

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

NEWTON MAYER SOLÓRZANO CHÁVEZ

**Volumes e Curvaturas Médias na
Geometria de Finsler: Superfícies
Mínimas**

Goiânia
2011

NEWTON MAYER SOLÓRZANO CHÁVEZ

Volumes e Curvaturas Médias na Geometria de Finsler: Superfícies Mínimas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Goiânia
2011

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

Chávez, Newton Mayer Solórzano.
C512v Volumes e Curvaturas Médias na Geometria de Finsler
[manuscrito]: Superfícies Mínimas / Newton Mayer
Solórzano Chávez. - 2011.
xv, 65 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2011.
Bibliografia.

1. Espaços de Randers. 2. Curvatura Média. 3. BH-
mínima, HT-mínima. I. Título.

CDU: 514.763.62

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Newton Mayer Solórzano Chávez

Graduou-se em Matemática na Universidade Nacional Santiago Antunez de Mayolo - Perú.

A meus pais Cayetano Solórzano e Marciana Chávez.

Agradecimentos

É conhecido que o homem é de natureza sociável, é por isso, que o homem estendeu-se notavelmente no âmbito do científico. Quero agradecer então, as pessoas que tem influenciado na elaboração de esta dissertação.

Em primeiro lugar quero agradecer a meu orientador, o professor Dr. Marcelo Almeida de Souza, quem de acordo a seus conhecimentos e exigências fez do processo de execução, uma experiência favorável na minha formação.

Agradeço em segundo lugar aqueles que são o suporte de meus ideais e paixões: meus pais, que sempre apoiaram minhas decisões no material e por suposto no espiritual. Faltam palavras para agradecer-os por tudo o que representam na minha vida. Imagino minha vida sem pais assim, e não vejo um futuro bom. . .

À todos eles devo minhas bases na Matemática.

Em terceiro lugar, agradeço à meus amigos, companheiros de aulas, que de uma ou outra forma influenciarem na execução de esta dissertação.

E por último, quero agradecer à meus professores mais influentes no aspecto do meu processo de evolução mental e espiritual, no colégio (ensino médio), na universidade do Perú e na UFG. A vocês devo meu avanço na Matemática e o carinho pela Geometria.

Gracias a todos ellos, no los olvidaré. . . (Obrigado, não esquecerei de vocês...)

"É provável que viver na terra seja caro, mas inclui uma viagem gratuita em torno do Sol a cada ano."

Adagio Popular.

Resumo

Solórzano Chávez, Newton Mayer. **Volumes e Curvaturas Médias na Geometria de Finsler: Superfícies Mínimas.** Goiânia, 2011. 65p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Na Geometria de Finsler, temos várias formas volume, conseqüentemente várias formas curvaturas médias. As duas mais conhecidas são as formas de volumes Busemann-Hausdorff e Holmes-Thompson. As superfícies mínimas com respeito a estes são chamados superfícies BH-mínimas e HT-mínimas, respectivamente. Seja $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ um espaço de Minkowski do tipo Randers com $\tilde{F}_b = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, onde $\tilde{\alpha}$ é a métrica Euclidiana e $\tilde{\beta} = bdx^3, 0 < b < 1$. Uma superfície em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ conexa M é mínima com respeito a ambas formas volumes Busemann-Hausdorff e Holmes-Thompson, então a menos de uma translação paralela de \mathbb{R}^3 , M é parte de um plano ou parte de um helicóide, a qual é gerada pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 . Ademais podemos obter explicitamente hipersuperfícies de rotação BH-mínima e HT-mínima geradas por uma curva plana em torno do eixo na direção de $\tilde{\beta}^\sharp$ num espaço (α, β) de Minkowski (V^{n+1}, \tilde{F}_b) , onde V^{n+1} é um espaço vetorial de dimensão $(n + 1)$, $\tilde{F}_b = \tilde{\alpha}\phi\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right)$, $\tilde{\alpha}$ é a métrica Euclidiana, $\tilde{\beta}$ é uma 1-forma constante com norma $b := \|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\beta}^\sharp$ é o vetor dual de $\tilde{\beta}$ com respeito a α . Como aplicação, se dá uma expressão explícita de superfície de rotação completa “forward” BH-mínima gerada pela rotação em torno do eixo na direção de $\tilde{\beta}^\sharp$ num espaço de Minkowski do tipo Randers $(V^3, \tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$.

Palavras-chave

Espaços de Minkowski do tipo Randers, Curvatura Média, BH-mínima, HT-mínima.

Abstract

Solórzano Chávez, Newton Mayer. **Volumes e Curvaturas Médias na Geometria de Finsler: Superfícies Mínicas.** Goiânia, 2011. 65p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In Finsler geometry, we have several volume forms, hence various of mean curvature forms. The two best known volumes forms are the Busemann-Hausdorff and Holmes-Thompson volume form. The minimal surface with respect to these volume forms are called BH-minimal and HT-minimal surface, respectively. Let (R^3, \tilde{F}_b) be a Minkowski space of Randers type with $\tilde{F}_b = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, where $\tilde{\alpha}$ is the Euclidean metric and $\tilde{\beta} = bdx^3$, $0 < b < 1$. If a connected surface M in (R^3, \tilde{F}_b) is minimal with respect to both volume forms Busemann-Hausdorff and Holmes-Thompson, then up to a parallel translation of R^3 , M is either a piece of plane or a piece of helicoid which is generated by lines screwing along the x^3 -axis. Furthermore it gives an explicit rotation hypersurfaces BH-minimal and HT-minimal generated by a plane curve around the axis in the direction of $\tilde{\beta}^\sharp$ in Minkowski (α, β) -space (V^{n+1}, \tilde{F}_b) , where V^{n+1} is an $(n + 1)$ -dimensional real vector space, $\tilde{F}_b = \tilde{\alpha}\phi\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}\right)$, $\tilde{\alpha}$ is the Euclidean metric, $\tilde{\beta}$ is a one form of constant length $b = \|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\beta}^\sharp$ is the dual vector of $\tilde{\beta}$ with respect to $\tilde{\alpha}$. As an application, it give us an explicit expression of surface of rotation “forward” BH-minimal generated by the rotation around the axis in the direction of $\tilde{\beta}^\sharp$ in Minkowski space of Randers type $(V^3, \tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$.

Keywords

Minkowski Space of Randers type, Mean Curvature, BH-minimal, HT-minimal.

Sumário

Sumário	i
Introdução	ii
1 A Geometria de Finsler	1
1.1 Introdução	1
1.2 Preliminares	1
1.3 Estruturas de Finsler	3
1.4 Alguns Resultados Matriciais e Consequências	6
1.5 Variedade Finsleriana Completa	7
1.6 Espaços de Minkowski	10
2 A Forma Volume nos Espaços de Minkowski e Curvaturas Médias	11
2.1 Introdução	11
2.2 O Elemento de Volume	11
2.3 Lema da Divergência	14
2.4 Curvatura Média	18
3 Um Teorema Local de Rigidez para Superfícies Mínimas num Espaço de Minkowski do tipo Randers 3-dimensional	25
3.1 Introdução	25
3.2 Forma Volume Busemann-Hausdorff	26
3.3 Forma Volume Holmes-Thompson	31
4 Hipersuperfícies Mínimas de Rotação em um espaço de Minkowski (α, β)	45
4.1 Introdução	45
4.2 Espaços de Finsler do Tipo (α, β)	45
4.3 Minimalidade de um Gráfico Definido sobre Hiperplanos em (V^{n+1}, \tilde{F}_b)	49
4.4 Superfícies de Rotação Mínimas no Espaço de Randers	56
Referências Bibliográficas	64

Introdução

Geometria de Finsler

Riemann, em sua histórica tese de 1854, introduziu a Geometria Riemanniana. Seu caso bidimensional havia sido desenvolvido por Gauss em 1827 e é a parte fundamental da geometria diferencial. O assunto foi realçado pela teoria da relatividade geral de Einstein, em 1915. Einstein demorou sete anos para passar de sua relatividade especial em 1908 para sua relatividade geral em 1915, devido às dificuldades técnicas e filosóficas que envolviam o conceito de variedade. Segundo Einstein, *“não é tão fácil se livrar da idéia de que coordenadas não têm um significado métrico imediato”* (Einstein, 1949). Em 1913, Weil formalizou o conceito de variedade. Em 1922, Elie Cartan desenvolveu uma importante ferramenta analítica, o cálculo diferencial exterior, que tornou as variedades diferenciáveis objetos mais acessíveis.

Tradicionalmente, estruturas diferenciáveis são focadas na métrica Riemanniana, que é uma forma diferencial quadrática. Segundo Riemann, esta restrição a uma forma diferencial quadrática constitui apenas um caso especial. Mas, embora Riemann tenha visto a diferença entre o caso quadrático e o caso geral, deixou o caso geral adormecido ao observar que *“o estudo da métrica que é a raiz quarta de uma forma diferencial quártica é bastante parecido e não traz nova luz ao problema”*. Interesse no caso geral foi retomado em 1918 na tese de Paul Finsler, escrita sob orientação de Carathéodory. Por esta razão, iremos nos referir ao caso geral como Geometria de Finsler. Segundo S. S. Chern, a Geometria de Finsler não é uma generalização da Geometria Riemanniana, sendo melhor descrevê-la como a Geometria Riemanniana sem a restrição quadrática.

No entanto, o sucesso da Geometria Riemanniana neste último século tem sido tão espetacular que serviu para obscurecer o sucesso lento mas constante da Geometria de Finsler. Felizmente, trabalhos recentes indicam que esta lacuna está se estreitando. Na estrutura apropriada, um grande número de resultados se generalizam facilmente de espaços Riemannianos para espaços Finslerianos e as evidências mostram que a “restrição quadrática” é raramente necessária. A Geometria de Finsler também é frequentemente uma ferramenta essencial para aplicações em Biologia, Teoria do Controle, Engenharia e Física. Em particular, P. L. Antonelli tem usado a Geometria de Finsler para modelar a evolução de organismos coloniais, na Física temos o problema de navegação estudado por

E. Zermelo, o qual tem o nome de *Problema de Navegação de Zermelo*. Este problema consiste em dados dois pontos obter a curva que liga estes dois pontos via um barco viajando com velocidade constante sujeito a uma brisa dada por um campo de vetores, minimizando o tempo de viagem. Consequentemente, Bao-Robles-Shen classificaram as métricas de Randers de curvatura flag constante via o Problema de Navegação em uma variedade Riemanniana [9]. Assim, Robles determinou as geodésicas de uma métrica de Randers.

Devido a estas considerações, segundo o ponto de vista de S. S. Chern, já é tempo da Geometria de Finsler ocupar uma posição mais importante nos currículos da Geometria Diferencial básica.

Superfícies Mínimas

As superfícies mínimas, desde suas origens no século XVIII, representam um dos campos de pesquisa mais frutíferos dentro da Geometria Diferencial. Seu desenvolvimento tem influenciado na Geometria, Análise e Topologia, e o avanço destas, teve repercussões na teoria das superfícies mínimas.

A história das superfícies mínimas começou com L. Lagrange (1762), que desenvolveu um algoritmo para o cálculo de variações, o que deu lugar ao que hoje conhecemos como equação diferencial de Euler-Lagrange. Neste trabalho Lagrange tentou, entre outros problemas, o de achar uma superfície com contorno prefixado e área mínima, e como consequência estabeleceu a equação que satisfaz as gráficas mínimas $f(x, y)$:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Esta equação quase-linear elíptica de segunda ordem não foi escrita explicitamente por Lagrange, que se preocupou também por estudar o mesmo problema anterior para variações de volume constante. Em 1776, Meusnier deduziu da equação diferencial de Lagrange que as curvaturas principais tem que ser de módulos iguais e de sinais diferentes, o que se traduz para uma curvatura média nula. Ele descobriu na mesma ocasião a helicóide.

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau (Plateau foi um físico belga que realizou cuidadosos experimentos com películas de sabão por volta de 1850). O problema pode ser, a grosso modo, descrito da seguinte maneira: provar que para cada curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$ existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira. Uma versão do problema de Plateau foi resolvida simultaneamente por Douglas e Radó em 1930.

Em termos matemáticos, minimizar uma variedade imersa, é achar os pontos críticos da aplicação volume. Então a idéia de minimizar volume é generalizada para variedades Riemannianas e consequentemente para variedades Finslerianas. É assim que

Shen no seu trabalho [16] caracteriza a minimalidade de uma imersão f . E trabalhos consequentes, [17, 18] se obtêm exemplos não triviais para superfícies mínimas na geometria de Finsler. Esses trabalhos forem baseados na forma de volume de Busemann-Hausdorff. Por outro lado, He e Shen no seu trabalho [10] obtêm como um dos seus resultados que qualquer superfície mínima num espaço de Randers $(M, \alpha + \beta)$ com respeito a forma de volume Holmes-Thompson é mínima também em espaço Riemaniano (M, α) ; e vice-versa. Cabe mencionar que por ser distintas as definições destas duas formas de volume, se tenha como resultado que superfícies mínimas em uma, não sejam em outra.

Nesta dissertação estudamos superfícies mínimas na Geometria de Finsler nos espaços de Minkowski com (α, β) -norma, tendo como caso particular a métrica de Randers Especial, para isso faz-se um estudo da curvatura média e de dois tipos de formas de volume (as mais estudadas): Holmes-Thompson e Busemann-Hausdorff.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos e resultados gerais sobre a Geometria de Finsler, que pode ser acompanhado com [1].

No Capítulo 2, estudamos o que são as formas de volume, suas bases, algumas definições e resultados.

No Capítulo 3, mostramos um Teorema de rigidez, fazemos comparações e cálculos, as quais são necessárias para a demonstração do resultado principal.

No Capítulo 4, damos uma caracterização para hipersuperfícies de rotação BH-mínimas e HT-mínimas.

A Geometria de Finsler

1.1 Introdução

Neste Capítulo apresentamos definições sobre os espaços de Finsler e de Minkowski, damos ademais alguns resultados interessantes para o desenvolvimento fluente do presente trabalho.

1.2 Preliminares

No decorrer do trabalho, usamos a notação da convenção de Einstein, isto é, pares de índices repetidos indicam somatório (O símbolo Σ será, portanto, omitido). Por exemplo, $y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ denotará $\sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Usamos também $[F]_{y^i}$ no lugar de $\frac{\partial F}{\partial y^i}$, e similarmente para derivadas parciais de ordem superior.

Em [7] obtemos as seguintes definições e exemplos a respeito de variedades diferenciáveis.

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto $M \neq \emptyset$ e uma família de aplicações biunívocas, de classe C^∞ , $x_a : U_a \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos U_a de \mathbb{R}^n em M , tais que:*

1. $\bigcup_a x_a(U_a) = M$;
2. Para todo a, b , com $x_a(U_a) \cap x_b(U_b) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_a^{-1}(W)$ e $x_b^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_b^{-1} \circ x_a$ são de classe C^∞ ;
3. A família $\{(U_a, x_a)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par (U_a, x_a) ou (a aplicação x_a) com $p \in x_a(U_a)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de M em p ; $x_a(U_a)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(U_a, x_a)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M .

Definição 1.2 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja Υ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \Upsilon.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.3 *O espaço vetorial $T_x M$ é chamado espaço tangente em x e é definido por $T_x M = \{v : v \text{ é tangente a } M \text{ em } x\}$.*

Exemplo 1.4 *Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n e seja*

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}.$$

O conjunto TM pode ser munido de uma estrutura diferenciável, sendo então uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, chamada fibrado tangente de M .

De fato, seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável máxima de M . Indicamos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$ a base associada ao espaço tangente de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α , defina $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, \mu_1, \dots, \mu_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto $(p, v) \in TM$ as coordenadas $x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ de p junto com as coordenadas μ_1, \dots, μ_n de v na base $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$.

Considerando a aplicação $dx_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ dada por $dx_\alpha(v) = \beta'(0)$ onde $\beta = \varphi \circ \alpha$, $\varphi : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável e para cada $q \in U_\alpha$ e $v \in T_p M$, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = v$.

Vamos mostrar que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável para TM . Como $\bigcup_a x_\alpha(U_\alpha) = M$ e $(dx_\alpha)q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, segue que, $\bigcup_a y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$, o que verifica a primeira condição da definição 1.1. Para cada par de índices α e β , seja agora $(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$. Então $(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta))$ onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha)).$$

Como $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável, $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ também é. Decorre daí que $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$ é diferenciável, o que verifica a condição 2 da Definição 1.1.

Observação 1.5 O fibrado tangente TM pode ser definido como $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$.

O espaço dual de $T_x M$ é o conjunto das aplicações lineares $\omega : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, este espaço será denotado por $T_x^* M$ e chamado o *espaço cotangente* a M em x . A união $T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M$ é chamada o *fibrado cotangente* de M .

1.3 Estruturas de Finsler

Seja M uma variedade n -dimensional e TM o seu fibrado tangente, a estrutura (ou métrica, ou função) de Finsler em uma variedade M é uma função

$$F : TM \setminus \{0\} \longrightarrow [0, \infty),$$

satisfazendo as condições:

1. $F(x, y)$ é C^∞ em $TM \setminus \{0\}$ (Regularidade).
2. $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda > 0$ (Positiva homogênea de grau 1 em relação a y);
3. O tensor fundamental $g_{ij}(x, y)$ é positivo definido para todo $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$, onde

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j}(x, y),$$

(Convexidade forte).

Definição 1.6 Dada uma variedade M e uma estrutura de Finsler, o par (M, F) é chamado *espaço (ou variedade) de Finsler*.

Usamos as seguintes observações:

1. Denotamos a métrica de Finsler por $F = F(x, y)$.
2. Uma matriz $A_{n \times n}$ será denotada por (a_{ij}) e sua inversa por $a^{ij} = (a_{ij})^{-1}$, isto é,

$$a_{ij} a^{jl} = \delta_{il}.$$

3. Chamamos de “levantamento” e “rebaixamento” de índices, respectivamente, as seguintes notações $a^{ij} t_j = t^i$ e $a_{ij} t^j = t_i$, onde $t^i = t^i(x, y)$ e $t_j = t_j(x, y)$.
4. Em algumas situações, a função de Finsler é absolutamente homogênea em y , isto é, $F(x, \lambda y) = |\lambda| F(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Em geral, esta propriedade é muito restritiva, pois exclui alguns exemplos importantes de espaços de Finsler, como os espaços de Randers (veja [1]).

5. A matriz real simétrica (a_{ij}) é positiva definida se cumpre uma e portanto todas, as seguintes equivalências (veja [12]):
- Para todo vetor não nulo $\xi \in T_pM$ temos que $\xi^T (a_{ij}) \xi > 0$ onde ξ^T é o vetor transposto de ξ .
 - Todos os auto-valores λ_i de (a_{ij}) são positivos.
 - Todos os menores principais de (a_{ij}) são positivos.
6. Toda matriz (a_{ij}) positiva definida é inversível e sua matriz inversa $(a_{ij})^{-1}$ também é positiva definida (veja [12]).
7. Se F é uma métrica de Finsler, então usando o Teorema de Euler [1] prova-se que $F(x, y) = \sqrt{g_{ij}(x, y)y^i y^j}$. De fato

$$\begin{aligned} g_{ij}y^i y^j &= \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} y^i y^j \\ &= F F_{y^i y^j} y^i y^j + F_{y^i} F_{y^j} y^i y^j \\ &= F^2. \end{aligned}$$

A seguir apresentamos alguns exemplos simples de métricas de Finsler.

Exemplo 1.7 *Métrica Euclidiana:*

$$F(x, y) = F(y) = \sqrt{c_{ij}y^i y^j},$$

onde $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ é uma base de T_xM e $c_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$ é constante.

Exemplo 1.8 *Métrica de Minkowski:*

$$F(x, y) = F(y) = \sqrt{g_{ij}(y)y^i y^j},$$

onde $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ é uma base de T_xM e $g_{ij}(y) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$.

Exemplo 1.9 *Métrica Riemanniana:*

$$F(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j},$$

onde $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ é uma base de T_xM e $a_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$.

Exemplo 1.10 *Métrica de Randers:*

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

onde $\alpha(x, \cdot) = \sqrt{a_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j(\cdot, \cdot)}$ é uma métrica Riemanniana e $\beta(x, \cdot) = b_i(x)dx^i(\cdot)$ é uma 1-forma em M com

$$b := \|\beta\|_\alpha < 1. \quad (1-1)$$

Como $\beta(x, \cdot) = b_i(x)dx^i(\cdot)$ é uma 1-forma em M então $\beta(x, \cdot) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\beta(x, y) = b_i(x)dx^i(y) = b_i(x)y^i$.

Observe que $\|\beta\|_\alpha := \sup_{\alpha(x,y)=1, y \in T_xM} \beta(x, y)$, isto significa que $\|\beta\|_\alpha$ é o supremo de $\beta(x, \cdot)$ quando tomamos um referencial $\{e_i\} \in T_pM$ ortonormal em relação a métrica α , ou seja $\langle e_i, e_j \rangle_\alpha = 0$, se $i \neq j$ e $\langle e_i, e_i \rangle_\alpha = 1$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (veja [12]), temos que

$$\dim T_pM = \dim \text{Ker}\beta(x, \cdot) + \dim \text{Im}\beta(x, \cdot),$$

onde $\text{Ker}\beta(x, \cdot) := \{y; \beta(x, y) = 0\}$ é chamado de *núcleo* de $\beta(x, \cdot)$.

Como a dimensão de T_pM é n e a dimensão da imagem de $\beta(x, \cdot)$ é 1, temos que a dimensão do núcleo de $\beta(x, \cdot)$ será $n - 1$, assim tomando $\{e_i\} \in T_pM$, temos que $\beta(x, e_\varepsilon) = 0$ quando $1 \leq \varepsilon \leq n - 1$.

De fato, tomamos um referencial ortonormal em relação a métrica α dada por

$$e_\varepsilon = (\varepsilon_\varepsilon)^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \leq \varepsilon \leq n - 1$$

e

$$e_n = cb_s a^{sk} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

onde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} \right\}$ é uma base para T_pM . Temos que $\langle e_\varepsilon, e_n \rangle_\alpha = 0$, onde $1 \leq \varepsilon \leq n - 1$ segue que

$$cb_s a^{si} (\varepsilon_\varepsilon)^k a_{ik} = c \delta_{sk} b_s (\varepsilon_\varepsilon)^k = cb_k (\varepsilon_\varepsilon)^k = 0,$$

portanto $\beta(x, e_\varepsilon) = b_k (\varepsilon_\varepsilon)^k = 0$, onde $1 \leq \varepsilon \leq n - 1$.

Do fato $\langle e_n, e_n \rangle_\alpha = 1$ obtemos $cb_s a^{si} cb_s a^{sj} a_{ij} = c^2 \delta_{js} b_s b_s a^{sj} = c^2 b_j b_s a^{sj} = 1$ e portanto $c = \frac{1}{\sqrt{b_j b_s a^{sj}}}$. Assim, obtemos como resultado; fazendo $b = \sqrt{b_j b_s a^{sj}}$,

$$\beta(x, e_n) = b_k cb_s a^{si} = \frac{b_k b_s a^{sk}}{b} = \frac{b^2}{b} = b$$

e portanto temos que $b = \sup_{\alpha(x,y)=1, y \in T_xM} \beta(x, y)$.

Na Proposição 1.12 (adiante) usamos este resultado para melhorar a expressão da métrica $F = \alpha + \beta = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i y^i$.

No caso da métrica de Randers temos que $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$ é dado por

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} \\
&= F_{y^j} F_{y^i} + F F_{y^i y^j} \\
&= (\alpha + \beta)_{y^j} (\alpha + \beta)_{y^i} + F (\alpha + \beta)_{y^i y^j} \\
&= (\alpha_{y^j} + \beta_{y^j}) (\alpha_{y^i} + \beta_{y^i}) + (F) (\alpha_{y^i y^j} + \overbrace{\beta_{y^i y^j}}^{=0}) \\
&= \alpha_{y^j} \alpha_{y^i} + \alpha_{y^j} \beta_{y^i} + \alpha_{y^i} \beta_{y^j} + \beta_{y^j} \beta_{y^i} + F \alpha_{y^i y^j} \\
&= \frac{y_i y_j}{\alpha \alpha} + \frac{y_j}{\alpha} b_i + \frac{y_i}{\alpha} b_j + b_i b_j + \frac{F}{\alpha} (a_{ij} - \alpha_{y^i} \alpha_{y^j}) \\
&= \frac{F}{\alpha} \left(a_{ij} - \frac{y_i y_j}{\alpha \alpha} \right) + \left(b_i + \frac{y_i}{\alpha} \right) \left(b_j + \frac{y_j}{\alpha} \right), \tag{1-2}
\end{aligned}$$

onde $y_i := a_{ij} y^j$ e $a_{ij} = a_{ij}(x)$. De [14] e a partir de (1-2) é possível concluir que (g_{ij}) é positiva definida se, e somente se,

$$b := \|\beta\|_{\alpha}(x) = \sqrt{a^{ij} b_i b_j} < 1.$$

1.4 Alguns Resultados Matriciais e Consequências

O objetivo nesta seção é apresentar algumas fórmulas para o determinante e a inversa do tensor fundamental no caso em que F seja do tipo Randers.

Proposição 1.11 *Suponha que:*

- * (Q_{ij}) é uma matriz complexa $n \times n$ no singular com inversa (Q^{ij}) .
- * C_j , com $j = 1, \dots, n$, são n números complexos.

Defina $C^s := Q^{sj} C_j$. Então,

- $\det(Q_{ij} + C_i C_j) = (1 + C^s C_s) \det(Q_{ij})$.
- Sempre que $1 + C^s C_s \neq 0$, a matriz $(Q_{ij} + C_i C_j)$ é invertível. Neste caso, a inversa é dada por

$$\left(Q^{ij} - \frac{1}{1 + C^s C_s} C^i C^j \right).$$

A demonstração pode ser encontrada em [1]. Duas aplicações da Proposição anterior nos mostra a expressão para o $\det(g_{ij})$ e g^{ij} , para $F = \alpha + \beta$:

$$\det(g_{ij}) = \left(\frac{F}{\alpha} \right)^{n+1} \det(a_{ij}), \tag{1-3}$$

$$g^{ij} = \frac{\alpha}{F} a^{ij} + \frac{\alpha^2 \beta + \alpha \|\beta\|^2}{F^2} \frac{y^i y^j}{\alpha \alpha} - \frac{\alpha^2}{F^2} \left(\frac{y^i}{\alpha} b^j + \frac{y^j}{\alpha} b^i \right), \tag{1-4}$$

onde $b^i = a^{ij}b_j$.

Proposição 1.12 *Seja $F = \alpha + \beta$ uma métrica de Randers em uma variedade M , n -dimensional. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal na métrica $\alpha = \alpha(x, y)$ tal que o vetor e_n tenha direção e sentido do vetor $u = u_i \frac{\partial}{\partial x^i} = b_j a^{ji} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Então $F = F(x, y)$ tem a seguinte forma normal*

$$F(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2} + by^n, \quad \forall y = y^i e_i \in T_x M, \quad (1-5)$$

onde $b = \sqrt{a^{ij}b_i b_j}$ é a norma (1-1) da 1-forma β .

Demonstração. Primeiramente observamos que no referencial $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ a métrica é dada por

$$F(x, y) = \sqrt{a_{ij}y^i y^j} + b_i(x)y^i. \quad \forall y = y^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

pois $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_\alpha = a_{ij}$ e $\beta = b_i y^i$. Agora considerando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em relação a métrica α , obtemos a primeira parcela de (1-5), pois basta usarmos o fato que $\langle e_i, e_j \rangle_\alpha = \delta_{ij}$. Logo neste referencial $a_{ij} = \delta_{ij}$.

Para a segunda parcela de (1-5) devemos proceder como anteriormente e considerar um referencial $e_\varepsilon = (\varepsilon_\varepsilon)^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $1 \leq \varepsilon \leq n-1$ e $e_n = cb_s a^{sk} \frac{\partial}{\partial x^k}$, onde $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}$ é uma base para $T_p M$. Neste caso,

$$\beta(x, e_\varepsilon) = b_k (\varepsilon_\varepsilon)^k = 0; \quad 1 \leq \varepsilon \leq n-1$$

e

$$\beta(x, e_n) = b = \sup_{\alpha(x, y)=1, y \in T_x M} \beta(x, y).$$

Considerando $y = y^\varepsilon e_\varepsilon + y^n e_n$ e usando o fato que β ser linear temos que

$$\beta(x, y) = y^\varepsilon \beta(x, e_\varepsilon) + y^n \beta(x, e_n) = y^n b.$$

□

1.5 Variedade Finsleriana Completa

No final deste trabalho apresentamos alguns resultados acerca de minimalidade completa, para isso precisamos das seguintes definições.

Definição 1.13 *Seja (M, F) uma variedade de Finsler, onde F é positivamente homogênea de grau 1. Seja $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes com velocidade $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma'}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{\sigma(t)}M$. O comprimento $L_F(\sigma)$ é definido como*

$$L_F(\sigma) = \int_a^b F\left(\sigma(t), \frac{d\sigma}{dt}\right) dt. \quad (1-6)$$

Para $x_0, x_1 \in M$. Seja

$$\Gamma_{(x_0, x_1)} = \{\gamma | \gamma : [a, b] \rightarrow M, \text{ diferenciável por partes, } \gamma(a) = x_0, \gamma(b) = x_1\}, \quad (1-7)$$

o conjunto de todas as curvas regulares por partes que ligam x_0, x_1 . Agora vemos que a função d , para F absolutamente homogênea, e para todo $t \in \mathbb{R}$, é a função distância.

Definição 1.14 *Definimos uma aplicação distância $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ por*

$$d(x_0, x_1) = \inf_{\sigma \in \Gamma_{(x_0, x_1)}} L_F(\sigma), \quad (1-8)$$

onde $L_F(\sigma)$ é dado em (1-6).

A aplicação d satisfaz as duas primeiras condições da definição de uma métrica, a saber:

1. $d(x_0, x_1) \geq 0$. Sendo que a igualdade ocorre se, e somente se, $x_0 = x_1$;
2. $d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_2) + d(x_2, x_1)$;
3. $d(x_0, x_1) = d(x_1, x_0)$.

Enfatizamos que, em geral, a função d em uma variedade Finsleriana não satisfaz a propriedade de simetria da condição (3) acima. Devido a função d não ser em geral simétrica, como é o caso onde se exige apenas que F seja positiva homogênea, o que faz diferença para as distâncias $d(x_1, x_2)$, $d(x_2, x_1)$. Surge então a necessidade de adjetivos para o conceito de variedades de Finsler completas. Utilizamos os adjetivos “forward” e “backward”, dependendo do sentido que percorremos o parâmetro na curva que liga dois pontos.

Definição 1.15 *Uma variedade Finsleriana (M, F) é dita geodesicamente completa “forward” se toda geodésica $\gamma(t)$, $a \leq t < b$, parametrizada com velocidade Finsleriana constante, pode ser estendida a uma geodésica definida em $a \leq t < \infty$.*

Veremos a seguir o Teorema de Hopf-Rinow para variedades de Finsler, que nos dá caracterizações de uma imersão completa “forward”. Para a prova ver [1].

Teorema 1.16 [Hopf-Rinow] *Seja (M, F) uma variedade de Finsler conexa, onde F é positivamente (mas talvez não-absolutamente) homogênea de grau 1. Os critérios a seguir são equivalentes:*

1. O espaço “métrico” (M, d) é completo “forward”.
2. A variedade de Finsler (M, F) é geodesicamente completa “forward”.
3. A aplicação exponencial \exp_p é definida em todo $T_p M$, para todo $p \in M$.
4. A aplicação exponencial \exp_p é definida em todo $T_p M$, para algum $p \in M$.
5. Todo fechado e limitado “forward” de (M, F) é compacto.

Além disso, se ocorre um dos itens acima, então todo par de pontos de M pode ser ligado por uma geodésica que minimiza distância.

Observação 1.17 *Da Topologia Geral temos que o item (5) é equivalente ao seguinte item*

6. Existe uma sucessão de compactos $K_n : K_n \subset M, M = \bigcup_n K_n, K_n \subset K_{n+1}$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p, q_n) = \infty$.

Temos a seguir o conceito de curva divergente em (M, F) .

Definição 1.18 *Uma curva divergente em uma variedade Finsleriana é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$, tal que para todo compacto $K \subset M$ existe $t_0 \in (0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K, \forall t > t_0$, isto é, $\alpha(t)$ sai de qualquer compacto.*

Observação 1.19

1. Pode-se mostrar, usando a equivalência dos itens (5) e (6), que M é completa “forward” se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.
2. Se F é absolutamente homogênea de grau 1, então M é completa “forward” e “backward” ou não é nenhum dos dois tipos. Este é o caso para métricas Riemannianas. Entretanto, a recíproca é falsa. A saber, as noções de variedade de Finsler completa “forward” e “backward” podem ser válidas sem que F seja absolutamente homogênea. Tal fenômeno é ilustrado pelas funções de Finsler F de espaços de Minkowski, as quais são em geral, somente positivas homogêneas de grau 1 e, ainda assim, esses espaços são sempre completos “forward” e “backward”.

1.6 Espaços de Minkowski

Definição 1.20 Uma função $F = F(y)$ sobre um espaço vetorial V^n de dimensão n é chamado de Norma de Minkowski se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $F(y) \geq 0$ para $y \in V^n$, e $F(y) = 0$ se, e somente se, $y = 0$;
2. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$ para todo $y \in V^n$ e $\lambda > 0$;
3. F é C^∞ sobre $V^n \setminus \{0\}$ tal que para cada $y \in V^n$, o funcional bilinear simétrica g_y sobre V^n é um produto interno,

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(y + su + tv)]_{s=t=0}.$$

Observação 1.21 O produto interno g_y é chamado de forma fundamental na direção y .

Definição 1.22 Dado um espaço vetorial V^n e uma norma de Minkowski F , o par (V^n, F) é chamado espaço de Minkowski.

Observação 1.23 Observe que a terceira condição da estrutura de Minkowski pode ser substituída pela terceira condição da estrutura de Finsler e vice-versa.

Observação 1.24 Uma outra definição de uma métrica de Finsler é a seguinte: A função $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ é chamado uma norma de Finsler se este possui as seguintes propriedades:

(F1) F é C^∞ sobre $TM \setminus \{0\}$;

(F2) Para cada $x \in M$, $F_x := F|_{T_x M}$ é uma Norma de Minkowski sobre $T_x M$.

A Forma Volume nos Espaços de Minkowski e Curvaturas Médias

2.1 Introdução

Existem dois tipos de formas volume mais estudadas sobre espaços de Finsler. Ambos logicamente reduzem-se à forma de volume Riemanniana quando a métrica de Finsler provém da métrica Riemanniana. No presente capítulo estudamos as principais formas de volume: Holmes-Thompson e Busemann-Hausdorff nos espaços de Minkowski. Ademais, damos origem a Curvatura Média na Geometria de Finsler, para assim obter alguns resultados que são usados nos Capítulos 3 e 4.

2.2 O Elemento de Volume

Sejam (V^n, F) um Espaço de Minkowski, $e = \{e_i\}_{i=1}^n$ uma base para V^n e $\theta = \{\theta^i\}_{i=1}^n$ a base dual para $(V^*)^n$. Denotamos por \mathbf{F} e \mathbf{E} o conjunto de todas as normas de Minkowski e as bases orientadas de V^n , respectivamente. Seja (\tilde{V}^m, \tilde{F}) outro Espaço de Minkowski de dimensão m com $m > n$. F é chamado *métrica induzida* de \tilde{F} se existe uma base $\{\tilde{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ e $z \in GL(n, m)$ tal que $F(e_i) = \tilde{F}(z_i^\alpha \tilde{e}_\alpha)$, onde $GL(n, m)$ denota o conjunto de matrizes $n \times m$ de posto $= n$.

A seguinte definição é uma natural generalização de métrica induzida nos espaços de Finsler.

Definição 2.1 [*Métrica de Finsler Induzida*] Dada uma imersão $f : M^n \rightarrow (\tilde{M}^m, \tilde{F})$, onde \tilde{F} é uma métrica de Finsler, temos que a métrica induzida em M é dada por

$$F(y) := (f^* \tilde{F})(y) = \tilde{F}(f_*(y)), \quad \forall y \in T_x M,$$

onde f_* e f^* denotam a derivada e o pull-back de f , respectivamente.

Para definir de forma geral o elemento de volume nos espaços de Finsler, é natural que a correspondente forma de volume esteja bem definida sobre o espaço vetorial (V^n, F) , e que esta se reduza naturalmente à forma de volume Euclidiana quando F provenha do produto interno Euclidiano. Ademais, deve satisfazer certas propriedades de diferenciabilidade para efeitos de cálculo. Para definirmos elemento de volume, necessitamos de uma aplicação que satisfaz algumas propriedades. Abaixo definimos tal aplicação.

Definição 2.2 *Seja $\sigma : \mathbf{F} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\sigma(F, e) > 0$ para quaisquer $F \in \mathbf{F}$ e $e \in \mathbf{E}$;
2. $\sigma(F, Qe) = \det(Q)\sigma(F, e)$ para quaisquer $Q \in GL(n, n)$;
3. Se F provem de um produto interno Euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$, isto é, $F(y) = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ para $y \in V^n$, então $\sigma(F, e) = \sqrt{\det(\langle e_i, e_j \rangle)}$;
4. Se $F \in \mathbf{F}$ é induzido de \tilde{F} sobre \tilde{V}^m , isto é, $F(e_i) = \tilde{F}(z_i^\alpha \tilde{e}_\alpha)$ para algum $z \in GL(n, m)$, então $\sigma(F, e)$ é diferenciável com respeito ao $z = (z_i^\alpha)$.

Então a n -forma $dV_F^\sigma = \sigma(F, e)\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$ está bem definida sobre V^n , chamamos ao σ *elemento volume de Finsler*, e chamamos ao dV_F^σ a *forma volume de Finsler* sobre (V^n, F) determinado por σ .

A forma de volume mais simples sobre \mathbb{R}^n é a forma de volume Euclidiana

$$dV := dx^1 \dots dx^n.$$

O volume Euclidiano de um subconjunto aberto e limitado $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dV = \int_{\Omega} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Mais geralmente, sobre uma variedade Riemanniana (M, F) , onde $F(y) = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$, tal métrica F determina a forma de volume canônica

$$dV_g := \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Chamamos ao dV_g a *forma de volume Riemanniana de F* .

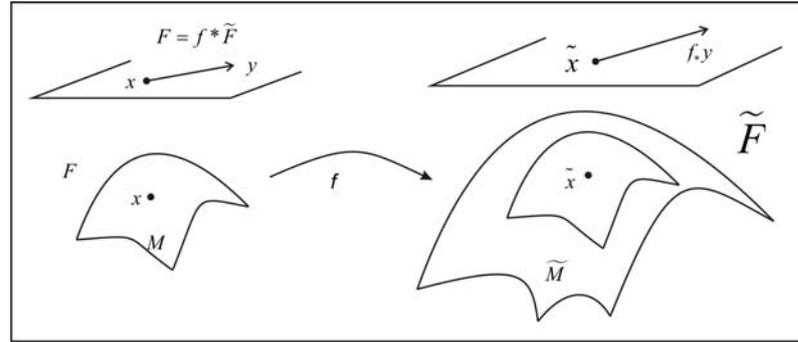


Figura 2.1: f : Imersão

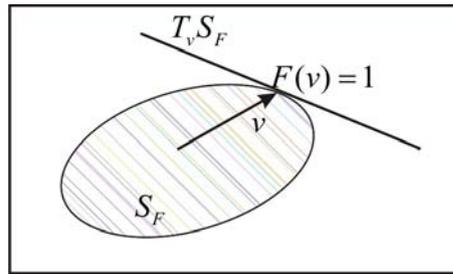


Figura 2.2: T_v de Lagrange

Defina $S_F = \{v \in V = V^n; F(v) = 1\}$.

Definição 2.3 A Transformação de Lagrange de V para V^* é definido sobre S_F por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : S_F &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto \mathcal{L}(v) : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ &w \longmapsto 0, \quad \text{se } w \in T_v S_F, \\ &1, \quad \text{se } w = v. \end{aligned} \tag{2-1}$$

Isto é equivalente a dizer que $\mathcal{L}(v)$ é uma transformação linear satisfazendo $T_v S_F = \ker \mathcal{L}(v)$ e $\mathcal{L}(v)(v) = 1$. Agora, estendemos \mathcal{L} para todo V fazendo

$$\mathcal{L}(\lambda v) = \lambda \mathcal{L}(v) \text{ para } \lambda \neq 0 \text{ e } v \in S_F.$$

Isto mostra que \mathcal{L} é homogênea positiva de grau 1.

A definição acima é bem definida se $T_v S_F$ está bem definida para todo $v \in S_F$.

Denotemos por $L = \frac{1}{2}F^2$. Se F é uma métrica de Finsler,

$$\mathcal{L}(v) = dL(v) = F(v)dF \left(\frac{v}{F(v)} \right) \text{ para todo } v \in V.$$

F define uma Métrica Riemanniana sobre o bordo unitário $S_F \times V$ de (V, F) ou,

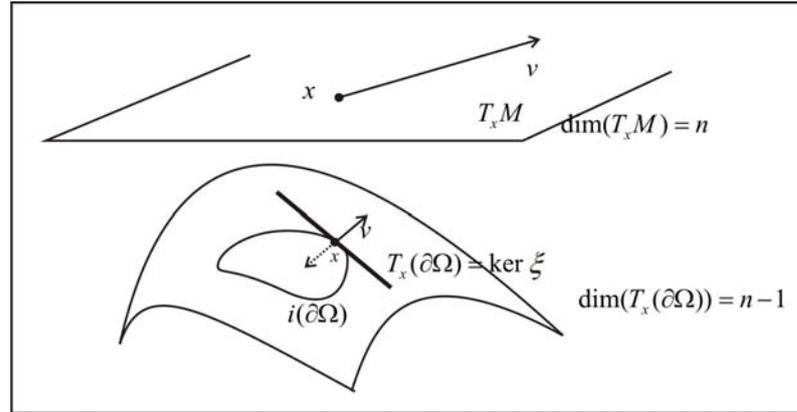


Figura 2.3: Vetor Normal

equivalentemente, sobre S_F , por

$$g_{(v,x)} := g_v := D^2(L)_v.$$

Da homogeneidade de L mostramos que g_v tem as seguintes propriedades:

- a) $g_v(v, v) = F(v)^2$,
- b) $g_v(v, w) = 0$ se $v \in S_F$ e $w \in T_v S_F$,
- c) $g_{\lambda v} = \lambda g_v$ se $\lambda > 0$.

2.3 Lema da Divergência

Nesta seção, estabelecemos a fórmula de divergência para campo de vetores sobre uma variedade de Finsler. Este lema foi usado para determinar a equação de Euler-Lagrange para subvariedades mínimas via variação de volume. Seja (M, F) uma variedade orientada n -dimensional de Finsler. Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base orientada para $T_x M$ e $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ a base dual para $T_x^* M$. A forma volume de Finsler $dV_F = \sigma_F \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$. Seja Ω um domínio compacto com bordo suave. Seja $i: \partial\Omega \rightarrow M$ a inclusão natural. Existem dois campos de vetores unitários ao longo de i , as quais são normais ao $T_x(\partial\Omega)$ para todo $x \in \partial\Omega$. Seja $\xi \in T_x^* M$ o co-vetor unitário tal que $T_x(\partial\Omega) = \ker \xi$. Existe um único vetor $v \in T_x M$ tal que $\xi(v) = 1$.

Definamos

$$\xi(X) = g_v(v, X), \quad \forall X \in T_x M,$$

v é chamado de *vetor normal* ao $\partial\Omega$. Escolha ξ tal que o vetor normal v aponte para fora. Considere uma base orientada local $\{e_i\}_{i=1}^n$ para TM ao longo de $\partial\Omega$ tal que $e_1|_{\partial\Omega} = v$ e $\{e_i\}_{i=2}^n$ é uma base local para $i_*[T(\partial\Omega)]$. $dV_F = \sigma_F \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$ induz a forma volume dA_F sobre $\partial\Omega$ por

$$dA_F := \sigma_F i^*(\theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n).$$

Defina a $(n-1)$ -forma $X \lrcorner dV_F$ sobre M por

$$X \lrcorner dV_F(X_1, \dots, X_{n-1}) := dV_F(X, X_1, \dots, X_{n-1}).$$

O divergente de X com respeito ao dV_F é definido por

$$d(X \lrcorner dV_F) := \operatorname{div}_F(X) dV_F.$$

Podemos verificar que

$$\begin{aligned} i^*(X \lrcorner dV_F)(e_2, \dots, e_n) &= X \lrcorner dV_F(i_*e_2, \dots, i_*e_n) \\ &= dV_F(X, e_2, \dots, e_n) \\ &= \sigma_F \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n(X, e_2, \dots, e_n) \\ &= \sigma_F \theta_1(X) \cdot \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n(e_2, \dots, e_n) \\ &= \xi(X) \cdot \sigma_F \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n(e_2, \dots, e_n) \\ &= \xi(X) \cdot dA_F(e_2, \dots, e_n) \\ &= g_v(v, X) \cdot dA_F(e_2, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Assim

$$i^*(X \lrcorner dV_F) = \xi(X) dA_F = g_v(v, X) dA_F.$$

Seja $dV_F = \sigma_F(x) dx$ em um sistema de coordenadas locais. O divergente $\operatorname{div}_F(X)$ de um campo de vetores $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ é dado por

$$\operatorname{div}_F(X) = \frac{1}{\sigma_F(x)} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sigma_F(x) X^i(x)].$$

Aplicando o Teorema de Stokes, obtemos o seguinte Lema da Divergência para variedades de Finsler.

Lema 2.4 *Seja (M, F) uma variedade de Finsler orientada. Seja Ω um domínio compacto com fronteira suave $\partial\Omega$ e ν denota o vetor normal que aponta para fora. Então para quaisquer campos de vetores X diferenciáveis sobre M ,*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_F(X) dV_F = \int_{\partial\Omega} \xi(X) dA_F = \int_{\partial\Omega} g_v(\nu, X) dA_F. \quad (2-2)$$

Para a construção da forma curvatura média precisamos dos seguintes resultados: Seja \mathcal{F} o elemento de volume da imersão f .

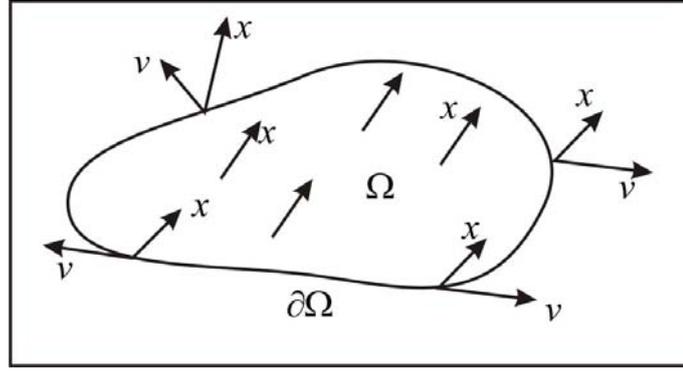


Figura 2.4

Lema 2.5 Para $Q = (q_i^j) \in GL(n, n)$, e seja $P = (p_i^j) \in GL(n, n)$ a inversa de Q . Então

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a}(Qz)z_j^a = \mathcal{F}(z) \det Q p_j^i. \quad (2-3)$$

Demonstração. Fixamos z e consideramos $\mathcal{F}(Qz)$ como uma função de $Q \in GL(n, n)$. Temos que

$$\frac{\partial \det Q}{\partial q_i^j} = \det Q p_j^i.$$

Fazendo uso da Propriedade 2 da Definição 2.2 e diferenciando com respeito ao q_i^j obtemos (2-3). \square

Considerando $Q =$ identidade em (2-3), obtemos o seguinte lema

Lema 2.6

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a}(z)z_j^a = \mathcal{F}(z)\delta_j^i. \quad (2-4)$$

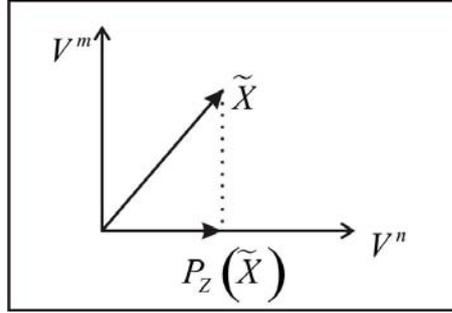
Assim,

$$\frac{1}{\mathcal{F}(z)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a}(z)z_i^a = n. \quad (2-5)$$

Seja V^n um espaço vetorial real n -dimensional. Para um mergulho linear $Z: V^n \rightarrow (\tilde{V}, \tilde{F})$, defina a função linear $P_Z: \tilde{V}^m \rightarrow V^n$ por

$$P_Z(\tilde{X}) := \frac{1}{\mathcal{F}(z)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a}(z)\tilde{X}^a e_i, \quad \forall \tilde{X} = \tilde{X}^a \tilde{e}_a \in \tilde{V}^m, \quad (2-6)$$

onde $e := \{e_i\}$ e $\tilde{e} := \{\tilde{e}_a\}$ são bases arbitrárias para V^n e \tilde{V}^m , respectivamente, e z é dado por $Z(e_i) = z_i^a \tilde{e}_a$.

Figura 2.5: P_Z

Lema 2.7 P_Z está bem definida. Ademais,

$$P_Z[Z(X)] = X, \quad \forall X \in V^n. \quad (2-7)$$

Demonstração. Temos que mostrar que P_Z é independente da escolha da base e para V^n e a base \tilde{e} para \tilde{V}^m . Seja $\tilde{e} := \{\tilde{e}_j = q_j^i e_i\}$ uma outra base para V^n . Para uma imersão linear Z , escrevemos $Z(e_i) = z_i^a \tilde{e}_a$ e $Z(\tilde{e}_i) = \tilde{z}_i^a e_a$. Então $\tilde{z} = Qz$. Obtemos

$$\mathcal{F}(Qz) = \mathcal{F}(z) \det Q,$$

daí,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_j^a}(Qz) q_j^i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a}(z) \det Q.$$

Isto mostra que

$$\frac{1}{\mathcal{F}(Qz)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a}(z) z_j^a X^j e_i = \delta_j^i X^j e_i = X.$$

□

A função $P_Z : \tilde{V}^m \rightarrow V^n$ é chamado de projeção (respeito ao Z). Seja $I : V^n \rightarrow \tilde{V}^m$ o mergulho natural. Mostramos de 2-7 que

$$P_I(X) = X, \quad \forall X \in V^n.$$

Com esta projeção, podemos encontrar um subespaço $W^{m-n} := \ker P_I$ tal que

$$\tilde{V}^m = V^n \oplus W^{m-n}.$$

Quando $n = m - 1$, isto é, V^n é um hiperplano em \tilde{V}^m , $W^{m-n} = W^1 = R.w$, onde w é um vetor unitário. Em outras palavras, existe um vetor normal w (único, a menos de sinal) ao V^n .

Da definição 2.3 temos que existe um vetor unitário especial v o qual é ortogonal ao V^n com respeito ao \tilde{g}_v .

2.4 Curvatura Média

Seja (\tilde{M}, \tilde{F}) uma variedade de Finsler m -dimensional. Fixamos uma base local $\tilde{e} := \{\tilde{e}_a\}$ para $T\tilde{M}$ sobre um subconjunto aberto $\tilde{\mathcal{U}}$. Para o espaço de Minkowski $(T_{\tilde{x}}\tilde{M}, \tilde{F}_{\tilde{x}})$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}}$, defina a função $\mathcal{F} : GL(n, m) \rightarrow \mathbb{R}$ como na Definição 2.2. Seja $f : M \rightarrow \tilde{M}$ uma imersão. Seja $f_t : M \rightarrow \tilde{M}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma variação de f com $f_0 = f$. Então $\{f_t\}$ induz um campo de vetores \tilde{X} ao longo de f por

$$\tilde{X}_x := \left. \frac{\partial f_t}{\partial t} \right|_{t=0}(x).$$

\tilde{X} é chamado o *campo variacional de $\{f_t\}$* . Seja \tilde{F} a métrica de Finsler sobre \tilde{M} . f_t induz uma família de métricas de Finsler $F_t := (f_t)^*\tilde{F}$. Considere

$$V(t) := \text{vol}(\Omega, F_t).$$

Usando o Lema 2.4 (Lema da Divergência) é possível obter uma fórmula para $V'(0)$.

Seja \mathcal{U} um subconjunto em M tal que $f_t(\mathcal{U}) \subset \tilde{\mathcal{U}}$ para um t pequeno. Note que para cada $x \in \mathcal{U}$, f_t induz um mergulho linear $(f_t)_* : T_x M \rightarrow T_{f_t(x)}\tilde{M}$. Seja $\{e_i\}$ uma base arbitrária para $T_x M$, $x \in \mathcal{U}$ e $\{\theta^i\}$ a base dual para $T_x^* M$. Escrevendo $(f_t)_* = (f_t^a)_i \theta^i \otimes \tilde{e}_a$. Por definição, a forma de volume dV_{F_t} de F_t é dada por

$$dV_{F_t} = \mathcal{F}(f_t(x), \nabla f_t(x)) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n,$$

onde,

$$\nabla f_t = ((f_t^a)_i(x)).$$

Defina

$$B_x(\tilde{X}) := \left. \frac{d}{dt} (\log \sigma_t(x)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [\log \mathcal{F}(f_t(x), \nabla f_t)] \right|_{t=0}. \quad (2-8)$$

Agora estamos em condições de definir a curvatura média.

Definição 2.8 Para qualquer campo vetorial $\tilde{X} \in T\tilde{M}$ ao longo de f , a forma curvatura média é definida por

$$\mathcal{H}_f(\tilde{X})|_x := B_x(\tilde{X}) - \text{div}[P_{f_*}(\tilde{X})]|_x.$$

Teorema 2.9 Seja $f_t : M^n \rightarrow (\tilde{M}^m, \tilde{F})$ uma família de imersões tal que $f_t = f_0$ fora do domínio compacto Ω . Seja $f := f_0$ e $F = f^*\tilde{F}$. A função volume $V(t) := \text{vol}(\Omega, (f_t)^*\tilde{F})$ satisfaz

$$V'(0) = \int_{\Omega} \mathcal{H}_f(\tilde{X}) dV_F,$$

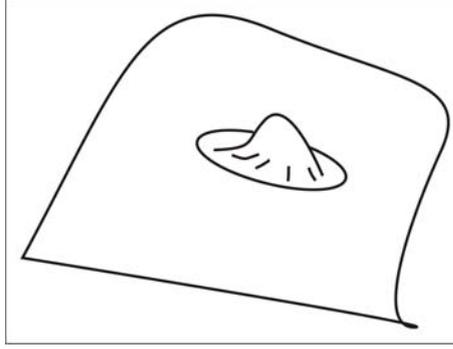


Figura 2.6: Variação de Volume

onde $\tilde{X} := \frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$. Uma imersão f é chamada mínima se $\mathcal{H}_f = 0$.

Demonstração. Seja $dV_{F_t} = \sigma_t \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$. Por definição,

$$V(t) := \int_{\Omega} \sigma_t \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n.$$

Então,

$$\begin{aligned} V'(0) &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \\ &= \int_{\Omega} B(\tilde{X}) dV_F \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{H}_f(\tilde{X}) dV_F + \int_{\Omega} \operatorname{div} P_{f_*}(\tilde{X}) dV_F \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{H}_f(\tilde{X}) dV_F. \end{aligned}$$

Onde usamos o Lema da Divergência para $X = P_{f_*}(\tilde{X})$ na última igualdade. \square

Lema 2.10 $\mathcal{H}_f(\tilde{X})$ depende linearmente sobre \tilde{X}_x em cada ponto $x \in M$.

Demonstração. Em coordenadas locais, seja $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\tilde{e}_a = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^a}$. Escrevamos $dV_{F_t} = \sigma_t(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Da definição, temos

$$\sigma_t(x) = \mathcal{F}(f_t(x), \nabla f_t(x)), \quad (2-9)$$

onde,

$$f_t(x) = (f_t^a(x)), \quad \nabla f_t(x) := \left(\frac{\partial f_t^a}{\partial x^i}(x) \right).$$

De (2-8) e (2-9), temos

$$B(\tilde{X}) = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{x}^a} \tilde{X}^a + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a} \frac{\partial \tilde{X}^a}{\partial x^i} \right\}.$$

Por (2-6),

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[P_{f_*}(\tilde{X})] &= \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a} \tilde{X}^a \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \tilde{x}^b \partial z_i^a} \frac{\partial f^b}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i^a \partial z_j^b} \frac{\partial^2 f^b}{\partial x^i \partial x^j} \right] \tilde{X}^a + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^a} \frac{\partial \tilde{X}^a}{\partial x^i} \right\}. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Obtemos o seguinte resultado

$$\mathcal{H}_f(\tilde{X}) = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{x}^a} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \tilde{x}^b \partial z_i^a} \frac{\partial f^b}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i^a \partial z_j^b} \frac{\partial^2 f^b}{\partial x^i \partial x^j} \right\} \tilde{X}^a. \quad (2-11)$$

De (2-11), podemos observar que $\mathcal{H}_f(\tilde{X})$ depende linearmente só de \tilde{X}_x para cada ponto $x \in M$. \square

Observação 2.11 Observe que se F for do tipo Minkowski, a expressão (2-11) reduz-se a

$$\mathcal{H}_f = -\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i^a \partial z_j^b} \frac{\partial^2 f^b}{\partial x^i \partial x^j} \tilde{X}^a. \quad (2-12)$$

Exemplo 2.12 (Métrica de Randers Induzida) Seja

$$F(\mu) = \|\mu\| := \sqrt{\sum_{\mu=1}^m (u^\mu)^2 + B_\mu u^\mu}, \quad u = (u^\mu) \in \mathbb{R}^m,$$

com $\sqrt{\sum_{\mu=1}^m (B_\mu)^2} < 1$. Considere a imersão $\varphi = (\varphi^\mu) : M \rightarrow (\mathbb{R}^{m+1}, \|\cdot\|)$, φ induz uma métrica de Finsler sobre M ,

$$F(y) := \sqrt{\sum_{\mu} z_i^\mu(x) z_j^\mu(x) y^i y^j + B_\mu z_i^\mu(x) y^i}, \quad y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \quad (2-13)$$

onde $z_i^\mu = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^i}$.

Considerando $F = \alpha + \beta$ com $\alpha := \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ e $\beta := b_i(x) y^i$, onde

$$a_{ij}(x) := z_i^\mu(x) z_j^\mu(x), \quad b_i(x) := B_\mu z_i^\mu(x).$$

Então a norma de β com respeito ao α é dado por

$$\|\beta\| = \sqrt{a^{ij}(x) b_i(x) b_j(x)} \leq \sqrt{\sum_{\mu=1}^m (B_\mu)^2} < 1.$$

De agora em diante usamos por simplicidade a notação $F = F(x, y)$.

Existem duas importantes formas de volume na Geometria de Finsler, elas são: a forma volume Busemann-Hausdorff e a forma volume Holmes-Thompson.

Definição 2.13 (Forma Volume Busemann-Hausdorff) *Seja (M, F) um espaço de Finsler n -dimensional. Seja $\{b_i\}_{i=1}^n$ uma base arbitrária para $T_x M$ e $\{\theta_j\}_{j=1}^n$ a base dual para $T_x^* M$. O conjunto*

$$B_x^n := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n, F(y^i b_i) < 1\}, \quad (2-14)$$

é um subconjunto aberto estritamente convexo e limitado em \mathbb{R}^n . Defina

$$dV_F^{BH} := \sigma_F^{BH}(x) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n,$$

onde

$$\sigma_F^{BH}(x) := \frac{\text{Vol}(\mathbb{B}^n)}{\text{Vol}(B_x^n)}.$$

$$\begin{aligned} \omega_n &:= \text{Vol}(B^n(1)) = \frac{1}{n} \text{Vol}(S^{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} \text{Vol}(S^{n-2}) \int_0^\pi \sin^{n-2}(t) dt. \end{aligned}$$

Em geral, o volume Euclidiano de B_x^n denotado por $\text{Vol}(B_x^n)$ não pode ser expresso por F de forma explícita.

Exemplo 2.14 *Considere a Métrica de Randers $F = \alpha + \beta$ sobre a variedade M , onde $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ é métrica Riemanniana e $\beta = b_i(x)y^i$ é uma 1-forma satisfazendo*

$$\|\beta\|_x := \sup_{\alpha_x(y)=1} \beta(y) = \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < 1,$$

onde $(a^{ij}) = (a_{ij}(x))^{-1}$. Denotamos por dV_F^{BH} e dV_α as formas de volume de Busemann-Hausdorff de F e α , respectivamente. Por um cálculo simples, obtemos

$$dV_\alpha = \sqrt{\det a_{ij}(x)} dx^1 \dots dx^n.$$

Pode-se observar que esta é justamente a forma de volume Riemanniana de α . Para achar dV_F^{BH} , consideramos uma base ortonormal $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^n$ para $(T_x M, \alpha_x)$ tal que $\beta_x(y) = \|\beta\|_x y^1$, onde $y = y^i \mathbf{b}_i$. Então o subconjunto aberto B_x^n em (2-14) é um corpo convexo em

\mathbb{R}^n dado por

$$(1 - \|\beta\|_x^2)^2 \left(y^1 + \frac{\|\beta\|_x}{1 - \|\beta\|_x^2} \right)^2 + (1 - \|\beta\|_x^2) \sum_{\alpha=2}^n (y^\alpha)^2 < 1.$$

O volume Euclidiano de B_x^n é dado por

$$\text{Vol}(B_x^n) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{B}^n)}{(1 - \|\beta\|_x^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (2-15)$$

Segue-se que

$$dV_F = (1 - \|\beta\|_x^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha. \quad (2-16)$$

Isto implica

$$\text{Vol}_F \leq \text{Vol}_\alpha.$$

Assuma que M é fechada. Então

$$\text{Vol}_F(M) = \int_M (1 - \|\beta\|_x^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha \leq \text{Vol}_\alpha(M).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\beta = 0$.

Definição 2.15 (Forma Volume Holmes-Thompson) Para uma métrica de Finsler $F = F(x, y)$ sobre uma variedade M n -dimensional. Num ponto $x \in M$, fixe uma base $\{b_i\}_{i=1}^n$ para $T_x M$ e a base dual $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ para $T_x^* M$. Para um vetor $y = y^i b_i \in T_x M \setminus \{0\}$, escreva

$$g_{ij}(y) := \mathbf{g}_y(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j).$$

Cada $g_{ij}(y)$ é uma função C^∞ sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Defina a forma volume de Holmes-Thompson por

$$dV_F^{HT} = \sigma_F^{HT}(x) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n,$$

onde

$$\sigma_F^{HT}(x) = \frac{1}{\text{Vol}(S^{n-1})} \int_{S_x M} \sqrt{\det(g_{ij}(x, y))} dV_{S_x M}.$$

Sendo $dV_{S_x M} = \sqrt{\det g_{ij}(x, y)} d\tau$, $d\tau := \sum_i (-1)^{i-1} \frac{y^i}{F} \frac{dy^1}{F} \wedge \dots \wedge \frac{\widehat{dy^i}}{F} \wedge \dots \wedge \frac{dy^n}{F}$ é a forma volume induzida de $S_x M := \{y \in T_x M | F_x(y) = 1\}$ da métrica Riemanniana $\widehat{g} = g_{ij}(y) dy^i \oplus dy^j$ sobre o espaço $T_x M \setminus 0$.

Seja (M, F) um espaço de Randers, onde

$$F = \alpha + \beta = \sqrt{a_{ij} y^i y^j} + b_i y^i, \quad \|\beta\| = \sqrt{a^{ij} b_i b_j} = b, \quad (0 \leq b < 1).$$

Por (1-3), sabemos que

$$\det(g_{ij}) = a \left(\frac{F}{\alpha} \right)^{n+1}, \quad a = \det(a_{ij}).$$

Daí temos que

$$dV_M = \sigma(x)dx = \frac{dx}{c_{n-1}} \int_{S_x M} \det \left(\frac{g_{ij}}{F} \right) d\tau,$$

onde c_{n-1} é a área da esfera Euclidiana S^{n-1} de dimensão $n-1$,

$$\int_{S_x M} \det \left(\frac{g_{ij}}{F} \right) d\tau = \int_{S_x M} \frac{\det(g_{ij})}{F^n} d\tau = a \int_{S_x M} \frac{F}{\alpha^{n+1}} d\tau = \sqrt{a} \int_{S_x} (1 + b_i y^i) dV_{S_x},$$

a última igualdade é obtida fazendo uso da Proposição 1.12 e a mudança de parâmetros $(y^1, \dots, y^n) = \frac{1}{1 + \|\beta\|y^n} (y^1, \dots, y^n)$, onde

$$S_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid a_{ij} y^i y^j = 1\}, \quad dV_{S_x} = \sqrt{a} d\tau.$$

Sejam $\{\lambda_i\}$ os autovalores da matriz (a_{ij}) , para os quais correspondem os autovetores unitários $\{v_i\}$ com respeito a métrica Euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathbb{R}^n . Seja

$$y^i = \sum_k v_k^i \frac{z^k}{\sqrt{\lambda_k}} \quad \text{com} \quad |z|^2 = \langle z, z \rangle = 1,$$

note que $y \in S_x$. Por isso, temos

$$\begin{aligned} dV_{S_x} &= \sqrt{a} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y^i dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} z^i dz^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz^i} \wedge \dots \wedge dz^n \\ &= dV_{S^{n-1}}. \end{aligned}$$

Usando o fato que S^{n-1} é simétrica com respeito a cada z_k e z_k^i s são funções ímpares, temos que

$$\int_{S_x} y^i dV_{S_x} = \sum_k v_k^i \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{S^{n-1}} z^k dV_{S^{n-1}} = 0,$$

do qual mostramos que

$$dV_M = \frac{\sqrt{a} dx}{c_{n-1}} \int_{S_x} (1 + b_i y^i) dV_{S_x} = \sqrt{a} dx. \quad (2-17)$$

Destes resultados obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.16 *O elemento de volume de um espaço de Randers $(M, \alpha + \beta)$ é justamente o elemento de volume da variedade Riemanniana (M, α) .*

Seja $f : (M, F) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F})$ uma imersão isométrica num espaço de Randers (\tilde{M}, \tilde{F}) com

$$\tilde{F} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{a}_{\gamma\kappa}(\tilde{x})\tilde{y}^\gamma\tilde{y}^\kappa} + \tilde{b}_\gamma(\tilde{x})\tilde{y}^\gamma, \quad \|\tilde{\beta}\| = \sqrt{\tilde{a}^{\gamma\kappa}\tilde{b}_\gamma\tilde{b}_\kappa} = \tilde{b} \quad (0 \leq \tilde{b} < 1).$$

claramente, temos que

$$F = f^*\tilde{F} = \alpha + \beta = \sqrt{a_{ij}y^iy^j} + b_iy^i,$$

onde

$$a_{ij} = \tilde{a}_{\gamma\kappa}f_i^\gamma f_j^\kappa, \quad b_i = \tilde{b}_\gamma f_i^\gamma.$$

Isto nos diz que (M, F) é também um n -espaço de Randers. Pelo Teorema 2.16, o elemento de volume de $(M, \alpha + \beta)$ é justamente o elemento de volume da variedade Riemanniana (M, α) . É assim que temos a seguinte proposição:

Proposição 2.17 *A forma curvatura média \mathcal{H} da subvariedade $(M, \alpha + \beta)$ imersa isometricamente em um espaço de Randers $(\tilde{M}, \tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$ é justamente a forma curvatura média da subvariedade (M, α) imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$.*

Pelo Teorema 2.16 e pela Proposição 2.17, temos:

Proposição 2.18 *Subvariedades mínimas num espaço de Randers $(\tilde{M}, \tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$ são justamente as subvariedades mínimas em uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$; e vice-versa.*

Lembre que um espaço de Randers (\tilde{M}, \tilde{F}) é chamado *especial* se \tilde{M} é um espaço vetorial real \tilde{V} e α é Euclidiano [17].

Um Teorema Local de Rigidez para Superfícies Mínimas num Espaço de Minkowski do tipo Randers 3-dimensional

3.1 Introdução

Obtida a forma da Curvatura Média (2-11) é claro que o plano em \mathbb{R}^3 é mínima com respeito a qualquer forma de volume Finsleriano. Para subvariedades mínimas com respeito a forma volume Busemann-Hausdorff (subvariedade BH-mínima), os primeiros exemplos não triviais de superfície BH-mínima em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ foram estudadas em [17, 18]. É uma surpresa que os helicóides gerados pela rotação de uma reta ao longo do eixo x^3 são superfícies BH-mínima em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$. Agora, considerando que os planos e helicóides gerados pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 , são HB-mínima e HT-mínima, é natural perguntar se elas são as únicas superfícies BH-mínima e HT-mínima em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$. A resposta é afirmativa.

No presente capítulo damos a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Seja $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ um espaço de Minkowski do tipo Randers 3-dimensional com $\tilde{F}_b = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, onde $\tilde{\alpha}$ é a métrica Euclidiana e $\tilde{\beta} = bdx^3$, $0 < b < 1$. Se uma superfície conexa M em \mathbb{R}^3 é mínima simultaneamente com respeito as formas volumes de Busemann-Hausdorff e Holmes-Thompson, então, a menos de uma translação paralela de \mathbb{R}^3 , M é parte de um plano ou parte de um helicóide gerado pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 .*

Agora estamos na possibilidade de calcular a curvatura média de um gráfico em um espaço de Minkowski do tipo Randers $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ com $\tilde{F} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, onde $\tilde{\alpha}$ é a métrica Euclidiana e $\tilde{\beta} = bdx^{n+1}$, $0 \leq b < 1$.

De agora em diante usamos a Observação 2-12.

3.2 Forma Volume Busemann-Hausdorff

Primeiro consideremos o elemento volume Busemann-Hausdorff σ_{BH} . Seja $f : (M^n, F) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ uma imersão isométrica (subvariedade n -dimensional). Em coordenadas locais temos

$$\tilde{x}^\gamma = f^\gamma(x^1, \dots, x^n), \quad f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = z_i^\gamma(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\gamma}, \quad (3-1)$$

onde

$$z_i^\gamma(x) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^i}. \quad (3-2)$$

Desde que f seja uma imersão isométrica, a métrica de Randers induzida $F = \alpha + \beta = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i$ é dada por:

$$A = a_{ij}(x) = z_i^\gamma z_j^\kappa \delta_{\gamma\kappa}, \quad (3-3)$$

$$b_i(x) = bz_i^{n+1}, \quad \|\beta\|^2 = b^2 a^{ij} z_i^{n+1} z_j^{n+1}. \quad (3-4)$$

Agora obtemos uma igualdade muito útil:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} (A^{-1}) &= d(A^{-1}) \frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} (A) \\ &= -A^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} (A) \right) A^{-1} \\ &= -(a^{si} z_l^\gamma a^{tl})_{st} - (a^{sl} z_l^\gamma a^{it})_{st}. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Sabemos que a forma de volume dV_F com respeito ao elemento de volume σ_{BH} é dado por (ver Equação 2-16)

$$dV_F = \mathcal{F}(z) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

onde

$$\mathcal{F}(z) = (1 - \|\beta\|^2)^{(n+1)/2} \sqrt{\det a_{ij}}. \quad (3-6)$$

Daqui em diante omitimos o subíndice de σ_{BH} por simplicidade.

Usando (3-3) e (3-4),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} \sqrt{\det A} &= \frac{1}{2\sqrt{\det A}} \frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} (\det A) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det A}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} (\det A) \cdot \frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} \left(\sum_{\gamma} z_i^\gamma z_j^\gamma \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det A}} \sum_{ij} (-1)^{i+j} A_{[ij]} (a_{ij} a^{ij}) 2z_i^\gamma \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \sum_j \det A \cdot a^{ij} z_i^\gamma \\
&= \sqrt{\det A} a^{ij} z_j^\gamma,
\end{aligned} \tag{3-7}$$

onde $A_{[ij]}$ é o determinante da matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$, obtida pela omissão da i -ésima linha e a j -ésima coluna. Denote $z^{n+1} = (z_1^{n+1}, \dots, z_n^{n+1})$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} \|\beta\|^2 &= b^2 \frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} \left((z^{n+1})^t A^{-1} (z^{n+1}) \right) \\
&= 2b^2 (a^{ij} z_j^{n+1} \delta_\gamma^{n+1} - a^{ij} a^{kl} z_k^\alpha z_j^{n+1} z_l^{n+1}),
\end{aligned} \tag{3-8}$$

e conseqüentemente,

$$\frac{\partial}{\partial z_i^\gamma} \mathcal{F} = \mathcal{F} \left\{ a^{ij} z_j^\gamma + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} \left(a^{ij} a^{kl} z_k^\gamma z_j^{n+1} z_l^{n+1} - a^{ij} z_j^{n+1} \delta_\gamma^{n+1} \right) \right\}. \tag{3-9}$$

Escrevendo $A^i = a^{ij} z_j^{n+1}$, $B = a^{ij} z_i^{n+1} z_j^{n+1}$, então de 3-9 temos

$$\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} \mathcal{F} = \mathcal{F} A^i \left\{ 1 + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (B - 1) \right\}, \tag{3-10}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i^k} \mathcal{F} = \mathcal{F} \left\{ a^{ij} z_j^k + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} A^i A^l z_l^k \right\}. \tag{3-11}$$

Usando (3-5), um cálculo direito mostra que

$$\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} A^i = a^{ij}(1-B) - A^i A^j, \quad (3-12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j^k} A^i = -a^{ij} A^l z_l^k - A^i a^{jl} z_l^k, \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} B = 2A^i(1-B). \quad (3-14)$$

Usando (3-10) - (3-14) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i^{n+1} \partial z_j^{n+1}} &= \left(\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} \mathcal{F} \right) A^j \left(1 + \frac{(n+1)b^2}{1-\|\beta\|^2} (B-1) \right) \\ &\quad + \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} A^j \left\{ 1 + \frac{(n+1)b^2}{1-\|\beta\|^2} (B-1) \right\} \right) \\ &\quad + \mathcal{F} A^j (n+1)b^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} \left(\frac{(B-1)}{1-\|\beta\|^2} \right) \right) \\ &= \mathcal{F} A^i A^j \left\{ 1 + \frac{(n+1)b^2}{1-\|\beta\|^2} (B-1) \right\}^2 \\ &\quad + \mathcal{F} (a^{ij}(1-B) - A^j A^i) \left(1 + \frac{(n+1)b^2}{1-\|\beta\|^2} (B-1) \right) \\ &\quad + \mathcal{F} A^j (n+1)b^2 \left\{ \frac{2A^i(1-B)}{1-\|\beta\|^2} - \frac{(B-1)}{(1-\|\beta\|^2)^2} (-2b^2(A^i - A^i B)) \right\}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i^{n+1} \partial z_j^{n+1}} &= A^i A^j \left(\frac{(n+1)^2 b^4 (B-1)^2}{(1-\|\beta\|^2)^2} - \frac{(n+1)b^2(B-1)}{1-\|\beta\|^2} - \frac{2(n+1)b^4}{(1-\|\beta\|^2)^2} (B-1)^2 \right) \\ &\quad + a^{ij}(1-B) \left(1 + \frac{(n+1)b^2}{1-\|\beta\|^2} (B-1) \right) \\ &= \left(\frac{(n^2-1)(1-B)^2 b^4}{(1-\|\beta\|^2)^2} + \frac{(n+1)b^2}{1-\|\beta\|^2} (1-B) \right) A^i A^j \\ &\quad + a^{ij}(1-B) \left(1 - \frac{(n+1)b^2}{1-\|\beta\|^2} (1-B) \right), \quad (3-15) \end{aligned}$$

também obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z_i^k \partial z_j^{n+1}} \mathcal{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial z_i^k} \mathcal{F} \right) A^j \left\{ 1 + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (B-1) \right\} \\ &+ \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial z_i^k} A^j \right) \left\{ 1 + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (B-1) \right\} \\ &+ \mathcal{F} A^j (n+1)b^2 \left\{ \frac{1}{1 - \|\beta\|^2} \frac{\partial}{\partial z_i^k} B + \frac{(B-1)}{(1 - \|\beta\|^2)^2} \frac{\partial}{\partial z_i^k} \|\beta\|^2 \right\}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2}{\partial z_i^k \partial z_j^{n+1}} \mathcal{F} &= \left(a^{ij} z_j^k + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (A^i A^l z_l^k) \right) A^j \left(1 + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (B-1) \right) \\ &+ \left(-a^{ij} A^l z_l^k - A^i a^{jl} z_l^k \right) \left(1 - \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (B-1) \right) \\ &+ A^j (n+1)b^2 \left\{ -\frac{2A^i A^l z_l^k}{1 - \|\beta\|^2} + \frac{(B-1)}{(1 - \|\beta\|^2)^2} (-2b^2 A^i A^l z_l^k) \right\} \\ &= \left(1 + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (B-1) \right) (a^{il} A^j - a^{jl} A^i) z_l^k \\ &- \left(\frac{(n^2-1)b^4}{(1 - \|\beta\|^2)^2} (1-B) + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} \right) A^i A^j A^l z_l^k \\ &+ a^{ij} A^l z_l^k \left(\frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} (1-B) - 1 \right). \end{aligned} \quad (3-16)$$

Agora assumamos que $f : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ é o gráfico sobre um domínio conexo no plano $\tilde{x}^{n+1} = 0$, e dotamos Ω com a métrica de Finsler induzida $F = f^* \tilde{F}_b$. Seja $f : (\Omega, F) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ uma imersão isométrica, e

$$f^i(x^1, \dots, x^n) = x^i, \quad f^{n+1}(x^1, \dots, x^n) := u(x^1, \dots, x^n). \quad (3-17)$$

Neste caso, por comodidade denotamos as coordenadas usuais para \mathbb{R}^{n+1} por (x^1, \dots, x^{n+1}) em vez de $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{n+1})$.

Depois de um cálculo simples temos:

$$a_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j, \quad a^{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{W^2} u_i u_j, \quad (3-18)$$

$$1 - \|\beta\|^2 = \frac{T_b}{W^2}, \quad A^i = \frac{u_i}{W^2}, \quad B = 1 - \frac{1}{W^2}, \quad (3-19)$$

onde

$$W^2 = 1 + \sum_i u_i^2, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad T_b = b^2 + (1 - b^2)W^2. \quad (3-20)$$

Mostramos então de (2-11) e (3-15)-(3-20) que a BH-curvatura média $\mathcal{H}_f^{BH} = -H_k^{BH} dx^k$ do gráfico é dada por

$$H_k^{BH} = \frac{1}{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i^k \partial z_j^{n+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \right\}. \quad (3-21)$$

Então, continuando com os cálculos,

$$\begin{aligned} H_{n+1}^{BH} &= \sum_{ij} \left\{ \left(\frac{(n^2 - 1)b^4}{\frac{(T_b)^2}{W^4}} \left(\frac{1}{W^2} \right)^2 + \frac{(n+1)b^2}{\frac{T_b}{W^2}} \frac{1}{W^2} \right) \frac{u_i}{W^2} \frac{u_j}{W^2} \right. \\ &\quad \left. + a^{ij} \left(\frac{1}{W^2} \right) \left(1 - \frac{(n+1)b^2}{\frac{T_b}{W^2}} \frac{1}{W^2} \right) \right\} u_{ij} \\ &= \sum_{ij} \left\{ \left(\frac{(n^2 - 1)b^4}{T_b^2} + \frac{(n+1)b^2}{T_b} \right) \frac{u_i}{W^2} \frac{u_j}{W^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(T_b - (n+1)b^2)}{T_b} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{W^2} u_i u_j \right) \right\} u_{ij} \\ &= \frac{1}{W^2 T_b^2} \sum_{ij} \left\{ (n+1)b^2 (T_b + (n-1)b^2) \frac{u_i u_j}{W^2} \right. \\ &\quad \left. + T_b (T_b - (n+1)b^2) \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) \right\} u_{ij} \quad (3-22) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H_k^{BH} &= \left\{ \left(1 + \frac{(n+1)b^2 - 1}{\frac{T_b}{W^2}} \right) \left(\left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_k}{W^2} \right) \frac{u_j}{W^2} - \left(\delta_{ij} - \frac{u_j u_k}{W^2} \right) \frac{u_i}{W^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{(n^2 - 1)b^4}{\frac{T_b^2}{W^4}} \frac{1}{W^2} + \frac{(n+1)b^2}{\frac{T_b}{W^2}} \right) \frac{u_i u_j u_k}{W^2 W^2 W^2} \right. \\
&\quad \left. \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) \frac{u_k}{W^2} \left(\frac{(n+1)b^2}{\frac{T_b}{W^2}} \left(\frac{1}{W^2} \right) - 1 \right) \right\} u_{ij} \\
&= \sum_{ij} \left\{ - \left(\frac{(n^2 - 1)b^4}{T_b^2} + \frac{(n+1)b^2}{T_b} \right) \frac{u_j u_k}{W^2 W^2} u_i \right. \\
&\quad \left. + \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) \frac{1}{W^2} \left(\frac{(n+1)b^2 - T_b}{T_b} \right) \right\} u_{ij} \\
&= - \frac{1}{W^2 T_b^2} \sum \left\{ \left((n^2 - 1)b^4 + (n+1)b^2 T_b \right) \frac{u_i u_j}{W^2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) T_b (T_b - (n+1)b^2) \right\} u_{ij} \\
&= -H_{n+1}^{BH} u_k. \tag{3-23}
\end{aligned}$$

Agora caracterizamos gráficos em $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ sobre um domínio conexo Ω no plano $x^{n+1} = 0$.

Proposição 3.2 *Seja $f : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ um gráfico sobre um domínio conexo Ω no plano $x^{n+1} = 0$ dado por*

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, u(x^1, \dots, x^n)). \tag{3-24}$$

Então a BH-curvatura média $\mathcal{H}_f^{BH} = H_\alpha^{BH} dx^\alpha$ é dada por (3-22) e (3-23), e f é BH-mínima, se, e somente se,

$$\begin{aligned}
&\sum_{ij} \left\{ T_b (T_b - (n+1)b^2) \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (n+1)b^2 (T_b + (n-1)b^2) \frac{u_i u_j}{W^2} \right\} u_{ij} = 0. \tag{3-25}
\end{aligned}$$

3.3 Forma Volume Holmes-Thompson

Consideramos a forma volume Holmes-Thompson, desde que $dV_F^{\sigma_{HT}} = \sqrt{\det(a_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, ver (2-17).

Com as mesmas notações usadas até agora, com $\mathcal{F} = \sqrt{\det(a_{ij})}$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial z_i^{\gamma}} \sqrt{\det a_{ij}} = \sqrt{\det a_{ij}} a^{ij} z_j^{\alpha}. \quad (3-26)$$

Escrevendo $A^i = a^{ij} z_j^{n+1}$, $B = a^{ij} z_i^{n+1} z_j^{n+1}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} A^i = a^{ij} (1 - B) - A^i A^j, \quad (3-27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j^k} A^i = -a^{ij} A^l z_l^k - A^i a^{jl} z_l^k. \quad (3-28)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2}{\partial z_i^{n+1} \partial z_j^{n+1}} \mathcal{F} &= \frac{1}{\mathcal{F}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} \sqrt{\det a_{ij}} \right) a^{jl} z_l^{n+1} + \mathcal{F} \frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} A^j + \mathcal{F} a^{ij} \right) \\ &= a^{il} z_l^{n+1} \cdot a^{jl} z_l^{n+1} - a^{ij} A^l z_l^{n+1} - A^j a^{il} z_l^{n+1} + a^{ij} \\ &= a^{ij} (1 - B), \end{aligned} \quad (3-29)$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2}{\partial z_i^k \partial z_j^{n+1}} \mathcal{F} &= a^{il} z_l^k a^{jl} z_l^{n+1} - a^{ij} A^l z_l^k - A^j a^{il} z_l^k \\ &= A^j a^{il} z_l^k - a^{ij} A^l z_l^k - A^j a^{il} z_l^k \\ &= z_l^k \left(A^j a^{il} - a^{ij} A^l - A^j a^{il} \right) \\ &= -a^{ij} A^l z_l^k. \end{aligned} \quad (3-30)$$

Para a imersão isométrica $f : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ dado por

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, u(x^1, \dots, x^n)), \quad (3-31)$$

temos

$$a_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j, \quad a^{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{W^2} u_i u_j, \quad (3-32)$$

$$\det(a_{ij}) = 1 + \sum_{i=1}^n u_i^2, \quad W^2 = 1 + \sum_i u_i^2, \quad (3-33)$$

$$B = 1 - \frac{1}{W^2}. \quad (3-34)$$

Isto implica

$$\begin{aligned} H_{n+1}^{HT} &= \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i^{n+1} \partial z_j^{n+1}} \mathcal{F} \right\} u_{ij} = a^{ij} (1 - B) u_{ij} \\ &= \sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) \frac{1}{W^2} u_{ij} \end{aligned} \quad (3-35)$$

e

$$\begin{aligned} H_k^{HT} &= \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i^k \partial z_j^{n+1}} \mathcal{F} \right\} u_{ij} = \sum_{ij} -a^{ij} A^l z_l^k u_{ij} \\ &= \sum_{ij} - \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) \frac{u_k}{W^2} u_{ij} \\ &= -H_{n+1}^{HT} u_k, \quad \text{para } k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3-36)$$

Portanto

$$\mathcal{H}_f^{HT} = -H_k^{HT} dx^k = H_{n+1}^{HT} \sum_{i=1}^n u_i dx^i - H_{n+1}^{HT} dx^{n+1} = -H_{n+1}^{HT} (dx^{n+1} - \sum_{i=1}^n u_i dx^i). \quad (3-37)$$

Proposição 3.3 *Seja $f : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ um gráfico como em 3.2. Então a HT-curvatura média é dada por*

$$\mathcal{H}_f^{HT} = -H_{n+1}^{HT} (dx^{n+1} - \sum_{i=1}^n u_i dx^i), \quad (3-38)$$

onde

$$H_{n+1}^{HT} = \frac{1}{W^2} \sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) u_{ij}, \quad (3-39)$$

e f é HT-mínima se, e somente se,

$$\sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) u_{ij} = 0. \quad (3-40)$$

Como esperado (ver Proposição 2.18), observamos que a condição (3-39) é justamente a equação de um gráfico mínimo num espaço Euclidiano de dimensão $(n + 1)$.

Exemplo 3.4 *Devido a proposição anterior temos que:*

- O helicóide $\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$,
- O catenóide $\phi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$,
- A superfície de Enneper, $\phi(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2)$,

d) A superfície Costa,

são HT-mínimas.

Exemplo 3.5 Sejam $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < b < 1$, e a equação do cone

$$\left(x^1, \dots, x^n, \sqrt{\frac{((n+1)b^2 - 1)((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)}{1 - b^2}} \right), \quad (3-41)$$

onde $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \neq 0$, podemos verificar que o cone é uma Hipersuperfície BH-mínima em $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$, mas não HT-mínima.

De fato, da Proposição 3.2 com as mesmas notações obtemos,

$$W^2 = 1 + \frac{(n+1)b^2 - 1}{1 - b^2} = \frac{nb^2}{1 - b^2},$$

$$T_b = b^2 + (1 - b^2) \left(1 + \frac{(n+1)b^2 - 1}{1 - b^2} \right) = (n+1)b^2.,$$

Ademais

$$u_i = \sqrt{\frac{(n+1)b^2 - 1}{1 - b^2}} \frac{x_i}{\sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}},$$

$$u_i u_j = \frac{(n+1)b^2 - 1}{1 - b^2} \frac{x^i x^j}{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2},$$

$$u_{ij} = \sqrt{\frac{(n+1)b^2 - 1}{1 - b^2}} (x^i) \left(-\frac{x^j}{((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{3/2}} \right),$$

$$u_{ii} = \sqrt{\frac{(n+1)b^2 - 1}{1 - b^2}} \left(-\frac{x^i}{((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)b^2 - 1}{1 - b^2}} \left(\frac{(x^1)^2 + \dots + (x^{i-1})^2 + (x^{i+1})^2 + \dots + (x^n)^2}{((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{3/2}} \right).$$

Chamando $\alpha = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$.

A Equação (3-25) torna-se

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \left\{ (n+1)b^2 \left((n+1)b^2 - (n+1)b^2 \right) \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) \right. \\ & \left. + (n+1)b^2 \left((n+1)b^2 + (n-1)b^2 \right) \frac{x_i x_j}{\alpha^2} \left(\frac{(n+1)b^2 - 1}{1-b^2} \frac{1-b^2}{nb^2} \right) \right\} \\ & \sqrt{\frac{(n+1)b^2 - 1}{1-b^2}} \left(\frac{-x^j x^i}{\alpha^3} + \frac{\delta_{ij}}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \frac{x^i x^j}{\alpha^2} \left(\frac{\delta_{ij}}{\alpha} - \frac{x^i x^j}{\alpha^3} \right) = \\ & \frac{1}{\alpha^5} \left[\sum_{i=j} (x^i)^2 (\alpha^2 - (x^i)^2) + \sum_{i \neq j} x^i x^j (-x^i x^j) \right] = 0. \end{aligned}$$

Portanto o cone é uma Hipersuperfície BH-mínima.

Agora da Proposição 3.3 obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) u_{ij} &= \sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{(n+1)b^2 - 1}{1-b^2} \frac{x^i x^j}{\alpha^2} \right) \left(\frac{\delta_{ij}}{\alpha} - \frac{x^i x^j}{\alpha^3} \right) \\ &= \sum_{i=j} \left(1 - \frac{((n+1)b^2 - 1)(x^i)^2}{(1-b^2)\alpha^2} \right) \left(\frac{\alpha^2 - (x^i)^2}{\alpha^3} \right) \\ & \quad + \sum_{i \neq j} \left(-\frac{(n+1)b^2 - 1}{1-b^2} \frac{x^i x^j}{\alpha^2} \right) \left(\frac{-x^i x^j}{\alpha^3} \right) \\ &= \sum_i \frac{(1-b^2)\alpha^2 - ((n+1)b^2 - 1)(x^i)^2}{(1-b^2)\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2 - (x^i)^2}{\alpha^3} \right) \\ & \quad + \sum_{ij} \frac{1}{\alpha^5} \left(\frac{(n+1)b^2 - 1}{1-b^2} \right) (x^i)^2 (x^j)^2. \end{aligned}$$

Como o fator $\frac{1}{(1-b^2)\alpha^5} \neq 0$, do somatório anterior (já que estamos tentando provar que se o cone é HT-mínimo, então a igualdade acima tem que ser nula) obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_i ((1-b^2)\alpha^2 - ((n+1)b^2 - 1)(x^i)^2)(\alpha^2 - (x^i)^2) + \sum_{i \neq j} ((n+1)b^2 - 1)(x^i)^2(x^j)^2 \\
&= \sum_i (1-b^2)\alpha^2(x^i)^2\alpha^2 - \sum_i (1-b^2)\alpha^2(x^i)^2(x^i)^2 \\
&\quad - \sum_i ((n+1)b^2 - 1)(x^i)^2(\alpha^2 - (x^i)^2) + \sum_{i \neq j} ((n+1)b^2 - 1)(x^i)^2(x^j)^2 \\
&= \sum_i (1-b^2)\alpha^4(x^i)^2 - \sum_i (1-b^2)\alpha^2(x^i)^4 \\
&= (1-b^2)\alpha^2 \sum_i (\alpha^2(x^i)^2 - (x^i)^4) \\
&= (1-b^2)\alpha^2 \sum_i (\alpha^2 - (x^i)^2)(x^i)^2 = (1-b^2)\alpha^2 \sum_{i \neq j} (x^i)^2(x^j)^2.
\end{aligned}$$

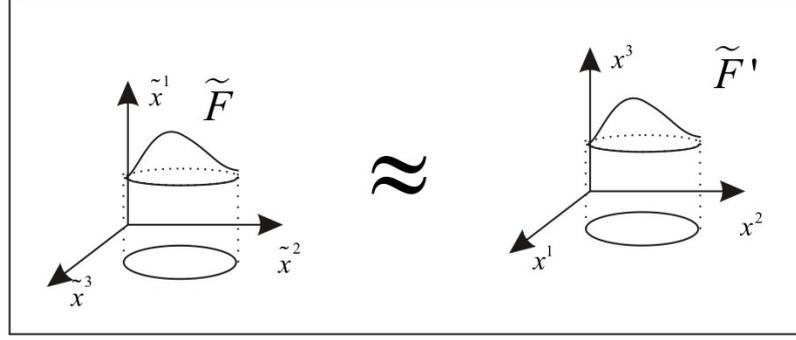
A última igualdade é nula, se $x^k = 0 \quad \forall k$ ou $x^k \neq 0$ para um único k . O que implica que o cone dado por a Equação (3-41) não é HT-mínima.

Exemplo 3.6 (*Helicóide*) *Pela caracterização do volume na forma Holmes-Thompson, sabe-se que o Helicóide em \mathbb{R}^3 é HT-mínima, já que ela é uma superfície mínima no sentido usual, mas em geral não é BH-mínima. Agora consideremos o helicóide gerado pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 . O gráfico é definido por $x^3 = C \tan^{-1}(x^2/x^1)$, onde C é uma constante diferente de zero. Então pela Proposição 3.2 obtemos*

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{-C(x^2)}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\
u_2 &= \frac{C(x^1)}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\
u_{12} = u_{21} &= \frac{u_1^2 - u_2^2}{C} = \frac{C(x^2)^2 - C(x^1)^2}{((x^1)^2 + (x^2)^2)^2}, \\
u_{11} = -u_{22} &= -\frac{2u_1u_2}{C} = \frac{2C(x^1)(x^2)}{((x^1)^2 + (x^2)^2)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W^2 &= 1 + \frac{C^2}{((x^1)^2 + (x^2)^2)}, \\
T_b &= 1 - \frac{C^2(1-b^2)}{((x^1)^2 + (x^2)^2)}.
\end{aligned}$$

Da condição de minimalidade da Proposição 3.2 com os dados obtidos acima temos

Figura 3.1: \tilde{F}'_b

$$\begin{aligned}
& T_b (T_b - (n+1)b^2) \left\{ \left(1 - \frac{u_1 u_1}{W^2}\right) u_{11} + 2 \left(\frac{-u_1 u_2}{W^2}\right) u_{12} + \left(1 - \frac{u_2 u_2}{W^2}\right) u_{22} \right\} \\
& + (n+1)b^2 (T_b + (n-1)b^2) \left\{ \frac{u_1 u_1}{W^2} u_{11} + \frac{2u_1 u_2}{W^2} u_{12} + \frac{u_2 u_2}{W^2} u_{22} \right\} \\
& = T_b (T_b - (n+1)b^2) \left\{ u_1 u_1 \frac{2u_1 u_2}{W^2 C} - 2u_1 u_2 \frac{u_1^2 - u_2^2}{W^2 C} - u_2 u_2 \frac{2u_1 u_2}{W^2 C} \right\} \\
& + (n+1)b^2 (T_b + (n-1)b^2) \left\{ u_1 u_1 \frac{-2u_1 u_2}{W^2 C} + 2u_1 u_2 \frac{u_1^2 - u_2^2}{W^2 C} + u_2 u_2 \frac{2u_1 u_2}{W^2 C} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Então o helicóide $x^3 = C \tan^{-1}(x^2/x^1)$ é BH-mínima.

Por uma simples observação podemos deduzir que quando n é par, o gráfico em $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ definido por

$$x^{n+1} = C_1 \tan^{-1}(x^2/x^1) + C_2 \tan^{-1}(x^4/x^3) + \dots + C_{n/2} \tan^{-1}(x^n/x^{n-1})$$

é BH-mínima.

Para poder mostrar o Teorema 3.1 também precisamos considerar o gráfico em $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}_b)$ o qual é definida sobre um domínio conexo no plano $x^i = 0$ para $i \neq n+1$, sem perda de generalidade para $x^1 = 0$. Isso é equivalente a estudar o gráfico em $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}'_b)$ sobre um domínio conexo no plano $x^{n+1} = 0$ com $\tilde{F}'_b = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}'$, $\tilde{\beta}' = b dx^1$.

A métrica de Randers $F' = \alpha + \beta = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i$ induzida por $f : (M, F') \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{F}'_b)$ (imersão isométrica) é dada por:

$$A = a_{ij}(x) = z_i^\gamma z_j^\kappa \delta_{\gamma\kappa}, \quad (3-42)$$

$$b_i(x) = b z_i^1, \quad \|\beta\|^2 = b^2 a^{ij} z_i^1 z_j^1, \quad (3-43)$$

onde

$$z_i^\gamma(x) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^i}. \quad (3-44)$$

Então o elemento volume induzido pela forma volume Busemann-Hausdorff é:

$$\mathcal{F}(z) = (1 - \|\beta\|^2)^{(n+1)/2} \sqrt{\det a_{ij}}. \quad (3-45)$$

Para simplificar notações, fazemos

$$A^i = a^{is} z_s^1, \quad W^2 = 1 + \sum_i (u_i)^2.$$

Um cálculo direto mostra que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\beta\|^2}{\partial z_i^{n+1}} &= b^2 \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial z_i^{n+1}} \right) z_i^1 z_j^1 + b^2 a^{ij} \frac{\partial z_i^1 z_j^1}{\partial z_i^{n+1}} \\ &= -2b^2 (A^i A^m z_m^{n+1}), \end{aligned} \quad (3-46)$$

$$\frac{\partial \sqrt{\det a_{ij}}}{\partial z_i^{n+1}} = \sqrt{\det a_{ij}} a^{ij} z_j^{n+1}, \quad (3-47)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} (a^{jl} z_l^{n+1}) = a^{ij} (1 - a^{ij} z_i^{n+1} z_j^{n+1}) - a^{il} z_l^{n+1} a^{jk} a_k^{n+1}, \quad (3-48)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i^{n+1}} A^j = - (a^{ij} A^m z_m^{n+1} + A^i a^{jl} z_l^{n+1}), \quad (3-49)$$

$$a_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j, \quad a^{ij} = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2}.$$

Para a imersão

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, u(x^1, \dots, x^n)),$$

obtemos os seguintes resultados

$$1 - \|\beta\|^2 = 1 - b^2 a^{ij} z_i^1 z_j^1 = 1 - b^2 \left(1 - \frac{u_1 u_1}{W^2}\right), \quad (3-50)$$

$$A^i = a^{ij} z_j^1 = \left(\delta_{i1} - \frac{u_i u_1}{W^2}\right), \quad (3-51)$$

$$1 - a^{ij} z_i^{n+1} z_j^{n+1} = 1 - \sum (u_i)^2 + \sum \frac{(u_i)^2 (u_j)^2}{W^2} = \frac{1}{W^2}, \quad (3-52)$$

$$A^i z_i^{n+1} = a^{i1} u_1 u_i = \sum_i \left(\delta_{i1} - \frac{u_i u_1}{W^2}\right) u_i = \frac{u_1}{W^2}, \quad (3-53)$$

$$a^{il} z_l^{n+1} = \sum_l \left(\delta_{il} - \frac{u_i u_l}{W^2}\right) u_l = \frac{u_i}{W^2}. \quad (3-54)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A^i A^j u_{ij} &= \left(1 - \frac{2u_1^2}{W^2} + \frac{u_1^4}{W^4}\right) u_{11} + 2 \sum_{j=2} \left(-\frac{u_j u_1}{W^2} + \frac{u_1^3 u_j}{W^4}\right) u_{1j} + \sum_{i,j=2} \frac{u_1^2}{W^4} u_i u_j u_{ij} \\ &= \frac{2u_1^3}{W^4} \sum_{j=2} u_j u_{1j} - \frac{2u_1}{W^2} \sum_{j=2} u_j u_{1j} + \sum_{i,j=2} \frac{u_1^2}{W^4} u_i u_j u_{ij} + \left(1 + \frac{u_1^4}{W^4} - \frac{2u_1^2}{W^2}\right) u_{11} \\ &= \sum_{ij} \frac{u_1^2}{W^4} u_i u_j u_{ij} - \frac{2u_1}{W^2} \sum_j u_j u_{1j} + u_{11}. \end{aligned} \quad (3-55)$$

Para chegar em uma expressão da curvatura média dada pela Observação 2-12 temos que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_j^{n+1}} = \mathcal{F} a^{jl} z_l^{n+1} + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} A^j A^m z_m^{n+1} \mathcal{F}. \quad (3-56)$$

Fazendo uso de (3-46) - (3-56), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i^{n+1} \partial z_j^{n+1}} u_{ij} &= \frac{(1-b^2)W^2 - nb^2 u_1^2}{W^2 \left((1-b^2)W^2 + b^2 u_1^2\right)} \sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2}\right) u_{ij} \\ &\quad + \left(\frac{(n^2-1)b^4 u_1^2}{\left((1-b^2)W^2 + b^2 u_1^2\right)^2} + \frac{(n+1)b^2}{(1-b^2)W^2 + b^2 u_1^2} \right) \\ &\quad \times \left(u_{11} + \frac{u_1^2}{W^4} \sum_{ij} u_i u_j u_{ij} - \frac{2}{W^2} \sum_j u_1 u_j u_{1j} \right). \end{aligned} \quad (3-57)$$

Proposição 3.7 *Seja $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}'_b)$ um espaço de Minkowski $(n+1)$ -dimensional do tipo Randers especial com $\tilde{F}'_b = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}'$, $\tilde{\beta}' = b dx^1$, e $f : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{F}'_b)$ um gráfico definido por*

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, u(x^1, \dots, x^n)).$$

Então a BH-curvatura média é dada por

$$\mathcal{H}_f^{BH} = -H_{n+1}^{BH} \left(-\sum_i u_i dx^i + dx^{n+1} \right),$$

onde H_{n+1}^{BH} é dada pela Equação (3-57).

A demonstração desta proposição é feita considerando para $k < n + 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\beta\|^2}{\partial z_i^k} &= -2b^2 A^i A^m z_m^k + 2b^2 A^i \delta_{k1}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i^k} &= \mathcal{F} \left\{ a^{il} z_l^k + \frac{(n+1)b^2}{1 - \|\beta\|^2} \left(A^i A^m z_m^k - a^{il} z_l^1 \delta_{k1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.8 Considere o helicóide em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}'_b)$ gerado pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 . Este é definido por $x^3 = Cx^2 \tan x^1$. Então se mostra diretamente da Proposição 3.7 que este helicóide é BH-mínima. Note que este exemplo é o mesmo que no exemplo 3.6.

Agora damos resultados rígidos (localmente) para um gráfico e completamos a demonstração do Teorema 3.1.

Teorema 3.9 Seja $0 < b < 1$, e $f : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ um gráfico sobre um domínio conexo Ω no plano $x^3 = 0$ o qual é dado por

$$f(x^1, x^2) = (x^1, x^2, u(x^1, x^2)).$$

Então f é BH-mínima e HT-mínima se, e somente se, u é linear ou

$$u = c_1 \tan^{-1} \left(\frac{x^2 + c_2}{x^1 + c_3} \right) + c_4, \quad (3-58)$$

para algumas constantes c_1, c_2, c_3 e c_4 com $c_1 \neq 0$. Isto quer dizer que, um gráfico local em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ definido sobre o plano $x^3 = 0$ é BH-mínima e HT-mínima se, e somente se, este é parte de um plano, ou parte de um helicóide gerado pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 , a menos de translação paralela em \mathbb{R}^3 .

Demonstração. A implicação é dada pelo Exemplo 3.6, então só precisamos provar a recíproca. Assuma que f é BH-mínima e HT-mínima, então pelas Proposições 3.2 e 3.3, respectivamente, obtemos sem muita dificuldade para $n = 2$ as seguintes EDP's

$$u_{11} + u_{22} = 0 \quad (3-59)$$

e

$$u_1^2 u_{11} + u_2^2 u_{22} + 2u_1 u_2 u_{12} = 0, \quad (3-60)$$

onde os subíndices representam a derivada parcial respeito a primeira ou segunda coordenada (x^1 ou x^2). Introduzimos a coordenada complexa $z = x^1 + ix^2$ para o plano $x^3 = 0$, e sejam

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} \right),$$

então

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),$$

assim (3-59) e (3-60) podem ser escritos como

$$u_{z\bar{z}} = 0 \quad (3-61)$$

e

$$u_{zz} u_{\bar{z}}^2 + u_{\bar{z}\bar{z}} u_z^2 + 2u_{z\bar{z}} u_z u_{\bar{z}} = 0, \quad (3-62)$$

respectivamente, de (3-61) e (3-62) obtemos que $\frac{1}{u_z}$ é holomorfa, e

$$\left(\frac{1}{u_z} \right)_z = - \left(\frac{1}{u_{\bar{z}}} \right)_{\bar{z}},$$

daí

$$\left(\frac{1}{u_z} \right)_{z\bar{z}} = \left(\frac{1}{u_{\bar{z}}} \right)_{z\bar{z}} = 0$$

e

$$\left(\frac{1}{u_z} \right)_z = C, \text{ com } \bar{C} = - \overline{\left(\frac{1}{u_z} \right)_z} = \left(\frac{1}{u_{\bar{z}}} \right)_{\bar{z}} = -C.$$

Se $C = 0$:

$$\frac{1}{u_z} = a + f(\bar{z})$$

e

$$\frac{1}{u_{\bar{z}}} = b + g(z) = \overline{\left(\frac{1}{u_z} \right)} = \bar{a} + \overline{f(\bar{z})}, \text{ entao, } \overline{f(\bar{z})} = mg(z),$$

com m constante, f e g funções de \bar{z} e z , respectivamente, do qual $\overline{f(\bar{z})}_{\bar{z}} = 0$, assim, u é linear. No caso que $C \neq 0$, fazendo a mesma análise temos

$$u_z = \frac{1}{C(z+D)}$$

onde D é uma constante complexa. Logo,

$$Cu = \log(z+D) + f(\bar{z}), \quad (3-63)$$

e

$$\overline{Cu} = \log(\overline{z+D}) + g(z). \quad (3-64)$$

Ao longo da demonstração estamos usando as hipóteses que u é real, isto é $\bar{u} = u$, o que mostra

$$f(\bar{z}) = -\log(\overline{z+D}), \quad (3-65)$$

daí conclue-se que

$$u = \frac{1}{C} (\log(z+D) - \log(\overline{z+D})). \quad (3-66)$$

Assim, pela expressão (3-58), considerando que u é o ângulo do ponto (x, y) , o teorema fica provado. \square

Teorema 3.10 *Seja $0 < b < 1$, e $f : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^3, \tilde{F}'_b)$ um gráfico sobre um domínio conexo Ω no plano $x^3 = 0$ o qual é dado por*

$$f(x^1, x^2) = (x^1, x^2, u(x^1, x^2)).$$

Então f é BH-mínima e HT-mínima se, e somente se, u é linear ou é da forma

$$u = (x^2 + c_1) \tan(c_2 x^1 + c_3) + c_4, \quad (3-67)$$

para algumas constantes c_1, c_2, c_3 e c_4 com $c_2 \neq 0$. Isto quer dizer que, o gráfico local em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}'_b)$ definido sobre o plano $x^3 = 0$ é BH-mínima e HT-mínima se, e somente se, este é parte de um plano, ou parte de um helicóide gerado pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 a menos de translação paralela de \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Pelo Exemplo 3.8 só precisamos provar a recíproca. Assuma que f é BH-mínima e HT-mínima, então pelas Proposições 3.3 e 3.7 temos para o caso HT-mínima a Equação (3-40) e para o caso BH-mínima

$$u_{11} + \frac{u_1^2}{W^4} \sum_{ij} u_i u_j u_{ij} - \frac{2}{W^2} \sum_j u_1 u_j u_{1j} = 0. \quad (3-68)$$

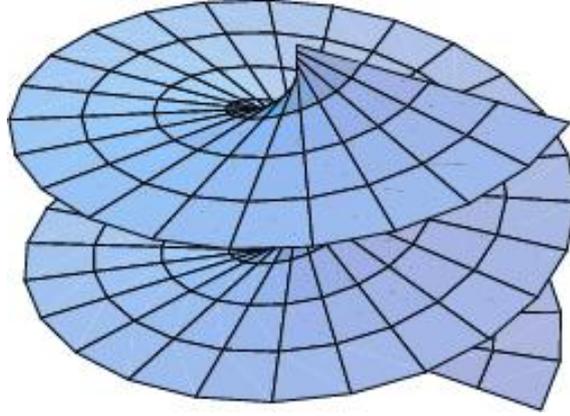


Figura 3.2: *Helicóide*

Introduzindo coordenadas complexas $z = x^1 + ix^2$ como na prova do Teorema 3.9, obtemos para HT-mínima

$$4u_{z\bar{z}} + 8u_z u_{\bar{z}} u_{z\bar{z}} - 4u_z^2 u_{\bar{z}\bar{z}} - 4u_{\bar{z}}^2 u_{zz} = 0.$$

Usando esta igualdade na Equação (3-68) obtemos

$$u_{zz} + u_{\bar{z}\bar{z}} - 2u_{z\bar{z}} = 0,$$

ou,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2 u = 0, \quad (3-69)$$

que é o mesmo dizer $u_{22} = 0$. Isso nos diz que u é linear em x^2 , e podemos escrever

$$u = x^2 C(x^1) + D(x^1), \quad (3-70)$$

para algumas funções $C(x^1)$ e $D(x^2)$. Substituindo (3-70) em (3-40) obtemos

$$x^2 (C''(1+C^2) - 2(C')^2 C) + (D''(1+C^2) - 2CC'D') = 0,$$

do qual

$$(1+C^2)C'' = 2C(C')^2, \quad (1+C^2)D'' = 2CC'D'. \quad (3-71)$$

Deduzimos de (3-70) e (3-71) que u é linear ou como a expressão (3-67). \square

Agora estamos na possibilidade de mostrar o teorema 3.1.

Demonstração. (Prova do Teorema 3.1) Suponha que M é uma superfície conexa em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ a qual é BH-mínima e HT-mínima. É conhecido que localmente M é gráfico de

uma função sobre certo plano coordenado. Se M é gráfico sobre o plano $x^3 = 0$, então pelo Teorema 3.9 M é parte de um plano ou parte de um helicóide a qual é gerada pela rotação de uma reta (perpendicular ao eixo x^3) ao longo do eixo x^3 , a menos de uma translação paralela de \mathbb{R}^3 ; em outro caso, sem perda de generalidade, podemos assumir que M é gráfico sobre o plano $x^1 = 0$. Isto é equivalente a considerar o gráfico sobre o plano $x^3 = 0$ em $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}'_b)$, e pelo Teorema 3.10 vemos que a conclusão é a mesma. Portanto o Teorema está provado. \square

Hipersuperfícies Mínimas de Rotação em um espaço de Minkowski (α, β)

4.1 Introdução

Neste capítulo estudamos os espaços (α, β) , a curvatura média neste espaço (que é uma generalização do capítulo anterior) e chegamos a uma condição de minimalidade para uma hipersuperfície de rotação. Damos uma expressão explícita de hipersuperfícies de rotação gerado por uma curva plana que são BH-mínimas ou HT-mínimas.

4.2 Espaços de Finsler do Tipo (α, β)

Usando uma norma Euclidiana $\alpha(y) = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ e a 1-forma $\beta(y) = b_iy^i$ sobre um espaço vetorial V , podemos definir de maneira geral normas de Minkowski da forma

$$F = \alpha\phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

este tipo de norma é chamado (α, β) -norma. A função $\phi = \phi(s)$ é positiva de classe C^∞ sobre um intervalo aberto simétrico $I = (-b_0, b_0)$ com $\phi(0) = 1$. É fácil verificar que $F = \alpha\phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ é positiva homogênea de grau um. Temos que encontrar a condição para a positividade de $g_{ij} := \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}$. Assuma que $b := \|\beta\|_\alpha < b_0$. Assim em [16] obtemos a matriz (g_{ij}) :

$$g_{ij} = \rho a_{ij} + \rho_0 b_i b_j + \rho_1 (b_i \alpha_j + b_j \alpha_i) - s \rho_1 \alpha_i \alpha_j,$$

onde $\alpha_i = \alpha_{y^i}$ e

$$\rho = \phi^2 - s\phi\phi' \qquad \rho_0 = \phi\phi'' + \phi'\phi',$$

$$\rho_1 = -s(\phi\phi'' + \phi'\phi') + \phi\phi',$$

onde as funções são avaliadas em $s := \frac{\beta}{\alpha}$, com $|s| \leq b < r$. Pela Proposição 1.11 podemos encontrar a fórmula para $\det(g_{ij})$. Temos

$$\det(g_{ij}) = \phi^{n+1}(\phi - s\phi')^{n-2} [(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi''] \det(a_{ij}).$$

Observação 4.1 Note que se $\phi(s) = 1 + s$, a métrica de Finsler F é a métrica de Randers ($F = \alpha + \beta$).

Lema 4.2 $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ é uma norma de Minkowski para qualquer métrica Riemanniana α e a 1-forma β com $\|\beta\|_\alpha < b_0$ se, e somente se, $\phi = \phi(s)$ satisfaz as seguintes condições:

$$\phi(s) > 0, \quad (\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi'' > 0, \quad (4-1)$$

onde s e b são números arbitrários com $|s| \leq b < b_0$.

A demonstração deste lema pode-se encontrar em [19].

Para continuar, primeiro precisamos encontrar a fórmula para a forma volume Busemann-Hausdorff dV_{BH} e Holmes-Thompson dV_{HT} .

Proposição 4.3 Seja $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$, $s = \frac{\beta}{\alpha}$, uma métrica (α, β) sobre uma variedade M n -dimensional. Seja

$$f(b) := \begin{cases} \frac{\int_0^\pi \text{sen}^{n-2}(t) dt}{\int_0^\pi \frac{\text{sen}^{n-2}(t)}{\phi(b \cos(t))^n} dt} & \text{se } dV = dV_{BH} \\ \frac{\int_0^\pi \text{sen}^{n-2}(t) H(b \cos(t)) dt}{\int_0^\pi \text{sen}^{n-2}(t) dt} & \text{se } dV = dV_{HT}, \end{cases}$$

com

$$H(s) := \phi(\phi - s\phi')^{n-2} [(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi''].$$

Então a forma volume dV sobre M é dada por

$$dV = f(b)dV_\alpha,$$

onde $dV_\alpha = \sqrt{\det(a_{ij})} dx$ denota a forma volume Riemanniana de α .

Demonstração. Sabe-se que tomando uma base ortonormal num ponto x com respeito a α podemos obter

$$\alpha = \sqrt{\sum (y^i)^2}, \quad \beta = by^1,$$

onde $b = \|\beta_x\|_\alpha$. Então a forma volume $dV_\alpha = \sigma_\alpha dx$ em x é dado por

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\det(a_{ij})} = 1.$$

Precisamos achar as integrais

$$\text{Vol} \{ (y^i) \in \mathbb{R}^n | F(x, y) < 1 \} = \int_{\{F(x, y) < 1\}} dy = \int_{\{\alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha}) < 1\}} dy$$

e

$$\int_{\{F(x, y) < 1\}} \det(g_{ij}) dy = \int_{\{\alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha}) < 1\}} \det(g_{ij}) dy.$$

Considerando a transformação de coordenadas, $\psi : (s, u^a) \rightarrow (y^i)$ dada por:

$$y^1 = \frac{s}{\sqrt{b^2 - s^2}} \bar{\alpha}, \quad y^a = u^a,$$

onde $s = \frac{\beta}{\alpha}$ e $\bar{\alpha} = \sqrt{\sum_{a=2}^n (y^a)^2}$. Então

$$F = \alpha\phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{b\phi(s)}{\sqrt{b^2 - s^2}} \bar{\alpha},$$

e o Jacobiano da transformação ψ é dado por $b^2(b^2 - s^2)^{-3/2} \bar{\alpha}$. Então

$$\begin{aligned} \text{Vol} \{ (y^i) \in \mathbb{R}^n | F(x, y) < 1 \} &= \int_{\frac{b\phi(s)}{\sqrt{b^2 - s^2}} \bar{\alpha} < 1} \frac{b^2}{(b^2 - s^2)^{3/2}} \bar{\alpha} ds du \\ &= \int_{-b}^b \frac{b^2}{(b^2 - s^2)^{3/2}} \left[\int_{\bar{\alpha} < \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{b\phi(s)}} \bar{\alpha} du \right] ds \\ &= \frac{1}{n} \text{Vol}(S^{n-2}) \int_{-b}^b \frac{b^2}{(b^2 - s^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{b\phi(s)} \right)^n ds \\ &= \frac{1}{n} \text{Vol}(S^{n-2}) \int_{-b}^b \frac{(b^2 - s^2)^{(n-3)/2}}{b^{n-2} \phi(s)^n} ds \\ &= \frac{1}{n} \text{Vol}(S^{n-2}) \int_0^\pi \frac{\text{sen}^{n-2}(t)}{\phi(b \cos(t))^n} dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_{BH} = \frac{\int_0^\pi \text{sen}^{n-2}(t) dt}{\int_0^\pi \frac{\text{sen}^{n-2}(t)}{\phi(b \cos(t))^n} dt} \sigma_\alpha.$$

Seja

$$H(s) := \phi(\phi - s\phi')^{n-2} [(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi''], \quad (4-2)$$

então

$$\det(g_{ij}) = \phi(s)^n H(s) \det(a_{ij}).$$

Por um argumento similar, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{HT} &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\{F(x,y) < 1\}} \phi(s)^n H(s) dy^1 \dots dy^n \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \text{Vol}(S^{n-2}) \int_{-b}^b \frac{b^2}{(b^2 - s^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{b} \right)^n H(s) ds \\ &= \frac{\int_0^\pi \text{sen}^{n-2}(t) H(b \cos(t)) dt}{\int_0^\pi \text{sen}^{n-2}(t) dt}. \end{aligned}$$

□

Tendo em conta a proposição anterior, definimos

$$\sigma_{BH}(t) := \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\int_0^\pi \frac{\text{sen}^{n-2}\theta}{\phi^n\left(t^{\frac{1}{2}} \cos \theta\right)} d\theta \right]^{-1} \quad (4-3)$$

e

$$\sigma_{HT}(t) := \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi H\left(t^{\frac{1}{2}} \cos \theta\right) \text{sen}^{n-2}\theta d\theta, \quad (4-4)$$

onde

$$H(s) := \phi(\phi - s\phi')^{n-2} [\phi - s\phi' + (t - s^2)\phi''],$$

e $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ é a função Gama de Euler.

É assim que para uma (α, β) -métrica $F = \alpha\phi(s)$, $s = \frac{\beta}{\alpha}$, a forma volume Busemann-Hausdorff e a forma volume Holmes-Thompson de F são dadas por $dV_F^{BH} = \sigma_{BH}(\|\beta\|_\alpha^2) dV_\alpha$ e $dV_F^{HT} = \sigma_{HT}(\|\beta\|_\alpha^2) dV_\alpha$, respectivamente.

Seja o sistema

$$\begin{cases} \phi(\phi - s\phi')^{n-1} = 1 + p(s) + s^2 q(s), \\ \phi(\phi - s\phi')^{n-2} \phi'' = q(s), \end{cases} \quad (4-5)$$

onde $p(s)$ e $q(s)$ são funções ímpares C^∞ .

Proposição 4.4 *Seja $F = \alpha\phi(s)$, $s = \frac{\beta}{\alpha}$, uma (α, β) -métrica. Se ϕ é dado por $\phi(s) = (1 + h(s))^{\frac{-1}{n}}$, com $h(s)$ função ímpar C^∞ arbitrária, então $dV_F^{BH} = dV_\alpha$. Se ϕ satisfaz (4-5), então $dV_F^{HT} = dV_\alpha$.*

Demonstração. Note que $\int_0^\pi h(t^{\frac{1}{2}} \cos(\theta)) \text{sen}^{n-2} \theta d\theta = 0$ para quaisquer função ímpar $h(s)$ e

$$\int_0^\pi \text{sen}^{n-2} \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Substituindo $\phi(s) = (1 + h(s))^{\frac{-1}{n}}$ em (4-3) obtemos $\sigma_{BH}(t) = 1$. Da mesma forma, se ϕ satisfaz (4-5), então $\sigma_{HT}(t) = 1$. \square

Considerando uma imersão isométrica $f : (M^n, F) \rightarrow (\tilde{M}^{n+1}, \tilde{F})$, onde $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi(s)$, $s = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ com a métrica Riemanniana $\tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{a}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j}$ e 1-forma $\tilde{\beta} = \tilde{b}_i d\tilde{x}^i$. Então a métrica induzida F (ver 2.1) é também uma (α, β) -métrica da forma $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ com a métrica Riemanniana $\alpha = \sqrt{a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta}$ e a 1-forma $\beta = b_i(x) y^i$, onde

$$a_{ij}(x) = z_i^\alpha z_j^\beta \tilde{a}_{\alpha\beta}, \quad b_i(x) = \tilde{b}_\alpha z_i^\alpha, \quad z_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}. \quad (4-6)$$

Se ϕ é dado na Proposição 4.4, então a forma volume Busemann-Hausdorff (ou Holmes-Thompson) de (M, F) é igual a forma volume da variedade Riemanniana (M, α) .

Daí, temos imediatamente:

Proposição 4.5 *Seja $\tilde{F} = \tilde{\alpha}\phi(s)$, $s = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$, uma (α, β) -métrica, onde ϕ é dado por $\phi(s) = (1 + h(s))^{\frac{-1}{n}}$, com $h(s)$ função ímpar C^∞ arbitrária (ou ϕ satisfazendo (4-5)), então a BH-forma curvatura média (ou HT-forma curvatura média) \mathcal{H} da subvariedade (M, F) imersa isometricamente em (\tilde{M}, \tilde{F}) é justamente a forma curvatura média da subvariedade (M, α) imersa isometricamente na variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$*

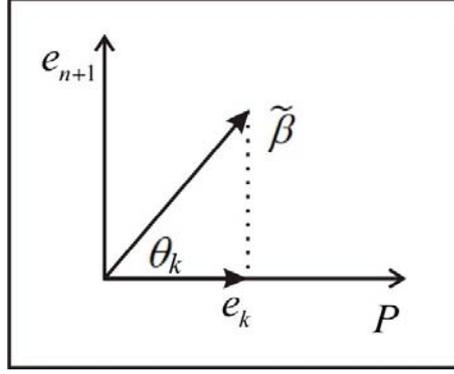
4.3 Minimalidade de um Gráfico Definido sobre Hiperplanos em (V^{n+1}, \tilde{F}_b)

Nesta seção, estudamos gráficos BH-mínimo e HT-mínimo sobre quaisquer hiperplanos contendo a origem num espaço (α, β) de Minkowski (V^{n+1}, \tilde{F}_b) com $\tilde{F}_b = \tilde{\alpha}\phi(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}})$, onde $\tilde{\alpha}$ é a métrica Euclidiana e $\tilde{\beta}$ sendo uma 1-forma cuja norma b (com respeito ao $\tilde{\alpha}$) é constante $b = \|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}$.

Dado um hiperplano \mathbf{P} contendo a origem, podemos usar uma $\tilde{\alpha}$ base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ tal que $\mathbf{P} = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Note que $\tilde{\beta}$ é 1-forma constante.

Denotamos por $\theta_\gamma := \angle_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}^\sharp, e_\gamma)$ o ângulo entre $\tilde{\beta}^\sharp$ e e_γ com respeito a métrica Euclidiana $\tilde{\alpha}$ e $\lambda_\gamma := \cos \theta_\gamma$, onde $\tilde{\beta}^\sharp$ é o vetor dual de $\tilde{\beta}$ com respeito a $\tilde{\alpha}$. Então \tilde{F}_b pode ser expresso por

$$\tilde{F}_b = \sqrt{\delta_{\gamma\kappa} d\tilde{x}^\gamma d\tilde{x}^\kappa} \phi \left(\frac{b \lambda_\gamma d\tilde{x}^\gamma}{\sqrt{\delta_{\gamma\kappa} d\tilde{x}^\gamma d\tilde{x}^\kappa}} \right).$$

Figura 4.1: $\tilde{\beta}$

Para uma imersão isométrica $f : (M, F) \rightarrow (V^{n+1}, \tilde{F}_b)$ localmente dado por

$$\tilde{x}^\gamma = f^\gamma(x^1, \dots, x^n),$$

a métrica induzida $F = f^*\tilde{F}_b$ tem a forma $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ com a métrica Riemanniana $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ e a 1-forma $\beta = b_iy^i$, onde

$$a_{ij}(x) = z_i^\gamma z_j^\kappa \delta_{\gamma\kappa}, \quad b_i = b\lambda_\gamma z_i^\gamma, \quad z_i^\gamma = \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^i}. \quad (4-7)$$

Note que (V^{n+1}, \tilde{F}_b) é um espaço de Minkowski, então 2-12 é satisfeita. E assim temos que

$$\mathcal{F}(z) = \sigma(\|\beta\|^2) \sqrt{\det(a_{ij})}. \quad (4-8)$$

De aqui em diante, \mathcal{F} denotará $\mathcal{F}^{BH}(z)$ ou $\mathcal{F}^{HT}(z)$, $\sigma(t)$ será dada por (4-3) ou (4-4) e $\|\beta\|^2 = b^2 a^{ij} \lambda_\alpha \lambda_\beta z_i^\alpha z_j^\beta$ é o quadrado da norma de β com respeito a α .

Teorema 4.6 *Seja $f : \Omega \rightarrow (V^{n+1}, \tilde{F}_b)$ uma imersão isométrica dada por*

$$\tilde{x}^\gamma = f^\gamma(x^1, \dots, x^n).$$

Então a forma BH-curvatura média (ou a forma HT-curvatura média) $\mathcal{H}_f = H_\gamma dx^\gamma$ é dada por

$$\begin{aligned} H_\gamma = & \frac{1}{\sigma(\|\beta\|^2)} \left\{ a^{ij} [2b^2 \lambda_\alpha \lambda_\kappa \sigma'(\|\beta\|^2) (\delta^{i\alpha} - B^{i\alpha}) (\delta^{j\kappa} - B^{j\kappa}) \right. \\ & + \sigma(\|\beta\|^2) (\delta^{ij} - B^{ij})] \\ & + 2b^2 \lambda_\delta \lambda_\tau A^{i\delta} A^{j\tau} [2b^2 \lambda_\alpha \lambda_\kappa \sigma''(\|\beta\|^2) (\delta^{i\alpha} - B^{i\alpha}) (\delta^{j\kappa} - B^{j\kappa}) \\ & \left. - \sigma'(\|\beta\|^2) (\delta^{ij} - B^{ij})] \right\} \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}, \end{aligned} \quad (4-9)$$

onde

$$A^{i\gamma} := a^{ij}z_j^\gamma, \quad B^{\gamma\kappa} := a^{ij}z_i^\gamma z_j^\kappa, \quad \|\beta\|^2 = b^2 \lambda_\gamma \lambda_\kappa B^{\gamma\kappa}, \quad \lambda_\gamma = \cos \angle_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}^\sharp, e_\gamma)$$

e $\sigma(t)$ é dada por (4-3) ou (4-4).

Agora estamos em condições de estudar gráficos sobre um domínio conexo Ω no hiperplano \mathbf{P} . Neste caso, denotamos as coordenadas de V^{n+1} por (x^1, \dots, x^{n+1}) em vez de $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{n+1})$. Defina a Equação:

$$\phi_b(t) := 2\sigma'(t)(b^2 - t) + \sigma(t), \quad (4-10)$$

para

$$0 \leq t \leq b^2,$$

onde $\sigma(t)$ é dado por (4-3) ou (4-4). Observe que

$$\phi_b'(t) = 2\sigma''(t)(b^2 - t) - \sigma'(t). \quad (4-11)$$

Observação 4.7 Ao longo deste capítulo assumimos que $\phi_b(t)$ tem pelo menos um ponto isolado tal que $\phi_b(t)$ seja nula. Note que $\phi_b(t) = 0$ é equivalente a dizer que $\sigma(t) = \frac{\sqrt{b^2 - t}}{b}$.

Teorema 4.8 Seja $f : \Omega \rightarrow (V^{n+1}, \tilde{F}_b)$ um gráfico sobre um domínio conexo Ω num hiperplano \mathbf{P} o qual é dado por

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, u(x^1, \dots, x^n)). \quad (4-12)$$

Então a forma BH-curvatura média (ou a forma HT-curvatura média) é dada por

$$\mathcal{H}_f = H_{n+1} \left(- \sum_k u_k dx^k + dx^{n+1} \right), \quad (4-13)$$

onde

$$H_{n+1} = \frac{1}{\sigma(\|\beta\|^2)W^2} \sum_{ij} \left\{ \phi_b(\|\beta\|^2) \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) + 2b^2 \phi_b'(\|\beta\|^2) \left(\lambda_i + w \frac{u_i}{W^2} \right) \left(\lambda_j + w \frac{u_j}{W^2} \right) \right\} u_{ij}, \quad (4-14)$$

com $w = \lambda_{n+1} - \sum_k \lambda_k u_k$. Por isso f é BH-mínima (ou HT-mínima) se, e somente se,

$$\sum_{ij} \left\{ \varphi_b(\|\beta\|^2) \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) + 2b^2 \varphi'_b(\|\beta\|^2) \left(\lambda_i + w \frac{u_i}{W^2} \right) \left(\lambda_j + w \frac{u_j}{W^2} \right) \right\} u_{ij} = 0, \quad (4-15)$$

onde

$$\begin{aligned} u_i &:= \frac{\partial u}{\partial x^i}, & u_{ij} &:= \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, & W^2 &:= 1 + \sum_i u_i^2, \\ w &:= \lambda_{n+1} - \sum_k \lambda_k u_k, & \|\beta\|^2 &= b^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{W^2} \right), & \lambda_\alpha &= \cos \angle_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}^\sharp, e_\alpha), \end{aligned}$$

$\varphi_b(t)$ é definido por (4-10).

Se o gráfico fosse definido sobre o hiperplano \mathbf{P} o qual é perpendicular ao $\tilde{\beta}^\sharp$, então $\tilde{\beta}^\sharp$ está na direção do eixo x^{n+1} . Neste caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, $\lambda_{n+1} = 1$. O Teorema 4.8 reduz-se ao

Teorema 4.9 *Seja $f : \Omega \rightarrow (V^{n+1}, \tilde{F}_b)$ um gráfico sobre um domínio conexo Ω no plano $x^{n+1} = 0$, o qual é dado por*

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, u(x^1, \dots, x^n)).$$

Então a forma BH-curvatura média (ou a forma HT-curvatura média) é dada por $\mathcal{H}_f = H_{n+1} (-\sum_k u_k dx^k + dx^{n+1})$ com

$$H_{n+1} = \frac{1}{\sigma(\|\beta\|^2)W^2} \sum_{ij} \left\{ \varphi_b(\|\beta\|^2) \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2} \right) + 2b^2 \varphi'_b(\|\beta\|^2) \frac{u_i u_j}{W^4} \right\} u_{ij}, \quad (4-16)$$

onde

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}, u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, W^2 = 1 + \sum_i u_i^2, \|\beta\|^2 = b^2 \left(1 - \frac{1}{W^2} \right)$$

é a norma ao quadrado de $\beta = f^* \tilde{\beta}$ com respeito a $\alpha = f^* \tilde{\alpha}$. $\varphi_b(t)$ é definido por (4-10) com $\sigma(t)$ dado por (4-3) ou (4-4).

Usando este Teorema, podemos fazer um estudo da curvatura média de uma hipersuperfície gerada pela rotação de uma curva plana ao redor do eixo x^{n+1} (na direção de $\tilde{\beta}^\sharp$) e caracterizar as hipersuperfícies BH-mínima e HT-mínima usando uma EDO.

Teorema 4.10 *Seja S uma hipersuperfície de rotação em (V^{n+1}, \tilde{F}_b) , a qual é gerada pela curva plana $(t, 0, \dots, 0, f(t))$, com $t \in (0, \infty)$ ao redor do eixo x^{n+1} (a direção de*

$\tilde{\beta}^\sharp$). Então a forma BH-curvatura média (ou HT-curvatura média) é dada por

$$\mathcal{H}_f = H_{n+1} \left(\frac{-f'}{t} \sum_k x^k dx^k + dx^{n+1} \right), \quad \text{com} \quad t = \sqrt{\sum_i (x^i)^2},$$

onde

$$H_{n+1} = \frac{1}{\sigma(\|\beta\|^2)(1+f'^2)} \left\{ \Phi_b(\|\beta\|^2) \left[\frac{f''}{1+f'^2} + \frac{n-1}{t} f' \right] + 2b^2 \Phi'_b(\|\beta\|^2) \frac{f'^2 f''}{(1+f'^2)^2} \right\}. \quad (4-17)$$

Por isso, f é BH-mínima ou HT-mínima se, e somente se,

$$\Phi_b(\|\beta\|^2) \left[\frac{f''}{1+f'^2} + \frac{n-1}{t} f' \right] + 2b^2 \Phi'_b(\|\beta\|^2) \frac{f'^2 f''}{(1+f'^2)^2} = 0, \quad (4-18)$$

onde $\|\beta\|^2 = \frac{b^2 f'^2}{1+f'^2}$, $\Phi_b(t)$ é definida por (4-10), com $\sigma(t)$ dada por (4-3) ou (4-4).

Demonstração. Uma hipersuperfície de rotação S pode ser expresso por

$$u(x^1, \dots, x^n) = f \left(\sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2} \right).$$

Denotemos por $t = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$, daí, usando a Regra da Cadeia, temos as seguintes identidades:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x^i} f(t) = \frac{f' x^i}{t}, \quad u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{f' x^i}{t} \right) = \frac{t f'' - f'}{t^3} x^i x^j + \frac{f'}{t} \delta^{ij}.$$

Também precisamos dos seguintes resultados

$$\sum_i u_{ii} = \sum_i \left(\frac{t f'' - f'}{t^3} (x^i)^2 + \frac{f'}{t} \right) = f'' + \frac{(n-1)f'}{t}, \quad (4-19)$$

$$\sum_{ij} u_i u_j u_{ij} = \frac{f'^2}{t^2} \left(\frac{(t f'' - f')}{t^3} \sum_{ij} (x^i)^2 (x^j)^2 + f' \sum_i \frac{(x^i)^2}{t} \right) = f'^2 f'', \quad (4-20)$$

$$W^2 = 1 + f'^2. \quad (4-21)$$

Substituindo as últimas igualdades na equação (4-16) temos o que queríamos. \square

Resolvamos a equação diferencial (4-18).

Se $f' \equiv 0$, então S é parte de um plano, o qual não é de nosso interesse. Assim, podemos supor que $f' \neq 0$ em algum ponto (por conseguinte $f' \neq 0$ numa vizinhança).

Seja $g = f'^2$. Multiplicando (4-18) por $2f'$, conseguimos:

$$\varphi_b(\|\beta\|^2) \left[\frac{g'}{1+g} + \frac{2(n-1)}{t}g \right] + 2b^2\varphi'_b(\|\beta\|^2) \frac{gg'}{(1+g)^2} = 0, \quad (4-22)$$

onde

$$\|\beta\|^2 = \frac{b^2g}{1+g}.$$

CASO 1 Se $\varphi_b(t) \equiv 0$, usando a observação feita em 4.7 temos que existe t_0 tal que $\varphi_b(t_0) = 0$ e

$$\frac{b^2g}{1+g} = t_0,$$

a qual implica

$$g(b^2 - t_0) = t_0,$$

o que nos dá

$$f' = \pm \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{b^2 - t_0}}, \quad \text{logo} \quad f = \pm \sqrt{\frac{t_0}{b^2 - t_0}}t + C',$$

com C' uma constante qualquer.

CASO 2 Se $\varphi_b \neq 0$, fazendo

$$s = \frac{g}{1+g},$$

$$s' = \frac{g'}{(1+g)^2},$$

obtemos

$$\left[\frac{s'}{s} + \frac{2(n-1)}{t} \right] + 2b^2 \frac{\varphi'_b(b^2s)}{\varphi_b(b^2s)} s' = 0.$$

Logo,

$$s' \left[\frac{[\varphi_b^2(b^2s)s']'}{s\varphi_b^2(b^2s)} \right] = -\frac{2(n-1)}{t}. \quad (4-23)$$

Denote $\Pi_b(s) = \frac{[\varphi_b^2(b^2s)s']'}{s\varphi_b^2(b^2s)}$, assim (4-22) pode ser reescrito como

$$\Pi_b \left(\frac{g}{1+g} \right) \frac{g'}{(1+g)^2} = -\frac{2(n-1)}{t}. \quad (4-24)$$

Integrando (4-24) obtemos

$$t = C \exp \left(-\frac{1}{2(n-1)} \int \Pi_b \left(\frac{g}{1+g} \right) d \left(\frac{g}{1+g} \right) \right) \quad (4-25)$$

$$= C \left[\Phi_b^2 \left(\frac{b^2 g}{1+g} \right) \frac{g}{1+g} \right]^{-\frac{1}{2(n-1)}}, \quad (4-26)$$

onde C é constante positiva.

Considere $\omega := \frac{g}{1+g} \in (0, 1)$. Então t pode ser parametrizado em função de ω já que estamos supondo $f' \neq 0$ em alguns pontos, então existe um intervalo aberto $I \in (0, 1)$ tal que podemos ter $t(\omega)$ injetiva.

Como $g = f'^2$, obtemos

$$f(\omega) = \pm \int \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} dt(\omega). \quad (4-27)$$

Usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \pm C \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} [\Phi_b(b^2 \omega) \omega]^{-\frac{1}{2(n-1)}} \\ &\quad - \frac{\pm C}{2} \int (\omega)^{-1/2} (1-\omega)^{-3/2} [\Phi_b^2(b^2 \omega) \omega]^{-\frac{1}{2(n-1)}} d\omega. \end{aligned} \quad (4-28)$$

Teorema 4.11 *Seja S uma hipersuperfície de rotação em (V^{n+1}, \tilde{F}_b) , a qual é gerada por uma curva plana $(t, 0, \dots, 0, f(t))$ com $t \in (0, \infty)$ ao redor do eixo x^{n+1} (a direção de $\tilde{\beta}^\sharp$). Suponha que S não é parte de um hiperplano. Então S é uma hipersuperfície BH-mínima ou HT-mínima se, e somente se, em uma vizinhança onde $f' \neq 0$, f pode ser determinado por*

(i) a reta

$$f = \pm \sqrt{\frac{t_0}{b^2 - t_0}} t + C', \quad (4-29)$$

para qualquer ponto $t_0 \in (0, b^2)$, tal que $\Phi_b(t_0) = 0$, onde C' é uma constante arbitrária,

(ii) a curva

$$t(\omega) = C [\Phi_b^2(b^2 \omega) \omega]^{-\frac{1}{2(n-1)}}, \quad (4-30)$$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \pm C \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} [\Phi_b(b^2 \omega) \omega]^{-\frac{1}{2(n-1)}} \\ &\quad - \frac{\pm C}{2} \int (\omega)^{-1/2} (1-\omega)^{-3/2} [\Phi_b^2(b^2 \omega) \omega]^{-\frac{1}{2(n-1)}} d\omega, \end{aligned} \quad (4-31)$$

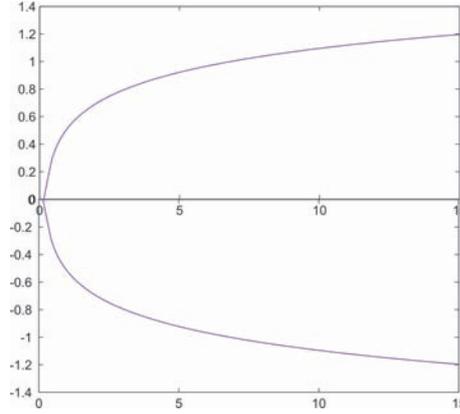


Figura 4.2: Catenária ($b=0$, $C=0.25$)

onde $\omega \in I \subset (0, 1)$ é o parâmetro, I é um intervalo aberto tal que a parametrização (4-30) é injetiva, $C > 0$ é uma constante arbitrária e $\varphi_b(t)$ é definido por (4-10) com $\sigma(t)$ dado por (4-3) ou (4-4).

Observação 4.12 Quando $b = 0$, e $n = 2$ temos:

$$t(\omega) = C(\omega)^{-1/2}, \quad (4-32)$$

$$f(\omega) = \pm C \frac{1}{\sqrt{1-\omega}} - \frac{\pm C}{2} \int \frac{1}{\omega(1-\omega)^{3/2}} d\omega, \quad (4-33)$$

fazendo $s = (\omega)^{-1/2}$ obtemos a equação da catenária

$$(Ct, 0, \pm C \cosh^{-1}(t)).$$

A superfície mínima gerada pela curva (4-30) e (4-31) é o catenóide num espaço Euclidiano como se mostra na figura 4.2.

4.4 Superfícies de Rotação Mínimas no Espaço de Randers

Sabe-se que pela proposição 2.18, superfícies HT-mínimas num espaço de Minkowski do tipo Randers são as mesmas superfícies mínimas em um espaço Euclidiano. Então daqui em diante consideramos a minimalidade com a forma volume de Busemann-Hausdorff.

Obtemos de (4-10) que

$$\varphi_b(t) = (1-t)^{\frac{1}{2}} (1-3b^2+2t).$$

Por isso

$$\varphi_b(b^2\omega) = (1 - b^2\omega)^{1/2}(1 - 3b^2 + 2b^2\omega). \quad (4-34)$$

No caso de superfícies ($n = 2$), (4-30) e (4-31) tornam-se:

$$t(\omega) = C |\varphi_b(b^2\omega)|^{-1} \omega^{-\frac{1}{2}}, \quad (4-35)$$

$$f(\omega) = \frac{\pm C}{\sqrt{1-\omega}} |\varphi_b(b^2\omega)|^{-1} - \frac{\pm C}{2} \int (\omega)^{-1} (1-\omega)^{-3/2} |\varphi_b(b^2\omega)|^{-1} d\omega, \quad (4-36)$$

onde $\varphi_b(b^2\omega)$ é dado por (4-34).

Agora precisamos encontrar os intervalos $I \in (0, 1)$ onde a parametrização $t(\omega)$ seja injetiva.

Defina

$$\omega_0(b) := \frac{2 + 3b^2 - \sqrt{12 - 12b^2 + 9b^4}}{8b^2}, \quad \omega_1(b) := \frac{3b^2 - 1}{2b^2}.$$

Podemos verificar que $\omega_0(b) < \omega_1(b)$, quando $\frac{1}{\sqrt{3}} < b < 1$. De donde segue que a parametrização (4-35) tem que ser injetiva. Com isso, obtemos o seguinte lema.

Lema 4.13 *Pela monotonia da parametrização (4-34), obtemos*

Caso (i) *se $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, então $\varphi_b(b^2\omega) > 0$ e $t(\omega)$ é estritamente decrescente para $\omega \in (0, 1)$.*

Caso (ii) *se $\frac{1}{\sqrt{3}} < b < 1$, temos os seguintes casos:*

- (a) *Se $\omega \in (0, \omega_0(b))$, então $\varphi_b(b^2\omega) < 0$ e $t(\omega)$ é estritamente decrescente;*
- (b) *Se $\omega \in (\omega_0(b), \omega_1(b))$, então $\varphi_b(b^2\omega) < 0$ e $t(\omega)$ é estritamente crescente;*
- (c) *Se $\omega \in (\omega_1(b), 1)$, então $\varphi_b(b^2\omega) > 0$ e $t(\omega)$ é estritamente decrescente.*

Demonstração. Caso (i) Se $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, então de (4-34) temos $\varphi_b(b^2\omega) > 0$. Derivando (4-34) temos:

$$\frac{d\varphi_b(b^2\omega)}{d\omega} = \frac{3}{2} (1 - b^2\omega)^{-\frac{1}{2}} b^2 (1 + b^2 - 2b^2\omega). \quad (4-37)$$

Daí temos que $\frac{d\varphi_b(b^2\omega)}{d\omega} > 0$. Então da Equação (4-35) temos que $t(\omega)$ é estritamente decrescente para $\omega \in (0, 1)$.

Caso (ii)

Se $\frac{1}{\sqrt{3}} < b < 1$, então da Equação (4-34), temos que $\frac{d\varphi_b(b^2\omega)}{d\omega} > 0$ quando $\omega \in (\omega_1(b), 1)$ e $\varphi_b(b^2\omega) < 0$ quando $\omega \in (0, \omega_1(b))$.

Caso (a) e (b)

Se $\omega \in (0, \omega_1(b))$, então $t(\omega) = -C\varphi_b(b^2\omega)^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}$. Derivando $t(\omega)$ e usando (4-37) temos

$$\begin{aligned}\frac{dt(\omega)}{d\omega} &= \frac{C}{2}\omega^{-3/2}\varphi_b^{-2}(b^2\omega) \left[2\omega \frac{d\varphi_b(b^2\omega)}{d\omega} + \varphi_b(b^2\omega) \right] \\ &= -\frac{C}{2}\omega^{-3/2}\varphi_b^{-2}(b^2\omega)(1-b^2\omega)^{-1/2}[8b^4\omega^2 - 2b^2(2+3b^2)\omega + 3b^2 - 1].\end{aligned}$$

Depois de um cálculo simples obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}8b^4\omega^2 - 2b^2(2+3b^2)\omega + 3b^2 - 1 \\ = 8b^4 \left[\frac{2+3b^2 + \sqrt{12-12b^2+9b^4}}{8b^2} - \omega \right] (\omega_0(b) - \omega).\end{aligned}$$

Desde que

$$\frac{2+3b^2 + \sqrt{12-12b^2+9b^4}}{8b^2} > \frac{2+6b^2}{8b^2} > 1 > \omega,$$

concluimos que $\frac{dt(\omega)}{d\omega} < 0$ quando $\omega \in (0, \omega_0(b))$ e $\frac{dt(\omega)}{d\omega} > 0$ quando $\omega \in (\omega_0(b), \omega_1(b))$.

Caso (iic)

Se $\omega \in (\omega_1(b), 1)$, então $\varphi_b(b^2\omega) > 0$, similar ao caso (i), $\varphi_b(b^2\omega)$ é estritamente crescente por (4-37). Por isso $t(\omega)$ é estritamente decrescente por (4-35). \square

Agora, mostramos explicitamente a Equação (4-36), para isso precisamos calcular:

$$\int \frac{d\omega}{\omega(1-\omega)^{\frac{3}{2}}(1-b^2\omega)^{\frac{1}{2}}|1-3b^2+2b^2\omega|}. \quad (4-38)$$

Seja

$$\mu := \sqrt{\frac{1-b^2\omega}{1-\omega}}.$$

Observe que μ é crescente para $\omega \in (0, 1)$, e ademais $\mu \in (1, +\infty)$. Então a Equação (4-38) é

$$\frac{-2}{(1-b^2)^2} \int \frac{(b^2-\mu^2)^2}{(1-\mu^2)|3b^2-\mu^2|} d\mu. \quad (4-39)$$

Denotemos

$$I_b(\mu) := \frac{2}{(1-b^2)^2} \int \frac{(b^2-\mu^2)^2}{(1-\mu^2)(3b^2-\mu^2)} d\mu. \quad (4-40)$$

Observe que se $b \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$, então:

$$\frac{(b^2 - \mu^2)^2}{(1 - \mu^2)(3b^2 - \mu^2)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{b^4 + b^2}{3b^2 - 1} \frac{1}{2\sqrt{3}b} \right) \left(\frac{1}{\mu - \sqrt{3}b} - \frac{1}{\mu + \sqrt{3}b} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{b^4 + b^2}{3b^2 - 1} \right) \left(\frac{1}{\mu - 1} - \frac{1}{\mu + 1} \right),$$

e se $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\frac{(b^2 - \mu^2)^2}{(1 - \mu^2)(3b^2 - \mu^2)} = \frac{5}{9} \left(\frac{1}{\mu - 1} - \frac{1}{\mu + 1} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{(\mu - 1)^2} + \frac{1}{(\mu + 1)^2} \right) + 1.$$

Daí determos o seguinte Lema:

Lema 4.14

$$I_b(\mu) = \begin{cases} \frac{9}{2}\mu - \frac{\mu}{(\mu^2 - 1)} + \frac{5}{2} \log \left| \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right|, & \text{se } b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{2}{(1 - b^2)^2} \left[\mu - \frac{1}{1 - 3b^2} Q_b(\mu) \right], & \text{se } b \neq \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \quad (4-41)$$

onde

$$Q_b(\mu) := \frac{2b^3}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{\mu - \sqrt{3}b}{\mu + \sqrt{3}b} \right| - \frac{(1 - b^2)^2}{2} \log \left| \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right|.$$

Podemos usar o Teorema 4.11 para dar uma expressão explícita para uma superfície de rotação BH-mínima completa “forward” a qual foi obtido em [18].

Teorema 4.15 *Seja S uma superfície de rotação completa “forward” em $(V^3, \tilde{F}_b = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$, a qual é gerada pela curva plana $(t, 0, f(t))$, com $t \in (0, \infty)$ rotação ao redor do eixo x^3 na direção de $\tilde{\beta}^\sharp$. Suponha que S não é um plano, então S é BH-mínima se, e somente se, $f(t)$ pode ser determinada por*

(i) Se $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, então

$$t(\omega) = C (\varphi_b(b^2 \omega))^{-1} \omega^{-\frac{1}{2}}, \quad (4-42)$$

$$f(\omega) = \begin{cases} \frac{\pm C}{\sqrt{1 - \omega}} (\varphi_b(b^2 \omega))^{-1} - \frac{\pm C}{2} I_b \left(\sqrt{\frac{1 - b^2 \omega}{1 - \omega}} \right) + C', & \text{se } \omega \in I \\ C', & \text{se } \omega = 1 \end{cases} \quad (4-43)$$

com o parâmetro $\omega \in I = (0, 1)$.

(ii) Se $\frac{1}{\sqrt{3}} < b < 1$, então a curva $(t, 0, f(t))$ é dada por (4-42) e (4-43) com parâmetro $\omega \in I = \left(\frac{3b^2 - 1}{2b^2}, 1 \right)$. Neste caso, a norma do vetor velocidade da curva é

$$\left| \frac{df}{dt} \right| = \sqrt{\frac{\omega}{1 - \omega}} > \frac{\sqrt{3b^2 - 1}}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

Nos dois casos, $C > 0$ e C' são constantes arbitrárias. $\varphi_b(b^2 \omega)$ e $I_b(\mu)$ são dados por (4-34) e (4-41), respectivamente. As curvas são simétricas com respeito $x^3 = C'$ e $t \in [C(1 - b^2)^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$, $f \in (-\infty, +\infty)$.

Antes de demonstrarmos o Teorema 4.15, façamos a seguinte observação.

Observação 4.16 *No caso (ii) ($\omega \in (\omega_1(b), 1)$) em [18] os autores (Keti e Marcelo) expressam a superfície de rotação como sendo $f(t, v) = (f(t) \cos v, f(t) \sin v, t)$, com $t \geq 0$ e $v \in S^1$, e concluem que (ver Teorema 1 de [18])*

$$\left| \frac{df(t)}{dt} \right| < \frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{3b^2-1}}.$$

Neste mesmo trabalho a superfície de rotação pode ser expressa como $f(t, v) = (t \cos v, t \sin v, f(t))$ com $t \geq 0$ e $v \in S^1$. Do Teorema 4.15 temos que

$$\left| \frac{df}{dt} \right| = \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} > \sqrt{\frac{\omega_1(b)}{1-\omega_1(b)}} = \frac{\sqrt{3b^2-1}}{\sqrt{1-b^2}}.$$

Agora façamos a demonstração do Teorema 4.15.

Demonstração.

Caso (i)

Se $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, sabe-se pelo Lema 4.13 que $\varphi_b(b^2\omega) > 0$, portanto

$$t(\omega) = C(\varphi_b(b^2\omega))^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}$$

e

$$f(\omega) = \frac{\pm C}{\sqrt{1-\omega^2}} (\varphi_b(b^2\omega))^{-1} - \frac{\pm C}{2} I_b \left(\sqrt{\frac{1-b^2\omega}{1-\omega}} \right) + C'_\pm, \quad (4-44)$$

com C'_\pm constantes.

Denotemos $t_0 = C(1-b^2)^{-\frac{3}{2}}$. Então,

$$\lim_{\omega \rightarrow 1^-} t(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 1^-} C(1-b^2\omega)^{-1/2} (1-3b^2+2b^2\omega)^{-1} \omega^{-1/2} \quad (4-45)$$

$$= C(1-b^2)^{-3/2} = t_0 \quad (4-46)$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} t(\omega) = +\infty. \quad (4-47)$$

O que sugere que $t(\omega) \in (t_0, +\infty)$ para $\omega \in (0, 1)$. Ademais podemos verificar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} f(\omega) = \pm\infty$$

e de (4-27) temos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = \lim_{\omega \rightarrow 1^-} f(\omega) = C'_\pm,$$

esta última igualdade é obtida já que o intervalo de integração de (4-27) é (t_0, t) , com $t > t_0$. Para obter uma superfície completa “forward”, supomos que $C'_+ = C'_- =: C'$ e agregamos este ponto quando $\omega = 1$.

Na prova do Teorema 4.11 denotamos $\omega = \frac{g}{1+g}$ com $g = (f'(t))^2$, então

$$\frac{df}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} = \pm \infty \text{ em } \omega = 1,$$

o que nos diz que a curva $f(t)$ é suave em $\omega = 1$. A completude “forward” desta superfície foi provado no Teorema 11 em [18] que assegura a unicidade a menos de homotetia de uma superfície de rotação no espaço de Randers (V^3, F_b) , para $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. A idéia que usam os autores em [18] é usar a Observação 1.19.

Caso (i)

Se $\frac{1}{\sqrt{3}} < b < 1$. Defina

$$N_1(b) := \sqrt{\frac{\omega_1(b)}{1-\omega_1(b)}}, \quad N_2 := \sqrt{\frac{\omega_0(b)}{1-\omega_0(b)}}.$$

Temos que

$$N_1(b) := \sqrt{\frac{3b^2 - 1}{1 - b^2}}, \quad N_2(b) := \sqrt{\frac{2 + 3b^2 - \sqrt{12 - 12b^2 + 9b^4}}{5b^2 - 2 + \sqrt{12 - 12b^2 + 9b^4}}}.$$

Sabe-se que se $\omega_0(b) < \omega_1(b)$, temos que $N_2(b) < N_1(b)$. Pelo Lema 4.13, dividimos o caso (ii) em três subcasos:

(a) Se $\omega \in (0, \omega_0(b))$, então

$$\left| \frac{df}{dt} \right| = \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} \in (0, N_2(b)).$$

Pela Proposição 13 em [18] esta superfície não é completa “forward”.

(b) Se $\omega \in (\omega_0(b), \omega_1(b))$, então

$$\left| \frac{df}{dt} \right| = \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} \in (N_2(b), N_1(b)).$$

Esta superfície não é completa “forward” pela Proposição 13 em [18].

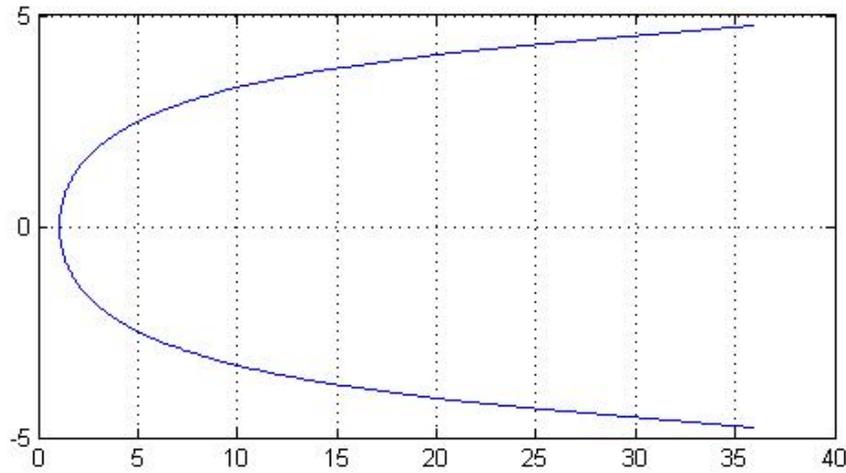


Figura 4.3: $b = 0.2$, $C = 1$, $C' = 0$.

(c) Se $\omega \in (\omega_1(b), 1)$, então temos do Lema 4.13, que $\varphi_b(b^2\omega) > 0$. Por isso temos $t = t(\omega)$ é dado por (4-42). Note que

$$\mu = \sqrt{\frac{1 - b^2\omega}{1 - \omega}} > \sqrt{\frac{1 - b^2\omega_1(b)}{1 - \omega_1(b)}} = \sqrt{3}b.$$

Assim, por (4-36) (4-38) (4-39) e (4-40), podemos expressar a curva como em (4-42) e (4-44). Também podemos verificar em (4-42) que

$$\lim_{\omega \rightarrow 1^-} t(\omega) = t_0, \quad e \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_1(b)^+} t(\omega) = +\infty. \quad (4-48)$$

Por isso $t(\omega) \in (t_0, +\infty)$ para $\omega \in (\omega_1(b), 1)$. Ademais, pode-se verificar que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1(b)^+} f(\omega) = \pm\infty, \\ \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) &= \lim_{\omega \rightarrow 1^-} f(\omega) = C'_{\pm}. \end{aligned}$$

Para obter uma superfície completa “forward”, supomos que $C'_+ = C'_- =: C'$ e agregamos este ponto quando $\omega = 1$. A completitude “forward” desta superfície é provado no Teorema 12 em [18].

A simetria com respeito a $x^3 = C'$ é óbvia devido à forma de (4-42) e (4-44). Ademais provamos que $t \in [(C(1 - b^2)^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$, $f \in (-\infty, +\infty)$. \square

Nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostramos as curvas geratrizes para alguns valores de b .

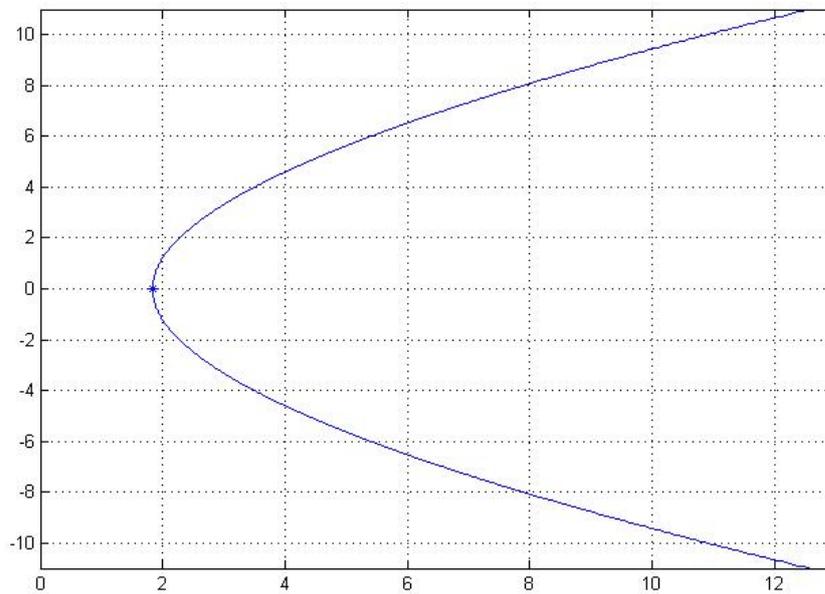


Figura 4.4: $b = 1/\sqrt{3}$, $C = 1$, $C' = 0$.

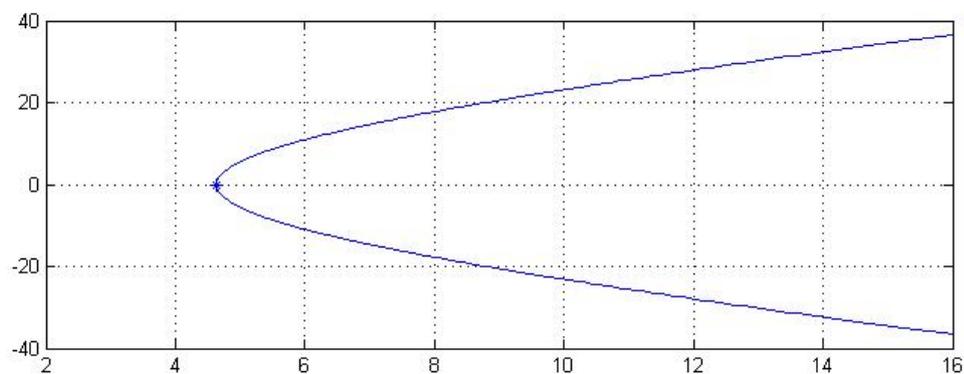


Figura 4.5: $b = 4/5$, $C = 1$, $C' = 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] Bao, D.; Chern, S.S., Shen,Z., *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 200, Springer-Verlag, New York, Inc., (2000).
- [2] Cherg, X., Shen, Z, *A Class of Finsler Metrics with Isotropic S-Curvature*, Israel J. Math. **169**, 317-340 (2009).
- [3] Cui, N., Shen, Y.B., *Bernstein Type Theorems for Minimal Surfaces in (α, β) -space* Public Math. Debrecen **74**, 383-400 (2009).
- [4] Cui, N., Shen, Y.B., *Minimal Rotational Hypersurfaces in Minkowski (α, β) -space*, Geom Dedicata. (2010)
- [5] do Carmo, M.P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, (1976).
- [6] do Carmo, M. P., *Formas Diferenciáveis e Aplicações*, Monografias de Matemática n 37, 8vo. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1983).
- [7] do Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988, 2 edição.
- [8] do Carmo, M.P., *O Método do Referencial Móvel*, Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1976).
- [9] D.Bao, C.Robles and Z.Shen, *Zermelo Navigation on Riemannian Manifolds*, J. Differential Geom. **66** (2004), no. 3, 377-435.
- [10] He, Q., Shen, Y.B., *On Bernstein type theorems in Finsler geometry with volume form induced from sphere bundle*, proc. Amer. Math. Soc. **134**, 871-880 (2006).
- [11] He, Q., Shen, Y.B., *On the Mean Curvature of Finsler Submanifolds*, Chinese J. Contemp. **27A**, 663-674 (2006).
- [12] Lima, E. L., *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2000, 4 edição.

- [13] Lima, E. L., *Análise no Espaço \mathbb{R}^n* , Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, (2007).
- [14] Shen, Z.; Chern, S.S.; *Riemann Finsler Geometry*, World Scientific, Nankai Tracts in Mathematics, Volume 6.
- [15] Shen, Z., *Lectures on Finsler Geometry*, World Sci., Singapore (2001).
- [16] Shen, Z., *On Finsler geometry of submanifolds.*, Math. Ann. **131** 549-576 (1998).
- [17] Souza, M., Spruck, J., Tenenblat, K., *A Bernstein type theorem on a Randers space*, Math. Ann. **329**, 291-305 (2004).
- [18] Souza, M., Tenenblat, K., *Minimal Surfaces of Rotation in Finsler Space with a Randers Metric*, Math. Ann. **325**, 625-642 (2003).
- [19] S.S. Chern, Z. Shen, *Riemann-Finsler Geometry*, Nankai Tracts in Mathematics, vol. 6, World Scientific (2005).
- [20] Tenenblat, K., *Introdução à Geometria Diferencial*, Editora da Unb, Brasília, (1998).
- [21] Wu, B.Y., *On the Folume Forms and Submanifolds in Finsler Geometry*. Chinese. J. Contemp. Math. **27**, 61-72 (2006).
- [22] Wu, B.Y., *A Local Rigidity Theorem for Minimal Surfaces in Minkowski 3-space of Randers type.*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31**, 375-384 (2007).