



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Sólidos Arquimedianos:
Uma abordagem construtiva e investigativa em
oficina presencial e uma exploração de classes
de sólidos via software Poly em oficina remota
com uma proposta de uso no Ensino Médio

Patrícia Barcelos de Oliveira Freitas

Goiânia
2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Patrícia Barcelos de Oliveira Freitas

3. Título do trabalho

Sólidos Arquimedianos: Uma abordagem construtiva e investigativa em oficina presencial e uma exploração de classes de sólidos via software Poly em oficina remota com uma proposta de uso no Ensino Médio.

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);
 - b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
- O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Almeida De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 11/02/2021, às 09:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

https://sei.ufg.br/sei/controlador.php?acao=documento_imprimir_web&acao_origem=arvore_visualizar&id_documento=2022583&infra_sistema=1000... 1/2



Documento assinado eletronicamente por **PATRÍCIA BARCELOS DE OLIVEIRA FREITAS, Discente**, em 12/02/2021, às 14:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1871857** e o código CRC **558BC766**.



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Patrícia Barcelos de Oliveira Freitas

**Sólidos Arquimedianos:
Uma abordagem construtiva e investigativa em
oficina presencial e uma exploração de classes
de sólidos via software Poly em oficina remota
com uma proposta de uso no Ensino Médio**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Goiânia
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Barcelos de Oliveira Freitas, Patrícia

Sólidos Arquimedianos: Uma abordagem construtiva e investigativa em oficina presencial e uma exploração de classes de sólidos via software Poly em oficina remota com uma proposta de uso no Ensino Médio. [manuscrito] : Sólidos Arquimedianos / Patrícia Barcelos de Oliveira Freitas. - 2020.

iv, 69 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Geometria Espacial. 2. Platônicos. 3. Arquimedianos. 4. Software Poly. I. Almeida de Souza, Marcelo, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 19 da sessão de Defesa de Dissertação de Patrícia Barcelos de Oliveira Freitas, que confere o título de Mestra em Matemática, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Aos vinte e três dias do mês de dezembro de dois mil e vinte, a partir das 15 horas, por meio de videoconferência devido a pandemia covid-19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Sólidos Arquimedianos: Uma abordagem construtiva e investigativa em oficina presencial e uma exploração de classes de sólidos via software Poly em oficina remota com uma proposta de uso no Ensino Médio**”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Marcelo Almeida de Souza – (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Romildo da Silva Pina – (IME/UFG) e o membro titular externo o Professor Doutor Marcio Lemes de Sousa(CUA-UFMT). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Marcelo Almeida de Souza, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e três dias do mês de dezembro de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Almeida De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 09/01/2021, às 10:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Romildo Da Silva Pina, Professor do Magistério Superior**, em 09/01/2021, às 11:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Márcio Lemes de Sousa, Usuário Externo**, em 11/02/2021, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1751939** e o código CRC **6B866C2C**.

Dedico este trabalho ao meu esposo Néilton Carlos, ao meu filho Lucas e a todos meus familiares, principalmente aos meus pais e meus sogros pelo incentivo, apoio, amor e paciência que tiveram comigo.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

Ao meu esposo Néilton e meu filho Lucas, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Aos pais Sebastião e Luisa, aos meus sogros Valdir Carlos e Divina, que sempre estiveram ao meu lado, pelo amor incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcelo Almeida de Souza, por todos os conselhos, pela ajuda e paciência com a qual guiaram o meu aprendizado.

Aos meus colegas de curso, em especial as minhas amigas Suzany e Gabriella com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

Aos professores, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso.

À coordenação e equipe do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFG, pela ajuda e assistência.

Enfim, a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

*"Mesmo que não sejas geômetra lhe convido a apreciar
a arte e a beleza da Geometria"*

Patrícia Freitas

Resumo

Esta dissertação se baseia no estudo de ensino da Geometria Espacial na qual apresenta variadas situações do nosso mundo tridimensional. Muitas pessoas apresentam dificuldades em lidar com a figura plana desenhada em um livro plano e por isso a dificuldade em compreendê-la e relacioná-la ao objeto tridimensional concreto.

Pensando nesse contexto, apresentamos neste trabalho um estudo sobre os sólidos platônicos (regulares e convexos) e arquimedianos (semiregulares) obtidos por truncaturas, snubificação e expansão. Com isso, relembramos os conceitos do número de arestas, faces e vértices, e a relação de Euler entre o número de seus elementos $V - A + F = 2$.

Complementando o estudo, mostramos um breve tutorial sobre o software Poly, um auxiliar em aula online e relatamos experiências de uma turma do 2^o ano do ensino médio na construção desses sólidos. Tivemos depoimentos de alunos que através da manipulação concreta dos sólidos e o uso do Poly, passaram a achá-los belos, coloridos e que facilitou a aprendizagem deles.

Assim concluiu-se que os sólidos arquimedianos podem ser resgatados e utilizados como objeto facilitador do ensino e aprendizagem da Geometria.

Palavras-chave: Geometria Espacial, Sólidos platônicos, Sólidos arquimedianos, Software Poly.

Abstract

This dissertation is based on the study of teaching spatial geometry in which it represents various situations in our three-dimensional world. Many people have difficulties in dealing with the flat figure drawn on a flat book and therefore the difficulty in understanding it and relating it to the concrete three-dimensional object.

Thinking in this context, we present in this work a study on the Platonic (regular and convex) and Archimedean (semi-regular) solids obtained by truncation, snubification and expansion. With that, we recall the concepts of the number of edges, faces and vertices, and the relationship of Euler between the number of its elements $V - A + F = 2$.

Complementing the study, we show a brief tutorial on the Poly software, an assistant in online class and report the experiences of a class of the 2nd year of high school in the construction of these solids. We had testimonials from students who, through the concrete handling of solids and the use of Poly, started to find them beautiful, colorful and which facilitated their learning.

Thus it was concluded that the Archimedean solids can be recovered and used as an object that facilitates the teaching and learning of Geometry.

Key words: Spatial geometry, Platonic solids, Archimedean solids, Poly Software .

Conteúdo

Introdução	1
1 Sólidos Platônicos	3
1.1 Um pouco da história de Platão	3
1.2 Poliedros	7
1.2.1 Definição de poliedro	7
1.2.2 Elementos de um poliedro	9
1.2.3 Classificação dos Poliedros	11
1.3 Curvatura de Gauss	12
1.4 Relação de Euler	15
1.4.1 Teorema de Gauss-Bonnet	17
1.5 Soma dos ângulos internos das faces de um poliedro (S_i)	19
1.6 Poliedros Regulares	20
2 Sólidos Arquimedianos	27
2.1 Um pouco da história de Arquimedes	27
2.2 Estudo dos Sólidos Arquimedianos	29
2.2.1 Construção dos Sólidos Arquimedianos	30
2.2.2 Poliedros arquimedianos com $m = 3$	42
2.2.3 Poliedros arquimedianos com $m = 4$	51
2.2.4 Poliedros arquimedianos com $m = 5$	56
3 Explorando classes de sólidos com o Software Poly: Um tutorial	60
4 Projeto: Aplicações em sala de aula	64
4.1 Atividade de Fixação	66
Conclusão	67
Referências	68

Lista de Figuras

1	Estátua de Platão, em Atenas, Grécia. Foto: markara / Shutterstock.com .	4
2	Modelos dos Sólidos de Platão	4
3	Cubo / hexaedro: Elemento terra.	5
4	Tetraedro: Elemento fogo	5
5	Octaedro: Elemento ar	6
6	Icosaedro: Elemento água	6
7	Dodecaedro: Universo	6
8	Poliedro (hexaedro) em três dimensões	7
9	Conjunto convexo	8
10	Conjunto não-convexo	8
11	Cubo e uma Pirâmide de base triangular (tetraedro)	9
12	Elementos de um poliedro	10
13	Poliedros convexos e não convexos	11
14	Curvatura normal	13
15	Sinal da curvatura de Gauss	15
16	Esfera, Toro (uma alça) e Bitoro (duas alças)	17
17	Triângulo em um plano, Triângulo em uma esfera e Triângulo em uma pseudo-esfera	19
18	Sólidos regulares Kepler-Poinsot	21
19	Duas faces compartilham de uma mesma aresta	21
20	Uma aresta tem dois vértices	22
21	Os cinco sólidos platônicos	24
22	Junção de triângulos equiláteros	25
23	Rotação de quadrados e pentágonos regulares	26
24	União de três Hexágonos a partir de um ponto.	26
25	Arquimedes de Siracusa	27
26	Escultura do túmulo de Arquimedes	29
27	Tipos de Truncatura	30
28	Comparando o Octaedro e o Cuboctaedro	31
29	Comparando o Dodecaedro e o Icosidodecaedro	32
30	Truncando o Tetraedro	33
31	Truncando o Cubo	33
32	Truncando o Octaedro Regular	34
33	Truncando o Dodecaedro	35
34	Truncando o Icosaedro	36
35	Cuboctaedro Truncado	36
36	Icosidodecaedro Truncado	37

37	Construção do Rombicuboctaedro a partir da expansão das faces do Cubo	38
38	Rombicosidodecaedro	39
39	Cubo Snub	39
40	Dodecaedro Snub (ou Icosidodecaedro Snub)	40
41	Resumo dos Sólidos Arquimedianos	41
42	Sólidos platônicos	43
43	Arranjo com polígonos (a, b, c)	43
44	$(4,4,6)$ - Prisma Hexagonal Regular e $(3,3,8)$ - Anti-Prisma Octagonal Regular	44
45	$(6,6,3)$ - Tetraedro Truncado	45
46	$(6,6,4)$ - Octaedro Truncado	46
47	$(6,6,5)$ - Icosaedro Truncado	47
48	$(8,8,3)$ - Cubo Truncado	48
49	$(10,10,3)$ - Dodecadero Truncado	49
50	$(4,6,8)$ - Cuboctaedro Truncado	50
51	$(4,6,10)$ - Icosadodecaedro Truncado	51
52	$(3,3,3,3)$ - Octaedro Regular	52
53	$(3,4,4,4)$ - Rombicuboctaedro	53
54	$(3,4,3,4)$ - Cuboctaedro	54
55	$(3,5,3,5)$ - Icosidodecaedro	55
56	$(3,4,5,4)$ - Rombicosidodecaedro	56
57	$(3,3,3,3,3)$ - Icosaedro Regular	57
58	$(3,3,3,3,4)$ - Cubo Snub	58
59	$(3,3,3,3,5)$ - Dodecaedro Snub	59
60	Poly	60
61	Janela inicial do Poly	60
62	<i>Preferences</i>	61
63	Modo de exibição <i>Print Preview</i>	61
64	Classificação dos Sólidos	62
65	Exemplo de sólidos da categoria Platônicos	62
66	Botão que permite abrir e fechar um sólido	63
67	Fotos dos Sólidos Platônicos na oficina	64
68	Fotos dos Sólidos Arquimedianos na oficina	65
69	Trabalhos de alguns alunos	65

Lista de Tabelas

1	Nome de alguns poliedros	11
2	Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c)	51
3	Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c, d)	56

4	Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c, d, e)	59
5	Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c)	66

Introdução

A geometria, ao longo da jornada escolar quando trabalhada é de forma gradativa passando da plana para a espacial, e especialmente em turmas do 2º ano do Ensino Médio há uma presença significativa da geometria espacial. Muitas pessoas apresentam dificuldades em lidar com a figura plana desenhada em um livro plano e por isso a dificuldade em compreendê-la e relacioná-la ao objeto tridimensional concreto.

Embora o mais comum seja ensinar a estes alunos somente os Sólidos Platônicos por serem poliedros regulares convexos com mais facilidade para sua compreensão, há outros tipos de sólidos que utilizamos e não sabemos sua origem e nem mesmo seu nome, por exemplo a bola de futebol, é composta de dois tipos de polígonos regulares, o pentágonos e hexágonos, esta formação não se encaixa na definição dos Sólidos Platônicos, ficando aí uma dúvida, que tipo de sólido a bola de futebol se assemelha? E um ponto negativo é que algumas respostas aos alunos na maioria das vezes são vazias, devido a formação ou a insegurança de alguns professores.

Observando a grande dificuldade dos alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio com a geometria espacial, e para responder a questões sobre outros tipos de sólidos, foi sugerido pelos próprios alunos aulas dinâmicas para a construção dos sólidos geométricos, utilizando papeis coloridos, palitos de churrasco, cola quente e tintas de diversas cores para um visual alegre e chamativo. Aproveitando a oportunidade, desenvolvemos um estudo prévio sobre a história dos Sólidos de Platão e Sólidos de Arquimedes. Além disso estudamos o software Poly, para aulas interativas e incentivando da exploração de certos conceitos matemáticos, com isso a visualização de entes da geometria podem tornar-se muito mais simples.

No Capítulo 1, apresentamos os Sólidos Platônicos, um pouco da história de Platão, a definição de poliedro e as classificações de acordo com propriedades exigidas. Provamos a existência de cinco e apenas cinco Sólidos Platônicos. Estudamos a Característica de Euler-Poincaré para superfícies e com a utilização do Teorema de Gauss-Bonnet analisamos a soma dos ângulos internos de um triângulo.

No Capítulo 2, estudamos um pouco da história de Arquimedes e seus sólidos, apresentamos sua construção através de truncatura, snubificação e expansão, provamos a existência de apenas treze desses sólidos.

No Capítulo 3, exploramos classes de sólidos com o auxílio do *Software Poly* através de um breve tutorial. Para que os professores possam conhecê-lo, tendo um primeiro contato

no qual o software traz um catálogo de superfícies com propriedades interessantes e de fácil manuseio.

Finalmente no Capítulo 4, mostramos as aplicações em sala de aula onde construímos com papel cartão os Sólidos de Platão e Arquimedes e apresentamos aos alunos o software Poly.

1 Sólidos Platônicos

Neste capítulo apresentamos os Sólidos Platônicos, um pouco da história de Platão, a definição de poliedro e as classificações de acordo com propriedades exigidas. Provamos a existência de cinco e apenas cinco Sólidos Platônicos. Estudamos a Característica de Euler-Poincaré para superfícies e com a utilização do Teorema de Gauss-Bonnet analisamos a soma dos ângulos internos de um triângulo.

1.1 Um pouco da história de Platão

Nesta seção veremos um pouco da história de Platão, sua vida, suas descobertas e influência na matemática. Segundo EVES [6], Platão, nasceu em Atenas por volta de 427–428a.C. e morreu em 348a.C., que tinha como nome verdadeiro Aristocles, chamado de Platão devido ao seu porte físico, com ombros largos, gostando deste apelido, apresentava-se somente por Platão, foi discípulo de Sócrates, estudou filosofia, onde aguçou seu interesse em aprender, saindo em busca de novas aventuras.

Platão opôs-se à democracia ateniense e abandonou sua terra. Viajou para Megara, onde estudou geometria, foi ao Egito, onde dedicou-se à Astronomia, em Cyrene (Norte da África) dedicou-se à matemática, em Crotona (Sul da Itália) reuniu-se com os discípulos de Pitágoras.

Fundou por volta de 387 a.C. a Academia, onde seus membros não eram estudantes no sentido moderno da palavra, pois aos jovens juntavam-se também anciões, provavelmente todos deviam contribuir para o financiamento das despesas; ademais, o objetivo último da Academia era o saber pelo seu valor ético-político. Grandes filósofos e matemáticos dedicaram a vida ao estudo da geometria. Enquanto a escola pitagórica, por exemplo, tinha como lema "Tudo são números" a escola de Platão (a Academia) tinha escrito sobre a porta: "Não entre aqui ninguém que não seja geômetra".

Durante duas décadas, Platão assumiu suas funções na Academia e escreveu, nesse período, os diálogos chamados "Da Maturidade": *Fédon*, *Fedro*, *Banquete*, *Menexêno*, *Eutidemo*, *Crátilo*; começou também a redação de *A República*.

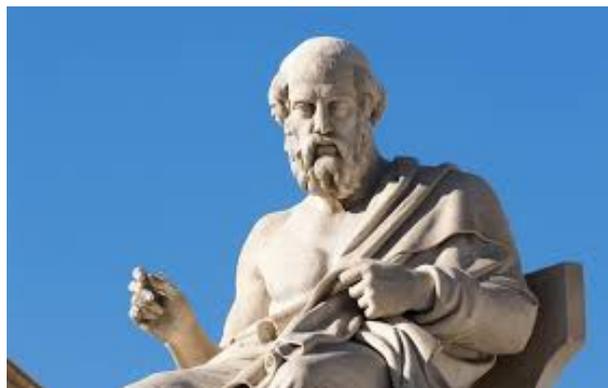


Figura 1: Estátua de Platão, em Atenas, Grécia. Foto: markara / Shutterstock.com

A história dos poliedros regulares é confusa, não se sabe exatamente, a partir de que ano, os cinco poliedros regulares ficaram conhecidos.

Muitos associam a Platão, mas o que se sabe é que Platão apenas mostra como construí-los reunindo, triângulos, quadrados e pentágonos para firmar suas faces.



Figura 2: **Sólidos moldados em pedra**

Fonte: Eves [4]

Também há relatos que em seu livro *Timeu*, Platão faz citações sobre esses poliedros e, por este motivo, receberam esse nome de *Poliedros Platônicos*. Embora seja atribuído a períodos anteriores à Escola de Pitágoras, mesmo sabendo que o objetivo mais antigo com a forma de dodecaedro é atribuído a períodos antes de Pitágoras.

No espaço só existem cinco poliedros regulares, segundo EVES [6]: o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo, comparando-os com fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca.

Estes não são apenas os poliedros regulares, mas sim aqueles que são convexos, têm o mesmo número de lados em todas as faces, em todos os vértices chegam o mesmo número de arestas e satisfaz a relação de Euler.

Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações de Timeu. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície fechada, sendo o icosaedro o que tem o maior volume.

Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro elementos e a água o mais úmido, assim o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra, devido à sua estabilidade.

O octaedro, pode rodopiar facilmente quando segurando dois de seus vértices opostos com apenas dois dedos (o indicador e o polegar), tendo assim a estabilidade do ar. Enfim, o dodecaedro foi associado com o Universo, devido o dodecaedro ter doze faces e serem doze os signos do zodíaco.

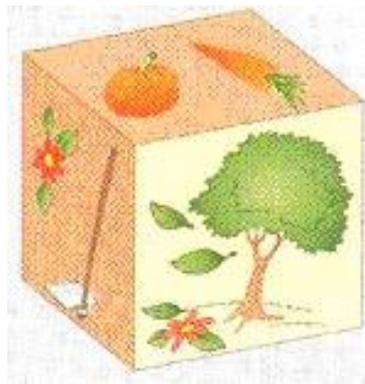


Figura 3: Cubo / hexaedro: Elemento terra.



Figura 4: Tetraedro: Elemento fogo

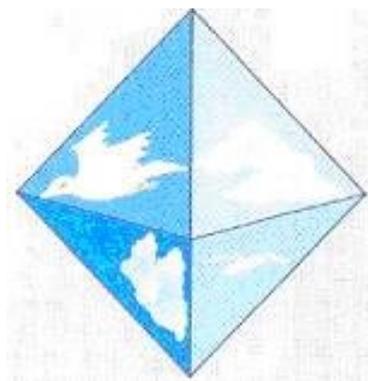


Figura 5: Octaedro: Elemento ar

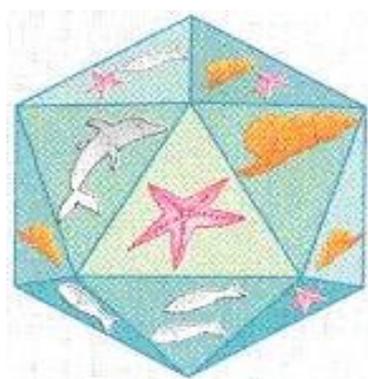


Figura 6: Icosaedro: Elemento água



Figura 7: Dodecaedro: Universo

1.2 Poliedros

Veremos neste capítulo definições de poliedros, estudos dos seus elementos, classificações em poliedros convexos e não convexos onde poderemos nomeá-los.

1.2.1 Definição de poliedro

Apresentaremos nesta seção a definição de poliedros. Em geometria elementar, o poliedro (poliedro ou poliedros plurais) é um sólido em três dimensões, tem largura, comprimento e altura, e na geometria de coordenadas, num sistema cartesiano as três arestas que partem de um mesmo vértice podem ser relacionadas com os eixos dos "X", "Y", "Z".

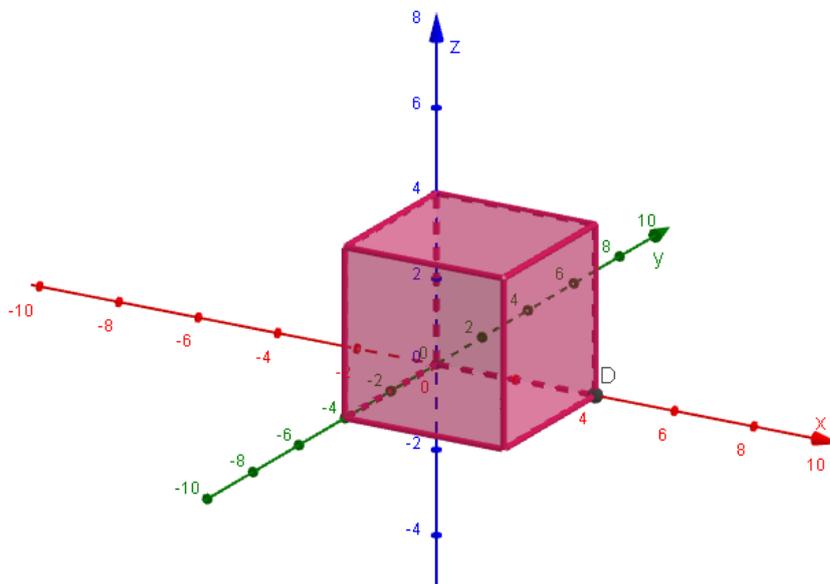


Figura 8: Poliedro (hexaedro) em três dimensões

A palavra poliedro vem do grego clássico, o poly- ("muitas") + -hedra ("faces").

Falando em polígonos, o que vem a ser polígono, e polígono convexo?

Definição 1.1: *Polígonos* são figuras geométricas planas compostas apenas por uma linha fechada, que, por sua vez, é formada apenas por segmentos de reta.

Definição 1.2: Um *conjunto convexo* é um conjunto com a seguinte propriedade: se dois quaisquer pontos estão no conjunto, então o segmento que os une também está contido nesse conjunto.

Observe a Figura 9, ela apresenta um conjunto convexo pois contém todos os segmentos que unem quaisquer dois pontos desse conjunto.

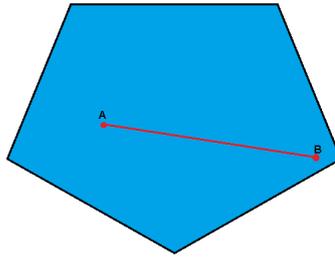


Figura 9: Conjunto convexo

A Figura 10 nos mostra que a região delimitada por uma estrela, não é um conjunto convexo pois nele existem pelo menos dois pontos (por exemplo, os pontos A e B) tais que o segmento que os une não está totalmente contido no conjunto, assim o conjunto é não-convexo.

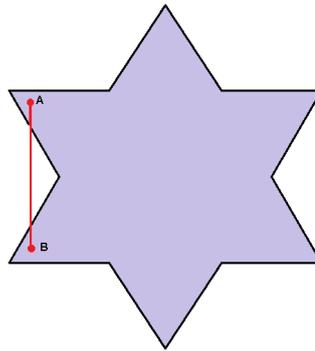


Figura 10: Conjunto não-convexo

Polígonos são ditos *convexos* quando qualquer segmento de reta que possui extremidades em seu interior está totalmente contido na região delimitada pelo polígono.

Agora apresentaremos a definição de um tipo de poliedro, a pirâmide, segundo o autor [5].

Definição 1.3: *Pirâmide* é um sólido geométrico formado pela reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em um ponto fixo V , *vértice*, e outra num polígono dado sobre um plano fixo α , *base*, que não contém V .

Como exemplos das pirâmides da geometria espacial temos as pirâmides do Egito, uma das sete maravilhas do mundo antigo.

Cubos e pirâmides são exemplos de poliedros.

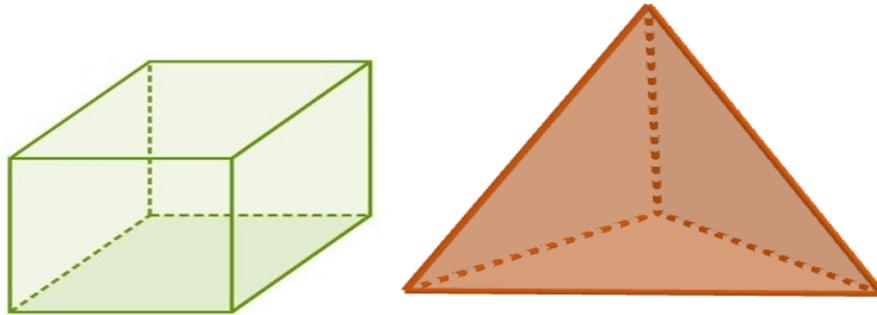


Figura 11: Cubo e uma Pirâmide de base triangular (tetraedro)

Uma outra definição de poliedro, citada por LIMA em [12], que apresentaremos a seguir é:

Definição 1.4: *Sólido* é um conjunto de pontos do espaço delimitado por polígonos planos, de modo que:

- dois polígonos adjacentes não estão em um mesmo plano;
- cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos.

E ainda, segundo WAGNER [18], Poliedro é um objeto da Matemática que pode ser definido com diversos níveis de generalidade. Adotemos a seguinte:

Definição 1.5: *Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos, chamados *faces*, onde:

- i. cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e, cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
- ii. a interseção de suas faces quaisquer ou é lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
- iii. é sempre possível, caminhando sobre as faces, ir de um ponto a um ponto qualquer de outra sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

1.2.2 Elementos de um poliedro

Vejamos algumas características comuns a todo poliedro.

Definição 1.6:

- Os polígonos que formam o poliedro são chamados de *faces* do poliedro.

- Os lados dos polígonos, que delimitam as faces, são chamados de *arestas* do poliedro.
- Os vértices dos polígonos são chamados *vértices* do poliedro.

Assim o poliedro é uma figura de *muitas faces* em três dimensões, com no mínimo $3 + 1$ faces.

Note que os vértices são os pontos de encontro das arestas do poliedro. O número mínimo de arestas que chegam a um vértice é igual a três.

Observação 1.1:

- Para delimitar segmento de reta (unidimensional), precisamos $1 + 1$ pontos nesta reta, $\dim(\text{Ponto}) = 1 - 1 = 0$.
- Para delimitar área (bidimensional), precisamos no mínimo $2 + 1$ segmentos no plano, $\dim(\text{AB}) = 2 - 1 = 1$, onde AB é o segmento de extremidades A e B, delimitando segmento AB de reta.
- Para delimitar volume (tridimensional), precisamos de $3 + 1$ faces, $\dim(\text{face}) = 2$. E assim sucessivamente.

O número m de arestas que chegam a um vértice nos permite classificar todos os poliedros com o mesmo número.

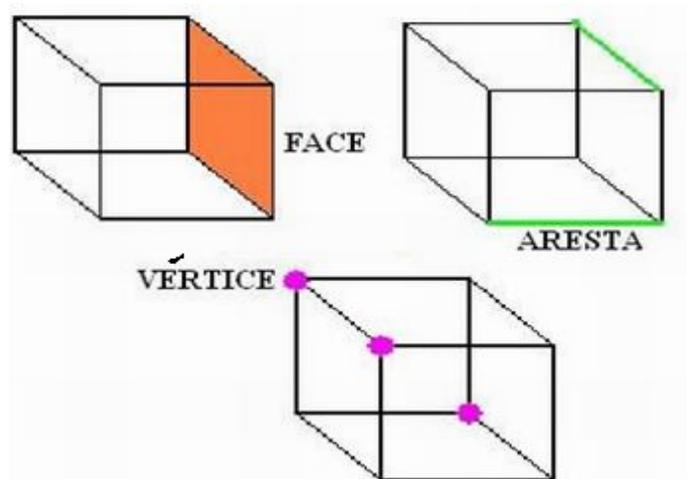


Figura 12: Elementos de um poliedro

Assim como os polígonos são nomeados pelo seu número de lados, os poliedros são nomeados pelo seu número de faces. Observe a tabela com os nomes de alguns poliedros especiais.

Tabela 1: Nome de alguns poliedros

<i>Números de faces</i>	<i>Nome do Poliedro</i>	<i>Prefixo</i>
4	tetraedro	tetra = 4
5	pentaedro	penta = 5
6	hexaedro	hexa = 6
7	heptaedro	hepta = 7
8	octaedro	octa = 8
12	dodecaedro	dodeca = 12
20	icosaedro	icosa = 20

Os outros poliedros são identificados apenas dizendo o número de faces: poliedro de 15 faces, poliedro de 34 faces, e assim por diante.

1.2.3 Classificação dos Poliedros

Aqui veremos a classificação dos poliedros quanto a ser um conjunto convexo ou não convexo, naturalmente surgem os conceitos de poliedros convexos e poliedros não convexos.

De acordo com a Definição 1.2, um poliedro é *convexo* se sua superfície (compreendendo suas faces, arestas e vértices) não se intercepta e o segmento de linha que une quaisquer dois pontos do poliedro está contido no interior ou na superfície.

Observe a seguir alguns exemplos de figuras que representam poliedros convexos e não convexos.

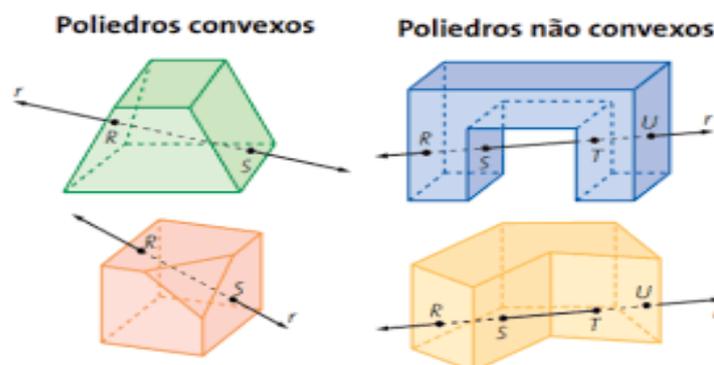


Figura 13: Poliedros convexos e não convexos

1.3 Curvatura de Gauss

Nesta seção veremos o conceito de superfície regular e como medir curvatura usando o cálculo diferencial.

Para o conceito de superfícies regulares em \mathbb{R}^3 (ver maiores detalhes em [4]).

Definição 1.7: Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Diz-se que S é uma *superfície regular* se as três condições a seguir são satisfeitas:

- i. Se para todo $P \in S$, existe $V \subseteq \mathbb{R}^3$, vizinhança de P e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ diferenciável, onde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é um aberto;
- ii. A aplicação X do item i é um homeomorfismo entre U e $V \cap S$, ou seja, X possui uma inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua, isto é, existe um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ contendo $V \cap S$ e uma função contínua $f : W \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuja restrição é X^{-1} ;
- iii. Para todo $q = (u, v)$ pertencente a U , a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Observação 1.2: Note que o item i. equivale a dizer que se $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, então as funções componentes $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U . A aplicação X é chamada de superfície parametrizada, e sua imagem $X(U) = S$ é chamada de traço de X .

Para o item iii., temos três maneiras de verificar que a transformação linear dX_q é injetiva.

- A primeira é verificar que a matriz 3×2 da transformação linear dX_q tem posto máximo, que neste caso é 2.
- A segunda é verificar que os vetores coluna X_u, X_v são linearmente independentes (LI).
- A terceira é verificar que o vetor $X_u \times X_v$ não se anula.

Exemplo 1.1: Dada $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, onde $f(u, v)$ é uma função diferenciável, o traço $X(U) = S$ é uma superfície regular. Nesse caso, S é o gráfico de equação cartesiana $z = f(x, y)$. O item i. é satisfeito pois as três componentes são funções diferenciáveis.

De fato, podemos utilizar o primeiro modo para checar o item iii.

$$dX_q = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix}$$

Como a matriz estando escalonada, da álgebra linear, a terceira linha será nula, mas as duas primeiras serão não nulas, com isso temos que o posto é máximo, igual a 2.

Um importante conceito em geometria é a Curvatura de Gauss $K(P)$, de uma superfície S , num ponto P de S , introduzido por Gauss, em 1827.

Para apresentar este conceito, iniciamos com o conceito de curvatura $k(P)$ de uma curva, medindo o quanto ela deixa de ser uma reta, que entendemos ter curvatura zero em todos os pontos.

Seja C uma curva regular em S , com parametrização $\alpha(s)$, onde s denotará o parâmetro comprimento de arco (pca), isto é, o vetor tangente α' é unitário.

Definição 1.9:

- A curvatura k da curva $\alpha(s)$, em $P = \alpha(0)$, é dada pelo comprimento do vetor aceleração, ou seja, $k(P) = \|\alpha''(0)\|$;
- o número $k_n = k \cdot \cos\theta$ é chamado de *curvatura normal* de $C \subset S$ em P , onde $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre o vetor aceleração $\alpha''(0)$ e o vetor normal N da superfície;
- o número k_g que satisfaz $k^2 = k_n^2 + k_g^2$, é chamada *curvatura geodésica* da curva em P .

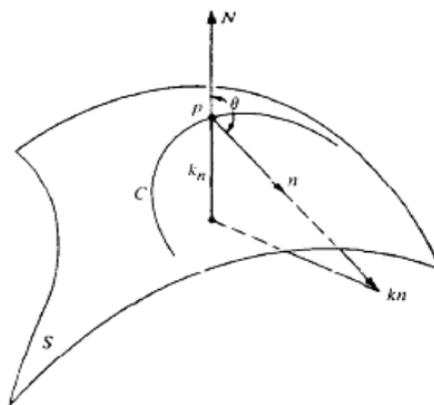


Figura 14: Curvatura normal

Observação 1.3: Se tomarmos a secção normal $C = C_n$, então controlamos o valor de θ , este terá medida 0 ou π . E a k_n é a k vezes 1 ou -1 . Observamos ainda que se a curvatura geodésica for zero, diremos que a curva é uma geodésica no ponto. Veremos adiante uma outra definição equivalente.

Dessas secções normais, há uma de curvatura máxima k_1 e uma de curvatura mínima k_2 , em P . Essas duas secções, a menos da esfera e do plano, são perpendiculares entre si e suas curvaturas em P se chamam *curvaturas principais*.

Definição 1.10:

- O produto $K = k_1 k_2$ é chamado *Curvatura de Gauss* da superfície S em P .
- A média aritmética $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ é chamada *curvatura média* da superfície S em P .

Os pontos de uma superfície podem ser classificados de acordo com o valor e o sinal destas curvaturas.

Definição 1.11: Fixado o ponto P :

- se as duas curvaturas principais têm mesmo sinais, então K é positivo, e o ponto P é dito *ponto elíptico*;
- se as duas curvaturas principais têm sinais opostos, então K é negativo, e o ponto P é dito *ponto hiperbólico*;
- se $K(P)$ é zero, então o ponto P será dito *ponto planar* quando $H = 0$ e será dito *ponto parabólico* quando $H \neq 0$.

A Curvatura Gaussiana para gráficos $z = f(u, v)$ é dada por $K(u, v) = \frac{f_{uu} \cdot f_{vv} - f_{uv}^2}{1 + f_u^2 + f_v^2}$
(ver do CARMO ([4]))

Exemplo 1.2: A Curvatura Gaussiana do Parabolóide Elíptico

Uma parametrização para esta superfície pode ser $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right),$$

onde $(u, v) \in U$.

Calculando as derivadas parciais, obtemos

$$K(u, v) = \frac{1}{4(ab)^2} \left[\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{4} \right]^{-2}.$$

Claramente todos os pontos são elípticos.

Se a superfície for um plano, todas as interseções de planos que passam por P serão retas, logo, terão curvatura nula. Portanto, o plano tem curvatura de Gauss nula.

A curvatura de Gauss pode ser positiva, negativa ou nula. Será positiva se as curvas de máxima e mínima curvatura forem encurvadas para o mesmo lado. Nesse caso, os dois

círculos osculantes ¹ ficam no mesmo lado da superfície, em relação ao plano tangente $T_P S$. Esse é o caso da superfície (A) vista abaixo. Será negativa se uma curva for encurvada para um lado e a outra, para o outro. Isto é, se os círculos osculantes ficam em lados opostos. É o caso da superfície (B), que parece uma sela. E é nula se pelo menos uma das curvas for reta, isto é, tiver curvatura zero. É o caso do cilindro (C), na figura.

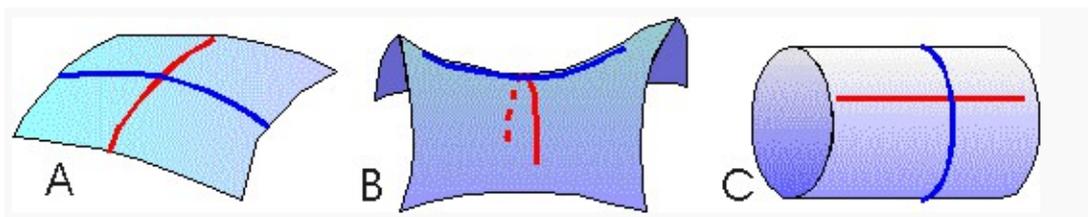


Figura 15: Sinal da curvatura de Gauss

1.4 Relação de Euler

Nesta seção veremos um pouco do invariante topológico relacionado com a Relação de Euler.

Leonhard Euler nasceu na Suíça, Basileia em 1707. Depois de ensaiar uma carreira no campo da teologia, Euler encontrou sua verdadeira vocação na matemática, sendo um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das funções contínuas. Contribuiu notavelmente para os campos da Geometria Diferencial (geometria com cálculo), cálculo de diferenças finitas e cálculo de variações, além de enriquecer a teoria dos números. Relatando em um de seus artigos a relação

$$V - A + F = 2, \quad (1)$$

relacionando os números V de vértices, A de arestas e F de faces de um poliedro convexo qualquer. Anos depois Henri Poincaré percebeu que essa fórmula era um dos pilares centrais da topologia².

Poincaré mostrou que se o poliedro \mathcal{P} com $V_{\mathcal{P}}$ vértices, $A_{\mathcal{P}}$ arestas e $F_{\mathcal{P}}$ faces é homeomorfo ³ a um poliedro \mathcal{S} com $V_{\mathcal{S}}$ vértices, $A_{\mathcal{S}}$ arestas e $F_{\mathcal{S}}$ faces então

$$F_{\mathcal{P}} + V_{\mathcal{P}} - A_{\mathcal{P}} = F_{\mathcal{S}} + V_{\mathcal{S}} - A_{\mathcal{S}},$$

¹Um círculo é dito osculante à curva $\alpha(s)$, em $\alpha(0) = P$, se tiver mesmo vetor tangente, e mesmo vetor normal que α , em $s = 0$, e o raio for o recíproco da curvatura, se $\|\alpha''(0)\| > 0$.

²Topologia (do grego *topos*, "lugar", e *logos*, "estudo") é o ramo da matemática que estuda os espaços topológicos, sendo considerado como uma extensão da geometria.

³Um conjunto é homeomorfo a outro conjunto quando existe uma função contínua com inversa também contínua entre eles.

ou seja, ele percebeu que $F + V - A$ é um invariante topológico.

Para melhor entender, suponha um poliedro cuja faces e arestas são flexíveis, elásticas, imagine que seja possível inflá-lo (e desinflá-lo) continuamente, como se fosse um balão, até que se torne uma esfera. Se isso acontecer dizemos que o poliedro é homeomorfo a esfera.

É comum escrever

$$\mathcal{X}(P) = F + V - A, \quad (2)$$

onde $\mathcal{X}(P)$ é conhecido como *característica de Euler-Poincaré do poliedro \mathcal{P}* .

Sabemos que $\mathcal{X}(P) = 2$, quando P for um poliedro, de fato, o hexaedro tem $\mathcal{X}(P) = 2$, pois $V = 8, F = 6$ e $A = 12$. Como a esfera S é homeomorfa ao hexaedro, então ela tem $\mathcal{X}(S) = 2$. Logo, toda superfície compacta homeomorfa a uma esfera tem característica de Euler-Poincaré igual a 2.

Concretamente, imaginemos uma criança com uma massinha de modelar com formato esférico poderá achatando continuamente, sem fazer corte e nem furos até obter um hexaedro, forma de um dado, e pode inversamente sair de um poliedro achatando os vértices, tirando as quinas (arestas) até obter uma esfera novamente. Com isso, fica fácil perceber que todo poliedro convexo \mathcal{P} tem característica igual a 2, pois se projetarmos cada ponto do poliedro \mathcal{P} sobre a superfície de uma esfera localizada convenientemente, teremos um homeomorfismo $f : \mathcal{P} \rightarrow S$.

Na versão global (superfície inteira) desse teorema temos algumas proposições importantes, principalmente que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico de uma região regular R de uma superfície, o qual possibilita uma classificação topológica das superfícies compactas em \mathbb{R}^3 .

Outro resultado importante está no fato de que toda superfície compacta e conexa \mathcal{S} subconjunto de \mathbb{R}^3 é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças dado por

$$g = \frac{2 - \mathcal{X}(S)}{2} \quad (3)$$

onde g é chamado o gênero de \mathcal{S} .

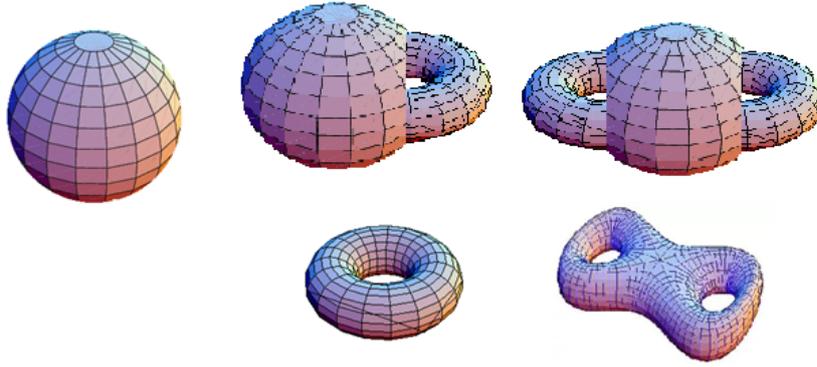


Figura 16: Esfera, Toro (uma alça) e Bitoro (duas alças)

Utilizando a Equação (3), podemos verificar que para a esfera $\mathcal{X}(S) = 2$, para o toro $\mathcal{X}(S) = 0$ e para o bitoro $\mathcal{X}(S) = -2$.

De acordo com a Figura 16 acima, uma superfície $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ compacta e conexa, pode assumir os valores $2, 0, \dots, -2, -2n, \dots$ da característica de Euler-Poincaré \mathcal{S} . Como a esfera possui $\mathcal{X}(S) = 2$, conclui-se que toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças e que apenas a esfera possui a característica de Euler-Poincaré $\mathcal{X}(S)$ positiva.

1.4.1 Teorema de Gauss-Bonnet

Nesta seção iremos apresentar um teorema muito interessante, o Teorema de Gauss-Bonnet, tendo duas versões, uma global e uma local. Como global queremos dizer a superfície como um todo, neste caso relacionando por um lado a geometria e do outro lado a topologia. Na versão local, queremos dizer um pedaço da superfície, por exemplo, uma só face de um poliedro ou um só triângulo T , onde $\mathcal{X}(T) = V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$.

Neste último caso, teremos uma aplicação interessante como a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico ⁴ ser igual a π , ser maior ou menor que π dependendo da curvatura de Gauss ser $K = 0$, $K > 0$ ou $K < 0$.

Teorema 1.1[Gauss-Bonnet] *Sejam $X(U) = S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta, e $K: S \rightarrow \mathbb{R}$ a sua curvatura Gaussiana.*

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\mathcal{X}(S),$$

onde $\mathcal{X}(S)$ é a característica de Euler-Poincaré.

⁴Uma curva (pca) $\alpha(s)$ é chamada de geodésica da superfície S se o vetor aceleração $\alpha''(s)$ for paralelo ao vetor normal $N(\alpha(s))$ da superfície, para cada s .

Essa igualdade determina uma relação entre geometria, a curvatura Gaussiana K , e a topologia, a característica de Euler-Poincaré. E a partir desse teorema, podemos deduzir o seguinte resultado: Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.

Deixaremos a bibliografia, do CARMO [4], para que o leitor possa ver a demonstração desse teorema.

A integral de superfície da curvatura Gaussiana sobre alguma região de uma superfície é chamada curvatura total.

Vejamos uma aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet (local), por do CARMO [4].

Teorema 1.2: *Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal, de uma superfície orientada S , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é homeomorfo a um disco aberto e X é compatível com a orientação de S . Seja $R \subset X(U)$ uma região simples de S e seja $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Suponha que α é orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco s , e sejam $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_n)$ e $\theta_0, \dots, \theta_n$, respectivamente, os vértices e os ângulos externos de α . Então*

$$\sum_{i=0}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^n \theta_i = 2\pi \mathcal{X}(R),$$

onde $k_g(s)$ é a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e K é a Curvatura Gaussiana de S .

Ao relacionar a curvatura gaussiana com soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico, ou seja, um triângulo cujos lados são geodésicas de uma superfície S , Gauss generalizou este resultado. Mais precisamente, ele mostrou que se os ângulos internos de um triângulo geodésico T , são dados por $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, então

$$\int_T K d\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi,$$

onde σ é a área do triângulo T .

Se a curvatura gaussiana for constante, $K = c$, então

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi = c\sigma, c \text{ é uma constante}$$

e assim a soma dos ângulos internos será maior que π radianos ($c > 0$) se a superfície for

uma esfera unitária, menor que π radianos ($c < 0$) se a superfície for a pseudo-esfera ou igual a π radianos ($c = 0$) se a superfície for um plano.

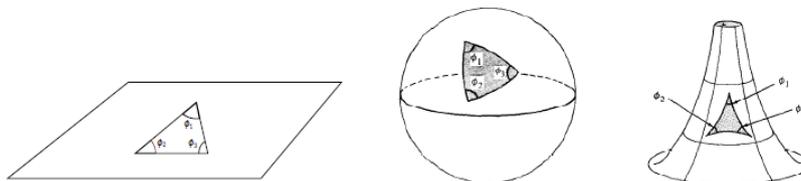


Figura 17: Triângulo em um plano, Triângulo em uma esfera e Triângulo em uma pseudo-esfera

1.5 Soma dos ângulos internos das faces de um poliedro (S_i)

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada pela fórmula $S_n = 180^\circ(n - 2)$. Para calcularmos a soma S_i dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro qualquer, precisamos inicialmente saber a quantidade de faces de cada tipo (F_n) que o poliedro possui.

Denotemos F_3 o número de faces do tipo triangular, F_4 o número de faces do tipo quadrangular, F_5 o número de faces do tipo pentagonal e assim por diante. Assim, a soma dos ângulos internos das faces triangulares é 180° , a soma dos ângulos internos das faces quadrangulares é 2.180° , a soma dos ângulos internos das faces pentagonais é 3.180° e assim por diante.

Representaremos

$$S_i = 180^\circ.F_3 + 2.180^\circ F_4 + 3.180^\circ F_5 + \dots + (i - 2).180^\circ F_i,$$

com i pertencente ao conjunto dos Números Naturais, colocando 180° em evidência

$$S_i = 180^\circ.(F_3 + 2.F_4 + 3F_5 + \dots + (i - 2).F_i),$$

e por outro lado o número de arestas (A) de um poliedro é a soma dos lados de cada polígono dividido por 2.

$$A = \frac{\text{número de lados}}{2},$$

logo

$$2.A = \text{número de lados},$$

daí

$$2.A = 3.F_3 + 4.F_4 + 5.F_5 + \dots + (i - 2).F_i. \quad (4)$$

E ainda o número de faces (F) de um poliedro é a soma das faces triangulares, com as faces quadrangulares, com as faces pentagonais e assim por diante.

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_i.$$

Substituindo o número de Arestas e o número de Faces na Relação de Euler temos

$$\begin{aligned} V - 2 &= \frac{3.F_3 + 4.F_4 + 5.F_5 + \dots + i.F_i}{2} - (F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_i) \\ V - 2 &= \frac{F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_i}{2}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{S_i}{180^\circ} = F_3 + 2.F_4 + 3.F_5 + \dots + i.F_i,$$

daí

$$2.(V - 2) = F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_i.$$

Logo,

$$\frac{S_i}{180^\circ} = 2.(V - 2).$$

Portanto

$$S_i = 360^\circ.(V - 2) \text{ ou } S_i = 360^\circ.(A - F), \text{ onde usamos (1)}$$

1.6 Poliedros Regulares

Nesta seção veremos a definição de poliedros regulares podendo ser convexos e não-convexos, demonstraremos a existência dos cinco sólidos regulares os sólidos platônicos de duas formas diferentes para uma melhor compreensão.

Um poliedro se diz *regular* se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes. Embora existam polígonos regulares de todas as ordens, existem somente cinco poliedros regulares convexos diferentes a menos de tamanho.

Além desses, há também quatro sólidos regulares não convexos, conhecidos por sólidos de Kepler-Poinsot (Pequeno dodecaedro estrelado, Grande dodecaedro estrelado, Grande dodecaedro e Icosaedro estrelado). Observe suas respectivas representações na Figura 18

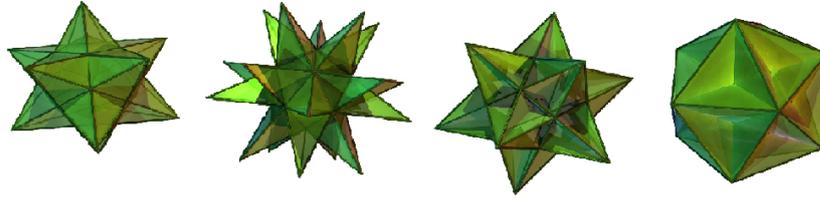


Figura 18: Sólidos regulares Kepler-Poinsot

Como o foco de nosso trabalho é estudar os poliedros regulares convexos, Sólidos de Platão, iremos analisar o seguinte fato:

Teorema 1.2: *Existem cinco, e somente cinco poliedros regulares convexos.*

Demonstração. Seja n o número de arestas que compõem cada face, cujas faces tendo a mesma quantidade de arestas. Pelo Teorema de Euler, denotamos A número de arestas, F número de faces e V o número de vértices.

Duas a duas, as faces dividem a mesma aresta para ligá-las.

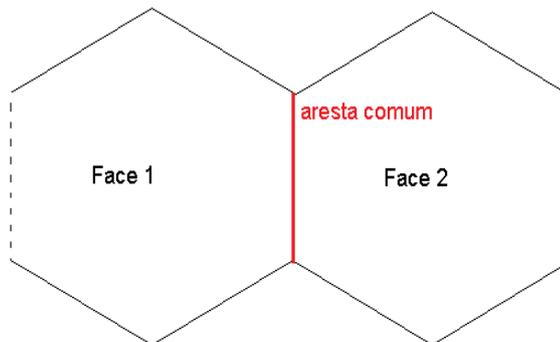


Figura 19: Duas faces compartilham de uma mesma aresta

$$A = \frac{n \cdot F}{2}. \quad (5)$$

De modo análogo, denotamos por p o números de arestas que partem de cada vértice, como uma aresta tem 2 vértices

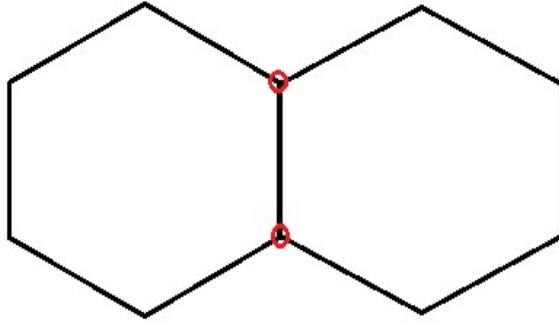


Figura 20: Uma aresta tem dois vértices

$$A = \frac{p \cdot V}{2}, \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6), temos:

$$\frac{p \cdot V}{2} = \frac{n \cdot F}{2}.$$

Isolando o valor de V

$$V = \frac{n \cdot F}{p} \quad (7)$$

Utilizando a Relação de Euler (1)

$$\frac{n \cdot F}{p} - \frac{n \cdot F}{2} + F = 2,$$

daí

$$\frac{2nF - npF + 2nF}{2p} = 4p,$$

$$F \cdot (2n - np + 2p) = 4p,$$

assim

$$F = \frac{4p}{2n - np + 2p}.$$

Como o número de faces de um polígono é positivo,

$$\frac{4p}{2n - np + 2p} > 0,$$

com isso

$$2n - np + 2p > 0,$$

$$2n - p(n - 2) > 0,$$

$$2n > p(n - 2),$$

concluimos que

$$\frac{2n}{(n - 2)} > p.$$

Notemos que $p \geq 3$, ou seja,

$$2n > 3(n - 2) \text{ isto implica que } n < 6.$$

Portanto, as únicas possibilidades são $n = 3, n = 4$ e $n = 5$.

a) Para $n = 3$

$$F = \frac{4p}{2n - np + 2p} > 0$$

$$\frac{4p}{2 \cdot 3 - 3 \cdot p + 2p} > 0$$

$$\frac{4p}{6 - p} > 0$$

$$p < 6 \text{ isto implica que } 3 \leq p < 6.$$

Assim

$$p = 3 \Rightarrow F = 4 \quad (\text{Tetraedro})(\text{Figura 22 a})$$

$$p = 4 \Rightarrow F = 8 \quad (\text{Octaedro})(\text{Figura 22 c})$$

$$p = 5 \Rightarrow F = 20 \quad (\text{Icosaedro})(\text{Figura 22 e})$$

b) Para $n = 4$

$$F = \frac{4p}{2n - np + 2p} > 0$$

$$\frac{4p}{2 \cdot 4 - 4 \cdot p + 2p} > 0$$

$$\frac{4p}{8 - 2p} > 0$$

$$p < 4 \text{ isto implica que } p = 3$$

Assim:

$$p = 3 \Rightarrow F = 6 \quad (\text{Hexaedro})(\text{Figura 22 b}).$$

c) Para $n = 5$

$$F = \frac{4p}{2n - np + 2p} > 0$$

$$\frac{4p}{2.5 - 5.p + 2p} > 0$$

$$\frac{4p}{10 - 3p} > 0$$

$$p < \frac{10}{3} = 3,33333\dots$$

Desta forma,

$$F = \frac{4.3}{10 - 3.3}$$

$$F = 12$$

$$p = 3 \Rightarrow F = 12 \quad (\text{Dodecaedro})(\text{ Figura 22 d })$$

E com isso encerramos todos os casos e mostramos que existem apenas cinco Sólidos regulares, ou Sólidos de Platão.

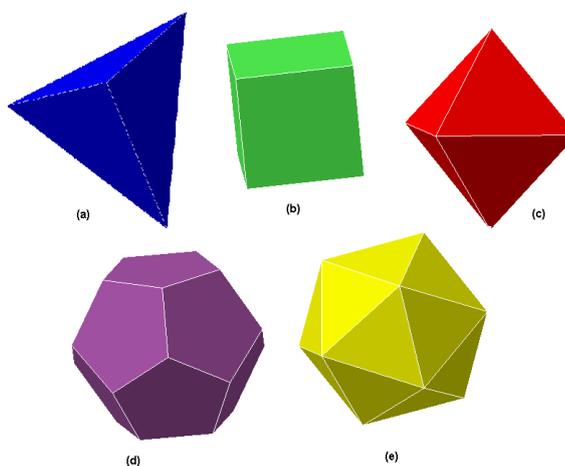


Figura 21: Os cinco sólidos platônicos

□

Uma outra forma para a demonstração deste fato de que só temos cinco sólidos platônicos é obtida através do processo de construção, como está incluída no diálogo de Platão e Timeu:

Para a construção dos sólidos platônicos, por definição, apenas podemos utilizar polígonos regulares congruentes. Começemos por considerar o triângulo equilátero, que é o polígono regular com menos lados. Quantos poliedros cujas faces são apenas este polígono conseguimos construir? Para responder a esta pergunta, centremos a nossa atenção nos vértices dos possíveis poliedros (basta considerar apenas um, pois os restantes são idênticos).

Com dois triângulos equiláteros, não se consegue constituir um vértice de um poliedro, pois um ângulo sólido tem que ser constituído pelo menos por três planos. Com três triângulos equiláteros é possível constituir um vértice para o poliedro, que é concretamente o tetraedro.

Esta possibilidade prende-se com fato de a soma dos ângulos internos dos diversos triângulos adjacentes, no vértice, ser inferior a 360° , exatamente 180° . Se considerarmos quatro triângulos equiláteros, cuja soma das amplitudes dos ângulos internos adjacentes no vértice é de 240° , obtemos o octaedro.

Considerando cinco desses triângulos num vértice, essa soma é de 300° , ainda inferior a 360° , e obtemos o icosaedro. Passando para seis triângulos equiláteros, chegamos a uma impossibilidade. A soma das amplitudes dos ângulos internos adjacentes no vértice é, neste caso, 360° , o que não permite "fechar" o vértice, isto é, formar um ângulo sólido, pois os triângulos ficam todos sobre o mesmo plano (formando uma pavimentação do plano em torno do suposto vértice).

A consideração de um número maior de triângulos equiláteros em torno de um vértice, obviamente já não possibilita a construção de um poliedro.

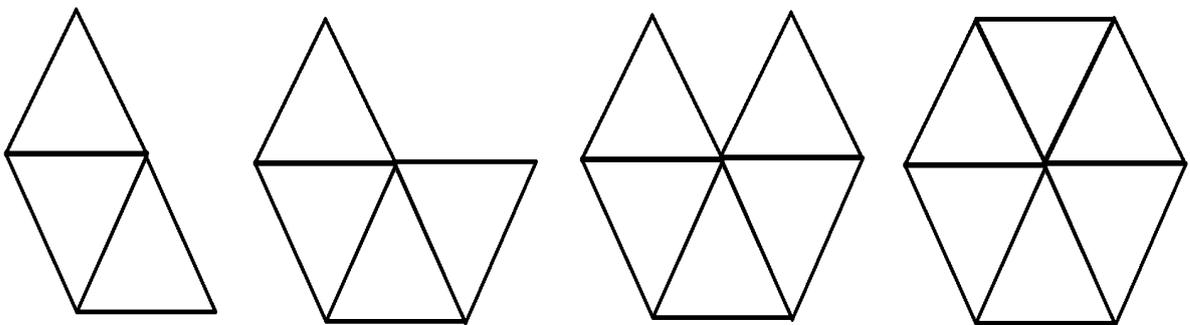


Figura 22: Junção de triângulos equiláteros

Para a construção de um poliedro utilizaremos o fato que a soma dos ângulos internos

dos polígonos adjacentes no vértice se for inferior a 360° .

Considerando o quadrado, enunciado anteriormente, chegamos à conclusão de que apenas conseguimos construir o cubo. Com pentágonos, apenas conseguimos construir o dodecaedro.

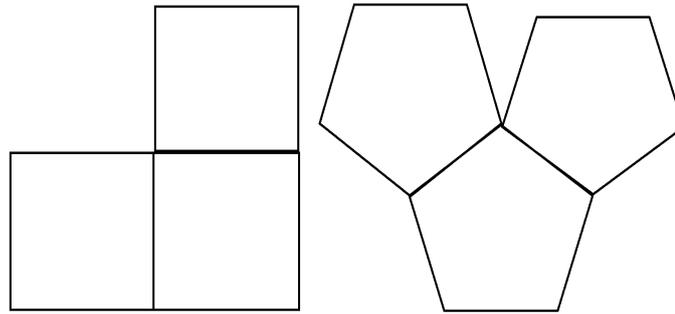


Figura 23: Rotação de quadrados e pentágonos regulares

Com hexágonos não se consegue construir nenhum sólido platônico. Basta verificar que três hexágonos adjacentes em torno de um ponto (supostamente um vértice) pavimentam o plano, pois a soma das amplitudes dos ângulos internos desses hexágonos é precisamente 360° , o que não permite formar um ângulo sólido.

Um número maior de hexágonos, obviamente, que também não permite a construção de um sólido platônico. Analogamente, com polígonos com um número maior de lados isso também não é possível.

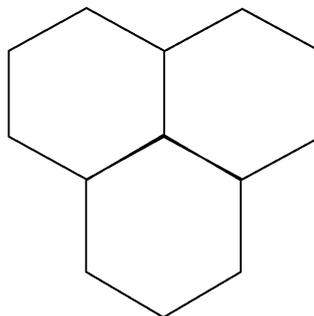


Figura 24: União de três Hexágonos a partir de um ponto.

Enumeremos então os sólidos que acabamos de construir: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro. São precisamente cinco, como se queria demonstrar.

2 Sólidos Arquimedianos

Neste capítulo estudamos um pouco da história de Arquimedes e seus sólidos, apresentamos sua construção através de truncatura, snubificação e expansão, provamos a existência apenas treze desses sólidos.

2.1 Um pouco da história de Arquimedes

Nesta sessão estudaremos um pouco da história de Arquimedes, e tendo como foco os sólidos semirregulares, chamados Sólidos Arquimedianos, sua definição e unicidade de apenas 13 destes sólidos.

Arquimedes nasceu em Siracusa por volta de 287 a.C, filho de Fídias, astrônomo grego, que costumava reunir-se com outros filósofos em sua casa, o que ressaltou a curiosidade de Arquimedes para invenções. Estudou na escola de matemática em Alexandria, onde teve contato com o que havia de mais avançado na ciência de sua época.



Figura 25: Arquimedes de Siracusa

Arquimedes envolvia-se tanto com a mundo da matemática que muitas vezes esquecia até de tomar banho e sempre era levado a força por seus criados até os banheiros públicos, os quais eram utilizados naquela época, mesmo quando estava no banho, ele continuava a fazer seus desenhos geométricos no chão e no seu próprio corpo.

Foram muitas as descobertas e invenções de Arquimedes, no campo da matemática por exemplo, foi dele o método para calcular o número π , a razão entre o comprimento e o diâmetro de um círculo, descobrindo cálculo da área e comprimento do círculo, além disso o cálculo da área da elipse.

No campo da física, por exemplo, ele descobriu a alavanca, cuja citação é: "*Dê me uma alavanca e um ponto de apoio que moverei o mundo*". Foi então desafiado pelo rei de Siracusa onde conseguiu mover um navio carregado com pessoas apenas girando uma alavanca. Escrevendo assim sobre o equilíbrio dos corpos, com sistemas de polias.

No livro *O contador de areia*, relata que Arquimedes calculou a quantidade de grãos de areia que são necessários para preencher uma esfera que tenha o Sol no centro e a Terra em outra ponta chegando assim em um número próximo a 10^{63} .

Ainda no campo da geometria Arquimedes descobriu a área e o volume da esfera, que estão relatados no livro *Sobre a esfera e o cilindro*.

No Século III a.C, o rei de Siracusa encomendou a um ourives que fabricasse uma coroa de puro ouro, desconfiado que havia sido enganado, o rei pediu a Arquimedes que verificasse se a coroa era de ouro ou havia prata em seu interior. Mais uma vez Arquimedes perdeu o sono para desvendar esse mistério, pois não poderia danificar a coroa, e a solução surgiu enquanto ele tomava banho, entrou em sua banheira, e percebeu que o volume de água que transbordava correspondia ao volume de seu próprio corpo, percebendo que a coroa devia ter o volume do ouro que o rei havia fornecido, saiu correndo gritando "Eureca" (achei), e nem percebeu que estava nu. Com isso jogou a coroa na água e comparou seu peso, e confirmou que o rei havia sido enganado. Assim ele escreveu *Sobre os corpos flutuantes*.

Também foi atribuído a Arquimedes, treze poliedros semirregulares mas, infelizmente, a descrição original se perdeu, e foram gradualmente sendo redescobertos durante o Renascimento, por vários artistas. Em 1619, na obra "Harmonices Mundi", Johannes Kepler (1571-1630) apresentou um estudo sistematizado sobre os sólidos Arquimedianos.

Reza a lenda que a obsessão de Arquimedes por suas invenções e cálculos era tamanha que possivelmente o levou a morte (212 a.C), pois durante um de seus raciocínios, não prestou atenção na voz de rendição de um soldado romano, e o mesmo o feriu com um golpe de espada.

Marcelo, o general romano, tendo um grande prestígio por Arquimedes, solicitou que

ninguém o ferisse, embora um soldado tenha desobedecido suas ordens e o assassinou.

O general em homenagem as descobertas de Arquimedes, construiu em seu túmulo o desenho de uma esfera inscrita em um cilindro na proporção de raio de 2:3, atendendo pedido de Arquimedes.

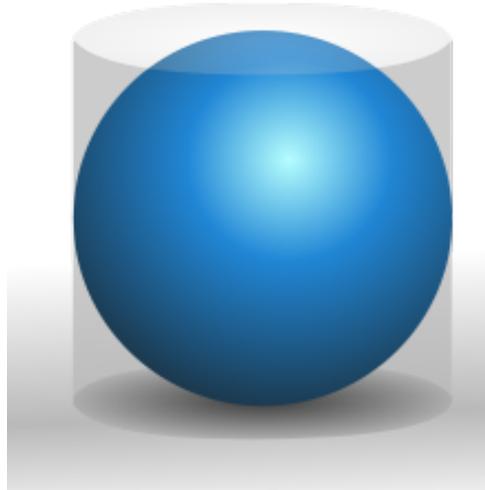


Figura 26: Escultura do túmulo de Arquimedes

Sendo uma grande ironia, pois Arquimedes contribuiu com invenções de poderosas armas de guerra, como mecanismos com garras que levantavam e afundavam navios.

2.2 Estudo dos Sólidos Arquimedianos

Nesta parte do trabalho vamos definir os sólidos arquimedianos, estudar as operações que podem ocorrer em um poliedro para o surgimento de um novo grupo de sólidos e observar a estrutura de cada sólido arquimediano. Devido à grande dificuldade em encontrar materiais sobre os Sólidos Arquimedianos, pode ser uma possível causa para que muitos não conheçam sua existência.

Esses sólidos foram estudados por Arquimedes, no entanto, os escritos originais deste autor estão perdidos. O quinto livro de Coleção de Matemática, do matemático grego Pappus de Alexandria (cerca de 290 a 350 d.C.), faz referência aos estudos de Arquimedes sobre esses sólidos, embora não traga qualquer ilustração ou nomeação correspondente aos arquimedianos citados. Deve-se ao matemático alemão Johann Kepler a nomeação e também a prova da existência dos únicos 13 Sólidos Arquimedianos.

2.2.1 Construção dos Sólidos Arquimedianos

Os Sólidos Arquimedianos podem ser obtidos através de operações feitas a partir dos Sólidos Platônicos, que iremos considerar para tal demonstração como um poliedro primitivo. Assim os definimos como *sólidos convexos regulares, cuja faces são polígonos regulares de mais de um tipo e cujo vértices são todos congruentes, ou seja, existe o mesmo arranjo (número e ordem) de polígonos em torno de cada vértice.*

Essas operações podem ser:

Definição 2.1 *Truncamentos* (cortes), que podem ser de dois tipos, o primeiro tipo truncamento o corte é feito pelos pontos médios das arestas que concorrem no mesmo vértice e no segundo tipo de truncamento o corte é feito de tal forma que a face do novo poliedro seja um polígono regular que tenha o dobro do número de lados que a face do polie

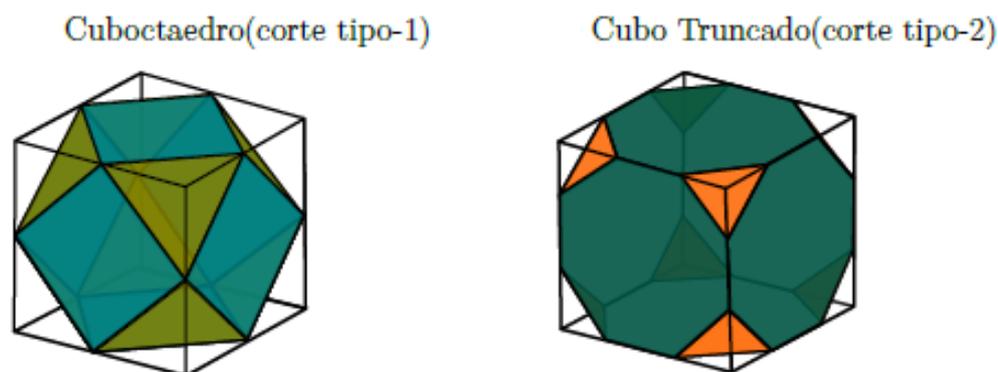


Figura 27: Tipos de Truncatura
Fonte: José Ribamar

Independente do tipo de truncamento, cada vértice se torna em uma nova face. E as partes que serão retiradas serão sempre pirâmides regulares.

Definição 2.2 *Snubificação* que consiste em afastar todas as faces do poliedro, rotacioná-las ou não, e preencher o espaço vazio entre as novas faces com polígonos regulares. No caso que haja rotação, onde normalmente é de 45° , essa operação é chamada de simplesmente de snubificação. Quando não houver rotação, a snubificação torna-se uma expansão. E quando os poliedros são obtidos através da expansão são chamados de *rombis*, e os obtidos através da snubificação são chamados de *snub*.

Agora iremos estudar a construção de cada um dos treze sólidos arquimedianos:

01. Cuboctaedro

Obtemos o **Cuboctaedro** fazendo o **truncamento tipo 1** no cubo ou no octaedro regular, observando a Figura 28(a) a seguir, o octaedro possui 8 faces triangulares regulares, 12 arestas, 6 vértices, e de cada vértice parte 4 arestas, assim após o truncamento vamos obter 8 faces triangulares regulares (como o octaedro) e 6 faces quadradas, que foi formada a partir dos 6 vértices do octaedro.

Com isso o **Cuboctaedro** tem um total de 14 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 8F_3 + 6F_4 = (3 \times 8) + (4 \times 6) = 48, \text{ isso implica que } A = 24.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 24 - 14 + 2 = 12.$$

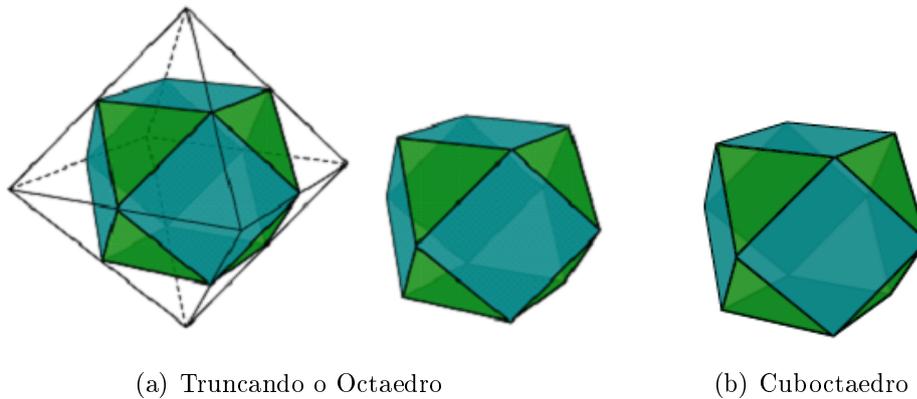


Figura 28: Comparando o Octaedro e o Cuboctaedro

Fonte: José Ribamar

02. Icosidodecaedro

Obtemos o **Icosidodecaedro** fazendo o **truncamento tipo 1** no dodecaedro regular ou no icosaedro regular, observando a Figura 29 a seguir, o dodecaedro regular possui 12 faces pentagonais regulares, 30 arestas, 20 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após o truncamento vamos obter 12 faces pentagonais regulares (como o dodecaedro) e 20 faces triangulares regulares, que foi formada a partir dos 20 vértices do dodecaedro.

Com isso o **Icosidodecaedro** tem um total de 32 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 20F_3 + 12F_5 = (3 \times 20) + (5 \times 12) = 120, \text{ isso implica que } A = 60.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 60 - 32 + 2 = 30.$$

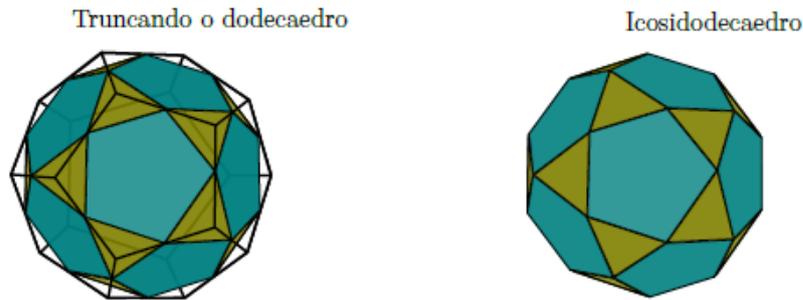


Figura 29: Comparando o Dodecaedro e o Icosidodecaedro
Fonte: José Ribamar

03. *Tetraedro Truncado*

Obtemos o **Tetraedro Truncado** fazendo o **truncamento tipo 2** no tetraedro regular, observando a Figura 30 a seguir, o tetraedro regular possui 4 faces triangulares regulares, 6 arestas, 4 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após o truncamento vamos obter 4 faces hexagonais regulares (como o tetraedro) e 4 faces triangulares regulares, que foi formada a partir dos 4 vértices do tetraedro.

Com isso o **Tetraedro Truncado** tem um total de 8 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 4F_3 + 4F_6 = (6 \times 4) + (3 \times 4) = 36, \text{ isso implica que } A = 18.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 18 - 8 + 2 = 12.$$

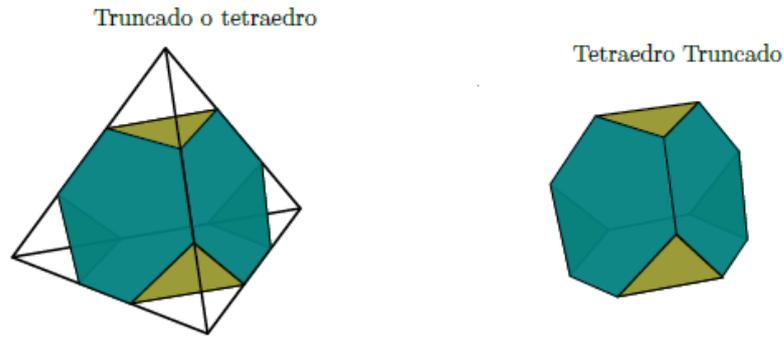


Figura 30: Truncando o Tetraedro
 Fonte: José Ribamar

04. *Cubo Truncado*

Obtemos o **Cubo Truncado** fazendo o **truncamento tipo 2** no cubo, observando a Figura 31 a seguir, o cubo possui 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após o truncamento vamos obter 6 faces octogonais regulares (a mesma quantidade das faces de um cubo) e 8 faces triangulares regulares, que foi formada a partir dos 8 vértices do cubo.

Com isso o **Cubo Truncado** tem um total de 14 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 8F_3 + 6F_8 = (3 \times 8) + (8 \times 6) = 72, \text{ isso implica que } A = 36.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 36 - 14 + 2 = 24.$$



Figura 31: Truncando o Cubo
 Fonte: José Ribamar

05. Octaedro Truncado

Obtemos o **Octaedro Truncado** fazendo o **truncamento tipo 2** no Octaedro regular, observando a Figura 32 a seguir, o octaedro regular possui 8 faces triangulares, 12 arestas, 6 vértices, e de cada vértice parte 4 arestas, assim após o truncamento vamos obter 8 faces hexagonais regulares (a mesma quantidade das faces de um Octaedro) e 6 faces quadradas, que foi formada a partir dos 6 vértices do Octaedro.

Com isso o **Octaedro Truncado** tem um total de 14 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 6F_4 + 8F_6 = (4 \times 6) + (8 \times 6) = 72, \text{ isso implica que } A = 36.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 36 - 14 + 2 = 24.$$

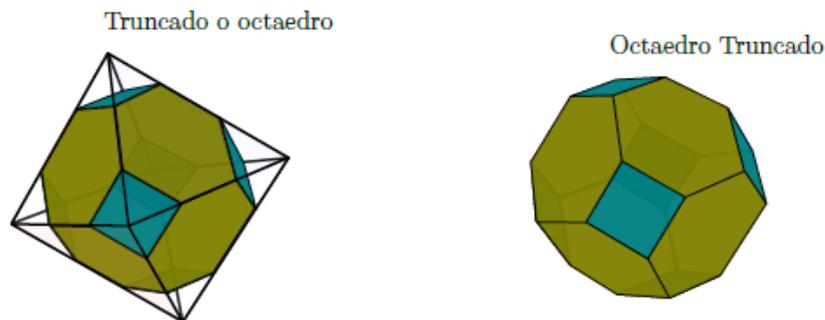


Figura 32: Truncando o Octaedro Regular
Fonte: José Ribamar

06. Dodecaedro Truncado

Obtemos o **Dodecaedro Truncado** fazendo o **truncamento tipo 2** no Dodecaedro regular, observando a Figura 33 a seguir, o Dodecaedro regular possui 12 faces pentagonais, 30 arestas, 20 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após o truncamento vamos obter 12 faces decagonais regulares (a mesma quantidade das faces de um Dodecaedro) e 20 faces triangulares regulares, que foi formada a partir dos 20 vértices do Dodecaedro.

Com isso o **Dodecaedro Truncado** tem um total de 32 faces.

Daí, com o auxílio da Equação [4]

$$2A = 20F_3 + 12F_{10} = (3 \times 20) + (10 \times 12) = 180, \text{ isso implica que } A = 90.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 90 - 32 + 2 = 60.$$

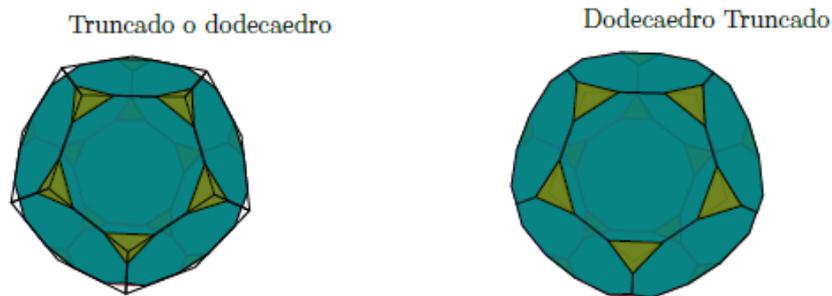


Figura 33: Truncando o Dodecaedro
Fonte: José Ribamar

07. *Icosaedro Truncado*

Obtemos o **Icosaedro Truncado** fazendo o **truncamento tipo 2** no Icosaedro regular, observando a Figura 34 a seguir, o Icosaedro regular possui 20 faces triangulares regulares, 30 arestas, 12 vértices, e de cada vértice parte 5 arestas, assim após o truncamento vamos obter 20 faces hexagonais regulares (a mesma quantidade das faces de um Icosaedro) e 12 faces pentagonais regulares, que foi formada a partir dos 12 vértices do Icosaedro.

Com isso o **Icosaedro Truncado** tem um total de 32 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 20F_6 + 12F_5 = (20 \times 6) + (12 \times 5) = 180, \text{ isso implica que } A = 90.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 90 - 32 + 2 = 60.$$



Figura 34: Truncando o Icosaedro
Fonte: José Ribamar

08. *Cuboctaedro Truncado*

Obtemos o **Cuboctaedro Truncado** fazendo o **truncamento tipo 2** no Cuboctaedro, observando a Figura 28, o Cuboctaedro possui 6 faces quadradas 8 faces triangulares regulares, 24 arestas, 12 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após o truncamento vamos obter 6 faces octogonais regulares, 8 faces hexagonais regulares e 12 faces retangulares (por não ser regular devemos fazer ajustes nos retângulos para torná-los quadrados), que foi formada a partir dos 12 vértices do Cuboctaedro.

Com isso o **Cuboctaedro Truncado** tem um total de 26 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 6F_8 + 8F_6 + 12F_4 = (6 \times 8) + (8 \times 6) + (12 \times 4) = 144, \text{ isso implica que } A = 72.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 72 - 26 + 2 = 48.$$

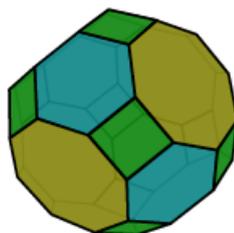


Figura 35: Cuboctaedro Truncado
Fonte: José Ribamar

09. *Icosidodecaedro Truncado*

Obtemos o **Icosidodecaedro Truncado** fazendo o **truncamento tipo 2** no Icosidodecaedro na qual possui 20 faces triangulares regular, 12 faces pentagonais regulares, 60 arestas, 30 vértices, e de cada vértice parte 4 arestas, assim após o truncamento vamos obter 20 faces hexagonais regulares, 12 faces decagonais regulares e 30 faces retangulares (por não ser regular devemos fazer ajustes nos retângulos para torná-los quadrados), que foi formada a partir dos 12 vértices do Icosidodecaedro.

Com isso o **Icosidodecaedro Truncado** tem um total de 62 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 30F_4 + 20F_6 + 12F_{10} = (30 \times 4) + (20 \times 6) + (12 \times 10) = 360, \text{ isso implica que } A = 180.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 180 - 62 + 2 = 120.$$

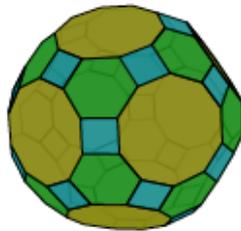


Figura 36: Icosidodecaedro Truncado

Fonte: José Ribamar

10. *Rombicuboctaedro*

Obtemos o **Rombicuboctaedro** fazendo a **expansão** do Cubo ou do Octaedro regular, iremos apresentar essa expansão para no Cubo, qual possui 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após a expansão das faces do Cubo, as 12 arestas formarão mais 12 quadrados, assim com as 6 faces existentes mais essas 12 faces que surgiram, teremos um total de 18 faces, e ainda 8 faces triangulares regulares que foi formada a partir dos 8 vértices do Cubo observe esse fato na Figura 37.

Com isso o **Rombicuboctaedro** tem um total de 26 faces.

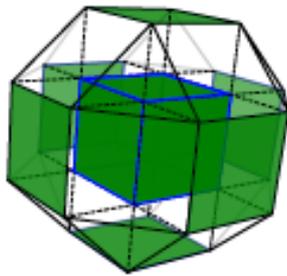
Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 18F_4 + 8F_3 = (18 \times 4) + (8 \times 3) = 96, \text{ isso implica que } A = 48.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 48 - 26 + 2 = 24.$$

Expansão das faces do cubo



Rombicuboctaedro

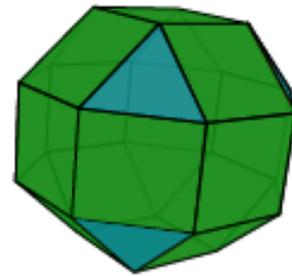


Figura 37: Construção do Rombicuboctaedro a partir da expansão das faces do Cubo
Fonte: José Ribamar

11. Rombicosidodecaedro

Obtemos o **Rombicosidodecaedro** fazendo a **expansão** do Dodecaedro regular ou do Icosaedro regular, iremos apresentar essa expansão para no Dodecaedro Regular, qual possui 12 faces pentagonais regulares, 30 arestas, 20 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após a expansão das faces do Dodecaedro regular, as 30 arestas formarão mais 30 quadrados e os 20 vértices formarão mais 20 triângulos equiláteros. Assim teremos então 12 faces pentagonais regulares, mais 30 faces quadradas e mais 20 triângulos equiláteros. Observe a Figura 38

Com isso o **Rombicosidodecaedro** tem um total de 62 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 20F_3 + 30F_4 + 12F_5 = (20 \times 3) + (30 \times 4) + (12 \times 5) = 240, \text{ isso implica que } A = 120.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 120 - 62 + 2 = 60.$$

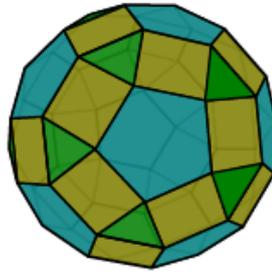


Figura 38: Rombicosidodecaedro
 Fonte: José Ribamar

12. *Cubo Snub*

Obtemos o **Cubo Snub** fazendo a **snubificação** do Cubo ou do Octaedro regular, iremos apresentar essa expansão para no Cubo, qual possui 6 faces quadradas, 12 arestas, 8 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após a snubificação das faces do Cubo, teremos 24 triângulos equiláteros que irão preencher os espaços vazios entre as arestas afastadas do cubo e ainda teremos mais 8 triângulos equiláteros a partir de cada vértice, além dos 4 quadrados existentes. Observe a Figura 39.

Com isso o **Cubo Snub** tem um total de 38 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 32F_3 + 6F_4 = (32 \times 3) + (6 \times 4) = 120, \text{ isso implica que } A = 60.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 60 - 38 + 2 = 24.$$

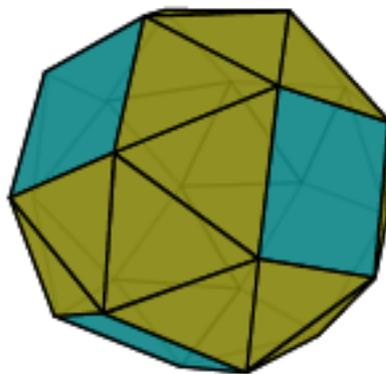


Figura 39: Cubo Snub
 Fonte: José Ribamar

13. *Dodecaedro Snub (ou Icosidodecaedro Snub)*

Obtemos o **Dodecaedro Snub** (ou **Icosidodecaedro Snub**) fazendo a **snubificação** do Dodecaedro regular ou do Icosaedro regular, iremos apresentar essa expansão para no Dodecaedro regular, na qual possui 12 faces pentagonais regulares, 30 arestas, 20 vértices, e de cada vértice parte 3 arestas, assim após a snubificação das faces do Dodecaedro regular, teremos 60 triângulos equiláteros que irão preencher os espaços vazios entre as arestas afastadas do Dodecaedro regular e ainda teremos mais 20 triângulos equiláteros a partir de cada vértice, além dos 12 pentágonos regulares existentes. Observe a Figura 40.

Com isso o **Cubo Snub** tem um total de 92 faces.

Daí, com o auxílio da Equação (4)

$$2A = 80F_3 + 12F_5 = (80 \times 3) + (12 \times 5) = 300, \text{ isso implica que } A = 150.$$

Pela Relação de Euler (1)

$$V = 150 - 92 + 2 = 60.$$

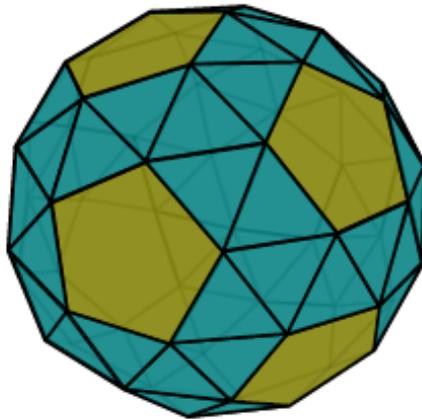


Figura 40: Dodecaedro Snub (ou Icosidodecaedro Snub)

Fonte: José Ribamar

Observação 2.1: Observando a Figura 41, note que fazendo o **Truncamento Tipo - 1** no Tetraedro regular, obtemos o Octaedro regular, e fazendo a **Snubificação** no Tetraedro regular, obtemos o Icosaedro regular e ainda fazendo a **Expansão** no Tetraedro regular obtemos o Cuboctaedro.

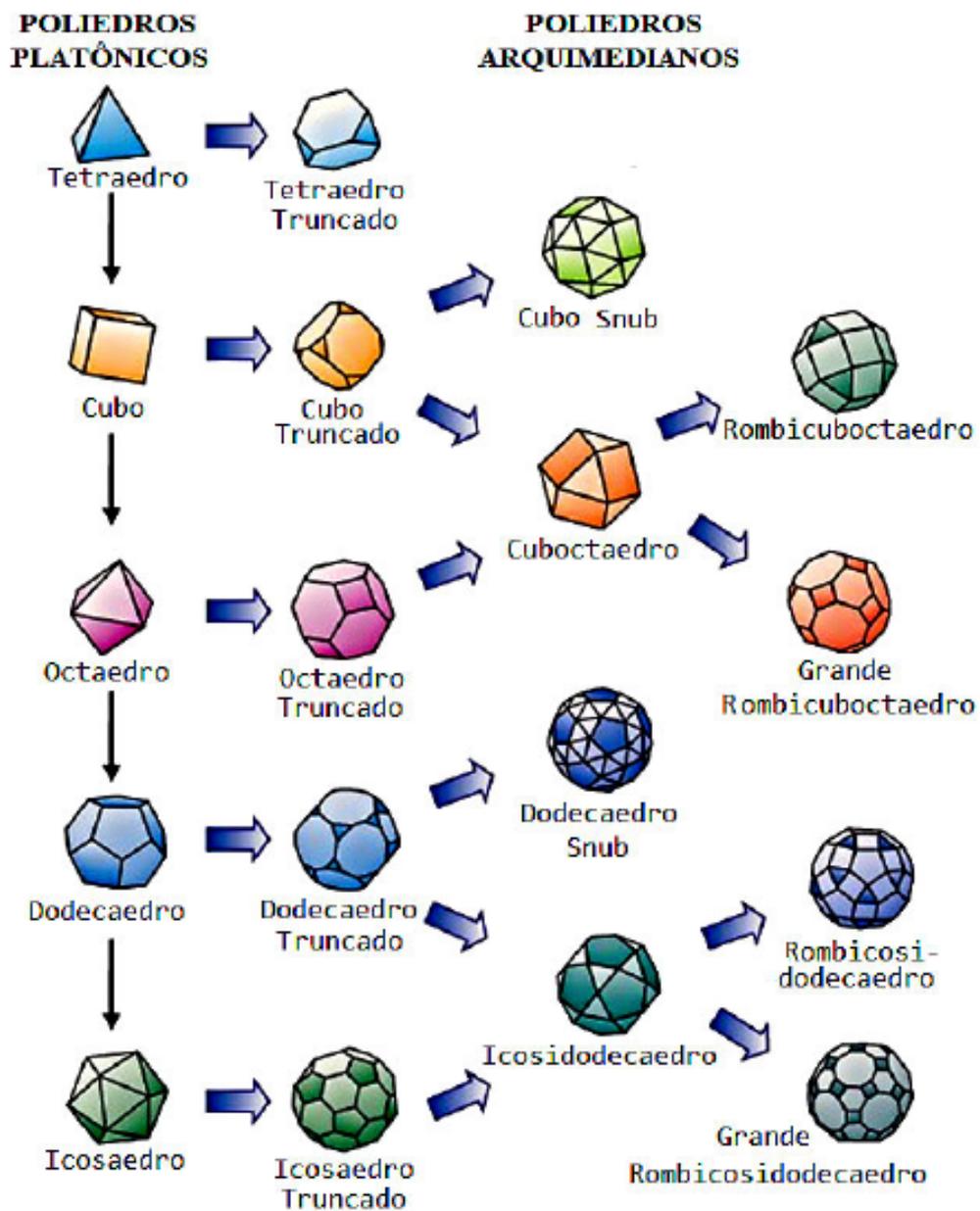


Figura 41: Resumo dos Sólidos Arquimedianos

A demonstração que faremos terá a mesma ideia usada por SOLER [16], embora tentaremos ser mais acessível para alunos do ensino médio.

Teorema 2.1: *Existem treze poliedros arquimedianos convexos*

Demonstração. Como dito anteriormente, os sólidos arquimedianos são poliedros convexos cuja faces são polígonos regulares de mais de um tipo, e todos os seus vértices são congruentes, ou seja, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice. E, além disso, todos os vértices possuem o mesmo número de arestas que concorrem num mesmo vértice, e chamaremos de m o número de faces do em torno de um vértice.

Se P é um poliedro arquimediano e suponha que em torno de cada vértice de P um polígono regular X qualquer, de n lados, apareça uma única vez. Então, cada vértice de P corresponde a um e somente um vértice de X , ou seja, $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n .

Como os sólidos são convexos, a soma dos ângulos em um vértice deve ser menor que 2π , e a soma dos ângulos internos de um polígono regular é $(n-2)\pi$, por consequência o ângulo interno (a_i) de um polígono regular é $\frac{(n-2)}{n}\pi$. Logo em um vértice $V(a_1, a_2, \dots, a_m)$ temos:

$$\sum_{i=1}^m \frac{(n_i - 2)}{n_i} \pi < 2\pi \Rightarrow \sum_{i=1}^m \left(-\frac{n_i}{n_i} + \frac{2}{n_i}\right) > -2 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{2}{n_i} > m - 2 \quad (8)$$

Veja que $3 \leq m \leq 5$, pois como cada polígono regular é pelo menos um triângulo, e se tivesse $m \geq 6$, a soma dos ângulos em torno de um vértice seria maior ou igual a 360° .

2.2.2 Poliedros arquimedianos com $m = 3$

Nesta seção vamos considerar o caso em que três faces se encontram em cada vértice. Veremos que neste caso teremos apenas três sólidos que são platônicos, infinitos prismas e anti-prismas e sete sólidos arquimedianos. Denotaremos a configuração deste caso pela terna (a, b, c) , onde a é a quantidade de arestas da primeira face, b da segunda face e c da terceira face, podendo essas faces serem do mesmo tipo ou não. Substituindo em (8), temos:

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} > 1 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \quad (9)$$

Analisemos os possíveis valores que (a, b, c) podem assumir

- i Se $a = b = c$, então teremos $\frac{3}{a} > \frac{1}{2} \Rightarrow a < 6$, ou seja os possíveis valores de a são 3, 4 ou 5 e isso corresponde aos seguintes três sólidos platônicos:

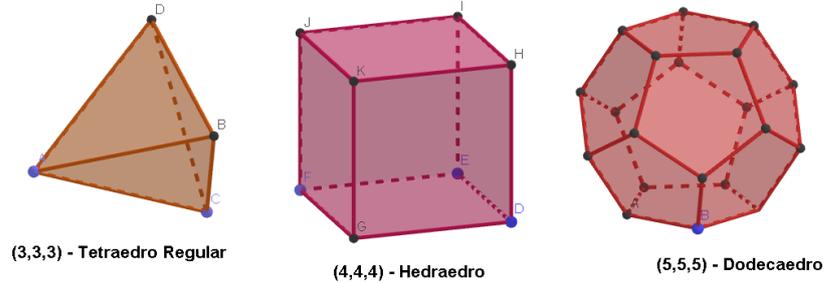


Figura 42: Sólidos platônicos

- ii Se $a = b \neq c$, observando a demonstração feita por NEVES [11] precisamos atentarmos com algumas restrições. NEVES [11], considera um polígono a de n lados, sendo n um número ímpar.

Como a configuração desse poliedro (a, a, c) , é preciso que cada lado do polígono a (polígono central), tenhamos, alternadamente, um polígono a e um outro polígono c . Lembrando que, as configurações (a, a, c) , (a, c, a) e (c, a, a) são iguais, por permutação circular.

Se o lado (1) receber o polígono a então todos os lados ímpares receberão o polígono a e todos os lados pares o polígono c . Como n é ímpar, o vértice V (vértice formado pelos lados 1 e n) será da forma (a, a, a) , contrariando a definição e poliedro arquimediano. O raciocínio seria o mesmo se o lado (1) iniciasse com o polígono c . Neste caso o vértice formado pelo lado (1) e pelo lado (n) será da forma (a, c, c) . Para melhor esclarecimento observe a Figura 43. Assim esta restrição associada a desigualdade (9), nos limita as possibilidades para (a, b, c) , onde $a = b$ são polígonos com o número de lados n par.

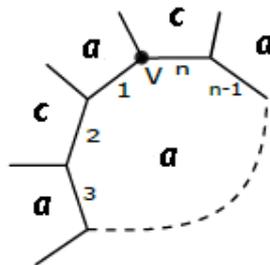


Figura 43: Arranjo com polígonos (a, b, c)

Observação 2.2:

A. Um **prisma regular** é um poliedro que possui duas faces paralelas e congruentes, podendo ser qualquer polígono regular, consideradas bases e cujas faces laterais são quadrados.

B. Um **anti-prisma regular** é um poliedro com duas faces paralelas e congruentes, suas bases, e cujas faces laterais são triângulos equiláteros.

Pela definição de sólidos arquimedianos tanto um prisma regular como o anti-prisma regular são sólidos arquimedianos com construção $(4, 4, c)$ ou $(3, 3, c')$, com c e c' polígonos regulares quaisquer.

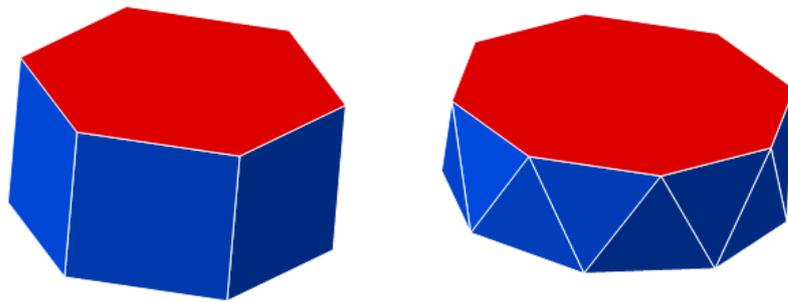


Figura 44: $(4,4,6)$ - Prisma Hexagonal Regular e $(3,3,8)$ - Anti-Prisma Octagonal Regular

- Se aplicarmos o valor de $a = b = 6$, temos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow c < 6, \text{ logo } c = 3, c = 4 \text{ ou } c = 5.$$

Temos assim as seguintes configurações $(6, 6, 3)$, $(6, 6, 4)$ e $(6, 6, 5)$.

Vamos agora calcular o número de faces (F), de vértice (V) e arestas (A) destes arranjos.

- Caso $(6, 6, 3)$

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces hexagonais. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 3x$.

Sendo $m = 3$ então, $A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}$.

Por outro lado, temos que $A = \frac{3x + 6y}{2}$.

Assim $\frac{3x + 6y}{2} = \frac{9x}{2}$ se, e somente se $x = y$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \text{ isto implica que } x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2.$$

Como $x = y$, temos

$$x + x + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \text{ que é equivalente a } x = 4 = y.$$

Logo: $A = 18, F = 8$ e $V = 12$.

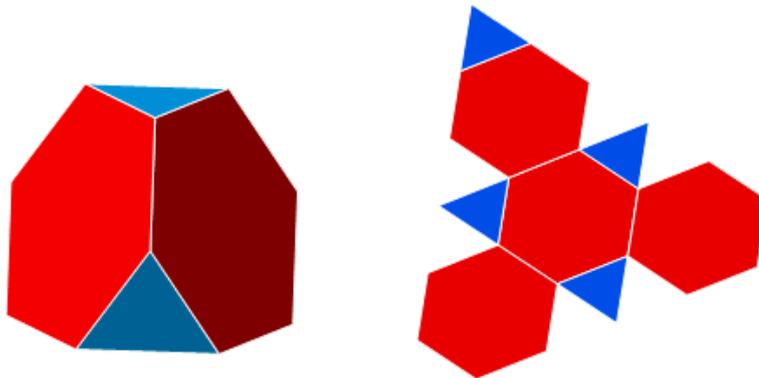


Figura 45: (6,6,3) - Tetraedro Truncado

- Caso (6, 6, 4)

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces quadradas e y faces hexagonais. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 4x$.

Sendo $m = 3$ então, $A = \frac{3V}{2} = \frac{12x}{2} = 6x$.

Por outro lado, temos que $A = \frac{4x + 6y}{2} = 2x + 3y$.

Assim $2x + 3y = 6x$ se, e somente se $4x = 3y$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \text{ isto implica que } x + y + 4x = 6x + 2$$

Como $4x = 3y$, temos

$$x + \frac{4x}{3} + 4x = 6x + 2 \text{ que é equivalente a } x = 6 \text{ e } y = 8.$$

Logo: $A = 36, F = 14$ e $V = 24$.

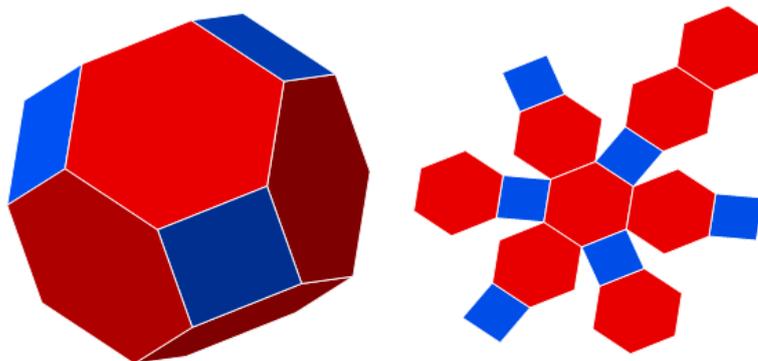


Figura 46: (6,6,4) - Octaedro Truncado

- Caso (6, 6, 5).

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces pentagonais e y faces hexagonais. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 5x$.

$$\text{Sendo } m = 3 \text{ então, } A = \frac{3V}{2} = \frac{15x}{2}.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{5x + 6y}{2}.$$

$$\text{Assim } \frac{5x + 6y}{2} = \frac{15x}{2} \text{ se, e somente se } 5x = 3y.$$

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \text{ isto implica que } x + y + 5x = \frac{15x}{2} + 2$$

Como $5x = 3y$, temos

$$x + \frac{5x}{3} + 4x = \frac{15x}{2} + 2 \text{ que é equivalente a } x = 12 \text{ e } y = 20.$$

Logo: $A = 90, F = 32$ e $V = 60$.

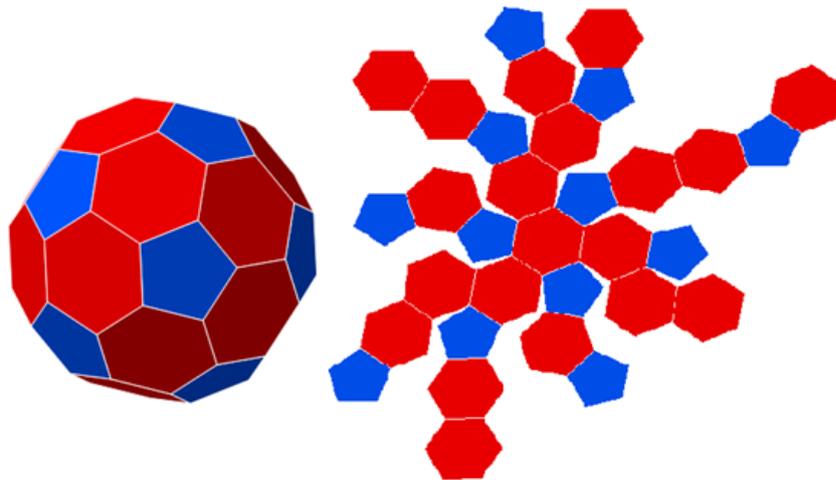


Figura 47: (6,6,5) - Icosaedro Truncado

- Se aplicarmos o valor de $a = b = 8$, temos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow c < 4, \text{ logo } c = 3.$$

Temos assim as seguintes configurações (8, 8, 3).

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces octogonais. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 3x$.

Sendo $m = 3$ então, $A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}$.

Por outro lado, temos que $A = \frac{3x + 8y}{2}$.

Assim $\frac{3x + 8y}{2} = \frac{9x}{2}$ se, e somente se $3x = 4y$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \text{ isto implica que } x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2$$

Como $3x = 4y$, temos

$$x + \frac{3x}{4} + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \text{ que é equivalente a } x = 8 \text{ e } y = 6.$$

Logo: $A = 36$, $F = 14$ e $V = 24$.

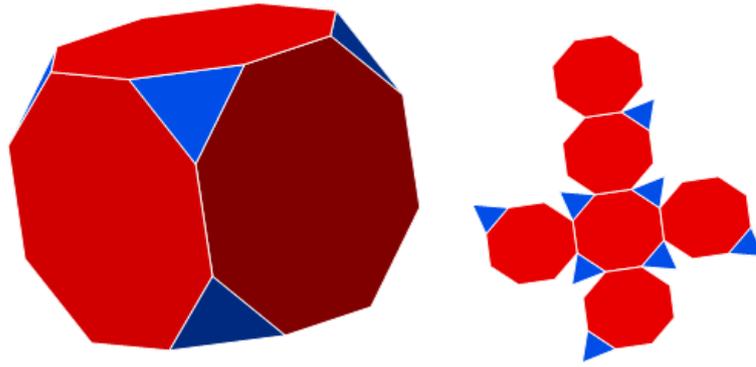


Figura 48: (8,8,3) - Cubo Truncado

- Se aplicarmos o valor de $a = b = 10$, temos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow c < \frac{10}{3}, \text{ logo } c = 3.$$

Temos assim as seguintes configurações (10, 10, 3).

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces octogonais. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 3x$.

Sendo $m = 3$ então, $A = \frac{3V}{2} = \frac{9x}{2}$.

Por outro lado, temos que $A = \frac{3x + 10y}{2}$.

Assim $\frac{3x + 10y}{2} = \frac{9x}{2}$ se, e somente se $3x = 5y$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + 3x = \frac{9x}{2} + 2$$

Como $3x = 5y$, temos

$$x + \frac{3x}{5} + 3x = \frac{9x}{2} + 2 \text{ isto implica que } x = 20 \text{ e } y = 12.$$

Logo: $A = 90$, $F = 32$ e $V = 60$.

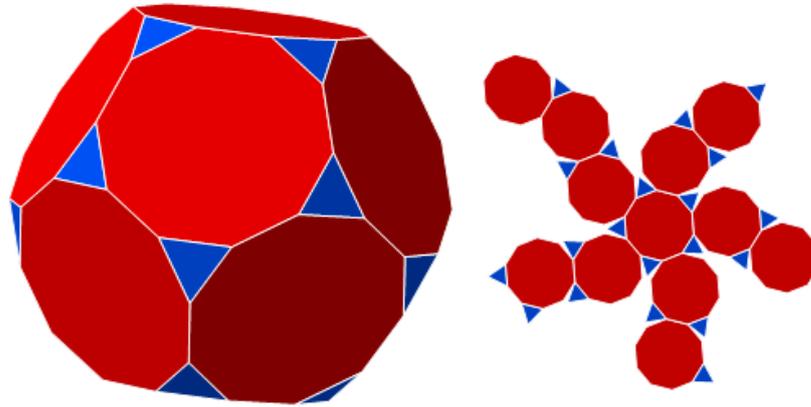


Figura 49: (10,10,3) - Dodecadero Truncado

- Se aplicarmos o valor de $a = b = 12$, temos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2} \Rightarrow c < 3, \text{ o que é impossível.}$$

iii. Se $a \neq b \neq c$, devemos observar o arranjo de modo que $S_V < 360^\circ$. Então o número de lados de a, b, c é par. Com isso podemos ter as seguintes configurações (4, 6, 8) e (4, 6, 10).

No caso (4, 6, 8), a $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 135^\circ = 345^\circ < 360^\circ$.

Suponhamos que o poliedro é formado por x quadrados, y hexágonos e z octógonos. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 4x = 6y = 8z$.

$$\text{Então } A = \frac{3V}{2} = \frac{12x}{2} = 6x, \frac{18y}{2} = 9y, \frac{24z}{2} = 12z.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{4x + 6y + 8z}{2} = 6x$$

$$\text{Assim } 2x + 3y + 4z = 6x$$

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + z + 4x = 6x + 2$$

Como $2x = 3y$ e $x = 2z$, temos

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x = 12, y = 8 \text{ e } z = 6.$$

Logo: $A = 72, F = 26$ e $V = 48$.

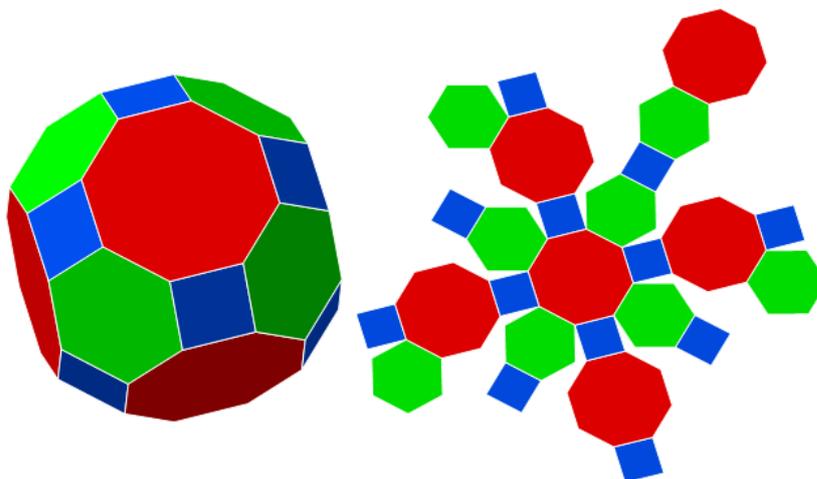


Figura 50: (4,6,8) - Cuboctaedro Truncado

No caso (4, 6, 10), a $S_V = 90^\circ + 120^\circ + 144^\circ = 354^\circ < 360^\circ$.

Suponhamos que o poliedro é formado por x quadrados, y hexágonos e z decágonos. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 4x = 6y = 10z$.

$$\text{Então } A = \frac{3V}{2} = \frac{12x}{2} = 6x, \frac{18y}{2} = 9y, \frac{30z}{2} = 15z.$$

$$\text{Por outro lado, temos que } A = \frac{4x + 6y + 10z}{2} = 6x$$

$$\text{Assim } 2x + 3y + 5z = 6x$$

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + z + 4x = 6x + 2$$

Como $2x = 3y$ e $2x = 5z$, temos

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{5} + 4x = 6x + 2 \Leftrightarrow x = 30, y = 20 \text{ e } z = 12.$$

Logo: $A = 180$, $F = 62$ e $V = 120$.

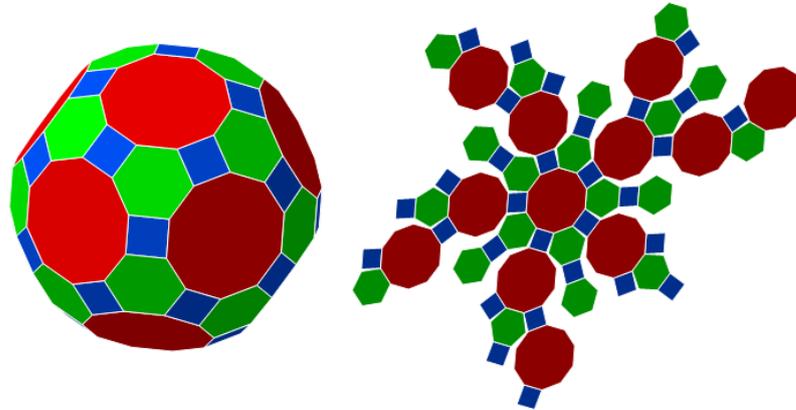


Figura 51: $(4,6,10)$ - Icosadodecaedro Truncado

Agora para facilitar a compreensão das informações anteriores vista nesta subseção, observe a tabela a seguir:

Tabela 2: Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c)

n^o	Arranjo dos vértices	Polígono Arquimediano	A	F	V
1	(6,6,3)	Tetraedro Truncado	18	8	12
2	(6,6,4)	Octaedro Truncado	36	14	24
3	(6,6,5)	Icosaedro Truncado	90	32	60
4	(8,8,3)	Cubo Truncado	36	14	24
5	(10,10,3)	Dodecaedro Truncado	90	32	60
6	(4,6,8)	Cuboctaedro Truncado	72	26	48
7	(4,6,10)	Icosadodecaedro Truncado	180	62	120

2.2.3 Poliedros arquimedianos com $m = 4$

Neste caso, cada vértice tem 4 faces, chamaremos de (a, b, c, d) , iguais ou não. Substituindo na desigualdade (8), temos:

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{2}{d} > 2 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > 1 \quad (10)$$

Analisemos os possíveis valores que (a, b, c, d) podem assumir, levando em conta que $S_v < 360^\circ$.

i. Se $a = b = c = d$ teremos o arranjo $(3, 3, 3, 3)$ que corresponderá a um sólido platônico.

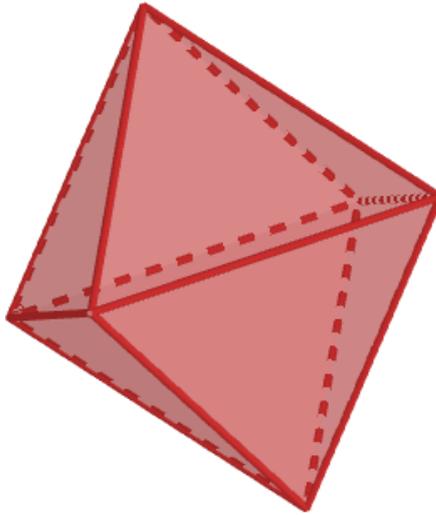


Figura 52: (3,3,3,3) - Octaedro Regular

ii. Se $a = b = c = 3$ teremos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} + \frac{1}{3} > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{3}{3} > 1, \text{ logo } c \text{ pode assumir qualquer valor.}$$

O arranjo do tipo $(3, 3, 3, n)$ é chamado de n -anti-prisma, com $c > 3$.

iii. Se fixarmos $a = 3$ e $b = d = 4$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{c} + \frac{1}{4} > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{6} > 1 \Rightarrow c < 6$$

• Caso (3, 4, 4, 4)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{d} > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{3}{4} > 1 \Rightarrow c < 4.$$

Contudo devemos notar que $S_V < 360^\circ$.

$$\text{Daí, } 3 \cdot 90^\circ + a_4 < 360^\circ \Rightarrow a_4 < 90^\circ.$$

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces quadradas. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 3x$.

$$\text{Sendo } m = 4 \text{ então, } A = \frac{4V}{2} = \frac{12x}{2} = 6x.$$

Por outro lado, temos que $A = \frac{3x + 4y}{2}$.

Assim $\frac{3x + 4y}{2} = 6x \Leftrightarrow 9x = 4y$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + 3x = 6x + 2.$$

Como $9x = 4y$, temos

$$x + \frac{9x}{4} + 3x = 6x + 2 \Leftrightarrow x = 8 \text{ e } y = 18.$$

Logo: $A = 48$, $F = 26$ e $V = 24$.

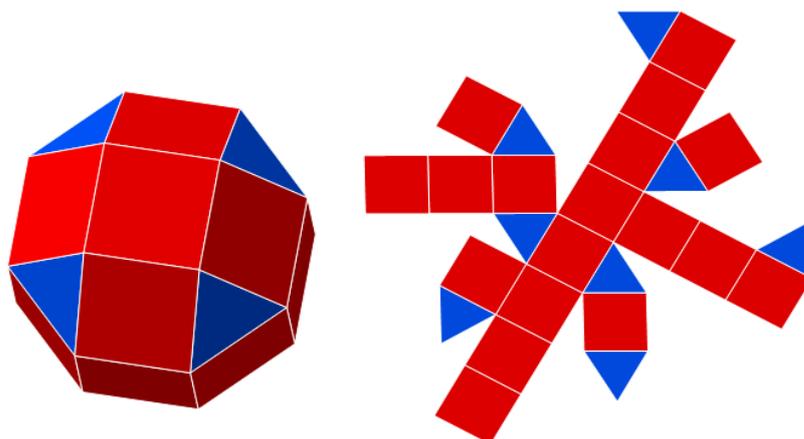


Figura 53: (3,4,4,4) - Rombicuboctaedro

- Caso (3, 4, 3, 4)

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces quadradas, se encontrando duas vezes. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = \frac{3x}{2} = \frac{4y}{2} \Rightarrow 3x = 4y$.

Sendo $m = 4$ então, $A = \frac{4V}{2} = 2V = 3x = 4y$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + \frac{3x}{2} = 3x + 2.$$

Como $3x = 4y$, temos

$$x + \frac{3x}{4} + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Leftrightarrow x = 8 \text{ e } y = 6.$$

Logo: $A = 24$, $F = 14$ e $V = 12$.

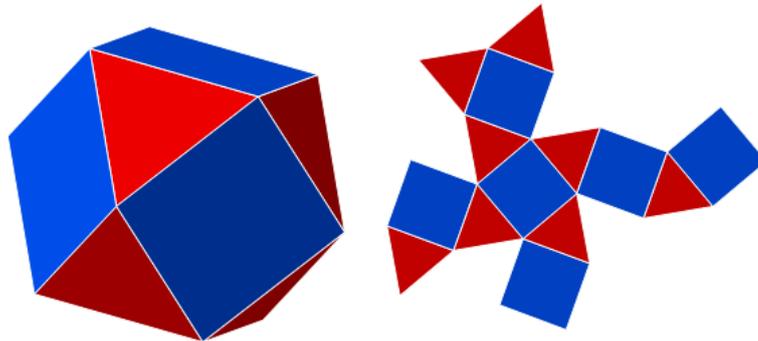


Figura 54: (3,4,3,4) - Cuboctaedro

- Caso (3, 5, 3, 5)

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces pentagonais, se encontrando duas vezes. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = \frac{3x}{2} = \frac{4y}{2} \Rightarrow 3x = 5y$.

Sendo $m = 4$ então, $A = \frac{4V}{2} = 2V = 3x = 4y$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + \frac{3x}{2} = 3x + 2.$$

Como $3x = 5y$, temos

$$x + \frac{3x}{5} + \frac{3x}{2} = 3x + 2 \Leftrightarrow x = 20 \text{ e } y = 12.$$

Logo: $A = 60$, $F = 32$ e $V = 30$.

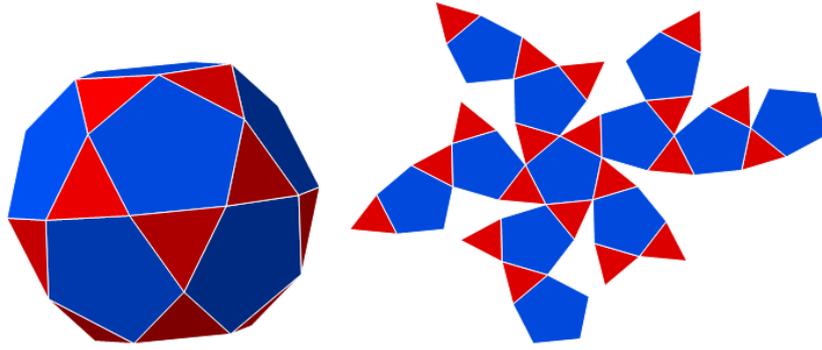


Figura 55: (3,5,3,5) - Icosidodecaedro

- Caso (3, 4, 5, 4)

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces quadradas e z faces pentagonais. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 3x = \frac{4y}{2} = 2y = 5z$.

Sendo $m = 4$ então, $A = \frac{4V}{2} = 2V = 3x = 2y = 5z$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + z + 3x = 6x + 2$$

Como $y = \frac{3x}{2}$ e $z = \frac{3x}{5}$, temos

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{5} = 3x + 2 \Leftrightarrow x = 20, y = 30 \text{ e } z = 12.$$

Logo: $A = 120, F = 62$ e $V = 60$.

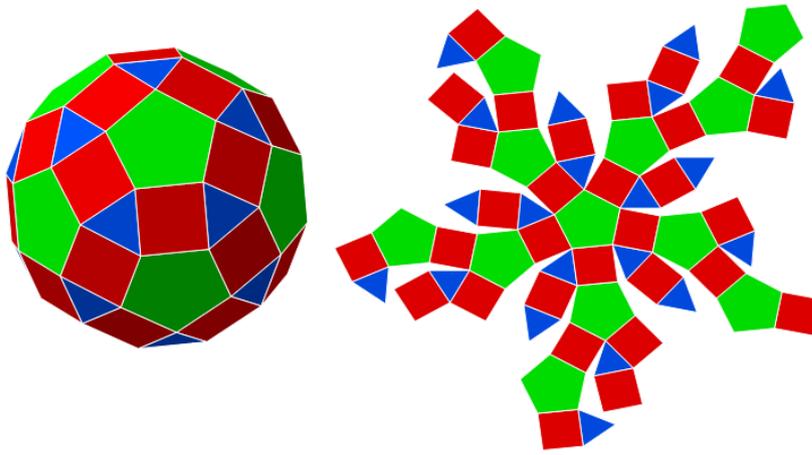


Figura 56: (3,4,5,4) - Rombicosidodecaedro

Tabela 3: Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c, d)

n^o	Arranjo dos vértices	Polígono Arquimediano	A	F	V
8	(3,4,4,4)	Rombicuboctaedro	48	26	24
9	(3,4,3,4)	Cuboctaedro	24	14	12
10	(3,5,3,5)	Icosidodecaedro	60	32	30
11	(3,4,5,4)	Rombicosidodecaedro	120	62	60

2.2.4 Poliedros arquimedianos com $m = 5$

Neste caso, cada vértice tem 5 faces, chamaremos de (a, b, c, d, e) , iguais ou não. Substituindo na desigualdade (8), temos:

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{2}{d} + \frac{2}{e} > 3 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \right) > 3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} > \frac{3}{2} \quad (11)$$

Analisemos os possíveis valores que (a, b, c, d, e) podem assumir, levando em conta que $S_v < 360^\circ$.

i. Se $a = b = c = d = e$ teremos o arranjo $(3, 3, 3, 3, 3)$ que corresponderá a um sólido platônico.

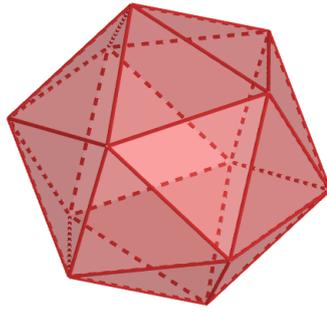


Figura 57: (3,3,3,3,3) - Icosaedro Regular

ii. Se $a = b = c = d = 3$, analisaremos os possíveis valores de e .

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{e} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{e} + \frac{4}{3} > \frac{3}{2} \Rightarrow e < 6 \text{ podendo assumir os seguintes valores } e = 4 \text{ ou } e = 5.$$

Logo podemos obter os seguintes arranjos.

- Caso (3, 3, 3, 3, 4)

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces quadradas. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 4y$.

$$\text{Sendo } m = 5 \text{ então, } A = \frac{5V}{2} = \frac{20y}{2} = 10y.$$

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + 4y = 10y + 2 \Leftrightarrow x = 5y + 2.$$

$$\text{Como } A = \frac{3x + 4y}{2} = 10y \Leftrightarrow 3x = 16y, \text{ com isso temos } x = 32 \text{ e } y = 6.$$

Logo: $A = 60, F = 38$ e $V = 24$.

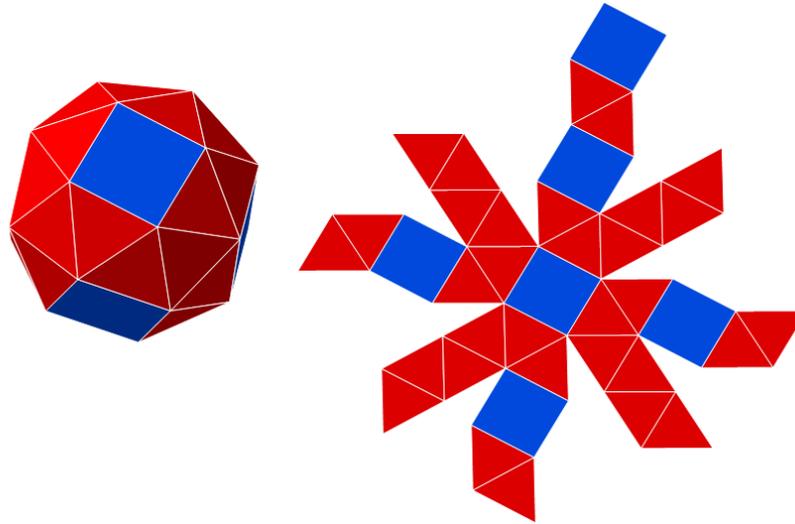


Figura 58: (3,3,3,3,4) - Cubo Snub

- Caso (3, 3, 3, 3, 5)

Suponhamos que o poliedro seja formado por x faces triangulares e y faces pentagonais. Vimos anteriormente que $V = nF_n$, sendo F_n o número de faces do tipo n , logo $V = 5y$.

Sendo $m = 5$ então, $A = \frac{5V}{2} = \frac{25y}{2}$.

Pelo Teorema de Euler

$$F + V - A = 2 \Rightarrow x + y + 5y = \frac{25y}{2} + 2 \Leftrightarrow 2x = 13y + 4.$$

Como $A = \frac{3x + 5y}{2} = \frac{25y}{2} \Leftrightarrow 3x = 20y$, com isso temos $x = 80$ e $y = 12$.

Logo: $A = 150$, $F = 92$ e $V = 60$.

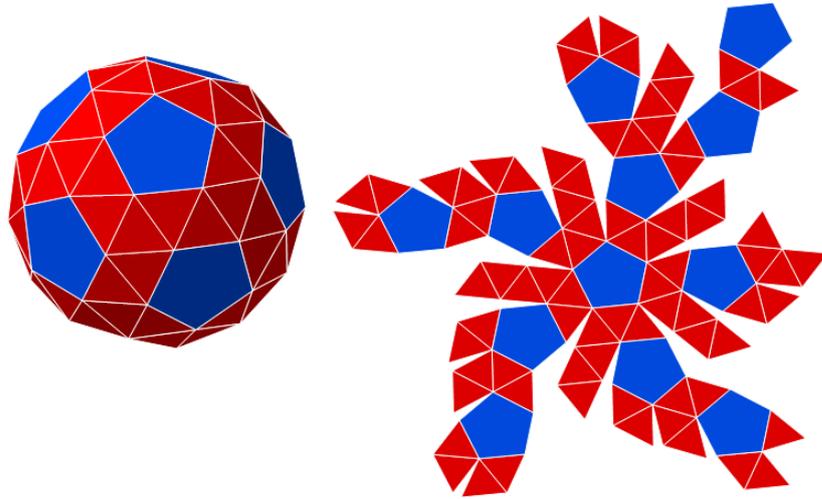


Figura 59: $(3,3,3,3,5)$ - Dodecaedro Snub

Se mais de uma delas é diferente de 3, não satisfará a desigualdade.

Tabela 4: Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c, d, e)

nº	Arranjo dos vértices	Polígono Arquimediano	A	F	V
12	$(3,3,3,3,4)$	Cubo Snub	60	38	24
13	$(3,3,3,3,5)$	Dodecaedro Snub	150	92	60

Com base nos cálculos anteriores, mostramos que existem 13 poliedros arquimedianos.

□

3 Explorando classes de sólidos com o Software Poly: Um tutorial

Neste capítulo apresentaremos um tutorial sobre o Software Poly e através dele, os alunos e professores poderão explorar algumas classes de sólidos e suas planificações, pois há uma grande procura de materiais digitais para facilitar a compreensão e o interesse, por parte dos alunos. Acreditamos que isso possa despertar o gosto à geometria e indo de encontro com o objetivo.

Poly é um programa *shareware*⁵, para explorar e construir poliedros. A empresa Pedagoguery Software, disponibiliza em www.peda.com/poly/ uma versão avaliativa completa do software.

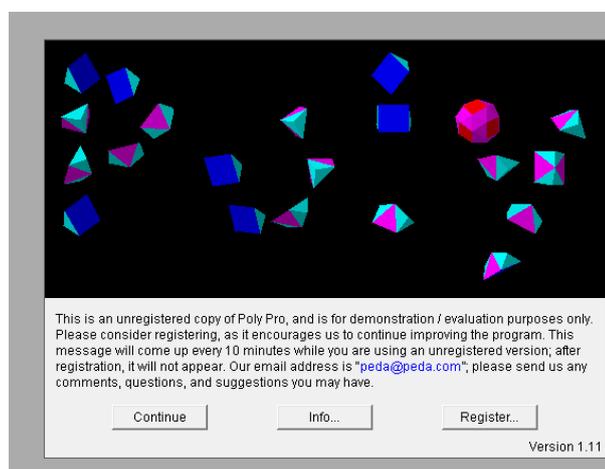


Figura 60: Poly

Clique em *Continue* para entrar no programa. Note que abrirão duas janelas.

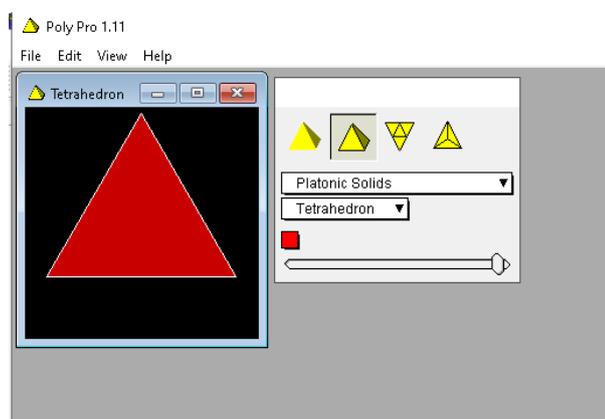


Figura 61: Janela inicial do Poly

⁵ *shareware* é um programa de computador disponibilizado gratuitamente, porém com algum tipo de limitação.

Observe a Figura 61, temos a primeira janela (lado esquerdo), o sólido é exibido, esta pode ser maximizada, na segunda janela (lado direito) temos em amarelo os comandos que podem ser alterados seguindo os seguintes passos: *File, Preferences, Available View Modes*. Sendo de simples acesso, um dos importantes recursos do Software Poly são os modos de visualização.

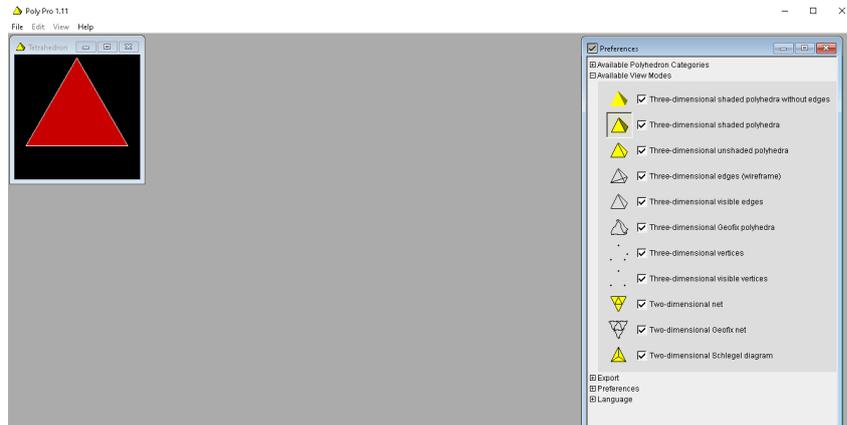


Figura 62: *Preferences*

No comando *File, Print Preview* nos permite uma visualização bidimensional, e ainda nos informa o nome do sólido.

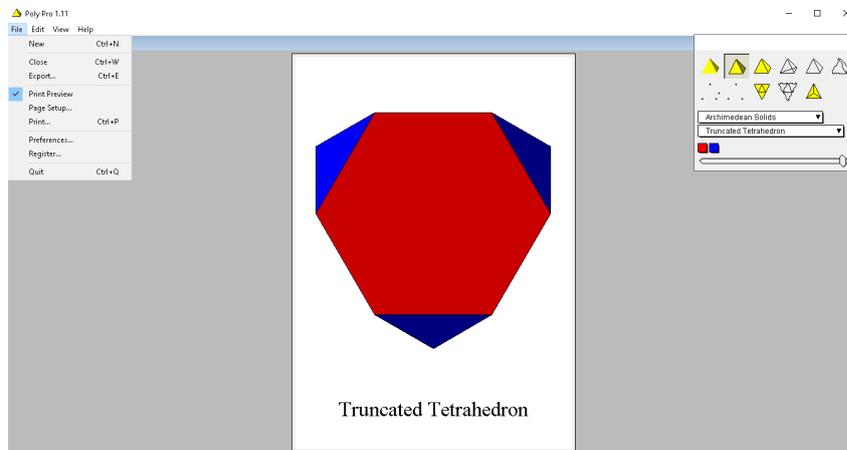


Figura 63: Modo de exibição *Print Preview*

Logo abaixo temos dois retângulos, nos primeiro nos permite selecionar as categorias de poliedros que são: *Platonic Solids* (Sólidos Platônicos), *Archimedean Solids* (Sólidos Arquimedianos), *Prisms and Anti-Prisms* (Prismas e Anti-primas), *Johnson Solids* (Sólidos de Johnson), *Deltahedra* (deltaedros), *Catalan Solids* (Sólidos de Catalan), *Dipyramids and Deltahedra* (Dipiramides e Destoedros) e *Geodesic Spheres and Domes* (Esferas e Domos geodésicos).

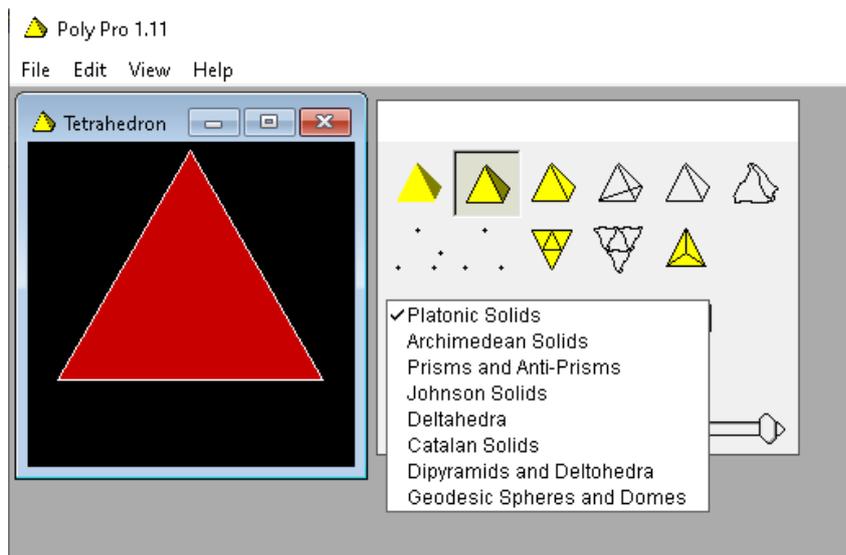


Figura 64: Classificação dos Sólidos

Já no segundo retângulo informa os tipos de sólidos em cada categoria. Por exemplo a categoria Sólidos Platônicos, teremos os cinco tipos:

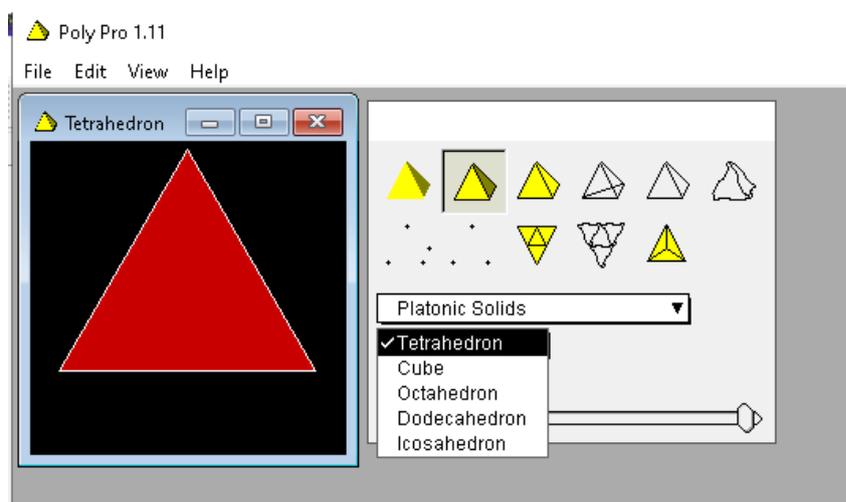


Figura 65: Exemplo de sólidos da categoria Platônicos

Em seguida teremos um ou mais quadrados que nos permite escolher a(s) cor(es) do sólido e por último um comando que permite *abrir* (planificar) ou *fechar* (forma tridimensional) o poliedro selecionado. Com uma leve pressão sobre o cursor (a bolinha), o movimento de abrir e fechar será feito automaticamente.

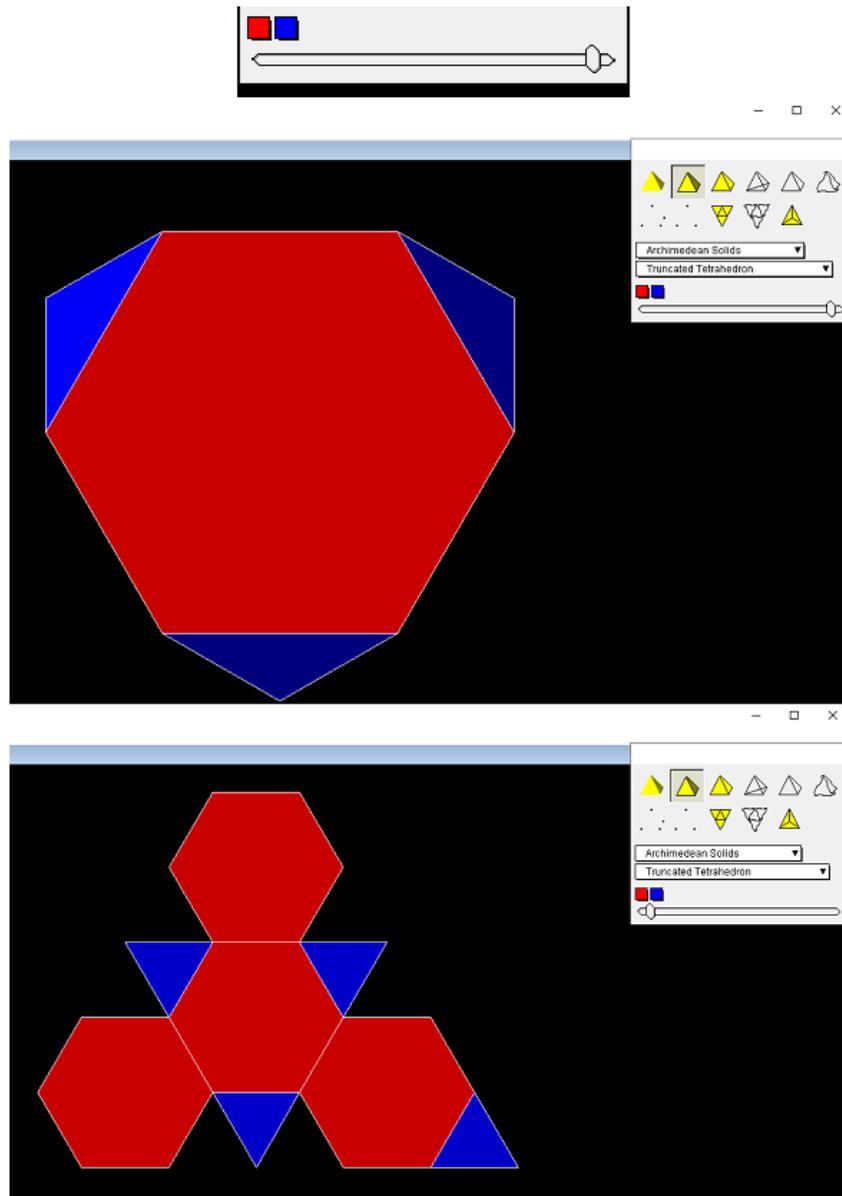


Figura 66: Botão que permite abrir e fechar um sólido

Também é possível, utilizar o comando *File, Preferences, Language*, selecionando-o, nos apresentará o idioma preferido para se trabalhar com o Poly.

Podemos notar que com o uso do software, o conceito de poliedro foi facilmente explorado. Claro que temos outros tipos de softwares que nos auxiliarão no aprendizado, como é o caso do GeoGebra, do Sagemath, embora estes em questão há necessidade que o aluno tenha conhecimento de algumas equações.

4 Projeto: Aplicações em sala de aula

Neste capítulo mostraremos duas oficinas, realizada com alguns alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola. A primeira oficina foi realizada em Fevereiro de 2020 de forma presencial. E posteriormente na segunda oficina trabalhamos com o software Poly de forma remota, para que possa auxiliar na construção de representações geométricas e na exploração dos conceitos, que ajudaram a ter uma melhor visão dos sólidos trabalhados.

A primeira oficina teve duração de três horas, divididas em duas partes, a primeira parte de forma breve, mostramos as características de um poliedro, a Relação de Euler para poliedros convexos e apresentamos os cinco poliedros regulares, os Sólidos Platônicos: Tetraedro, Hexaedro (Cubo), Octaedro, Dodecaedro e o Icosaedro.

Apresentamos também os treze Sólidos Arquimedianos, sua estrutura, planificação e relacionando-os com as estruturas utilizadas no dia-a-dia, assim respondendo à pergunta que tipo de sólido é a bola de futebol.

Em seguida dividimos os alunos em dois grupos para confeccionarem os Sólidos, um dos grupos utilizou de moldes em papel para a construção, enquanto outro grupo pode trabalhar com palitos de churrasco, cola quente, barbante e tinta. Oferecendo a todos que escolhessem os tipos de sólidos que quisessem confeccionar.

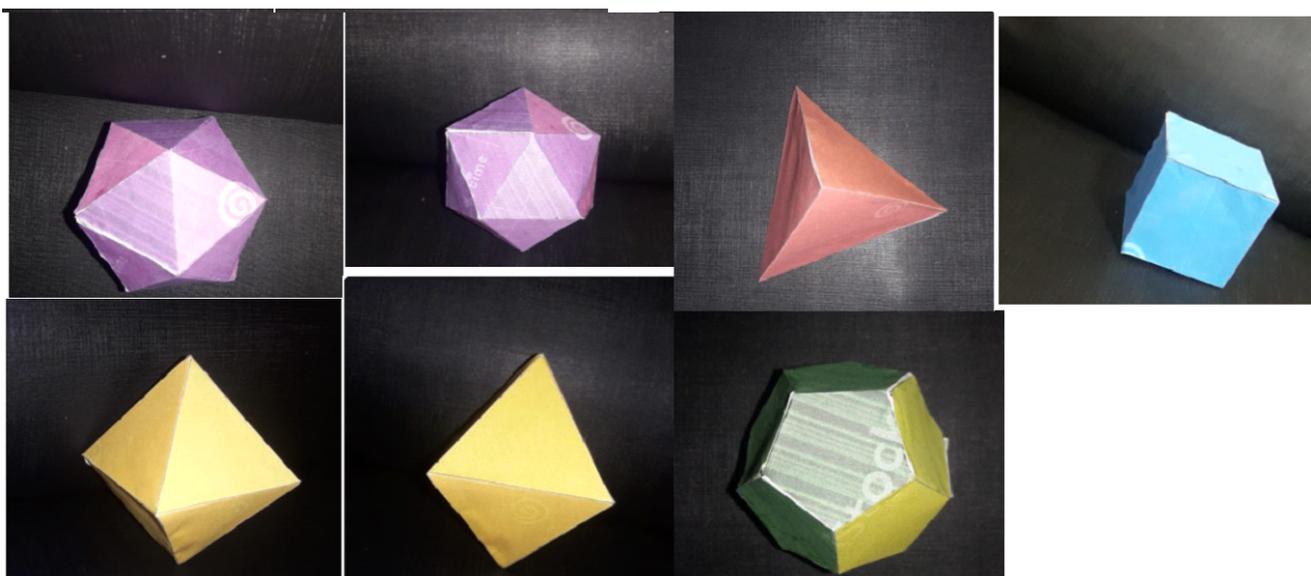


Figura 67: Fotos dos Sólidos Platônicos na oficina

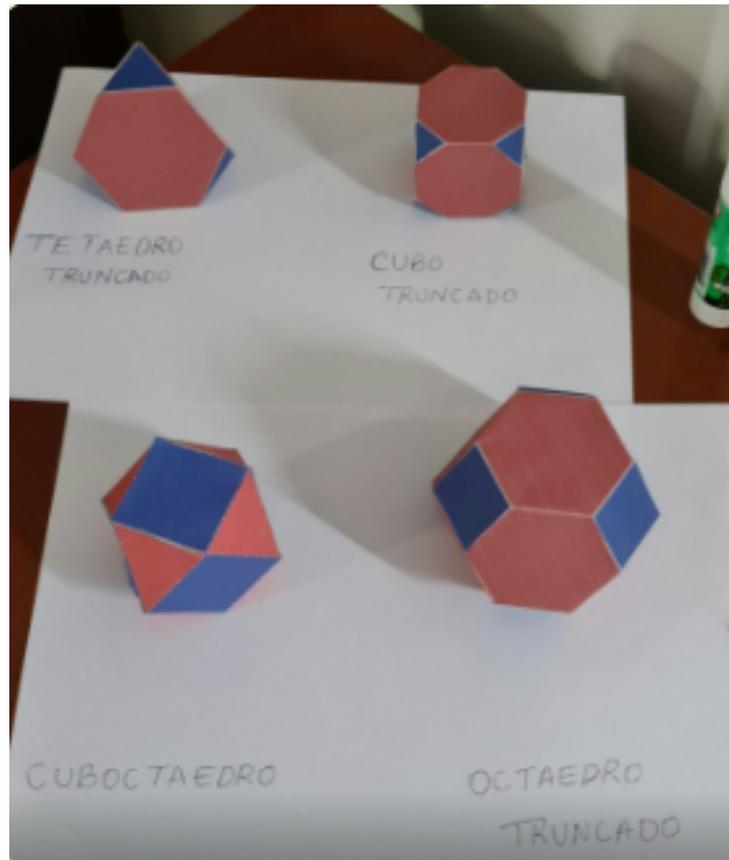


Figura 68: Fotos dos Sólidos Arquimedianos na oficina



Figura 69: Trabalhos de alguns alunos

Nossa segunda oficina ocorreu de forma remota, pois as aulas eram online, mas mesmo assim foi muito produtiva, pois exploramos o software Poly, e com o conhecimento prévio

da primeira oficina, os alunos conseguiram manipular os sólidos, planificá-los e voltar a posição inicial, sentiram como uma continuidade e fechamento do conteúdo. Ao final deixamos um questionário para avaliação, verificando que a proposta inicial foi atendida com sucesso.

4.1 Atividade de Fixação

Apresentamos a seguir um roteiro com atividades desenvolvidas na classe de Ensino Médio que participou da oficina:

1. Inicie o programa e maximize a janela à esquerda onde aparece o poliedro. Com o mouse posicione a seta sobre o poliedro e, clicando com o botão esquerdo acionado, movimente a figura. Ao fazer isso, podemos visualizar as várias faces do poliedro.

2. Explore livremente o software.

3. Selecione *Sólidos de Platão* (de acordo com as instruções anteriormente apresentadas no tutorial) e, para cada um dos poliedros, identifique as regiões poligonais que aparecem como faces:

a) Tetraedro:

b) Hexaedro:

c) Octaedro:

d) Dodecaedro:

e) Icosaedro:

4. Selecione *Sólidos de Arquimedes*, relacione os sólidos gerados através do cubo.

5. Complete a tabela abaixo com o número de vértices de cada sólido arquimediano, para verificar sua resposta utilize a Relação de Euler.

Tabela 5: Nome de alguns poliedros arquimedianos com arranjo (a, b, c)

n^o	Arranjo dos vértices	Polígono Arquimediano	A	F	V
1	(6,6,3)	Tetraedro Truncado	18	8	
2	(6,6,4)	Octaedro Truncado	36	14	
3	(6,6,5)	Icosaedro Truncado	90	32	
4	(8,8,3)	Cubo Truncado	36	14	
5	(10,10,3)	Dodecaedro Truncado	90	32	
6	(4,6,8)	Cuboctaedro Truncado	72	26	
7	(4,6,10)	Icosadodecaedro Truncado	180	62	

Conclusão

Após o término das oficinas de geometria espacial de acordo como projetamos, observamos que inicialmente encontramos algumas dificuldades, porém acreditamos que sempre que saímos da zona de conforto passamos por algum incômodo e que os problemas iniciais podem ser superados com um pouco de boa vontade e bom senso na hora de tratá-los.

Podemos destacar que o uso de software Poly com seus recursos de geometria dinâmica trazendo o conteúdo estruturado de forma organizada e muito bem ilustrado, contribui de forma direta na ampliação da visão espacial.

Outro ponto que ficou claro na avaliação é que a postura e o compromisso dos alunos para com as oficinas se mostraram mais adequados, pois eles tiveram uma participação mais efetiva e fizeram maior número de atividades e ainda apresentaram cada sólido construído de forma mais responsável e dinâmica, dessa forma, podemos afirmar que aulas com materiais manipuláveis influenciaram de forma direta na obtenção de melhores resultados, o que mostra sem sombra de dúvidas que este método de trabalho traz resultados positivos.

Assim, podemos concluir que os resultados do projeto foram positivos, e que essa é uma técnica viável, porém, requer um planejamento e flexibilidade dos horários em sala de aula, assim como a escolha de um software adequado, além de um pouco de disponibilidade para sanar as suas dúvidas ou até mesmo para mediar os conflitos que possam surgir nos grupos. Deixamos aqui a sugestão deste projeto para que os professores interessados em utilizar novas técnicas de ensino, na busca de tornar a aprendizagem de matemática mais prazerosa e significativa. Queremos também encorajá-los e adaptar algumas ideias e escolhidos os softwares adequados aos seus objetivos. Espero que este trabalho sirva como fonte de inspiração para o estudo da geometria.

Finalmente concluimos que o desenvolvimento dessa dissertação além de enriquecer nosso conhecimento de matemática, recordando conteúdos de cálculo diferencial e integral, aprendemos um pouco de geometria diferencial, a linguagem em LaTeX para textos matemáticos, fazer apresentações usando slides no Beamer, acreditamos que estamos mais qualificados para atuar como docentes do ensino médio.

Referências

- [1] ALMEIDA, Cristian Roberto Miccerino de. *Sólidos de Platão e seus duais: construção com material concreto e representações por GeoGebra* Campinas: Universidade Estadual de Campinas. 2015 <https://www.ime.unicamp.br/pos-graduacao/solidos-platao-seus-duais-construcao-com-material-concreto-representacoes-por-geogebra>. Acesso 25 de maio de 2020.
- [2] ALMEIDA, Talita Carvalho Silva de. *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no Renascimento* Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010. <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11454?mode=full>. Acesso em 26 de março de 2020.
- [3] ARAUJO, Leonardo Lima de. *O teorema de Gauss-Bonnet e sua aplicação no Ensino Médio*, Feira de Santana, 2014.
- [4] do CARMO, Manfredo P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à Geometria Espacial*, Rio de Janeiro 1993.
- [6] EVES, Howard. *Introdução à matemática*, Campinas: Editora da UNICAMP, São Paulo, 2004.
- [7] FAINGUELERNT, Estela. *Fazendo arte com a matemática*, Porto Alegre, Penso, 2015.
- [8] FANTI, Ermínia de Lourdes Campello; KODAMA, Helia Matiko Yona; NECCHI, Maria Aparecida. *Explorando Poliedros Convexos no Ensino Médio com o Software Poly*, 2007. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/explorando-poliedros-convexos—prof.-erminia-cida-e-helia.pdf>. Acesso em 26 de Setembro de 2020.
- [9] FERREIRA, Aurélio. *Mini Aurélio: O dicionário da língua portuguesa*, Editora Positivo, Curitiba, Paraná, 2010.
- [10] GEOGEBRA. Aplicativos Matemáticos. 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em 30 de Maio de 2020.
- [11] NEVES, José Ribamar. *Sólidos Arquimedianos*, Universidade Federal Rural do Pernambuco, Recife, 2017.

- [12] LIMA, Elon. *Matemática e Ensino*, SBM, Rio de Janeiro, 2003.
- [13] LIMA, Elon. *Meu professor de matemática e outras histórias*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro 2006.
- [14] LIMA, Joeline de Oliveira de. *Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio suportado por Ambientes Computacionais*, Porto Alegre, 2006. <https://docplayer.com.br/5128828-Aprendizagem-de-matematica-no-ensino-medio-suportado-por-ambientes-computacionais.html>. Acesso em 30 de outubro de 2020.
- [15] Software Poly. www.peda.com/poly. Acesso em 10 de outubro de 2020.
- [16] SOLER, Gregoria Guillén. *Poliedros*, Editora Madrid: Síntesis, pág. 111, 2007.
- [17] VELOSO, Eduardo. *História da Geometria - Os Poliedros*, Instituto de Inovação Educacional, 1998
- [18] WAGNER, Eduardo. *A Matemática do Ensino Médio- Volume 2*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.