

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANGELA CAROLINA TUNUBALÁ SÁNCHEZ

Equivalência entre o Método de
Melnikov e o Método de Averaging
para Campos de Vetores Suaves por
Partes Quase-Integráveis

Goiânia
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Angela Carolina Tunubalá Sánchez

3. Título do trabalho

Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging para Campos de Vetores Suaves por Partes Quase-Integráveis

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **ANGELA CAROLINA TUNUBALÁ SÁNCHEZ, Discente**, em 23/05/2022, às 16:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Durval José Tonon, Professor do Magistério Superior**, em 23/05/2022, às 17:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2927303** e o código CRC **130672DE**.

ANGELA CAROLINA TUNUBALÁ SÁNCHEZ

Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging para Campos de Vetores Suaves por Partes Quase-Integráveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Durval José Tonon

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Sánchez, Angela Carolina Tunubalá
Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging para Campos de Vetores Suaves por Partes Quase Integráveis [manuscrito] / Angela Carolina Tunubalá Sánchez. - 2022.

117 f.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2022.

Bibliografia.
Inclui gráfico.

1. Método de Averaging. 2. Método de Melnikov. 3. Soluções periódicas. 4. Ciclos limite. 5. Campos de vetores suaves por partes. I. Tonon, Durval José, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 01 da sessão de Defesa de Dissertação de **Angela Carolina Tunubalá Sánchez**, que confere o título de Mestra em Matemática, **na área de Sistemas Dinâmicos**.

Ao vigésimo terceiro dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das quatorze horas, através de Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging para Campos de Vetores Suaves por Partes Quase-Integráveis”**. Os trabalhos foram instalados pelo presidente da banca, Professor Doutor **Durval José Tonon - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Rony Cristiano - IME/UFG** membro titular interno e o Professor Doutor **Claudio Gomes Pessoa - DMAT/UNESP** membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Durval José Tonon - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo terceiro dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging para Campos de Vetores Suaves por Partes Quase-Integráveis

Documento assinado eletronicamente por **Durval José Tonon, Professor do Magistério Superior**, em 23/05/2022, às 15:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Claudio Gomes Pessoa, Usuário Externo**, em 23/05/2022, às 15:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rony Cristiano, Professor do Magistério Superior**, em 23/05/2022, às 15:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2860437** e o código CRC **ECA0A897**.

Referência: Processo nº 23070.021997/2022-27

SEI nº 2860437

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Angela Carolina Tunubalá Sánchez

Bacharela em Matemática pela Universidad del Cauca Colômbia-UNICAUCA.

À Deus e à minha família.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, minha ajuda e fortaleza o tempo todo. Obrigada Senhor, pelo seu amor [perfeito amor que me sustenta! Porque todos os dias posso ver sua mão guiando minha caminhada e tornando meus sonhos realidade. Obrigada pela rica oportunidade de estudar neste país, por me permitir conhecer pessoas maravilhosas durante este tempo e por fazer muito mais do que eu poderia imaginar. A Deus toda glória e honra, pois sem ele eu nada poderia fazer.

Aos meus pais Adelaida e Gerardo, também às minhas irmãs. Agradeço pelo amor incondicional, apoio e incentivo em cada momento da minha vida. Especialmente, agradeço a minha mãe por suas orações em meu favor e por acreditar em mim, mesmo quando eu não acreditava em mim. Sem vocês isso não seria possível, muito obrigada por estarem comigo a pesar da distância.

Agradeço também ao meu orientador, o Professor Dr. Durval José Tonon, por me aceitar como orientanda, por compartilhar seu conhecimento comigo o que me permitiu ampliar o meu. Pela paciência e pelo excelente trabalho de orientação que fez possível terminar a dissertação. Aos membros da banca, o Professor Dr. Rony Cristiano e o Professor Dr. Claudio Gomes Pessoa, pelas valiosas contribuições para o aprimoramento do trabalho.

Agradeço a minha amiga Sra. Alexandra Nogueira da Silva e seu esposo Israel, por me receberem em sua casa e me fazer sentir mais um membro de sua família. Pelo carinho e conversas agradáveis, principalmente nas tardes de sexta-feira, quando nos reunimos para ler a Bíblia e orar a Deus.

Aos meus amigos e colegas, a Marly e o Gerardo. Pela valiosa amizade e companhia, pelas conversas e risadas, pelo apoio e incentivo durante o mestrado que fizeram minha vida aqui muito agradável. Obrigada por se tornar minha família.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Tempo para tudo

Para tudo há uma ocasião certa;
Há um tempo certo para cada propósito
Debaixo do céu:
Tempo de nascer e tempo de morrer,
Tempo de plantar
E tempo de arrancar o que se plantou,
Tempo de matar e tempo de curar,
Tempo de derrubar e tempo de construir,
Tempo de chorar e tempo de rir,
Tempo de prantear e tempo de dançar,
Tempo de espalhar pedras
E tempo de ajuntá-las,
Tempo de abraçar e tempo de se conter,
Tempo de procurar e tempo de desistir,
Tempo de guardar
E tempo de jogar fora,
Tempo de rasgar e tempo de costurar,
Tempo de calar e tempo de falar,
Tempo de amar e tempo de odiar,
Tempo de lutar e tempo de viver em paz.

Salomão,
Ec. 3:1-8 Nova Versão Internacional.

Resumo

Tunubalá Sánchez, Angela Carolina. **Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging para Campos de Vetores Suaves por Partes Quase-Integráveis**. Goiânia, 2022. 117p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho será estudada a equivalência entre o método de Melnikov e o método de Averaging no contexto dos campos de vetores suaves por partes quase-integráveis em espaços de dimensão n ($n \geq 2$). Apresentamos uma introdução de ambos métodos, depois, direcionamos o estudo desses métodos aos sistemas quase-integráveis suaves por partes e mostramos a equivalência entre eles. Uma etapa fundamental para resolver esse problema é construir uma mudança apropriada de coordenadas, que transforma o sistema suave por partes perturbado em um sistema periódico. Apresentamos também, a fórmula da função de Melnikov de segunda ordem para sistemas planares suaves por partes quase-Hamiltonianos e finalizaremos o trabalho com algumas aplicações dos resultados apresentados em uma classe de sistemas autônomos tridimensionais.

Palavras-chave

Método de Averaging, método de Melnikov, soluções periódicas, ciclos limite, campos de vetores suaves por partes.

Abstract

Tunubalá Sánchez, Angela Carolina. **Equivalence between the Melnikov Method and the Averaging Method for Piecewise Near-integrable Vector Fields**. Goiânia, 2022. 117p. MSc. Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work the equivalence between the Melnikov method and the Averaging method will be studied for a piecewise smooth near-integrable systems in n -dimensional spaces ($n \geq 2$). We present an introduction of both methods, then we direct the study of these methods to piecewise smooth near-integrable systems and we show the equivalence between them, where a key step of solving this problem is to construct an appropriate change of coordinates, which transforms the perturbed piecewise smooth system into a periodic system. We also present the formula of the second order Melnikov function for planar piecewise near-Hamiltonian systems and we will finish the work with some applications of the results presented in a class of three-dimensional autonomous systems.

Keywords

Averaging method, Melnikov method, periodic solutions, limit cycles, piecewise smooth vector fields.

Sumário

Introdução	10
1 Teoria Básica	13
1.1 Conceitos preliminares de Análise	13
1.2 Conceitos preliminares de Álgebra	14
1.3 Conceitos preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias	17
1.3.1 Campo de vetores, Órbitas Periódicas e Ciclos Limite	17
1.3.2 A aplicação de Poincaré e Forma Canônica de Jordan	19
1.3.3 Sistemas Conservativos	21
1.3.4 Sistemas Hamiltonianos	22
1.3.5 Função Distância	23
1.4 Conceitos Preliminares de Sistemas Suaves por Partes	25
1.4.1 A Convenção de Filippov	25
1.4.2 Dinâmica do Campo Suave por Partes	26
2 Método de Averaging	28
2.1 O Método do Averaging Clássico	28
2.1.1 Aplicação para um Campo de Vetores Polinomial Quadrático em \mathbb{R}^3	37
2.2 Método do Averaging Via Grau de Brouwer	40
2.3 Método do Averaging para Campos Suaves por Partes	44
2.3.1 Aplicação na equação que modela o oscilador harmônico descontínuo perturbado	45
3 Método de Melnikov	47
3.1 Aplicação do método de Melnikov	49
4 Método de Melnikov e o Método de Averaging para Sistemas Quase Integráveis Suaves por Partes	53
4.1 Método de Melnikov	53
4.2 Método do Averaging de Ordem Superior	62
4.2.1 Funções de Averaging de primeira e segunda ordem	71
4.2.2 Teoria do Averaging para Campos Suaves por Partes	81
5 Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging	87
5.1 A Relação entre a Aplicação de Poincaré P e a Função de Bifurcação F	87
5.2 Equivalência entre os métodos de Melnikov e Averaging	90
6 Função Melnikov de Segunda Ordem para Sistemas Quase-Hamiltonianos Suaves por partes Perturbados	93

7	Aplicações	100
8	Conclusões	113
	Referências Bibliográficas	115

Introdução

De acordo com [17], a teoria de bifurcação de ciclos limite de sistemas diferenciais contínuos ou descontínuos de dimensão $n \geq 2$, tem sido extensivamente estudada por muitos autores. Um desafio no estudo de tais sistemas é obter o número máximo de soluções periódicas ou uma cota superior, o qual está relacionado ao décimo sexto problema de Hilbert, problema que dentro da teoria de sistemas dinâmicos tem ocupado a muitos matemáticos desde 1900, mais precisamente, a segunda metade que trata do número e da localização dos ciclos limite em campos de vetores polinomiais planares.

O estudo dos ciclos limite desempenha um papel fundamental na teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos, pois eles determinam o comportamento qualitativo do sistema. Mas, encontrar ciclos limite não é uma tarefa fácil na maioria dos casos. Porém, na busca desses ciclos limite tem-se desenvolvido diversos métodos para encontrá-los, entre eles o método de Averaging, que consiste em transformar o problema de encontrar e quantificar os ciclos limite de um campo de vetores em um problema de encontrar zeros positivos de uma determinada função [7]. Existem muitos trabalhos sobre o método de Averaging. Em [14], por exemplo, utilizando a função de Averaging de primeira, segunda ou de ordem superior se estuda as soluções periódicas de um sistema suave por partes. Em [15], os autores usaram a teoria de Averaging de ordem superior para estudar uma classe de sistemas diferenciais polinomiais quadráticos.

Outro método importante, é o método de Melnikov, o qual é uma ferramenta muito útil no estudo de existência e cotas para o número de ciclos limite. Em [18] os autores estabelecem a fórmula para a função de Melnikov de primeira ordem para sistemas suaves por partes planares. Em [27], por sua vez, se estabelece a teoria de Melnikov para sistemas quase-integráveis suaves por partes em qualquer dimensão ($n \geq 2$) e obtém-se a função de Melnikov de primeira ordem. Deve-se notar que o método de Melnikov é mais geral do que o método de Averaging, dado que o método de Melnikov pode ser aplicado para buscar órbitas periódicas que bifurcam perto de conexões heteroclínicas ou homoclínicas, em quanto uma condição necessária para aplicar o método de Averaging é que a parte linear do sistema estudado

seja do tipo centro. Além disso, de acordo como [4], o método de Averaging tem duas limitações, a primeira, as vezes é muito difícil encontrar uma mudança de coordenadas apropriada que coloque o sistema estudado na forma padrão, a segunda, depois de encontrar uma mudança conveniente, o sistema resultante pode ter uma expressão muito complicada o que aumenta a dificuldade de encontrar os zeros das funções promediadas, conseqüentemente os ciclos limite.

No entanto, tem-se mostrado em [12] que o método de Melnikov é equivalente ao método de Averaging para estudar o número de ciclos limite de sistemas diferenciais analíticos planares ou C^∞ quase-Hamiltonianos. Nesta dissertação, baseados no artigo [17], estabelecemos o objetivo principal do trabalho, mostrar a equivalência entre esses dois métodos no contexto dos sistemas diferenciais quase-integráveis suaves por partes C^∞ , em espaços de qualquer dimensão ($n \geq 2$). Em, outras palavras, mostramos que ambas metodologias produzem ou encontram o mesmo número de ciclos limite, onde uma etapa chave para conseguir este resultado será fazer uma mudança apropriada de coordenadas que transformará nosso sistema suave por partes perturbado em um sistema periódico.

Assim, este trabalho está dividido em oito capítulos, o primeiro capítulo contém algumas definições e teoremas importantes para a compreensão e desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo, faremos uma breve introdução sobre o método de Averaging para campos de vetores suaves e suaves por partes, apresentando a teoria que julgamos importante que o leitor conheça, o teorema de Averaging clássico e sua generalização por meio da teoria do grau de Brouwer, e o teorema de Averaging para campos de vetores suaves por partes, bem como alguns exemplos que ilustram o potencial do método na busca de ciclos limite. Similarmente, o terceiro capítulo contém a introdução ao método de Melnikov, o qual é uma ferramenta muito útil no estudo de existência e cotas para o número de ciclos limite, bem como uma aplicação do mesmo.

Por sua vez, no Capítulo quatro desenvolvemos ambos métodos para os sistemas quase-integráveis, em qualquer dimensão, $n \geq 2$. Em particular, estabelecemos, como foi dito anteriormente, a mudança de coordenadas adequada que transforma o sistema estudado em um sistema periódico, de tal forma que a teoria de Averaging possa ser aplicada. Além disso, damos as expressões das funções de Averaging de ordem um e dois.

O principal resultado de nosso trabalho, a equivalência entre os dois métodos é apresentada no Capítulo cinco, onde mostramos também, a equivalência entre a aplicação de Poincaré P e a função de bifurcação F . Usando essa equivalência, obtemos a fórmula da função de Melnikov de segunda ordem para um sistema planar

quase-Hamiltoniano suave por partes. Tal resultado será apresentado no Capítulo seis.

Uma vez obtidas as funções de Melnikov ou as funções promediadas (via teoria de Averaging), as quais, como visto no Capítulo cinco, fornecerão a mesma quantidade de ciclos limite, surge agora o problema de como estudar ou obter os zeros dessas funções. Baseados nos artigos [14, 17] aplicaremos os resultados apresentados nos capítulos anteriores, no estudo dos ciclos limite de um sistema autônomo suave por partes tridimensional. Finalmente, no último Capítulo, apresentamos as conclusões do trabalho.

Teoria Básica

Este capítulo é dedicado a apresentação de definições, conceitos e ferramentas importantes para o desenvolvimento de nosso trabalho.

1.1 Conceitos preliminares de Análise

Seguindo [16], começamos então com o seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Médio). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v]$ esteja contido em U , que a restrição $f_{[a, a+v]}$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v , em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v)$.*

Teorema 1.2 (Teorema da Função Implícita). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se um ponto $p = (x_0, y_0) \in U$ é tal que $f(p) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, então existem uma bola $B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ tais que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : B \rightarrow J$, de classe \mathcal{C}^k . Para todo $x \in B$ tem-se*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x)) / \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x)), \quad (i = 1, \dots, n).$$

A função $y = \xi(x)$ diz-se definida implicitamente pela equação $f(x, y) = c$. A afirmação de que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função significa que, para cada $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = c$. Evidentemente, $\xi(x_0) = y_0$.

Teorema 1.3 (Teorema de Taylor). *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se f é s vezes diferenciável em U e, num ponto $a \in U$, existe $f^{s+1}(a)$, então*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a) \cdot h^2 + \dots + \frac{1}{(s+1)!}f^{s+1}(a) \cdot h^{s+1} + r(h), \quad (1-1)$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|^{s+1}} = 0.$$

Teorema 1.4 (Generalização do Teorema Fundamental do Cálculo). *Dada a função*

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t, x) dt$$

sua derivada é calculada utilizando a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t, x) \right)' \\ &= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dt + f(h(x), x) \cdot h'(x) - f(g(x), x) \cdot g'(x) \end{aligned} \quad (1-2)$$

1.2 Conceitos preliminares de Álgebra

Nesta seção apresentamos alguns conceitos de álgebra, os quais ajudarão a resolver o problema de achar zeros das funções do método de Melnikov e do método de Averaging. As definições e todos os lemas e teoremas a seguir, bem como suas provas, podem ser encontradas em [14].

Consideremos \mathbb{C}^n com a norma $\|z\| := \max\{|z_i| : i = 1, \dots, n\}$ onde $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ (embora todas as considerações na sequência sejam independentes de uma escolha da norma); E representa um subconjunto limitado aberto de \mathbb{C}^n , \bar{E} denota seu fecho e $\partial E := \bar{E} \setminus E$. A seguir enunciaremos alguns conceitos e fatos importantes que serão usados no que segue.

Definição 1.5. *Uma função*

$$g : E \rightarrow \mathbb{C}$$

é chamada de holomorfa se for complexa diferenciável em qualquer ponto $z \in E$ (em particular, pode ser representado por sua série de Taylor em uma pequena vizinhança ao redor de z).

Definição 1.6. *Uma aplicação*

$$F = (F_1, \dots, F_n) : E \rightarrow \mathbb{C}^n$$

é chamada de holomorfa, se F_i é holomorfa para qualquer $i = 1, \dots, n$.

Denotemos por $\mathcal{H}_n(E)$ o conjunto de todas as aplicações desde \overline{E} a \mathbb{C}^n as quais são holomorfas sobre E .

Definição 1.7. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então

$$f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1-3)$$

é chamada analítica se é de classe \mathcal{C}^∞ em qualquer ponto $x \in U$ e pode ser representada em alguma vizinhança de x por sua série de Taylor.

Definição 1.8. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $V \subset \mathbb{K}^n$, um disco pequeno, centrado em a , $P : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ uma aplicação contínua definida em uma vizinhança de \overline{V} . Se $P(a) = 0$, então a é chamado de zero de P . Um zero a é chamado isolado se existe uma vizinhança $\tilde{V} \subset V$ de a tal que $P(b) = 0$ implica $b = a$ para todo $b \in \tilde{V}$, neste caso \tilde{V} é chamado de vizinhança isolada de a .

Note que se $F \in \mathcal{H}_n(E)$ e $F(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial E$, então o conjunto de zeros de F é finito, em particular, cada zero é isolado.

Definição 1.9. Dado $F \in \mathcal{H}_n(E)$ com $F(a) = 0$ e uma vizinhança isolada \mathcal{N} , definimos a multiplicidade de a com relação de F (denotada como $\mu_F[a]$) como o número de soluções da equação

$$F(z) = w, \quad z \in \mathcal{N},$$

onde w é um valor regular suficientemente próximo de zero para F (lembre-se, w é chamado um valor regular de F em \mathcal{N} se $F'(z)$ é não singular para todo $z \in F^{-1}(w) \cup \mathcal{N}$.)

Observação 1.10. Seja

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

uma aplicação analítica real com $f(a) = 0$. Usando a expansão em série de Taylor de f ao redor de a , pode-se associar canonicamente com f uma aplicação complexa holomorfa

$$f_a^c : U^c \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

estendendo f a uma vizinhança pequena U^c ao redor de a (basta pegar uma série complexa em torno de a com os mesmos coeficientes reais). Claramente, se a é isolado para f , então a é isolado para f_a^c de modo que $\mu_{f_a^c}[a]$ está corretamente definida. Além disso, podemos ver que $\mu_{f_a^c}[a]$ é o número de soluções complexas para equação $f(x) = y$, onde y é um valor regular suficientemente próximo do zero de f . No que segue, pela multiplicidade de a em relação a f queremos dizer $\mu_{f_a^c}[a]$.

A seguir enunciaremos a generalização multidimensional do teorema clássico de Rouché.

Teorema 1.11. *Suponha que $f, g \in \mathcal{H}_n(E)$ satisfazem*

$$\|g(z)\| < \|f(z)\| \quad (z \in \partial E).$$

Então, f e $f + g$ têm os mesmos zeros em E (contados de acordo com suas multiplicidades).

Agora, para as aplicações polinomiais complexas, obsevemos que pode-se obter uma estimativa superior para a soma das multiplicidades de seus zeros. Enunciamos assim, o seguinte teorema:

Teorema 1.12 (Teorema de Bézout). *Seja $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ polinômios complexos e suponhamos que a aplicação $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ admite um número finito de zeros. Então, o número de zeros de f é no máximo $\deg F_1 \cdot \dots \cdot \deg F_n$.*

O seguinte teorema é uma consequência imediata do teorema anterior e da Observação 1.10.

Teorema 1.13. *Sejam $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ polinômios reais e assumamos que a aplicação $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite um número finito de zeros. Então, o número de zeros de f é no máximo $\deg f_1 \cdot \dots \cdot \deg f_n$.*

Teorema 1.14. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $U \subset \mathbb{R}^m$ ambos subconjuntos abertos com U contendo a origem. Suponha que $\bar{d} : D \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $\bar{d}(x, \epsilon) := f_0(x) + f_*(x, \epsilon)$, $x \in D$, $\epsilon \in U$;
- (ii) f_0 é analítica;
- (iii) f_0 têm no máximo N zeros em D contados de acordo com suas multiplicidades;
- (iv) f_* é contínua em ambas variáveis e analítica em x ;
- (v) $f_*(x, 0) = 0$ para todo $x \in D$.

Então, para qualquer conjunto compacto dado $V \subset D$, existe uma vizinhança $B(0, \delta) \subset U$ de raio δ centrada na origem tal que para cada $\epsilon \in B(0, \delta)$, a aplicação \bar{d} tem no máximo N zeros com relação a x em V contados de acordo a suas multiplicidades.

Agora, combinando o Teorema 1.14 com o Teorema 1.13 temos o seguinte resultado.

Corolário 1.15. *De acordo com as notações do Teorema 1.14, suponha que as condições (i), (ii), (iv) e (v) sejam satisfeitas juntamente com a seguinte:*

(iii)' $f_0 = (f_1, \dots, f_n)$ é uma aplicação polinomial com um número finito de zeros.

Então, a conclusão do Teorema 1.14 se satisfaz substituindo N por $\deg f_1 \cdot \dots \cdot \deg f_n$.

1.3 Conceitos preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias

Iremos apresentar nesta seção alguns dos conceitos, definições e teoremas sobre a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Nossa abordagem será baseada nos livros [9, 22, 23, 25, 29], nos trabalhos [21, 28] e nos artigos [14, 17].

1.3.1 Campo de vetores, Órbitas Periódicas e Ciclos Limite

Definição 1.16. *Um campo de vetores em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Logo, um campo de vetores é de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, quando $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe \mathcal{C}^k . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial*

$$\dot{x} = X(x). \quad (1-4)$$

Definição 1.17 (Curva Integral). *Uma curva integral de X , por um ponto $p \in U$, é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow U$, I um intervalo aberto contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. Dizemos que α é uma solução da equação diferencial (1-4), com condição inicial $x(0) = p$.*

Teorema 1.18 (Existência e Unicidade). *Seja X um campo de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e $p \in U$. Existe uma curva integral de X , $\alpha : I \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$. Se $\beta : J \rightarrow U$ é outra curva integral de X com $\beta(0) = p$, então $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I \cap J$.*

Definição 1.19 (Fluxo Local). *Um fluxo local de X em $p \in U$ é uma aplicação $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times V_p \rightarrow U$, V_p uma vizinhança de p em U , tal que, para cada $q \in V_p$, a aplicação $\phi_q : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, definida por $\phi_q(t) = \phi(t, q)$, é uma curva integral passando por q , isto é, $\phi(0, q) = q$ e $\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, q) = X(\phi(t, q))$ para todo $(t, q) \in (-\epsilon, \epsilon) \times V_p$.*

Definição 1.20 (Sistema Dinâmico). *Um sistema dinâmico sobre E é uma aplicação de classe C^1*

$$\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E,$$

onde E é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , e se $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, então ϕ_t satisfaz

- (a) $\phi_0(x) = x$ para todo $x \in E$ e
- (b) $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Considere agora, o sistema dinâmico $\phi(t, x)$ definido por

$$\dot{x} = f(x). \tag{1-5}$$

Definição 1.21 (Órbita Periódica). *Um ciclo ou órbita periódica Γ de (1-5) é qualquer curva solução de (1-5) fechada, a qual não tem um ponto de equilíbrio de (1-5).*

Os ciclos do sistema (1-5) correspondem a soluções periódicas de (1-5) uma vez que $\phi(\cdot, x_0)$ define uma curva solução fechada de (1-5) se, e somente se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t+T, x_0) = \phi(t, x_0)$ para algum $T > 0$. O mínimo T para o qual essa igualdade é satisfeita é chamado de período da órbita periódica $\phi(\cdot, x_0)$.

Definição 1.22 (Ciclo limite). *Um ciclo limite de (1-5) é uma curva fechada Γ de (1-5), que não possui ponto crítico e existe uma vizinhança V_ϵ de Γ tal que não existem outras curvas fechadas de (1-5) contidas em V_ϵ . O ciclo limite Γ é chamado de estável se para todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança V de Γ tal que para todo $x \in V$, $d(\Gamma_x^+, \Gamma) < \epsilon$; ou seja, para todo $x \in V$ e $t \geq 0$, $d(\phi(t, x), \Gamma) < \epsilon$, onde $\Gamma_x^+ = \{x \in U; x = \phi(t, x), t \geq 0\}$.*

Definição 1.23 (Ciclo separatriz). *[5] Um ciclo separatriz é uma curva fechada composta por pontos singulares e arcos de solução que os unem, orientados consistentemente pelo fluxo do campo vetorial (1-5).*

Definição 1.24. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo de classe C^r ($r \geq 1$), satisfazendo as seguintes hipóteses.*

1. *Hipótese: f tem um ponto hiperbólico periódico, p .*
2. *Hipótese: $W^s(p)$ e $W^u(p)$ se interceptam transversalmente.*

Sem perda de generalidade podemos assumir que o ponto p , é um ponto fixo, pois se p tem período k , então $f^k(p) = p$ e os seguintes argumentos podem ser aplicados a f^k . Um ponto que pertence a $W^s(p) \cap W^u(p)$ se diz homoclínico a p . Se $W^s(p)$ intercepta $W^u(p)$ transversalmente em um ponto, então o ponto é chamado de ponto homoclínico transversal.

1.3.2 A aplicação de Poincaré e Forma Canônica de Jordan

De acordo com [23], a aplicação de Poincaré definida por Henri Poincaré em 1881, é uma ferramenta para o estudo da estabilidade e bifurcações de órbitas periódicas. A ideia da aplicação de Poincaré é a seguinte:

Se Γ é uma órbita periódica de (1-5) através do ponto x_0 e Σ é um hiperplano perpendicular a Γ em x_0 , então para qualquer ponto $x \in \Sigma$ suficientemente perto de x_0 , a solução de (1-5) através de x em $t = 0$, $\phi(t, x)$ cruzará de novo Σ no ponto $\mathbf{P}(x)$. A aplicação $x \rightarrow \mathbf{P}(x)$ é chamada aplicação de Poincaré.

A aplicação de Poincaré pode também ser definida quando Σ é uma superfície suave através do ponto $x_0 \in \Gamma$, a qual não é tangente a Γ em x_0 . Neste caso, diz-se que a superfície Σ intercepta a curva Γ transversalmente em x_0 .

Teorema 1.25. *Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e seja $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Assuma que $\phi(t, x_0)$ é uma solução periódica de (1-5) de período T e que o ciclo*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \phi(t, x_0), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

está contido em U . Seja Σ o hiperplano ortogonal a Γ em x_0 , isto é,

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Então existem, um $\delta > 0$ e uma única função $\tau(x)$ definida e continuamente diferenciável para $x \in N_\delta(x_0)$, tal que $\tau(x_0) = T$ e

$$\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$$

para todo $x \in N_\delta(x_0)$.

Definição 1.26. *Sejam Γ , Σ , δ e $\tau(x)$ definidos como no Teorema 1.25. Então para $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, a função*

$$P(x) = \phi(\tau(x), x)$$

é chamada de aplicação de Poincaré para Γ em x_0 .

Seguindo [22] apresentamos dois resultados importantes que nos auxiliará nas aplicações do método de Averaging clássico.

Teorema 1.27 (Forma canônica de Jordan Real). *Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, existe uma base*

de \mathbb{R}^n na qual a matriz L tem a forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix}$$

onde

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ 1 & \lambda_i & O \\ & 1 & \lambda_i \\ O & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, r, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & \\ I & C_j & O \\ & I & C_j \\ O & \ddots & \ddots \\ & & I & C_j \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

As submatrizes A_1, \dots, A_r e B_1, \dots, B_s são univocamente determinadas a menos da ordem e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial das aplicações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n munido da norma usual $\|L\| = \sup\{\|Lv\|; \|v\| = 1\}$.

Corolário 1.28. Seja $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma base de \mathbb{R}^n na qual a matriz L tem a forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix}$$

com

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & & \\ \epsilon & \lambda_i & & & & \\ & \epsilon & \lambda_i & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \epsilon & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j & & & & & & & & & \\ -\beta_j & \alpha_j & \ddots & & & & & & & & \text{O} \\ \epsilon & 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ 0 & \epsilon & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & \text{O} & \epsilon & 0 & \alpha_j & \beta_j & & \\ & & & & & 0 & \epsilon & -\beta_j & \alpha_j & & \end{pmatrix}$$

1.3.3 Sistemas Conservativos

Segundo [9], suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e, para qualquer x_0 em \mathbb{R}^n , que o sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{1-6}$$

tem uma única solução $x(t) = x(t, x_0) = x_0$.

Definição 1.29. Uma função $H : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *integral primeira* de (1-6) sobre uma região $D \subset \mathbb{R}^n$ se

1. H é contínua junto com suas primeiras derivadas parciais,
2. H é não constante sobre qualquer conjunto aberto em D , e
3. $H(x(t))$ é constante ao longo das soluções de (1-6).

Como H possui primeiras derivadas contínuas, a última propriedade é equivalente a $\left[\frac{\partial H(x(t))}{\partial x} \right] f(x(t)) = 0$.

Dizemos que o sistema (1-6) é conservativo se tem uma integral primeira H sobre \mathbb{R}^n . As órbitas em \mathbb{R}^n do sistema conservativo encontram-se nas curvas de nível da integral H .

Suponha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, H é uma integral primeira de (1-6) sobre D e x_0 é tal que $\frac{\partial H(x_0)}{\partial x_n} \neq 0$. Seja $H(x_0) = h$. Pelo Teorema da Função Implícita segue que a equação $H(x) = h$ pode ser resolvida para x_n como uma função x_n^* de x_k , $k < n$, x_0 e x em uma vizinhança U suficientemente pequena de x_0 . Dado que H é suposta uma integral primeira, $H(x(t)) = h$ se $x(t)$ é solução de (1-6) com

$x(0) = x_0$. Substituindo x_n^* em (1-6) resulta em um sistema de $(n-1)$ equações para a determinação da solução de (1-6) através de x_0 . Portanto, a dimensão de (1-6) é, diminuída em 1 em U . Um caso particular de integral primeira aparece em *sistemas Hamiltonianos*.

1.3.4 Sistemas Hamiltonianos

Entre as equações diferenciais mais importantes estão os *Sistemas Hamiltonianos*. Em mecânica clássica são estudados exemplos de sistemas dinâmicos Hamiltonianos como a equação do pêndulo e sua aproximação linear, o oscilador harmônico, o problema dos n corpos e suas múltiplas variantes, etc, onde a conservação da energia é uma característica compartilhada por todos esses exemplos[6]. De acordo com [23] temos

Definição 1.30. *Seja D um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{2n} e seja $H \in C^2(D)$ onde $H = H(x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}^n$. Um sistema da forma*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1-7)$$

onde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T \quad (1-8)$$

é chamado um **sistema Hamiltoniano** com n graus de liberdade sobre D .

Todos os sistemas Hamiltonianos são conservativos no sentido que a função Hamiltoniana ou a energia total $H(x, y)$ permanece constante ao longo das trajetórias do sistema.

Teorema 1.31 (Conservação da Energia). *A energia total $H(x, y)$ do sistema Hamiltoniano (1-7) permanece constante ao longo das trajetórias de (1-7).*

Demonstração. A derivada total da função Hamiltoniana $H(x, y)$ ao longo de uma trajetória $x(t), y(t)$ de (1-7) é dada por

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (1-9)$$

Assim, $H(x, y)$ é constante ao longo de qualquer solução de (1-7) e as trajetórias de (1-7) encontram-se nas superfícies $H(x, y) = \text{constante}$. \square

Observe que os pontos de equilíbrio do sistema hamiltoniano, coincidem com os pontos críticos da função hamiltoniana $H(x, y)$. De fato:

o sistema hamiltoniano é definido como em (1-7), ou como

$$\dot{X} = F(X), \quad \text{onde, } F(X) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right).$$

Logo temos um ponto crítico do sistema quando $F(X) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) = (0, 0)$, ou seja, quando $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$, o que é equivalente a dizer que $\text{grad}(H) = 0$. Portanto, concluímos que pontos críticos do sistema, coincidem com pontos críticos da função Hamiltoniana.

A seguir enunciaremos um teorema sobre a estabilidade dos pontos críticos de um sistema planar Hamiltoniano.

Definição 1.32. *Um ponto crítico x_0 do sistema*

$$\dot{x} = f(x)$$

no qual $Df(x_0)$ não tem autovalores nulos, é dito um ponto crítico não degenerado e, caso contrário, x_0 é dito um ponto crítico degenerado do sistema.

Teorema 1.33. *Qualquer ponto crítico não degenerado de um sistema hamiltoniano analítico ou é uma sela (topológica) ou é um centro. Além disso, (x_0, y_0) é uma sela (topológica) do sistema, se, e somente se, é uma sela da função hamiltoniana $H(x, y)$. E, (x_0, y_0) será um centro do sistema se for um máximo (ou mínimo) local e estrito da função $H(x, y)$.*

1.3.5 Função Distância

Seguindo [14], considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon f(t, x, \epsilon), \tag{1-10}$$

onde $f : \mathbb{R} \times D \times U_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação analítica satisfazendo

$$f(t + 2\pi, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{1-11}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) e $U_\delta = (-\delta, \delta)$ para alguma constante $\delta > 0$. Denote por (t, x_0, ϵ) a solução de (1-10)-(1-11) com condição inicial x_0 . Então, ao integrar ambos lados de (1-10), temos

$$x(t, x_0, \epsilon) = x_0 + \epsilon \int_0^t f(s, x(s, x_0, \epsilon), \epsilon) ds,$$

o qual implica

$$x(t, x_0, \epsilon) = x_0 + \int_0^t f(s, x_0, 0) ds + O(\epsilon^2).$$

Seja

$$P(x_0, \epsilon) := x(2\pi, x_0, \epsilon) = x_0 + \epsilon d(x_0, \epsilon),$$

a aplicação de Poincaré, onde

$$d(x_0, 0) = \int_0^{2\pi} f(t, x_0, 0) dt \equiv f_1(x_0), \quad x_0 \in D, \quad (1-12)$$

($d(x_0, \epsilon)$ é chamada uma função de bifurcação). Então, $x(t, x_0, \epsilon)$ é uma solução 2π periódica de (1-10)-(1-11) se, e somente se, seu valor inicial x_0 satisfaz $P(x_0, \epsilon) = x_0$ ou (equivalentemente) $d(x_0, \epsilon) = 0$.

O seguinte teorema é uma aplicação do Teorema 1.14, é importante para estimar o número máximo de soluções periódicas, sua demonstração pode ser encontrada em [14].

Teorema 1.34. *Dado o problema (1-10)-(1-11), assuma que a função f_1 definida por (1-12) tem no máximo k zeros contados de acordo a sua multiplicidade. Então, para qualquer conjunto compacto $V \subset D$, existe uma constante $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < |\epsilon| < \epsilon_0$, o problema (1-10)-(1-11) tem no máximo k soluções periódicas em V .*

Considere agora, a equação diferencial não autônoma suave perturbada dada na seguinte forma padrão, (para maiores detalhes, veja [21])

$$\dot{x} = \epsilon F(t, x, \epsilon) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i F_i(t, x) + \epsilon^{k+1} R(t, x, \epsilon) \quad (1-13)$$

$(t, x, \epsilon) \in \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, onde D é um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n , $\epsilon_0 > 0$ pequeno, e as funções $F_i : \mathbb{R} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $i = 1, \dots, k$, e $R : \mathbb{R} \times \overline{D} \times [0, \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ são T -periódicas na variável t .

Teorema 1.35 (Teorema de Existência e Unicidade). *Existe $\bar{\epsilon}$, $0 < \bar{\epsilon} < \epsilon_0$, tal que para cada $z \in D$ e $\epsilon \in [-\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}]$, a equação diferencial (1-13) admite uma única solução maximal $x(\cdot, z, \epsilon) : I(z, \epsilon) \rightarrow D$ satisfazendo $x(0, z, \epsilon) = z$. Além disso, $[0, T] \subset I(z, \epsilon)$ é o intervalo máximo de definição da solução, o qual é um intervalo aberto.*

Teorema 1.36 (Soluções Periódicas). *Dado $(z, \epsilon) \in D \times [-\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}]$, a solução $x(t, z, \epsilon)$ da equação diferencial (1-13) é T -periódica na variável t se, e somente se, $x(T, z, \epsilon) = z$.*

Definição 1.37 (Função Distância). $\Delta : D \times [-\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida como

$$\Delta(z, \epsilon) := x(T, z, \epsilon) - z. \quad (1-14)$$

Teorema 1.38. Dado $(z^*, \epsilon^*) \in D \times [-\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}]$, a equação diferencial (1-13) para $\epsilon = \epsilon_0$ admite uma solução T -periódica começando em $z = z^*$ se, e somente se,

$$\Delta(z^*, \epsilon^*) = 0. \quad (1-15)$$

1.4 Conceitos Preliminares de Sistemas Suaves por Partes

Nesta última seção, segundo [28] apresentamos uma breve introdução sobre os sistemas suaves por partes.

1.4.1 A Convenção de Filippov

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^n contendo a origem. Sejam X^+ e $X^- \in \mathfrak{X}^r$, onde \mathfrak{X}^r denota o espaço dos campos de vetores de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$ definidos em D . Consideremos uma função $h : D \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ com $k > 1$ que possui 0 como valor regular. Definimos a região de discontinuidade Σ , como sendo o conjunto

$$\Sigma = h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}.$$

Assim Σ , é uma subvariedade de codimensão 1 em D que divide o aberto D em dois conjuntos abertos:

$$\Sigma^+ = \{x \in D; h(x) > 0\} \quad e \quad \Sigma^- = \{x \in D; h(x) < 0\}.$$

Um campo de vetores suaves por partes é definido da seguinte forma

$$\mathbf{Z}(x) = \begin{cases} X^+ & \text{se } h(x) \geq 0 \\ X^- & \text{se } h(x) \leq 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

o qual denotamos por (X^+, X^-) . Denotamos também por Ω^r , o espaço dos campos vetoriais suaves por partes munido com a topologia produto.

1.4.2 Dinâmica do Campo Suave por Partes

Para estabelecer a dinâmica dada por $Z = (X^+, X^-)$ em D , é necessário que se defina a trajetória local por um ponto $p \in D$, ou seja, devemos definir o fluxo $\varphi_z(t, p)$ de (1-16). Temos os seguintes casos:

- a. Se $p \in \Sigma^\pm$, então a trajetória local por p é dada pelos campos X^+ ou X^- de maneira usual.
- b. Se $p \in \Sigma$, dividiremos Σ no fecho de três regiões disjuntas dependendo para onde os campos de vetores X^+ ou X^- apontam:

Região de Costura, Σ^c : Conjunto dos pontos de Σ tais que os campos vetoriais X^+ e X^- apontam na mesma direção, isto é,

$$\Sigma^c = \{p \in \Sigma; X^+h(p) \cdot X^-h(p) > 0\},$$

onde $X^+h(p) = \langle X^+(p), \nabla h(p) \rangle$ é a derivada de Lie.

Região de Deslize, Σ^s : Conjunto dos pontos de Σ tais que os campos vetoriais X^+ e X^- apontam em direções opostas, se aproximando a Σ , isto é,

$$\Sigma^s = \{p \in \Sigma; X^+h(p) < 0, X^-h(p) > 0\}.$$

Região de Escape, Σ^e : Conjunto dos pontos de Σ tais que os campos vetoriais X^+ e X^- apontam em direções opostas, se afastando de Σ , isto é,

$$\Sigma^e = \{p \in \Sigma; X^+h(p) > 0, X^-h(p) < 0\}$$

Além disso, observe que, nas definições acima, estamos excluindo os pontos de tangência, isto é, os pontos $p \in \Sigma$ tais que $X^+h(p) = 0$ ou $X^-h(p) = 0$. Esses pontos estão nas fronteiras das regiões Σ^c , Σ^s e Σ^e . Também foram excluídos destas regiões os pontos singulares dos campos X^+ e X^- .

- c. Se $p \in \Sigma^c$, então os campos apontam na mesma direção e portanto basta conectarmos as trajetórias de X^+ e X^- que passam por p .

Se $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, então a trajetória local é dada pela convenção de Filippov. Assim, definimos o campo vetorial deslizante ou Campo de Filippov Z^s da seguinte forma: Para cada ponto $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, $Z^s(p)$ é dado por uma combinação linear convexa de $X^+(p)$ e $X^-(p)$ de modo que Z^s seja tangente à Σ . Assim,

Z^s é dado por

$$Z^s(p) = \frac{X^-h(p)X^+(p) - X^+h(p)X^-(p)}{X^-h(p) - X^+h(p)}.$$

Com as informações acima, estamos prontos para definir a trajetória por p do campo Z .

Definição 1.39. *A trajetória local de um campo de vetores suave por partes da forma (1-16) por um ponto é definida como a concatenação das trajetórias dos campos X^+ , X^- e Z^s .*

Definição 1.40. *A órbita local de um ponto $p \in D$ é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_z(t, p); t \in I\}$.*

Finalmente temos o seguinte teorema que fornece condições para a unicidade de soluções (no sentido de Filippov) para campos de vetores suaves por partes

Teorema 1.41. *Consideremos para o campo (1-16), a região da variedade Σ onde $(X^+h)(X^-h) > 0$. Se em $p \in \Sigma$ temos $X^+h(p) > 0$ e $X^-h(p) > 0$ (ou $X^+h(p) < 0$ e $X^-h(p) < 0$), então existe uma solução passando por p . Mais ainda, a solução costura a variedade Σ em p , passando da região Σ^- para a região Σ^+ (respectivamente, da região Σ^+ para a região Σ^-), e a unicidade não é violada.*

Método de Averaging

O conhecimento da existência ou da não existência de soluções periódicas de um campo de vetores dado é muito importante na compreensão qualitativa de sua dinâmica. Uma das técnicas mais utilizadas para o estudo de resultados qualitativos é o método de Averaging, que é uma ferramenta muito importante para o estudo de bifurcações de ciclos limite. A ideia central do método consiste em transformar o problema de encontrar soluções periódicas de um campo de vetores, em um problema de encontrar zeros positivos de uma determinada função, para maiores detalhes veja [28].

O método de Averaging ou média, de acordo com Llibre (em [19]), tem uma longa história que começa com os trabalhos clássicos de Lagrange e Laplace, que forneceram uma justificativa intuitiva do método. A primeira formalização desta teoria foi feita em 1928 por Fatou e importantes contribuições práticas e teóricas para a teoria da média foram feitas na década de 1930 por Bogoliubov e Krylov, e em 1945 por Bogoliubov.

Em 2004, Llibre e Buica estenderam a teoria do Averaging para estudar órbitas periódicas para sistemas diferenciais contínuos usando principalmente a teoria do grau de Brower, veja [1]. Além disso uma versão da teoria de Averaging para estudar órbitas periódicas de sistemas diferenciais descontínuos foi fornecida por Llibre, Novaes e Teixeira em [20], via regularização [26] de campos de vetores suaves por partes. A seguir apresentamos alguns teoremas importantes para o entendimento deste método.

2.1 O Método do Averaging Clássico

Nesta seção apresentamos o método clássico de Averaging para os campos de vetores suaves no mínimo de classe \mathcal{C}^2 . Este resultado fornece condições necessárias para a existência e localização de ciclos limite.

Teorema 2.1 (*Método do Averaging de primeira ordem clássico*). *Conside-*

remos a equação

$$\dot{x} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \quad (2-1)$$

com $x \in D$, sendo $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de \mathbb{R}^n , $t \geq 0$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$, para algum $\epsilon_0 \geq 0$.
Suponha que:

1. as funções F , R , $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M independente de ϵ em $[0, \infty) \times D$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$;
2. as funções F e R são T -periódicas em t (T independente de ϵ).

Então são válidas as seguintes afirmações:

(a) Se p é um zero simples da função promediada

$$F^1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, z) ds \quad (2-2)$$

tal que

$$\det \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} \right) \Big|_{z=p} \neq 0$$

então existe uma solução T -periódica $x(t, \epsilon)$ do sistema (2-1) tal que $x(0, \epsilon) \rightarrow p$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

(b) Se o ponto singular $z = p$ do sistema promediado possui todos os seus autovalores com parte real negativa então, para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeno, a solução periódica $x(t, \epsilon)$ correspondente do sistema (2-1) é assintoticamente estável, e se um de seus autovalores possui parte real positiva, $x(t, \epsilon)$ é instável.

Demonstração. Definimos a função T -periódica

$$\mu(t, y) = \int_0^t (F(s, y) - F^1(y)) ds.$$

Assim, podemos estabelecer a relação de transformação de x para z , através de:

$$x(t) = z(t) + \epsilon \mu(t, z(t)). \quad (2-3)$$

Observação 2.2. A equação (2-3) é uma transformação próxima da identidade. O objetivo é escolher μ de modo que (2-3) leve a equação original (2-1) para a equação promediada

$$\dot{z} = \epsilon F^1(z) + \epsilon^2 \bar{S}(t, z, \epsilon),$$

para algum \bar{S} , induzida pela transformação, também periódica em t .

Afirmção 1. Afirmamos que $\|\mu(t, y)\| \leq 2MT$, onde M e T são dados no Teorema 2.1, $t \geq 0$ e $y \in D$. De fato, para $0 \leq t \leq T$ temos:

$$\begin{aligned} \|\mu(t, y)\| &= \left\| \int_0^t (F(s, y) - F^1(y)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t F(s, y) ds - \int_0^t F^1(y) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^t F(s, y) ds \right\| + \left\| \int_0^t F^1(y) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|F(s, y)\| ds + \int_0^t \|F^1(y)\| ds \\ &\leq \int_0^t M ds + \int_0^t \|F^1(y)\| ds. \end{aligned}$$

Contudo,

$$\|F^1(y)\| = \left\| \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds \right\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|F(s, y)\| ds \leq \frac{1}{T} \int_0^T M ds = \frac{MT}{T} = M.$$

Assim,

$$\|\mu(t, y)\| \leq 2 \int_0^t M ds = 2M \int_0^t ds \leq 2MT.$$

Se $t > T$, temos que, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < t - mT \leq T$. Logo,

$$\mu(t, y) = \int_0^{mT} (F(s, y) - F^1(y)) ds + \int_{mT}^t (F(s, y) - F^1(y)) ds,$$

e como F^1 é T -periódica, temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{mT} (F(s, y) - F^1(y)) ds &= m \int_0^T (F(s, y) - F^1(y)) ds \\ &= m \left(\int_0^T F(s, y) ds - T \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu(t, y) &= \int_{mT}^t (F(s, y) - F^1(y)) ds \\ &= \int_0^{t-mT} (F(s - mT, y) - F^1(y)) ds \\ &= \int_0^{t-mT} (F(s, y) - F^1(y)) ds, \end{aligned}$$

o que se reduz ao caso anterior e prova a afirmação.

Agora, vamos escrever a equação diferencial para z . Com esse intuito, diferencie a equação (2-3) com respeito ao tempo e utilize a equação em x para obter a equação:

$$\dot{z} + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, z) + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \dot{z} = \dot{x} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon),$$

que pode ser reescrita como:

$$\left[I_n + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) - \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, z), \quad (2-4)$$

onde

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, z) = F(t, z) - F^1(z). \quad (2-5)$$

Defina agora:

$$S = \epsilon F(t, z + \epsilon \mu(t, z)) - \epsilon F(t, z) + \epsilon^2 R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon) \quad (2-6)$$

e note que S é T -periódica em t pois μ , F e R o são. Assim, podemos reescrever (2-4) como:

$$\left[I_n + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \epsilon F^1(z) + S. \quad (2-7)$$

Além disso, como $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ é uniformemente limitada, assim como μ , podemos inverter a matriz do lado direito de (2-7) e obter a seguinte expressão:

$$\left[I_n + \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} = I_n - \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) + O(\epsilon^2),$$

para todo $t \geq 0$ e $z \in D$.

Observe também, que $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ é uma função T -periódica, já que é obtida através de derivadas de μ que são T -periódicas. Considere S definida em (2-6).

Afirmção 2. $S = \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

De fato, como F satisfaz a condição de Lipschitz, temos que

$$\begin{aligned} \|S\| &\leq \|\epsilon F(t, z + \epsilon \mu(t, z)) - \epsilon F(t, z) + \epsilon^2 R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon)\| \\ &\leq \epsilon L_F \|z + \epsilon \mu(t, z) - z\| + \epsilon^2 \|R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon)\| \\ &\leq \epsilon^2 L_F \|\mu(t, z)\| + \epsilon^2 \|R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon)\| \\ &\leq \epsilon^2 L_F 2MT + \epsilon^2 M \\ &\leq \epsilon^2 K, \end{aligned}$$

Onde $K = 2MT + M$. Com isso, temos a seguinte expressão para \dot{z} :

$$\dot{z} = \epsilon F^1(z) + S - \epsilon^2 \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) F^1(z) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (2-8)$$

Na equação acima, o erro $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ também é T -periódico pois foi obtido da multiplicação de funções T -periódicas com $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Utilizando aproximação de Taylor, temos que

$$\begin{aligned} F(t, z + \epsilon \mu(t, z)) - F(t, z) &= \epsilon \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(t, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) \mu(t, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (2-9)$$

para ϵ pequeno, porém basta diminuir ϵ_0 , se necessário, para obter a validade da aproximação em nosso problema. Novamente, o símbolo $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ em (2-9) é T -periódico pois é o resto de Lagrange de uma função T -periódica.

Além disso, utilizando a expansão de Taylor de primeira ordem, temos que:

$$R(t, z + \epsilon \mu(t, z), \epsilon) = R(t, z, 0) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2-10)$$

onde $\mathcal{O}(\epsilon)$ é T -periódico pois R é T -periódico.

Agora, defina $\bar{S}(z, t, \epsilon)$ por

$$\bar{S}(z, t, \epsilon) = \epsilon \frac{\partial F}{\partial z} \mu(t, z) - \epsilon \frac{\partial \mu}{\partial z}(t, z) F^1(z) + R(t, z, 0) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2-11)$$

onde $\mathcal{O}(\epsilon)$ é T -periódico pois provém de funções T -periódicas. Combinando (2-9), (2-10) e (2-6) podemos escrever (2-8) como:

$$\dot{z} = \epsilon F^1(z) + \epsilon^2 \bar{S}(t, z, \epsilon). \quad (2-12)$$

Observe que $\mathcal{O}(\epsilon^3) = \epsilon^2 \mathcal{O}(\epsilon)$ e, portanto, tal símbolo está incorporado no termo $\epsilon^2 \bar{S}(t, z, \epsilon)$.

Como μ , F , R e o erro $\mathcal{O}(\epsilon)$ são T -periódicos, assim como suas derivadas, temos que $\bar{S}(t, z, \epsilon)$ é T -periódica e além disso, é de classe \mathcal{C}^1 com respeito a z , devido as condições de regularidade nas hipóteses.

De acordo com a escolha de μ , temos que uma solução T -periódica $z(t)$ de (2-12) corresponde a uma solução T -periódica $x(t)$ de (2-1). De fato, suponhamos que $z(t_0) = z(t_0 + T)$, então

$$x(t_0) - \epsilon \mu(t_0, z(t_0)) = x(t_0 + T) - \epsilon \mu(t_0 + T, z(t_0 + T)). \quad (2-13)$$

Porém

$$\begin{aligned}
\mu(t_0 + T, z(t_0 + T)) &= \int_0^{t_0+T} [F(s, z(t_0 + T)) - F^1(z(t_0 + T))] ds \\
&= \int_0^{t_0} [F(s, z(t_0)) - F^1(z(t_0))] ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_0+T} [F(s, z(t_0)) - F^1(z(t_0))] ds \\
&= \int_0^{t_0} [F(s, z(t_0)) - F^1(z(t_0))] ds \\
&\quad + \int_0^T [F(s, z(t_0)) - F^1(z(t_0))] ds \\
&= \int_0^{t_0} [F(s, z(t_0)) - F^1(z(t_0))] ds \\
&= \mu(t_0, z(t_0)),
\end{aligned}$$

assim, $x(t_0) = x(t_0 + T)$, e portanto $x(t)$ é periódica. Reescrevendo a equação (2-12) na sua forma integral

$$z(t) = z(0) + \epsilon \int_0^T F^1(z(s)) ds + \epsilon^2 \int_0^T \bar{S}(s, z(s), \epsilon) ds.$$

Assim, a solução $z(t)$ é T -periódica se, e somente se, $z(t + T) = z(t)$ para cada $t \geq 0$, o que é equivalente a ter $z(0) = z(T)$. Portanto, podemos associar tal solução à seguinte equação:

$$h(z(0), \epsilon) = \int_0^T F^1(z(s)) ds + \epsilon \int_0^T \bar{S}(s, z(s), \epsilon) ds = 0. \quad (2-14)$$

Observe que a equação anterior não depende explicitamente de $z(0)$, porém como F^1 e \bar{S} são de classe \mathcal{C}^∞ , as soluções da equação diferencial (2-12) dependem continuamente das suas condições iniciais, e portanto a dependência em $z(0)$ é implícita, podendo ser identificada através da relação que leva $z(0)$ a um ponto $z(t_0)$ da curva. Além disso, como $F^1(p) = 0$, temos que $h(p, 0) = 0$. Finalmente temos a seguinte afirmação.

Afirmção 3. Numa vizinhança de $\epsilon = 0$, a equação (2-14) possui uma única solução $z(0)$, e se $\epsilon \rightarrow 0$, então $z(0) \rightarrow p$.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z}(p, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^T F^1(z(s, z)) ds \Big|_{z(0)=p} \\ &= \int_0^T \frac{\partial F^1}{\partial z}(z(s, z)) \Big|_{z(0)=p} ds \\ &= \int_0^T \frac{\partial F^1}{\partial z}(p) ds \\ &= T \frac{\partial F^1}{\partial z}(p). \end{aligned}$$

Desta forma, pelas hipóteses do teorema, temos que $\det\left(\frac{\partial h}{\partial z}(p, 0)\right) \neq 0$, $h(p, 0) = 0$ com h de classe C^∞ . Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto $V \subset D$, tal que $V \times [0, \epsilon_0)$ contém o ponto $(p, 0)$ e, para cada $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$, existe um único $z(\epsilon) \in V$ tal que

$$h(z(\epsilon), \epsilon) = 0.$$

Ainda pelo Teorema da Função Implícita, temos que $z(\epsilon)$ é uma função diferenciável com relação ao parâmetro ϵ , em particular, da sua continuidade, podemos inferir que $z(\epsilon) \rightarrow p$ se $\epsilon \rightarrow 0$. Sendo assim, pelo que vimos, cada solução $z(t, \epsilon)$ de (2-12) que passa por $z(\epsilon)$ é periódica e corresponde a uma solução periódica $x(t, \epsilon)$ da equação (2-1), concluindo a demonstração do item (a).

Antes de fazer a prova do item (b), devemos enunciar um teorema e duas proposições. Consideremos a equação diferencial linear

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{2-15}$$

onde $A(t)$ é uma matriz contínua T -periódica para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3. *Considere a equação diferencial linear (2-15) com $A(t)$ uma matriz $n \times n$ contínua e T -periódica. Então cada matriz fundamental $\Phi(t)$ da equação (2-15) pode ser escrita como o produto de duas matrizes $n \times n$*

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt},$$

onde $P(t)$ é T -periódica e B é uma matriz constante.

Demonstração. Como $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental de (2-15), $\Phi(t + T)$ é também uma matriz fundamental. De fato, defina $\tau = t + T$, então

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau - T)x = A(\tau)x.$$

Portanto, $\Phi(t)$ é também uma matriz fundamental. As matrizes $\Phi(t)$ e $\Phi(t+T)$ são linearmente dependentes, isto é, existe uma matriz não-singular C tal que $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$. Seja $C = e^{BT}$, onde B é uma matriz constante. Dessa forma, temos que $\Phi(t)e^{-Bt}$ é T -periódica. Com efeito, seja $\Phi(t)e^{-Bt} = P(t)$. Então

$$P(t+T) = \Phi(t+T)e^{-B(t+T)} = \Phi(t)Ce^{-BT}e^{-Bt} = \Phi(t)e^{-Bt} = P(t).$$

Assim, a prova esta completa. \square

Observação 2.4. A matriz C introduzida na prova do Teorema 2.3 é chamada de matriz monodromia da equação (2-15). Os autovalores ρ_k da matriz C são chamados de múltiplos característicos. Cada número complexo λ_k tal que $\rho_k = e^{\lambda_k T}$ é chamado de expoente característico. Os múltiplos característicos são unicamente determinados e podemos escolher os expoentes λ_k tal que eles coincidam com os autovalores da matriz B .

Proposição 2.5. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad (2-16)$$

em \mathbb{R}^n com $A(t)$ uma matriz contínua T -periódica, $f(t, x)$ contínua em $t \in \mathbb{R}$ e em x em uma vizinhança de $x = 0$. Assuma que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{f(t, x)}{\|x\|} = 0$$

uniformemente em t . Se a parte real dos expoentes característicos da equação diferencial periódica linear

$$\dot{y} = A(t)y,$$

é negativa, a solução $x = 0$ do sistema (2-16) é assintoticamente estável.

Proposição 2.6. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t, x) \quad \text{com } t \geq t_0, \quad (2-17)$$

em \mathbb{R}^n , onde A é uma matriz constante $n \times n$ que possui pelo menos um autovalor com parte real positiva, $B(t)$ é uma matriz contínua $n \times n$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$. A função $f(t, x)$ é contínua em t e em x , e Lipschitz em x em uma vizinhança de $x = 0$. Se

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{f(t, x)}{\|x\|} = 0 \quad \text{uniformemente em } t,$$

então a solução $x = 0$ do sistema (2-17) é instável.

Agora para demonstrar o item (b), linearizamos a equação (2-1) em uma vizinhança da solução periódica $x(t, \epsilon)$. Depois fazendo a translação $x = z + x(t, \epsilon)$, expandindo com respeito a z , omitindo os termos não-lineares e reescrevendo a variável dependente como x , obtemos a equação diferencial linear com coeficientes T -periódicos

$$\dot{x} = \epsilon A(t, \epsilon)x, \quad (2-18)$$

onde

$$A(t, \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x} [F(t, x) + \epsilon R(t, x, \epsilon)]_{x=x(t, \epsilon)}.$$

Definimos a matriz T -periódica

$$B(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, p),$$

e por (a) temos que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(t, \epsilon) = B(t)$. Definimos também as matrizes

$$B^0 = \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt \quad e \quad C(t) = \int_0^T [B(s) - B^0] ds.$$

Agora observemos que B^0 é a matriz promediada do sistema linearizado. A matriz $C(t)$ é T -periódica e a sua média é zero. Tomando a transformação $x \rightarrow y$ definida por $y = (I - \epsilon C(t))x$ obtemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\epsilon \dot{C}(t)x + (I - \epsilon C(t))\dot{x} \\ &= \epsilon B(t)x + \epsilon B^0 x (I - \epsilon C(t))\epsilon A(t, \epsilon)x \\ &= [\epsilon B^0 + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t)) - \epsilon^2 C(t)A(t, \epsilon)](I - \epsilon C(t))^{-1}y \\ &= \epsilon B^0 y + \epsilon(A(t, \epsilon) - B(t))y + \epsilon^2 S(t, \epsilon)y. \end{aligned} \quad (2-19)$$

A função $S(t, \epsilon)$ é T -periódica e limitada. Notemos que $A(t, \epsilon) - B(t) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, e além disso o expoente característico do sistema diferencial (2-19) depende continuamente do pequeno parâmetro ϵ . Portanto, para ϵ suficientemente pequeno, o sinal da parte real dos expoentes característicos é igual ao sinal da parte real dos autovalores da matriz B^0 . Obtemos a mesma conclusão, usando a transformação $y = (I - \epsilon C(t))x$, para os expoentes característicos do sistema diferencial (2-18).

Finalmente, aplicando a Proposição 2.5, obtemos a estabilidade da solução periódica no caso em que todos os autovalores possuem parte real negativa. Se um autovalor possuir parte real positiva, o Teorema 2.3 e a aplicação da Proposição 2.6 fornecem a instabilidade da solução periódica. \square

Agora, seguiremos para o próxima seção onde trataremos de uma aplicação desde método.

2.1.1 Aplicação para um Campo de Vetores Polinomial Quadrático em \mathbb{R}^3

Nesta subseção, apresentamos uma maneira de aplicar o método do *Averaging* para um campo polinomial quadrático em \mathbb{R}^3 estudado em [3] e [28].

Exemplo 2.7. *Considere o sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + z \\ \dot{z} &= -\frac{4}{5}x^2 + z^2 + a\end{aligned}\tag{2-20}$$

e assumamos que $a = \epsilon^2 b > 0$. Então o sistema (2-20) tem pelos menos uma solução periódica da forma:

$$x(t, \epsilon) = \epsilon \sqrt{\frac{5b}{2}} \cos t + O(\epsilon^2), \quad y(t, \epsilon) = -\epsilon \sqrt{\frac{5b}{2}} \sin t + O(\epsilon^2), \quad z(t, \epsilon) = O(\epsilon^2)$$

onde $|\epsilon| \neq 0$ é um parâmetro pequeno.

Demonstração. Para aplicar o Teorema 2.1 devemos colocar o campo dado na forma padrão (2-1), caso contrário o método não poderá ser aplicado. Sendo assim, devemos realizar uma mudança de variáveis a fim de escrever a parte linear do sistema (2-20) com $\epsilon = 0$ em sua forma normal de Jordan real, e outra mudança para estar nas hipóteses de aplicação da teoria do Averaging. Logo, consideremos como no enunciado $a = \epsilon^2 b$ e reescalonemos as variáveis assim:

$$(x, y, z) = (\epsilon \bar{x}, \epsilon \bar{y}, \epsilon \bar{z}).$$

Logo (2-20) se torna

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{y} \\ \dot{\bar{y}} &= -\bar{x} + \bar{z} \\ \dot{\bar{z}} &= \epsilon \left(-\frac{4}{5}\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + b \right)\end{aligned}\tag{2-21}$$

Agora a parte linear do sistema quando $\epsilon = 0$ na origem é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e calculando a Forma Canônica de Jordan de M obtemos:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

reescrevemos \bar{M} na sua forma de Jordan e temos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v - \epsilon \left(-\frac{4}{5}u^2 - \frac{8}{5}uw + \frac{1}{5}w^2 + b \right) \\ \dot{v} &= -u \\ \dot{w} &= \epsilon \left(-\frac{4}{5}u^2 - \frac{8}{5}uw + \frac{1}{5}w^2 + b \right). \end{aligned} \tag{2-22}$$

Aplicando a mudança de coordenadas $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ e $w = w$ temos:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon \cos \theta \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right) \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\epsilon}{r} \sin \theta \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right) \\ \dot{w} &= \epsilon \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right). \end{aligned} \tag{2-23}$$

Agora tomando θ como a nova variável independente temos que:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{-\epsilon \cos \theta \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right)}{-1 - \frac{\epsilon}{r} \sin \theta \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right)} \\ &= \frac{-\epsilon \cos \theta \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right)}{-1 - \epsilon \left(-\frac{4}{5}r \cos \theta \sin \theta - \frac{8}{5}w \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{5r}w^2 \sin \theta + \frac{b}{r} \sin \theta \right)} \\ &= g(\epsilon, r, \theta, w) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w' &= \frac{\epsilon \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right)}{-1 - \epsilon \left(-\frac{4}{5}r \cos \theta \sin \theta - \frac{8}{5}w \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{5r}w^2 \sin \theta + \frac{b}{r} \sin \theta \right)} \\ &= h(\epsilon, r, \theta, w). \end{aligned}$$

Expandindo g e h em série de Taylor em ϵ , o sistema (2-23) se torna:

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon \left(\frac{4}{5}r^2 \cos^3 \theta + \frac{8}{5}rw \cos^2 \theta - \frac{1}{5}w^2 \cos^2 \theta - b \cos \theta \right) + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon F_1(\theta, r, w) + O(\epsilon^2) \\ w' &= -\epsilon \left(-\frac{4}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{8}{5}rw \cos \theta + \frac{1}{5}w^2 + b \right) + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon F_2(\theta, r, w) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2-24}$$

Notemos que o sistema acima está escrito na forma padrão (2.1) para aplicar o método de Averaging. Além disso, o campo de vetores associado é 2π -periódico. Assim, consideremos a equação promediada

$$F^1(r, w) = \begin{pmatrix} F_1^1(r, w) \\ F_2^1(r, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, w) d\theta \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r, w) d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5}rw \\ \frac{2}{5}r^2 + \frac{1}{5}w^2 - b \end{pmatrix}.$$

Segundo o Teorema 2.1 para estimar as soluções periódicas do campo (2-24), devemos, estimar os zeros de F^1 . Sendo assim, temos que $F^1(r, w)$ tem um único zero positivo, $p = \left(\sqrt{\frac{5b}{2}}, 0 \right)$ com $r > 0$, $b > 0$ e $\det(D_{F^1}(p)) = \frac{-8b}{5} \neq 0$. Pelo item (a) do Teorema 2.1, para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, esse zero fornece uma órbita periódica de (2-24) dada por:

$$r(\theta, \epsilon) = \sqrt{\frac{5b}{2}} + O(\epsilon) \quad e \quad w(\theta, \epsilon) = O(\epsilon). \tag{2-25}$$

Os autovalores de $DF \left(\frac{\sqrt{5b}}{2}, 0 \right)$ são $\lambda_1 = \sqrt{\frac{8b}{5}}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{8b}{5}}$, sendo $b > 0$. Portanto a órbita em (2-25) é instável se $b > 0$. Desta forma a solução (2-25) em (2-23) se torna:

$$r(\theta, \epsilon) = \sqrt{\frac{5b}{2}} + O(\epsilon), \quad \theta(t, \epsilon) = -t + O(\epsilon) \quad e \quad w(\theta, \epsilon) = O(\epsilon).$$

Agora voltamos às mudanças das variáveis para estimar nas variáveis originais (x, y, z) como é a órbita periódica que obtivemos se $b > 0$. Consequentemente a

solução periódica em (u, v, w) para (2-22) se torna

$$\begin{aligned} u &= r \cos \theta \\ u &= \sqrt{\frac{5b}{2}} \cos(t) \cos(O(\epsilon)) + \sqrt{\frac{5b}{2}} \sin(t) \sin(O(\epsilon)) + O(\epsilon), \\ v &= r \sin \theta \\ v &= -\sqrt{\frac{5b}{2}} \sin(t) \cos(O(\epsilon)) + \sqrt{\frac{5b}{2}} \cos(t) \sin(O(\epsilon)) + O(\epsilon). \end{aligned}$$

E tomando a expansão em Taylor de $\cos(O(\epsilon))$ e $\sin(O(\epsilon))$,

$$u(t, \epsilon) = \sqrt{\frac{5b}{2}} \cos(t) + O(\epsilon), \quad v = -\sqrt{\frac{5b}{2}} \sin(t) + O(\epsilon), \quad w(t, \epsilon) = O(\epsilon).$$

Em coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de (2-21) a solução periódica é

$$\bar{x}(t, \epsilon) = \sqrt{\frac{5b}{2}} \cos(t) + O(\epsilon), \quad \bar{y} = -\sqrt{\frac{5b}{2}} \sin(t) + O(\epsilon), \quad \bar{z}(t, \epsilon) = O(\epsilon).$$

Finalmete a solução do sistema original torna-se em

$$x(t, \epsilon) = \epsilon \sqrt{\frac{5b}{2}} \cos(t) + O(\epsilon^2), \quad y = -\epsilon \sqrt{\frac{5b}{2}} \sin(t) + O(\epsilon^2), \quad z(t, \epsilon) = O(\epsilon^2).$$

□

Na próxima seção veremos o Método do Averaging generalizado via grau de Brouwer para campos apenas contínuos.

2.2 Método do Averaging Via Grau de Brouwer

Essa seção é destinada à apresentar a generalização do método clássico, feita por Llibre e Buica em [2], para campos de vetores contínuos. Uma descrição bem mais detalhada sobre o teorema a seguir, assim como sua demonstração, podem ser encontradas em [7] e [28]. Começamos com uma breve introdução sobre o grau de Brouwer. Para maiores informações sobre este resultado, o leitor pode consultar as referências antes mencionadas e [1].

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado. Considere uma aplicação contínua $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, e um ponto y_0 em \mathbb{R}^n tal que $y_0 \notin f(\partial V)$. Então cada tripla (f, V, y_0) corresponde a um inteiro $d_B(f, V, y_0)$ com as seguintes três propriedades:

- (a) Se $d_B(f, V, y_0) \neq 0$, então $y_0 \in f(V)$, e $d_B(\text{Id}|_V, V, y_0) = 1$.
 (b) Se V_1 e V_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de V tal que $y_0 \notin f(\overline{V} \setminus (V_1 \cup V_2))$, então

$$d_B(f, V, y_0) = d_B(f, V_1, y_0) + d_B(f, V_2, y_0).$$

- (c) (Invariância sob homotopia) Seja $\{f_t : 0 \leq t \leq 1\}$ uma homotopia contínua de aplicações de \overline{V} a \mathbb{R}^n . Seja $\{y_t : 0 \leq t \leq 1\}$ uma curva contínua em \mathbb{R}^n tal que $y_t \notin f_t(\partial V)$ para qualquer $t \in [0, 1]$. Então $d_B(f_t, V, y_t)$ é constante em $[0, 1]$. Além disso, o grau da função $d_B(f, V, y_0)$ está unicamente determinado pelas três condições acima.

Quando $f : \overline{V} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função \mathcal{C}^1 e $\det(Df(x)) \neq 0$ para cada $x \in f^{-1}(y_0)$, o grau de Brouwer pode ser calculado como segue:

$$d_B(f, V, y_0) = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \text{sign}(\det(Df(x))). \quad (2-26)$$

Observação 2.8. A fórmula acima implica que se z^* é um ponto de \mathbb{R}^n tal que $f(z^*) = 0$ e $\det(Df(z^*)) \neq 0$, então existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ de z^* tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in V \setminus \{z^*\}$ e $d_B(f, V, 0) \neq 0$.

Enunciamos agora a generalização do método do Averaging de primeira ordem dado em [2].

Teorema 2.9 (Método do Averaging via grau de Brouwer). Considere a seguinte equação

$$\dot{x} = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \quad (2-27)$$

onde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ são funções contínuas, T -periódicas na primeira variável e D é um aberto de \mathbb{R}^n . Defina

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (2-28)$$

e assuma que:

1. F_1 e R são localmente Lipschitzianas com respeito a x ;
2. para $a \in D$ com $f_1(a) = 0$ existe uma vizinhança V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Então, para $|\epsilon| > 0$, suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\Phi(\cdot, \epsilon)$ do sistema (2-27) tal que $\Phi(\cdot, \epsilon) \rightarrow a$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Observe primeiramente que a condição (1) do método clássico é substituída apenas pela condição de que F_1 e R sejam localmente Lipschitz com respeito a x .

Além disso, a condição (2) do método acima substitui a hipótese de que a (ou p no enunciado do método clássico) seja um zero simples da função promediada.

Suponha agora, que f_1 seja diferenciável e, que $f_1(a) = 0$ e $\det\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) \neq 0$. Então pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ e mais ainda $d_B(f_1, V, 0) = \text{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial f_1(a)}{\partial z}\right)\right) \neq 0$. Portanto, se um sistema satisfaz as hipóteses do método clássico então satisfaz as hipóteses do método via grau de Brouwer.

A seguir, enunciamos uma série de lemas que serão utilizados no desenvolvimento da prova do Teorema 2.9

Lema 2.10. *Consideremos o campo de vetores suave*

$$\dot{x} = F(x, t, \epsilon), \quad (2-29)$$

onde $F : D \times \mathbb{R} \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, T -periódica na variável t e localmente Lipschitz com respeito à variável x . Para cada $z \in D$, denotemos por $x(\cdot, z, \epsilon)$ a solução de (2-29) tal que $x(0, z, \epsilon) = z$. Assumamos que $x(\cdot, z, \epsilon)$ esteja definida em $[0, T]$, para cada $z \in D$ e $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Definamos $f : D \times \mathbb{R} \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$f(z, \epsilon) = \int_0^T F(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds. \quad (2-30)$$

Então temos que $(x, z_\epsilon, \epsilon)$ é uma solução T -periódica de (2-29), se, e somente se, $f(z_\epsilon, \epsilon) = 0$.

Lema 2.11. *Seja $V \subset D$ aberto e limitado. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, para todo $z \in \bar{V}$, a solução $x(\cdot, z, \epsilon)$ de (2-29) está definida em $[0, T]$.*

Lema 2.12. *Consideremos as funções contínuas $f_i : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $i = 0, 1, \dots, k$ e $f, g, r : \bar{V} \times [\epsilon_0, \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por*

$$g(\cdot, \epsilon) = \sum_{i=0}^k \epsilon^i f^i(\cdot), \quad f(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + \epsilon^{k+1} r(\cdot, \epsilon).$$

Assumamos que $g(z, \epsilon) \neq 0$, para todo $z \in \partial V$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0] \setminus \{0\}$. Então para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeno, $d_B(g, V, 0)$ está bem definido e $d_B(f, V, 0) = d_B(g, V, 0)$.

Corolário 2.13. *Suponhamos que as hipóteses do Lema 2.12 são satisfeitas para $k = 0$ e para $a \in D$ com $f_0(a) = 0$, exista uma vizinhança V de a tal que $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ e que $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$. Então, existe pelo menos um ramo de zeros de f que bifurcam de a .*

Demonstração. O sistema (2-27) satisfaz a hipótese do Lema 2.11. Assim, as soluções $x(\cdot, z, \epsilon)$ com $z \in \bar{V}$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ estão definidas em $[0, T]$. Então a função f definida em (2-30) é dada por

$$f(z, \epsilon) = \epsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \epsilon)) ds + \epsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds, \quad (2-31)$$

já que as hipóteses do Lema 2.10 são também satisfeitas. Além disso, utilizando a forma integral da equação diferencial (2-27), obtemos a seguinte relação

$$x(t, z, \epsilon) = z + \epsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \epsilon)) ds + \epsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds, \quad (2-32)$$

para todo $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$.

Afirmção: Se $z \in \bar{V}$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ então

$$f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 \mathcal{O}(1), \quad (2-33)$$

onde f_1 é a função promediada definida em (2-28).

Com efeito, existe um subconjunto compacto $K \subset D$, tal que $x(t, z, \epsilon) \in K$ para todo $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$. Então, pela continuidade de R no conjunto compacto $K \times [0, T] \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, temos que existe uma constante $M_K > 0$ tal que

$$R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) \leq M_K,$$

para todo $s \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$.

Logo, temos que:

$$\int_0^T R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds \leq \int_0^T M_K ds = TM_K,$$

logo

$$\int_0^T R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds = \mathcal{O}(1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \epsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \epsilon)) ds &= \epsilon \int_0^T (F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)) ds + \epsilon \int_0^T F_1(s, z) ds \\ &= \epsilon \int_0^T (F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)) ds + \epsilon \int_0^T f_1(z) ds. \end{aligned}$$

Agora substituindo a equação anterior em (2-31) obtemos que

$$f(z, \epsilon) - \epsilon f_1(z) = \epsilon \int_0^T (F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)) ds + \epsilon^2 \mathcal{O}(1).$$

Logo, da hipótese de que F_1 é Lipschitz com respeito a variável x em $K \times [0, T]$, juntamente com a equação (2-32), implica que

$$\|F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)\| \leq \|x(s, z, \epsilon) - z\| = \epsilon \mathcal{O}(1).$$

Portanto, temos que a igualdade (2-33) é satisfeita. Aplicando o Corolário 2.13 para f , temos que a hipótese (2) do Teorema 2.9 assegura a existência de um ramo de soluções z_ϵ da equação $f(z, \epsilon) = 0$. Além disso, $z_\epsilon \rightarrow a$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Finalmente, utilizando o Lema 2.10, concluímos que $\varphi(\cdot, \epsilon) = x(\cdot, z_\epsilon, \epsilon)$ é uma solução T -periódica de 2-27 tal que $\varphi(0, \epsilon) = z_\epsilon \rightarrow a$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

□

2.3 Método do Averaging para Campos Suaves por Partes

A seguir apresentamos o Teorema de Averaging para campos suaves por partes, cuja demonstração pode ser encontrada em [28].

Teorema 2.14 (*Método do Averaging para campos suaves por partes*).

Considere o campo de vetores suaves por partes

$$\dot{x} = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \tag{2-34}$$

com

$$F(t, x) = F_1(t, x) + \operatorname{sgn}(h(t, x))F_2(t, x)$$

e

$$R(t, x, \epsilon) = R_1(t, x, \epsilon) + \operatorname{sgn}(h(t, x))R_2(t, x, \epsilon)$$

onde $F_1, F_2: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R_1, R_2: \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R} \times D$ são funções contínuas, F_1, F_2, R_1 e R_2 são T -periódicas na variável t e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Suponhamos também que $h \in C^1(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R})$ possui 0 como um valor regular. Definimos a função promediada $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \int_0^T F(t, x) dt$$

Suponhamos que:

1. F_1, F_2, R_1, R_2 e h são localmente L -Lipschitz com respeito à x .
2. Existe um subconjunto aberto e limitado $C \subset D$ tal que, para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, toda órbita começando em \bar{C} atinja o conjunto de descontinuidade somente em regiões de costura;
3. para $a \in C$ com $f(a) = 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} - \{a\}$ e $d_B(f, V, 0) \neq 0$.

Então, para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $x(t, \epsilon)$ do sistema (2-34) tal que $x(0, \epsilon) \rightarrow a$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

2.3.1 Aplicação na equação que modela o oscilador harmônico descontínuo perturbado

Considere o sistema dado em [21]:

$$\ddot{x} + x + b_\epsilon \dot{x} = g_\epsilon(x, \dot{x}), \quad (2-35)$$

onde $b_\epsilon = \epsilon b_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) > 0$ e $g_\epsilon(x, y) = \epsilon g_1(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, o qual pode ser escrito como o campo de vetores suaves por partes

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - (\epsilon b_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))y + \epsilon B^+, & y \geq 0, \end{cases} \quad (2-36)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - (\epsilon b_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2))y + \epsilon B^-, & y \leq 0. \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, para ambos campos temos

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon \sin \theta (B^+ - r(b_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \sin \theta), \\ \dot{\theta} = -\frac{r + \epsilon \cos \theta (-B^+ + r(b_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \sin \theta)}{r}, \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi], \quad (2-37)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon \sin \theta (B^- - r(b_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \sin \theta), \\ \dot{\theta} = -\frac{r + \epsilon \cos \theta (-B^- + r(b_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \sin \theta)}{r}, \end{cases} \quad \theta \in [\pi, 2\pi]. \quad (2-38)$$

Tomando θ como a nova variável independente, os campos (2-37) e (2-38) tornam-se

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon \begin{cases} \sin \theta (b_1 r \sin \theta - B^+) + \mathcal{O}(\epsilon), & \theta \in [0, \pi], \\ \sin \theta (b_1 r \sin \theta - B^-) + \mathcal{O}(\epsilon), & \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (2-39)$$

Assim, colocamos o sistema (2-35) na forma padrão requerida no Teorema 2.14, logo a função de Averaging de primeira ordem e dada por

$$\begin{aligned} f_1(r) &= b_1 \pi r - \int_0^\pi B^+ \sin \theta d\theta - \int_\pi^{2\pi} B^- \sin \theta d\theta \\ &= -2(B^+ - B^-) + b_1 \pi r. \end{aligned} \quad (2-40)$$

Assumindo $(B^+ - B^-) > 0$, a equação $f_1(r) = 0$ tem uma única solução positiva $r^* = \frac{2(B^+ - B^-)}{b_1 \pi}$. Portanto, o método de Averaging de primeira ordem, Teorema 2.14, fornece a existência de uma solução 2π -periódica para o sistema (2-35).

Método de Melnikov

Neste capítulo, apresentaremos o método de Melnikov que é uma ferramenta analítica para estabelecer a existência de pontos homoclínicos transversais da aplicação de Poincaré para uma órbita periódica de um sistema dinâmico perturbado da forma

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x) \quad (3-1)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $n \geq 2$. Este método também é utilizado para estabelecer a existência de órbitas periódicas subharmônicas de sistemas perturbados da forma (3-1). As órbitas periódicas subharmônicas, são aquelas cujo período é múltiplo do período da perturbação. Além disso, pode ser usado para mostrar a existência de ciclos limite e ciclos separatrizes de sistemas planares perturbados (3-1) com $x \in \mathbb{R}^2$. A nossa abordagem será baseada nos livros [8, 23]. Começamos então, com um resultado para sistemas planares perturbados periodicamente da forma

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, t), \quad (3-2)$$

onde, $x \in \mathbb{R}^2$ e g é periódico de período T em t . Este sistema pode ser escrito como um sistema autônomo em \mathbb{R}^3 ao definir $t = x_3$. Assumimos que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$. Agora, fazemos as seguintes hipóteses:

H1. Para $\epsilon = 0$ o sistema (3-2) tem uma órbita homoclínica

$$\Gamma_0 : x = \gamma_0(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

em um ponto de sela hiperbólico x_0 e

H2. Para $\epsilon = 0$ o sistema (3-2) tem uma família de órbitas periódicas a um parâmetro $\gamma_\alpha(t)$ de período T_α no interior de Γ_0 com $\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha}(0) \neq 0$.

Segundo [23], a função de Melnikov, $M(t_0)$, está então definida como

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_{t_0}^t \nabla \cdot f(\gamma_0(s)) ds} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt \quad (3-3)$$

onde o produto exterior de dois vetores u e $v \in \mathbb{R}^2$ é definida como $u \wedge v = u_1 v_2 - v_1 u_2$. Note também que a função de Melnikov $M(t_0)$ é proporcional à derivada da aplicação de Poincaré em relação ao parâmetro ϵ no interior de uma vizinhança do ciclo separatriz Γ_0 . A seguir apresentamos um lema que estabelece a existência de uma órbita periódica $\gamma_\epsilon(t)$ de (3-2), e portanto a existência da aplicação de Poincaré \mathbf{P}_ϵ , para um ϵ suficientemente pequeno.

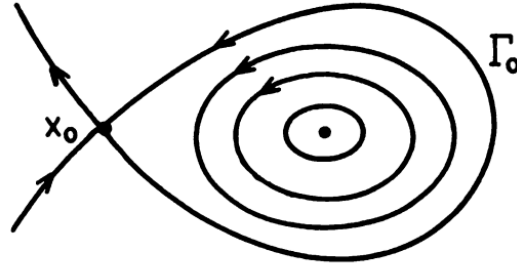


Figura 3.1: O retrato de fase do sistema (3-2) sob as hipóteses **H1** e **H2**. Figura extraída de [23].

Observação 3.1. De acordo com [8], definimos a aplicação de Poincaré $P_\epsilon : \Sigma \rightarrow \Sigma$, onde $\Sigma = \{(x, t) | t = t_0 \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^2 \times S^1$ é a seção transversal global no tempo t_0 para o fluxo autônomo suspenso de (3-2), dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \epsilon g(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

com $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$.

Lema 3.2. Sob as hipóteses (**H1**) e (**H2**), para ϵ suficientemente pequeno, (3-2) tem uma única órbita periódica hiperbólica $\gamma(t) = x_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ de período T . Correspondentemente, a aplicação de Poincaré \mathbf{P}_ϵ tem um único ponto fixo hiperbólico tipo sela $x_\epsilon = x_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$

Demonstração. Ver [8]. □

Observação 3.3. Se para $\epsilon = 0$, (3-2) é um sistema Hamiltoniano, isto é, se

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T,$$

então $\nabla \cdot f = 0$ e a função de Melnikov tem uma forma mais simples

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt. \quad (3-4)$$

Por outra parte, considere o sistema perturbado da forma

$$f(x) + \epsilon g(x, \mu) \quad (3-5)$$

com $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m)$. Assumimos que f é campo vetorial Hamiltoniano.

Teorema 3.4. *Sob a hipótese **H2**, se existe um ponto $(\mu_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tal que a função*

$$M(\mu, \alpha) = \int_0^{T_\alpha} f(\gamma_\alpha(t)) \wedge g(\gamma_\alpha(t), \mu) dt$$

satisfaz

$$M(\mu_0, \alpha_0) = 0 \quad e \quad M_\alpha(\mu_0, \alpha_0) \neq 0,$$

então para todo $\epsilon \neq 0$, suficientemente pequeno, o sistema (3-5) com $\mu = \mu_0$ tem um único ciclo limite hiperbólico em uma $\mathcal{O}(\epsilon)$ -vizinhança do ciclo γ_{α_0} .

Demonstração. Ver [23]. □

3.1 Aplicação do método de Melnikov

Seguindo [23, 24] consideremos a equação de Duffing periodicamente perturbada:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \epsilon(\mu \cos t - 2.5y). \end{aligned} \quad (3-6)$$

Onde parâmetro μ é conhecido como força de amplitude. Este sistema na forma vetorial é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ x - x^3 \end{bmatrix}}_{f(x,y)} + \epsilon \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mu \cos(t) - 2.5y \end{bmatrix}}_{g(x,y,t)},$$

assim, temos que

$$f(x, y) = (y, x - x^3) \quad e \quad g(x, y, t) = (0, \mu \cos(t) - 2.5y).$$

Observe que f e g são aplicações de classe \mathcal{C}^2 e que g é periódica na variável t . Segundo [24], para que este sistema atenda as condições necessárias para a aplicação do método de Melnikov, temos que encontrar para o sistema não perturbado, ou seja para $\epsilon = 0$, um ponto de sela hiperbólico com uma órbita homoclínica associada.

Para $\epsilon = 0$, o sistema é Hamiltoniano, com função Hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$

e existem três pontos de equilíbrio nas seguintes coordenadas com os seguintes tipos de estabilidade

$$(x, y) = (\pm 1, 0), \quad \text{centros}$$

$$(x, y) = (0, 0), \quad \text{sela.}$$

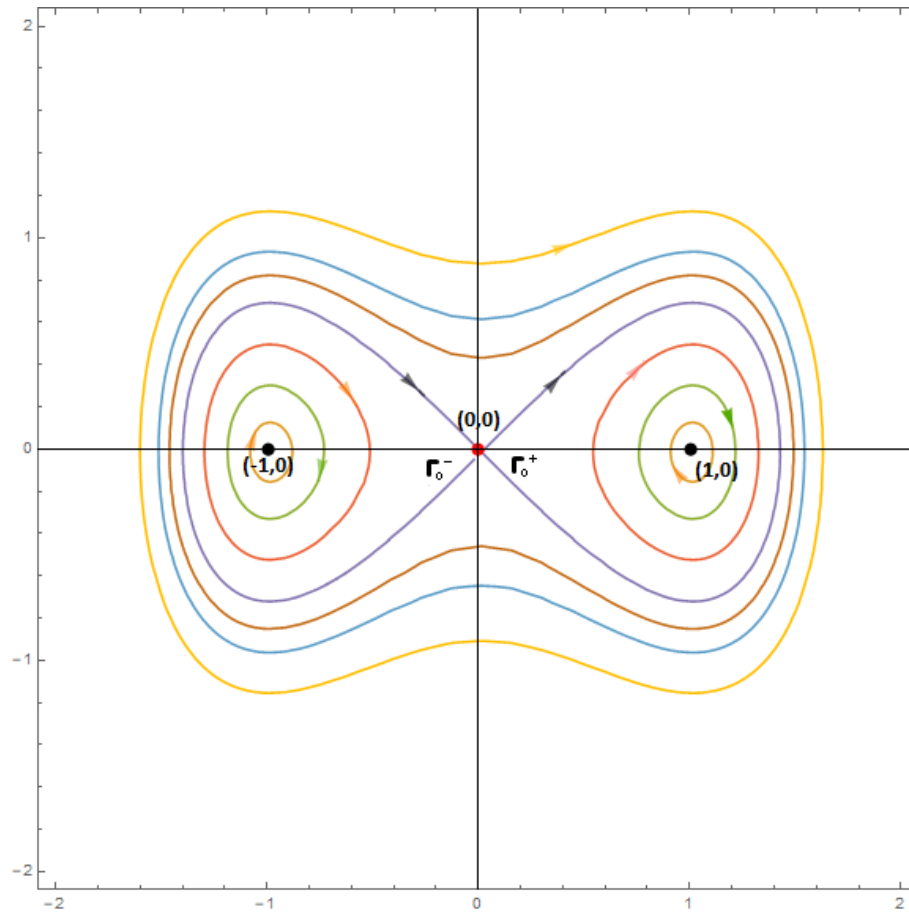


Figura 3.2: O retrato de fase da função Hamiltoniana do sistema (3-6).

Vimos, no capítulo anterior, que as soluções do sistema hamiltoniano estão contidas nas curvas de nível da função hamiltoniana. Além disso, a curva de nível dada por $H(x, y) = 0$, define duas soluções homoclínicas do sistema hamiltoniano:

$$\Gamma_0^\pm : \gamma_0^t(t) = \pm(\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tan(t))^T. \quad (3-7)$$

Assim, o sistema já satisfaz as hipóteses, logo, podemos aplicar o método de Melnikov. Calculamos a função de Melnikov para $\gamma_0^+(t)$; o cálculo para $\gamma_0^-(t)$ é

similar. Desde (3-4) temos

$$\begin{aligned}
M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\sqrt{2}\operatorname{sech}(t) \tanh(t), \sqrt{2}\operatorname{sech}(t) - 2\sqrt{2}\operatorname{sech}^3(t)) \wedge \\
&\quad \left(0, \mu \cos(t + t_0) + \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-\sqrt{2}\operatorname{sech}(t) \tanh(t)) \left(\mu \cos(t + t_0) + \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right) dt \\
&= -\sqrt{2}\mu \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \cos(t + t_0) dt - \frac{5\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt.
\end{aligned}$$

A primeira integral pode ser resolvida pelo método de resíduos. Dessa forma obtemos

$$M(t_0) = \sqrt{2}\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right) \left[\sin(t_0) - \frac{k_0}{\mu} \right]$$

onde $k_0 = 10 \cosh(\pi/2)/(3\sqrt{2}\pi) \cong 1.88$. Note que, se $\mu > k_0 > 0$, $M(t_0)$ tem um zero dado por

$$t_1 = \arcsin\left(\frac{1.88}{\mu}\right)$$

e como

$$\det\left(\frac{dM(t_1)}{dt}\right) = 1.25204 \sqrt{2 - \frac{7.0688}{\mu^2}} \neq 0,$$

esse zero é um zero simples. Pelo Lema 3.2, para ϵ suficientemente pequeno o sistema (3-6) tem uma única órbita periódica hiperbólica.

Considere agora, a equação de Lienard, veja [23]:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y - \epsilon[\mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3] \\
\dot{y} &= -x,
\end{aligned} \tag{3-8}$$

com $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$. O sistema não perturbado tem um centro na origem, com uma família de órbitas periódicas de um parâmetro dada por $\gamma_\alpha(t) = (\alpha \cos(t), \alpha \sin(t))^T$ de período $T_\alpha = 2\pi$. Logo

$$\begin{aligned}
M(\mu, \alpha) &= \int_0^{T_\alpha} (f(\gamma_\alpha(t)) \wedge g(\gamma_\alpha(t), \mu)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} [\mu_1 \alpha^2 \cos^2(t) + \mu_2 \alpha^3 \cos^3(t) + \mu_3 \alpha^4 \cos^4(t)] dt \\
&= -2\pi \alpha^2 \left[\frac{\mu_1}{2} + \frac{3}{8} \mu_3 \alpha^2 \right].
\end{aligned}$$

Assim, $M(\mu, \alpha) = 0$ tem uma solução se, e somente se, $\mu_1\mu_3 < 0$. Pelo Teorema 3.4, se $\mu_1\mu_3 < 0$, então para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (3-8) tem um único ciclo limite, o qual é aproximadamente um círculo de raio

$$\alpha = \sqrt{\frac{4|\mu_1|}{3|\mu_3|}} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3-9)$$

Para maiores informações sobre este método, o leitor pode consultar [8, 29].

Método de Melnikov e o Método de Averaging para Sistemas Quase Integráveis Suaves por Partes

Nos capítulos anteriores fizemos uma breve introdução aos métodos de Melnikov e o Averaging. Agora, neste capítulo de acordo com [17], vamos direcionar o estudo desses métodos para os sistemas quase-integráveis suaves por partes. Assim, apresentamos os resultados principais da teoria do Averaging para essa classe de sistemas a qual é utilizada no estudo das soluções periódicas de sistemas dinâmicos, assim como o método de Melnikov, que também é uma ferramenta muito útil no estudo da existência de ciclos limite.

4.1 Método de Melnikov

Primeramente damos a definição do método e apresentamos alguns resultados relacionados. Estabelecemos o método para sistemas quase-integráveis suaves por partes em dimensão maior ou igual que 2.

Sendo assim, considere um sistema quase-integrável suave por partes n -dimensional

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} f^+(\mathbf{x}) + \epsilon g^+(\mathbf{x}), & x_1 \geq 0, & (4.1a) \\ f^-(\mathbf{x}) + \epsilon g^-(\mathbf{x}), & x_1 < 0, & (4.1b) \end{cases} \quad (4-1)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, f^\pm e g^\pm são funções vetoriais \mathcal{C}^∞ definidas sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com $U \cap \{x_1 = 0\} \neq \emptyset$, $0 \leq \epsilon \ll 1$.

De acordo com [27] fazemos as seguintes suposições básicas para o sistema não perturbado $(4.1a)|_{\epsilon=0}$:

- (H1)** O subsistema $(4.1a)|_{\epsilon=0}$ ($(4.1b)|_{\epsilon=0}$, resp.) tem $n - 1$ integrais primeiras \mathcal{C}^∞ diferentes $H_i^+(\mathbf{x})$ ($H_i^-(\mathbf{x})$, resp.), $i = 1, 2, \dots, n - 1$, tal que para cada $\mathbf{x} \in U^+$

($\mathbf{x} \in U^-$, resp.), os gradientes

$$DH_1^+, DH_2^+, \dots, DH_{n-1}^+ \quad (DH_1^-, DH_2^-, \dots, DH_{n-1}^-, \text{resp.})$$

são linearmente independentes, onde

$$U^+ = \{\mathbf{x} \in U | x_1 \geq 0\} \quad (U^- = \{\mathbf{x} \in U | x_1 < 0\}, \text{resp.})$$

Isto é, quando $\epsilon = 0$ estamos assumindo que o campo (4-1) é integrável.

(H2) Seja $\mathbf{H}^\pm(\mathbf{x}) = (H_1^\pm(\mathbf{x}), H_2^\pm(\mathbf{x}), \dots, H_{n-1}^\pm(\mathbf{x}))^T$. Existe um subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para cada $h \equiv (h_1, h_2, \dots, h_{n-1})^T \in V$, onde h é o vetor dos níveis de energia da integral $\mathbf{H}^+(\mathbf{x})$, as hipersuperfícies

$$L_h^+ = \{\mathbf{x} \in U^+ | \mathbf{H}^+(\mathbf{x}) = h\} \quad e \quad L_h^- = \{\mathbf{x} \in U^- | \mathbf{H}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^-(A(h))\}$$

não contêm pontos críticos de (4-1)| $\epsilon=0$. Além disso, estas hipersuperfícies têm dois pontos finais diferentes $A(h)$ e $B(h)$ em comum, satisfazendo

$$A(h) = (o, a_2(h), \dots, a_n(h))^T \in U, \quad B(h) = (o, b_2(h), \dots, b_n(h))^T \in U,$$

pois estamos parametrizando as curvas L_h^\pm em função do nível de energia h . A órbita L_h^+ começa em $A(h)$ e termina em $B(h)$, e L_h^- começa a partir de $B(h)$ e finaliza em $A(h)$. Assim, $L_h = L_h^+ \cup L_h^-$ é uma órbita fechada de (4-1)| $\epsilon=0$ para $h \in V$.

(H3) As hipersuperfícies L_h^\pm , $h \in V$, não são tangentes ao plano de descontinuidade $x_1 = 0$ nos pontos $A(h)$ e $B(h)$, ou seja, geometricamente, as hipersuperfícies L_h^\pm atravessam a descontinuidade, isto é, são trajetórias de costura. Em outras palavras, para cada $h \in V$

$$\mathbf{J}^\pm(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \frac{\partial(H_1^\pm, H_2^\pm, \dots, H_{n-1}^\pm)}{\partial(x_2, x_3, \dots, x_n)}$$

não é igual a zero em cada um dos pontos $A(h)$ e $B(h)$.

Lema 4.1. *Se (H1) – (H3) são válidas. Então $A(h), B(h) \in C^\infty(V)$*

Demonstração. Seja $h_0 \in V$. Por (H2) temos que $\mathbf{H}^+(A(h_0)) = h_0$ e por (H3) $\mathbf{J}^+(A(h_0)) \neq 0$. Assim, de acordo com o Teorema da Função Implícita (1.2), a equação

$$\mathbf{H}^+(0, x_2, \dots, x_n) = h$$

tem uma única solução

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (F_{12}(h), F_{13}(h), \dots, F_{1n}(h)) \equiv \tilde{F}(h) \in \mathcal{C}^\infty.$$

para h perto de h_0 tal que $\mathbf{H}^+(0, \tilde{F}(h)) \equiv h$ e $(0, \tilde{F}(h_0))^T = A(h_0)$. Portanto $A(h) \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Similarmente, $B(h) \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Isto completa a prova. \square

Segundo [27] pelas suposições **(H1)** – **(H3)**, $\{L_h : h \in V\}$ é uma família de órbitas periódicas do sistema $(4-1)|_{\epsilon=0}$ e cada L_h é suave por partes como mostra a Figura 4.1.

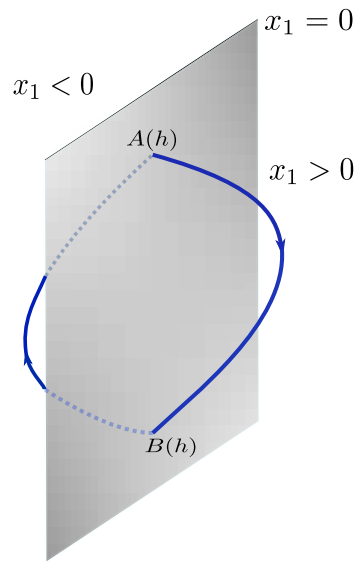


Figura 4.1: Órbita periódica do sistema $(4-1)|_{\epsilon=0}$.

A seguir, faremos a análise para $\epsilon \neq 0$, ou seja, vamos perturbar o sistema $(4-1)|_{\epsilon=0}$. Sendo assim, damos uma definição da função de bifurcação do sistema $(4-1)$.

Considere a órbita do subsistema $(4-1a)$ começando em $A(h)$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, denotamos seu primeiro ponto de interseção com o hiperplano $x_1 = 0$ por $B_\epsilon(h)$. Para a órbita do subsistema $(4-1b)$ começando em $B_\epsilon(h)$ denotamos seu primeiro ponto de interseção com o hiperplano $x_1 = 0$ por $A_\epsilon(h)$. Veja Figura 4.2, onde

$$A_\epsilon(h) = (0, d_2(h, \epsilon), \dots, d_n(h, \epsilon))^T, \quad B_\epsilon(h) = (0, c_2(h, \epsilon), \dots, c_n(h, \epsilon))^T.$$

Note que, a primeira coordenada de $B_\epsilon(h)$ e $A_\epsilon(h)$ é nula, pois ambos pontos partem da região de descontinuidade, e são suaves em ϵ com $A_\epsilon(h)|_{\epsilon=0} = A(h)$. Então podemos escrever

$$\mathbf{H}^+(A_\epsilon(h)) - \mathbf{H}^+(A(h)) = \epsilon F(h, \epsilon). \quad (4-2)$$

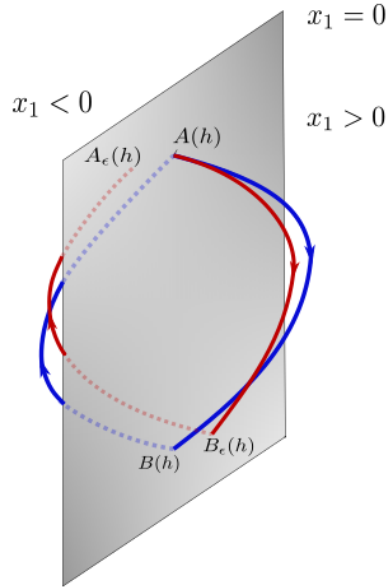


Figura 4.2: A aplicação de Poincaré do sistema (4-1).

Onde, $F(h, \epsilon)$ é uma função $(n - 1)$ -dimensional, chamada **função de bifurcação** do sistema (4-1).

Observação 4.2. Note que com a equação (4-2) estamos dando condições para que o sistema (4-1) possua ciclos limite. Estamos calculando a distância desde $\mathbf{H}^+(A_\epsilon(h))$ a $\mathbf{H}^+(A(h))$, e se $\mathbf{H}^+(A_\epsilon(h)) - \mathbf{H}^+(A(h))$ for zero quer dizer que voltamos sobre o mesmo ponto, dessa forma podemos escrever essa diferença como (4-2). Assim, o que nos interessa é ter uma expressão para a função de bifurcação $\epsilon F(h, \epsilon)$.

A seguir vamos enunciar um lema que trata de algumas propriedades importantes da função de bifurcação $F(h, \epsilon)$, cuja demonstração pode ser encontrada em [27].

Lema 4.3. Para cada $h_0 \in V$, existe $\epsilon_0(h_0) > 0$ tal que $F \in C^\infty$ para $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, $h \in V$ com $|h - h_0| < \epsilon_0$. Em particular, $F(h, 0) \in C^\infty$ para $h \in V$. Além disso, para $h_0 \in V$, o sistema (4-1) tem uma órbita periódica perto de L_{h_0} se, e somente se, $F(h, \epsilon)$ tem um zero em h perto de h_0 para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Portanto, tomando a expansão em série de Taylor em ϵ , para $\epsilon > 0$ pequeno temos

$$\epsilon F(h, \epsilon) = M_1 \epsilon + M_2 \epsilon^2 + \dots + M_k \epsilon^k + \dots,$$

para qualquer inteiro $k \geq 0$. Mas, como cada M_1, M_2, \dots, M_k depende do nível de energia h então temos

$$\epsilon F(h, \epsilon) = M_1(h) \epsilon + M_2(h) \epsilon^2 + \dots + M_k(h) \epsilon^k + \dots$$

logo

$$\epsilon F(h, \epsilon) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i M_i(h) + O(\epsilon^{k+1}) \quad (4-3)$$

onde $M_i(h)$ é chamada de função vetorial de Melnikov de ordem i . Para obter a expressão da função de bifurcação F , devemos obter a expressão para as funções $M_i(h)$. Agora, introduzimos algumas definições e teoremas dados em [27].

Definição 4.4. *Seja $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ um vetor $n \times 1$ ($n \geq 2$). Definimos \bar{s} como o vetor $(n-1) \times 1$ dado por $\bar{s} = (s_2, \dots, s_n)^T$ satisfazendo*

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \bar{s} \end{pmatrix}$$

Definição 4.5. *Seja S uma matriz $(n-1) \times n$ ($n \geq 2$). Definimos \bar{S} como a matriz $(n-1) \times (n-1)$ satisfazendo $S = (\beta, \bar{S})$ onde $\beta \in \mathbb{R}^n$ é a primeira coluna de S .*

Agora, suponha que

$$DH^\pm = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{pmatrix},$$

onde $a_{ij} = \frac{\partial H_i^\pm}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ com $1 \leq i \leq n-1$ e $1 \leq j \leq n$. Mas como $x_1 = 0$ temos

$$DH^\pm = \begin{pmatrix} * & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ * & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, pela definição 4.5 podemos escrever

$$DH^\pm = \left(* \quad \overline{DH^\pm(\mathbf{x})} \right), \quad (4-4)$$

onde

$$\overline{DH^\pm(\mathbf{x})} = \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{pmatrix},$$

ou seja

$$\overline{D\mathbf{H}^\pm(\mathbf{x})} = \frac{\partial(H_1^\pm, H_2^\pm, \dots, H_{n-1}^\pm)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (4-5)$$

Seja $M_1(h)$ a função vetorial de Melnikov de primeira ordem do sistema (4-1). Se existe $h_0 \in V$, tal que $M_1(h_0) = 0$ e $\det(DM_1(h_0)) \neq 0$, então pelo Teorema da Função Implícita, podemos obter um zero de $F(h, \epsilon)$ em h perto de h_0 para $\epsilon > 0$. De acordo com [27], $M_1(h)$ desempenha um papel importante no estudo de bifurcações de órbitas periódicas. No teorema a seguir, damos uma fórmula da função de Melnikov de primeira ordem, $M_1(h)$, para o sistema (4-1).

Teorema 4.6. *Suponha que o sistema (4-1) satisfaz (H1)-(H3). Então a função vetorial de Melnikov de primeira ordem tem uma expressão da forma*

$$M_1(h) = \int_{AB} D\mathbf{H}^+ g^+ dt + \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \int_{BA} D\mathbf{H}^- g^- dt. \quad (4-6)$$

Além disso, se $M_1(h_0) = 0$ e $\det(DM_1(h_0)) \neq 0$, para algum $h_0 \in V$, então para $\epsilon > 0$ existe uma única órbita periódica do sistema (4-1) perto de L_{h_0} .

Demonstração. Note que $\mathbf{H}^+(A_\epsilon) - \mathbf{H}^+(A)$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+(A_\epsilon) - \mathbf{H}^+(A) &= [\mathbf{H}^+(A_\epsilon) - \mathbf{H}^-(A_\epsilon)] + [\mathbf{H}^-(A_\epsilon) - \mathbf{H}^-(B_\epsilon)] \\ &\quad + [\mathbf{H}^-(B_\epsilon) - \mathbf{H}^+(B_\epsilon)] + [\mathbf{H}^+(B_\epsilon) - \mathbf{H}^+(A)] \\ &\equiv L_1 + L_2 + L_3 + L_4. \end{aligned} \quad (4-7)$$

Agora, derivando (4-2) com respeito a ϵ temos

$$D_\epsilon[\mathbf{H}^+(A_\epsilon(h)) - \mathbf{H}^+(A(h))] = D_\epsilon[\epsilon F(h, \epsilon)] = F(h, \epsilon) + \epsilon D_\epsilon[F(h, \epsilon)]$$

e avaliando em $(h, 0)$

$$D_\epsilon[\mathbf{H}^+(A_\epsilon(h)) - \mathbf{H}^+(A(h))]|_{\epsilon=0} = F(h, 0) = M_1(h). \quad (4-8)$$

Portanto, de (4-7) e (4-8) temos que

$$\begin{aligned} M_1(h) &= D_\epsilon[\mathbf{H}^+(A_\epsilon(h)) - \mathbf{H}^+(A(h))]|_{\epsilon=0} \\ &= D_\epsilon L_1|_{\epsilon=0} + D_\epsilon L_2|_{\epsilon=0} + D_\epsilon L_3|_{\epsilon=0} + D_\epsilon L_4|_{\epsilon=0}, \end{aligned} \quad (4-9)$$

logo, por (4-7) temos

$$\begin{aligned}
D_\epsilon L_1|_{\epsilon=0} &= D_\epsilon[\mathbf{H}^+(A_\epsilon) - \mathbf{H}^-(A_\epsilon)]|_{\epsilon=0} \\
&= (D\mathbf{H}^+(A_\epsilon)D_\epsilon A_\epsilon)|_{\epsilon=0} - (D\mathbf{H}^-(A_\epsilon)D_\epsilon A_\epsilon)|_{\epsilon=0} \\
&= D\mathbf{H}^+(A_0)D_\epsilon A_\epsilon|_{\epsilon=0} - D\mathbf{H}^-(A_0)D_\epsilon A_\epsilon|_{\epsilon=0} \\
&= [D\mathbf{H}^+(A) - D\mathbf{H}^-(A)]D_\epsilon A_\epsilon|_{\epsilon=0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\epsilon L_2|_{\epsilon=0} &= D_\epsilon[\mathbf{H}^-(A_\epsilon) - \mathbf{H}^-(B_\epsilon)]|_{\epsilon=0} \\
&= D\mathbf{H}^-(A)D_\epsilon A_\epsilon|_{\epsilon=0} - D\mathbf{H}^-(B)D_\epsilon B_\epsilon|_{\epsilon=0}, \tag{4-10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\epsilon L_3|_{\epsilon=0} &= D_\epsilon[\mathbf{H}^-(B_\epsilon) - \mathbf{H}^+(B_\epsilon)]|_{\epsilon=0} \\
&= [D\mathbf{H}^-(B) - D\mathbf{H}^+(B)]D_\epsilon B_\epsilon|_{\epsilon=0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\epsilon L_4|_{\epsilon=0} &= D_\epsilon[\mathbf{H}^+(B_\epsilon) - \mathbf{H}^+(A)]|_{\epsilon=0} \\
&= D\mathbf{H}^+(B)D_\epsilon B_\epsilon|_{\epsilon=0}.
\end{aligned}$$

Como a primeira coordenada de A_ϵ e B_ϵ é igual a zero, então a primeira componente de ambos, $D_\epsilon A_\epsilon$ e $D_\epsilon B_\epsilon$ é igual a zero. Assim pela definição (4.4) e as equações (4-4) e (4-5) obtemos

$$\begin{aligned}
D\mathbf{H}^\pm(A)D_\epsilon A_\epsilon &= \overline{D\mathbf{H}^\pm(A)}\overline{D_\epsilon A_\epsilon}, \\
D\mathbf{H}^\pm(B)D_\epsilon B_\epsilon &= \overline{D\mathbf{H}^\pm(B)}\overline{D_\epsilon B_\epsilon}. \tag{4-11}
\end{aligned}$$

Agora por (H3) as matrizes quadradas $\overline{D\mathbf{H}^\pm(A)}$ e $\overline{D\mathbf{H}^\pm(B)}$ são invertíveis. Denote suas matrizes inversas por $[\overline{D\mathbf{H}^\pm(A)}]^{-1}$ e $[\overline{D\mathbf{H}^\pm(B)}]^{-1}$ respectivamente. Desde (H1) temos que

$$D\mathbf{H}^\pm(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{H}^\pm(\mathbf{x})f^\pm(\mathbf{x}) = 0, \tag{4-12}$$

para cada $\mathbf{x} \in U^\pm$. Portanto, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
L_2 &= \mathbf{H}^-(A_\epsilon) - \mathbf{H}^-(B_\epsilon) = \int_{\widehat{B_\epsilon A_\epsilon}} d\mathbf{H}^- \\
&= \int_{\widehat{B_\epsilon A_\epsilon}} D\mathbf{H}^-(\mathbf{x})(f^-(\mathbf{x}) + \epsilon g^-(\mathbf{x}))dt \\
&= \int_{\widehat{B_\epsilon A_\epsilon}} D\mathbf{H}^-(\mathbf{x})f^-(\mathbf{x})dt + \epsilon \int_{\widehat{B_\epsilon A_\epsilon}} D\mathbf{H}^-(\mathbf{x})g^-(\mathbf{x})dt. \tag{4-13}
\end{aligned}$$

Agora por (4-12) temos:

$$L_2 = \epsilon \left[\int_{\widehat{BA}} D\mathbf{H}^-(\mathbf{x})g^-(\mathbf{x})dt + O(\epsilon) \right].$$

Segue diretamente que

$$D_\epsilon L_2|_{\epsilon=0} = \int_{\widehat{BA}} D\mathbf{H}^- g^- dt. \quad (4-14)$$

Similarmente, temos

$$L_4 = \mathbf{H}^+(B_\epsilon) - \mathbf{H}^+(A) = \int_{\widehat{AB}_\epsilon} d\mathbf{H}^+ = \epsilon \left[\int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt + O(\epsilon) \right]$$

e

$$D_\epsilon L_4|_{\epsilon=0} = \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt. \quad (4-15)$$

Assim, ao substituir a segunda equação de (4-11) e (4-15) na última fórmula em (4-10) tem-se

$$\overline{D_\epsilon B_\epsilon}|_{\epsilon=0} = \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1} \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt. \quad (4-16)$$

Substituindo (4-11), (4-14) e (4-16) na segunda fórmula em (4-10) obtemos

$$\overline{D_\epsilon A_\epsilon}|_{\epsilon=0} = \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \left(\int_{\widehat{BA}} D\mathbf{H}^- g^- dt + \overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1} \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt \right) \quad (4-17)$$

e combinando (4-10), (4-11), (4-16) e (4-17) obtemos

$$D_\epsilon L_1|_{\epsilon=0} = \left(\overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} - I_{n-1} \right) \left(\int_{\widehat{BA}} D\mathbf{H}^- g^- dt + \overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1} \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt \right) \quad (4-18)$$

e

$$D_\epsilon L_3|_{\epsilon=0} = \overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1} \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt - \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt. \quad (4-19)$$

Além disso, substituindo (4-14), (4-15), (4-18) e (4-19) em (4-9) segue que:

$$M_1(h) = \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1} \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt + \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^- g^- dt \right]. \quad (4-20)$$

De outro lado, por (H2), temos

$$\mathbf{H}^+(A(h)) = \mathbf{H}^+(B(h)) = h, \quad \mathbf{H}^-(A(h)) = \mathbf{H}^-(B(h)).$$

Diferenciando ambos lados das duas igualdades acima com respeito a h obtemos

$$\overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{[DA(h)]^T} \right]^T = \overline{D\mathbf{H}^+(B)} \left[\overline{[DB(h)]^T} \right]^T = I \quad (4-21)$$

e

$$\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \left[\overline{[DA(h)]^T} \right]^T = \overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{[DB(h)]^T} \right]^T. \quad (4-22)$$

De (4-21) obtemos

$$\left[\overline{[DB(h)]^T} \right]^T = \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1}.$$

Portanto, por (4-22), segue-se que

$$\begin{aligned} \left[\overline{[DA(h)]^T} \right]^T &= \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{[DB(h)]^T} \right]^T \\ &= \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4-23)$$

Substituindo (4-23) em (4-21), obtemos

$$\overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \overline{D\mathbf{H}^-(B)} \left[\overline{D\mathbf{H}^+(B)} \right]^{-1} = I. \quad (4-24)$$

Finalmente, substituindo (4-24) em (4-20) temos

$$M_1(h) = \int_{\widehat{AB}} \overline{D\mathbf{H}^+} g^+ dt + \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \int_{\widehat{BA}} \overline{D\mathbf{H}^-} g^- dt.$$

□

Para o caso $n = 2$ o sistema (4-1) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} p^+(x, y) + \epsilon f^+(x, y) \\ q^+(x, y) + \epsilon g^+(x, y) \end{pmatrix}, & x \geq 0 \\ \begin{pmatrix} p^-(x, y) + \epsilon f^-(x, y) \\ q^-(x, y) + \epsilon g^-(x, y) \end{pmatrix}, & x < 0 \end{cases}$$

Suponha que o sistema não perturbado tem fatores de integração μ_1 e μ_2 e integrais primeiras H^+ e H^- respectivamente para $x \geq 0$ e $x < 0$, satisfazendo

$$\mu_1 p^+ = H_y^+, \quad \mu_1 q^+ = -H_x^+$$

$$\mu_2 p^- = H_y^-, \quad \mu_2 q^- = -H_x^-$$

Assim, de acordo com [13] e [18] a fórmula (4-6) torna-se

$$M_1(h) = \int_{L_h^+} \mu_1(x, y)(g^+(x, y)dx - f^+(x, y)dy) \\ + \frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)} \int_{L_h^-} \mu_2(x, y)(g^-(x, y)dx - f^-(x, y)dy).$$

Na seguinte seção, estabelecemos o método do Averaging relacionado ao sistema (4-1).

4.2 Método do Averaging de Ordem Superior

Agora, estabelecemos o método do Averaging relacionado ao sistema (4-1), que como já vimos anteriormente é uma ferramenta importante para estudar a bifurcação de ciclos limite. Para isso, primeiro introduzimos uma transformação de variáveis para o sistema (4-1). Seja

$$L_h^+ : \mathbf{x} = q^+(t, h), \quad 0 \leq t \leq T_1(h),$$

$$L_h^- : \mathbf{x} = q^-(t, h), \quad T_1(h) \leq t \leq T(h),$$

satisfazendo

- (a) $q^+(0, h) = A(h)$,
- (b) $q^+(T_1(h), h) = q^-(T_1(h), h) = B(h)$,
- (c) $q^-(T(h), h) = A(h)$,

onde $T_1(h)$ denota o tempo desde $A(h)$ a $B(h)$ ao longo de L_h^+ e $T(h)$ denota o período mínimo positivo da órbita periódica L_h . Sabemos pelo lema (4.1) que $A(h)$ e $B(h)$ são $\mathcal{C}^\infty(V)$ do mesmo modo que $T_1(h)$ em $h \in V$. Seja,

$$q(t, h) = \begin{cases} q^+(t, h), & 0 \leq t \leq T_1(h) \\ q^-(t, h), & T_1 \leq t \leq T(h). \end{cases} \quad (4-25)$$

Tomando

$$t = \frac{T(h)}{2\pi} \theta \quad (4-26)$$

na equação (4-25) obtemos uma função

$$G(\theta, h) = q\left(\frac{T(h)}{2\pi} \theta, h\right), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (4-27)$$

Note que, pela definição de q^+ e q^- , q é uma função definida por partes de classe \mathcal{C}^∞ em cada uma das partes, conseqüentemente $G(\theta, h)$ é definida da mesma forma. Além disso, de (4-26) obtemos

$$\theta(h) = \frac{t}{T(h)}2\pi \quad (4-28)$$

e substituindo t por $T_1(h)$ e por $T(h)$ na equação acima conseguimos os intervalos onde θ vai estar definido. Desse modo, $G(h, \theta)$ pode ser escrita como

$$G(\theta, h) = \begin{cases} G^+(\theta, h), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h) \\ G^-(\theta, h), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (4-29)$$

onde $\theta_1(h) = \frac{T_1(h)}{T(h)}2\pi \in (0, 2\pi)$ é \mathcal{C}^∞ em $h \in V$ e

$$G^+(\theta, h) = q^+ \left(\frac{T(h)}{2\pi}\theta, h \right), \quad G^-(\theta, h) = q^- \left(\frac{T(h)}{2\pi}\theta, h \right).$$

Finalmente, observe que a mudança (4-28) é simplesmente um reescalonamento do tempo para que o tempo de retorno da órbita L_h seja 2π a medida que h varia.

O seguinte resultado é uma generalização do Lemma 1.1 em [11] de sistemas suaves para sistemas não suaves.

Lema 4.7. *Existe um único vetor, de dimensão $1 \times n$, 2π periódico definido em duas partes e de classe \mathcal{C}^∞ em cada uma delas, dado por*

$$\alpha(\theta, h) = \begin{cases} \alpha^+(\theta, h), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ \alpha^-(\theta, h), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

tal que

$$\alpha(\theta, h)D_h G(\theta, h) = 0, \quad \alpha(\theta, h)D_\theta G(\theta, h) = 1,$$

onde $D_h G(\theta, h)$ e $D_\theta G(\theta, h)$ são dados por

$$D_h G(\theta, h) = \begin{cases} D_h G^+(\theta, h), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ D_h G^-(\theta, h), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$D_\theta G(\theta, h) = \begin{cases} D_\theta G^+(\theta, h), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ D_\theta G^-(\theta, h), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

Demonstração. Primeiro provamos que os $n - 1$ vetores verticais da matriz $D_h G$ de tamanho $n \times (n - 1)$ são linearmente independentes um do outro. Note que, de

acordo a (4-26), se

- $\theta = 0$ então $t = 0$, assim

$$G^+(0, h) = q^+(0, h) = A(h)$$

logo, por **(H2)**

$$\mathbf{H}^+(G^+(0, h)) = \mathbf{H}^+(q^+(0, h)) = \mathbf{H}^+(A(h)) = h;$$

- $\theta = \theta_1(h)$ então $t = T_1(h)$, logo

$$G^+(\theta_1(h), h) = q^+(T_1(h), h) = B(h)$$

e de novo por **(H2)**

$$\mathbf{H}^+(G^+(\theta_1(h), h)) = \mathbf{H}^+(q^+(T_1(h), h)) = \mathbf{H}^+(B(h)) = \mathbf{H}^+(A(h)) = h.$$

Portanto

$$\mathbf{H}^+(G^+(\theta, h)) = \mathbf{H}^+(A(h)) = h, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \theta_1(h).$$

Do exposto acima obtemos

$$\begin{aligned} D\mathbf{H}^+(G^+)D_\theta G^+ &= \mathbf{0}, \\ D\mathbf{H}^+(G^+)D_h G^+ &= D\mathbf{H}^+(A)D_h A = I, \end{aligned} \tag{4-30}$$

onde I denota a matriz identidade $(n-1) \times (n-1)$, $\mathbf{0}$ a matriz zero $(n-1) \times 1$. Isto implica que

$$\text{Rank}(D\mathbf{H}^+(G^+)) = \text{Rank}(D_h G^+) = \text{Rank}(I) = n-1.$$

De outro lado temos que, se

- $\theta = \theta_1(h)$, então $t = T_1(h)$ e

$$G^-(\theta_1(h), h) = q^-(T_1(h), h) = B(h),$$

por **(H2)**

$$\mathbf{H}^-(G^-(\theta_1(h), h)) = \mathbf{H}^-(q^-(T_1(h), h)) = \mathbf{H}^-(B(h)) = \mathbf{H}^-(A(h));$$

- $\theta = 2\pi$, $t = T(h)$ logo,

$$G^-(2\pi, h) = q^-(T(h), h) = A(h)$$

e assim,

$$\mathbf{H}^-(G^-(2\pi, h)) = \mathbf{H}^-(q^-(T(h), h)) = \mathbf{H}^-(A(h)).$$

Daí que

$$\mathbf{H}^+(G^-(\theta, h)) = \mathbf{H}^-(A(h)), \quad \text{para } \theta_1(h) \leq \theta \leq 2\pi.$$

Como $A(h) = (0, a_2(h), \dots, a_n(h))$, segue que

$$\begin{aligned} D\mathbf{H}^-(G^-)D_\theta G^- &= \mathbf{0}, \\ D\mathbf{H}^-(G^-)D_h G^- &= D\mathbf{H}^-(A)D_h(A) = \overline{D\mathbf{H}^-(A)} \left[\overline{[D_h A]^T} \right]^T. \end{aligned} \quad (4-31)$$

A partir de **(H3)** temos que $\overline{D\mathbf{H}^-(A)}$ é invertível e além disso, pela segunda equação em (4-30), temos

$$D\mathbf{H}^+(A)D_h A = \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{[D_h A]^T} \right]^T = I. \quad (4-32)$$

Portanto $\left[\overline{[D_h A]^T} \right]^T$ é invertível. Então por (4-31) $D\mathbf{H}^-(G^-)D_h G^-$ é invertível, o qual implica

$$\text{Rank}(D\mathbf{H}^-(G^-)) = \text{Rank}(D_h G^-) = n - 1.$$

Da definição de $D_h G$, vemos que $\text{Rank}(D_h G) = n - 1$, isto significa que os $(n - 1)$ vetores verticais da matriz $D_h G$ $n \times (n - 1)$ são linearmente independentes. A seguir provamos que os $n - 1$ vetores verticais da matriz $D_h G$ de tamanho $n \times (n - 1)$ e o vetor $D_\theta G$ juntos são linearmente independentes para cada $(\theta, h) \in [0, 2\pi] \times V$ fixo.

Procedendo por absurdo, suponha que o vetor $D_\theta G$ é combinação linear das $n - 1$ colunas de $D_h G$ para algum (θ_0, h_0) . Isto é, existe um vetor vertical $(n - 1) \times 1$ β tal que

$$D_\theta G(\theta_0, h_0) = D_h G(\theta_0, h_0) \cdot \beta. \quad (4-33)$$

Temos dois casos para considerar:

1. $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1(h_0)$. Pela definição de G e do fato que q é solução de $(4-1)_{\epsilon=0}$ temos que

$$D_\theta G(\theta, h) = D_\theta q^+ \left(\frac{T(h)}{2\pi} \theta, h \right) \frac{T(h)}{2\pi} = \frac{T(h)}{2\pi} f^+(G^+). \quad (4-34)$$

Multiplicando por $D\mathbf{H}^+(G^+)$ a ambos lados de (4-33) à esquerda temos

$$D\mathbf{H}^+(G^+)D_\theta G(\theta_0, h_0) = D\mathbf{H}^+(G^+)D_h DG^+(\theta_0, h_0) \cdot \beta \quad (4-35)$$

e por (4-30), $\beta = 0$. Assim, por (4-33) e (4-34)

$$f^+(G^+(\theta_0, h_0)) = 0 \quad (4-36)$$

ou seja, o ponto (θ_0, h_0) é um ponto crítico do sistema (4-1) $_{\epsilon=0}$, mas isto contradiz a hipótese **(H2)**.

2. $\theta_1(h_0) < \theta_0 \leq 2\pi$. Como antes, multiplicamos por $D\mathbf{H}^-(G^-)$ a ambos os lados de (4-33) à esquerda e usando (4-31) temos $\beta = 0$. Também, para $\theta_1(h_0) < \theta_0 \leq 2\pi$, segue que

$$D_\theta G = \frac{T(h)}{2\pi} f^-(G^-). \quad (4-37)$$

Portanto de (4-33) e (4-37) obtemos $f^-(G^-(\theta_0, h_0)) = 0$, que também é uma contradição com **(H2)**.

Finalmente, provamos a existência e unicidade de $\alpha(\theta, h)$.

- a. Para $\theta \in [0, \theta_1(h)]$, denote por S_1 o hiperplano gerado pelos $n - 1$ vetores horizontais da matriz $D\mathbf{H}^+$ $(n - 1) \times n$ e por S_2 o hiperplano gerado pelos $n - 1$ vetores verticais da matriz $D_h G^+$ $n \times (n - 1)$. Desde (4-30) vemos que o vetor $D_\theta G^+$ é normal a S_1 . Além disso, temos que $D_\theta G^+$ não é paralelo a S_2 . Com efeito, suponha S_1 paralelo a S_2 , logo pela primeira equação em (4-30), $D\mathbf{H}^+ D_h G^+ = \mathbf{0}$, contradizendo a última equação de (4-30). Por tanto o ângulo ϕ entre S_1 e S_2 pode ser tomado para satisfazer $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$.

Agora, se $\phi = 0$, S_1 é paralelo a S_2 . Isto é, cada um dos $n - 1$ vetores verticais de $D_h G^+$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores horizontais de $D\mathbf{H}^+$. Então o vetor α^+ é dado por

$$\alpha^+ = \frac{D_\theta G^{+T}}{|D_\theta G^+|^2},$$

de onde

$$\alpha^+(\theta, h) D_\theta G^+(\theta, h) = 1.$$

Além disso,

$$\alpha^+(\theta, h)D_hG^+(\theta, h) = \frac{D_\theta G^{+T}(\theta, h)D_hG^+(\theta, h)}{|D_\theta G^+(\theta, h)|^2},$$

e por (4-30) temos

$$D_\theta G^{+T}DH^{+T} = 0,$$

daí que

$$D_\theta G^{+T}D_hG^+ = 0.$$

Portanto, $\alpha^+(\theta, h)D_hG^+(\theta, h) = 0$.

Seja $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $L = S_1 \cap S_2$. Agora, giramos S_1 em torno da linha reta L com o ângulo ϕ tal que a nova posição de S_1 depois da rotação é a mesma como a posição original de S_2 . Denotemos por γ a nova posição de $D_\theta G^+$ após a rotação, onde

$$\gamma = D_\theta G^+ \cos \phi.$$

Então o vetor γ satisfaz

$$\gamma \cdot D_\theta G^+ = |D_\theta G^+|^2 \cos \phi > 0.$$

Definimos α^+ como

$$\alpha^+ = \frac{\gamma}{|D_\theta G^+|^2 \cos \phi}$$

e consequentemente

$$\alpha^+ D_\theta G^+ = \frac{\gamma \cdot D_\theta G^+}{|D_\theta G^+|^2 \cos \phi} = 1.$$

Além disso, pela definição de γ vemos que o vetor γ é normal a S_2 . Assim temos

$$\alpha^+ D_hG^+ = 0.$$

- b. Procedendo analogamente como no exposto acima, para $\theta \in (\theta_1(h), 2\pi]$, denote por S'_1 o hiperplano gerado pelos $n - 1$ vetores horizontais da matriz DH^- , $(n - 1) \times n$, e por S'_2 o hiperplano gerado pelos $n - 1$ vetores verticais da matriz D_hG^- . Assumimos que o ângulo ϕ' entre S'_1 e S'_2 satisfaz $0 \leq \phi' < \frac{\pi}{2}$. Então escolhemos

$$\alpha^+ = \begin{cases} \frac{D_\theta G^{-T}}{|D_\theta G^{-T}|^2}, & \phi' = 0, \\ \frac{\gamma'}{|D_\theta G^-|^2 \cos \phi'}, & 0 < \phi' < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

onde γ' denota a nova posição de $D_\theta G^-$ após a rotação, isto é, $\gamma' = D_\theta G^- \cos \phi'$

e satisfaz

$$\gamma' \cdot D_\theta G^- = |D_\theta G^-|^2 \cos \phi' > 0.$$

Tome $L' = S'_1 \cap S'_2$, e gire S'_1 ao redor da linha reta L' com o ângulo ϕ' tal que a nova posição de S'_1 após a rotação é a mesma que a posição original de S'_2 . Então de maneira similar à prova para o caso $\theta \in [0, \theta_1(h)]$ temos

$$\alpha^- D_h G^- = 0, \quad \alpha^- D_\theta G^- = 1.$$

□

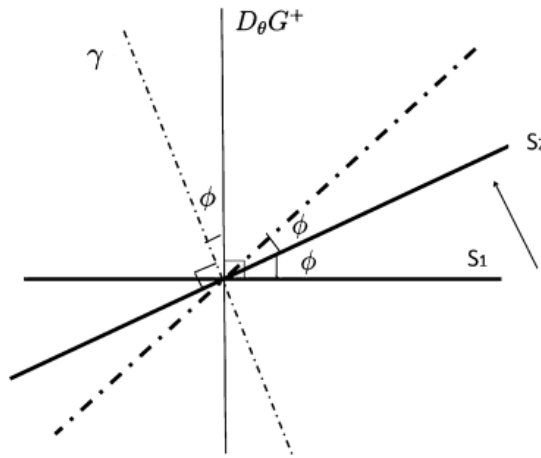


Figura 4.3: A rotação de S_1 , S_2 e $D_\theta G^+$. Figura extraída de [17]

Usando o Lema 4.7, obtemos o próximo lema que é útil para estabelecer um sistema periódico suave por partes a partir do sistema (4-1).

Lema 4.8. *A mudança periódica de variáveis da forma*

$$\mathbf{x} = G(\theta, h), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h \in V \quad (4-38)$$

leva o sistema (4-1) em

$$\theta' = \begin{cases} \frac{2\pi}{T(h)} + \epsilon \alpha^+(\theta, h) g^+(G^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ \frac{2\pi}{T(h)} + \epsilon \alpha^-(\theta, h) g^-(G^-), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (4-39)$$

$$h' = \begin{cases} \epsilon D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h) \\ \epsilon \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4-40)$$

onde a linha denota a derivada em relação ao tempo t e $\alpha^+(\theta, h)$ é definido como no Lema 4.7.

Demonstração. Derivando com relação ao tempo, a ambos os lados de (4-38) e pelas equações (4-1) e (4-29), obtemos

$$\begin{cases} D_\theta G^+ \theta' + D_h G^+ h' = f^+(G^+) + \epsilon g^+(G^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ D_\theta G^- \theta' + D_h G^- h' = f^-(G^-) + \epsilon g^-(G^-), & \theta_1(h) \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4-41)$$

Aplicando o produto interno a ambos os lados de (4-41) à esquerda por $\alpha(\theta, h)$, o qual está definida no Lema 4.7, temos

$$\begin{cases} \alpha^+ D_\theta G^+ \theta' + \alpha^+ D_h G^+ h' = \alpha^+ f^+(G^+) + \alpha^+ \epsilon g^+(G^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ \alpha^- D_\theta G^- \theta' + \alpha^- D_h G^- h' = \alpha^- f^-(G^-) + \alpha^- \epsilon g^-(G^-), & \theta_1(h) \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

E de acordo com o Lema 4.7

$$\begin{cases} \theta' = \alpha^+ f^+(G^+) + \epsilon \alpha^+ g^+(G^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ \theta' = \alpha^- f^-(G^-) + \epsilon \alpha^- g^-(G^-), & \theta_1(h) \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Desde as equações (4-34) e (4-37) temos

$$f^+(G^+) = \frac{2\pi}{T(h)} D_\theta G^+, \quad f^-(G^-) = \frac{2\pi}{T(h)} D_\theta G^-. \quad (4-42)$$

E substituindo a equação acima em θ' e de novo pelo Lema 4.7 obtemos

$$\theta' = \begin{cases} \frac{2\pi}{T(h)} + \epsilon \alpha^+(\theta, h) g^+(G^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ \frac{2\pi}{T(h)} + \epsilon \alpha^-(\theta, h) g^-(G^-), & \theta_1(h) \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4-43)$$

Similarmente, tomando o produto interno a ambos lados da primeira fórmula de (4-41) à esquerda por $D\mathbf{H}^+(G^+)$, temos

$$D\mathbf{H}^+(G^+) D_\theta G^+ \theta' + D\mathbf{H}^+(G^+) D_h G^+ h' = D\mathbf{H}^+(G^+) f^+(G^+) + \epsilon D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+)$$

e por (4-30) a equação acima torna-se

$$h' = D\mathbf{H}^+(G^+) f^+(G^+) + \epsilon D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+) \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1(h).$$

Substituindo a primeira equação de (4-42) na equação anterior e por (4-30), obtemos

$$h' = \epsilon D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+) \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1(h). \quad (4-44)$$

A equação (4-32) implica $[\overline{[D_h A]^T}]^T = [\overline{D\mathbf{H}^+(A)}]^{-1}$, substituindo isto em (4-31)

obtem-se

$$D\mathbf{H}^-(G^-)D_h G^- = D\mathbf{H}^-(A)D_h A = \overline{D\mathbf{H}^-(A)} \left[\overline{[D_h A]^T} \right]^T = \overline{D\mathbf{H}^-(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^+(A)} \right]^{-1}. \quad (4-45)$$

Agora, tomando o produto interno a ambos os lados da segunda fórmula de (4-41) à esquerda por $D\mathbf{H}^-(G^-)$ se obtém

$$D\mathbf{H}^-(G^-)D_\theta G^- \theta' + D\mathbf{H}^-(G^-)D_h G^- h' = D\mathbf{H}^-(G^-)f^-(G^-) + \epsilon D\mathbf{H}^-(G^-)g^-(G^-)$$

e substituindo as equações (4-42) e (4-45) na equação anterior, conseguimos $D\mathbf{H}^-(A)D_h A h' = \epsilon D\mathbf{H}^-(G^-)g^-(G^-)$. Logo

$$\begin{aligned} h' &= [D\mathbf{H}^-(A)D_h A]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-)g^-(G^-) \\ &= \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-)g^-(G^-) \end{aligned} \quad (4-46)$$

para $\theta_1(h) < \theta \leq 2\pi$. Portanto, segue desde (4-44) e (4-46) que

$$h' = \begin{cases} \epsilon D\mathbf{H}^+(G^+)g^+(G^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h) \\ \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-)g^-(G^-), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Assim a prova está completa. \square

Observe que as funções no lado direito de (4-39) e (4-40) são 2π -periódicas em θ . Então, tomando θ como a nova variável independente podemos obter uma equação diferencial 2π periódica, definida em duas partes e de classe \mathcal{C}^∞ em cada parte

$$\frac{dh}{d\theta} = \epsilon R(\theta, h, \epsilon), \quad (4-47)$$

onde

$$R(\theta, h, \epsilon) = \begin{cases} R^+(\theta, h, \epsilon) = \frac{D\mathbf{H}^+(G^+)g^+(G^+)}{2\pi/T(h) + \epsilon\alpha^+(\theta, h)g^+(G^+)}, & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h) \\ R^-(\theta, h, \epsilon) = \frac{\overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-)g^-(G^-)}{2\pi/T(h) + \epsilon\alpha^+(\theta, h)g^+(G^+)}, & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4-48)$$

Agora, expandindo R^+ e R^- em série de Taylor de ordem $k \geq 1$, em termos de ϵ , temos

$$\epsilon R^\pm(\theta, h, \epsilon) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i R_i^\pm(\theta, h) + \epsilon^{k+1} R_{k+1}^\pm(\theta, h, \epsilon). \quad (4-49)$$

Onde,

$$R_i(\theta, h) = \begin{cases} R_i^+(\theta, h), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h) \\ R_i^-(\theta, h), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad i = 1, \dots, k,$$

e

$$R_{k+1}(\theta, h, \epsilon) = \begin{cases} R_{k+1}^+(\theta, h, \epsilon), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h) \\ R_{k+1}^-(\theta, h, \epsilon), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Note que para $i = 1$

$$\begin{aligned} R_1^+(\theta, h) &= \frac{T(h)}{2\pi} D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+), \\ R_1^-(\theta, h) &= \frac{T(h)}{2\pi} \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-). \end{aligned} \quad (4-50)$$

4.2.1 Funções de Averaging de primeira e segunda ordem

Para $h_0 \in V$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, vamos denotar por $h(\theta, h_0, \epsilon)$ a solução da equação (4-47) satisfazendo $h(0, h_0, \epsilon) = h_0$. Logo, a aplicação de Poincaré de (4-47) tem a forma

$$P(h_0, \epsilon) = h(2\pi, h_0, \epsilon) = h_0 + \epsilon d(h_0, \epsilon), \quad (4-51)$$

onde $d(h_0, \epsilon)$ é chamada uma função de bifurcação. Adicionalmente, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e para $h_0 \in V$, a órbita do sistema (4-1) começando em $A(h_0)$ é periódica se, e somente se, a solução $h(\theta, h_0, \epsilon)$ da equação (4-47) é 2π periódica.

Apresentamos a seguir uma propriedade sobre a função de bifurcação similar ao Lema 2.1 em [10].

Lema 4.9. *Para qualquer conjunto compacto $I \subset V$, existe $\epsilon^* > 0$ tal que a função de bifurcação $d(h_0, \epsilon)$ da equação periódica, definida em duas partes, de classe \mathcal{C}^∞ (\mathcal{C}^ω , resp.) em cada uma dessas partes, (4-47) está bem definida e é de classe \mathcal{C}^∞ (\mathcal{C}^ω , resp.) em (h_0, ϵ) para todo $h_0 \in I$, $|\epsilon| < \epsilon^*$.*

Uma função é de classe \mathcal{C}^ω ou analítica, se for de classe \mathcal{C}^∞ e sua série de Taylor em torno de qualquer ponto de seu domínio converge à função em alguma vizinhança do ponto. Portanto, \mathcal{C}^ω está estritamente contida em \mathcal{C}^∞ .

Do lema anterior, dado que $d(h_0, \epsilon)$ é de classe \mathcal{C}^∞ , para qualquer inteiro $k \geq 1$, temos a expansão de Taylor

$$d(h_0, \epsilon) = \sum_{i=1}^k \epsilon^{i-1} f_i(h_0) + \mathcal{O}(\epsilon^k), \quad 0 < |\epsilon| \ll 1, \quad (4-52)$$

onde f_i é conhecida como a função de Averaging de ordem i . Em particular,

$$f_1(h) = \int_0^{2\pi} R_1(\theta, h) d\theta. \quad (4-53)$$

como mostraremos depois.

Lema 4.10. *A função de Averaging de segunda ordem $f_2(h)$ tem a forma*

$$\begin{aligned} f_2(h) = & \int_0^{2\pi} \left(R_2(\theta, h) + D_h R_1(\theta, h) \int_0^\theta R_1(\tau, h) d\tau \right) d\theta \\ & + (R_1^+(\theta_1(h), h) - R_1^-(\theta_1(h), h)) D_h \theta_1(h) \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\theta, h) d\theta, \end{aligned} \quad (4-54)$$

onde

$$D_h R_1(\theta, h) = \begin{cases} D_h R_1^+(\theta, h), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ D_h R_1^-(\theta, h), & \theta_1(h) < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Demonstração. Primeramente deduzimos a solução $h(\theta, h_0, \epsilon)$ da equação (4-47) com a condição inicial $h(0, h_0, \epsilon) = h_0$ para $h_0 \in V$. Assim, consideremos a solução da equação

$$\frac{dh}{d\theta} = \epsilon R^+(\theta, h, \epsilon),$$

satisfazendo $h(0, h_0, \epsilon) = h_0$, denotada por $h^+(\theta, h_0, \epsilon)$. Esta solução está bem definida em θ em um intervalo aberto contendo $[0, \theta_1(h)]$. Então, consideremos as equações

$$\begin{cases} h^+(\theta, h_0, \epsilon) = h, \\ \theta_1(h) = \theta, \end{cases}$$

e sua solução (θ, h) . Pelo Teorema da Função Implícita o sistema acima tem uma única solução \mathcal{C}^∞

$$(\theta, h) = (\bar{\theta}(h_0, \epsilon), \bar{h}(h_0, \epsilon)). \quad (4-55)$$

De fato, queremos encontrar sua solução (θ, h) associada a h_0 . Isto é, queremos escrever θ em função de h_0 . Para isso, dado que $h^+(0, h_0, \epsilon) = h_0$, a derivada de h^+ com relação a θ avaliada no ponto $(0, h_0)$ deve ser diferente de zero como mostraremos a seguir. Desse modo, usando o teorema da função implícita obteremos o resultado. Como $\frac{dh^+}{d\theta} = \epsilon R^+(\theta, h, \epsilon)$ por (4-49)

$$\epsilon R^+(\theta, h, \epsilon) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i R_i^+(\theta, h) + \epsilon^{k+1} R_{k+1}^+(\theta, h, \epsilon),$$

onde essa soma é determinada pelo termo de menor grau em ϵ , ou seja, por $R_1^+(\theta, h)$. Assim, devemos mostrar que $R_1^+(0, h_0) \neq 0$. Pela definição de R_1^+ , G^+ e pela propriedade **(a)** de q^+ , temos

$$\begin{aligned} R_1^+(0, h_0) &= \frac{T(h_0)}{2\pi} D\mathbf{H}^+(G^+(0, h_0))g^+(G^+(0, h_0)) \\ &= \frac{T(h_0)}{2\pi} D\mathbf{H}^+(q^+(0, h_0))g^+(q^+(0, h_0)) \\ &= \frac{T(h_0)}{2\pi} D\mathbf{H}^+(A(h_0))g^+(A(h_0)) \neq 0. \end{aligned}$$

A propriedade **(H2)** garante que $D\mathbf{H}^+(A(h_0)) \neq 0$ e, além disso, que a transformação linear $D\mathbf{H}(A(h_0))$ avaliada em $g^+(A(h_0))$ seja diferente de zero, pois caso contrário, $g^+(A(h_0))$ seria um ponto crítico de \mathbf{H}^+ , contradizendo a propriedade **(H2)**. Portanto $\frac{dh^+}{d\theta} \neq 0$, e pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função \mathcal{C}^∞ , $\bar{\theta}(h_0, \epsilon)$, tal que $\bar{\theta}(h_0, \epsilon) = \theta$ e $h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon) = \bar{h}(h_0, \epsilon) = h$.

Para continuar a definição de $h(\theta, h_0, \epsilon)$, considere a solução, denotada por $h^-(\theta, h_0, \epsilon)$, da equação

$$\frac{dh}{d\theta} = \epsilon R^-(\theta, h, \epsilon)$$

satisfazendo $h(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon) = h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon) \equiv \bar{h}(h_0, \epsilon)$. Portanto, a solução $h(\theta, h_0, \epsilon)$ de (4-47) satisfazendo $h(0, h_0, \epsilon) = h_0$ pode ser escrita como

$$h(\theta, h_0, \epsilon) = \begin{cases} h^+(\theta, h_0, \epsilon), & 0 \leq \theta \leq \bar{\theta}(h_0, \epsilon), \\ h^-(\theta, h_0, \epsilon), & \bar{\theta}(h_0, \epsilon) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

onde $h^+(\theta, h_0, \epsilon)$ e $h^-(\theta, h_0, \epsilon)$ satisfazem respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{dh^+}{d\theta} &= \sum_{i=1}^k \epsilon^i R_i^+(\theta, h^+) + \epsilon^{k+1} R_{k+1}^+(\theta, h^+, \epsilon), \quad h^+(0, h_0, \epsilon) = h_0, \\ \frac{dh^-}{d\theta} &= \sum_{i=1}^k \epsilon^i R_i^-(\theta, h^-) + \epsilon^{k+1} R_{k+1}^-(\theta, h^-, \epsilon), \quad h^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon) = \bar{h}(h_0, \epsilon). \end{aligned}$$

Tomando $k = 2$ e integrando, temos

$$\begin{aligned} h^+(\theta, h_0, \epsilon) &= h_0 + \int_0^\theta (\epsilon R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^2 R_2^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon))) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ h^-(\theta, h_0, \epsilon) &= \bar{h}(h_0, \epsilon) + \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^\theta R_1^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^2 R_2^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{4-56}$$

Agora, avaliando h^+ em $\bar{\theta}(h_0, \epsilon)$ e substituindo em h^- , dado que $h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon) \equiv$

$\bar{h}(h_0, \epsilon)$, obtemos

$$\begin{aligned} h^-(\theta, h_0, \epsilon) &= h_0 + \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} (\epsilon R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^2 R_2^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon))) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &+ \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{\theta} (R_1^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^2 R_2^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon))) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4-57)$$

Desta forma, a aplicação de Poincaré de (4-47) é

$$\begin{aligned} P(h_0, \epsilon) &= h(2\pi, h_0, \epsilon) \\ &= h_0 + \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau \\ &+ \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Desde as equações (4-51), (4-52) e a equação acima podemos obter a função de Averaging de primeira ordem. Com efeito, substituindo (4-52) em (4-51), para $k = 2$ tem-se

$$P(h_0, \epsilon) = h_0 + \sum_{i=1}^2 \epsilon^i f_i(h_0) + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Logo, igualando esta equação com a equação anterior, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \epsilon^i f_i(h_0) &= \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau \\ &+ \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \epsilon f_1(h_0) + \epsilon^2 f_2(h_0) &= \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \epsilon R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau + \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} \epsilon R_1^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau \\ &+ \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \epsilon^2 R_2^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau + \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} \epsilon^2 R_2^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau. \end{aligned}$$

Então

$$\epsilon f_1(h_0) = \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \epsilon R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau + \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} \epsilon R_1^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau,$$

de onde obtemos:

$$f_1(h_0) = \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau + \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} R_1^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) d\tau.$$

Note que $h^+(\theta, h_0, 0) = h_0$, e por tanto $h^+(\theta, h, 0) = h$. Assim, avaliando em h e $\epsilon = 0$ obtemos

$$f_1(h) = \int_0^{\bar{\theta}(h, 0)} R_1^+(\theta, h) d\theta + \int_{\bar{\theta}(h, 0)}^{2\pi} R_1^-(\theta, h) d\theta = \int_0^{2\pi} R_1(\theta, h) d\theta.$$

Agora, derivando $P(h_0, \epsilon)$ duas vezes com relação a ϵ obtemos $f_2(h)$. Com efeito, escrevendo $P(h_0, \epsilon)$ como

$$P(h_0, \epsilon) = h_0 + F_1(\epsilon) + F_2(\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

onde

$$F_1(\epsilon) = \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau,$$

$$F_2(\epsilon) = \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau,$$

temos

$$\frac{\partial^2 P(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon^2} = \frac{d^2 F_1(\epsilon)}{d\epsilon^2} + \frac{d^2 F_2(\epsilon)}{d\epsilon^2} + \frac{d^2 \mathcal{O}(\epsilon^3)}{d\epsilon^2}. \quad (4-58)$$

Dai, usando o Teorema 1.4, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \right) \frac{\partial \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right) d\tau &= \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \left(\sum_{i=1}^2 i \epsilon^{i-1} R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^i D_h R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \left(\sum_{i=1}^2 i\epsilon^{i-1} R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^i D_h R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial h^+(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) d\tau + \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \right) \frac{\partial \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \end{aligned}$$

e usando de novo o Teorema 1.4, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1(\epsilon)}{d\epsilon^2} &= \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \left(\sum_{i=1}^2 i(i-1)\epsilon^{i-2} R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \right. \\ &\quad \left. + i\epsilon^{i-1} D_h R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \left(i\epsilon^{i-1} D_h R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^i \frac{d}{dh} (D_h R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon))) \right) \frac{\partial h^+(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^i D_h R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial^2 h^+(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon^2} \right) d\tau \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^2 i\epsilon^{i-1} R_i^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^i D_h R_i^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^2 i\epsilon^{i-1} R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^i D_h R_i^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \\ &\quad \times \frac{\partial \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \right) \frac{\partial^2 \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon^2}. \end{aligned} \tag{4-59}$$

Assim, analogamente ao processo anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 F_2(\epsilon)}{d\epsilon^2} &= \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^2 i(i-1)\epsilon^{i-2} R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \right. \\
&\quad + i\epsilon^{i-1} D_h R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^-(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \\
&\quad \left. + \left(i\epsilon^{i-1} D_h R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^i \frac{d}{dh} (D_h R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon))) \right) \right. \\
&\quad \times \frac{\partial h^-(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \epsilon^i D_h R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial^2 h^-(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon^2} \Big) d\tau \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^2 i\epsilon^{i-1} R_i^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^i D_h R_i^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^2 i\epsilon^{i-1} R_i^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^i D_h R_i^-(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^-(\tau, h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \\
&\quad \times \frac{\partial \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon} - \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon^i R_i^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)) \right) \frac{\partial^2 \bar{\theta}(h_0, \epsilon)}{\partial \epsilon^2}.
\end{aligned} \tag{4-60}$$

Desta forma, avaliando (4-58) em $(h, 0)$, pelas equações (4-59) e (4-60) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P(h, 0)}{\partial \epsilon^2} &= \int_0^{\bar{\theta}(h, 0)} \left(2D_h R_1^+(\theta, h^+(\theta, h, 0)) \frac{\partial h^+(\theta, h_0, 0)}{\partial \epsilon} + 2R_2^+(\theta, h^+(\theta, h, 0)) \right) d\theta \\
&\quad + 2R_1^+(\bar{\theta}(h, 0), h^+(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon} \\
&\quad + \int_{\bar{\theta}(h, 0)}^{2\pi} \left(2D_h R_1^-(\theta, h^-(\theta, h, 0)) \frac{\partial h^-(\theta, h_0, 0)}{\partial \epsilon} + 2R_2^-(\theta, h^-(\theta, h, 0)) \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$-2R_1^-(\bar{\theta}(h, 0), h^-(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon},$$

e como $h^+(\theta, h, 0) = h$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P(h, 0)}{\partial \epsilon^2} &= 2 \int_0^{\bar{\theta}(h, 0)} \left(D_h R_1^+(\theta, h) \frac{\partial h^+(\theta, h, 0)}{\partial \epsilon} + R_2^+(\theta, h) \right) d\theta \\ &\quad + 2R_1^+(\bar{\theta}(h, 0), h^+(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon} \\ &\quad + 2 \int_{\bar{\theta}(h, 0)}^{2\pi} \left(D_h R_1^-(\theta, h) \frac{\partial h^-(\theta, h)}{\partial \epsilon} + R_2^-(\theta, h) \right) d\theta \\ &\quad - 2R_1^-(\bar{\theta}(h, 0), h^-(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon}. \end{aligned}$$

Daí que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P(h, 0)}{\partial \epsilon^2} \times \frac{1}{2} &= \int_0^{\bar{\theta}(h, 0)} \left(R_2^+(\theta, h) + D_h R_1^+(\theta, h) \frac{\partial h^+(\theta, h, 0)}{\partial \epsilon} \right) d\theta \\ &\quad + R_1^+(\bar{\theta}(h, 0), h^+(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon} \\ &\quad + \int_{\bar{\theta}(h, 0)}^{2\pi} \left(R_2^-(\theta, h) + D_h R_1^-(\theta, h) \frac{\partial h^-(\theta, h)}{\partial \epsilon} \right) d\theta \\ &\quad - R_1^-(\bar{\theta}(h, 0), h^-(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_2(h) &= \int_0^{\bar{\theta}(h, 0)} \left(R_2^+(\theta, h) + D_h R_1^+(\theta, h) \frac{\partial h^+(\theta, h, 0)}{\partial \epsilon} \right) d\theta \\ &\quad + R_1^+(\bar{\theta}(h, 0), h^+(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon} \\ &\quad + \int_{\bar{\theta}(h, 0)}^{2\pi} \left(R_2^-(\theta, h) + D_h R_1^-(\theta, h) \frac{\partial h^-(\theta, h)}{\partial \epsilon} \right) d\theta \end{aligned} \tag{4-61}$$

$$-R_1^-(\bar{\theta}(h, 0), h^-(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon}.$$

Observe que

$$\theta = \bar{\theta}(h_0, \epsilon) = \theta_1(\bar{h}(h_0, \epsilon)) = \theta_1(h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)),$$

com $h^+(\theta, h_0, 0) = h_0$, então,

$$\bar{\theta}(h, 0) = \theta_1(\bar{h}(h, 0)) = \theta_1(h^+(\bar{\theta}(h, 0), h, 0)) = \theta_1(h).$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}(h, 0)}{\partial \epsilon} &= D_h \theta_1(h) \left(\frac{\partial h^+}{\partial \bar{\theta}}(\bar{\theta}(h, 0), h, 0) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \epsilon}(h, 0) + \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\bar{\theta}(h, 0), h, 0) \right) \\ &= D_h \theta_1(h) \left(\frac{\partial h^+}{\partial \theta_1}(\theta_1(h), h, 0) \frac{\partial \theta_1}{\partial \epsilon}(h) + \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\theta_1(h), h, 0) \right) \quad (4-62) \\ &= D_h \theta_1(h) \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\theta_1(h), h, 0). \end{aligned}$$

Derivando com relação a ϵ as equações em (4-56) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\theta, h_0, \epsilon) &= \int_0^\theta \left(R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon D_h R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\tau, h_0, \epsilon) \right. \\ &\quad \left. + 2\epsilon R_2^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^2 D_h R_2^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\tau, h_0, \epsilon) \right) d\tau \\ &\quad + \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^-}{\partial \epsilon}(\theta, h_0, \epsilon) &= \int_0^{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)} \left(R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon D_h R_1^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\tau, h_0, \epsilon) \right. \\ &\quad \left. + 2\epsilon R_2^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^2 D_h R_2^+(\tau, h^+(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\tau, h_0, \epsilon) \right) d\tau \\ &\quad + \int_{\bar{\theta}(h_0, \epsilon)}^\theta \left(R_1^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon D_h R_1^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^-}{\partial \epsilon}(\tau, h_0, \epsilon) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\epsilon R_2^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) + \epsilon^2 D_h R_2^-(\tau, h^-(\tau, h_0, \epsilon)) \frac{\partial h^-}{\partial \epsilon}(\tau, h_0, \epsilon) \Big) d\tau \\
& + \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Agora, avaliando em h e $\epsilon = 0$ como $\bar{\theta}(h, 0) = \theta_1(h)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h^+}{\partial \epsilon}(\theta, h, 0) &= \int_0^\theta R_1^+(\tau, h^+(\tau, h, 0)) d\tau = \int_0^\theta R_1^+(\tau, h) d\tau \\
\frac{\partial h^-}{\partial \epsilon}(\theta, h, 0) &= \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h^+(\tau, h, 0)) d\tau + \int_{\theta_1(h)}^\theta R_1^-(\tau, h^-(\tau, h, 0)) d\tau \quad (4-63) \\
&= \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h) d\tau + \int_{\theta_1(h)}^\theta R_1^-(\tau, h) d\tau.
\end{aligned}$$

Dado que h satisfaz $h(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon) = h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)$ quando $h = h^-$, isto é, $h^-(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon) = h^+(\bar{\theta}(h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)$ e $\theta_1(h) = \bar{\theta}(h, 0)$, mais ainda, de acordo com (4-55), $\theta = \theta_1(h)$ e, lembrando que $h^+(\theta, h, 0) = h$, temos que $h^-(\theta_1(h), h, 0) = h^+(\theta_1(h), h, 0) = h$.

Com a informação acima e substituindo (4-62) e (4-63) em (4-61), obtemos a função de Averaging de segunda ordem como segue:

$$\begin{aligned}
f_2(h) &= \int_0^{\theta_1(h)} \left(R_2^+(\theta, h) + D_h R_1^+(\theta, h) \int_0^\theta R_1^+(\tau, h) d\tau \right) d\theta + \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} (R_2^-(\theta, h) \\
&+ D_h R_1^-(\theta, h) \left(\int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h) d\tau + \int_{\theta_1(h)}^\theta R_1^-(\tau, h) d\tau \right)) d\theta \\
&+ (R_1^+(\theta_1(h), h) - R_1^-(\theta_1(h), h)) D_h \theta_1(h) \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h) d\tau,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
f_2(h) &= \int_0^{\theta_1(h)} \left(R_2^+(\theta, h) + D_h R_1^+(\theta, h) \int_0^\theta R_1^+(\tau, h) d\tau \right) d\theta \\
&+ \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} \left(R_2^-(\theta, h) + D_h R_1^-(\theta, h) \left(\int_0^\theta R_1(\tau, h) d\tau \right) \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$+(R_1^+(\theta_1(h), h) - R_1^-(\theta_1(h), h))D_h\theta_1(h) \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h)d\tau,$$

finalmente

$$f_2(h) = \int_0^{2\pi} \left(R_2(\theta, h) + D_h R_1(\theta, h) \int_0^\theta R_1(\tau, h)d\tau \right) d\theta \quad (4-64)$$

$$+(R_1^+(\theta_1(h), h) - R_1^-(\theta_1(h), h))D_h\theta_1(h) \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h)d\tau.$$

□

4.2.2 Teoria do Averaging para Campos Suaves por Partes

Em seguida, estabelecemos a teoria do Averaging para a equação (4-47). Para isso, provamos primeiro um resultado fundamental. Considere uma equação diferencial 2π periódica, definida em duas partes, de classe C^∞ em cada uma dessas partes, de dimensão $(n - 1)$, dada por

$$\frac{dv}{d\theta} = R(\theta, w) - \bar{R}(w), \quad (4-65)$$

onde $v, w \in V \subset \mathbb{R}^{n-1}$,

$$R(\theta, w) = \begin{cases} R^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w) \\ R^-(\theta, w), & \theta_1(w) \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$\bar{R}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\theta, w)d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\theta_1(w)} R^+(\theta, w)d\theta + \int_0^{2\pi} R^-(\theta, w)d\theta \right)$$

com $\theta_1(w)$, $R^\pm(\theta, w) \in C^\infty$, $R(\theta, w)$ é definida em duas partes, C^∞ em cada uma dessas partes e 2π periódica na variável θ . Em (4-65) tomamos w como um parâmetro vetorial. Note que o lado direito de (4-65) é independente de v , então, temos o seguinte:

Lema 4.11. *A equação (4-65) tem uma única solução $v(\theta, w)$, 2π periódica, definida em duas partes, C^∞ em cada uma dessas partes, satisfazendo $v(0, w) = 0$.*

Demonstração. Resolvendo a equação diferencial (4-65) obtemos

$$v(\theta, w) = \begin{cases} v^+(\theta, w) = \int_0^\theta (R^+(\theta, w) - \bar{R}(w))d\theta, & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ v^-(\theta, w) = v^+(\theta_1(w), w) + \int_{\theta_1(w)}^\theta (R^-(\theta, w) - \bar{R}(w))d\theta, & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4-66)$$

Note que R^+ e R^- são \mathcal{C}^∞ . Então as funções \bar{R} e v^\pm são \mathcal{C}^∞ . Além disso,

$$\begin{aligned} v(2\pi, w) &= v^+(\theta_1(w), w) + \int_{\theta_1(w)}^{2\pi} (R^-(\theta, w) - \bar{R}(w))d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1(w)} (R^+(\theta, w) - \bar{R}(w))d\theta + \int_{\theta_1(w)}^{2\pi} (R^-(\theta, w) - \bar{R}(w))d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R(\theta, w)d\theta - 2\pi\bar{R}(w), \end{aligned}$$

e pela definição de $\bar{R}(w)$ temos

$$\begin{aligned} v(2\pi, w) &= \int_0^{2\pi} R(\theta, w)d\theta - 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\theta_1(w)} R^+(\theta, w)d\theta + \int_{\theta_1(w)}^{2\pi} R^-(\theta, w)d\theta \right) \\ &= \int_0^{2\pi} R(\theta, w)d\theta - \int_0^{2\pi} R(\theta, w)d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a solução $v(\theta, w)$ é 2π periódica. Isto prova o lema. \square

Voltemos à equação (4-47). Para qualquer conjunto compacto $V_1 \subset V$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que a função R dada por (4-48) está bem definida para $h \in V_1$ e $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ e é \mathcal{C}^∞ para $0 \leq \theta \leq \theta_1(h)$ e $\theta_1(h) < \theta \leq 2\pi$ respectivamente. Então temos o seguinte teorema de Averaging para a equação (4-47).

Teorema 4.12. *Para qualquer inteiro $k \geq 1$, existe uma transformação 2π periódica definida em duas partes, \mathcal{C}^∞ em cada uma dessas partes, dada por*

$$h = w + \sum_{i=1}^k \epsilon^i \varphi_i(\theta, w), \quad (4-67)$$

onde $\varphi_i(0, w) = 0$, e

$$\varphi_i(\theta, w) = \begin{cases} \varphi_i^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w) \\ \varphi_i^-(\theta, w), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

com φ_i^\pm sendo \mathcal{C}^∞ , tal que a equação (4-47) pode ser transformada em

$$\frac{dw}{d\theta} = \sum_{i=1}^k \epsilon^i \bar{R}_i(w) + \epsilon^{k+1} \bar{R}_{k+1}(\theta, w, \epsilon), \quad (4-68)$$

onde $\bar{R}_i(w) \in \mathcal{C}^\infty$ para $w \in V$, e $\bar{R}_{k+1}(\theta, w, \epsilon)$ é definida em duas partes, \mathcal{C}^∞ em cada uma dessas partes e dada como

$$\bar{R}_{k+1}(\theta, w, \epsilon) = \begin{cases} \bar{R}_{k+1}^+(\theta, w, \epsilon), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ \bar{R}_{k+1}^-(\theta, w, \epsilon), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Demonstração. Como no caso suave, o ponto chave é encontrar a transformação (4-67). Agora, se (4-67) existe, então

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\theta} &= \frac{dw}{d\theta} + \sum_{i=1}^k \epsilon^i \left(D_{\theta}\varphi_i(\theta, w) + D_w\varphi_i(\theta, w) \frac{dw}{d\theta} \right), \\ &= \frac{dw}{d\theta} + \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_{\theta}\varphi_i(\theta, w) + \frac{dw}{d\theta} \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_w\varphi_i(\theta, w), \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_w\varphi_i(\theta, w) \right) \frac{dw}{d\theta} + \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_{\theta}\varphi_i(\theta, w). \end{aligned} \quad (4-69)$$

Usamos (4-69) para encontrar cada φ_i . Assim

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{\frac{dh}{d\theta} - \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_{\theta}\varphi_i(\theta, w)}{1 + \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_w\varphi_i(\theta, w)},$$

onde $D_w\varphi_i$ e $D_{\theta}\varphi_i$ são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} D_w\varphi_i(\theta, w) &= \begin{cases} D_w\varphi_i^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ D_w\varphi_i^-(\theta, w), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \\ D_{\theta}\varphi_i(\theta, w) &= \begin{cases} D_{\theta}\varphi_i^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ D_{\theta}\varphi_i^-(\theta, w), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, pela equação (4-49) temos

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{\sum_{i=1}^k \epsilon^i R_i(\theta, h) + \epsilon^{k+1} R_{k+1}^{\pm}(\theta, h, \epsilon) - \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_{\theta}\varphi_i(\theta, w)}{1 + \sum_{i=1}^k \epsilon^i D_w\varphi_i(\theta, w)} \quad (4-70)$$

e expandindo em série de Taylor em termos de ϵ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \epsilon(R_1(\theta, w) - D_{\theta}\varphi_1(\theta, w)) + \epsilon^2(\Psi_1(\theta, w) - D_{\theta}\varphi_2(\theta, w)) \\ &\quad + \dots + \epsilon^k(\Psi_{k-1}(\theta, w) - D_{\theta}\varphi_k(\theta, w)) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}), \end{aligned}$$

onde Ψ_j está definida em duas partes, de classe \mathcal{C}^{∞} em cada uma dessas partes e é independente de φ_l , com $j+1 \leq l \leq k$, $j = 1, 2, \dots, k-1$. Por exemplo, temos

$$\Psi_1(\theta, w) = R_2(\theta, w) + D_w R_1(\theta, w)\varphi_1(\theta, w) + D_w\varphi_1(\theta, w)(D_{\theta}\varphi_1(\theta, w) - R_1(\theta, w)).$$

A seguir, só precisamos provar que existem funções de classe C^∞ , $\bar{R}_1(w), \dots, \bar{R}_k(w)$, tais que as equações diferenciais de primeira ordem em $\varphi_1, \dots, \varphi_k$,

$$\begin{aligned} R_1(\theta, w) - D_\theta \varphi_1(\theta, w) &= \bar{R}_1(w), \\ \Psi_{j-1}(\theta, w) - D_\theta \varphi_j(\theta, w) &= \bar{R}_j(w), \end{aligned} \quad (4-71)$$

$j = 2, \dots, k$, têm soluções periódicas $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, respectivamente.

De fato, da equação (4-71) temos

$$\begin{aligned} D_\theta \varphi_1(\theta, w) &= R_1(\theta, w) - \bar{R}_1(w), \\ D_\theta \varphi_j(\theta, w) &= \Psi_{j-1}(\theta, w) - \bar{R}_j(w), \end{aligned} \quad (4-72)$$

e observe que pela equação (4-70), $R_1(\theta, w)$ é 2π periódica em θ , definida em duas partes e C^∞ em cada parte, pois as fórmulas (4-47) e (4-49) garantem isso. Portanto, $D_\theta \varphi_1(\theta, w)$ é 2π periódica, definida em duas partes e C^∞ em cada uma dessas partes. Assim, pelo Lema 4.11 temos que $D_\theta \varphi_1(\theta, w)$ tem uma única solução $\varphi_1(\theta, w)$, 2π periódica definida em duas partes, de classe C^∞ em cada uma dessas partes, satisfazendo $\varphi_1(0, w) = 0$ e denotada por

$$\varphi_1(\theta, w) = \begin{cases} \varphi_1^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ \varphi_1^-(\theta, w), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

com φ_1^\pm sendo C^∞ . Além disso, por (4-72)

$$\begin{aligned} \varphi_1(\theta, w) &= \int_0^\theta (R_1(\theta, w) - \bar{R}_1(w)) d\theta \\ &= \int_0^\theta R_1(\theta, w) d\theta - \int_0^\theta \bar{R}_1(w) d\theta \\ &= \int_0^\theta R_1(\theta, w) d\theta - \theta \bar{R}_1(w), \end{aligned}$$

assim, \bar{R}_1 é C^∞ e

$$\bar{R}_1(w) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta R_1(\theta, w) d\theta - \frac{1}{\theta} \varphi_1(\theta, w).$$

Tomando $\theta = 2\pi$, dado que $\varphi_1(2\pi, w) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1(\theta, w) d\theta - \frac{1}{2\pi} \varphi_1(2\pi, w) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1(\theta, w) d\theta. \end{aligned}$$

Pela definição de Ψ_1 temos que Ψ_1 é 2π periódica em θ , definida em duas partes e C^∞ em cada uma dessas partes. Assim, para $j = 2$ na segunda equação de (4-72) temos que $D_\theta\varphi_2(\theta, w)$ é 2π periódica em θ , definida em duas partes e C^∞ em cada uma dessas partes. Portanto, utilizando novamente o lema anterior, $D_\theta\varphi_2(\theta, w)$ tem uma única solução, 2π periódica, definida em duas partes e C^∞ em cada uma dessas partes, satisfazendo $\varphi_2(0, w) = 0$, dada por

$$\varphi_2(\theta, w) = \begin{cases} \varphi_2^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ \varphi_2^-(\theta, w), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Através de (4-72) obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_2(\theta, w) &= \int_0^\theta (\Psi_1(\theta, w) - \bar{R}_2(w))d\theta \\ &= \int_0^\theta \Psi_1(\theta, w)d\theta - \int_0^\theta \bar{R}_2(w)d\theta \\ &= \int_0^\theta \Psi_1(\theta, w)d\theta - \theta\bar{R}_2(w), \end{aligned}$$

avaliando em $\theta = 2\pi$ e dado que $\varphi_2(2\pi, w) = 0$ concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{R}_2(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\theta, w)d\theta - \frac{1}{2\pi}\varphi_2(2\pi, w) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\theta, w)d\theta, \end{aligned}$$

sendo \bar{R}_2 de classe C^∞ . Agora, procedendo por indução, supunhamos que o resultado é válido para $j = k - 1$, isto é,

$$D_\theta\varphi_{k-1}(\theta, w) = \Psi_{k-2}(\theta, w) - \bar{R}_{k-1}(w)$$

tem uma única solução $\varphi_{k-1}(\theta, w)$, 2π periódica, definida em duas partes e C^∞ em cada uma dessas partes, satisfazendo que $\varphi_{k-1}(0, w) = 0$ e denotada por

$$\varphi_{k-1}(\theta, w) = \begin{cases} \varphi_{k-1}^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ \varphi_{k-1}^-(\theta, w), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

com φ_{k-1}^\pm sendo C^∞ e $\bar{R}_{k-1}(w)$ dada por

$$\bar{R}_{k-1}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{k-2}(\theta, w)d\theta.$$

Onde, $\Psi_{k-2}(\theta, w)$ é 2π periódica em θ , definida em duas partes e C^∞ em cada uma

dessas partes.

Mostremos que o resultado é válido para $j = k$. Com efeito, dado que $\Psi_{k-2}(\theta, w)$ é 2π periódica em θ , definida em duas partes e C^∞ em cada uma dessas partes, como antes, para $j = k$ na segunda equação de (4-72), $D_\theta\varphi_k(\theta, w)$ é 2π periódica em θ , definida em duas partes e C^∞ em cada uma dessas partes. Portanto, utilizando o Lema 4.11, $D_\theta\varphi_k(\theta, w)$ tem uma única solução 2π periódica, definida em duas partes, de classe C^∞ em cada uma dessas partes e satisfazendo $\varphi_k(0, w) = 0$. Com

$$\varphi_k(\theta, w) = \begin{cases} \varphi_k^+(\theta, w), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(w), \\ \varphi_k^-(\theta, w), & \theta_1(w) < \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

e de, (4-72)

$$\begin{aligned} \varphi_k(\theta, w) &= \int_0^\theta (\Psi_{k-1}(\theta, w) - \bar{R}_k(w))d\theta \\ &= \int_0^\theta \Psi_{k-1}(\theta, w)d\theta - \int_0^\theta \bar{R}_k(w)d\theta \\ &= \int_0^\theta \Psi_{k-1}(\theta, w)d\theta - \theta\bar{R}_k(w). \end{aligned}$$

Avaliando a expressão acima em $\theta = 2\pi$, e dado que $\varphi_k(2\pi, w) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}_k(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{k-1}(\theta, w)d\theta - \frac{1}{2\pi}\varphi_k(2\pi, w) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{k-1}(\theta, w)d\theta. \end{aligned}$$

Portanto temos que o resultado é válido para $j = k$. Isto é, mostramos que existem funções $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k, C^\infty$, tais que as equações diferenciais (4-72) têm soluções periódicas $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Assim, a prova está completa. \square

Equivalência entre o Método de Melnikov e o Método de Averaging

Sabe-se que o método de Melnikov é equivalente ao método de Averaging para estudar o número de ciclos limite de sistemas diferenciais analíticos planares (ou C^∞) quase-Hamiltonianos, veja [12]. Neste capítulo seguindo [17], na primeira seção, apresentamos a relação entre a aplicação de Poincaré P e a função de bifurcação F e na segunda seção, apresentamos o resultado principal que é a equivalência entre o método de Melnikov e o método de Averaging para sistemas suaves por partes quase-integráveis definidos em dimensão n , $n \geq 2$.

5.1 A Relação entre a Aplicação de Poincaré P e a Função de Bifurcação F

Apresentamos agora, o lema que estabelece a relação entre a aplicação de Poincaré P , da equação (4-47) e a função F . Mais ainda, estabelecemos a aplicação de Poincaré para a equação (4-68).

Lema 5.1. *A função F dada em (4-2) e (4-3) e a aplicação de Poincaré P dado em (4-51) e (4-52) têm a seguinte relação*

$$P(h, \epsilon) - h = \epsilon F(h, \epsilon), \quad h \in V. \quad (5-1)$$

Demonstração. Seja $(\tilde{\theta}(t, h_0, \epsilon), \tilde{h}(t, h_0, \epsilon))$ a solução das equações (4-39) e (4-40) satisfazendo $\tilde{\theta}(0, h_0, \epsilon) = 0$, $\tilde{h}(0, h_0, \epsilon) = h_0$. Já que $\tilde{\theta}(0, h_0, 0) = 0$, temos

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t}(0, h_0, 0) = \frac{2\pi}{T(h)} \neq 0,$$

a função $\theta = \tilde{\theta}(t, h_0, \epsilon)$ tem inversa em t , denotada por $t = \phi(\theta, h_0, \epsilon)$. Seja $\tau(h_0, \epsilon) = \phi(2\pi, h_0, \epsilon)$. Além disso, temos

$$h(\theta, h_0, \epsilon) = \tilde{h}(\phi(\theta, h_0, \epsilon), h_0, \epsilon), \quad (5-2)$$

onde $h(\theta, h_0, \epsilon)$ é a solução da equação (4-47). De outro lado, seja $\mathbf{x}(t, h_0, \epsilon)$ a solução do sistema (4-1) satisfazendo

$$\mathbf{x}(0, h_0, \epsilon) = A(h_0) = q^+(0, h_0) = q(0, h_0).$$

Desde a equação (4-38) obtemos

$$\mathbf{x}(t, h_0, \epsilon) = G(\tilde{\theta}(t, h_0, \epsilon), \tilde{h}(t, h_0, \epsilon)).$$

Além disso, com $t = \tau(h_0, \epsilon) = \phi(2\pi, h_0, \epsilon)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau, h_0, \epsilon) &= G(\tilde{\theta}(\tau, h_0, \epsilon), \tilde{h}(\tau, h_0, \epsilon)) \\ &= G(\tilde{\theta}(\phi(2\pi, h_0, \epsilon), h_0, \epsilon), \tilde{h}(\phi(2\pi, h_0, \epsilon), h_0, \epsilon)). \end{aligned}$$

Como ϕ é a inversa de $\tilde{\theta}$ em t , da equação (5-2), da definição de G e q temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau, h_0, \epsilon) &= G(2\pi, h(2\pi, h_0, \epsilon)) \\ &= q\left(\frac{T(h)}{2\pi} 2\pi, h(2\pi, h_0, \epsilon)\right) \\ &= q(T(h), h(2\pi, h_0, \epsilon)) \\ &= q(0, h(2\pi, h_0, \epsilon)) \\ &= A(h(2\pi, h_0, \epsilon)). \end{aligned}$$

Isto implica que $\mathbf{x}(\tau, h_0, \epsilon)$ pertence ao hiperplano $x_1 = 0$, isto é, a órbita através do ponto $(0, h_0, \epsilon) \in x_1 \cap L_h$ em $t = 0$, intercepta novamente o hiperplano $x_1 = 0$ em $t = \tau$. Pela definição de $A_\epsilon(h)$ temos que $\tau(h, \epsilon)$ é o tempo que a órbita $\widehat{AB}_\epsilon \cup \widehat{B_\epsilon A}$ vai de $A(h)$ a $A_\epsilon(h)$. Portanto, das informações acima e da equação (4-51)

$$A_\epsilon(h_0) = A(h(2\pi, h_0, \epsilon)) = A(P(h_0, \epsilon)).$$

Como $\mathbf{H}^+(A(h)) = h$ para $h \in V$, então $\mathbf{H}^+(A(P)) = P$ para $P \in V$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} P(h, \epsilon) - h &= \mathbf{H}^+(A(P)) - \mathbf{H}^+(A(h)) = \mathbf{H}^+(A_\epsilon(h)) - \mathbf{H}^+(A(h)) \\ &= \epsilon F(h, \epsilon), \end{aligned}$$

como queríamos provar. \square

Por outro lado, temos que a aplicação de Poincaré da equação (4-68) é da forma

$$\bar{P}(w_0, \epsilon) = w_0 + 2\pi\epsilon^k \bar{R}_k(w_0) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}).$$

Com efeito, suponha que para um dado inteiro $k \geq 1$,

$$\bar{R}_k(w) \neq 0, \quad \bar{R}_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (5-3)$$

para todo $w \in V$. Além disso, denote por $w(\theta, w_0, \epsilon)$, a solução da equação (4-68) satisfazendo $w(0, w_0, \epsilon) = w_0$. Sua expansão em série de Taylor é da forma

$$w(\theta, w_0, \epsilon) = w_0 + \sum_{j \geq 1} \epsilon^j W_j(\theta, w_0). \quad (5-4)$$

Como $w(0, w_0, \epsilon) = w_0$, pela equação (5-4), $W_j(0, w_0) = 0$, $j \geq 1$. Derivando (5-4) e substituindo em (4-68) obtemos

$$\sum_{i=1}^k \epsilon^i D_\theta W_i(\theta, w_0) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i \bar{R}_i(w_0) + \epsilon^{k+1} \bar{R}_{k+1}(\theta, w_0, \epsilon).$$

Logo

$$\sum_{i=1}^k \epsilon^i D_\theta W_i(\theta, w_0) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i \bar{R}_i(w_0).$$

Integrando a equação acima com relação ao θ , obtemos

$$\sum_{i=1}^k \epsilon^i W_i(\theta, w_0) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i \theta \bar{R}_i(w_0),$$

e por (5-3) segue que

$$W_k(\theta, w_0) = \theta \bar{R}_k(w_0), \quad W_j(\theta, w_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Portanto, da equação acima e de (5-4) tem-se

$$\begin{aligned} w(\theta, w_0, \epsilon) &= w_0 + \epsilon^k \theta \bar{R}_k(w_0) + \sum_{j \geq k+1} \epsilon^j W_j(\theta, w_0) \\ &= w_0 + \epsilon^k \theta \bar{R}_k(w_0) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}). \end{aligned}$$

Finalmente, com $\theta = 2\pi$ temos a aplicação de Poincaré para a equação (4-68):

$$\bar{P}(w_0, \epsilon) = w(2\pi, w_0, \epsilon) = w_0 + 2\pi\epsilon^k \bar{R}_k(w_0) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}). \quad (5-5)$$

5.2 Equivalência entre os métodos de Melnikov e Averaging

A seguir apresentamos o resultado principal devido a Liu-Han-Li em [17], que estabelece não apenas a equivalência do método de Melnikov e o método de Averaging, mas também a relação entre as aplicações de Poincaré das equações (4-47) e (4-68).

Teorema 5.2. *As condições em (5-3) são válidas se, e somente se, a aplicação de Poincaré $P(h_0, \epsilon)$ da equação (4-47) dada por (4-51) e (4-52) satisfaz*

$$f_k \not\equiv 0, \quad f_j \equiv 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Além disso, se as condições em (5-3) são válidas, então a função de Melnikov de ordem k , M_k , definida em (4-3), a função de Averaging de ordem k , f_k , definida em (4-52), e a função \bar{R}_k definida em (4-68) satisfazem

$$2\pi \bar{R}_k(h) = f_k(h) = M_k(h).$$

Demonstração. Seja

$$\phi_k(\theta, w, \epsilon) = \sum_{i=1}^k \epsilon^{i-1} \varphi_i(\theta, w), \quad (5-6)$$

então por (5-6) e por (4-67) segue que

$$h(\theta, h_0, \epsilon) = w(\theta, w_0, \epsilon) + \epsilon \phi_k(\theta, w(\theta, w_0, \epsilon), \epsilon), \quad h_0 = w_0 + \epsilon \phi_k(0, w_0, \epsilon).$$

Dado que φ_i é a solução de $D_\theta \varphi_i(\theta, w)$, a qual pelo Lema 4.11 é 2π periódica em θ , temos que $\phi_k(\theta, w, \epsilon)$ é 2π periódica em θ . Então,

$$P(h_0, \epsilon) = h(2\pi, h_0, \epsilon) = w(2\pi, w_0, \epsilon) + \epsilon \phi_k(2\pi, w(2\pi, w_0, \epsilon), \epsilon).$$

Logo, por (5-5), temos

$$\begin{aligned} P(h_0, \epsilon) &= \bar{P}(w_0, \epsilon) + \epsilon \phi_k(2\pi, \bar{P}(w_0, \epsilon), \epsilon) \\ &= \bar{P}(w_0, \epsilon) + \epsilon \phi_k(0, \bar{P}(w_0, \epsilon), \epsilon). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(h_0, \epsilon) - h_0 &= \bar{P}(w_0, \epsilon) + \epsilon \phi_k(0, \bar{P}(w_0, \epsilon), \epsilon) - w_0 - \epsilon \phi_k(0, w_0, \epsilon) \\ &= \bar{P}(w_0, \epsilon) - w_0 + \epsilon \phi_k(0, \bar{P}(w_0, \epsilon), \epsilon) - \epsilon \phi_k(0, w_0, \epsilon) \\ &= \bar{P}(w_0, \epsilon) - w_0 + \epsilon (\phi_k(0, \bar{P}(w_0, \epsilon), \epsilon) - \phi_k(0, w_0, \epsilon)). \end{aligned}$$

Usando o Teorema 1.1 (Teorema do Valor Médio), temos

$$\phi_k(0, \bar{P}(w_0, \epsilon), \epsilon) - \phi_k(0, w_0, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)(\bar{P}(w_0, \epsilon) - w_0),$$

logo

$$P(h_0, \epsilon) - h_0 = (\bar{P}(w_0, \epsilon) - w_0)(1 + \mathcal{O}(\epsilon)). \quad (5-7)$$

Substituindo as equações (4-51), (4-52) e (5-5) em (5-7) temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \epsilon^j f_j(h) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}) &= \epsilon^k 2\pi \bar{R}_k(w) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}) + (\epsilon^k 2\pi \bar{R}_k(w) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}))\mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \epsilon^k 2\pi \bar{R}_k(w) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}), \\ \sum_{j=1}^{k-1} \epsilon^j f_j(h) + \epsilon^k f_k(h) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}) &= \epsilon^k 2\pi \bar{R}_k(w) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}). \end{aligned}$$

Daí

$$\sum_{j=1}^{k-1} f_j(h) = 0, \quad f_k(h) = 2\pi \bar{R}_k(w)$$

se, e somente se,

$$f_j(h) = \bar{R}_j(w) = 0, \quad f_k(h) = R_k(w) \neq 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Além disso, por (4-51) e (4-52) concluímos

$$P(h, \epsilon) = h(2\pi, h, \epsilon) = h + \sum_{i=1}^k \epsilon^i f_i(h) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}).$$

Aplicando o Lema 5.1, usando (4-3) e a equação acima, segue-se que

$$\sum_{i=1}^k \epsilon^i M_i(h) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}) = \sum_{i=1}^k \epsilon^i f_i(h) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}).$$

Portanto

$$M_i(h) = f_i(h), \quad 1 \leq i \leq k. \quad (5-8)$$

Agora, se as condições (5-3) são satisfeitas, combinando (5-5), (5-7) e (5-8) obtemos

$$2\pi\bar{R}_k(h) = f_k(h) = M_k(h).$$

□

Observação 5.3. *Podemos provar que $M_i(h) = f_i(h)$ para o caso $i = 1$ diretamente. Desde (4-53) e a expressão de $R_1(\theta, h)$, temos*

$$\begin{aligned} f_1(h) &= \int_0^{2\pi} R_1(\theta, h) d\theta = \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\theta, h) d\theta + \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} R_1^-(\theta, h) d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1(h)} \frac{T(h)}{2\pi} D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+) d\theta \\ &\quad + \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} \frac{T(h)}{2\pi} \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-) d\theta. \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão para G^+ e G^- :

$$G^+(\theta, h) = q^+ \left(\frac{T(h)}{2\pi} \theta, h \right), \quad G^-(\theta, h) = q^- \left(\frac{T(h)}{2\pi} \theta, h \right),$$

e lembrando que $t = \frac{T(h)}{2\pi} \theta$ implica que

$$\begin{cases} t = \frac{T(h)}{2\pi}(0) = 0, \\ t = \frac{T(h)}{2\pi}\theta_1(h) = T_1(h), \\ t = \frac{T(h)}{2\pi}2\pi = T(h), \\ d\theta = \frac{2\pi}{T(h)} dt, \end{cases}$$

temos que a função de Averaging de primeira ordem é dada por

$$\begin{aligned} f_1(h) &= \int_0^{T_1(h)} \frac{T(h)}{2\pi} D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+) \frac{2\pi}{T(h)} dt \\ &\quad + \int_{T_1(h)}^{T(h)} \frac{T(h)}{2\pi} \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-) \frac{2\pi}{T(h)} dt \quad (5-9) \\ &= \int_{\widehat{AB}} D\mathbf{H}^+ g^+ dt + \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} \int_{\widehat{BA}} D\mathbf{H}^- g^- dt. \end{aligned}$$

Por (4-6) e (5-9) obtemos $M_1(h) = f_1(h)$.

Função Melnikov de Segunda Ordem para Sistemas Quase-Hamiltonianos Suaves por partes Perturbados

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados da teoria de bifurcações relacionados ao número de soluções periódicas. Assim, apresentamos o estudo da função de Melnikov de segunda ordem para um sistema planar quase-Hamiltoniano suave por partes feito em [17].

Os lemas a seguir dados em [10, 14] tratam sobre o número de soluções periódicas da equação (4-47).

Lema 6.1. *Considere a equação periódica (4-47) para o caso $n = 1$. Se existem inteiros k e m tais que*

$$f_1 \equiv \dots \equiv f_{k-1} \equiv 0, \quad f_k \neq 0,$$

e f_k tem no máximo m zeros contados de acordo com suas multiplicidades, então para qualquer intervalo fechado $I \subset V$ existe uma constante $\epsilon_1 = \epsilon_1(I) > 0$ tal que para todo $0 < |\epsilon| < \epsilon_1$, a equação periódica (4-47) tem no máximo m soluções 2π periódicas em I .

Lema 6.2. *Considere a equação periódica (4-47) para o caso $n \geq 2$. Assuma que $R(\theta, h, \epsilon)$ dada em (4-48) é analítica por partes e que $\theta_1(h)$ é analítica para $h \in V$. Se existem inteiros k e m tais que*

$$f_1 \equiv \dots \equiv f_{k-1} \equiv 0, \quad f_k \neq 0,$$

e f_k tem no máximo m zeros contados de acordo com suas multiplicidades, então para qualquer conjunto compacto $I \subset V$ existe uma constante $\epsilon_1 = \epsilon_1(I) > 0$ tal que para todo $0 < |\epsilon| < \epsilon_1$, a equação periódica (4-47) tem no máximo m soluções 2π periódicas em I .

Agora usamos o Lema 4.10 e o Teorema 5.2 para obter a expressão da função Melnikov de segunda ordem. Consideremos o sistema planar suave por partes da forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} H_y^+(x, y) + \epsilon f^+(x, y) \\ -H_x^+(x, y) + \epsilon g^+(x, y) \end{pmatrix}, & x \geq 0, \\ \begin{pmatrix} H_y^-(x, y) + \epsilon f^-(x, y) \\ -H_x^-(x, y) + \epsilon g^-(x, y) \end{pmatrix}, & x < 0, \end{cases} \quad (6-1)$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, as funções H^\pm , f^\pm e g^\pm são suaves \mathcal{C}^∞ .

Teorema 6.3. *Sob as condições (H1)-(H3), se $M_1 \equiv 0$, a função de Melnikov de segunda ordem do sistema (6-1) tem a seguinte forma*

$$\begin{aligned} M_2(h) &= \frac{T(h)}{2\pi} \int_0^{\theta_1(h)} \left[-\frac{T(h)}{2\pi} (H_y^+ g^+ + H_x^+ f^+) \alpha^+(\theta, h) (f^+, g^+)^T + \left(\frac{T'(h)}{2\pi} (H_y^+ g^+ \right. \right. \\ &+ H_x^+ f^+) + \frac{T(h)}{2\pi} (g^+(H_{xy}^+, H_{yy}^+) + f^+(H_{xx}^+, H_{xy}^+) + H_y^+(g_x^+, g_y^+) \\ &+ H_x^+(f_x^+, f_y^+)) D_h G^+ \left. \left. \int_0^\theta (H_y^+ g^+ + H_x^+ f^+) d\tau \right] d\theta \right. \\ &+ \frac{T(h) H_y^+(A)}{2\pi H_y^-(A)} \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} \left[-\frac{T(h)}{2\pi} (H_y^- g^- + H_x^- f^-) \alpha^-(\theta, h) (f^-, g^-)^T \right. \\ &+ \left(\frac{T'(h) H_y^+(A)}{2\pi H_y^-(A)} (H_y^- g^- + H_x^- f^-) + \frac{T(h) H_y^+(A)}{2\pi H_y^-(A)} (g^-(H_{xy}^-, H_{yy}^-) \right. \\ &+ f^-(H_{xx}^-, H_{xy}^-) + H_y^-(g_x^-, g_y^-) + H_x^-(f_x^-, f_y^-)) D_h G^- + \frac{T(h)}{2\pi} (H_y^- g^- + H_x^- f^-) \\ &\times \left(\frac{H_{yy}^+(A)}{H_y^-(A) H_y^+(A)} - \frac{H_{yy}^-(A)}{(H_y^-(A))^2} \right) \left(\int_0^{\theta_1(h)} \frac{H_y^-(A)}{H_y^+(A)} (H_y^+ g^+ + H_x^+ f^+) d\tau \right. \\ &\left. \left. + \int_{\theta_1(h)}^\theta (H_y^- g^- + H_x^- f^-) d\tau \right) \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} (T_1' T(h) - T_1(h) T'(h)) (H_x^+(G^+(\theta_1(h), h)) f^+(G^+(\theta_1(h), h))) \\
& + H_y^+(G^+(\theta_1(h), h)) g^+(G^+(\theta_1(h), h)) \\
& - \frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)} (H_x^-(G^-(\theta_1(h), h)) f^-(G^-(\theta_1(h), h))) \\
& + H_y^-(G^-(\theta_1(h), h)) g^-(G^-(\theta_1(h), h))) \int_0^{\theta_1(h)} (H_x^+ f^+ + H_y^+ g^+) d\theta,
\end{aligned} \tag{6-2}$$

onde $\theta_1(h) = \frac{T_1(h)}{T(h)} 2\pi$, $G^\pm(\theta, h)$ é definida em (4-53) e $\alpha^\pm(\theta, h)$ está definida no Lema 4.7.

Demonstração. Usando o Teorema 5.2 e a equação (4-54), sabemos que a função de Melnikov de segunda ordem, $M_2(h) = f_2(h)$ do sistema (6-1) é dada por

$$\begin{aligned}
M_2(h) &= \int_0^{\theta_1(h)} \left(R_2^+(\theta, h) + D_h R_1^+(\theta, h) \int_0^\theta R_1^+(\tau, h) d\tau \right) d\theta + \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} (R_2^-(\theta, h) \\
&+ D_h R_1^-(\theta, h) \left(\int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h) d\tau + \int_{\theta_1(h)}^\theta R_1^-(\tau, h) d\tau \right)) d\theta \\
&+ (R_1^+(\theta_1(h), h) - R_1^-(\theta_1(h), h)) D_h \theta_1(h) \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h) d\tau.
\end{aligned} \tag{6-3}$$

Desde (4-50) temos

$$\begin{aligned}
R_1^+(\theta, h) &= \frac{T(h)}{2\pi} (H_x^+(G^+), H_y^+(G^+)) (f^+(G^+), g^+(G^+)) \\
&= \frac{T(h)}{2\pi} (H_x^+(G^+) f^+(G^+) + H_y^+(G^+) g^+(G^+)), \\
R_1^-(\theta, h) &= \frac{T(h) H_y^+(A)}{2\pi H_y^-(A)} (H_x^-(G^-) f^-(G^-) + H_y^-(G^-) g^-(G^-)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^+(\theta, h) &= -\frac{T(h)^2}{4\pi^2} DH^+(G^+)g^+(G^+)\alpha^+(\theta, h)g^+(G^+) \\
&= -\frac{T(h)^2}{4\pi^2} (H_x^+(G^+)f^+(G^+) + H_y^+(G^+)g^+(G^+)) \\
&\quad \times \alpha^+(\theta, h)(f^+(G^+), g^+(G^+))^T, \\
R_2^-(\theta, h) &= -\frac{T^2(h)H_y^+(A)}{4\pi^2 H_y^-(A)} (H_x^-(G^-)f^-(G^-) + H_y^-(G^-)g^-(G^-)) \\
&\quad \times \alpha^-(\theta, h)(f^-(G^-), g^-(G^-))^T.
\end{aligned}$$

Note que, $H^+(G^+(\theta, h)) = H^+(A(h)) = h$ e $A(h) = (0, a_2)^T$, implicam que

$$DH^+(G^+)D_h G^+ = DH^+(A)D_h A(h) = H_y^+(A)a_2'(h) = 1. \quad (6-4)$$

Segue-se de (6-4) que

$$a_2'(h) = \frac{1}{H_y^+(A)}. \quad (6-5)$$

Então diferenciando R_1^+ e R_1^- com relação a h , diretamente, temos

$$\begin{aligned}
D_h R_1^+(\theta, h) &= \frac{T'(h)}{2\pi} [H_y^+(G^+)g^+(G^+) + H_x^+(G^+)f^+(G^+)] \\
&\quad + \frac{T(h)}{2\pi} [g^+(G^+)(H_{xy}^+(G^+)D_h G^+ + H_{yy}^+(G^+)D_h G^+) \\
&\quad + H_y^+(G^+)(g_x^+(G^+)D_h G^+, g_y^+(G^+)D_h G^+) + f^+(G^+) \\
&\quad \times (H_{xx}^+(G^+)D_h G^+ + H_{yx}^+(G^+)D_h G^+) + H_x^+(G^+) \\
&\quad \times (f_x^+(G^+)D_h G^+, f_y^+(G^+)D_h G^+)] \\
&= \frac{T'(h)}{2\pi} [H_y^+g^+ + H_x^+f^+] + \frac{T(h)}{2\pi} [g^+(H_{xy}^+ + H_{yy}^+) \\
&\quad + H_y^+(g_x^+, g_y^+) + f^+(H_{xx}^+ + H_{yx}^+) + H_x^+(f_x^+, f_y^+)] D_h(G^+)
\end{aligned} \quad (6-6)$$

e

$$\begin{aligned}
D_h R_1^-(\theta, h) &= \left[\frac{(T'(h)H_y^+(A) + T(h)H_{yy}^+(A)a'_2(h))2\pi H_y^-(A)}{(2\pi H_y^-(A))^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{T(h)H_y^+(A)2\pi H_{yy}^-(A)a'_2(h)}{(2\pi H_y^-(A))^2} \right] (g^- H_y^- + f^- H_x^-) + \frac{T(h)H_y^+(A)}{2\pi H_y^-(A)} \\
&\quad \times [g^-(H_{xy}^-, H_{yy}^-) + f^-(H_{xx}^-, H_{xy}^-) + H_y^-(g_x^-, g_y^-) + H_x^-(f_x^-, f_y^-)] D_h G^- \\
&= \frac{T'(h)H_y^+(A)}{2\pi H_y^-(A)} (H_y^- g^- + H_x^- f^-) + \frac{T(h)H_y^+(A)}{2\pi H_y^-(A)} [g^-(H_{xy}^-, H_{yy}^-) \\
&\quad + f^-(H_{xx}^-, H_{xy}^-) + H_y^-(g_x^-, g_y^-) + H_x^-(f_x^-, f_y^-)] D_h G^- \\
&\quad + \frac{T(h)(H_y^-(A)H_{yy}^+(A) - H_y^+(A)H_{yy}^-(A))}{2\pi H_y^+(A)(H_y^-(A))^2} (H_y^- g^- + H_x^- f^-).
\end{aligned}$$

Além disso, lembrando que $\theta_1(h) = \frac{T_1(h)}{T(h)} 2\pi$, temos

$$D_h \theta_1(h) = \frac{T_1'(h)T(h) - T_1 T'(h)}{T^2(h)} 2\pi. \quad (6-7)$$

Substituindo (6-6) e (6-7) em (6-3) obtemos $M_2(h)$ para o sistema (6-1). \square

Observação 6.4. Neste caso, a transformação $G(\theta, h)$ pode ser escrita na forma

$$G(\theta, h) = \begin{cases} G^+(\theta, h), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ G^-(\theta, h), & \theta_1(h) \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

onde $G^+(\theta, h) = (G_1^+(\theta, h), G_2^+(\theta, h))^T$ e $G^-(\theta, h) = (G_1^-(\theta, h), G_2^-(\theta, h))^T$. Então o vetor $\alpha(\theta, h)$ de dimensão 1×2 , tem a seguinte forma

$$\alpha(\theta, h) = \begin{cases} \frac{2\pi}{T(h)} (D_h G_2^+, -D_h G_1^+), & 0 \leq \theta \leq \theta_1(h), \\ \frac{2\pi H_y^+(A)}{T(h)H_y^-(A)} (D_h G_2^-, -D_h G_1^-), & \theta_1(h) \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

Podemos provar que

$$\alpha(\theta, h)D_h G(\theta, h) = 0, \quad \alpha(\theta, h)D_\theta G(\theta, h) = 1.$$

De fato, lembrando que neste caso $f^\pm(G^\pm) = (H_y^\pm(G^\pm), -H_x^\pm(G^\pm))$ e usando (4-34), temos para $\theta \in [0, \theta_1(h)]$

$$D_\theta G^+ = \frac{T(h)}{2\pi} (H_y^+(G^+), -H_x^+(G^+))^T,$$

logo,

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, h)D_h G^+ &= \frac{2\pi}{T(h)} (D_h G_2^+, -D_h G_1^+) (D_h G_1^+, D_h G_2^+)^T \\ &= \frac{2\pi}{T(h)} (D_h G_2^+ D_h G_1^+ - D_h G_1^+ D_h G_2^+)^T \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, h)D_\theta G^+ &= \frac{2\pi}{T(h)} (D_h G_2^+, -D_h G_1^+) \frac{T(h)}{2\pi} (H_y^+(G^+), -H_x^+(G^+))^T \\ &= (D_h G_2^+, -D_h G_1^+) D H^+(G^+) \\ &= D H^+(G^+) D_h G^+ \\ &= 1. \end{aligned}$$

Similarmente, usando (4-37) temos para $\theta \in (\theta_1(h), 2\pi]$

$$D_\theta G^- = \frac{T(h)}{2\pi} (H_y^-(G^-), -H_x^-(G^-))^T.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, h)D_h G^- &= \frac{2\pi H_y^+(A)}{T(h)H_y^-(A)} (D_h G_2^-, -D_h G_1^-) (D_h G_1^-, D_h G_2^-)^T \\ &= \frac{2\pi H_y^+(A)}{T(h)H_y^-(A)} (D_h G_2^- D_h G_1^- - D_h G_1^- D_h G_2^-)^T \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, h)D_\theta G^- &= \frac{2\pi H_y^+(A)}{T(h)H_y^-(A)} (D_h G_2^-, -D_h G_1^-) \frac{T(h)}{2\pi} (H_y^-(G^-), -H_x^-(G^-))^T \\ &= \frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)} (D_h G_2^+, -D_h G_1^+) D H^+(G^+) \\ &= \frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)} D H^-(G^-) D_h G^-. \end{aligned}$$

Agora note que $H^-(G^-(\theta, h)) = H^-(A(h))$, então, $DH^-(G^-)D_h G^- = DH^-(A(h))D_h A(h) = H_y^-(A)a_2'(h)$ e por (6-5)

$$DH^-(G^-)D_h G^- = \frac{H_y^-(A)}{H_y^+(A)}.$$

Portanto

$$\alpha(\theta, h)D_\theta G^- = \frac{H_y^+(A) H_y^-(A)}{H_y^-(A) H_y^+(A)} = 1.$$

Pelo Teorema 6.3 temos o seguinte resultado.

Corolário 6.5. *Seja*

$$\theta_1(h) = \pi, \quad T(h) = 2\pi,$$

o qual implica que o sistema (6-1) tem um centro isócrono na origem. Então neste caso, a função de Melnikov de segunda ordem tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} M_2(h) = & \int_0^\pi \left[- (H_y^+ g^+ + H_x^+ f^+) \alpha^+(\theta, h) (f^+, g^+)^T + ((g^+(H_{xy}^+, H_{yy}^+)) \right. \\ & + f^+(H_{xx}^+, H_{xy}^+) + H_y^+(g_x^+, g_y^+) + H_x^+(f_x^+, f_y^+)) D_h G^+ \\ & \times \int_0^\theta (H_y^+ g^+ H_x^+ f^+) d\tau \Big] d\theta + \frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)} \int_\pi^{2\pi} \left[- (H_y^- g^- + H_x^- f^-) \right. \\ & \times \alpha^-(\theta, h) (f^-, g^-)^T + \left(\frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)} (g^-(H_{xy}^-, H_{yy}^-) + f^-(H_{xx}^-, H_{xy}^-)) \right. \\ & + H_y^-(g_x^-, g_y^-) + H_x^-(f_x^-, f_y^-)) D_h G^- + (H_y^- g^- + H_x^- f^-) \\ & \times \left(\frac{H_{yy}^+(A)}{H_y^-(A) H_y^+(A)} - \frac{H_{yy}^-(A)}{(H_y^-(A))^2} \right) \left(\int_0^\pi \frac{H_y^-(A)}{H_y^+(A)} (H_y^+ g^+ + H_x^+ f^+) d\tau \right. \\ & \left. \left. + \int_\pi^\theta (H_y^- g^- + H_x^- f^-) d\tau \right) \right] d\theta. \end{aligned} \tag{6-8}$$

Aplicações

Neste capítulo faremos uma aplicação do resultado principal, o Teorema 5.2. Essa aplicação, assim como a teoria estudada nos capítulos anteriores, é baseada em artigos recentes. Portanto, seu estudo nos ajuda a ter uma maior compreensão sobre a maneira de aplicar os métodos de Melnikov e Averaging, conhecendo que eles são equivalentes.

Primeiro, apresentamos um resultado feito em [14], onde se estuda o número máximo de soluções periódicas de um sistema diferencial autônomo 3-dimensional. Mais precisamente, os autores em [14], estudam o número máximo de zeros de aplicações reais analíticas como um parâmetro pequeno, por meio de uma generalização do Teorema de Rouché. Esse resultado, nos auxiliará no estudo da função de Melnikov de segunda ordem. Sendo assim, considere o sistema dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \epsilon f(x, y, z) \\ \dot{y} = -x + \epsilon g(x, y, z) \\ \dot{z} = \epsilon w(x, y, z) \end{cases} \quad (7-1)$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, f , g e w são polinômios em x , y e z de grau n . Para $\epsilon = 0$, o sistema (7-1) tem uma família de soluções periódicas, de período 2π dada por

$$x = r \cos(t), \quad y = -r \sin(t), \quad z = c, \quad (7-2)$$

onde $r > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Estamos interessados no número de órbitas periódicas de (7-1) bifurcando da família (7-2) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Fazendo a mudança

de coordenadas, $x = r \cos(\theta)$, $y = -r \sin(\theta)$, o sistema (7-1) torna-se:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = 1 - \epsilon[\cos(\theta)g(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z) - \sin(\theta)f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z)]/r, \\ \frac{dr}{dt} = \epsilon[\cos(\theta)f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z) + \sin(\theta)g(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z)], \\ \frac{dz}{dt} = \epsilon w(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z). \end{cases} \quad (7-3)$$

Então, para $0 < \epsilon \ll r$, obtemos desde (7-3)

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \epsilon R(\theta, r, z, \epsilon), \\ \frac{dz}{d\theta} = \epsilon Z(\theta, r, z, \epsilon), \end{cases} \quad (7-4)$$

onde R e Z são analíticas em θ, r, z, ϵ para $r > 0$ e

$$R(\theta, r, z, 0) = \cos(\theta)f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z) + \sin(\theta)g(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z),$$

$$Z(\theta, r, z, 0) = w(r \cos(\theta), -r \sin(\theta), z). \quad (7-5)$$

Note que f, g e w são todos polinômios de grau n , os quais podem ser escritos na seguinte forma:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^n f_k(x, y)z^{n-k},$$

$$g(x, y, z) = \sum_{k=0}^n g_k(x, y)z^{n-k}, \quad (7-6)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{k=0}^n w_k(x, y)z^{n-k}.$$

Onde

$$f_k(x, y, z) = \sum_{i+j \leq k} a_{ijk}x^i y^j, \quad g_k(x, y, z) = \sum_{i+j \leq k} b_{ijk}x^i y^j, \quad (7-7)$$

$$w_k(x, y, z) = \sum_{i+j \leq k} c_{ijk}x^i y^j.$$

Seja

$$F(r, z) := \int_0^{2\pi} R(\theta, r, z, 0)d\theta, \quad G := \int_0^{2\pi} Z(\theta, r, z, 0)d\theta.$$

Então, por (7-5)-(7-7), segue

$$F(r, z) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i+j \leq k} A_{ijk} r^{i+j} \right) z^{n-k},$$

$$G(r, z) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i+j \leq k} B_{ijk} r^{i+j} \right) z^{n-k},$$

onde

$$A_{ijk} = \int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta a_{ijk} + \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) d\theta b_{ijk},$$

$$B_{ijk} = \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^j(\theta) d\theta c_{ijk}.$$

Já que

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^j(\theta) d\theta = 0$$

para $i + j$ ímpar, segue que

$$F(r, z) = r \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{lk} r^{2l} z^{n-k} \equiv r F_{n-1}(r, z), \quad (7-8)$$

$$G(r, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \bar{B}_{lk} r^{2l} z^{n-k} \equiv G_n(r, z),$$

onde

$$\bar{A}_{lk} = \sum_{i+j=2l+1} A_{ijk}, \quad \bar{B}_{lk} = \sum_{i+j=2l} B_{ijk},$$

com F_{n-1} e G_n polinômios em r e z de grau $n-1$ e n , respectivamente. Além disso,

$$F_{n-1}(-r, z) = F_{n-1}(r, z), \quad G_n(-r, z) = G_n(r, z). \quad (7-9)$$

Pelo Lema 1.13, o sistema

$$\begin{cases} F_{n-1}(r, z) = 0 \\ G_n(r, z) = 0 \end{cases} \quad (7-10)$$

tem no máximo $n(n-1)$ zeros em \mathbb{R}^2 (desde que ambos os polinômios não tenham fatores não constantes em comum).

Combinando isto com (7-9), temos que o número de zeros com $r > 0$ é, no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$. Temos o seguinte resultado.

Teorema 7.1. *Sejam F_{n-1} e G_n como em (7-8), e suponha que o sistema (7-10) possui um número finito de soluções. Então, para qualquer número $N > 1$ suficien-*

temente grande, existe uma constante $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, o sistema (7-1) tem no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$ órbitas periódicas na região compacta dada por

$$\frac{1}{N} \leq x^2 + y^2 \leq N, \quad |z| \leq N. \quad (7-11)$$

Demonstração. Dado um $N > 1$ suficientemente grande, seja

$$D := \left\{ (r, z) \left| \frac{1}{2\sqrt{N}} < r < \sqrt{N} + 1, \quad |z| < N + 1 \right. \right\},$$

e

$$E := \left\{ (r, z) \left| \frac{1}{\sqrt{N}} < r < \sqrt{N}, \quad |z| < N \right. \right\}.$$

Então, existe uma constante $\epsilon_0 = \epsilon_0(N) > 0$ tal que para todo $0 < |\epsilon| < \epsilon_0$, as funções R e Z em (7-4) são analíticas em θ, r, z e ϵ para $(r, z) \in D$. Desde [9], o sistema (7-1) tem uma solução periódica na região compacta (7-11) se, e somente se, a equação periódica (7-4) tem uma solução 2π periódica na região E . Pela hipótese, a função vetorial $(F(r, z), G(r, z))$ tem no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$ zeros no aberto D (contados de acordo com suas multiplicidades). Portanto, pelo Teorema 1.34, o sistema (7-1) tem no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$ soluções periódicas sobre a região (7-11). \square

Agora estudaremos a aplicação do resultado principal feita por Liu-Han-Li em [17] onde eles investigaram o número de ciclos limite de um sistema 3-dimensional suave por partes. Os autores aplicaram a equivalência entre esses dois métodos afim de, obter as expressões das funções de Melnikov de primeira e segunda ordem. Desse modo, estudando a função de Melnikov de primeira ordem o sistema estudado pode ter uma única órbita periódica. Por sua vez, o estudo da função de Melnikov de segunda ordem, fornece no máximo dois ciclos limite em uma região compacta.

Considere o sistema (7-1) com

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_0^+ + a_1^+ x + a_2^+ y + a_3^+ z, \\ g(x, y, z) &= b_0^+ + b_1^+ x + b_2^+ y + b_3^+ z, \\ s(x, y, z) &= c_0^+ + c_1^+ x + c_2^+ y + c_3^+ z, \end{aligned}$$

para $x \geq 0$, e

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_0^- + a_1^- x + a_2^- y + a_3^- z, \\ g(x, y, z) &= b_0^- + b_1^- x + b_2^- y + b_3^- z, \\ s(x, y, z) &= c_0^- + c_1^- x + c_2^- y + c_3^- z, \end{aligned}$$

para $x < 0$. Então, temos o seguinte sistema suave por partes da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + \epsilon(a_0^+ + a_1^+x + a_2^+y + a_3^+z), \\ \dot{y} = -2x + \epsilon(b_0^+ + b_1^+x + b_2^+y + b_3^+z), \\ \dot{z} = \epsilon(c_0^+ + c_1^+x + c_2^+y + c_3^+z), \end{cases} \quad x \geq 0 \quad (7-12)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + \epsilon(a_0^- + a_1^-x + a_2^-y + a_3^-z), \\ \dot{y} = -2x + \epsilon(b_0^- + b_1^-x + b_2^-y + b_3^-z), \\ \dot{z} = \epsilon(c_0^- + c_1^-x + c_2^-y + c_3^-z), \end{cases} \quad x < 0$$

onde $0 < \epsilon \ll 1$. O sistema (7-12) tem uma órbita periódica para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno ao usar a função de Melnikov de primeira ordem.

Para mostrar isso, usaremos a equivalência mostrada no capítulo anterior e o Teorema 4.6. Sendo assim, considere o sistema não perturbado (7-12)| $_{\epsilon=0}$. Este sistema tem duas integrais primeiras diferentes de classe C^∞

$$H_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad H_2(z) = z,$$

as quais satisfazem as condições **(H1)**-**(H3)**, com $T_1(h) = \frac{\pi}{2}$ e $T(h) = \pi$. Daí, temos, $\theta_1(h) = \frac{T_1(h)}{T(h)}2\pi = \pi$. Além disso, $\mathbf{H}^\pm(x, y, z) = (H_1(x, y), H_2(z))$. Tomamos agora, a mudança de coordenadas da forma

$$(x, y, z)^T = G(\theta, h) = (\sqrt{h_1} \sin \theta, \sqrt{h_1} \cos \theta, h_2), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Onde h_1 e h_2 são os níveis de energia associados a $H_1(x, y)$ e $H_2(z)$ respectivamente. Utilizando o Teorema 5.2, a equação (4-50) e a equação (4-53), a função de Melnikov de primeira ordem do sistema (7-12) pode ser escrita como

$$M_1(h_1, h_2) = f_1(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} f_{11}^+(h_1, h_2) + f_{11}^-(h_1, h_2) \\ f_{12}^+(h_1, h_2) + f_{12}^-(h_1, h_2) \end{pmatrix}, \quad (7-13)$$

onde

$$\begin{pmatrix} f_{11}^+(h) \\ f_{12}^+(h) \end{pmatrix} = \int_0^{\theta_1(h)} \frac{T(h)}{2\pi} D\mathbf{H}(G)g^+(G)d\theta,$$

$$\begin{pmatrix} f_{11}^-(h) \\ f_{12}^-(h) \end{pmatrix} = \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} \frac{T(h)}{2\pi} D\mathbf{H}(G)g^-(G)d\theta.$$

E

$$\overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} = I_2, \quad (7-14)$$

dado que $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^-$. Assim, calculando diretamente temos

$$\begin{aligned}
 f_{11}^+(h_1, h_2) &= \sqrt{h_1} \int_0^\pi \left[(a_0^+ + a_1^+ \sqrt{h_1} \sin \theta + a_2^+ \sqrt{h_1} \cos \theta + a_3^+ h_2) \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + (b_0^+ + b_1^+ \sqrt{h_1} \sin \theta + b_2^+ \sqrt{h_1} \cos \theta + b_3^+ h_2) \cos \theta \right] d\theta \\
 &= 2\sqrt{h_1}(a_0^+ + a_3^+ h_2) + \frac{\pi h_1}{2}(a_1^+ + b_2^+),
 \end{aligned} \tag{7-15}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12}^+(h_1, h_2) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (c_0^+ + c_1^+ \sqrt{h_1} \sin \theta + c_2^+ \sqrt{h_1} \cos \theta + c_3^+ h_2) d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2}(c_0^+ + c_3^+ h_2) + c_1^+ \sqrt{h_1}.
 \end{aligned}$$

Similarmente temos

$$\begin{aligned}
 f_{11}^-(h_1, h_2) &= \sqrt{h_1} \int_\pi^{2\pi} \left[(a_0^- + a_1^- \sqrt{h_1} \sin \theta + a_2^- \sqrt{h_1} \cos \theta + a_3^- h_2) \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + (b_0^- + b_1^- \sqrt{h_1} \sin \theta + b_2^- \sqrt{h_1} \cos \theta + b_3^- h_2) \cos \theta \right] d\theta \\
 &= -2\sqrt{h_1}(a_0^- + a_3^- h_2) + \frac{\pi h_1}{2}(a_1^- + b_2^-),
 \end{aligned} \tag{7-16}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12}^-(h_1, h_2) &= \frac{1}{2} \int_\pi^{2\pi} (c_0^- + c_1^- \sqrt{h_1} \sin \theta + c_2^- \sqrt{h_1} \cos \theta + c_3^- h_2) d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2}(c_0^- + c_3^- h_2) - c_1^- \sqrt{h_1}.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 f_{11}^+(h_1, h_2) + f_{11}^-(h_1, h_2) &= 2\sqrt{h_1}(a_0^+ + a_3^+ h_2) + \frac{\pi h_1}{2}(a_1^+ + b_2^+) \\
 &\quad - 2\sqrt{h_1}(a_0^- + a_3^- h_2) + \frac{\pi h_1}{2}(a_1^- + b_2^-) \\
 &= \sqrt{h_1} \left(2(a_0^+ - a_0^-) + \frac{\pi}{2}(a_1^+ + b_2^+ + a_1^- + b_2^-) \sqrt{h_1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2(a_3^+ - a_3^-) h_2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12}^+(h_1, h_2) + f_{12}^-(h_1, h_2) &= \frac{\pi}{2}(c_0^+ + c_3^+ h_2) + c_1^+ \sqrt{h_1} \\
 &\quad + \frac{\pi}{2}(c_0^- + c_3^- h_2) - c_1^- \sqrt{h_1} \\
 &= \frac{\pi}{2}(c_0^+ + c_0^-) + (c_1^+ + c_1^-) \sqrt{h_1} + \frac{\pi}{2}(c_3^+ + c_3^-).
 \end{aligned} \tag{7-17}$$

Portanto, substituindo (7-15) e (7-16) em (7-13), segue que

$$M_1(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{h_1}(d_0 + d_1\sqrt{h_1} + d_2h_2) \\ d_3 + d_4\sqrt{h_1} + d_5h_2 \end{pmatrix}, \quad (7-18)$$

onde

$$\begin{aligned} d_0 &= 2(a_0^+ - a_0^-), & d_1 &= \frac{\pi}{2}(a_1^+ + b_2^+ + a_1^- + b_2^-), \\ d_2 &= 2(a_3^+ - a_3^-), & d_3 &= \frac{\pi}{2}(c_0^+ + c_0^-), \\ d_4 &= (c_1^+ + c_1^-), & d_5 &= \frac{\pi}{2}(c_3^+ + c_3^-). \end{aligned} \quad (7-19)$$

Agora, vamos encontrar os valores de h_1 e h_2 tal que $M_1(h_1, h_2) = (0, 0)$, isto é,

$$\begin{cases} \sqrt{h_1}(d_0 + d_1\sqrt{h_1} + d_2h_2) = 0 \\ d_3 + d_4\sqrt{h_1} + d_5h_2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$h_1 = 0 \quad \text{e} \quad h_2 = -\frac{d_3}{d_5}$$

ou

$$h_1 = \left(\frac{d_2d_3 - d_0d_5}{d_1d_5 - d_2d_4} \right)^2 \quad \text{e} \quad h_2 = \frac{d_1d_3 - d_0d_4}{d_2d_4 - d_1d_5},$$

com

$$\frac{d_2d_3 - d_0d_5}{d_1d_5 - d_2d_4} > 0, \quad \text{já que} \quad \sqrt{h_1} = \frac{d_2d_3 - d_0d_5}{d_1d_5 - d_2d_4}.$$

Então, como h_1 é o nível de energia associado a $H_1(x, y) = x^2 + y^2$, $h_1 \neq 0$, logo temos um único zero dado por

$$(h_1^*, h_2^*) = \left(\left(\frac{d_2d_3 - d_0d_5}{d_1d_5 - d_2d_4} \right)^2, \frac{d_1d_3 - d_0d_4}{d_1d_5 - d_2d_4} \right).$$

Como

$$\det \left(\frac{\partial M_1(h_1, h_2)}{\partial (h_1, h_2)} \right) = \frac{d_1d_5 - d_2d_4}{2} \neq 0,$$

(h_1^*, h_2^*) é um zero simples. Portanto, pelo Teorema 4.6, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno o sistema (7-12) tem uma única órbita periódica.

Agora, se $M_1(h_1, h_2) = 0$, para qualquer valor de h_1 e h_2 , precisamos investigar o número máximo de zeros da função de Melnikov de segunda ordem do sistema (7-12). Em nosso estudo, para fazer a função de Melnikov de primeira

ordem identicamente nula, impomos condições diferentes daquelas impostas em [17]. Então, considere

$$M_1(h_1, h_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{h_1}(d_0 + d_1\sqrt{h_1} + d_2h_2) = 0 \\ d_3 + d_4\sqrt{h_1} + d_5h_2 = 0, \end{cases} \quad (7-20)$$

se, e somente se,

$$d_0 = 2(a_0^+ - a_0^-) = 0, \quad d_1 = \frac{\pi}{2}(a_1^+ + b_2^+ + a_1^- + b_2^-) = 0,$$

$$d_2 = 2(a_3^+ - a_3^-) = 0, \quad d_3 = \frac{\pi}{2}(c_0^+ + c_0^-) = 0,$$

$$d_4 = (c_1^+ + c_1^-) = 0, \quad d_5 = \frac{\pi}{2}(c_3^+ + c_3^-) = 0.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} a_0^+ &= a_0^-, & b_2^+ &= -a_1^+ - a_1^- - b_2^-, \\ a_3^+ &= a_3^-, & c_0^+ &= -c_0^-, \\ c_1^+ &= -c_1^-, & c_3^+ &= -c_3^-. \end{aligned} \quad (7-21)$$

A seguir enunciaremos um resultado sobre a existência de ciclos limite.

Proposição 7.2. *Denotemos como (C) o conjunto de condições (7-21) e suponhamos que elas são satisfeitas. Então usando a função de Melnikov de segunda ordem, para um número N suficientemente grande, existe uma constante ϵ_0 tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, o sistema (7-12) tem no máximo 2 ciclos limite sobre a região compacta dada por*

$$\frac{1}{N} \leq x^2 + y^2 \leq N, \quad |z| \leq N. \quad (7-22)$$

Demonstração. Desde (7-20) temos que $M_1 \equiv 0$ se as condições em (C) são satisfeitas. Antes de calcular a função de Melnikov de segunda ordem, primeiro precisamos encontrar a expressão do vetor $\alpha(\theta, h_1, h_2)$, 2π periódico definido no Lema 4.7. Como α^+ é dado por

$$\alpha^+ = \frac{D_\theta G^{+T}}{|D_\theta G^+|^2},$$

onde $T(h) = \pi$ e $f^\pm(x, y, z) = (H_y, -H_x, H_z)$, desde (4-34) e (4-37) temos

$$D_\theta G^+ = \frac{T(h)}{2\pi} f^+(G^+) = D_\theta G^- = \frac{T(h)}{2\pi} f^-(G^-).$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^\pm(G^+) &= \frac{1}{2}(H_y, -H_x, H_z)|_{(x,y,z)=G(\theta,h)} \\ &= \frac{1}{2}(2y, -2x, 0)|_{(x,y,z)=G(\theta,h)} \\ &= (\sqrt{h_1} \cos(\theta), -\sqrt{h_1} \sin(\theta), 0). \end{aligned} \quad (7-23)$$

Assim

$$|D_\theta G^\pm|^2 = h_1 \cos^2(\theta) + h_1 \sin^2(\theta) = h_1.$$

Portanto

$$\alpha(\theta, h) = \frac{(\sqrt{h_1} \cos(\theta), -\sqrt{h_1} \sin(\theta), 0)}{h_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} \cos(\theta), -\frac{1}{\sqrt{h_1}} \sin(\theta), 0 \right). \quad (7-24)$$

Por outro lado, dado $N > 1$ suficientemente grande, de maneira analoga à prova do Teorema 7.1, intruduzimos as regiões

$$V := \left\{ (h_1, h_2)^T \left| \frac{1}{2\sqrt{N}} < h_1 < \sqrt{N} + 1, \quad |h_2| < N + 1 \right. \right\},$$

e

$$I := \left\{ (h_1, h_2)^T \left| \frac{1}{\sqrt{N}} < h_1 < \sqrt{N}, \quad |h_2| < N \right. \right\}.$$

Então existe uma constante $\epsilon_0 = \epsilon_0(N) > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, a função $R(\theta, h_1, h_2, \epsilon)$ em (4-48) é analítica por partes em θ , h_1 , h_2 e ϵ , para $(h_1, h_2) \in V$. Além disso, temos que o sistema (7-12) tem uma solução periódica sobre a região compacta (7-22) se, e somente se, a equação periódica (4-47) tem uma solução 2π periódica sobre o compacto I . Segundo o Teorema 5.2 e a equação (4-54) do Lema 4.10 a função de Melnikov de segunda ordem do sistema (7-12) tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} M_2(h) &= \int_0^{2\pi} \left(R_2(\theta, h) + D_h R_1(\theta, h) \int_0^\theta R_1(\tau, h) d\tau \right) d\theta \\ &\quad + (R_1^+(\theta_1(h), h) - R_1^-(\theta_1(h), h)) D_h \theta_1(h) \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\theta, h) d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1(h)} \left(R_2^+(\theta, h) + D_h R_1^+(\theta, h) \int_0^\theta R_1^+(\tau, h) d\tau \right) d\theta + \int_{\theta_1(h)}^{2\pi} (R_2^-(\theta, h) \\ &\quad + D_h R_1^-(\theta, h) \left(\int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h) d\tau + \int_{\theta_1(h)}^\theta R_1^-(\tau, h) d\tau \right)) d\theta \end{aligned}$$

$$+ (R_1^+(\theta_1(h), h) - R_1^-(\theta_1(h), h)) D_h \theta_1(h) \int_0^{\theta_1(h)} R_1^+(\tau, h) d\tau. \quad (7-25)$$

Como $\overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} = I_2$, e dado que $\theta_1(h) = \pi$, então, $D_h \theta_1(h) = 0$. Desde as equações (4-48)-(4-50) temos

$$\begin{aligned} R_2^+(\theta, h) &= -\frac{T(h)^2}{4\pi^2} D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+) \alpha^+(\theta, h) g^+(G^+) \\ &= -\frac{1}{4} D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+) \alpha^+(\theta, h) g^+(G^+), \\ D_h R_1^+(\theta, h) &= D_h \left(\frac{T(h)}{2\pi} D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+) \right) \\ &= \frac{1}{2} D_h (D\mathbf{H}^+(G^+) g^+(G^+)), \\ D_h R_1^-(\theta, h) &= D_h \left(\frac{T(h)}{2\pi} \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-) \right) \\ &= \frac{1}{2} D_h (D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-)), \end{aligned} \quad (7-26)$$

$$\begin{aligned} R_2^-(\theta, h) &= -\frac{T(h)^2}{4\pi^2} \overline{D\mathbf{H}^+(A)} \left[\overline{D\mathbf{H}^-(A)} \right]^{-1} D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-) \\ &\quad \times \alpha^-(\theta, h) g^-(G^-), \\ &= -\frac{1}{4} D\mathbf{H}^-(G^-) g^-(G^-) \alpha^-(\theta, h) g^-(G^-). \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (7-25) obtemos

$$\begin{aligned} M_2(h_1, h_2) &= (M_{21}(h_1, h_2), M_{22}(h_1, h_2)) \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_0^\pi \left(-D\mathbf{H}g^+ \alpha g^+ + D_h(D\mathbf{H}g^+) \int_0^\theta D\mathbf{H}g^+ d\tau \right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_\pi^{2\pi} \left(D\mathbf{H}^- g^- \alpha^- g^- + D_h(D\mathbf{H}g^+) \left(\int_0^\pi D\mathbf{H}g^+ d\tau \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \int_\pi^{2\pi} D\mathbf{H}g^- d\tau \right) \right) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (7-27)$$

Agora, avaliando as condições (7-21) no sistema (7-12) calculamos a função de

Melnikov de segunda ordem dada em (7-27). Usando o mathematica obtemos

$$\begin{aligned}
M_{21}(h_1, h_2) &= \frac{1}{8} \left[8\sqrt{h_1} (a_0^-(a_2^- - a_2^+) - (b_0^- + b_0^+)(a_1^- + b_2^-) + (b_3^+ + b_3^-)c_0^- \right. \\
&\quad + (a_2^- - a_2^+)a_3^- h_2 - (b_3^+ + b_3^-)(a_1^- - b_2^- - c_3^-)h_2) + (- (a_2^- - a_2^+ \\
&\quad - b_1^- + b_1^+) (a_2^- - b_2^-) + 2(-(b_3^+ + b_3^-)c_1^- + a_3^-(c_2^- + c_2^+))) \pi h_1 \left. \right] \\
&= (a_0^-(a_2^- - a_2^+) - (b_0^- - b_0^+)(a_1^- - b_2^-) + (b_3^+ + b_3^-)c_0^-)\sqrt{h_1} + (a_2^- a_3^- \\
&\quad - a_2^+ a_3^- - (b_3^+ + b_3^-)(a_1^- + b_2^- - c_3^-)) \sqrt{h_1} h_2 + \frac{1}{8} (- (a_2^- - a_2^+ \\
&\quad - b_1^- + b_1^+) (a_1^- + b_2^-) + 2((-b_3^+ + b_3^-)c_1^- + a_3^-(c_2^- + c_2^+))) \pi h_1 \\
&= \sqrt{h_1}(s_0 + s_1 h_2 + s_2 \sqrt{h_1}).
\end{aligned}$$

Onde

$$s_0 = a_0^-(a_2^- - a_2^+) - (b_0^- - b_0^+)(a_1^- - b_2^-) + (b_3^+ + b_3^-)c_0^-,$$

$$s_1 = a_2^- a_3^- - a_2^+ a_3^- - (b_3^+ + b_3^-)(a_1^- + b_2^- - c_3^-),$$

$$s_2 = \frac{\pi}{8} (- (a_2^- - a_2^+ - b_1^- + b_1^+) (a_1^- + b_2^-) + 2((-b_3^+ + b_3^-)c_1^- + a_3^-(c_2^- + c_2^+))).$$

E

$$\begin{aligned}
M_{22}(h_1, h_2) &= \frac{1}{8\sqrt{h_1}} \left[-4 \left((b_1^- c_1^- - b_1^+ c_1^- - a_1^- c_2^- + a_1^+ c_2^+ + (c_2^- + c_2^+)c_3^-) h_1 \right. \right. \\
&\quad + (b_0^- + b_0^+ + (b_3^+ + b_3^-)h_2)(c_0^- + c_3^- h_2) + \sqrt{h_1} (- (a_2^- - a_2^+ - b_1^- \\
&\quad + b_1^+) (c_0^- + c_3^- h_2) + 2 (b_0^- c_1^- + b_0^+ c_1^- + (b_3^+ + b_3^-)c_1^- h_2 - (c_2^- + c_2^+) \\
&\quad \times (a_0^- + a_3^- h_2))) \left. \right) \pi \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{h_1}} \left[-\frac{1}{2}(b_0^- + b_0^+)c_0^- + \frac{1}{2}(-b_1^-c_1^- + b_1^+c_1^- + a_1^-c_2^- - a_1^+c_2^+ \right. \\
&\quad - (c_2^- + c_2^+)c_3^-) h_1 + \frac{1}{2}(-(b_3^+ + b_3^-)c_0^- - (b_0^- + b_0^+)c_3^-)h_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(-b_0^- - b_0^+)c_0^-h_2^2 + \frac{\pi}{8}((-a_2^- + a_2^+ + b_1^- - b_1^+)c_0^- + 2((b_0^- + b_0^+)c_1^- \\
&\quad - a_0^-(c_2^- + c_2^+)) \sqrt{h_1} + \frac{\pi}{8}(2(b_3^+ + b_3^-)c_1^- - 2a_3^-(c_2^- + c_2^+) + (-a_2^- \\
&\quad + a_2^+ + b_1^- - b_1^+)c_3^-) \sqrt{h_1}h_2 \left. \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{h_1}}(e_0 + e_1\sqrt{h_1} + e_2h_2 + e_3h_1 + e_4\sqrt{h_1}h_2 + e_5h_2^2)
\end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}
e_0 &= -\frac{1}{2}(b_0^- + b_0^+)c_0^-, \\
e_1 &= \frac{\pi}{8}((-a_2^- + a_2^+ + b_1^- - b_1^+)c_0^- + 2((b_0^- + b_0^+)c_1^- - a_0^-(c_2^- + c_2^+))), \\
e_2 &= \frac{1}{2}(-(b_3^+ + b_3^-)c_0^- - (b_0^- + b_0^+)c_3^-), \\
e_3 &= \frac{1}{2}(-b_1^-c_1^- + b_1^+c_1^- + a_1^-c_2^- - a_1^+c_2^+ - (c_2^- + c_2^+)c_3^-), \\
e_4 &= \frac{\pi}{8}(2(b_3^+ + b_3^-)c_1^- - 2a_3^-(c_2^- + c_2^+) + (-a_2^- + a_2^+ + b_1^- - b_1^+)c_3^-), \\
e_5 &= \frac{1}{2}(-b_0^- - b_0^+)c_0^-.
\end{aligned}$$

Portanto a função de Melnikov de segunda ordem pode ser escrita como

$$M_2(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{h_1}\bar{f}_1(h_1, h_2) \\ \frac{1}{\sqrt{h_1}}\bar{f}_2(h_1, h_2) \end{pmatrix}, \quad (7-28)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1 &= (s_0 + s_1h_2 + s_2\sqrt{h_1}) \\
\bar{f}_2 &= (e_0 + e_1\sqrt{h_1} + e_2h_2 + e_3h_1 + e_4\sqrt{h_1}h_2 + e_5h_2^2)
\end{aligned}$$

Logo, podemos usar o Lema 1.13 para estimar o número de zeros da função de Melnikov de segunda ordem. Temos que $\deg \bar{f}_1 \cdot \deg \bar{f}_2 = 2$, isto é, $M_2(h_1, h_2)$ tem no máximo dois zeros. Logo, pelo Lema 6.2 o sistema (7-12) tem no máximo 2 ciclos limite na região compacta (7-22). \square

Conclusões

Neste trabalho apresentamos duas técnicas para encontrar ciclos limite, a técnica do Averaging e a técnica de Melnikov. Apesar do método de Melnikov ser mais geral do que o método da Averaging, mostramos um resultado recente onde se estabelece a equivalência entre os dois métodos para campos quase-integráveis suaves por partes. Nosso principal resultado é estabelecido pelo Teorema 5.2, no qual, vemos que podemos obter os mesmos resultados aplicando o método de Melnikov de qualquer ordem, ou aplicando o método de Averaging da mesma ordem, em sistemas quase-integráveis suaves por partes n -dimensionais, $n \geq 2$. Este resultado foi obtido fazendo uma mudança de coordenadas apropriada, que transformou o sistema suave por partes perturbado (4-1) em um sistema periódico, como foi mostrado mediante o Lema 4.8.

Além disso, apresentamos o método de Averaging de ordem superior, o qual pode ser aplicado a qualquer sistema periódico da forma (4-47). Mostramos a equivalência entre a aplicação de Poncaré do sistema $dh/d\theta$ e a função de bifurcação F , assim como a equivalência entre a aplicação de Poincaré do sistema $dh/d\theta$ e a aplicação de Poncaré do sistema $dw/d\theta$, as quais foram muito importantes para mostrar o resultado principal.

Em geral, encontrar as funções de Melnikov ou as funções promediadas para $n \geq 2$ é uma tarefa árdua, contudo, usando a equivalência entre estes métodos, esse problema pode ser reduzido, e é assim que apresentamos a expressão da função de Melnikov de segunda ordem para um sistema quase-hamiltoniano suave por partes utilizando a expressão da função de segunda ordem de Averaging que é muito mais fácil de obter-se neste caso; e também, na aplicação vemos a vantagem de conhecer esta equivalência, dado que encontrar a função de Melnikov de primeira ordem, usando diretamente a expressão dada para essa função requer mais cálculos, como podemos ver no artigo [27], Teorema 3.

Após mostrar a equivalência entre esses dois métodos, surge o problema de como estimar ou encontrar os zeros das funções de Melnikov e Averaging. Desta forma, fizemos uma aplicação do Teorema 5.2, onde se estudou o número máximo de ciclos limite de um sistema autônomo suave por partes 3-dimensional, na região compacta (7-22). Para isso, estudamos o número de zeros que possui a função de Melnikov de segunda ordem, através do Lema 1.13. Consequentemente, baseados na prova do Teorema 7.1, usamos o Lema 6.2 para estabelecer o número máximo de ciclos limite na região compacta (7-22). Deve-se notar que, em nossa aplicação fizemos uma mudança nas condições dadas em [17], porém obtivemos o mesmo resultado.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, O. B. **Teoria do Grau e Aplicações.2006.125 f.** Dissertação de mestrado, Centro de Ciência e Tecnologia, Universidad Federal de Campina Grande, 2006.
- [2] BUICĂ, A.; LLIBRE, J. **Averaging methods for finding periodic orbits via brouwer degree.** *Bulletin des sciences mathematiques*, 128(1):7–22, 2004.
- [3] CARVALHO, T.; EUZEBIO, R. D.; LLIBRE, J.; TONON, D. J. **Detecting periodic orbits in some 3D chaotic quadratic polynomial differential systems.** *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 21(1):1–11, 2016.
- [4] CHEN, X.; LI, T.; LLIBRE, J. **Melnikov functions of arbitrary order for piecewise smooth differential systems in \mathbb{R}^n and applications.** *Journal of Differential Equations*, 314:340–369, 2022.
- [5] GAIKO, V. **Global bifurcation theory and Hilbert’s sixteenth problem.** Springer Science & Business Media, 2003.
- [6] GARCÍA, A. **El método de Melnikov.** In: *XXXIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana: memorias: Saltillo, Coah., México, 2000*, volume 29, p. 143. Sociedad Matemática Mexicana, 2001.
- [7] GOMIDE, O. M. L. **Ciclos limite em sistemas dinâmicos suaves e não suaves.** Dissertação de mestrado, IMECC-UNICAMP, 2015.
- [8] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**, volume 42. Springer Science & Business Media, 1983.
- [9] HALE, J. K. **Ordinary Differential Equations.** Robert E. Krieger Publishing Co, Malabar, Florida, 1980.

- [10] HAN, M. **On the maximum number of periodic solutions of piecewise smooth periodic equations by Average method.** *J. Appl. Anal. Comput*, 7(2):788–794, 2017.
- [11] HAN, M.; JIANG, K.; GREEN JR, D. **Bifurcations of periodic orbits, subharmonic solutions and invariant tori of high-dimensional systems.** *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 36(3):319–329, 1999.
- [12] HAN, M.; ROMANOVSKI, V. G.; ZHANG, X. **Equivalence of the Melnikov function method and the Averaging method.** *Qualitative theory of dynamical systems*, 15(2):471–479, 2016.
- [13] HAN, M.; SHENG, L. **Bifurcation of limit cycles in piecewise smooth systems via Melnikov function.** *J. Appl. Anal. Comput*, 5(4):809–815, 2015.
- [14] HAN, M.; SUN, H.; BALANOV, Z. **Upper estimates for the number of periodic solutions to multi-dimensional systems.** *Journal of Differential Equations*, 266(12):8281–8293, 2019.
- [15] ITIKAWA, J.; LLIBRE, J.; NOVAES, D. D. **A new result on averaging theory for a class of discontinuous planar differential systems with applications.** *Revista matemática iberoamericana*, 33(4):1247–1265, 2017.
- [16] LIMA, E. L. **Curso de análise, vol. 2, Projeto Euclides.** IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [17] LIU, S.; HAN, M.; LI, J. **Bifurcation methods of periodic orbits for piecewise smooth systems.** *Journal of Differential Equations*, 275:204–233, 2021.
- [18] LIU, X.; HAN, M. **Bifurcation of limit cycles by perturbing piecewise hamiltonian systems.** *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(05):1379–1390, 2010.
- [19] LLIBRE, J.; NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. **Higher order averaging theory for finding periodic solutions via brouwer degree.** *Nonlinearity*, 27(3):563, 2014.
- [20] LLIBRE, J.; NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. **On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems.** *Bulletin des sciences mathématiques*, 139(3):229–244, 2015.
- [21] NOVAES, D. D. **The Averaging Method-Lecture.** 2021.

- [22] PALIS, J.; DE MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [23] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Text in Applied Mathematics. Springer, New York, 2001.
- [24] SILVA, L. C. **Método de Melnikov generalizado e aplicações**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, 2011.
- [25] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1979.
- [26] SOTOMAYOR, J.; TEIXEIRA, M. **Regularization of discontinuous vector fields**. In: *Proceedings of the international conference on differential equations*, p. 207–223. World Scientific, 1996.
- [27] TIAN, H.; HAN, M. **Bifurcation of periodic orbits by perturbing high-dimensional piecewise smooth integrable systems**. *Journal of Differential Equations*, 263(11):7448–7474, 2017.
- [28] VELTER, M. Q. **Teoria do Averaging para Campos de Vetores Suaves por Partes**. Dissertação de mestrado, Ime-UFG, 2016.
- [29] WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**, volume 2. Springer, 1990.