i$ .

**Observação:** Nas próximas seções, bem como nos capítulos seguintes, denotaremos o grafo  $G = (V, E)$  por  $\Gamma$ .

## 1.2 O grafo de Hasse

Nesta seção construiremos o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Petersen. Primeiramente, definimos relação de ordem em um conjunto e reticulados, em seguida, mostramos que o grafo de Hasse satisfaz todas as propriedades que buscamos em um grafo,

**Definição 1.13** Uma relação binária  $\leq$  definida em um conjunto  $A$  é uma **ordem parcial** no conjunto  $A$  se as seguintes condições são satisfeitas:

- i.  $a \leq a$ ;
- ii.  $a \leq b$  e  $b \leq a$  implica  $b = a$ ;
- iii.  $a \leq b$  e  $b \leq c$  implica  $a \leq c$ .

Se, além disso, para todo  $a, b \in A$  tivermos

- v.  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ ,

dizemos que  $\leq$  é uma ordem total no conjunto  $A$ .

Um conjunto não vazio com uma relação de ordem parcial é chamado um conjunto parcialmente ordenado ou, um **poset**. Se a relação  $\leq$  é uma relação de ordem total, dizemos que o conjunto é um conjunto totalmente ordenado, ou simplesmente uma **cadeia**. Em um poset  $A$ , usamos a expressão  $a < b$  para representar  $a \leq b$  e  $a \neq b$ .

**Definição 1.14** Um conjunto não vazio  $L$  junto com duas operações binárias  $\vee$  e  $\wedge$  em  $L$  é um **reticulado** se satisfazem as seguintes propriedades:

- L1.  $x \vee y = y \vee x$ ,  $x \wedge y = y \wedge x$  (leis comutativas);
- L2.  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ,  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  (leis associativas);
- L3.  $x \vee x = x$ ,  $x \wedge x = x$  (leis idempotentes);
- L4.  $x \vee (x \wedge y) = x$ ,  $x \wedge (x \vee y) = x$  (leis de absorção).

Se além dessas  $(L, \vee, \wedge)$  satisfaz

- L5.  $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$  (lei distributiva)

o reticulado é dito **distributivo**.

**Exemplo 1.15** Sejam  $A$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{P}(A)$  o conjunto das partes de  $A$ , ou seja,  $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ . Para todos  $X_1, X_2, X_3 \subseteq \mathcal{P}(A)$ , temos:

$$\begin{aligned} X_1 \cup X_2 &= X_2 \cup X_1, & X_1 \cap X_2 &= X_2 \cap X_1; \\ X_1 \cup (X_2 \cap X_3) &= (X_1 \cup X_2) \cap X_3, & X_1 \cap (X_2 \cup X_3) &= (X_1 \cap X_2) \cup X_3; \\ X_1 \cup X_1 &= X_1, & X_1 \cap X_1 &= X_1; \\ X_1 \cup (X_1 \cap X_2) &= X_1, & X_1 \cap (X_1 \cup X_2) &= X_1. \end{aligned}$$

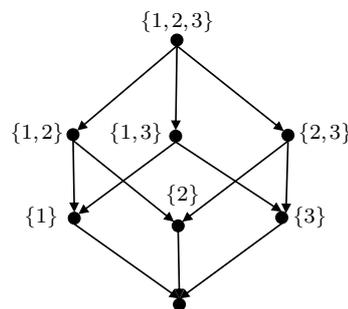
Logo,  $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$  é um reticulado onde a ordem parcial é a inclusão de conjuntos.

Estamos interessados no reticulado formado pelo conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces de um polígono. Temos que, dado um conjunto finito parcialmente ordenado  $\mathcal{P}$ , com relação de ordem  $\leq$ , podemos associá-lo a um grafo, denominado o **grafo de Hasse de  $\mathcal{P}$** . O grafo de Hasse de  $\mathcal{P}$  é construído do seguinte modo: os vértices do grafo representam os elementos de  $\mathcal{P}$  e para  $x, y \in \mathcal{P}$ , existe uma aresta entre os vértices correspondentes  $v_x$  e  $v_y$  se  $x \leq y$  e não existe  $z \in \mathcal{P}$  tal que  $x \leq z \leq y$ . Além disso,  $v_y$  deverá estar acima de  $v_x$ . Se definimos  $t, h: E \rightarrow V$  pondo  $t(v_y v_x) = v_y$  e  $h(v_y v_x) = v_x$  então o grafo de Hasse de um conjunto parcialmente ordenado torna-se um grafo orientado. Finalmente, assumimos que  $|v_x| = |v_y| - 1$ , o que o torna um grafo em níveis.

**Exemplo 1.16** ( $\theta_n$ ) *O grafo de Hasse associado ao reticulado do conjunto das partes de um conjunto finito de  $n$  elementos será denotado por  $\theta_n$ . Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

*o conjunto das partes de  $A$ . O grafo de Hasse associado a  $\mathcal{P}(A)$ ,  $\theta_3$ , considerando a relação de ordem por inclusão ( $\subseteq$ ) é representado na Figura 1.9.*



**Figura 1.9:** *Grafo de Hasse associado ao conjunto das partes de  $A = \{1, 2, 3\}$*

**Exemplo 1.17 (Grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das faces de um polígono,  $\Gamma_{D_n}$ )**

*Em [3] Coxeter define os “polytopes” como extensão à noção de polígonos e poliedros para dimensões maiores. Tratamos aqui do caso  $n = 2$  que são meramente polígonos. Podemos colocar uma ordem parcial no conjunto  $\mathcal{P}$  das faces de um polígono do seguinte modo:  $x \leq y$  se  $x$  é uma  $(k-1)$ -face,  $y$  é uma  $k$ -face e ainda  $x$  é uma face de  $y$ .*

*Por exemplo, o conjunto parcialmente ordenado das faces de um quadrado ABCD consiste do  $\emptyset$ , dos vértices  $A, B, C$  e  $D$ ; das arestas  $AB, BC, CD$  e  $DA$ ; e do próprio quadrado ABCD. Além disso, a relação de ordem nesse conjunto seria:*

$\emptyset \leq A \leq AB \leq ABCD$ ,  $\emptyset \leq B \leq AB \leq ABCD$  (idem se trocarmos  $A$  e  $B$  por  $B$  e  $C$ ,  $C$  e  $D$  ou  $D$  e  $A$ ). O conjunto vazio é convencionado como face de um vértice, os vértices que determinam uma aresta são as faces da aresta e as arestas que determinam o quadrado são as faces do quadrado. Mais precisamente, o conjunto das faces é constituído pela 2-face  $ABCD$ , pelas 1-face  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$ , pelas 0-face  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , e convencionamos que  $\emptyset$  é uma -1-face.

Assim, o grafo de Hasse associado às faces um polígono possui quatro níveis com: 1 vértice no nível 0; 1 vértice no nível 3; tantos vértices no nível 1 quantos tenham o polígono e existirá um vértice no nível 2 para cada aresta no polígono. O vértice maximal está conectado a todos os vértices no nível 2. Cada vértice no nível 2 está conectado a apenas 2 vértices no nível 1 (cada vértice representando uma aresta é adjacente aos vértices dessa aresta), e cada vértice no nível 1 está conectado ao vértice minimal,  $\star$ .

Na Figura 1.10 apresentamos: o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das faces de um triângulo à esquerda e o grafo de Hasse associado a um polígono de  $n$  lados à direita, denotados, respectivamente,  $\Gamma_{D_3}$  e  $\Gamma_{D_n}$ . Considere um triângulo de vértices 1, 2 e 3. A esse triângulo associamos 1 vértice no nível 0,  $\star$ . Três vértices no nível 1,  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  representando respectivamente os vértices 1, 2 e 3. Três vértices no nível 2,  $v_{12}$ ,  $v_{23}$ ,  $v_{31}$ , representando respectivamente as arestas 12, 23 e 13, do triângulo. Ainda, 1 vértice no nível 4,  $u$ , representando o próprio triângulo. Observe ainda que o vértice  $v_{12}$ , que representa a aresta 12, é adjacente aos vértices  $w_1$  e  $w_2$ , visto que os vértices 1 e 2 pertencem a aresta 12. Assim é com os demais.

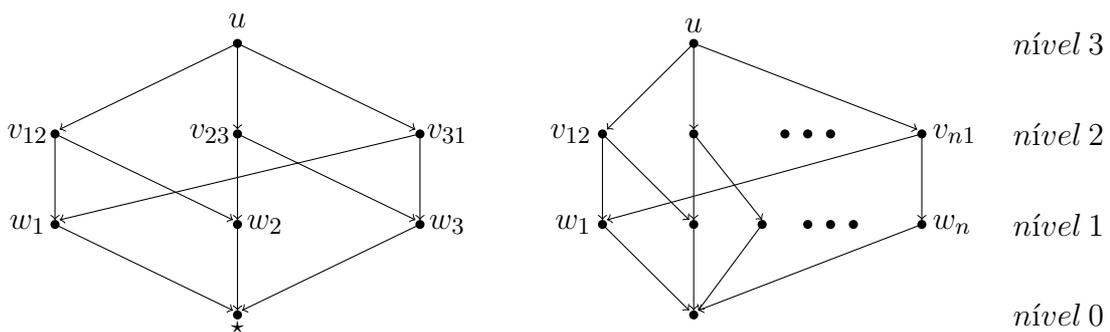


Figura 1.10:  $\Gamma_{D_3}$  e  $\Gamma_{D_n}$

**Exemplo 1.18 (O grafo  $\Gamma_{\diamond}$ )** Um polígono regular de  $n$  lados é obtido a partir das rotações de  $\frac{360^\circ}{n}$  de um ponto inicial  $P_0$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Podemos estender essa noção substituindo  $n$  por um número racional maior que 2, digamos a fração  $\frac{p}{q}$  onde  $p$  e  $q$  são números naturais coprimos. Sejam  $p$  e  $q$  inteiros positivos com  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , um polígono regular (generalizado)  $\{n\}$ , onde  $n = \frac{p}{q}$ , é um polígono

em que seus  $p$  vértices são derivados de um vértice inicial  $P_0$  por repetidas rotações de  $\frac{360^\circ}{n}$ , e seus  $p$  lados são

$$P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{p-1}P_0.$$

O denominador  $q$  é chamado densidade do polígono. Quando  $q = 1$  então  $n = p$  e obtemos o polígono regular (ordinário)  $p$ , ou seja, um polígono regular de  $p$  lados. Para  $q > 1$  tais polígonos são chamados de polígonos estrela. Em [15] Vasconcelos estudou a álgebra associada a  $\Gamma_\diamond$ , o grafo de Hasse do polígono estrela  $\{\frac{n}{2}\}$ , com  $n > 3$  ímpar, considerando as arestas externas, por isso, chamado de polígono estrelado. Os  $n$  vértices foram renomeados por  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Este polígono tem  $2n$  lados e dessa forma,  $\Gamma_\diamond$  tem  $n$  vértices no nível 1 e  $2n$  vértices no nível 2. Os vértices foram rotulados usando índices em  $\mathbb{Z}_n$ : no nível 1 chamaremos os vértices de  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Os vértices no nível 2 serão denotados por  $\{v_{ii+1}, 1 \leq i \leq n\}$  (correspondendo às arestas externas) e  $\{v_{ii+2}, 1 \leq i \leq n\}$  (correspondendo às arestas internas) e no nível 3 chamamos de  $u$  o vértice maximal. Pode-se checar que se não consideramos as arestas externas, o grafo de Hasse associado obtido é isomorfo ao grafo  $\Gamma_{D_n}$  apresentado no exemplo anterior.

Na Figura 1.11 apresentamos o grafo  $\Gamma_\diamond$ .

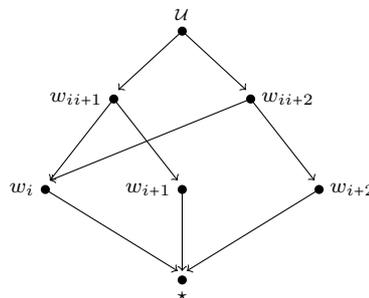


Figura 1.11:  $\Gamma_\diamond$

**Exemplo 1.19 (O grafo  $L(n, q)$ )** Sejam  $K = \mathbb{F}_q$  o corpo finito com  $q$  elementos e  $V = \mathbb{F}_q^n$  o espaço vetorial  $n$ -dimensional sobre  $\mathbb{F}_q$ . Nesse caso,  $\text{Sub}(V)$  (conjunto formado pelos subespaços de  $V$ ) é um conjunto parcialmente ordenado, finito e seus elementos podem ser representados por meio de um grafo, chamado o grafo de Hasse de  $\text{Sub}(V)$ , denotado por  $L(n, q)$ .

O grafo é construído da seguinte maneira: cada subespaço  $W \in \text{Sub}(V)$  representa um vértice e se  $W_2 \subseteq W_1$  e  $\dim(W_2) = \dim(W_1) - 1$  desenhamos o vértice referente a  $W_2$  imediatamente abaixo do vértice referente a  $W_1$  e unimos por uma seta orientada (voltada para  $W_2$ ).

O grafo de Hasse de  $\text{Sub}(V)$  é um grafo em níveis, em que os vértices no nível  $i$  são os subespaços de  $\mathbb{F}_q^n$  de dimensão  $i$ . Esse número é denotado pelo coeficiente de Gauss (veja [?])  $\binom{n}{k}_q$  e

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}. \quad (1-1)$$

Na Figura 1.12, apresentamos o grafo de Hasse  $L(2, q)$ . Nesse caso, o grafo tem 3 níveis. No nível 0,  $\star$  representa o espaço nulo, no nível 2,  $V$  representa  $\mathbb{F}_q^2$ , e no nível 1 os  $\binom{2}{1}_q = q + 1$  subespaços de dimensão 1 sobre  $\mathbb{F}_q$  são representados por  $W_1, \dots, W_{q+1}$ .

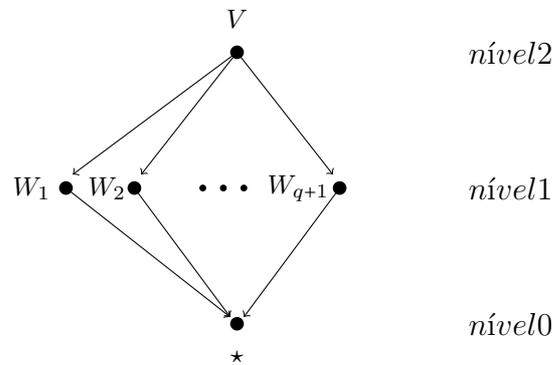
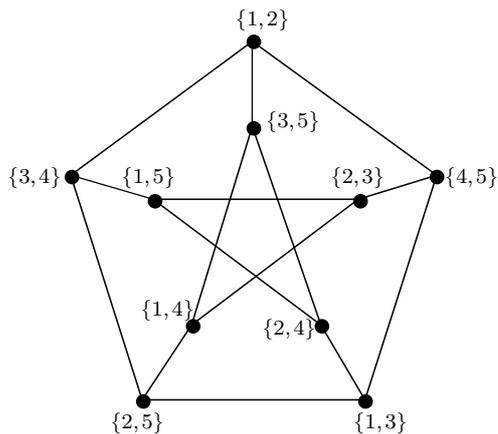


Figura 1.12: Grafo  $L(2, q)$

### 1.3 O Grafo de Hasse associado ao Grafo de Petersen

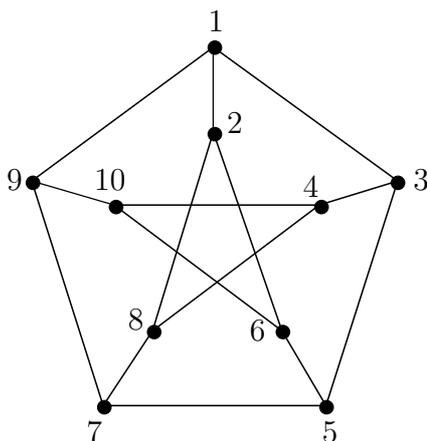
Sejam  $X$  um conjunto de 5 elementos e  $V$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $X$  que possuem exatamente 2 elementos. Considere a condição: dois elementos  $v_1, v_2 \in V$  são adjacentes se  $v_1 \cap v_2 = \emptyset$ . Tal relação de adjacência sobre  $V$  define o **grafo de Petersen**. Em outras palavras, o grafo de Petersen é o grafo cujos vértices são todos os subconjuntos de  $X$  formados por dois elementos e existe uma aresta entre dois vértices  $v_1$  e  $v_2$  se, e somente se,  $v_1 \cap v_2 = \emptyset$ . Esse grafo é denotado por  $P_5$ .

Se considerarmos o conjunto  $X$  contendo os números naturais de 1 a 5,  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , teremos:  $V = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ . E existe aresta entre os vértices:  $\{1, 2\}$  e  $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$ ;  $\{1, 3\}$  e  $\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}$ ;  $\{1, 4\}$  e  $\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$ ;  $\{1, 5\}$  e  $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ ;  $\{2, 3\}$  e  $\{4, 5\}$ ;  $\{2, 4\}$  e  $\{3, 5\}$ ;  $\{2, 5\}$  e  $\{3, 4\}$ . Logo, o grafo  $P_5$  possui 10 vértices e 15 arestas. Graficamente,



**Figura 1.13:** *Grafo de Petersen*

Agora, construiremos o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Petersen de forma similiar à apresentada no Exemplo 1.17, o denotaremos por  $\Gamma_{P_5}$ . Para isso, e também para evitar o excesso de notação, renomeamos os vértices do grafo  $P_5$  de 1 a 10 da seguinte forma:



**Figura 1.14:** *Grafo de Petersen*

Seja  $\mathcal{P}$  o conjunto de todos os elementos de  $P_5$ ,

$$\{\star, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, v_{12}, v_{13}, v_{19}, v_{26}, v_{28}, v_{34}, v_{35}, v_{48}, v_{410}, v_{56}, v_{57}, v_{610}, v_{78}, v_{79}, v_{910}\}$$

satisfazendo a relação de ordem:

$$\begin{cases} u > \star, w_k, v_{ij} \\ v_{ij} > \star, w_k \\ w_k > \star \end{cases}$$

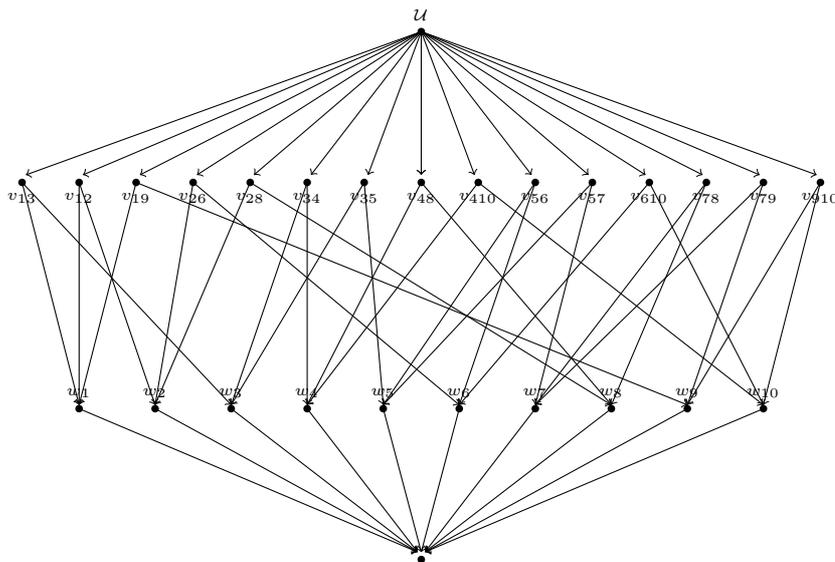
ou seja,

$$\mathcal{P} = \{\star, w_1, \dots, w_{10}, v_{ij}, u\},$$

onde  $w_i$  representam os vértices  $1, \dots, 10$  e  $v_{ij}$  representam as arestas que unem os vértices adjacentes  $w_i$  e  $w_j$ ,  $u$  representa o próprio grafo  $P_5$ .

O grafo de Hasse de  $P_5$ , representado na Figura 1.15, possui quatro níveis, com um vértice no nível 0,  $\star$ ; dez vértices no nível 1,  $w_1, \dots, w_{10}$ , representando respectivamente os vértices  $1, \dots, 10$ ; quinze vértices no nível 2,  $v_{2i-1i+1}, 1 \leq i \leq 5$ , representando as arestas que conectam  $w_{2i-1}$  a  $w_{2i+1}$ ,  $v_{2i-12i}, 1 \leq i \leq 5$ , representando as arestas que conectam  $w_{2i-1}$  a  $w_{2i}$ , e  $v_{2i2i+4}, 1 \leq i \leq 5$ , representando as arestas que conectam  $w_{2i}$  a  $w_{2i+4}$ ; além de um vértice no nível 3,  $u$ , representando  $P_5$ . E, existe aresta de  $v_{ij}$  a  $w_k$  se, e somente se,  $k = i$  ou  $k = j$ .

O vértice do nível 3 está conectado com todos do nível 2; cada vértice do nível 2 está conectado com 2 vértices do nível 1, de tal forma que cada vértice do nível 1 está conectado com 3 vértices do nível 2; e todos os vértices do nível 1 estão conectados com o vértice  $\star$ .



**Figura 1.15:** Grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do Grafo de Petersen

Nesta dissertação, desejamos utilizar esse grafo para encontrar a álgebra associada a ele e desenvolver toda a teoria apresentada nos próximos capítulos para tal álgebra, a fim de verificar suas principais propriedades.

---

# Álgebras Associadas a Grafos

---

Neste capítulo falaremos sobre as álgebras associadas a grafos orientados em níveis apresentadas em [10], denominadas  $A(\Gamma)$ , sua construção e propriedades. Para tal, definimos álgebras graduadas, descrevemos a noção de filtração e determinamos a álgebra graduada associada  $gr(A)$ . Posteriormente, definimos álgebra tensorial como a álgebra associativa livre gerada por um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $K$  para enfim apresentar a construção da álgebra  $A(\Gamma)$  e os teoremas que determinam sua base. Como caso particular, e um dos principais objetivos deste trabalho, determinaremos a base da álgebra  $A(\Gamma_{P_5})$ .

## 2.1 Espaço quociente e espaço graduado

Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $K$  e  $W$  um subespaço de  $V$ . Existem, geralmente, muitos subespaços  $W'$  que são complementares de  $W$ , isto é, subespaços com a propriedade:  $V = W \oplus W'$ . Se existe um produto interno em  $V$ , e  $W$  tem dimensão finita, há um subespaço particular o qual podemos chamar de *complementar natural* de  $W$ . Esse é o *complemento ortogonal* de  $W$ . Mas, se  $V$  não possuir estrutura além de espaço vetorial, não podemos selecionar um subespaço  $W'$  complementar natural do subespaço  $W$ . No entanto, pode-se construir a partir de  $V$  e  $W$  o espaço vetorial  $V/W$  chamado de *quociente* de  $V$  e  $W$ , que irá desempenhar o papel do complemento natural de  $W$ . O espaço quociente não é um subespaço de  $V$ , e por isso não pode realmente ser um subespaço complementar a  $W$ , mas ele é um espaço vetorial definido em termos de  $V$  e  $W$  e tem a propriedade de ser isomorfo a qualquer subespaço  $W'$  complementar a  $W$ , como mostraremos a diante.

**Definição 2.1** *Seja  $W$  um subespaço de  $V$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são vetores em  $V$  dizemos que  $\alpha$  é **congruente** a  $\beta$  módulo  $W$  se o vetor  $\alpha - \beta$  está no subespaço  $W$ . Escrevemos  $\alpha \equiv \beta \pmod{W}$ .*

A congruência módulo  $W$  é uma relação de equivalência em  $V$ , ou seja,

1.  $\alpha \equiv \alpha \pmod{W}$  pois,  $\alpha - \alpha = 0 \in W$ ;
2. Se  $\alpha \equiv \beta \pmod{W}$  segue que  $\beta \equiv \alpha \pmod{W}$ . Uma vez que  $W$  é um subespaço de  $V$  o vetor  $\alpha - \beta \in W$  se, e somente se,  $\beta - \alpha \in W$ ;
3. Se  $\alpha \equiv \beta \pmod{W}$  e  $\beta \equiv \gamma \pmod{W}$ , então  $\alpha \equiv \gamma \pmod{W}$ , pois se  $\alpha - \beta \in W$  e  $\beta - \gamma \in W$ , então  $\alpha - \gamma = \alpha - \beta + \beta - \gamma \in W$ .

A classe de equivalência do vetor  $\alpha$  consiste de todos os vetores  $\beta \in V$  tais que  $\beta - \alpha \in W$ , isto é, todos os vetores  $\beta$  tais que  $\beta = \alpha + \gamma$ , com  $\gamma \in W$ . Por esta razão, a classe lateral do vetor  $\alpha$  é denotada por  $\alpha + W$ . O conjunto de todas as classes laterais de  $W$  será denotado por  $V/W$ . Vamos agora definir uma adição de vetores e multiplicação por escalar em  $V/W$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\alpha + W) + (\beta + W) &= (\alpha + \beta) + W, \\ c(\alpha + W) &= (c\alpha) + W, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Estes dependem apenas das classes laterais envolvidas. Portanto,

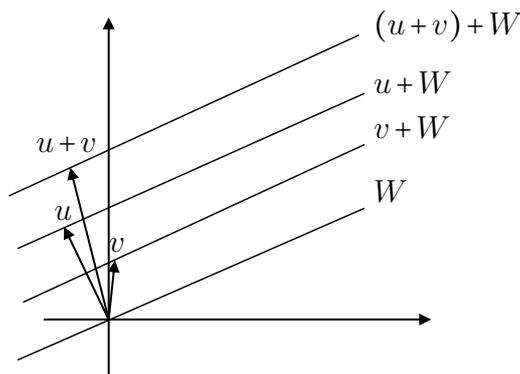
1. Se  $\alpha \equiv \alpha' \pmod{W}$  e  $\beta \equiv \beta' \pmod{W}$ , então  $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \pmod{W}$ .
2. Se  $\alpha \equiv \alpha' \pmod{W}$ , então  $c\alpha \equiv c\alpha' \pmod{W}$ ,  $c \in \mathbb{K}$

Agora é fácil verificar que  $V/W$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Cada uma das propriedades de adição de vetores e multiplicação por escalar resulta da correspondente propriedade das operações em  $V$ . O vetor nulo de  $V/W$  será a classe lateral do vetor nulo de  $V$ .

**Definição 2.2** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $W$  um subespaço de  $V$ . Denotamos por  $V/W$  o espaço vetorial, chamado **espaço quociente** de  $V$  e  $W$ , tal que:*

1.  $(\alpha + W) + (\beta + W) = (\alpha + \beta) + W$ ,
2.  $c(\alpha + W) = (c\alpha) + W$ , para todo  $c \in K$  e  $\alpha, \beta \in V$ , onde  $\alpha + W = \{\alpha + w : w \in W\}$ .

**Exemplo 2.3** *Seja  $V = \mathbb{R}^2$  e  $W \subseteq V$  uma reta que contém a origem de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\alpha = (x_1, x_2) \in V$ , a classe  $\alpha + W$  é a reta que passa pelo ponto  $(x_1, x_2)$  e é paralela a  $W$ . Em outras palavras, o espaço quociente  $\mathbb{R}^2/W$  é o conjunto de todas as retas contidas em  $\mathbb{R}^2$  e paralelas a  $W$ , veja a Figura 2.1.*



**Figura 2.1:** Espaço Quociente

**Teorema 2.4** *Seja  $V = W \oplus W'$ . Então a aplicação quociente*

$$\begin{aligned} W' &\rightarrow V/W \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Em particular, se  $V$  tem dimensão finita, então o espaço quociente  $V/W$  tem dimensão finita e  $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ .

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{Q}$  a aplicação quociente. Então

$$\mathcal{Q}(\alpha x + \beta y) = [\alpha x + \beta y] = [\alpha x] + [\beta y] = \alpha[x] + \beta[y] = \alpha\mathcal{Q}(x) + \beta\mathcal{Q}(y).$$

Logo  $\mathcal{Q}$  é linear. Para ver que  $\mathcal{Q}$  é injetiva, note que se  $\mathcal{Q}(x) = 0$  então, por definição,  $[x] = 0$ , o que significa que  $x \in W$  pela relação de congruência módulo  $W$ . Então  $x \in W' \cap W = \{0\}$ , logo  $x = 0$ . Agora, seja  $[y] \in V$ , temos  $y = w + w'$ , com  $w \in W$  e  $w' \in W'$ . Daí,  $y - w' = w$ , ou seja,  $[y] = [w']$  e assim,  $[y] = \mathcal{Q}(w')$  e  $\mathcal{Q}$  é sobrejetiva.

Como  $V/W$  é isomorfo a  $W'$  e  $V = W \oplus W'$ , temos  $\dim(V/W) = \dim(W')$  e  $\dim(V) = \dim(W') + \dim(W)$ . Logo,  $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ .  $\square$

**Definição 2.5** *Seja  $I$  um conjunto. Um espaço vetorial  $V$  é  $I$ -graduado se para cada  $i \in I$  existe um subespaço  $V_i \subseteq V$  tal que  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ . Neste caso dizemos que  $\{V_i : i \in I\}$  é uma **graduação** de  $V$  e que  $V_i$  é a **componente homogênea** de  $V$  de grau  $i$ .*

**Exemplo 2.6** *Consideremos o espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^n$  e o conjunto  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Sejam  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (1 na posição  $i$  e 0 nas demais),  $1 \leq i \leq n$ , e  $V_i$  o subespaço*

gerado por  $e_i$ ,

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle (1, 0, \dots, 0) \rangle \\ V_2 &= \langle (0, 1, \dots, 0) \rangle \\ &\vdots \\ V_i &= \langle (0, \dots, 1, \dots, 0) \rangle \\ &\vdots \\ V_n &= \langle (0, \dots, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Lembre-se que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e, portanto,

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

isto é,

$$V_i \subseteq V \quad e \quad V = \bigoplus_{i=1}^n V_i.$$

Assim,  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial  $I$ -graduado.

## 2.2 Álgebras graduadas e álgebras filtradas

**Definição 2.7** Uma álgebra sobre um corpo  $K$  é um conjunto  $A$  junto com três operações  $+: A \times A \rightarrow A$ ,  $\cdot: K \times A \rightarrow A$  e  $*: A \times A \rightarrow A$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $(A, +, \cdot)$  é um espaço vetorial;
2. para todos  $a, b, c \in A$ ,  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ;
3. para todos  $a, b, c \in A$  e  $\alpha \in K$ ,  $a * (b + \alpha \cdot c) = a * b + \alpha \cdot a * c$ ;
4.  $\alpha \in K$ ,  $(a + \alpha \cdot b) * c = a * c + \alpha \cdot (b * c)$ .

Se além disso temos que:

5. existe  $1_A \in A$  tal que  $1_A * a = a * 1_A = a$  para todo  $a \in A$ , dizemos que  $A$  é uma **álgebra com unidade**  $1_A$ . E, se temos:
6.  $a * b = b * a$  para todo  $a, b \in A$ , dizemos que  $A$  é uma **álgebra comutativa**.

**Definição 2.8** *Seja  $A$  uma álgebra, onde  $(A, +, \cdot)$  é um espaço vetorial graduado por  $\mathbf{I}$ , se  $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$  para todo  $i, j \in \mathbf{I}$ , dizemos que  $A$  é uma **álgebra graduada**.*

**Exemplo 2.9** *Considere a álgebra  $M_2(\mathbb{R})$ . Sejam  $M_2(\mathbb{R})_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \right\}$  e  $M_2(\mathbb{R})_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$ . Então  $M_2(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})_0 \oplus M_2(\mathbb{R})_1$  é uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação de  $M_2(\mathbb{R})$ .*

Agora, descrevemos a noção de filtração para uma álgebra  $A$ . Posteriormente, determinamos a álgebra graduada associada  $gr(A)$ .

**Definição 2.10** *Dizemos que uma álgebra  $A$  é filtrada se para todo inteiro não negativo  $i$  existe um subespaço  $A^{(i)}$  tal que:*

1.  $A^{(i)} \subseteq A^{(j)}$  se  $i \leq j$ ;
2.  $\bigcup_i A^{(i)} = A$ ;
3.  $A^{(i)} A^{(j)} \subseteq A^{(i+j)}$ .

*Dizemos que  $\{A^{(i)} : i \geq 0\}$  é uma **filtração** de  $A$ .*

Seja  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$  uma álgebra  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada e tomemos

$$A^{(i)} = \bigoplus_{j \leq i} A_j = A_1 \oplus \cdots \oplus A_i.$$

$\{A^{(i)} : i \geq 0\}$  torna-se uma filtração de  $A$ . Reciprocamente, se  $\{A^{(i)} : i \geq 0\}$  é uma filtração de  $A$  e

$$\overline{A}_i = A^{(i)} / A^{(i-1)} \text{ (com } A^{(-1)} = \{0\}\text{)}.$$

Então

$$gr(A) = \sum_{i \geq 0} \overline{A}_i,$$

onde a multiplicação em  $gr(A)$  é definida por

$$(a_i + A^{(i-1)})(a_j + A^{(j-1)}) = a_i a_j + V^{(i+j-1)}$$

é uma álgebra  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada, a **álgebra graduada associada a  $A$** . Observe que essa gradação depende da filtração de  $A$ .

**Exemplo 2.11** *Sejam  $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$  a álgebra dos polinômios em uma indeterminada sobre o corpo  $\mathbb{R}$  e  $A_i = \mathbb{R} \cdot x^i$  o subespaço homogêneo de grau  $i$ . Temos  $\mathbb{R}[x] = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$  e que  $x^i \cdot x^j = x^{i+j}$ , logo,  $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$ . Portanto,  $\mathbb{R}[x]$  é uma álgebra  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada. Sejam  $A^{(-1)} = \{0\}$  e para  $i \geq 0$ ,  $A^{(i)} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot x \oplus \dots \oplus \mathbb{R} \cdot x^i$ . Nesse caso,  $\overline{A}_0 = \mathbb{R}/\{0\} \cong \mathbb{R}$ . Ainda,*

$$\overline{A}_i = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot x \oplus \dots \oplus \mathbb{R} \cdot x^i) / (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot x \oplus \dots \oplus \mathbb{R} \cdot x^{i-1}) \cong \mathbb{R} \cdot x^i.$$

Isso implica que

$$gr(\mathbb{R}[x]) = \sum_{i \geq 0} \overline{A}_i = \sum_{i \geq 0} \mathbb{R} \cdot x^i = \mathbb{R}[x].$$

## 2.3 A álgebra tensorial

Dado um espaço vetorial  $V$ , estamos interessados em construir a **álgebra tensorial**, denotada por  $T(V)$ . Essa é a álgebra associativa livre gerada por  $V$  sobre um corpo  $K$ . Portanto, primeiramente definimos álgebra livre, apresentamos um exemplo, em seguida construímos o produto tensorial de  $K$ -espaços vetoriais  $V$  e  $W$ , por fim, construímos  $T(V)$ .

**Definição 2.12** *Dizemos que uma álgebra  $F$  é **livre** sobre  $X$  se existe  $X \subset F$  tal que  $X$  gera  $F$  e para cada álgebra  $A$  e cada aplicação  $h: X \rightarrow A$ , existe um único homomorfismo  $\varphi: F \rightarrow A$  que estende  $h$ . Nesse caso, dizemos que  $F$  é livremente gerada por  $X$ .*

Em outras palavras, uma álgebra  $F$  é livremente gerada por  $X \subset F$ , se o diagrama a seguir comuta com qualquer álgebra  $A$  e qualquer função  $h: X \rightarrow A$ , onde  $i$  é a inclusão natural de  $X$  em  $F$ .

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \uparrow & \searrow \varphi \\ X & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

**Exemplo 2.13** *A álgebra  $\mathbb{R}[x]$  apresentada no Exemplo 2.11 é a álgebra livremente gerada por  $\{x\}$  sobre  $\mathbb{R}$ . De fato, dadas quaisquer  $\mathbb{R}$ -álgebra  $A$  e aplicação  $h: \{x\} \rightarrow A$ , o homomorfismo  $\phi: \mathbb{R}[x] \rightarrow A$  dado por  $\phi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1h(x) + \dots +$*

$a_n h(x)^n$  estende  $h$ , pois se  $i: \{x\} \rightarrow \mathbb{R}[x]$  é a inclusão natural de  $\{x\}$  em  $\mathbb{R}[x]$ ,  $\phi(i(x)) = \phi(x) = h(x)$ . Além disso, se existe um homomorfismo  $\phi': \mathbb{R}[x] \rightarrow A$  que estende  $h$ , então  $\phi'(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1\phi'(x) + \dots + a_n\phi'(x)^n = a_0 + a_1h(x) + \dots + a_nh(x)^n = \phi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)$ . Isso mostra que  $\phi$  é o único homomorfismo de  $\mathbb{R}[x]$  em  $A$  que estende  $h$ .

Agora, seja  $X$  um conjunto não vazio qualquer e  $K$  um corpo, considere

$$KX = \left\{ \sum_{x \in X} a_x x : a_x \in K \right\}$$

o conjunto de todas as somas formais de elementos de  $X$ . Aqui  $\alpha_x x$  é um símbolo formal. Dizemos que  $\sum_{x \in X} \alpha_x x = \sum_{x \in X} \beta_x x$  se  $\alpha_x = \beta_x$  para todo  $x \in X$ .

Com as operações,

$$\sum_{x \in X} a_x x + \sum_{x \in X} \beta_x x = \sum_{x \in X} (a_x + \beta_x) x$$

e

$$\lambda \cdot \sum_{x \in X} a_x x = \sum_{x \in X} (\lambda a_x) x,$$

o conjunto  $KX$  torna-se um  $K$ -espaço vetorial, chamado de  $K$ -espaço vetorial com base  $X$ .

Uma observação importante sobre o espaço vetorial  $KX$  é a seguinte: a operação

$$\sum_{x \in X} a_x x \cdot \sum_{y \in X} a_y y = \sum_{xy \in X} \gamma_{xy} xy,$$

onde  $\gamma_{xy} = \sum a_x a_y$ , torna  $KX$  uma  $K$ -álgebra associativa. Quando  $X$  é um grupo, chamamos  $KX$  de álgebra de grupo.

Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -espaços vetoriais e considere o  $K$ -espaço vetorial  $K(V \times W)$  com base  $V \times W$  e o subespaço  $U$  de  $K(V \times W)$  gerado pelos elementos dos tipos

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),$$

$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w),$$

$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w),$$

com  $v_1, v_2, v \in V$ ,  $w_1, w_2, w \in W$  e  $\lambda \in K$ .

**Definição 2.14** Definimos o **produto tensorial** de  $V$  por  $W$ , denotado por  $V \otimes_K W$  (ou simplesmente  $V \otimes W$ ), como sendo o espaço vetorial quociente  $K(V \times W)/U$ .

Dado  $(v, w) \in V \times W$ , denotamos por  $v \otimes w$  o elemento  $\overline{(v, w)}$  de  $V \otimes W$ . Chamamos os elementos da forma  $v \otimes w$  de **tensores**. Temos que  $\{v \otimes w : v \in V, w \in W\}$  é o conjunto gerador de  $V \otimes W$  e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w), \\ v \otimes (\lambda w) &= \lambda(v \otimes w),\end{aligned}$$

para quaisquer  $v_1, v_2, v \in V$ ,  $w_1, w_2, w \in W$  e  $\lambda \in K$ . Concluimos assim que todos os elementos de  $V \otimes_K W$  são da forma  $\sum v \otimes w$  com  $v \in V$ ,  $w \in W$ .

Temos interesse particular na seguinte álgebra associativa livre, a álgebra tensorial: seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e sejam  $T(V)^0 = K$ ,  $T(V)^1 = V$  e para  $n \in \mathbb{N}, n > 1, T(V)^n = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$  ( $n$  cópias).

**Definição 2.15** A álgebra  $T(V) = \sum_{n=0}^{\infty} T(V)^n$  é a álgebra tensorial de  $V$  sobre  $K$ .

A priori, o conjunto  $T(V)$  é apenas um espaço vetorial  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduado. Definimos a operação de multiplicação entre os elementos de  $T(V)$  do seguinte modo:

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_s) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_s.$$

Tal operação torna  $T(V)$  uma álgebra associativa com unidade, e é compatível com a graduação de  $T(V)$ , isto é,  $T(V)$  torna-se uma álgebra graduada. Dizemos que um elemento da forma  $v_i \otimes \cdots \otimes v_k$ ,  $k \geq 0$  e  $v_i \in V$ , é uma **palavra** em  $T(V)$ , assim, a unidade é a palavra vazia.

## 2.4 Álgebra quadrática e sua dual

Aqui apresentamos de forma sucinta as definições de álgebra quadrática e de sua álgebra quadrática dual. Mais detalhes podem ser encontrados em [12].

**Definição 2.16** *Sejam  $V$  um espaço vetorial com base  $\{v_j : j \in J\}$  e  $R \subseteq T(V)$ . Denotamos por  $\langle R \rangle$  o ideal de  $T(V)$  gerado por  $R$ , isto é,*

$$\langle R \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k y_i r_i z_i : k \geq 0, y_i, z_i \in T(V), r_i \in R \right\}.$$

*Então dizemos que a álgebra quociente  $T(V)/\langle R \rangle$  é a álgebra definida por geradores  $\{v_j : j \in J\}$  e relações  $R$ .*

**Observação 2.17** *O conjunto  $R$ , das relações, determina também um conjunto de reduções (cada relação leva a uma redução). Nesse sentido temos:*

- i. Um elemento  $i \in T(V)$  é dito irredutível (relativamente às relações de  $R$ ) em  $T(V)/\langle R \rangle$  se nenhuma redução se aplica a ele.*
- ii. Um elemento  $j \in T(V)$  é dito redutível em  $T(V)/\langle R \rangle$  se alguma redução se aplica a ele.*
- iii. Uma relação  $r \in R$  é homogênea se  $r \in T(V)^n$  para algum  $n \geq 1$ .*

**Exemplo 2.18** *Seja  $V$  o espaço vetorial gerado por  $x, y$  e  $z$ . Sejam  $T(V)$  a álgebra tensorial de  $V$  sobre o corpo  $K$  e  $R = \{y - x - z\}$ . A relação  $R$  determina a redução  $y \equiv x + z$ . Então em  $A = T(V)/\langle R \rangle$ ,  $x$  e  $z$  são irredutíveis e  $y$  é redutível. De outro modo, a redução poderia ser  $z \equiv y - x$ . Nesse caso,  $x$  e  $y$  seriam irredutíveis e  $z$  redutível.*

**Definição 2.19** *Dizemos que a álgebra definida por geradores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e relações  $R$  é uma álgebra quadrática se  $R \subseteq V \otimes V$ .*

Sejam  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $V = KX$  (o espaço vetorial gerado por  $X$  sobre o corpo  $K$ ) e  $V^* = \{f : V \rightarrow K : f \text{ é linear}\}$  o espaço vetorial dual  $V$ . Observe que o conjunto  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ , onde  $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$  é linearmente independente em  $V^*$ .

Com efeito, suponha

$$\alpha_1 v_1^* + \dots + \alpha_n v_n^* \equiv 0.$$

Daí

$$(\alpha_1 v_1^* + \dots + \alpha_n v_n^*)(v_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por outro lado,

$$(\alpha_1 v_1^* + \dots + \alpha_n v_n^*)(v_i) = \alpha_i, \quad \text{onde } \alpha_i = 1, \dots, n.$$

Observe também que dado  $g: V \rightarrow K$  linear e  $v \in V$ , tem-se

$$\begin{aligned} g(v) &= g(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 g(v_1) + \cdots + \alpha_n g(v_n) \\ &= g(v_1) v_1^* (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \cdots + g(v_n) v_n^* (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n). \end{aligned}$$

Logo,  $g = g(v_1) v_1^* + \cdots + g(v_n) v_n^*$  é uma combinação linear de vetores  $v_1^*, \dots, v_n^*$ . Isso mostra que os vetores  $v_1^*, \dots, v_n^*$  constituem uma base para  $V^*$ .

Agora,  $V^* \otimes V^*$  age bilinearmente em  $V \otimes V$  mediante

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w), \quad f, g \in V^*, v, w \in V.$$

Considere o conjunto  $R^\perp = \{u \in V^* \otimes V^* : u(R) = (0)\}$

**Definição 2.20** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $A = T(V)/\langle R \rangle$  uma álgebra quadrática. Então  $A^\perp = T(V^*)/\langle R^\perp \rangle$  é a álgebra quadrática dual de  $A$ .*

## 2.5 A álgebra $A(\Gamma)$

Nesta seção construímos a álgebra  $A(\Gamma)$  conforme apresentado em [10].

Seja  $K$  um corpo e para qualquer conjunto  $W$  seja  $T(W)$  a álgebra associativa livre gerada por  $W$  sobre  $K$ . Seja  $\Gamma(V, E)$  um grafo orientado em níveis onde  $V$  é o conjunto de vértices,  $E$  o conjunto de arestas e existem  $t, h: E \rightarrow V$  de modo que  $t: E_i \rightarrow V_i$  e  $h: E_i \rightarrow V_{i-1}$  para  $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$  e  $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$  com  $V_0 = \star$ .

Para um caminho  $\pi = \{e_1, \dots, e_m\}$  em  $\Gamma$ , definimos

$$e(\pi, k) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} e_{i_1} \cdots e_{i_k},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} e(\pi, 1) &= e_1 + \cdots + e_m, \\ e(\pi, 2) &= e_1 e_2 + \cdots + e_1 e_m + e_2 e_3 + \cdots + e_2 e_m + \cdots + e_{m-1} e_m, \\ &\vdots \\ e(\pi, m) &= e_1 \cdots e_m. \end{aligned}$$

**Definição 2.21** *Seja  $R$  o ideal bilateral de  $T(E)$  gerado por,*

$$\{e(\pi_i, k) - e(\pi_j, k) : t(\pi_i) = t(\pi_j), h(\pi_i) = h(\pi_j), 1 \leq k \leq l(\pi_i)\}.$$

Então  $A(\Gamma) = T(E)/R$ .

**Notação:** Denotamos por  $\hat{e}(v, k)$  a imagem em  $A(\Gamma)$  de  $e_1 \cdots e_k$ .

Em outras palavras,  $A(\Gamma)$  é a álgebra gerada pelas arestas do grafo  $\Gamma$  e cujas relações são: caminhos distintos com mesmo início e fim, em  $\Gamma$ , determinam a fatoração do mesmo polinômio com coeficientes em um anel não comutativo.

**Exemplo 2.22** Vamos construir a álgebra  $Q_2$  usando a Definição 2.21. Seja  $\Gamma$  o grafo apresentado na Figura 2.2. Temos  $E = \{x_{1,2}, x_{2,1}, x_1, x_2\}$ . As únicas possibilidades de caminhos com mesmo início e fim em  $\Gamma$  são  $\pi_1 = \{x_{1,2}, x_1\}$  e  $\pi_2 = \{x_{2,1}, x_2\}$ . Então,

$$\begin{aligned} e(\pi_1, 1) &= x_{1,2} + x_1 & e(\pi_1, 2) &= x_{1,2}x_1. \\ e(\pi_2, 1) &= x_{2,1} + x_2 & e(\pi_2, 2) &= x_{2,1}x_2. \end{aligned}$$

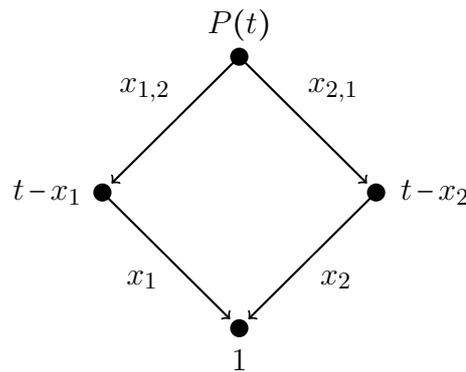
Logo,

$$\begin{aligned} e(\pi_1, 1) - e(\pi_2, 1) &= (x_{1,2} + x_1) - (x_{2,1} + x_2) \\ e(\pi_1, 2) - e(\pi_2, 2) &= x_{1,2}x_1 - x_{2,1}x_2. \end{aligned}$$

Seja  $R$  o ideal bilateral de  $T(E)$  gerado pelas relações

$$(x_{1,2} + x_1) - (x_{2,1} + x_2) \quad e \quad x_{1,2}x_1 - x_{2,1}x_2.$$

Temos que  $A(\Gamma) = T(E)/R$  é o conjunto de todas as palavras em  $x_{1,2}, x_{2,1}, x_1$ , e  $x_2$  satisfazendo  $x_{1,2} + x_1 = x_{2,1} + x_2$  e  $x_{1,2}x_1 = x_{2,1}x_2$ .



**Figura 2.2:** Grafo dos divisores à direita de um polinômio em variáveis não comutativas

**Exemplo 2.23** Seja  $\Gamma$  o grafo orientado em níveis apresentado na Figura 2.3. Temos os seguintes caminhos em  $\Gamma$ :  $\pi_1 = \{e_1, e_2\}$ ,  $\pi_2 = \{f_1, f_2\}$  e  $\pi_3 = \{g_1, g_2\}$ . Observe

que  $t(\pi_i) = t(\pi_j)$  para todo  $i, j = 1, 2, 3$ . Então o conjunto

$$\{e(\pi_i, k) - e(\pi_j, k) : t(\pi_i) = t(\pi_j), h(\pi_i) = h(\pi_j), 1 \leq k \leq l(\pi_i)\}$$

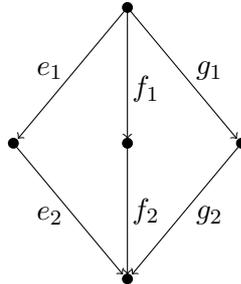
torna-se

$$\{e(\pi_1, 1) - e(\pi_2, 1), e(\pi_1, 2) - e(\pi_2, 2), e(\pi_1, 1) - e(\pi_3, 1), \\ e(\pi_1, 2) - e(\pi_3, 2), e(\pi_2, 1) - e(\pi_3, 1), e(\pi_2, 2) - e(\pi_3, 2)\}.$$

Agora

$$\begin{aligned} e(\pi_1, 1) - e(\pi_2, 1) &= e_1 + e_2 - (f_1 + f_2), & e(\pi_1, 2) - e(\pi_2, 2) &= e_1 e_2 - f_1 f_2, \\ e(\pi_1, 1) - e(\pi_3, 1) &= e_1 + e_2 - (g_1 + g_2), & e(\pi_1, 2) - e(\pi_3, 2) &= e_1 e_2 - g_1 g_2, \\ e(\pi_2, 1) - e(\pi_3, 1) &= f_1 + f_2 - (g_1 + g_2), & e(\pi_2, 2) - e(\pi_3, 2) &= f_1 f_2 - g_1 g_2. \end{aligned}$$

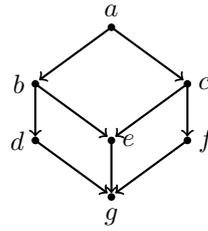
Então  $A(\Gamma)$  é a álgebra gerada por  $E = \{e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2\}$  satisfazendo as relações descritas acima.



**Figura 2.3:** Exemplo 2.23

**Definição 2.24** Sejam  $\Gamma = (V, E)$  um grafo orientado em níveis,  $v, w \in V$  e  $k, l$  inteiros positivos. Dizemos que  $(v, k)$  **cobre**  $(w, l)$  se  $v > w$ , ou seja, existe um caminho de  $v$  a  $w$  e  $k = |v| - |w|$ . Denotamos por  $(v, k) \succ (w, l)$ .

**Exemplo 2.25** No grafo a seguir temos que  $(a, 3) \succ (g, 1)$  pois existe um caminho de  $a$  a  $g$  e  $|a| - |g| = 3$ . Mas,  $(b, k) \not\succeq (f, l)$  independente dos valores de  $k$  e  $l$  pois não existe caminho de  $b$  a  $f$ , e  $(c, 2) \not\succeq (e, 1)$  uma vez que  $|c| - |e| = 1$ .

**Figura 2.4:** Exemplo 2.25

Apresentaremos a seguir dois importantes resultados, o primeiro expressa uma base para  $A(\Gamma)$  em termos do conjunto de arestas do grafo, o segundo por sua vez apresenta as álgebras  $A(\Gamma)$  como um quociente da álgebra associativa livre sobre o conjunto de vértices  $V_+$ , o que torna mais eficiente o manejo de seus elementos. Apesar de serem resultados fundamentais para a construção das próximas seções, suas demonstrações não constituem objetivos centrais deste trabalho, porém podem ser verificadas em [14] e [13] respectivamente. Focaremos os próximos passos na aplicação destes resultados.

**Teorema 2.26** *Seja  $\Gamma = (V, E)$  um grafo orientado em níveis, onde  $V = \bigcup_{i>0}^n V_i$ ,  $V_0 = \{\star\}$ . Então*

$$B = \{\hat{e}(v_1, k_1) \cdots \hat{e}(v_l, k_l) : l \geq 0, v_1, \dots, v_l \in V^+, 1 \leq k_i \leq |v_i|, (v_i, k_i) \succ (v_{i+1}, k_{i+1})\}$$

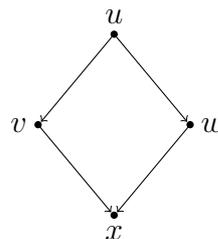
*é uma base para  $A(\Gamma)$ .*

**Teorema 2.27** *Sejam  $\Gamma$  um grafo em níveis uniforme e  $R_V$  o ideal bilateral de  $T(V^+)$  gerado por*

$$u(v-w) - v^2 + w^2 + (v-w)x : u \in \bigcup_{i=2}^n V_i; v, w \in S_1(u), x \in S_1(v) \cap S_1(w)\}.$$

*Então,  $A(\Gamma) = T(V^+)/R_V$  e  $A(\Gamma)$  é quadrática, isto é,  $R_V \subseteq V^+ \otimes V^+$ .*

Observe que o conjunto apresentado no Teorema 2.27 descreve os diamantes do grafo. Veja a figura:

**Figura 2.5:** Teorema 2.27

## 2.6 Alguns exemplos da álgebra $A(\Gamma)$

Nesta seção apresentamos as álgebras  $A(\Gamma)$  para certas classes de grafos (aqueles apresentados nos Exemplos 1.17, 1.18 e 1.19 do Capítulo 1), de forma a elucidar a aplicação dos Teoremas 2.26 e 2.27.

**Exemplo 2.28 (A álgebra  $A(\Gamma_{D_n})$ )** *Considere a álgebra associada ao grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das faces de um polígono regular de  $n$  lados, grafo conforme Exemplo 1.17. Tal álgebra, denotada  $A(\Gamma_{D_n})$ , foi construída e estudada por Duffy em [5], é determinada pelo conjunto de vértices do grafo  $\Gamma_{D_n}$ ,  $\{u, v_{ii+1}, w_i, \star\}$ , satisfazendo as relações:*

- $v_{ii+1}(w_i - w_{i+1}) - w_i^2 + w_{i+1}^2$ ;
- $u(v_{ii+1} - v_{i+1i+2}) - v_{ii+1}^2 + v_{i+1i+2}^2 + (v_{ii+1} - v_{i+1i+2})w_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Tais relações foram obtidas aplicando-se o Teorema 2.27 e nos permitem determinar a álgebra  $A(\Gamma_{D_n})$  como um quociente do conjunto de vértices do grafo  $\Gamma_{D_n}$ , e sua base é dada pela seguinte proposição:

**Proposição 2.29** *Uma base  $\mathcal{B}$  de  $A(\Gamma_{D_n})$  consiste de  $\star$  e do conjunto de todas as palavras em  $u$ ,  $v_{ii+1}$  e  $w_i$  tais que as seguintes condições são satisfeitas: a subpalavra  $v_{ii+1}w_j$  ocorre somente se  $j \neq i+1$ ; a subpalavra  $uv_{ii+1}$  ocorre somente se  $i = 1$ ; e  $uv_{ii+1}w_j$  só ocorre se  $i = j = 1$ .*

**Exemplo 2.30 (A álgebra  $A(\Gamma_\diamond)$ )** *Em [15], Vasconcelos determinou a base da álgebra associada ao grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces de um polígono estrelado, denominada  $A(\Gamma_\diamond)$ .*

Sejam  $V_3 = \{u\}$ ,  $V_2 = \{v_{ii+1}, v_{ii+2} : 1 \leq i \leq n\} = \{v_{12}, \dots, v_{n1}, v_{13}, \dots, v_{n2}\}$  e  $V_1 = \{w_1, \dots, w_n\}$ . Então  $\bigcup_{i \geq 2} V_i = \{v_{12}, \dots, v_{n1}, v_{13}, \dots, v_{n2}, u\}$ .

Observe que  $S_1(u) = V_2$  e que, para todo  $1 \leq i \leq n$ ,

$$S_1(v_{ii+1}) \cap S_1(v_{i+1i+2}) = \{w_{i+1}\},$$

$$S_1(v_{ii+2}) \cap S_1(v_{i+2i+4}) = \{w_{i+2}\},$$

e

$$S_1(v_{ii+1}) \cap S_1(v_{ii+2}) = \{w_i\}.$$

Logo, o Teorema 2.26 fornece as seguintes relações em  $A(\Gamma_\diamond)$ :

$$(a) \quad u(v_{ii+1} - v_{i+1i+2}) - v_{ii+1}^2 + v_{i+1i+2}^2 + (v_{ii+1} - v_{i+1i+2})w_{i+1};$$

- (b)  $u(v_{ii+1} - v_{ii+2}) - v_{ii+1}^2 + v_{ii+2}^2 + (v_{ii+1} - v_{ii+2})w_i$ ;  
(c)  $u(v_{ii+2} - v_{i+1i+2}) - v_{ii+2}^2 + v_{i+1i+2}^2 + (v_{ii+2} - v_{i+1i+2})w_{i+2}$ ;  
(d)  $u(v_{ii+2} - v_{i+2i+4}) - v_{ii+2}^2 + v_{i+2i+4}^2 + (v_{ii+2} - v_{i+2i+4})w_{i+2}$ ;  
(e)  $v_{ii+1}(w_i - w_{i+1}) - w_i^2 + w_{i+1}^2$ ;  
(f)  $v_{ii+2}(w_i - w_{i+2}) - w_i^2 + w_{i+2}^2$ .

Ainda, das igualdades  $(uv_{i+1i+2})w_{i+2} = u(v_{i+1i+2}w_{i+2})$  e  $(uv_{i+1i+3})w_{i+3} = u(v_{i+1i+3}w_{i+3})$ , resultam as relações adicionais:

- (g)  $uv_{ii+1}w_{i+2} - v_{ii+1}^2w_{i+2} + w_{i+2}^3 - v_{ii+1}w_iw_{i+2} - w_i^2w_{i+2} - uv_{ii+1}w_i + uw_i^2 + v_{ii+1}^2w_i - v_{i+1i+2}w_i^2 - uw_{i+1}^2$ ;  
(h)  $uv_{ii+2}w_{i+3} - v_{ii+2}^2w_{i+3} + v_{ii+2}w_iw_{i+3} - w_i^2w_{i+3} + w_{i+3}^3 - uv_{i+1i+2}w_{i+1} + v_{i+1i+2}^2w_{i+1} - v_{i+1i+2}w_{i+1}^2 + uw_{i+1}^2 - uw_{i+3}^2$ .

Foi provado que as relações (c) e (d) podem ser descartadas pois produzem o mesmo efeito que a relação (a). Assim, (a), (b), (e), (f), (g), e (h) determinam um sistema completo de reduções, resultando no seguinte resultado:

**Proposição 2.31** Uma base  $\mathcal{B}$  de  $A(\Gamma_\diamond)$  consiste de  $\star$  e do conjunto de todas as palavras em  $u, v_{ii+1}, v_{ii+2}, w_i$  tais que as seguintes condições são válidas: as subpalavras  $v_{ii+1}w_j$  ocorrem somente se  $j \neq i+1$ ,  $v_{ii+2}w_j$  ocorrem se  $j \neq i+2$ . As subpalavras  $uv_{ii+1}$  ocorrem somente se  $i = 1$ , e as subpalavras  $uv_{ii+1}w_j$  ocorrem somente se  $i = j = 1$ .

## A álgebra $A(\Gamma_{P_5})$

Seja  $\Gamma_{P_5}$  o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces de Petersen, conforme definido na Seção 1.3, e aplicando o Teorema 2.27, temos que a álgebra  $A(\Gamma_{P_5})$  é a álgebra gerada por  $\star, w_i, (i = 1, \dots, 10), v_{2j-12j+1}, v_{2k-12k}, v_{2l2l+4}, (j, k, l = 1, \dots, 5)$  satisfazendo as seguintes relações:

- $u(v_{2i-12i+1} - v_{2i-12i}) - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i-12i}^2 + (v_{2i-12i+1} - v_{2i-12i})w_{2i-1}$
- $u(v_{2i2i+4} - v_{2i-12i}) - v_{2i2i+4}^2 + v_{2i-12i}^2 + (v_{2i2i+4} - v_{2i-12i})w_{2i}$
- $u(v_{2i-12i+1} - v_{2i+12i+3}) - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i+12i+3}^2 + (v_{2i-12i+1} - v_{2i+12i+3})w_{2i+1}$
- $u(v_{2i2i+4} - v_{2i+42i+8}) - v_{2i2i+4}^2 + v_{2i+42i+8}^2 + (v_{2i2i+4} - v_{2i+42i+8})w_{2i+4}$
- $u(v_{2i-12i+1} - v_{2i+12i+2}) - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i+12i+2}^2 + (v_{2i-12i+1} - v_{2i+12i+2})w_{2i+1}$
- $u(v_{2i2i+4} - v_{2i2i+6}) - v_{2i2i+4}^2 + v_{2i2i+6}^2 + (v_{2i2i+4} - v_{2i2i+6})w_{2i}$
- $v_{2i-12i}(w_{2i-1} - w_{2i}) - w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2$

- $v_{2i-12i+1}(w_{2i-1} - w_{2i+1}) - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2$
- $v_{2i2i+4}(w_{2i} - w_{2i+4}) - w_{2i}^2 + w_{2i+4}^2$

**Teorema 2.32** *Uma base para  $A(\Gamma_{P_5})$  é o conjunto formado por  $\star$  e todas as palavras em  $u, v_{ij}, w_k$  tais que as subpalavras  $uv_{ij}w_k$  ocorrem se, e somente se,  $i = k = 1$  e  $j = 2$ ; as subpalavras do tipo  $w_{ij}$  ocorrem se, e somente se,  $i = 1$  e  $j = 2$ ; as subpalavras do tipo  $v_{ij}w_k$  ocorrem se, e somente se  $k = 1$ .*

A demonstração desse teorema foge ao escopo deste trabalho, porém encontraremos todas as relações que não são obtidas pela aplicação imediata do Teorema 2.27. Assim, teremos um sistema completo de reduções para que possamos aplicar alguma redução a toda palavra não abrangida pelo Teorema 2.32. As reduções adicionais são obtidas pelas igualdades:

$$\begin{aligned}
(uv_{2i2i+4})w_{2i+4} &= u(v_{2i2i+4}w_{2i+4}) \\
(uv_{2i-12i})w_{2i} &= u(v_{2i-12i}w_{2i}) \\
(uv_{2i+12i+3})w_{2i+3} &= u(v_{2i+12i+3}w_{2i+3}) \\
(uv_{2i+12i+2})w_{2i+2} &= u(v_{2i+12i+2}w_{2i+2}) \\
(uv_{2i2i+6})w_{2i+6} &= u(v_{2i2i+6}w_{2i+6})
\end{aligned}$$

Da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
&(uv_{2i2i+4})w_{2i+4} = (uv_{2i-12i2} - v_{2i2i+4}^2 + v_{2i-12i}^2 + (v_{2i2i+4} - v_{2i-12i})w_{2i})w_{2i+4} \\
&= uv_{2i-12i2}w_{2i+4} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+4} + v_{2i-12i}^2w_{2i+4} + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+4} - \\
&\quad v_{2i-12i}w_{2i}w_{2i+4} \\
&= uv_{2i-12i2}w_{2i+4} - v_{2i2i+4}(v_{2i2i+4}w_{2i} - w_{2i}^2 + w_{2i+4}^2) + v_{2i-12i}^2w_{2i+4} + \\
&\quad v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+4} - (v_{2i-12i}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2)w_{2i+4} \\
&= uv_{2i-12i}w_{2i+4} - v_{2i2i+4}^2w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - v_{2i2i+4}w_{2i+4}^2 + v_{2i-12i}^2w_{2i+4} + \\
&\quad v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+4} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i+4} - w_{2i-1}^2w_{2i+4} + w_{2i}^2w_{2i+4} \\
&= uv_{2i-12i}w_{2i+4} - v_{2i2i+4}^2w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - (v_{2i2i+4}w_{2i} - w_{2i}^2 + w_{2i+4}^2)w_{2i+4} + \\
&\quad v_{2i-12i}^2w_{2i+4} + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+4} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i+4} - w_{2i-1}^2w_{2i+4} + w_{2i}^2w_{2i+4} \\
&= uv_{2i-12i}w_{2i+4} - v_{2i2i+4}^2w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+4} + w_{2i}^2w_{2i+4} - w_{2i+4}^3 + \\
&\quad v_{2i-12i}^2w_{2i+4} + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+4} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i+4} - w_{2i-1}^2w_{2i+4} - w_{2i}^2w_{2i+4} \\
&= uv_{2i-12i}w_{2i+4} - v_{2i2i+4}^2w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - w_{2i+4}^3 + v_{2i-12i}^2w_{2i+4} - \\
&\quad v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i+4} - w_{2i-1}^2w_{2i+4}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& u(v_{2i2i+4}w_{2i+4}) = u(v_{2i2i+4}w_{2i} - w_{2i}^2 + w_{2i+4}) = uv_{2i2i+4}w_{2i} - uw_{2i}^2 + uw_{2i+4} \\
& = (uv_{2i-12i} - v_{2i2i+4}^2 + v_{2i-12i}^2 + (v_{2i2i+4} - v_{2i-12i})w_{2i})w_{2i} - uw_{2i}^2 + uw_{2i+4} \\
& = u(v_{2i-12i}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2) - v_{2i2i+4}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}(v_{2i-12i}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + \\
& \quad w_{2i}^2) + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - (v_{2i-12i}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2)w_{2i} - uw_{2i}^2 + uw_{2i+4} \\
& = uv_{2i-12i}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 + uw_{2i}^2 - v_{2i2i+4}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}^2 w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + \\
& \quad v_{2i-12i}w_{2i}^2 + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} + w_{2i-1}^2 w_{2i} - w_{2i}^3 - uw_{2i}^2 + uw_{2i+4} \\
& = uv_{2i-12i}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i2i+4}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}^2 w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + \\
& \quad (v_{2i-12i}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2)w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} + w_{2i-1}^2 w_{2i} - \\
& \quad w_{2i}^3 + uw_{2i+4} \\
& = uv_{2i-12i}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i2i+4}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}^2 w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + \\
& \quad v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} - w_{2i-1}^2 w_{2i} + w_{2i}^3 + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} + w_{2i-1}^2 w_{2i} - \\
& \quad w_{2i}^3 + uw_{2i+4} \\
& = uv_{2i-12i}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i2i+4}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}^2 w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 + \\
& \quad uw_{2i+4}
\end{aligned}$$

nos dá

$$\begin{aligned}
& uv_{2i-12i}w_{2i+4} - v_{2i2i+4}^2 w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - w_{2i+4}^3 + v_{2i-12i}^2 w_{2i+4} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i+4} - \\
& w_{2i-1}^2 w_{2i+4} = uv_{2i-12i}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i2i+4}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}^2 w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + \\
& v_{2i2i+4}w_{2i}^2 + uw_{2i+4}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& uv_{2i-12i}w_{2i+4} - w_{2i+4}^3 + v_{2i-12i}^2 w_{2i+4} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i+4} - w_{2i-1}^2 w_{2i+4} = uv_{2i-12i}w_{2i-1} - \\
& uw_{2i-1}^2 + v_{2i-12i}^2 w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + uw_{2i+4}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
& (uv_{2i-12i})w_{2i} = (uv_{2i-12i+1} - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i-12i}^2 + (v_{2i-12i+1} - v_{2i-12i})w_{2i-1})w_{2i} \\
& = uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}^2 w_{2i} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} \\
& = uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2 w_{2i} + v_{2i-12i}(v_{2i-12i}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2) + \\
& \quad v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i} + v_{2i-12i}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + v_{2i-12i}w_{2i}^2 + \\
&\quad v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i} + v_{2i-12i}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + (v_{2i-12i}w_{2i-1} - \\
&\quad w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2)w_{2i} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i} + v_{2i-12i}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} - \\
&\quad w_{2i-1}^2w_{2i} + w_{2i}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i} + v_{2i-12i}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} - \\
&\quad w_{2i-1}^2w_{2i} + w_{2i}^3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&(v_{2i-12i}w_{2i}) = u(v_{2i-12i}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i}^2) = uv_{2i-12i}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 + uw_{2i}^2 \\
&= (uv_{2i-12i+1} - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i-12i}^2 + (v_{2i-12i+1} - v_{2i-12i})w_{2i-1})w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 + \\
&\quad uw_{2i}^2 \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - \\
&\quad v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 - uw_{2i-1}^2 + uw_{2i}^2
\end{aligned}$$

nos dá

$$\begin{aligned}
&uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i} + v_{2i-12i}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 + v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} - w_{2i-1}^2w_{2i} + \\
&w_{2i}^3 = uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 - \\
&uw_{2i-1}^2 + uw_{2i}^2
\end{aligned}$$

implicando em

$$uv_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i} + v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} - w_{2i-1}^2w_{2i} + w_{2i}^3 = uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - \\
v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - uw_{2i-1}^2 + uw_{2i}^2.$$

Analogamente, se

$$\begin{aligned}
&(uv_{2i+12i+3})w_{2i+3} = (uv_{2i-22i+1} - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i+12i+3}^2 + (v_{2i-12i+1} - \\
&\quad v_{2i+12i+3})w_{2i+1})w_{2i+3} \\
&= uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+3} + v_{2i-12i+1}w_{2i+1}w_{2i+3} - \\
&\quad v_{2i+12i+3}w_{2i+1}w_{2i+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + v_{2i+12i+3}(v_{2i+12i+3}w_{2i+1} - w_{2i+1}^2 + w_{2i+3}^2) + \\
&\quad (v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2)w_{2i+3} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}w_{2i+3} \\
&= uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + \\
&\quad v_{2i+12i+3}w_{2i+3}^2 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+3} - w_{2i-1}^2w_{2i+3} + w_{2i+1}^2w_{2i+3} - \\
&\quad v_{2i+12i+3}w_{2i+1}w_{2i+3} \\
&= uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + \\
&\quad (v_{2i+12i+3}w_{2i+1} - w_{2i+1}^2 + w_{2i+3}^2)w_{2i+3} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+3} - w_{2i-1}^2w_{2i+3} + \\
&\quad w_{2i+1}^2w_{2i+3} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}w_{2i+3} \\
&= uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + \\
&\quad v_{2i+12i+3}w_{2i+1}w_{2i+3} - w_{2i+1}^2w_{2i+3} + w_{2i+3}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+3} - w_{2i-1}^2w_{2i+3} + \\
&\quad w_{2i+1}^2w_{2i+3} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}w_{2i+3} \\
&= uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + w_{2i+3}^3 + \\
&\quad v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+3} - w_{2i-1}^2w_{2i+3}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&u(v_{2i+12i+3}w_{2i+3}) = u(v_{2i+12i+3}w_{2i+1} - w_{2i+1}^2 + w_{2i+3}^2) \\
&= uv_{2i+12i+3}w_{2i+1} - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2 \\
&= (uv_{2i-12i+1} - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i+12i+3}^2 + (v_{2i-12i+1} - v_{2i+12i+3})w_{2i+1})w_{2i+1} - \\
&\quad uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2 \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i+1} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+1} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i+1}^2 - \\
&\quad v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2 \\
&= u(v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2) - v_{2i-12i+1}(v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2) + \\
&\quad v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} + (v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2)w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 - \\
&\quad uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2 \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 + uw_{2i+1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + \\
&\quad v_{2i-12i+1}w_{2i+1}^2 + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} - w_{2i-1}^2w_{2i+1} + \\
&\quad w_{2i+1}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2 \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - (v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - \\
&\quad w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2)w_{2i+1} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} - w_{2i-1}^2w_{2i+1} + \\
&\quad w_{2i+1}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - \\
&\quad v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} + w_{2i-1}^2w_{2i+1} - w_{2i+1}^3 + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} - \\
&\quad w_{2i-1}^2w_{2i+1} + w_{2i+1}^3 - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2 \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} - \\
&\quad v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + w_{2i+3}^3 + \\
&v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+3} - w_{2i-1}^2w_{2i+3} = uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + \\
&v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + v_{2i+12i+3}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+3}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+3}^2
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
&uv_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + w_{2i+3}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+3} - w_{2i-1}^2w_{2i+3} = \\
&uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + uw_{2i+3}^2.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
&(uv_{2i+12i+2})w_{2i+2} = (uv_{2i-12i+1} - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i+12i+2}^2 + (v_{2i-12i+1} - \\
&\quad v_{2i+12i+2})w_{2i+1})w_{2i+2} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+2} + v_{2i-12i+1}w_{2i+1}w_{2i+2} - \\
&\quad v_{2i+12i+2}w_{2i+1}w_{2i+2} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + v_{2i+12i+2}(v_{2i+12i+2}w_{2i+1} - w_{2i+1}^2 + w_{2i+2}^2) + \\
&\quad (v_{2i-12i+2}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2)w_{2i+2} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}w_{2i+2} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + \\
&\quad v_{2i+12i+2}w_{2i+2}^2 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+2} - w_{2i-1}^2w_{2i+2} + w_{2i+1}^2w_{2i+2} - \\
&\quad v_{2i+12i+2}w_{2i+1}w_{2i+2} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + \\
&\quad (v_{2i+12i+2}w_{2i+1} - w_{2i+1}^2 + w_{2i+2}^2)w_{2i+2} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+2} - w_{2i-1}^2w_{2i+2} + \\
&\quad w_{2i+1}^2w_{2i+2} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}w_{2i+2} \\
&= uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + \\
&\quad v_{2i+12i+2}w_{2i+1}w_{2i+2} - w_{2i+1}^2w_{2i+2} + w_{2i+2}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+2} - w_{2i-1}^2w_{2i+2} + \\
&\quad w_{2i+1}^2w_{2i+2} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}w_{2i+2}
\end{aligned}$$

$$= uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + w_{2i+2}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+2} - w_{2i-1}^2w_{2i+2}$$

e

$$\begin{aligned} u(v_{2i+12i+2}w_{2i+2}) &= u(v_{2i+12i+2}w_{2i+1} - w_{2i+1}^2 + w_{2i+2}^2) \\ &= uv_{2i+12i+2}w_{2i+1} - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= (uv_{2i-12i+1} - v_{2i-12i+1}^2 + v_{2i+12i+2}^2 + (v_{2i-12i+1} - v_{2i+12i+2})w_{2i+1})w_{2i+1} - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= uv_{2i-12i+1}w_{2i+1} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+1} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i+1}^2 - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= u(v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2) - v_{2i-12i+1}(v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2) + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} + (v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2)w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 + uw_{2i+1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}w_{2i+1}^2 + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} - w_{2i-1}^2w_{2i+1} + w_{2i+1}^3 - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 - uw_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - (v_{2i-12i+1}w_{2i-1} - w_{2i-1}^2 + w_{2i+1}^2)w_{2i+1} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} - w_{2i-1}^2w_{2i+1} + w_{2i+1}^3 - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} + w_{2i-1}^2w_{2i+1} - w_{2i+1}^3 + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} - w_{2i-1}^2w_{2i+1} + w_{2i+1}^3 - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+1} - w_{2i-1}^2w_{2i+1} + w_{2i+1}^3 - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \\ &= uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2 \end{aligned}$$

implica

$$uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + w_{2i+2}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+2} - w_{2i-1}^2w_{2i+2} = uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + v_{2i+12i+2}^2w_{2i+1} - v_{2i+12i+2}w_{2i+1}^2 + uw_{2i+2}^2,$$

logo

$$uv_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + w_{2i+2}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+2} - w_{2i-1}^2w_{2i+2} = uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} - uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + uw_{2i+2}^2.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& (uv_{2i2i+6})w_{2i+6} = (uv_{2i2i+4} - v_{2i2i+4}^2 + v_{2i2i+6}^2 + (v_{2i2i+4} - v_{2i2i+6})w_{2i})w_{2i+6} \\
= & uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+6}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} - \\
& v_{2i2i+6}w_{2i}w_{2i+6} \\
= & uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+6}(v_{2i2i+6}w_{2i} - w_{2i}^2 + w_{2i+6}^2) + \\
& v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} - v_{2i2i+6}w_{2i}w_{2i+6} \\
= & uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} - v_{2i2i+6}w_{2i}^2 + v_{2i2i+6}w_{2i+6}^2 + \\
& v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} - v_{2i2i+6}w_{2i}w_{2i+6} \\
= & uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} - v_{2i2i+6}w_{2i}^2 + (v_{2i2i+6}w_{2i} - \\
& w_{2i}^2 + w_{2i+6}^2)w_{2i+6} + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} - v_{2i2i+6}w_{2i}w_{2i+6} \\
= & uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} - v_{2i2i+6}w_{2i}^2 + v_{2i2i+6}w_{2i}w_{2i+6} - \\
& w_{2i}^2w_{2i+6} + w_{2i+6}^3 + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} - v_{2i2i+6}w_{2i}w_{2i+6} \\
= & uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} - v_{2i2i+6}w_{2i}^2 - \\
& w_{2i}^2w_{2i+6} + w_{2i+6}^3 + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& u(v_{2i2i+6}w_{2i+6}) = u(v_{2i2i+6}w_{2i} - w_{2i}^2 + w_{2i+6}^2) = uv_{2i2i+6}w_{2i} - uw_{2i}^2 + uw_{2i+6}^2 \\
= & (uv_{2i2i+4} - v_{2i2i+4}^2 + v_{2i2i+6}^2 + (v_{2i2i+4} - v_{2i2i+6})w_{2i})w_{2i} - uw_{2i}^2 + uw_{2i+6}^2 \\
= & uv_{2i2i+4}w_{2i} - v_{2i2i+4}^2w_{2i} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - v_{2i2i+6}w_{2i}^2 - uw_{2i}^2 + uw_{2i+6}^2
\end{aligned}$$

nos dá

$$\begin{aligned}
& uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} - v_{2i2i+6}w_{2i}^2 - w_{2i}^2w_{2i+6} + w_{2i+6}^3 + \\
& v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} = uv_{2i2i+4}w_{2i} - v_{2i2i+4}^2w_{2i} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} + v_{2i2i+4}w_{2i}^2 - v_{2i2i+6}w_{2i}^2 - uw_{2i}^2 + \\
& uw_{2i+6}^2,
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
& uv_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} - w_{2i}^2w_{2i+6} + w_{2i+6}^3 + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} = uv_{2i2i+4}w_{2i} - \\
& v_{2i2i+4}^2w_{2i} + v_{2i2i+6}^2w_{2i} - uw_{2i}^2 + uw_{2i+6}^2.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos as seguintes relações adicionais:

- $uw_{2i-12i}w_{2i+4} - w_{2i+4}^3 + v_{2i-12i}^2w_{2i+4} - v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i+4} - w_{2i-1}^2w_{2i+4} - uw_{2i-12i}w_{2i-1} + uw_{2i-1}^2 - v_{2i-12i}^2w_{2i-1} + v_{2i-12i}w_{2i-1}^2 - uw_{2i+4}$ ;
- $uw_{2i-12i+1}w_{2i} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i} + v_{2i-12i}w_{2i-1}w_{2i} - w_{2i-1}^2w_{2i} + w_{2i}^3 - uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} + v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 + uw_{2i-1}^2 - uw_{2i}^2$ ;
- $uw_{2i-22i+1}w_{2i+3} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+3} + w_{2i+3}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+3} - w_{2i-1}^2w_{2i+3} - uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} + uw_{2i-1}^2 + v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - uw_{2i+3}^2$ ;
- $uw_{2i-12i+1}w_{2i+2} - v_{2i-12i+1}^2w_{2i+2} + w_{2i+2}^3 + v_{2i-12i+1}w_{2i-1}w_{2i+2} - w_{2i-1}^2w_{2i+2} - uv_{2i-12i+1}w_{2i-1} + uw_{2i-1}^2 + v_{2i-12i+1}^2w_{2i-1} - v_{2i-12i+1}w_{2i-1}^2 - uw_{2i+2}^2$ ;
- $uw_{2i2i+4}w_{2i+6} - v_{2i2i+4}^2w_{2i+6} - w_{2i}^2w_{2i+6} + w_{2i+6}^3 + v_{2i2i+4}w_{2i}w_{2i+6} - uv_{2i2i+4}w_{2i} + v_{2i2i+4}^2w_{2i} - v_{2i2i+4}w_{2i}^2 + uw_{2i}^2 - uw_{2i+6}^2$ .

---

## As Séries de Hilbert de Álgebras $A(\Gamma)$

---

O estudo das séries de Hilbert das álgebras associadas a grafos deu-se com o intuito de investigar o comportamento de  $A(\Gamma)$  enquanto função de  $\Gamma$ . Há um interesse particular em saber se essas álgebras são de Koszul, propriedade da qual trataremos no Capítulo 5 e nos deixa um leque de possibilidades para estudos futuros. Paralelamente às séries de Hilbert, surge o estudo das funções geradoras do traço graduado, o que constitui a principal ferramenta para verificação da propriedade da kszulidade.

Neste capítulo mostraremos a expressão que permite calcular a série de Hilbert das álgebras  $A(\Gamma)$  e calculamos a série de Hilbert da álgebra associada ao grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Petersen,  $A(\Gamma_{P_5})$ .

### 3.1 Série de Hilbert de $A(\Gamma)$

Dado um  $K$ -espaço vetorial graduado, cujas componentes homogêneas possuem dimensões finitas sobre  $K$ , podemos construir uma série formal com as dimensões das componentes homogêneas, a Série de Hilbert. Tal fato nos permite estabelecer uma graduação para a dimensão do espaço.

**Definição 3.1** *Seja  $V$  um espaço vetorial  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduado e suponha que cada  $V_i$  tenha dimensão finita. Definimos a série de Hilbert de  $V$ ,  $H(V, t)$ , por*

$$H(V, t) = \sum_{i \geq 0} (\dim(V_i)) t^i.$$

**Exemplo 3.2** *Nestes termos do Exemplo 2.11 temos,  $\dim_{\mathbb{R}}(V_i) = 1$  para todo inteiro  $i \geq 0$  e,*

$$\sum_{i \geq 0} (\dim_{\mathbb{R}}(V_i)) t^i = \sum_{i \geq 0} t^i = \frac{1}{1-t}.$$

Portanto,

$$H(\mathbb{R}[x], t) = \frac{1}{1-t}.$$

Em [14] os autores apresentaram a expressão que permite calcular a série de Hilbert das álgebras associadas a grafos orientados em níveis na forma do teorema a seguir, porém escolhemos apresentar a demonstração em detalhes conforme feito de uma forma bastante particular e clara em [2].

**Teorema 3.3** *Seja  $\Gamma$  um grafo em níveis com um único vértice minimal  $\star$ , de nível 0, e  $H(t)$  a série de Hilbert da álgebra associada a  $\Gamma$ . Então,*

$$H(t) = \frac{1-t}{1 + \sum_{v_1 > \dots > v_l \geq \star} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}},$$

onde  $v_i$  e  $v_j$  vértices do grafo tais que existe um caminho de  $v_i$  a  $v_j$ .

**Demonstração.** Denote por  $h(t)$  a série de Hilbert  $H(A(\Gamma), t)$ , onde  $\Gamma$  é um grafo nas condições exigidas. Seja  $X \subseteq A(\Gamma)$  um conjunto de elementos homogêneos (assim  $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$  onde  $X_i = X \cap A(\Gamma)_i$ ), denote a “cardinalidade graduada”  $\sum_{i=0}^{\infty} |X_i| t^i$  de  $X$  por  $\|X\|$ . Seja  $B$  a base de  $A(\Gamma)$  descrita no Teorema 2.26 e, para  $v \in V_+$  seja,

$$B_v = \{\hat{e}(v_1, k_1) \cdots \hat{e}(v_l, k_l) \in B / v_1 = v\}$$

então,

$$B = \{1\} \cup \bigcup_{v \in V_+} B_v.$$

Vamos denotar por  $h_v(t)$  a dimensão graduada do subespaço de  $A(\Gamma)$  gerado por  $B_v$ . Uma vez que  $B$  é linearmente independente, temos  $\|B\| = h(t)$  e  $\|B_v\| = h_v(t)$ . Então

$$\|B\| = h(t) = 1 + \sum_{v \in V_+} h_v(t).$$

Defina  $C_v = \bigcup_{k=l}^{|v|} \hat{e}(v, k)B$ . Assim

$$\begin{aligned}
\|C_v\| &= \sum_{i \geq 0} \left| \bigcup_{k=1}^{|v|} (\hat{e}(v, k)B) \cap A(\Gamma)_i \right| t^i \\
&= \sum_{i \geq 0} \sum_{k=1}^{|v|} |\hat{e}(v, k)(B \cap A(\Gamma)_{i-k})| t^i \\
&= \sum_{k=1}^{|v|} t^k \sum_{i \geq k} |B \cap A(\Gamma)_{i-k}| t^{i-k} \\
&= \sum_{k=1}^{|v|} t^k \sum_{j \geq 0} |B \cap A(\Gamma)_j| t^j \\
&= \sum_{k=1}^{|v|} t^k h(t) \\
&= (t + \dots + t^{|v|}) h(t) \\
&= t(t + \dots + t^{|v|-1}) h(t) \\
&= t \left( \frac{t^{|v|-1} - 1}{t - 1} \right) h(t).
\end{aligned}$$

Como  $C_v \supseteq B_v$ , denotaremos por  $D_v$  o complemento  $B_v$  em  $C_v$ . Temos:

$$D_v = C_v \setminus B_v = \{\hat{e}(v, k) \hat{e}(v_1, k_1) \cdots \hat{e}(v_l, k_l) / 1 \leq k \leq |v|, (v, k) \succ (v_1, k_1), \hat{e}(v_1, k_1) \cdots \hat{e}(v_l, k_l) \in B\}.$$

Assim,

$$D_v = \bigcup_{v > v_1 > \star} \hat{e}(v, |v| - |v_1|) B_{v_1}$$

e,

$$\|D_v\| = \sum_{v > v_1 > \star} t^{|v| - |v_1|} h_{v_1}(t).$$

Logo,

$$h_v(t) = \|B_v\| = \|C_v\| - \|D_v\| = t \left( \frac{t^{|v|-1} - 1}{t - 1} \right) h(t) - \sum_{v > w > \star} t^{|v| - |w|} h_w(t).$$

Essa equação pode ser escrita em forma matricial, da seguinte maneira: organize os elementos de  $V$  em ordem decrescente e indexe os elementos dos vetores e matrizes por este conjunto ordenado. Seja  $\mathbf{h}(t)$  o vetor coluna com entrada  $h_v(t)$  na  $v$ -ésima posição (onde colocamos  $h_\star(t) = 1$ , seja  $\mathbf{u}$  o vetor com  $t^{|v|}$  na  $v$ -ésima

posição,  $\mathbf{e}_\star$  denota o vetor com  $\delta_{\star v}$  na  $v$ -ésima posição (aqui,  $\delta_{\star v}$  representa a função de Kronecker), e  $\mathbf{1}$  denota o vetor coluna cuja todas as entradas são 1.  $\zeta(t)$  denota a matriz com entradas  $\zeta_{v,w}(t)$  para  $v, w \in V$ , onde  $\zeta_{v,w}(t) = t^{|v|-|w|}$  se  $v \geq w$  e 0 caso contrário. Note que

$$\begin{aligned} \zeta(t)\mathbf{e}_\star &= \left( \sum_{b \in V} \zeta_{a,b}(t) \cdot \zeta_{b,\star}(t) \right)_{a \in V} \\ &= (\zeta_{a,\star}(t))_{a \in V} \\ &= (t^{|a|-|\star|})_{a \in V} \\ &= (t^{|a|})_{a \in V} \\ &= \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \zeta(t)(\mathbf{h}(t) - \mathbf{e}_\star) &= \left( \sum_{b \in V} \zeta_{a,b}(t)(h_b(t) - \delta_{b,\star}) \right)_{a \in V} \\ &= \left( h_a(t) + \sum_{a > b > \star} t^{|a|-|b|} h_b(t) + t^{|a|}(h_\star(t) - \delta_{\star,\star}) \right)_{a \in V} \\ &= \frac{t}{t-1} (t^{|a|-1})_{a \in V} h(t) \\ &= \frac{1}{t-1} (\mathbf{u} - \mathbf{1}) h(t). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t) - \mathbf{e}_\star &= \frac{t}{t-1} (\mathbf{u} - \zeta(t)^{-1} \mathbf{1}) h(t), \\ \Rightarrow \mathbf{1}^T (\mathbf{h}(t) - \mathbf{e}_\star) &= \frac{t}{t-1} (\mathbf{1} \mathbf{u} - \mathbf{1}^T \zeta(t)^{-1} \mathbf{1}) h(t), \\ \Rightarrow \mathbf{h}(t) - \mathbf{1} &= \frac{t}{t-1} (1 - \mathbf{1}^T \zeta(t)^{-1} \mathbf{1}) h(t), \\ \Rightarrow \frac{1-t}{h(t)} &= 1 - t \mathbf{1}^T \zeta(t)^{-1} \mathbf{1}, \\ \Rightarrow \frac{1-t}{h(t)} &= 1 + \sum_{v_1 > v_2 > \dots > v_l \geq \star} (-1)^l t^{|v_1|-|v_l|+1}. \end{aligned}$$

□

Em [9] foram determinadas as séries de Hilbert da álgebra associada ao reticulado booleano dos subconjuntos de um conjunto finito e sua dual, respectiva-

mente,  $Q_n$  e  $Q_n^!$ . Em [5], Duffy calculou a série de Hilbert da álgebra associada a  $\Gamma_{D_n}$ . Recentemente, em [15], Vasconcelos apresentou as séries de Hilbert de  $A(\Gamma_\diamond)$  e  $A(L(n, q))$  para o caso particular  $n = 2$ . Os resultados são apresentados nos exemplos a seguir.

**Exemplo 3.4** *Seja  $\Gamma$  o grafo associado ao reticulado booleano do conjuntos das partes de um conjunto finito, então a série de Hilbert da álgebra associada a  $\Gamma$  e sua dual são, respectivamente,*

$$H(Q_n, t) = \frac{1-t}{1-t(2-t)^n}, \quad H(Q_n^!, t) = \frac{1+t(2+t)^n}{1+t}.$$

**Exemplo 3.5** *A série de Hilbert de  $A(\Gamma_{D_n})$  é*

$$H(A(\Gamma_{D_n}), t) = \frac{1-t}{1-(2n+2)t+4nt^2-2nt^3+t^4}.$$

Uma estratégia alternativa à aplicação do Teorema 3.3 utilizada para calcular  $H(A(\Gamma_{D_n}))$  consiste em contar os elementos básicos de mesmo grau (denotado por  $d_i$ ) e resolver a série  $H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i$ . Veja [5].

**Exemplo 3.6** *Para  $n > 3$  ímpar, a série de Hilbert de  $A(\Gamma_\diamond)$  é*

$$H(A(\Gamma_\diamond), t) = \frac{1-t}{(n+1)^4 - 5nt^3 + 7nt^2 - (3n+2)t + 1}.$$

Esse resultado foi obtido através da contagem de todas as cadeias de  $\Gamma_\diamond$  observando que cada cadeia contribui com 1 ou -1 para o coeficiente de algum termo  $t^k$  da série. Veja [15].

**Exemplo 3.7** *Seja  $L(2, q)$  o grafo de Hasse associado ao conjuntos de subespaços de um espaço vetorial  $V$ , a série de Hilbert da álgebra associada a  $L(2, q)$  é dada pela expressão*

$$H(A(L(2, q)), t) = \frac{1-t}{-qt^3 + 2(q+1)t^2 - (q+3)t + 1}.$$

A série foi obtida utilizando o seguinte resultado:

**Teorema 3.8**

$$H(A(L(n, q)), t) = \frac{1-t}{1 - \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}_q \prod_{i=0}^{n-m-1} (1-tq^i)}.$$

Veja demonstração em [14].

### 3.2 A Série de Hilbert de $A(\Gamma_{P_5})$

Agora, calculamos a série de Hilbert da álgebra  $A(\Gamma_{P_5})$ , onde  $\Gamma(P_5)$  é o grafo conforme construção apresentada na Seção 1.3.

**Teorema 3.9** *Sejam  $P_5$  o grafo de Petersen e  $A(\Gamma_{P_5})$  a álgebra associada ao grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces de  $P_5$ . A série de Hilbert de  $A(\Gamma_{P_5})$  é dada por*

$$H(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1-t}{6t^4 - 35t^3 + 55t^2 - 25t + 1}.$$

**Demonstração.** Pelo Teorema 3.3, temos:

$$H(t) = \frac{1-t}{1 + \sum_{v_1 > \dots > v_l \geq \star} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}}.$$

Primeiramente, vamos calcular  $\sum_{v_1 > \dots > v_l \geq \star} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}$ . Como o grafo possui 4 níveis, teremos  $l = 1, 2, 3, 4$ . Então vamos contar as cadeias do grafo iniciando com  $l = 4$ , ou seja, as cadeias de comprimento 4.

$$u > \overbrace{v_{ij}}^{15} > \overbrace{w_k}^2 > \star \quad \Rightarrow \quad 30(-1)^4 t^{3-0+1} = 30t^4$$

A expressão da direita, indica que temos 15 vértices do tipo  $v_{ij}$  no nível 3 e cada um desses vértices estão ligados a dois vértices no nível 2,  $w_i$  e  $w_j$ , totalizando 30 cadeias de comprimento 4. Observe que o vértice  $u$  está no nível 4 e  $\star$  é o único vértice minimal no nível 0.

Agora calculamos a contribuição das cadeias de comprimento 3.

$$\begin{aligned} u > \overbrace{v_{ij}}^{15} > \overbrace{w_k}^2 &\Rightarrow 30(-1)^3 t^{3-1+1} = -30t^3 \\ u > \overbrace{v_{ij}}^{15} > \star &\Rightarrow 15(-1)^3 t^{3-0+1} = -15t^4 \\ u > \overbrace{w_k}^{10} > \star &\Rightarrow 10(-1)^3 t^{3-0+1} = -10t^4 \\ \overbrace{v_{ij}}^{15} > \overbrace{w_k}^2 > \star &\Rightarrow 30(-1)^3 t^{2-0+1} = -30t^3 \end{aligned}$$

Logo, para  $l = 3$  temos  $-25t^4 - 60t^3$ .

Para  $l = 2$  temos as seguintes cadeias:

$$\begin{aligned}
u > \overbrace{v_{ij}}^{15} &\Rightarrow 15(-1)^2 t^{3-2+1} = 15t^2 \\
u > \overbrace{w_k}^{10} &\Rightarrow 10(-1)^2 t^{3-1+1} = 10t^3 \\
u > \star &\Rightarrow 1(-1)^2 t^{3-0+1} = t^4 \\
\overbrace{v_{ij}}^{15} > \overbrace{w_k}^2 &\Rightarrow 30(-1)^2 t^{2-1+1} = 30t^2 \\
\overbrace{v_{ij}}^{15} > \star &\Rightarrow 15(-1)^2 t^{2-0+1} = 15t^3 \\
\overbrace{w_k}^{10} > \star &\Rightarrow 10(-1)^2 t^{1-0+1} = 10t^2
\end{aligned}$$

Somando todos os termos da direita, obtemos  $t^4 + 25t^3 + 55t^2$ .

Por fim,  $l = 1$  representa os próprios vértices do grafo, que são 25. Assim, obtemos  $25(-1)^1 t^1 = -25t$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{v_1 > \dots > v_l \geq \star} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1} &= 30t^4 - 25t^4 - 60t^3 + t^4 + 25t^3 + 55t^2 - 25t \\
&= 6t^4 - 35t^3 + 55t^2 - 25t
\end{aligned}$$

e assim,

$$H(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1-t}{6t^4 - 35t^3 + 55t^2 - 25t + 1}.$$

□

## O grupo $Aut(A(\Gamma))$

Apresentamos aqui a estrutura do grupo  $Aut(A(\Gamma))$ , onde  $\Gamma$  é um grafo orientado em níveis. Veremos que cada automorfismo  $\sigma$  do grafo  $\Gamma$  determina um automorfismo da álgebra  $A(\Gamma)$  e o grafo  $\Gamma^\sigma$ , subgrafo de  $\Gamma$  obtido pelos vértices fixados por  $\sigma$ . Determinamos o grupo de automorfismos de  $A(\Gamma_{P_5})$ , os subgrafos induzidos pelo conjunto dos vértices fixados por cada automorfismo e assim calculamos as funções geradoras do traço graduado da ação de  $Aut(A(\Gamma_{P_5}))$  sobre  $A(\Gamma_{P_5})$ .

### 4.1 A estrutura de $Aut(A(\Gamma))$

**Proposição 4.1** *Seja  $\Gamma = (V, E)$  um grafo. Então  $(Aut(\Gamma), \circ)$  é um grupo, em que  $\circ$  é a composição de funções.*

**Demonstração.** Como a associatividade é imediata, verificaremos as demais propriedades. Sejam  $\gamma, \sigma \in Aut(\Gamma)$ . É claro de  $\gamma \circ \sigma$  é uma função bijetora de  $V$ . Resta-nos provar que  $\gamma \circ \sigma$  é um homomorfismo de grafos. Sejam  $x, y \in V$  tais que  $xy \in E$ . Como  $\sigma \in Aut(\Gamma)$ , temos  $\sigma(x)\sigma(y) \in E$ . Agora,  $\sigma(x), \sigma(y) \in V$  são tais que  $\sigma(x)\sigma(y) \in E$ . Isto implica  $\gamma(\sigma(x))\gamma(\sigma(y)) \in E$ . Em resumo, se  $x, y \in V$  são tais que  $xy \in E$ , então  $\gamma \circ \sigma(x), \gamma \circ \sigma(y) \in E$ . Além disso,  $Id \in Aut(\Gamma)$ , dado por  $Id(v) = v$ , é o elemento neutro do grupo  $Aut(\Gamma)$ . Ainda, dado  $\gamma \in Aut(\Gamma)$ , tomemos o automorfismo de grafos  $\gamma : V \rightarrow V$  dado por:  $\gamma(v) = w$  se, e somente se,  $\sigma(w) = v$ . Este é o inverso de  $\sigma$ .  $\square$

Seja  $\sigma \in Aut(\Gamma)$ . Denotamos por  $\Gamma^\sigma = (V_\sigma, E_\sigma)$  o subgrafo de  $\Gamma = (V, E)$  obtido do seguinte modo:  $\Gamma^\sigma = (V_\sigma, E_\sigma)$ , onde  $V_\sigma = \{v \in V : \sigma(v) = v\}$  e  $E_\sigma = \{e \in E : t(e), h(e) \in V_\sigma\}$ , isto é,  $\Gamma^\sigma$  é o subgrafo de  $\Gamma$  induzido pelos vértices fixados por  $\sigma$ .

**Teorema 4.2** *Se  $f, g \in Aut(\Gamma)$  são conjugadas em  $Aut(\Gamma)$ , então  $\Gamma^f \cong \Gamma^g$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\Gamma^\sigma = (V_\sigma, E_\sigma)$ ,  $\Gamma^\gamma = (V_\gamma, E_\gamma)$  e  $\theta \in Aut(\Gamma)$  tais que  $\gamma = \theta\sigma\theta^{-1}$ . Definimos

$$\begin{aligned}\phi: V_\sigma &\rightarrow V_\gamma \\ v &\mapsto \theta(v).\end{aligned}$$

Dados  $v \in V_\sigma$ , temos

$$\gamma(\phi(v)) = \gamma\theta(v) = \theta\sigma(v) = \theta(v) = \phi(v).$$

Então  $\phi(v) \in V_\gamma$ . Naturalmente  $\phi$  é injetiva, pois  $h$  é um automorfismo de  $\Gamma$ . Restamos provar que  $\phi$  é sobrejetiva sobre  $V_\gamma$ . Para isto, tome  $w \in V_\gamma$ , observe que existe  $v \in V$  tal que  $v = \theta^{-1}(w)$  e que

$$\sigma(v) = \sigma(\theta^{-1}(w)) = \sigma\theta^{-1}(w) = \theta^{-1}\gamma(w) = \theta^{-1}(w) = v,$$

isto é, existe  $v \in V_\sigma$  tal que  $\phi(v) = w$ . Então  $\phi^{-1}(w) = v$ . Portanto,  $\phi$  é uma bijeção de  $V_\sigma$  em  $V_\gamma$ . Segue do fato de  $\theta$  ser homomorfismo de grafos que  $\phi$  é um homomorfismo de grafos.  $\square$

O resultado a seguir, devido a Vasconcelos ([15]), caracteriza o grupo  $Aut(A(\Gamma))$  como produto direto de  $K^*$  e  $Aut(\Gamma)$ , ou seja,  $K^* \times Aut(\Gamma)$  constitui o grupo de automorfismos que preservam uma certa filtração de  $A(\Gamma)$ .

**Teorema 4.3** *Seja  $\Gamma$  um grafo orientado em níveis satisfazendo:*

- i.  $\Gamma$  tem um único vértice minimal de nível 0,  $\{\star\}$ ;*
- ii. os vértices de nível 1 são rotulados por  $\{w_1, \dots, w_n\}$ ;*
- iii. os vértices no nível  $r$ ,  $2 \leq r \leq m$ , são indexados pelo conjunto das partes de  $\{1, \dots, n\}$ ;*
- iv. os vértices  $v_A, v_B$  estão no mesmo nível se, e somente se  $\#A = \#B$ ;*
- v. existe um caminho de  $v_A$  a  $w_i$  ( $v_A > w_i$ ) se, e somente se,  $i \in A$*
- vi.  $\#V_1 > 2$ ;*
- vii. vértices distintos não têm mesmo rótulo;*
- viii. se existe um caminho de  $u$  a  $v$  e  $|u| - |v| = 2$ , existem pelo menos dois vértices  $w_1, w_2 \in V_{|u|-1}$  tais que  $u > w_1 > v$  e  $u > w_2 > v$  ( $u, w_1, w_2$  e  $v$  formam um diamante).*

Então  $Aut(A(\Gamma)) = K^* \times Aut(\Gamma)$ , onde  $K$  é o corpo base.

Um resultado análogo foi provado anteriormente em [5], porém tratava-se de grafos orientados em níveis em que quaisquer vértices separados por dois níveis estão conectados por exatamente 0 ou exatamente 2 caminhos. Já o Teorema 4.3 abrange grafos orientados em níveis em que quaisquer vértices separados por dois níveis estão conectados por 0 ou pelo menos 2 caminhos. Neste sentido, o Teorema 4.3 torna-se uma generalização que abrange maior quantidade de grafos, sua demonstração é feita por indução sobre os níveis do grafo e pode ser verificada em [15]. A importância do Teorema 4.3 está no fato de que ele estabelece que os  $Aut(A(\Gamma))$ -módulos completamente redutíveis são exatamente os  $Aut(\Gamma)$ -módulos completamente redutíveis.

## 4.2 Representações de $Aut(A(\Gamma))$ sobre $A(\Gamma)$

Sejam  $A(\Gamma)_{[0]} = K$  e  $A(\Gamma)_{[i]} = \text{span}\{v_1 \cdots v_i : i \geq 1, v_1, \dots, v_i \in V^+\}$  a subálgebra de  $A(\Gamma)$  gerada pelos elementos de grau  $i$ .

Observe que para qualquer  $\sigma \in Aut(A(\Gamma))$ , se  $x \in A(\Gamma)_{[i]}$ , então  $\sigma(x) \in A(\Gamma)_{[i]}$ , isto é, o grau de uma palavra não muda após a ação do automorfismo.

Suponha que  $A(\Gamma)_{[i]}$  é de dimensão finita e seja  $\beta = \{x_1, \dots, x_l\}$  uma base de  $A(\Gamma)_{[i]}$ . Dados um elemento  $x_i$  da base  $\beta$  e  $\sigma \in Aut(A(\Gamma))$ , escreva

$$\sigma(x_i) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_l x_l$$

e denote por  $t_\sigma(x_i)$  o coeficiente de  $x_i$ . Nesse contexto,  $t_\sigma(x_i) = 1$  se  $\sigma$  fixa  $x_i$  ou se  $\sigma(x_i)$  é reduzido a uma palavra que contém  $x_i$  (por causa das relações de  $A(\Gamma)$ , o mesmo não acontece no caso dual) e  $t_\sigma(x_i) = 0$ , se  $\sigma(x_i)$  é uma palavra irredutível diferente de  $x_i$  ou uma palavra redutível, mas que não contém  $x_i$ .

Agora, defina

$$\begin{aligned} T_\sigma : A(\Gamma)_{[i]} &\rightarrow A(\Gamma)_{[i]} \\ T_\sigma(x) &\mapsto \sigma(x). \end{aligned} \tag{4-1}$$

Para cada  $i$  fixado, o traço de  $T_\sigma$  é denotado por  $Tr_\sigma(A(\Gamma)_{[i]})$  ou simplesmente  $Tr_{\sigma,i}$ . Em outras palavras,  $Tr_\sigma(A(\Gamma)_{[i]})$  é o traço de  $\sigma$  sobre  $A(\Gamma)_{[i]}$ , que na verdade, vemos que é obtido mediante

$$Tr_\sigma(A(\Gamma)_{[i]}) = \sum_{x \in \beta} t_\sigma(x).$$

Isso implica que  $Tr_{\sigma,i}$  é o número de palavras irredutíveis de grau  $i$  fixadas ou que se reduz a uma palavra que a contém. Por outro lado, a dimensão da

subálgebra  $A(\Gamma^\sigma)_{[i]}$  é o número de elementos de  $\beta$  fixados por  $\sigma$  somado ao número de elementos básicos (não fixados) que se reduzem a um elemento que o contém, que continua linearmente independente com os demais. Portanto,  $Tr_{\sigma,i} = \dim(A(\Gamma^\sigma)_{[i]})$ .

Agora, seja  $K$  um corpo de característica zero e note que  $Aut(\Gamma)$  é finito (pois estamos considerando  $\Gamma$  finito). Então, para cada  $i$ ,  $A(\Gamma)_{[i]}$  é um  $Aut(A(\Gamma))$ -módulo completamente redutível. Agora estudamos as representações de  $Aut(A(\Gamma))$  sobre  $A(\Gamma)_{[i]}$ .

Lembre-se

$$H(A(\Gamma^\sigma), t) = \sum_i \dim(A(\Gamma^\sigma)_{[i]}) t^i = \sum_i Tr_{\sigma,i} t^i. \quad (4-2)$$

A série de Hilbert determina a dimensão graduada de uma álgebra. Então o coeficiente de  $t^i$  é a  $i$ -ésima dimensão graduada da álgebra. Em nosso caso,  $Tr_{\sigma,i}$  é a  $i$ -ésima dimensão graduada de  $A(\Gamma)$ . Por outro lado,  $Tr_{\sigma,i}$  é o traço de  $\sigma$  sobre  $A(\Gamma)_{[i]}$ . Logo,  $\sum_i Tr_{\sigma,i} t^i$  são as funções geradoras do traço graduado, denotado por  $Tr_\sigma(A(\Gamma), t)$ . Neste sentido, a equação (4-2) estabelece que as funções geradoras do traço graduado  $Tr_\sigma(A(\Gamma), t)$  são também as funções geradoras da dimensão graduada. As funções geradoras do traço graduado podem ser determinadas por meio do seguinte resultado:

**Teorema 4.4** *Sejam  $\Gamma$  um grafo em níveis com um único vértice minimal  $\star$  de nível 0 e  $\sigma$  um automorfismo do grafo. Seja  $\Gamma^\sigma$  o subgrafo de  $\Gamma$  determinado pelos vértices fixados por  $\sigma$ . Então,*

$$Tr_\sigma(A(\Gamma), t) = \frac{1-t}{1 + \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}}.$$

### 4.3 Alguns exemplos de grupos $Aut(A(\Gamma))$

Os grupos de automorfismos dos grafos  $\mathbb{L}_n$  e  $\Gamma_{D_n}$  e de suas respectivas álgebras associadas foram estudados por Duffy em [5], já o grupo  $Aut(A(\Gamma_\diamond))$  foi estudado por Vasconcelos em [15]. Apresentaremos os resultados obtidos por ambos na forma de exemplos nesta seção e remetemos o leitor à Seção 1.2 a fim de relembrar as estruturas dos grafos citados aqui.

**Exemplo 4.5** ( $Aut(Q_n)$ ) *Temos que  $\mathbb{L}_n$  denota o diagrama de Hasse associado ao conjunto parcialmente ordenado das partes de um conjunto finito com  $n$  elementos*

e é tal que  $V_0 = \{\star\}$ ,  $V_i = \{v_A : A \subseteq \{1, \dots, n\}, \#A = i\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Uma vez que automorfismos preservam os níveis do grafo, e no caso de  $\mathbb{L}_n$  os níveis superiores dependem diretamente no nível 1, a ação dos automorfismos se dá por uma permutação de índices nos elementos do nível 1. Dessa forma,  $\text{Aut}(\mathbb{L}_n)$  é um subgrupo do grupo simétrico  $S_n$ , por outro lado, toda permutação de  $S_n$  dá origem a um automorfismo de  $\mathbb{L}_n$ , então,  $\text{Aut}(\mathbb{L}_n) = S_n$ . A álgebra associada a  $A(\mathbb{L}_n)$  é denotada por  $Q_n$ . Agora, observe que o  $\mathbb{L}_n$  satisfaz todas as hipóteses do Teorema 4.3, logo

$$\text{Aut}(Q_n) = K^* \times \text{Aut}(\mathbb{L}_n)$$

$$\text{Aut}(Q_n) = K^* \times S_n.$$

**Exemplo 4.6** ( $\text{Aut}(A(\Gamma_{D_n}))$ ) Vimos que  $\Gamma_{D_n}$  é um grafo uniforme contendo 4 níveis tais que:  $V_0 = \{\star\}$ ,  $V_1 = \{w_i : i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ ,  $V_2 = \{v_{ii+1} : i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$  e  $V_3 = \{u\}$  e existem arestas de  $u$  a todos os vértices do nível 3, cada vértice do tipo  $v_{ii+1}$  está conectado a dois vértices no nível 2,  $w_i$  e  $w_{i+1}$ , e todos os vértices do nível 1 estão conectados a  $\star$ . Duffy mostrou que  $\text{Aut}(\Gamma_{D_n})$  é o grupo diedral de ordem  $2n$  para todo  $n \geq 3$ ,  $\text{Aut}(\Gamma_{D_n}) = D_n$ . Temos que o Teorema 4.3 aplica-se ao grafo  $\Gamma_{D_n}$ , portanto para  $n \geq 3$ ,

$$\text{Aut}(A(\Gamma_{D_n})) = K^* \times D_n.$$

**Exemplo 4.7** ( $\text{Aut}(A(\Gamma_\diamond))$ ) Vasconcelos mostrou que o grupo dos automorfismos do grafo de Hasse associado as faces de um polígono estrelado de  $n$  lados é  $S_n$  se  $n = 5$  e  $D_n$  se  $n > 5$ , observando que qualquer automorfismo deve preservar os vértices em cada nível e assim atuam nos índices dos  $n$  vértices contidos no nível 1. Assim como os exemplos anteriores,  $\Gamma_\diamond$  satisfaz as propriedades exigidas pelo Teorema 4.3 e obtemos

$$\text{Aut}(A(\Gamma_\diamond)) = K^* \times S_5 \text{ para } n = 5$$

e

$$\text{Aut}(A(\Gamma_\diamond)) = K^* \times D_n \text{ para } n > 5.$$

## 4.4 O grupo de automorfismos de $A(\Gamma_{P_5})$

Seja  $\text{Aut}(\Gamma)$  o grupo de automorfismos do grafo  $\Gamma = (V, E)$ . Desejamos caracterizar o grupo de  $\text{Aut}(A(\Gamma_{P_5}))$ . Primeiramente apresentaremos  $\text{Aut}(\Gamma_{P_5})$ , onde  $\Gamma_{P_5}$  é o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Petersen.

**Proposição 4.8** *Seja  $\Gamma$  o grafo orientado em níveis das  $k$ -faces de um polígono ( $P$ ) qualquer. Então  $\text{Aut}(\Gamma) \cong \text{Aut}(P)$ .*

**Demonstração.** Seja  $\sigma \in \text{Aut}(P)$ , em que  $P$  é um polígono qualquer cujos vértices são rotulados pelos número  $1, 2, \dots, n$ . Temos que  $\sigma$  apenas permuta os vértices de  $P$  e se  $i$  e  $j$  são vértice de  $P$  formando uma aresta então  $\sigma(i)$  e  $\sigma(j)$  continuam formando uma aresta no polígono resultante após a ação de  $\sigma$  em  $P$ . Neste caso, Seja  $\hat{\sigma}$  um automorfismo de  $\Gamma$  dado por  $\hat{\sigma}(w_i) = w_{\sigma(i)}$ ,  $\hat{\sigma}(v_{ij}) = v_{\sigma(i)\sigma(j)}$ ,  $\hat{\sigma}(\star) = \star$  e  $\hat{\sigma}(u) = u$ . Agora observe que existe aresta entre  $v_{ij}$  e  $w_i$  e  $v_{ij}$  e  $w_j$ , para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . E suas imagens  $\hat{\sigma}(v_{ij})$  e  $\hat{\sigma}(w_i)$  e  $\hat{\sigma}(v_{ij})$  e  $\hat{\sigma}(w_j)$ . Portanto,  $\hat{\sigma}$  é um automorfismo do grafos orientados em níveis  $\Gamma$ . Agora, seja  $\hat{\sigma}$  um automorfismo de  $\Gamma$  e defina  $\sigma$  em  $P$  do seguinte modo:  $\sigma(i) = k$  se, e somente se,  $\hat{\sigma}(w_i) = w_k$ . Como  $\hat{\sigma}$  é um automorfismo,  $k$  é único e então  $\sigma$  está bem definido. Agora se  $i$  e  $j$  determinam uma aresta em  $P$  significa que  $v_{ij}$  é um vértice de nível 2 em  $\Gamma$  com arestas  $v_{ij}$  e  $w_i$  e  $v_{ij}$  e  $w_j$ . Aplicando  $\hat{\sigma}$  obtemos que  $\hat{\sigma}(v_{ij})$  e  $\hat{\sigma}(w_i)$  e  $\hat{\sigma}(v_{ij})$  e  $\hat{\sigma}(w_j)$  continuam formando aresta em  $\Gamma$ . Mas  $\hat{\sigma}(v_{ij}) = v_{kr}$  e  $\hat{\sigma}(w_i) = w_k$  e  $\hat{\sigma}(w_j) = w_r$ , isto é,  $\sigma(i)$  e  $\sigma(j)$  formam uma aresta. Finalmente defina  $\psi: \text{Aut}(P) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  pondo  $\psi(\sigma) = \hat{\sigma}$  e note que  $\psi(\sigma \circ \gamma) = \psi(\sigma) \circ \psi(\gamma)$ .  $\square$

**Exemplo 4.9** Na Figura 4.1 apresentamos o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das faces de um triângulo,  $\Gamma_{D_3}$ . Tal grafo tem os seguintes conjuntos de vértices e arestas, respectivamente,  $V = \{u, v_{12}, v_{23}, v_{31}, w_1, w_2, w_3, \star\}$  e  $E = \{(w_1, \star), (w_2, \star), (w_3, \star), (v_{12}, w_1), (v_{12}, w_2), (v_{31}, w_3), (v_{31}, w_1), (v_{23}, w_2), (v_{23}, w_3), (u, v_{12}), (u, v_{31}), (u, v_{23})\}$ . Observe que uma permutação  $\sigma$  de  $S_3$  atua nos vértices de  $\Gamma_{D_3}$  por:  $\sigma(\star) = \star$ ,  $\sigma(u) = u$ ,  $\sigma(w_i) = w_{\sigma(i)}$  e  $\sigma(v_{ij}) = v_{\sigma(i)\sigma(j)}$ . Por exemplo,  $\sigma = (13)$  atua em  $\Gamma_{D_3}$  do seguinte modo:  $\sigma(\star) = \star$ ,  $\sigma(u) = u$ ,  $\sigma(w_1) = w_3$ ,  $\sigma(w_2) = w_2$ ,  $\sigma(w_3) = w_1$ ,  $\sigma(v_{12}) = v_{32} = v_{23}$ ,  $\sigma(v_{23}) = v_{21} = v_{12}$  e  $\sigma(v_{13}) = v_{31} = v_{13}$ . É possível mostrar que  $\text{Aut}(\Gamma_{D_3}) = S_3$ .

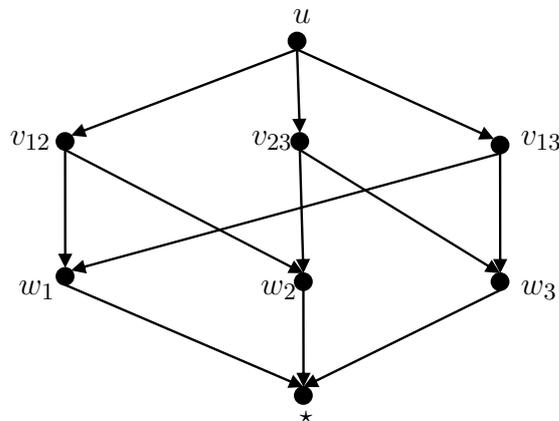


Figura 4.1:  $\Gamma_{D_3}$

O grafo  $\Gamma_{P_5}$  é formado por vértices

$$\star, u, w_k, v_{2j-12j+1}, v_{2k2k+4}, v_{2l-12l}$$

com  $i = 1, \dots, 10$  e  $j, k, l = 1, \dots, 5$  e arestas do tipo

$$(u, v_{ij}), (v_{ij}, w_i), (v_{ij}, w_j), (w_i, \star).$$

Qualquer automorfismo  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma_{P_5})$  deve preservar os níveis do grafo. Assim, deve atuar no conjunto de vértices do nível 1, mais precisamente permutando os índices dos vértices  $w_i$ . Como os índices dos vértices variam de 1 a 10, buscamos um grupo de permutações de 10 elementos, ou seja, um subgrupo de  $S_{10}$ . Listando os vértices do tipo  $v_{ij}$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} v_{2i-12i+1} \\ \\ v_{2i2i+4} \\ \\ v_{2i-12i} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{13}, \quad i = 1 \\ v_{35}, \quad i = 2 \\ v_{57}, \quad i = 3 \\ v_{79}, \quad i = 4 \\ v_{19}, \quad i = 5 \\ \\ v_{26}, \quad i = 1 \\ v_{48}, \quad i = 2 \\ v_{610}, \quad i = 3 \\ v_{28}, \quad i = 4 \\ v_{410}, \quad i = 5 \\ \\ v_{12}, \quad i = 1 \\ v_{34}, \quad i = 2 \\ v_{56}, \quad i = 3 \\ v_{78}, \quad i = 4 \\ v_{910}, \quad i = 5 \end{array} \right.$$

De acordo com a Proposição 4.8 podemos focar nas permutações que preservam a estrutura do grafo de Petersen,  $P_5$ . Considerando as permutações triviais que preservam a estrutura de  $P_5$ ,  $\alpha_1 = (13579)(246810)$ ,  $\alpha_2 = (39)(410)(57)(68)$ , além de  $\alpha_3 = (45)(68)(710)$ ,  $\alpha_4 = (239)(4106578)$ ,  $\alpha_5 = (12653)(489107)$ , encontramos um subgrupo de  $S_{10}$  de ordem 120. Dessa forma:

**Teorema 4.10**  $\text{Aut}(\Gamma_{P_5}) = G$  tal que  $G \leq S_{10}$  e  $G \cong S_5$ . Ou seja, o grupo de automorfismos de  $\Gamma_{P_5}$  é um subgrupo de  $S_{10}$  isomorfo a  $S_5$ .

Como consequência imediata dos Teoremas 4.3 e 4.10, observando que  $\Gamma_{P_5}$  satisfaz as condições do Teorema 4.3, vemos que

$$Aut(A(\Gamma_{P_5})) = K^* \times Aut(\Gamma_{P_5}).$$

## 4.5 Funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma_{P_5}))$ sobre $A(\Gamma_{P_5})$

Nesta seção determinamos as funções geradoras do traço graduado da ação de  $Aut(A(\Gamma_{P_5}))$  sobre  $A(\Gamma_{P_5})$ . Mais precisamente, para cada  $\sigma \in Aut(A(\Gamma_{P_5}))$  determinamos  $Tr_\sigma(A(\Gamma_{P_5}), t)$ , que também são as funções geradoras da dimensão graduada de  $A(\Gamma_{P_5})$ , isto é,

$$Tr_\sigma(A(\Gamma_{P_5}), t) = H(A(\Gamma_{P_5}^\sigma), t).$$

Tais funções generalizam a ideia de série de Hilbert e são importantes por nos permitir verificar a validade da equação

$$Tr_\sigma(A(\Gamma), t) \cdot Tr_\sigma(A(\Gamma)^\dagger, -t) = 1,$$

denominada "propriedade da koszulidade", da qual trataremos no Capítulo 5.

Primeiramente, determinaremos os subgrafos  $\Gamma_{P_5}^\sigma$ ,  $\sigma \in Aut(A(\Gamma_{P_5}))$ , ou seja, os subgrafos induzidos por  $V_\sigma = \{v \in V : \sigma(v) = v\}$ . Pelo Teorema 4.2 precisamos fazer isso apenas para os representantes de cada classe de conjugação de  $Aut(A(\Gamma_{P_5}))$ , (estas classes também foram encontradas utilizando recursos computacionais).

Sejam,

$$\begin{cases} \sigma_1 = (45)(68)(710), \\ \sigma_2 = (39)(410)(57)(68), \\ \sigma_3 = (239)(476)(5108), \\ \sigma_4 = (239)(4106578), \\ \sigma_5 = (12)(3698)(45107), \\ \sigma_6 = (12653)(498107), \end{cases}$$

os representantes das classes de conjugação de  $Aut(A(\Gamma_{P_5}))$ . Vamos aplicar  $\sigma_k$ , ( $k = 1, \dots, 6$ ) a todos os elementos do tipo  $v_{ij}$  em  $V$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(v_{13}) = v_{13} \\ \sigma_1(v_{35}) = v_{34} \\ \sigma_1(v_{57}) = v_{410} \\ \sigma_1(v_{79}) = v_{910} \\ \sigma_1(v_{19}) = v_{19} \\ \sigma_1(v_{12}) = v_{12} \\ \sigma_1(v_{34}) = v_{35} \\ \sigma_1(v_{56}) = v_{48} \\ \sigma_1(v_{78}) = v_{610} \\ \sigma_1(v_{910}) = v_{79} \\ \sigma_1(v_{26}) = v_{28} \\ \sigma_1(v_{28}) = v_{26} \\ \sigma_1(v_{48}) = v_{56} \\ \sigma_1(v_{410}) = v_{57} \\ \sigma_1(v_{610}) = v_{78} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2(v_{13}) = v_{19} \\ \sigma_2(v_{35}) = v_{79} \\ \sigma_2(v_{57}) = v_{57} \\ \sigma_2(v_{79}) = v_{35} \\ \sigma_2(v_{19}) = v_{13} \\ \sigma_2(v_{12}) = v_{12} \\ \sigma_2(v_{34}) = v_{910} \\ \sigma_2(v_{56}) = v_{78} \\ \sigma_2(v_{78}) = v_{56} \\ \sigma_2(v_{910}) = v_{34} \\ \sigma_2(v_{26}) = v_{28} \\ \sigma_2(v_{28}) = v_{26} \\ \sigma_2(v_{48}) = v_{610} \\ \sigma_2(v_{410}) = v_{410} \\ \sigma_2(v_{610}) = v_{48} \end{array} \right.$$

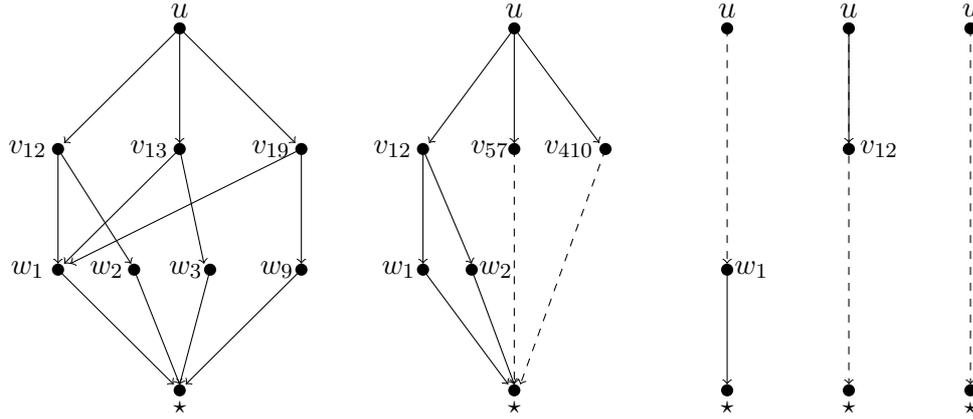
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_3(v_{13}) = v_{19} \\ \sigma_3(v_{35}) = v_{910} \\ \sigma_3(v_{57}) = v_{610} \\ \sigma_3(v_{79}) = v_{26} \\ \sigma_3(v_{19}) = v_{12} \\ \sigma_3(v_{12}) = v_{13} \\ \sigma_3(v_{34}) = v_{79} \\ \sigma_3(v_{56}) = v_{410} \\ \sigma_3(v_{78}) = v_{56} \\ \sigma_3(v_{910}) = v_{28} \\ \sigma_3(v_{26}) = v_{34} \\ \sigma_3(v_{28}) = v_{35} \\ \sigma_3(v_{48}) = v_{57} \\ \sigma_3(v_{410}) = v_{78} \\ \sigma_3(v_{610}) = v_{48} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_4(v_{13}) = v_{19} \\ \sigma_4(v_{35}) = v_{79} \\ \sigma_4(v_{57}) = v_{78} \\ \sigma_4(v_{79}) = v_{28} \\ \sigma_4(v_{19}) = v_{12} \\ \sigma_4(v_{12}) = v_{13} \\ \sigma_4(v_{34}) = v_{910} \\ \sigma_4(v_{56}) = v_{57} \\ \sigma_4(v_{78}) = v_{48} \\ \sigma_4(v_{910}) = v_{26} \\ \sigma_4(v_{26}) = v_{35} \\ \sigma_4(v_{28}) = v_{34} \\ \sigma_4(v_{48}) = v_{410} \\ \sigma_4(v_{410}) = v_{610} \\ \sigma_4(v_{610}) = v_{56} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_5(v_{13}) = v_{26} \\ \sigma_5(v_{35}) = v_{610} \\ \sigma_5(v_{57}) = v_{410} \\ \sigma_5(v_{79}) = v_{48} \\ \sigma_5(v_{19}) = v_{28} \\ \sigma_5(v_{12}) = v_{12} \\ \sigma_5(v_{34}) = v_{56} \\ \sigma_5(v_{56}) = v_{910} \\ \sigma_5(v_{78}) = v_{34} \\ \sigma_5(v_{910}) = v_{78} \\ \sigma_5(v_{26}) = v_{19} \\ \sigma_5(v_{28}) = v_{13} \\ \sigma_5(v_{48}) = v_{35} \\ \sigma_5(v_{410}) = v_{57} \\ \sigma_5(v_{610}) = v_{79} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_6(v_{13}) = v_{12} \\ \sigma_6(v_{35}) = v_{13} \\ \sigma_6(v_{57}) = v_{34} \\ \sigma_6(v_{79}) = v_{48} \\ \sigma_6(v_{19}) = v_{28} \\ \sigma_6(v_{12}) = v_{26} \\ \sigma_6(v_{34}) = v_{19} \\ \sigma_6(v_{56}) = v_{35} \\ \sigma_6(v_{78}) = v_{410} \\ \sigma_6(v_{910}) = v_{78} \\ \sigma_6(v_{26}) = v_{56} \\ \sigma_6(v_{28}) = v_{610} \\ \sigma_6(v_{48}) = v_{910} \\ \sigma_6(v_{410}) = v_{79} \\ \sigma_6(v_{610}) = v_{57} \end{array} \right.$$

Observe que os elementos do tipo  $w_i \in V$  fixados por  $\sigma_k$  são determinados pelo próprio automorfismo. Logo,  $\sigma_1$  fixa  $w_1, w_2, w_3$  e  $w_9$ ,  $\sigma_2$  fixa  $w_1$  e  $w_2$ , os automorfismos  $\sigma_3$  e  $\sigma_4$  fixam  $w_1$ , enquanto que  $\sigma_5$  não fixa elementos do tipo  $w_k$ . Na Figura 4.2 apresentamos os subgrafos de  $\Gamma$  fixados por  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$  e  $\sigma_6$ .



**Figura 4.2:**  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_1}$ ,  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_2}$ ,  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_3} = \Gamma_{P_5}^{\sigma_4}$ ,  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_5}$  e  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_6}$

**Proposição 4.11** *Sejam  $A(\Gamma_{P_5})$  a álgebra associada ao Grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Pertersen,  $\sigma_1 = (45)(68)(710)$ ,  $\sigma_2 = (39)(410)(57)(68)$ ,  $\sigma_3 = (239)(476)(5108)$ ,  $\sigma_4 = (239)(4106578)$ ,  $\sigma_5 = (12)(3698)(45107)$ ,  $\sigma_6 = (12653)(498107)$  com  $\sigma_k \in Aut(A(\Gamma_{P_5}))$  e  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Então,*

- i.  $Tr_{\sigma_1}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1}{5t^2 - 8t + 1}$ ;
- ii.  $Tr_{\sigma_2}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1}{2t^3 + t^2 - 6t + 1}$ ;
- iii.  $Tr_{\sigma_3}(A(\Gamma_{P_5}), t) = Tr_{\sigma_4}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1}{-t^2 - 2t + 1}$ ;
- iv.  $Tr_{\sigma_5}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1}{-t^2 - 2t + 1}$ ;
- v.  $Tr_{\sigma_6}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1}{-t^3 - t^2 - t + 1}$ .

**Demonstração.** Uma vez que o grafo  $\Gamma_{P_5}$  satisfaz as hipóteses do Teorema 4.4, resta-nos a aplicação imediata deste, ou seja, contar as cadeias do grafo a fim de determinar os coeficientes do polinômio  $\sum_{v_1 > \dots > v_l \geq \star} (-1)^{l|v_1| - |v_l| + 1} = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt$  na expressão

$$Tr_{\sigma}(A(\Gamma), t) = \frac{1-t}{1 + \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_{\sigma}}} (-1)^{l|v_1| - |v_l| + 1}.$$

Primeiramente, façamos algumas observações: o expoente máximo é 4 pois  $\Gamma_{P_5}$  possui apenas 4 níveis; o coeficiente de  $t^m$  é determinado pelas cadeias cujos vértices inicial e final estão separados por  $m-1$  níveis, além de que cadeias de comprimento ímpar contribuem com  $-1$  e cadeias de comprimento par contribuem com  $1$  para o cálculo do traço. Destacamos aqui que o número de arestas e de vértices em cada subgrafo determina, respectivamente, os coeficientes de  $t^2$  e  $t$  no traço graduado correspondente.

i.  $\sigma_1 = (45)(68)(710)$  fixa  $u, v_{12}, v_{13}, v_{19}, w_1, w_2, w_3, w_9, \star$ . Assim as cadeias

$$\begin{aligned} u > v_{12} > w_1 > \star, u > v_{12} > w_2 > \star, u > v_{13} > w_1 > \star, \\ u > v_{13} > w_1 > \star, u > v_{19} > w_1 > \star, u > v_{19} > w_9 > \star, \\ u > v_{12} > \star, u > v_{13} > \star, u > v_{19} > \star, \\ u > w_1 > \star, u > w_2 > \star, u > w_3 > \star, \\ u > w_9 > \star, u > \star, \end{aligned}$$

determinam o coeficiente de  $t^4$ . Assim, o coeficiente de  $t^4$  é 0. As cadeias

$$\begin{aligned} u > v_{12} > w_1, u > v_{12} > w_2, u > v_{13} > w_1, u > v_{13} > w_3, \\ u > v_{19} > w_1, u > v_{19} > w_9, v_{12} > w_1 > \star, v_{12} > w_2 > \star, \\ v_{13} > w_1 > \star, v_{13} > w_3 > \star, v_{19} > w_1 > \star, v_{19} > w_9 > \star, \\ u > w_1, u > w_2, u > w_3, u > w_9, v_{12} > \star, v_{13} > \star, v_{19} > \star, \end{aligned}$$

determinam o coeficiente de  $t^3$ . Portanto, o coeficiente de  $t^3$  é  $-5$ . As cadeias

$$\begin{aligned} u > v_{12}, u > v_{13}, u > v_{19}, v_{12} > w_1, v_{12} > w_2, v_{13} > w_1, v_{13} > w_3, \\ v_{19} > w_1, v_{19} > w_9, w_1 > \star, w_2 > \star, w_3 > \star, w_9 > \star, \end{aligned}$$

determinam o coeficiente de  $t^2$ . Assim, o coeficiente de  $t^2$  é 13. Finalmente, o grafo  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_1}$  possui 9 vértices, ou seja, quando  $l=1$  temos  $9(-1)^1 t^{|v_1|-|v_l|+1} = -9t$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1|-|v_l|+1} &= -5t^3 + 13t^2 - 9t. \\ \Rightarrow Tr_{\sigma_1}(A(\Gamma_{P_5}), t) &= \frac{1-t}{-5t^3 + 13t^2 - 9t} = \frac{1}{5t^2 - 8t + 1}. \end{aligned}$$

ii.  $\sigma_2 = (39)(410)(57)(68)$  fixa  $u, v_{12}, v_{57}, v_{410}, w_1, w_2, \star$ . O coeficiente de  $t^4$ ,  $-2$  é determinado pelas cadeias

$$\begin{aligned} u > v_{12} > w_1 > \star, u > v_{12} > w_2 > \star, u > v_{12} > \star, u > v_{57} > \star, \\ u > v_{410} > \star, u > w_1 > \star, u > w_2 > \star, u > \star, \end{aligned}$$

o coeficiente de  $t^3$ ,  $1$ , é determinado por

$$u > v_{12} > w_1, u > v_{12} > w_2, v_{12} > w_1 > \star, v_{12} > w_2 > \star, \\ u > w_1, u > w_2, v_{12} > \star, v_{57} > \star, v_{410} > \star,$$

o coeficiente de  $t^2$ , 7 é determinado por

$$u > v_{12}, u > v_{57}, u > v_{410}, v_{12} > w_1, v_{12} > w_2, w_1 > \star, w_2 > \star,$$

e,  $l = \text{no dá } 7(-1)^1 t^{|v_1|-|v_l|+1} = -7t$ . Portanto,

$$\Rightarrow \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1|-|v_l|+1} = -2t^4 + t^3 + 7t^2 - 7t. \\ \Rightarrow Tr_{\sigma_2}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1-t}{-2t^4 + t^3 + 7t^2 - 7t} = \frac{1}{2t^3 + t^2 + 6t + 1}.$$

iii.  $\sigma_3 = (239)(476)(5108)$ , assim como  $\sigma_4 = (239)(4106578)$ , fixa apenas  $u$ ,  $w_1$  e  $\star$ . Desta forma, as únicas cadeias possíveis são:

$$u > w_1 > \star, u > w_1, u > \star \text{ e } w_1 > \star,$$

que nos fornece, respectivamente,  $-t^4$ ,  $t^3$ ,  $t^4$  e  $t^2$ . Observando que  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_3} = \Gamma_{P_5}^4$  possuem apenas vértices, temos:

$$\Rightarrow \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1|-|v_l|+1} = t^3 - t^2 + 3t. \\ \Rightarrow Tr_{\sigma_3}(A(\Gamma_{P_5}), t) = Tr_{\sigma_4}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1-t}{t^3 - t^2 + 3t} = \frac{1}{t^2 - 2t + 1}.$$

iv.  $\sigma_5 = (12)(3698)(45107)$  fixa  $u$ ,  $v_{12}$  e  $\star$ , de forma que  $\Gamma_{P_5}^{\sigma_5}$  nos apresenta as seguintes cadeias:

$$u > v_{12} > \star, u > v_{12}, u > \star \text{ e } v_{12} > \star.$$

Assim,

$$\Rightarrow \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1|-|v_l|+1} = t^3 + t^2 - 3t. \\ \Rightarrow Tr_{\sigma_5}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1-t}{t^3 + t^2 - 3t} = \frac{1}{-t^2 - 2t + 1}.$$

v.  $\sigma_6 = (12653)(498107)$  fixa apenas  $u$  e  $\star$ . Assim,  $u > \star$  é a única cadeia a ser considerada, nos fornecendo a expressão

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1} = t^4 - 2t. \\ \Rightarrow & Tr_{\sigma_6}(A(\Gamma_{P_5}), t) = \frac{1-t}{t^4-2t} = \frac{1}{-t^3-t^2-t+1}. \end{aligned}$$

□

---

# A Álgebra $A(\Gamma)!$ e a Propriedade da Koszulidade

---

Este capítulo tem como objetivo enunciar a propriedade da Koszulidade uma vez que em [13] os autores provaram que  $A(\Gamma)$  é uma álgebra Koszul quando  $\Gamma$  é um grafo uniforme com um único vértice minimal. Iniciaremos construindo a álgebra graduada associada  $gr(A(\Gamma))$  a fim de definirmos  $A(\Gamma)!$  e  $A(\Gamma^\sigma)$ , respectivamente, a álgebra quadrática dual da álgebra  $gr(A(\Gamma))$  e a subálgebra de  $gr(A(\Gamma))$  determinada pelo subgrafo  $\Gamma^\sigma$  dos vértices fixados por  $\sigma$ . Para mais detalhes veja [6].

Não traremos as demonstrações dos resultados, pois teríamos muitos detalhes a apresentar. Nosso objetivo é apresentar problemas relacionados à koszulidade a fim de indicar o caminho natural da continuidade de nossa investigação a respeito da álgebra relacionada ao grafo de Petersen.

## 5.1 A álgebra graduada associada $gr(A(\Gamma))$

Sejam  $V$  e  $E$  o conjunto de vértices e arestas de  $\Gamma$  respectivamente e  $W = KV$  (ou  $W = KE$ ) conforme construção apresentada na Seção 2.3. Considere  $W = \bigoplus W_i$  uma graduação de  $W$ . Temos que

$$T(W) = \bigoplus_i T(W)_{[i]},$$

onde

$$T(W)_{[0]} = K, \quad T(W)_{[i]} = \underbrace{W \otimes W \otimes \cdots \otimes W}_i \text{ fatores}$$

é uma graduação de  $T(W)$ . Outra graduação é dada por  $T(W) = \bigoplus_{i \geq 0} T(W)_i$ , onde

$$T(W)_i = \text{span}\{w_1 \cdots w_r : r \geq 0, w_j \in W_{l_j}, l_1 + \cdots + l_r = i\}.$$

Essa segunda graduação induz a seguinte filtração em  $T(W)$ :

$$T(W)_{(i)} = \text{span}\{w_1 \cdots w_r : r \geq 0, w_j \in W_{l_j}, l_1 + \cdots + l_r \leq i\} = T(W)_0 + \cdots + T(W)_i.$$

Como

$$T(W)_{(i)}/T(W)_{(i-1)} \cong T(W)_i,$$

podemos identificar  $T(W)$  com sua álgebra graduada associada,  $gr(T(W))$ , definida pela filtração anterior. Defina uma aplicação

$$gr : T(W) \setminus \{0\} \rightarrow T(W) \setminus \{0\} = gr(T(W)),$$

com

$$gr(w) = gr\left(\sum_{i=0}^k w_i\right) = w_k,$$

onde  $w_i \in T(W)_i$  e  $w_k \neq 0$ . Note que  $gr$  não é uma aplicação aditiva.

Em [13] os autores provaram que a álgebra graduada associada de  $A(\Gamma)$ ,  $gr(A(\Gamma))$ , é isomorfa à  $T(E)/(gr(R))$  onde as relações graduadas em  $gr(R)$  são as seguintes: para caminhos  $\pi_1 = \{e_1, \dots, e_m\}$  e  $\pi_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ ,

$$\{e_1 \cdots e_k = f_1 \cdots f_k, 1 \leq k \leq m\},$$

ou seja, caminhos de mesmo comprimento determinam as igualdades dos coeficientes líderes dos elementos gerados por eles. Dessa maneira, temos a álgebra graduada associada,  $gr(A(\Gamma))$ , em termos do conjunto de arestas do grafo  $\Gamma$ .

**Lema 5.1** *Sejam  $W = \bigoplus_i W_i$  um espaço vetorial graduado e  $I$  um ideal em  $T(W)$ . Então*

$$gr(T(W)/I) \simeq T(W)/(gr(I)).$$

A proposição a seguir mostra como podemos obter  $gr(A(\Gamma))$  como quociente do conjunto de vértices do grafo  $\Gamma$ . Além de caracterizar as componentes homogêneas  $A(\Gamma)_{(i)}$ .

**Proposição 5.1** *Seja  $\Gamma$  um grafo em níveis uniforme. Então  $gr(A(\Gamma)) \simeq T(V^+)/gr(R_V)$ , onde  $gr(R_V)$  é gerado por*

$$\{v(u-w) : v \in \bigcup_{i=2}^n V_i, u, w \in S_1(v)\}.$$

Além disso,

$$A(\Gamma)_i = (T(E)_i + R)/R = (T(V^+)_i + R_V)/R_V$$

e

$$A(\Gamma)_{(i)} = (T(E)_{(i)} + R)/R = (T(V^+)_{(i)} + R_V)/R_V.$$

## 5.2 As álgebras $A(\Gamma)^\dagger$ e $A(\Gamma^\sigma)$

Ainda nos termos da seção anterior, temos:

**Definição 5.2** A álgebra dual de  $A(\Gamma)$ ,  $A(\Gamma)^\dagger$ , é definida por

$$A(\Gamma)^\dagger = T(E^*)/(gr R)^\perp,$$

isto é,  $A(\Gamma)^\dagger := (gr A(\Gamma))^\dagger$ .

Uma apresentação para a álgebra dual  $A(\Gamma)^\dagger$  em termos do conjunto de vértices do grafo é dada pela proposição a seguir. O resultado foi apresentado em [5] e sua demonstração pode ser encontrada em [6]. Logo em seguida apresentamos uma base para  $A(\Gamma^\sigma)$ , subálgebra de  $gr(A(\Gamma))$  determinada pelo subgrafo induzido pelo conjunto dos vértices fixados por  $\sigma$ .

**Proposição 5.3** A álgebra dual  $A(\Gamma)^\dagger$  tem uma apresentação com geradores  $e(v, 1)^*$  e relações

$$\{e(v, 1)^* e(u, 1)^* : v \not\prec u\} \cup \{e(v, 1)^* \cdot \sum_{v \succ u} e(u, 1)^*\}.$$

Agora, sejam  $\sigma \in Aut(\Gamma)$ ,  $\Gamma^\sigma$  o subgrafo de  $\Gamma$  induzido por  $\{v \in V : \sigma(v) = v\}$  e  $B_\sigma$  o conjunto

$$\{e(v_1, k_1) \cdots e(v_l, k_l) : l \geq 0, v_1, \dots, v_l \in (V^+)_\sigma, 1 \leq k_i \leq |v_i|, (v_i, k_i) \not\prec (v_{i+1}, k_{i+1})\}.$$

**Definição 5.4**  $A(\Gamma^\sigma) = span(B_\sigma)$ .

De fato,  $B_\sigma$  é uma base para  $A(\Gamma^\sigma)$ , pois tal conjunto é um subconjunto da base  $B$  de  $A(\Gamma)$  dada pelo Teorema 2.26. O resultado a seguir caracteriza  $A(\Gamma^\sigma)$  como uma subálgebra de  $gr(A(\Gamma))$  e sua demonstração pode ser vista em [5].

**Teorema 5.5**  $A(\Gamma^\sigma)$  é uma subálgebra de  $gr(A(\Gamma))$ . Além disso, uma apresentação para  $A(\Gamma^\sigma)$  é dada por geradores

$$G' = \{e(v, k) : v \in V_\sigma, 1 \leq k \leq |v|\}$$

e relações

$$R' = \{e(v, k+l) - e(v, k)e(u, l) : v > u \in V_\sigma, k = |v| - |u|\}.$$

### 5.3 Representações de $Aut(A(\Gamma))$ sobre $A(\Gamma)^\dagger$

Nos termos da Seção 4.2, relembramos que o Teorema 4.4 apresenta a expressão que nos permite calcular as funções geradoras do traço graduado da ação de  $Aut(A(\Gamma))$  sobre  $A(\Gamma)$ , a saber,

$$Tr_\sigma(A(\Gamma), t) = \frac{1-t}{1 + \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}}.$$

Observe que o mesmo não pode ser utilizado para determinar  $Tr_\sigma(A(\Gamma)^\dagger, t)$ , uma vez que  $A(\Gamma)$  e  $A(\Gamma)^\dagger$  possuem estruturas diferentes. Porém as relações duais dadas pela Proposição 5.5 mostram que para um grafo orientado em níveis uniforme, com  $n$  níveis, temos

$$A(\Gamma)^\dagger = A(\Gamma)^\dagger_{[0]} \oplus A(\Gamma)^\dagger_{[1]} \oplus \dots \oplus A(\Gamma)^\dagger_{[n-1]}.$$

Nesse caso,

$$Tr_\sigma(A(\Gamma)^\dagger, t) = \sum_{i=0}^{n-1} Tr_\sigma(A(\Gamma)^\dagger_{[i]}) t^i, \quad (5-1)$$

onde  $Tr_\sigma(A(\Gamma)^\dagger_{[i]})$  é o traço de  $\sigma$  sobre  $A(\Gamma)^\dagger_{[i]}$ .

### 5.4 Álgebras Koszul e numericamente Koszul

As definições e resultados apresentados de forma sucinta nesta seção podem ser verificados em [1], [7], [12], [13] e ainda em [15].

Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $R$  um conjunto de relações na álgebra tensorial  $T(V)$ , para um inteiro positivo  $k$ ,  $V^k = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$  ( $k$  cópias) e  $\mathcal{Y}'$  o reticulado de subespaços gerados por  $V^i R V^j$ , isto é, o reticulado gerado por essa coleção de subespaços. Dizemos que a álgebra  $T(V)/\langle R \rangle$  é uma **álgebra Koszul** se, e somente se, o reticulado  $\mathcal{Y}'$  é distributivo.

Essa é apenas uma das caracterizações das álgebras Koszul. Algumas outras envolvem propriedades homológicas, o que torna a teoria de representação dessas álgebras particularmente simples. É de grande interesse, portanto, determinar se uma álgebra é ou não Koszul.

Sob certas hipóteses, as séries de Hilbert de uma álgebra quadrática  $A$  e de sua quadrática dual  $A^!$  têm uma relação importante, apresentada abaixo.

**Definição 5.6** *Uma álgebra quadrática  $A$  é numericamente Koszul se*

$$H(A, t) \cdot H(A^!, -t) = 1. \quad (5-2)$$

Em [8], Fröberg mostra que toda álgebra Koszul satisfaz a Definição 5.6, ou seja:

**Teorema 5.7** *Toda álgebra Koszul é numericamente Koszul.*

Porém, a recíproca do Teorema 5.7 não é verdadeira.

O resultado a seguir estabelece condições para que uma álgebra do tipo  $A(\Gamma)$  seja Koszul.

**Teorema 5.8** *Seja  $\Gamma$  um grafo em níveis uniforme com um único vértice minimal de nível 0,  $\star$ . Então  $A(\Gamma)$  é uma álgebra Koszul.*

Um problema interessante seria determinar para quais  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$  as álgebras  $A(\Gamma)$  e  $A(\Gamma)^!$  satisfazem a igualdade (5-3) a fim de verificar a seguinte propriedade:

**Definição 5.9** *Seja  $\Gamma$  um grafo orientado em níveis uniforme. Se para cada  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$  a igualdade*

$$\text{Tr}_\sigma(A(\Gamma), t) \cdot \text{Tr}_\sigma(A(\Gamma)^!, -t) = 1 \quad (5-3)$$

*for verificada, dizemos que  $A(\Gamma)$  satisfaz a propriedade da kszulidade.*

Observe que as definições de “álgebra Koszul”, “numericamente Koszul” e “satisfazer a propriedade da kszulidade” são distintas. Dizer que uma álgebra é Koszul implica em ser numericamente Koszul, porém não implica que essa satisfaz a propriedade da kszulidade. Em [15], podemos ver casos em que  $\text{Tr}_\sigma(A(\Gamma), t)$  não coincide com a série de Hilbert de uma álgebra graduada. O que ocorre é que se encontram coeficientes negativos para a maioria dos automorfismos que não são a identidade. No mesmo trabalho, encontramos subálgebras associadas a vértices fixados que satisfazem (5-3), mas não necessariamente são numericamente Koszul.

Os grafos em níveis considerados neste trabalho são uniformes e têm um único vértice minimal. Então os Teoremas 5.8 e 5.7 garantem a validade da equação (5-2). O mesmo não pode ser aplicado diretamente às álgebras  $A(\Gamma^\sigma)$ , pois

$Tr_\sigma(A(\Gamma)^\dagger, t)$  não representam as funções geradoras da dimensão graduada, ou seja, no caso dual as noções de traço graduado e dimensão graduada não coincidem.

**Exemplo 5.10** *Temos que o grafo  $\Gamma_\diamond$  é uniforme e a álgebra  $A(\Gamma_\diamond)$ , considerando a álgebra quadrática dual  $A(\Gamma_\diamond)^\dagger$ , associada a  $gr(A(\Gamma_\diamond))$ , Vasconcelos ([15]) calculou as multiplicidades das representações irredutíveis de  $Aut(A(\Gamma_\diamond))$  sobre  $A(\Gamma_\diamond)$  e  $A(\Gamma_\diamond)^\dagger$  e verificou que as funções geradoras do traço graduado das mesmas satisfazem a propriedade da kszulidade, isto é, estão relacionadas pela igualdade*

$$Tr_\sigma(A(\Gamma_\diamond), t) \cdot Tr_\sigma(A(\Gamma_\diamond)^\dagger, -t) = 1. \quad (5-4)$$

*O mesmo foi verificado para  $A(L(2, q))$  e  $A(L(2, q))^\dagger$*

No decorrer de todo o texto apresentamos a teoria relacionada às álgebras associadas a grafos e expomos como exemplos os resultados obtidos nos dois principais (e recentes) trabalhos que abordam o assunto (Duffy, [5] e Vasconcelos, [15]) e verificamos os resultados para um caso particular, o grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do Grafo de Petersen. Porém, muitos resultados estão a serem verificados para  $\Gamma_{P_5}$ , como o caso da dual e a verificação da propriedade da kszulidade. O próximo passo na pesquisa seria então repetir o processo apresentado nesse capítulo para o grafo de Petersen, a exemplo do que foi apresentado nas duas referências citadas acima.

---

## Considerações Finais

---

Neste trabalho estudamos as álgebras  $A(\Gamma)$  associadas a grafos orientados em níveis com um único vértice minimal. Vimos que, sob essas condições,  $A(\Gamma)$  é quadrática e admite uma graduação em subespaços de dimensão finita. Apresentamos então a expressão que nos permite calcular a série de Hilbert dessas álgebras e, considerando um caso especial, calculamos a série de Hilbert da álgebra associada ao grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das  $k$ -faces do grafo de Petersen,  $\Gamma_{P_5}$ . Mostramos a relação entre o grupo dos automorfismos de  $\Gamma$  e o grupo dos automorfismos da álgebra a ele associada e, ainda considerando o grafo  $\Gamma_{P_5}$ , determinamos os subgrafos induzidos pelo conjunto de vértices fixados por cada  $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma_{P_5})$  e calculamos as funções geradoras do traço graduado.

Introduzimos as álgebras  $A(\Gamma)^!$  e  $A(\Gamma)^\sigma$ , respectivamente, a álgebra dual de  $A(\Gamma)$  e a subálgebra da álgebra graduada  $gr(A(\Gamma))$  determinada pelos vértices fixados pelo automorfismo  $\sigma$ . E enunciamos a propriedade da kszulidade a fim de elucidar os próximos passos a serem trilhados no estudo da álgebra associada ao grafo de Petersen.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] BACKELIN, J. **A distributiveness property of augmented algebras and some related homological results**, 1982.
- [2] BARBOZA, M. B. **Sobre uma classe de Álgebras associadas a duas famílias de grafos orientados**. 2015. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás - Goiânia.
- [3] COXETER, H. S. M. **Regular polytopes**. Dover Publications, 1973.
- [4] DIESTEL, R. **Graph theory**. 2005. Grad. Texts in Math, 2005.
- [5] DUFFY, C. **Representations of  $\text{Aut}(A(\Gamma))$  acting on homogeneous components of  $A(\Gamma)$  and  $A(\Gamma)^\dagger$** . Adv. in Appl. Math., 42(1):94–122, 2009.
- [6] DUFFY, C. M. **Graded traces and irreducible representations of  $\text{Aut}(A(\Gamma))$  acting on graded  $A(\Gamma)$  and  $A(\Gamma)^\dagger$** . ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2008. Thesis (Ph.D.)—Rutgers The State University of New Jersey - New Brunswick.
- [7] FRÖBERG, R. **Koszul algebras**. In: ADVANCES IN COMMUTATIVE RING THEORY (FEZ, 1997), volume 205 de **Lecture Notes in Pure and Appl. Math.**, p. 337–350. Dekker, New York, 1999.
- [8] FRÖBERG, R. **Determination of a class of Poincaré series**. Math. Scand., 37(1):29–39, 1975.
- [9] GELFAND, I; GELFAND, S; RETAKH, V; SERCONEK, S; LEE, W. R. **Hilbert series of quadratic algebras associated with pseudo-roots of noncommutative polynomials**. J. Algebra, 254(2):279–299, 2002.
- [10] GELFAND, I; RETAKH, V; SERCONEK, S; WILSON, R. L. **On a class of algebras associated to directed graphs**. Selecta Math. (N.S.), 11(2):281–295, 2005.
- [11] GELFAND, I; RETAKH, V; WILSON, R. L. **Quadratic linear algebras associated with factorizations of noncommutative polynomials and**

- noncommutative differential polynomials. *Selecta Math. (N.S.)*, 7(4):493–523, 2001.
- [12] POLISHCHUK, A; POSITSELSKI, L. **Quadratic algebras**, volume 37 de **University Lecture Series**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [13] RETAKH, V; SERCONEK, S; WILSON, R. L. **On a class of Koszul algebras associated to directed graphs**. *J. Algebra*, 304(2):1114–1129, 2006.
- [14] RETAKH, V; SERCONEK, S; WILSON, R. L. **Hilbert series of algebras associated to directed graphs**. *J. Algebra*, 312(1):142–151, 2007.
- [15] VASCONCELOS, J. E. S. **Álgebras associadas a grafos orientados em níveis e a propriedade da koszulidade**. 2014. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Goiás - Goiânia.