

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA,
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA APLICADA
AO PROJETO CONCEITUAL DE EDIFÍCIOS
USANDO O MÉTODO DA ESTRUTURA BASE**

SARA BRANDÃO E SILVA

D0124E16
GOIÂNIA
2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Sara Brandão e Silva

Título do trabalho: Otimização de topologia aplicada ao projeto conceitual de edifícios usando o método da estrutura base

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Sara Brandão e Silva
Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 06 /10 /2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

SARA BRANDÃO E SILVA

**OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA
APLICADA AO PROJETO CONCEITUAL
DE EDIFÍCIOS USANDO O MÉTODO DA
ESTRUTURA BASE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil da
Universidade Federal de Goiás para obtenção do título
de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Mecânica das Estruturas
Orientadora: Dra. Sylvia Regina Mesquita de Almeida

D0124E16
GOIÂNIA
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

GPT/BC/UFG

Silva, Sara Brandão e.

T000o Otimização de topologia aplicada ao projeto conceitual de edifícios usando o método da estrutura base [manuscrito] / Sara Brandão. - 2016.

cxii, 112 f. : il.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sylvia Regina Mesquita de Almeida.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil e Ambiental, Programa Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Goiânia - 2016.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, tabelas, abreviaturas e símbolos.

1. Edifícios altos – Construção 2. Construção civil – Projetos. I.
Título.

CDU 624



**PPG
GECON**

**Programa de Pós-Graduação em
Geotecnia, Estruturas e Construção Civil**



Ata de Nº 0124 da sessão de julgamento da
Dissertação da aluna Sara Brandão e Silva da
área de concentração Mecânica das Estruturas
do PPG em Geotecnia, Estruturas e Construção
Civil.

Aos 19 dias do mês de janeiro de 2016, às 09h00, na Sala Caryocar, Bloco A, 2º andar, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e Computacional- UFG reuniu-se a banca examinadora designada na forma regimental pela Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil para julgar a Dissertação intitulada "Otimização de Topologia Aplicada ao Projeto Conceitual de Edifícios Usando o Método da Estrutura Base", apresentada pela aluna Sara Brandão e Silva, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de MESTRE, área de concentração Mecânica das Estruturas. A Banca Examinadora foi Presidida pela Prof.ª Dr.ª Sylvania Regina Mesquita de Almeida (GECON/UFG), tendo como membros o Prof. Dr. Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado (GECON/UFG) e o Prof. Dr. Francisco Evangelista Júnior (UNB). Aberta a sessão pública, a candidata teve a oportunidade de expor o trabalho. Após a exposição, a aluna foi arguida oralmente pelos membros da Banca, os quais concluíram pelos seguintes resultados:

Membro	Instituição	Função	Resultado
Sylvia Regina Mesquita de Almeida	GECON/UFG	Presidente	<i>Aprovada</i>
Zenón José Guzmán Del Prado	GECON/UFG	Examinador Interno	APROVADA
Francisco Evangelista Júnior	UNB	Examinador Externo	APROVADA

() Tendo demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização no tema de sua Dissertação, a Banca Examinadora concluiu pela **aprovação** da candidata **sem restrições**.

() Não tendo demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização no tema de sua Dissertação, a Banca Examinadora concluiu pela **reprovação** da candidata, conforme as seguintes justificativas:

Nos termos do Regulamento Geral dos Cursos de pós-graduação desta Universidade, foi lavrada a presente ata que, lida e julgada conforme, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pela candidata.

Zenón José Guzmán Del Prado
Zenón José Guzmán Del Prado
PPG-GECON/UFG

Francisco Evangelista Júnior
Francisco Evangelista Júnior
UNB

Sylvia Regina Mesquita de Almeida
Sylvia Regina Mesquita de Almeida
PPG-GECON/UFG

Candidata: Sara Brandão e Silva *Sara Brandão e Silva*

AGRADECIMENTOS

À Deus por me capacitar.

Aos meus pais por acreditarem em meus sonhos.

Ao meu irmão, Sávio Henrique, por ser meu grande incentivador.

À professora Sylvia, pela atenção, dedicação e disponibilidade em ensinar, explicar, ajudar e ouvir.

Ao Victor Hugo por ser meu companheiro e confidente.

À CAPES e ao CNPQ pelo auxílio financeiro

RESUMO

A otimização de topologia fornece soluções para muitas aplicações da engenharia e os métodos baseados na densidade são as abordagens mais populares neste campo. No entanto, quando se trata da concepção de edifícios a dimensão do domínio estendido em relação à altura dos edifícios propicia a concentração de matéria na base do edifício. Por outro lado, o método da *ground structure* fornece soluções desejáveis usando uma treliça altamente conectada em uma abordagem próxima as técnicas de otimização de dimensões. Este trabalho apresenta um estudo sobre a aplicação do método da *ground structure* para obtenção do projeto conceitual dos sistemas de contraventamento dos edifícios comparando com o conhecido método baseado na densidade. Para isso leva-se em consideração características de manufatura como simetria e repetição de padrão, além das considerações de múltiplos carregamentos. Simulações em 2D são apresentadas para validação do método e observação do comportamento estrutural. Exemplos em 3D com arquiteturas mais ousadas são desenvolvidos para mostrar as possibilidades arquitetônicas que as soluções obtidas pela *ground structure* propicia.

Palavras-chave: Otimização de topologia. Sistemas de contraventamento. Edifícios. *Ground structure*. Métodos de densidade.

ABSTRACT

Topology optimization provides design solutions to several engineering applications and density methods are the most popular approach in this field. However, when it comes to building design, the dimension of the extended domain related to the high of the building provides material concentration at the basis of the building. On the other side, the ground structure method provides desirable grid solutions using a highly connected truss in an approach close to size optimization techniques. This work presents a prospective study about the application of ground structure method to obtain bracing systems for buildings comparing with the known solutions obtained by density methods. Desirable manufacturing constraints such as patterns repetition and symmetry are considered. Multiple loading functions are Simulations are developed in two-dimensional building configurations to validate the method and show the structural comportment. Three dimensional examples are developed to show possibility of interesting solutions obtained with the ground structure method.

Keywords: Topology optimization. Bracing systems. Buildings. Ground structure. Density methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplo de solução pelo método de densidade: (a) o domínio estendido; (b) distribuição de material em fase intermediária; (c) distribuição final de material	21
Figura 1.2 – Exemplo de estrutura base: (a) problema contínuo; (b) estrutura base com nível de conexão 2; (c) estrutura base com nível de conexão 12	28
Figura 2.1 – Representação modelo SIMP	35
Figura 2.2 – Representação modelos material: (a) RAMP; (b) SINH.....	36
Figura 2.3 – Padrão de geração da estrutura base: (a) nível de conectividade 1; (b) nível de conectividade 2; (c) nível de conectividade 3	46
Figura 2.4 – Eliminação de elementos que excedam a malha	47
Figura 2.5 – Eliminação de elementos colineares: (a) problema com solução única; (b) problema com solução não única.....	48
Figura 2.6 – Etapas de geração da malha usando o PolyMesher: (a) geração das sementes; (b) triangulação de Delaunay; (c) geração de células	49
Figura 2.7 – Exemplo de malha gerada pelo PolyMesher: (a) malha poligonal com 10 elementos; (b) nível de conectividade 1; (c) nível de conectividade 2; (d) nível de conectividade 3; (e) nível de conectividade 4; (f) nível de conectividade 5.....	50
Figura 3.1 – Ilustração de mapeamento das variáveis de projeto para imposição da repetição de padrão ao longo do eixo Y em aplicações bidimensionais: (a) conjunto de variáveis de projeto y ; (b) conjunto d^1 e d^2 de densidades nos elementos; (c) mapeamento de variáveis de projeto em densidades nodais formando a distribuição com padrões repetidos ao longo do eixo Y ...	52
Figura 3.2 – Ilustração de mapeamento das variáveis de projeto para imposição de simetria em relação ao eixo Y em aplicações bidimensionais: (a) conjunto de variáveis de projeto y ; (b) conjunto d^1 e d^2 de densidades nos elementos; (c) mapeamento de variáveis de projeto em densidades nodais formando a distribuição simétrica em relação ao eixo Y	54
Figura 3.3 – Ilustração de mapeamento das variáveis de projeto para imposição da repetição de padrão ao longo do eixo Y em aplicações bidimensionais: (a) conjunto de variáveis de projeto y ; (b) conjunto a^1 e a^2 de áreas de seções transversais; (c) mapeamento de variáveis de projeto	

em áreas das seções transversais formando a distribuição com padrões repetidos ao longo do eixo Y	56
Figura 3.4 – Ilustração de mapeamento das variáveis de projeto para imposição de simetria em relação ao eixo Y em aplicações bidimensionais: (a) conjunto de variáveis de projeto y ; (b) conjunto a^1 e a^2 de áreas de seções transversais; (c) mapeamento de variáveis de projeto em áreas das seções transversais formando a distribuição simétrica em relação ao eixo Y	58
Figura 3.5 – Ilustração de mapeamento das variáveis de projeto para imposição de repetição de padrão ao longo do eixo Y e simetria em relação ao eixo Y em aplicações bidimensionais: (a) conjunto de variáveis de projeto y ; (b) conjunto a^1 e a^2 de áreas de seções transversais; (c) mapeamento das variáveis de projeto em áreas das seções transversais formando a distribuição com padrões ao longo do eixo Y dispostos de forma simétrica em relação ao eixo Y	60
Figura 3.6 – Exemplo de cargas não simultâneas devidas à incidência do vento em edifícios tipo caixa: (a) vento incidindo a 0° em sentido 1(X^+); (b) vento incidindo a 0° em sentido 2(X^-); (c) vento incidindo a 90° em sentido 1(Y^+); (d) vento incidindo a 90° em sentido 2(Y^-).....	61
Figura 3.7 – Geração de malha para edifício tipo caixa: (a) vista em planta malha 2D; (b) perspectiva da malha após a rotação	64
Figura 3.8 – Edifício com seção circular variável	66
Figura 3.9 – Esquema para obtenção das coordenadas cartesianas	67
Figura 4.1 – Dados do edifício de 35 andares: (a) Geometria; (b) Posicionamento de cargas 1 – caso A; (c) Posicionamento de cargas 2 – caso A; (d) Posicionamento de cargas 1 – caso B; (e) Posicionamento de cargas 2 – caso B; (f) Posicionamento de cargas 1 – caso C; (g) Posicionamento de cargas 2 – caso C	70
Figura 4.2 –Soluções obtidas para o edifício de 35 andares pelo método de densidade: (a) Posicionamento de cargas 1 – caso A; (b) Posicionamento de cargas 2 – caso A; (c) Posicionamento de cargas 1 – caso B; (d) Posicionamento de cargas 2 – caso B; (e) Posicionamento de cargas 1 – caso C; (f) Posicionamento de cargas 2 – caso C.....	71
Figura 4.3 –Soluções obtidas para o edifício de 35 andares pelo método da <i>ground structure</i> : (a) Posicionamento de cargas 1 – caso A; (b) Posicionamento de cargas 2 – caso A; (c) Posicionamento de cargas 1 – caso B; (d) Posicionamento de cargas 2 – caso B; (e) Posicionamento de cargas 1 – caso C; (f) Posicionamento de cargas 2 – caso C; (g) Escala de cores para a área da seção transversal.....	72

- Figura 4.4 – Exemplos de sistemas de contraventamento aparente: (a) 201 Bishopsgate e Broadgate Tower, em Londres, RU (http://en.wikipedia.org/wiki/Broadgate_Tower); (b) John Hancock Center, em Chicago, EUA (http://en.wikipedia.org/wiki/John_Hancock_Center)... 73
- Figura 4.5 – Soluções obtidas para o edifício de 35 andares com imposição de simetria em relação ao eixo Y e repetição de padrão ao longo do eixo Y: (a) Solução obtida com o método de densidade; (b) Solução obtida com o método da *ground structure* 74
- Figura 4.6 – Soluções obtidas para o edifício de 100 pelo método de densidade: (a) 25x150 elementos com $r_{\min} = 2$ elementos; (b) 50x300 elementos com obtida com $r_{\min} = 4$ elementos; (c) 100x600 elementos com $r_{\min} = 8$ 75
- Figura 4.7 – Soluções obtidas para o edifício de 100 andares pelo método da *ground structure*: (a) 3 x 13 nós; (b) 11 x 61 nós; (c) 26 x 151 nós; (d) 51 x 301 nós; (e) 101 x 601 nós; (f) Escala de cores para a área da seção transversal 76
- Figura 4.8 – Soluções obtidas para o edifício de 35 andares pelo método da *ground structure* com malha de 3 x 15 nós variando o nível de conectividade: (a) Nível de conectividade 1; (b) Nível de conectividade 2; (c) Nível de conectividade 3; (d) Nível de conectividade 4; (e) Nível de conectividade 10 77
- Figura 4.9 – Soluções obtidas para o edifício de 35 andares pelo método da *ground structure* com malha de 16 x 36 nós variando o nível de conectividade: (a) Nível de conectividade 1; (b) Nível de conectividade 2; (c) Nível de conectividade 3; (d) Nível de conectividade 4; (e) Nível de conectividade 10 78
- Figura 4.10 – Soluções obtidas para o edifício de 35 andares pelo método da *ground structure* com malha de 16 x 106 nós variando o nível de conectividade: (a) Nível de conectividade 1; (b) Nível de conectividade 2; (c) Nível de conectividade 3; (d) Nível de conectividade 4; (e) Nível de conectividade 10 79
- Figura 4.11 – Dados da análise do edifício em forma de caixa: (a) Sistema de eixos e geometria do edifício; (b) Cargas para vento incidindo na direção do eixo X; (c) Cargas para vento incidindo na direção do eixo Y 80
- Figura 4.12 – Solução obtida no primeiro experimento para o edifício tipo caixa para vento na direção X utilizando o método da *ground structure*: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 81

Figura 4.13 – Solução obtida no primeiro experimento para o edifício tipo caixa para vento na direção Y utilizando o método da *ground structure*: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 82

Figura 4.14 – Solução para o edifício tipo caixa para vento na direção X utilizando o método da *ground structure* com imposição de simetria e repetição de padrão: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 83

Figura 4.15 – Solução para o edifício tipo caixa para vento na direção Y utilizando o método da *ground structure* com imposição de simetria e repetição de padrão: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 84

Figura 4.16 – Soluções para o edifício tipo caixa utilizando o método da densidade: (a) Vento na direção X; (b) Vento na direção Y.[Fonte: TORRES, 2014]; 85

Figura 4.17 – Dados da análise do edifício em forma de caixa: (a) Sistema de eixos e geometria do edifício; (b) Cargas para vento incidindo na direção do eixo X; (c) Cargas para vento incidindo na direção do eixo Y 86

Figura 4.18 – Solução obtida no segundo experimento para o edifício tipo caixa para vento na direção X utilizando o método da *ground structure*: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 87

Figura 4.19 – Solução obtida no segundo experimento para o edifício tipo caixa para vento na direção Y utilizando o método da *ground structure*: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 88

Figura 4.20 – Solução para o edifício tipo caixa para vento na direção X utilizando o método da *ground structure* com imposição de simetria e repetição de padrão: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 89

Figura 4.21 – Solução para o edifício tipo caixa para vento na direção Y utilizando o método da *ground structure* com imposição de simetria e repetição de padrão: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 90

Figura 4.22 – Soluções para o edifício tipo caixa utilizando o método da densidade: (a) Vento na direção X; (b) Vento na direção Y.[Fonte: TORRES, 2014]; 91

Figura 4.23 – Solução obtida no terceiro experimento para o edifício tipo caixa para quatro carregamentos não simultâneos, nível de conectividade 1 com imposição de simetria e repetição

de padrão: (a) Perspectiva; (b) Vista lateral no plano X-Z; (c) Vista lateral no plano Y-Z; (d) Vista em planta no plano X-Y 92

Figura 4.24 – Experimento para o edifício tipo caixa modificado com malha de 5 x 5 x 61 nós: (a) Perspectiva; (b) Resultado para nível de conectividade 1; (c) Vista em planta no plano X-Y 93

Figura 4.25 Experimento para o edifício tipo caixa modificado com malha de 5 x 5 x 61 nós: (a) Resultado para nível de conectividade 2; (b) Vista em planta no plano X-Y; (c) Detalhe da malha obtida 94

Figura 4.26 – Experimento para o edifício tipo caixa modificado com malha de 3 x 3 x 21 nós: (a) Perspectiva; (b) Resultado para nível de conectividade 1; (c) Vista em planta no plano X-Y; (d) Detalhe da malha obtida..... 95

Figura 4.27 – Experimento para o edifício com seção circular: (a) Perspectiva; (b) Resultado para nível de conectividade 1; (c) Vista em planta no plano X-Y; (d) Detalhe da malha obtida 96

Figura 4.28 – Experimento para o edifício com seção circular: (a) Resultado para nível de conectividade 2; (b) Resultado para nível de conectividade 5; (c) Resultado para nível de conectividade 10; (d) Detalhe da malha obtida para nível de conectividade 2; (e) Detalhe da malha obtida para nível de conectividade 5; (f) Detalhe da malha obtida para nível de conectividade 10;..... 97

Figura 4.29 – Experimento para o edifício com seção circular: (a) Perspectiva; (b) Resultado para nível de conectividade 1; (c) Vista em planta no plano X-Y; (d) Resultado para nível de conectividade 2; (e) Resultado para nível de conectividade 5; (f) Resultado para nível de conectividade 10;..... 98

Figura 4.30 – Aplicação: (a) Lotte Tower (<http://skyscrapercenter.com/building/lotte-world-tower/88>); (b) Malha de apoio; (c) carregamento aplicado no topo do torre em um sentido; (d) carregamento aplicado no topo da torre simulando torsão 99

Figura 4.31 – Experimento para a Lotte Tower com aplicação da carga lateral no topo do edifício: (a) Resultado para nível de conectividade 1; (b) Resultado para nível de conectividade 2; (c) Resultado para nível de conectividade 3; (d) Resultado para nível de conectividade 10 100

Figura 4.32 – Experimento para a Lotte Tower Tower com carregamento aplicado no topo simulando torsão: (a) Resultado para nível de conectividade 1; (b) Resultado para nível de conectividade 2; (c) Resultado para nível de conectividade 3; (d) Resultado para nível de conectividade 10 101

Figura 4.33 – (a) One World Trade Center (<http://www.panynj.gov/wtcprogress/index.>); (b) Malha de apoio; (c) carregamento aplicado no topo da torre em um sentido; (d) carregamento aplicado no topo da torre simulando torsão..... 102

Figura 4.34 – Experimento para o One World Trade Center com carregamento aplicado lateralmente no topo do prédio: (a) Resultado para nível de conectividade 1; (b) Resultado para nível de conectividade 2; (c) Vista em planta no plano X-Y para o nível de conectividade 1; (d) Vista em planta no plano X-Y para o nível de conectividade 2 103

Figura 4.35 – Experimento para o One World Trade Center com carregamento aplicado no topo do edifício aplicando torsão: (a) Resultado para nível de conectividade 1; (b) Resultado para nível de conectividade 2; (c) Vista em planta no plano X-Y para o nível de conectividade 1; (d) Vista em planta no plano X-Y para o nível de conectividade 2 104

LISTA DE ABREVIATURAS

ABE	- Abordagem com base no elemento
AESO	- <i>Additive Evolutionary Structural Optimization</i>
AVN	- Abordagem com variáveis nodais
BESO	- <i>Bilateral Evolutionary Structural Optimization</i>
CAMD	- <i>Continuous Approximation of Material Distribution</i>
ESO	- <i>Evolutionary Structural Optimization</i>
GGS	- <i>Growing ground structure</i>
MEF	- Método dos elementos finitos
MTOP	- <i>Multiresolution topology optimization</i>
OT	- Otimização de topologia
RAMP	- <i>Rational Approximation of Material Properties</i>
SERA	- <i>Sequential Element Rejection and Admission</i>
SIMP	- <i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
2D	- Bidimensional
3D	- Tridimensional

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS ROMANOS

A	- Energia de deformação interna.
\mathbf{A}	- Vetor das áreas A_i das seções transversais.
A_i	- Área da seção transversal.
\mathbf{B}	- Matriz cinemática.
c	- Função objetivo, dada pela flexibilidade média da estrutura.
C	- Flexibilidade média da estrutura.
\mathbf{D}	- Matriz constitutiva elástica.
\mathbf{d}^1	- Conjunto de variáveis fontes.
\mathbf{d}^2	- Conjunto de variáveis de densidade.
E	- Módulo de elasticidade do material.
f	- Percentual de volume.
\mathbf{F}	- Vetor de forças externas.
\mathbf{K}	- Matriz de rigidez global da estrutura.
\mathbf{k}_e	- Matriz de rigidez do elemento.
L	- Trabalho das forças externas.
\mathbf{L}	- Vetor dos comprimentos das barras.
Lvl	- Nível de conectividade.
L_x, L_y, L_z	- Dimensões do domínio estendido nas direções X, Y e Z respectivamente.
L_i	- Comprimento das barras da estrutura base.

\mathbf{N}	- Matriz das funções de interpolação.
N	- Número de nós do elemento.
N	- Função de interpolação.
N_b	- Número de elementos.
N_{dof}	- Número de graus de liberdade.
N_n	- Número de nós do elemento.
N_{sup}	- Número de apoios.
p	- Fator de penalização.
$Q4$	- Elemento finito bidimensional.
r	- Raio de regularização.
R_i	- Região que define o conjunto de variáveis de projeto para regularização.
S_{x_i}	- Conjunto de elementos que contém a variável de projeto x_i .
U	- Campo de deslocamentos no estado de equilíbrio.
\hat{u}	- Campo de deslocamentos virtuais.
\mathbf{U}	- Vetor de deslocamentos nodais da estrutura.
\mathbf{u}_e	- Vetor de deslocamentos nodais do elemento.
$\hat{\mathbf{u}}_e$	- Vetor de deslocamentos nodais na direção e .
V_e	- Volume do elemento e .
V_0	- Volume total do domínio.
w_j^i	- Peso associado às variáveis i e j .
X, Y, Z	- Eixos cartesianos.
\mathbf{x}	- Vetor de variáveis de projeto.
x_{min} e x_{max}	- Limites inferior e superior das variáveis de projeto respectivamente.
\mathbf{y}	- Vetor de variáveis de projeto.

SÍMBOLOS GREGOS

α	- Coeficiente para definição do tipo de projecção.
ε_0	- Deformação limite média.
ε_c	- Deformação de compressão.
ε_t	- Deformação de tração.
ν	- Coeficiente de Poisson.
ρ	- Distribuição de densidade.
$\boldsymbol{\rho}$	- Vetor de densidades.
σ_0	- Tensão limite média.
σ_c	- Tensão de compressão.
σ_t	- Tensão de tração.
χ	- Coordenadas de algum ponto no domínio.
Ω	- Domínio estendido.
$\Omega_{\text{sólida}}$	- Região sólida.
Ω_{vazia}	- Região sem material.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

∇	- Conjunto de operadores diferenciais.
Σ	- Somatório.
∂	- Derivada parcial.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	19
1.1. Principais abordagens em OT	20
1.1.1. Métodos de densidade	20
1.1.2. Métodos do tipo <i>hard kill</i>	24
1.1.3. Métodos de variação de contorno	25
1.1.4. Métodos de ground structure	27
1.2. Objetivos	29
1.3. Organização do texto	30
CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1. métodos baseados na densidade	31
2.1.1. Formulação matemática	31
2.1.2. Modelos de Material	34
2.1.3. Abordagem com base no elemento (ABE)	36
2.1.4. Abordagem com variáveis nodais (AVN)	37
2.1.5. Análise de sensibilidade	37
2.1.6. Filtros de sensibilidade	39
2.2. método ground structure	40
2.2.1. Formulação elástica clássica	40
2.2.2. Projeto de barras totalmente tensionadas	42
2.2.3. Formulação plástica	44
2.3. Geração da estrutura base	45
2.3.1. Geração da estrutura base para malhas estruturadas em domínios convexos	45
2.3.2. Geração da estrutura base para malhas não estruturadas em qualquer tipo de domínio 48	
CAPÍTULO 3 METODOLOGIA	51
3.1. técnicas de controle de layouts – método de densidade	51
3.1.1. Repetição de padrões	51
3.1.2. Simetria	53
3.2. técnicas de controle de layout - método ground structure	55
3.3. Múltiplos Carregamentos	60
3.3.1. Métodos de densidade	62

3.3.2. Método de <i>ground structure</i>	63
3.4. GERAÇÃO DE MALHAS	63
3.4.1. Edifício tipo caixa	63
3.4.2. Edifício tipo caixa com variação arquitetônica	65
3.4.3. Edifício com seção circular variável	66
CAPÍTULO 4 RESULTADOS	68
4.1. comparação entre os métodos de densidade e <i>ground structure</i>	68
4.1.1. Edifício com 35 andares	69
4.1.2. Edifício com 100 andares	74
4.1.3. Variações de soluções para o edifício com 35 andares pelo método de <i>ground structure</i>	76
4.2. edifício tipo caixa	79
4.2.1. Soluções obtidas com aplicação de cargas de vento separadamente	80
4.2.2. Soluções obtidas com aplicação de cargas de vento não simultâneas.....	91
4.3. variação arquitetônica em edifício tipo caixa	93
4.4. edifício com seção circular	96
4.5. Lotte tower	99
4.6. ONE WORLD TRADE CENTER.....	102
CAPÍTULO 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	105

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Técnicas de otimização têm sido pesquisadas para melhoria das soluções estruturais na engenharia civil e na engenharia mecânica desde o início do século XX. As primeiras aplicações práticas nesse campo de conhecimento partiam de um *layout* estrutural definido pelo projetista e procuravam determinar os melhores valores para as dimensões dos elementos estruturais atendendo a critérios de resistência e serviço. Como a maioria das aplicações com essa abordagem as variáveis de projeto se referiam ou a dimensões dos elementos estruturais ou a propriedades geométricas resultantes dessas dimensões, esse campo da otimização ficou mais conhecido como otimização de dimensões. Posteriormente, com a extensão das aplicações abordando outros parâmetros de projeto, alguns autores como Bendsøe e Sigmund (2004) passaram a se referir a esse tipo de abordagem como otimização de parâmetros, estando a otimização de dimensões nele incluída. Mais recentemente, com a constatação de que a concepção estrutural é fase determinante tanto no desempenho como no custo da estrutura teve início uma busca por formulações consistentes que auxiliassem o projetista nas fases iniciais de projeto. Assim, a otimização de topologia (OT) surge da necessidade de encontrar a melhor concepção estrutural para atender a um conjunto de condições de apoio e de carregamento.

Deaton e Grandhi (2014) definem otimização de topologia como a determinação da conectividade, da forma e da localização dos vazios em um dado domínio de projeto e ressaltam ser essa uma abordagem que dá ao projetista mais liberdade na fase de concepção estrutural que as clássicas otimização de formas e de dimensões. Suas ideias básicas já estavam presentes no trabalho de Michell (1904) que obteve soluções analíticas para problemas estruturais simples. Devido à grande variedade de restrições de geometria, carregamentos e condições de apoio, essa técnica analítica não apresentou resultados práticos no campo de engenharia estrutural, permanecendo sem avanços por longo tempo. Apenas em 1988 surgiram os primeiros estudos com aplicabilidade prática, com o trabalho pioneiro de Bendsøe e Kikuchi (1988), baseado na teoria de homogeneização e com uso de métodos numéricos para a análise estrutural.

Os métodos de densidade constituem a abordagem mais utilizada para problemas de otimização de topologia. No entanto, atualmente existem diversas formas de abordar esse problema, como

os métodos do tipo *hard-kill*, os métodos variação de contorno e os métodos bio inspirados. Um outro caminho utiliza abordagens de otimização de dimensões para obtenção da topologia ótima por meio de uma estrutura base (*ground structure*) reticulada com grande número de barras e altamente conectada. As subseções seguintes traçam um resumo dessas abordagens.

1.1. PRINCIPAIS ABORDAGENS EM OT

Para situar a pesquisa no campo de estudo, apresenta-se nesta seção um resumo das principais abordagens em otimização de topologia: os métodos de densidade; os métodos de *hard kill*; os métodos de variação de contorno; e o método de *ground structure*.

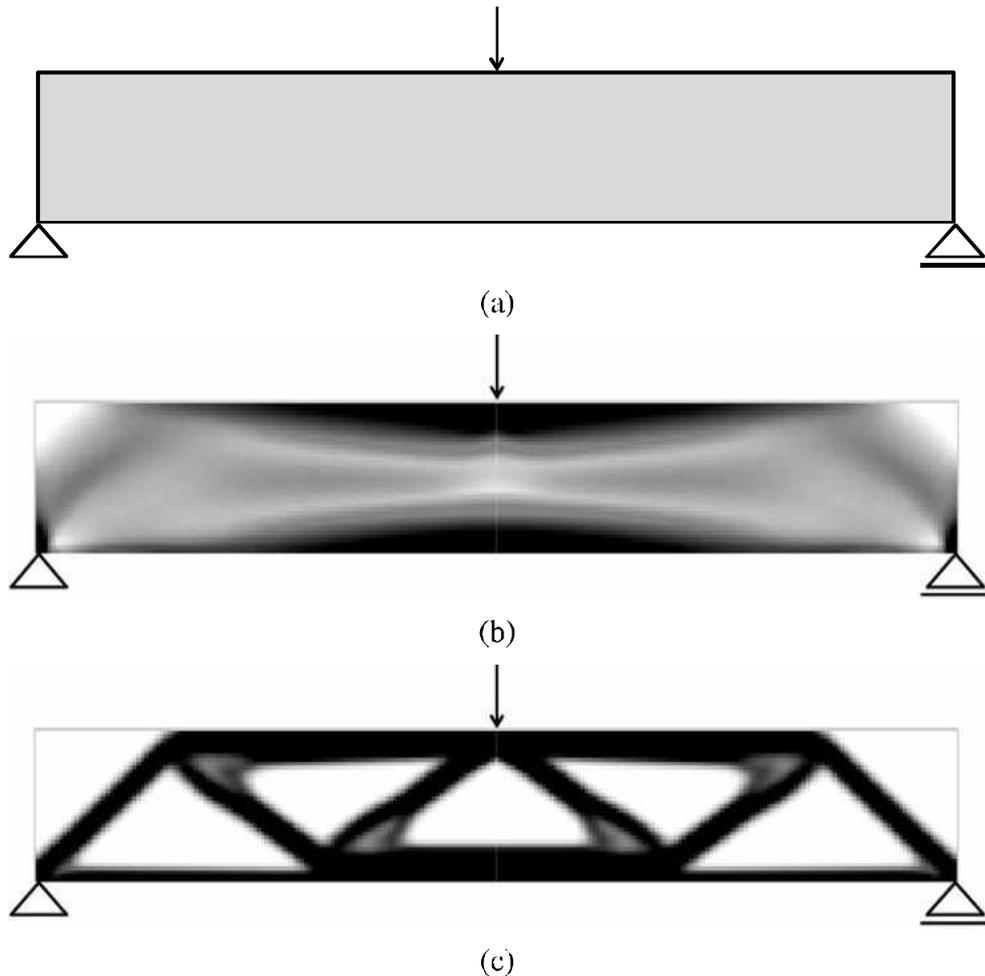
1.1.1. Métodos de densidade

Os métodos de densidade constituem a abordagem mais antiga nas pesquisas em otimização de topologia e tiveram início com o trabalho de Bendsøe (1989). O objetivo é encontrar a distribuição de material que minimiza a função objetivo, sujeita a uma restrição de volume, além de outras possíveis restrições. A distribuição de material é descrita pela variável de pseudo densidade, ρ , a qual pode assumir os valores 0 (vazio) ou 1 (sólido) em qualquer ponto do domínio. Esses métodos operam em um domínio de projeto fixo, denominado domínio estendido, que pode ser entendido como a região do espaço onde a distribuição de material é conveniente.

A função objetivo representa uma característica estrutural global, como a flexibilidade média da estrutura ou o deslocamento em um ponto específico. Embora seja possível utilizar qualquer método de análise estrutural, o uso de métodos numéricos confere uma maior aplicabilidade às técnicas de OT. Assim, a maior parte dos trabalhos utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) e associa a discretização do campo de deslocamentos característico do método à discretização do campo de pseudo densidades da OT. Para isso deseja-se que cada elemento seja composto de material sólido ou vazio. No entanto, essa abordagem usando variáveis de projeto discretas é mal condicionada e não tem solução no contínuo (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Assim, o método de homogeneização proposto por Bendsøe (1989) propõe uma relaxação do problema, permitindo uma variação contínua das variáveis de projeto entre os extremos desejáveis: 0 (representando o vazio) e 1 (representando o material sólido). Com isso cria-se um material fictício com uma pseudo densidade ρ , a qual deve estar relacionada com as propriedades

mecânicas do material. O modelo de representação do material deve ainda fazer com que a solução final do problema apresente a forma 0-1 desejada. A Figura 1.1 apresenta um exemplo de solução em OT pelo método de densidade, obtida utilizando o programa educacional desenvolvido por Sigmund (2001).

Figura 1.1 – Exemplo de solução pelo método de densidade: (a) o domínio estendido; (b) distribuição de material em fase intermediária; (c) distribuição final de material.



O modelo de material mais utilizado nos métodos de densidade é o popular SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), ou lei da potência, desenvolvido por Bendsøe (1989) e por Zhou e Rozvany (1991). Por meio da utilização da penalização induz-se a densidade do elemento para soluções vazio/sólida. Na literatura podem ser encontrados outros modelos, dentre os quais destacam-se o modelo RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*) e o modelo SINH. O modelo RAMP (STOLPE; SVANBERG, 2001) destaca-se por não apresentar sensibilidade nula para densidades zero como acontece no modelo SIMP. Com isso, é possível

contornar algumas dificuldades numéricas para problemas com densidades muito baixas. O modelo SINH (BRUNS, 2005) é uma versão invertida do modelo de penalização proposto por Zhou e Rozvany (1991). Enquanto a maioria dos métodos penaliza os parâmetros do material, na formulação do SINH o volume é penalizado.

A técnica de OT baseada em densidade apresenta uma série de instabilidades numéricas características como: soluções em tabuleiro de xadrez; dependência de malha; e existência de mínimos locais. As soluções em tabuleiro de xadrez caracterizam-se pela formação de regiões de alternância de elementos sólidos e vazios ordenados de forma que remete ao design de um tabuleiro de xadrez (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Nas primeiras pesquisas sobre o assunto acreditava-se que as regiões de instabilidade representavam algum tipo de microestrutura ótima. Díaz e Sigmund (1995) e Jog e Haber (1996) mostraram que o padrão do tabuleiro do xadrez ocorre devido a uma modelagem numérica ruim da rigidez. Ao comparar a rigidez de configurações de tabuleiro de xadrez com a rigidez de materiais uniformemente distribuídos foi possível concluir que a estrutura com a formação de tabuleiro de xadrez apresenta uma alta rigidez artificial (DÍAZ; SIGMUND, 1995). Assim, os padrões de tabuleiro de xadrez tendem a aparecer quando se utiliza tanto as técnicas de homogeneização quanto a abordagem SIMP.

A dependência de malha refere-se à obtenção de soluções qualitativamente para diferentes tamanhos de malha ou discretização (SIGMUND; PETERSSON, 1998). O refinamento de malha deveria resultar em uma melhor modelagem do elemento finito da mesma estrutura ótima e uma melhor descrição das condições de contorno, não em uma estrutura mais detalhada e qualitativamente diferente. Os problemas de dependência de malha podem ser divididos em duas categorias: os problemas em que necessariamente se obtêm estruturas mais e mais finas, fato que ocorre devido a não existência de soluções; e os problemas com muitos ótimos que apresentam soluções não únicas.

Os mínimos locais são soluções diferentes para o mesmo problema discreto a partir de diferentes parâmetros iniciais para o algoritmo como o número de elementos (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Em alguns casos, essas pequenas variações podem resultar em uma mudança drástica da solução do problema de OT. Esse problema ocorre devido à não convexidade do problema de OT. Assim, métodos de continuação (BENDSØE; SIGMUND, 2003) propõem um incremento gradual na penalização característica dos modelos de material. A ideia básica dos métodos de continuação é mudar gradativamente o problema de otimização de um problema convexo

(artificial) para o original (não convexo) em alguns passos, levando-se em conta informação global para guiar para uma convergência global.

Diversas abordagens dos métodos de densidade baseadas em variáveis de projeto nodais surgiram no bojo da tentativa de controlar as instabilidades numéricas. Na sua forma mais simples, associam-se as variáveis de projeto a valores discretos do campo de densidade nos nós da malha de elementos finitos usada na discretização do domínio estendido. A densidade do elemento é obtida a partir dos valores nodais usando técnicas de projeção ou simples interpolação dos valores nos nós do elemento.

Guest *et al.* (2004) propõem o uso das densidades dos nós como variáveis de projeto e a utilização de técnicas de projeção para a determinação das densidades dos elementos através de uma média ponderada. Esta abordagem resulta em uma restrição implícita do gradiente local das densidades dos elementos, o que evita a formação de tabuleiro de xadrez. Quando se usam pesos com regra de interpolação linear, o diâmetro da projeção corresponde ao valor mínimo da dimensão dos elementos estruturais resultantes, provendo então controle sobre a manufatura. Almeida *et al.* (2009) aplicaram esse conceito e propuseram uma forma inversa de projeção, a qual permite controlar o tamanho dos furos resultantes do processo de OT. Stromberg *et al.* (2011) generalizou o conceito de projeção para diversas regras polinomiais na constituição dos pesos utilizados na projeção.

O CAMD (*Continuous Approximation of Material Distribution*) é uma abordagem por interpolação na qual o campo de densidades no interior dos elementos é obtido pela interpolação dos valores nodais das variáveis de projeto utilizando funções de forma lineares. A distribuição contínua de material é considerada um campo escalar e pode ser chamado de campo material contínuo entre os elementos, o que previne a formação de elementos vazios e sólidos adjacentes e conseqüentemente o tabuleiro de xadrez (MATSUI; TERADA, 2004). Ao longo dos anos foram realizadas novas pesquisas sobre as opções de interpolação do campo de deslocamento e densidade do material para diferentes elementos. Rahmatalla e Swan (2004) versam sobre diversos elementos, destacando o elemento quadrilateral Q4/Q4, onde as variáveis de projeto coincidem com os vértices do elemento retangular e contribuem igualmente para as densidades dos elementos vizinhos. Essa abordagem apresenta eficiência contra o tabuleiro de xadrez, mas em contrapartida apresenta uma instabilidade denominada *islanding*. Paulino e Le (2009) propõem um novo elemento quadrilateral modificado Q4/Q4M, onde as variáveis de projeto

encontram-se no ponto médio entre os vértices. Com isso, pretende-se chegar a resultados topológicos de maior resolução sem a necessidade de refinamento de malha.

A maior parte das formulações em OT pelos métodos de densidade utiliza a malha que discretiza o campo de deslocamentos no MEF para a discretização do campo de densidades. No entanto, o grau de discretização requerido para as densidades é muito superior ao requerido pelo campo de deslocamentos. Como o número de graus de liberdade no MEF determina o tamanho do sistema de equações algébricas a ser resolvido a cada iteração, esta é uma das etapas de maior custo computacional no processo. Assim, Nguyen *et al.* (2010) propuseram uma nova abordagem para lidar com problemas em larga escala com um custo computacional relativamente baixo, denominada *Multiresolution Topology Optimization* (MTOP). Esta abordagem baseia-se na ideia de que a malha de elementos finitos, a malha de densidade dos elementos e a malha das variáveis de projeto são distintas. A análise por meio do MEF é feita com uma malha de elementos finitos mais grosseira, a otimização é realizada com uma malha de variáveis de projetos refinada e as densidades dos elementos são definidas em uma malha ainda mais refinada. Dessa forma, o custo computacional é inferior ao das abordagens tradicionais. No entanto, os resultados obtidos pelo MTOP não garantem por si só independência de malha e ausência do tabuleiro de xadrez, sendo necessária a utilização de uma técnica de projeção a fim de evitar as instabilidades numéricas.

Para mais informações em relação aos métodos de densidade sugere-se a leitura das revisões elaboradas por Bendsoe e Sigmund (2004), Sigmund (2007), Rozvany (2009), Sigmund e Maute (2013) e Deaton e Grandhi (2014).

1.1.2. Métodos do tipo *hard kill*

Os métodos do tipo *hard-kill* baseiam-se na remoção e na inserção de uma quantidade finita de material no domínio definido. A escolha do material a ser inserido ou removido é feita com base em critérios heurísticos, podendo ou não levar em conta a sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Ao contrário das abordagens dos métodos de densidade, não há relaxação das variáveis de projeto e as soluções são do tipo sólido – vazio.

O mais conhecido método do tipo *hard-kill* é o *Evolutionary Structural Optimization* (ESO) proposto originalmente por Xie e Steven (1993, 1997). O método utiliza um modelo fixo de elementos finitos para representar o domínio inicial de projeto. A estrutura ótima é um subconjunto do conjunto inicial obtido pela remoção dos elementos com baixo nível de tensão.

Com o tempo, a formulação evoluiu e novas abordagens foram desenvolvidas para permitir a adição de elementos. Citam-se aqui a AESO - *Additive Evolutionary Structural Optimization* (QUERIN *et al.*, 2000), que permite a adição de elementos e a BESO - *Bilateral Evolutionary Structural Optimization* (QUERIN *et al.*, 1998), que permite tanto a remoção como a adição de elementos. Em ambas as abordagens se utiliza uma função como critério para a adição ou remoção dos elementos, sendo então necessário o cálculo de um número de sensibilidade. A abordagem baseia-se em técnicas evolucionárias focando em consequências locais, mas não no ótimo global. Mais recentemente uma abordagem denominada *Sequential Element Rejection and Admission* (SERA) foi proposta por Rozvany e Querin (2002) e denominada *soft kill*, em contraste com o termo *hard kill*. Por essa abordagem, os elementos não são completamente removidos da malha de elementos finitos.

A grande vantagem dos métodos do tipo *hard kill* é a facilidade de utilizá-lo em conjunto com programas comerciais de elementos finitos, demandando na maioria das vezes adaptações simples de pré e pós-processamento. Além disso, o resultado obtido é bem definido pois não existem densidades intermediárias, uma vez que apenas duas situações são possíveis: o elemento existe ou não. No entanto, a maior dificuldade encontrada é a determinação do critério de parada mais conveniente, já que no algoritmo falta a convergência. Chegou-se a considerar como solução ótima aquela em que se chegava a uma estrutura com a fração de volume desejada. Assim, fica claro que esta estrutura pode sofrer alterações consideráveis ao variar o volume. Outra debilidade do método é a falta de generalidade matemática, o que dificulta a inclusão de várias restrições não lineares.

Para mais informações em relação aos métodos do tipo *hard kill* sugere-se a leitura das revisões elaboradas por Huang e Xie (2010) e Deaton e Grandhi (2014).

1.1.3. Métodos de variação de contorno

Outra vertente de estudo que se apresenta são os métodos de variação de contorno, entre os quais destaca-se a abordagem do tipo *level set* (Osher e Sethian 1988; Sethian 1999; Allaire *et al.* 2002, 2004; Wang *et al.* 2003). Essa abordagem utiliza uma descrição implícita da fronteira obtida a partir da descrição do contorno por meio de uma função escalar, de maior dimensão, visando a parametrização da superfície. A taxa de variação dos pontos no contorno estrutural e a sensibilidade do projeto são pontos críticos de ligação entre a otimização da estrutura e o método

de *level set* para definição de contorno (WANG *et al.*, 2003). Utilizando-se das informações da velocidade capturam-se as alterações na forma e na topologia. As equações de Hamilton-Jacobi são utilizadas para a atualização das funções do *level set*, o que faz com que não seja permitida a inserção de novos vazios. A principal dificuldade nesse tipo de abordagem são as limitações da geometria, que só pode se desenvolver dentro dos contornos definidos e não pode gerar novos vazios em pontos cercados por materiais sólidos.

Outro método que se encaixa como método de variação de contorno é o *phase field*. Esse método surgiu baseado em teorias desenvolvidas para representar superfícies dinâmicas com fenômenos de transição (CHEN, 2002). Adentrando o campo de otimização de topologia o domínio do projeto é dividido em duas fases e possui uma função que rege o *phase field*. Essa região define os contornos estruturais e são modificados via equações de evolução dinâmica.

A principal diferença entre o *level set* e o *phase field* é que durante o método *phase field* não se controla a interface entre as fases, já no *level set* há esse controle.

Recentemente, surgiu uma nova linha de pesquisa inspirada no processo de divisão celular dos organismos vivos. Este método é capaz de gerar estruturas contínuas e discretas, sendo o layout estrutural governado por um programa que completa uma sequência de tarefas que desenvolve a topologia em estados (KOBAYASHI, 2010).

A vantagem do método é a sua natureza direta e a facilidade de acoplar a programas comerciais de elementos finitos. Além disso o método pode facilmente gerar topologias que podem ser levadas a otimização de dimensões e forma. Pelo fato do método utilizar algoritmos genéticos pode apresentar um alto gasto computacional.

Os métodos que utilizam as derivadas topológicas buscam entender a influência que a introdução de um vazio infinitesimal tem no domínio e usar essa informação como direção para a geração de novos vazios (ESCHENAUER *et al.*, 1994).

Para mais informações em relação aos métodos de *level set* sugere-se a leitura da revisão elaborada por van Dijk *et al.* (2013). Ambos os tipos de método são também abordados nas revisões de Sigmund e Maute (2013) e de Deaton e Grandhi (2014).

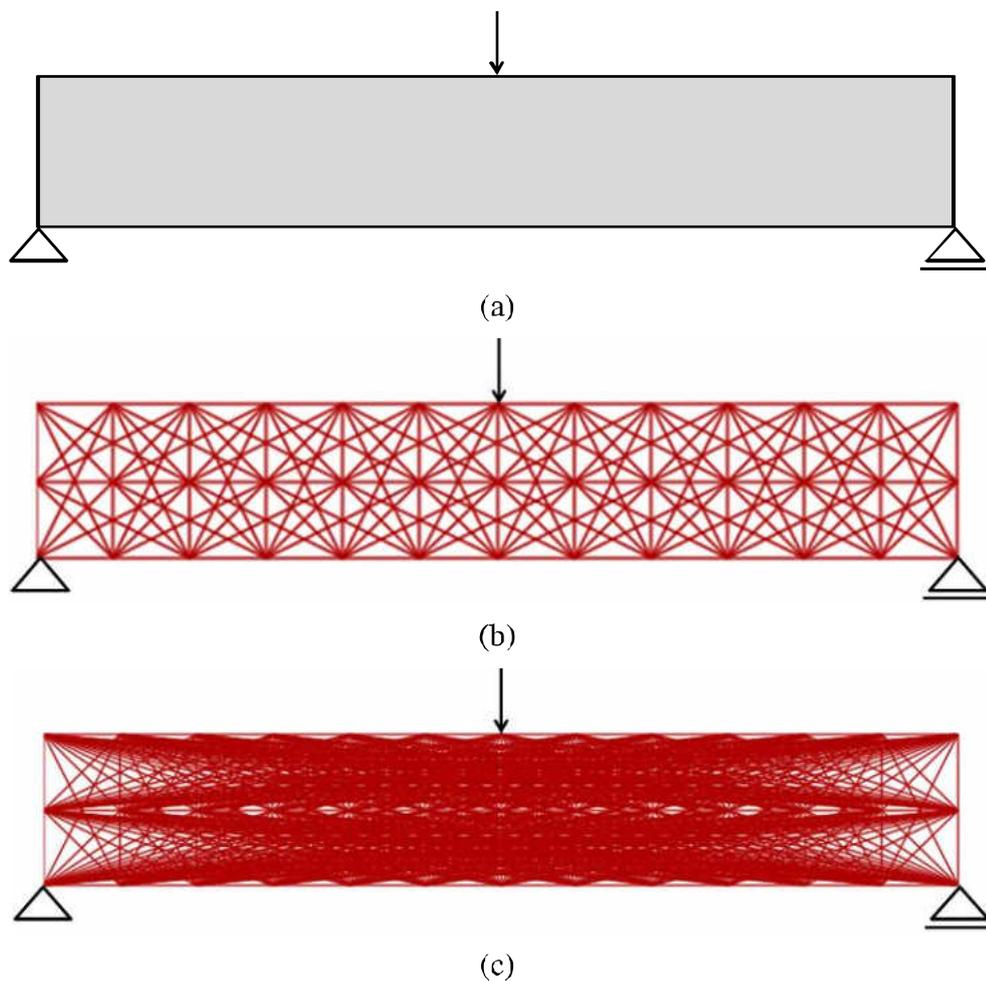
1.1.4. Métodos de *ground structure*

O método de *ground structure* (DORN *et al.*, 1964) não se encaixa em nenhuma das categorias anteriores, guardando algumas semelhanças com as técnicas de otimização de dimensões. A ideia básica do método consiste na substituição do contínuo por uma treliça constituída por um número grande de barras e nós, gerando uma estrutura superconectada (Figuras 1.2 (b) e 1.2 (c)). As barras que ligam os nós poderão ser removidas até chegar à estrutura desejada, em uma abordagem tipo *hard-kill*, ou pode ser estabelecido um valor mínimo para as dimensões das barras, de forma semelhante ao que ocorre nos métodos de densidade. Como os nós são mantidos fixos, o grau de interconexão dos elementos não afeta o número de graus de liberdade do problema de análise estrutural.

O problema de otimização da topologia de estruturas discretas não teve nas primeiras eras o mesmo grau de desenvolvimento obtido na otimização de estruturas discretas com *layout* fixo. Algumas soluções obtidas com uso de uma estrutura base (*ground structure*) no processo de otimização da topologia podem corresponder a pontos singulares no espaço de projeto (KIRSCH, 1990a) e, em geral, a otimização simultânea de geometria e topologia encontrou dificuldades nas primeiras pesquisas (KIRSCH, 1990b), muitas das quais ainda permanecem como um campo aberto à investigação. Mais recentemente, Achtziger (2007) aborda esse tipo de problema e mostra que, para problemas pequenos a médios, a abordagem proposta por ele fornece soluções razoáveis. No entanto, enfrenta dificuldades numéricas para problemas em maior escala.

Duas abordagens destacam-se na formulação dos problemas de OT de estruturas discretas: minimização de peso; e minimização de flexibilidade média. Os dois problemas foram estudados por Bendsoe *et al.* (1994), assim como diversos algoritmos usados na formulação dos problemas. Os diversos aspectos das duas abordagens foram também estudados por Cohn (1994) e por Cheng (1995).

Figura 1.2 – Exemplos de estrutura base: (a) o problema contínuo; (b) estrutura base com nível de conexão 2; (c) estrutura base com nível de conexão 12;



Hagishita e Ohsaki (2009) propuseram uma expansão do método de *ground structure*, denominada pelos autores de *growing ground structure (GGS)*, o qual expande ou reduz a estrutura base por meio da remoção ou da adição de barras e nós. O mesmo tipo de abordagem é utilizado por Sokól (2011a) que, por meio da seleção de subconjuntos de barras ativas para adicionar ou remover barras de forma iterativa, obtém soluções que reproduzem as treliças de Michell.

No campo da aplicação de múltiplos carregamentos não simultâneos, Rozvany e Birker (1994) mostram que há uma diferença significativa entre a solução ótima baseada em limitações das tensões elásticas e as soluções obtidas pela minimização da flexibilidade média da estrutura. Ainda nesse campo, Sokól e Rozvany (2013) utilizam uma abordagem adaptativa do método de

ground structure e a formulação baseada em tensões para obtenção de soluções na forma de estruturas de Michell generalizadas.

Também podem ser encontradas na literatura abordagens de problema utilizando variáveis discretas, como o trabalho de Achtziger e Stolpe (2007), onde se utiliza o método de *ground structure* para minimização da média ponderada da flexibilidade média de uma estrutura com múltiplos carregamentos sujeita a restrições de volume. Richardson *et al.* (2012) utilizam algoritmos genéticos para a otimização da topologia de estruturas discretas considerando múltiplos objetivos tais como: volume; primeira frequência natural de vibração; e máximo deslocamento.

Um dos problemas da aplicação do método de *ground structure* para grandes estruturas pu para a obtenção de soluções de Michell consiste na geração da estrutura base. Sokól (2011b) apresenta uma abordagem que consiste em usar uma estrutura base fixa em domínios ortogonais. Smith (1988) propõe um método para implementação de domínios de projeto côncavos ou até mesmo desconectados. Está também disponível uma série de programas educacionais utilizando o método de *ground structure*, entre os quais destacam-se os trabalhos de Sokól (2011b), Liu e Tovar (2014) e Zegard e Paulino (2014; 2015).

1.2. OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é a aplicação do método da *ground structure* para a geração de *layouts* para o sistema de contraventamento de edifícios em 2D e 3D. Para tanto, definem-se os seguintes objetivos específicos:

- ◆ Desenvolvimento de estratégias para imposição de condições de manufatura como simetria e repetição de padrão ao método da *ground structure*;
- ◆ Desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas com múltiplas combinações não simultâneas de carregamento;
- ◆ Comparação das soluções obtidas com os métodos de *ground structure* e densidade em aplicações bidimensionais do ponto de vista do conceito da solução;
- ◆ Aplicação do método de *ground structure* a problemas tridimensionais avaliando as possíveis soluções em relação ao nível de conectividade das barras do ponto de vista do conceito da solução.

1.3. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre as formulações dos métodos de densidade e de *ground structure*. O capítulo 3 mostra a metodologia adotada no trabalho para a introdução das condições de manufatura no método de *ground structure* e para geração da estrutura base. O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos com a aplicação dos métodos de densidade e *ground structure* aplicados a edifícios altos em análises bidimensionais e do método da *ground structure* em análises tridimensionais. O capítulo 5 apresenta conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são abordados os conceitos básicos sobre otimização de topologia utilizando a abordagem padrão do método de densidade e utilizando o método da estrutura base (*ground structure*). Apresenta-se o modelo de representação do material utilizado e, em seguida, são abordadas as instabilidades numéricas características do método e o filtro de sensibilidade utilizado para seu controle. Posteriormente é descrito o método da estrutura base, apresentado sua formulação matemática e os métodos de geração da *ground structure*.

2.1. MÉTODOS BASEADOS NA DENSIDADE

A abordagem da otimização de topologia via métodos de densidade consiste na busca pela melhor distribuição de material em uma região definida do espaço denominada domínio estendido, Ω . A solução esperada do problema é uma solução do tipo (0/1), com 0 indicando a ausência de material e 1 indicando a presença. No entanto, o problema assim formulado é mal posto e não tem solução no contínuo (KOHN; STRANG, 1986 e SIGMUND; PETERSSON, 1998). Bendsøe (1989) propôs uma relaxação do problema inspirada na teoria de homogeneização utilizada para análise de materiais compósitos. Utiliza-se então um material fictício com uma pseudo densidade, r , a qual pode variar continuamente entre 0 e 1, e as variáveis de projeto são seus valores associados a partes do domínio estendido.

Faz-se necessária a definição de uma função de interpolação apropriada que relacione a densidade do material às variáveis de projeto e a definição de um modelo de distribuição de material que permita relacionar as densidades com as propriedades mecânicas da estrutura. Com isso é possível realizar a análise do domínio estendido, que pode ser feita com qualquer método de análise estrutural. O método mais utilizado tem sido o Método dos Elementos Finitos (MEF).

2.1.1. Formulação matemática

O problema mais abordado nas aplicações de OT é a minimização da flexibilidade média da estrutura. A cada iteração do processo de otimização a estrutura deve permanecer em equilíbrio e o volume de material deve permanecer constante. Bendsøe e Kikuchi (1988) descrevem

matematicamente o problema para um meio contínuo na forma (2.1), com distribuição da densidade ρ na forma 0-1 (vazio ou sólido).

$$\begin{aligned}
 \text{Obter :} & \quad \mathbf{r} \\
 \text{que minimiza :} & \quad c(\rho) = L(u) \\
 \text{tal que :} & \quad A(u, \hat{u}, \mathbf{r}) = L(u) \\
 & \quad \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{c}) \, d\Omega = f V_0 \\
 & \quad \mathbf{r}(\mathbf{c}) \in [0,1]
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Onde:

Ω – é o domínio estendido, espaço geométrico onde se pode distribuir material;

L – é o trabalho das forças externas;

A – representa a energia de deformação interna;

c – é a função objetivo, dada pela flexibilidade média da estrutura;

χ – são coordenadas de algum ponto no domínio;

u – representa o campo de deslocamentos no estado de equilíbrio;

\hat{u} – representa o campo de deslocamentos virtuais;

ρ – é a distribuição de densidade no domínio estendido Ω ;

f – representa um percentual do volume do domínio que a solução pode ocupar;

V_0 – é o volume total do domínio.

A matriz constitutiva elástica do material passa a ser calculada em função da densidade ρ conforme (2.2).

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}(\mathbf{c}) \mathbf{D}_s \tag{2.2}$$

Onde:

\mathbf{D}_s – é a matriz constitutiva elástica do material sólido;

$\mathbf{D}(\rho)$ – é a matriz constitutiva elástica do material com densidade ρ ;

$\rho(\chi)$ – é o modelo de distribuição de densidade em função da posição χ no domínio.

Para geometrias e condições de contorno complexas a formulação para sistemas contínuos, apresentada em (2.2), apresenta-se de difícil solução, tornando-se de baixa aplicabilidade prática. A fim de obter uma maior generalidade, o problema de otimização de topologia é formulado com o auxílio de um método numérico para análise estrutural, usualmente o MEF. Nesse caso, valores nulos de densidade podem conduzir a problemas na solução do sistema de equações devido à possibilidade de se ter rigidez nula associada a graus de liberdade situados nas regiões vazias. Para contornar esse problema adota-se como valor mínimo de densidade um valor pequeno r_{\min} . Logo, o problema pode ser reescrito na forma discreta de acordo com (2.3).

$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} & \quad \mathbf{x} \\
 \text{que minimiza:} & \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}) \\
 \text{tal que:} & \quad \mathbf{K}(\mathbf{r}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \\
 & \quad \sum_{r \in \Omega} \mathbf{r}_e(\mathbf{x}) V_e = f V_0 \\
 & \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}) \in [r_{\min}, 1]
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Neste trabalho, adota-se a formulação aninhada (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009), na qual as equações de equilíbrio (2.4) são satisfeitas ao se proceder a análise via MEF e não constituem restrições diretas do problema de otimização.

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \tag{2.4}$$

Assim, o problema (2.3) toma a forma apresentada em (2.5)

$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} & \quad \mathbf{x} \\
 \text{que minimiza:} & \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}) \\
 \text{tal que:} & \quad \sum_{r \in \Omega} \mathbf{r}_e(\mathbf{x}) V_e = f V_0 \\
 & \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}) \in [r_{\min}, 1] \\
 \text{com:} & \quad \mathbf{K}(\mathbf{r}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Onde:

\mathbf{x} — é o vetor das variáveis de projeto;

c — é a flexibilidade média do domínio estendido;

\mathbf{F} — é o vetor de forças aplicadas;

- \mathbf{U} – é o vetor de deslocamentos nodais da malha de elementos finitos;
- \mathbf{K} – é a matriz de rigidez global da estrutura;
- ρ – é o vetor com a densidade de cada elemento da malha de densidades;
- V_e – é o volume do elemento finito e ;
- V_0 – é o volume do domínio estendido Ω ;
- Ω – representa o domínio estendido discretizado em uma malha de elementos finitos.

Como a formulação do problema na forma sólido-vazio (0-1) não tem solução no contínuo (KOHN; STRANG, 1986 e SIGMUND; PETERSSON, 1998), utiliza-se a técnica de relaxação da distribuição do campo de densidades proposta por Bendsøe (1989). Assim, a distribuição de densidades que antes era dada na forma discreta, passa a ser definida como uma distribuição contínua, onde ρ pode assumir qualquer valor entre 0 e 1. Ao permitir a relaxação surgem regiões com densidades intermediárias, fenômeno conhecido como escala de cinza (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Para contornar esse fenômeno pode-se adotar como estratégia a penalização de densidades intermediárias, sendo os modelos mais conhecidos para esse fim o SIMP, o RAMP e o SINH.

2.1.2. Modelos de Material

O Modelo SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), também conhecido como lei da potência, desenvolvido por Bendsøe (1989) e por Zhou e Rozvany (1991) é o modelo de penalização mais aplicado. Através deste modelo as densidades se relacionam com as propriedades mecânicas do material, seguindo a lei de formação conforme (2.6).

$$h(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^p \quad (2.6)$$

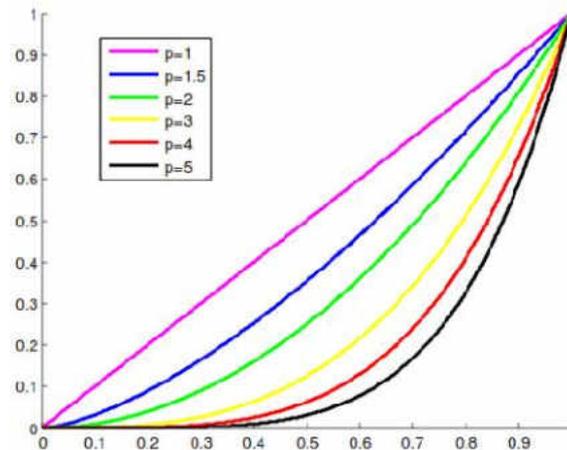
Onde:

p – é o fator de penalização que busca a formação de topologias com a configuração vazio-sólido.

A fim de eliminar as regiões em escala de cinza, o modelo SIMP é geralmente utilizado para valores de p maiores ou iguais a 3. Bendsøe e Sigmund (2004) justificam tal fato, mostrando que para valor de p igual a 3 corresponde ao limite de Hashin-Shtrikman para existência de matérias

compósitos. Além disso, é necessária a presença de restrições de volume constante ou de uma restrição que indiretamente limite o volume (SIGMUND; MAUTE, 2013). A Figura 2.1 mostra a representação do modelo SIMP.

Figura 2.1- Representação Modelo SIMP



O modelo RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*) proposto por Stolpe e Svanberg (2001), representado na equação (2.7), difere-se do SIMP por não apresentar sensibilidade nula para densidades zero tornando possível contornar algumas dificuldades numéricas para problemas com densidades muito baixas.

$$h(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{1 + q(1 - \mathbf{r})} \quad (2.7)$$

Onde:

q – é o fator que busca a formação de topologias com a configuração vazio-sólido.

O modelo SINH (BRUNS, 2005), apresentado na equação (2.8), é uma versão invertida do modelo de penalização proposto por Zhou e Rozvany (1991). Enquanto a maioria dos métodos penaliza os parâmetros do material, na formulação do SINH o volume é penalizado.

$$h(\mathbf{r}) = 1 - \frac{\sinh(p(1 - \rho))}{\sinh(p)} \quad (2.8)$$

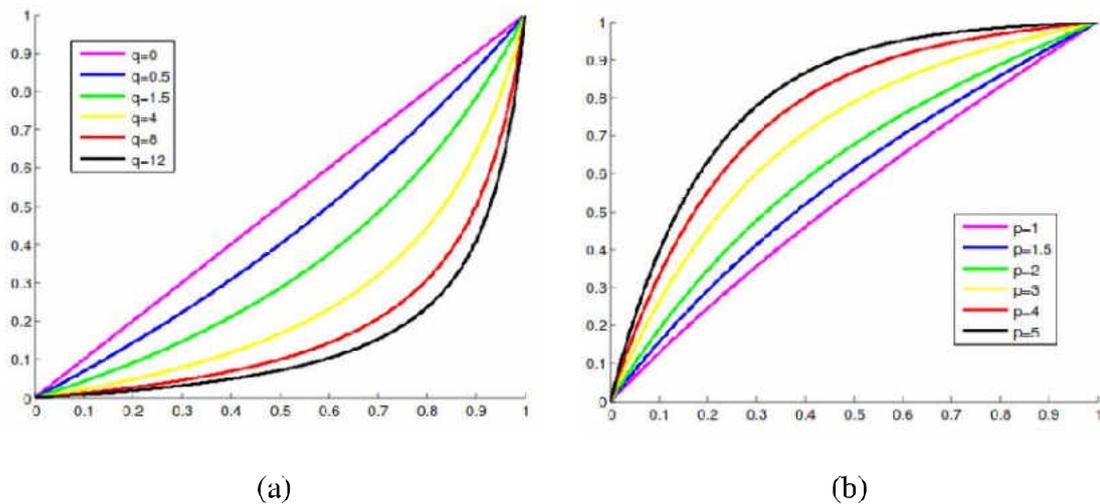
Onde:

\sinh – indica seno hiperbólico;

p – é o fator de penalização que busca a formação de topologias com a configuração vazio-sólido.

A Figura 2.2 mostra o comportamento dos modelos RAMP e SINH.

Figura 2.2- Representação Modelos Material: (a) RAMP; (b) SINH.



2.1.3. Abordagem com base no elemento (ABE)

A mais tradicional técnica de otimização de topologia é a abordagem com base no elemento, na qual adota-se uma distribuição constante de densidade dentro de sub-regiões do domínio estendido. Normalmente cada sub-região coincide com um elemento da malha de elementos finitos, o que permite a associação de uma variável de projeto a cada elemento. Como a densidade ρ_e é constante no domínio do elemento, é possível obter a matriz de rigidez do elemento \mathbf{k}_e através da matriz de rigidez do elemento sólido, \mathbf{k}_0 . Ao utilizar o modelo SIMP, a matriz de rigidez associada a cada elemento e é obtida conforme equação (2.9).

$$\mathbf{k}_e = r_e^p \mathbf{k}_0 \quad (2.9)$$

Sendo:

\mathbf{k}_e – a matriz de rigidez do elemento e ;

ρ_e – a densidade do elemento finito, que assume o valor da variável de projeto x_e ;

\mathbf{k}_0 – a matriz de rigidez do elemento sólido.

Neste trabalho a função objetivo estudada é a flexibilidade média da estrutura, que pode ser obtida através da equação (2.5) e reescrita em termos da matriz de rigidez do elemento (2.9), obtendo-se a expressão (2.10).

$$c = \sum_{e \in \Omega} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (2.10)$$

Sendo:

\mathbf{u}_e – os deslocamentos nodais do elemento.

2.1.4. Abordagem com variáveis nodais (AVN)

A abordagem com variáveis nodais (AVN) surgiu como uma tentativa de solucionar o problema de instabilidades numéricas características dos métodos de densidade em OT. As variáveis de projeto passam a ser as densidades associadas aos nós de canto dos elementos finitos. No entanto, assim como na ABE, as densidades continuam sendo constantes dentro do elemento, sendo esta dada pela média das densidades do nó (variáveis de projeto) conforme equação (2.11).

$$\mathbf{r}_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} x_j \quad (2.11)$$

Sendo:

x_j – é a variável de projeto associada ao nó j do elemento e .

n_e – o número de nós do elemento e .

A matriz de rigidez do elemento e a flexibilidade média da estrutura são calculadas da mesma forma com uso das equações (2.7) e (2.8), respectivamente.

2.1.5. Análise de sensibilidade

Nos métodos de otimização a sensibilidade da função objetivo indica a direção de maior acréscimo da função objetivo naquele ponto. Essa informação pode ser obtida através da análise das derivadas das funções em relação a cada uma das variáveis de projeto. Para o problema de

otimização de topologia com minimização da flexibilidade média as derivadas podem ser obtidas pelo método adjunto. A equação (2.12) representa derivada da função objetivo do problema apresentado em (2.5) e relação à variável de projeto x_i .

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (2.12)$$

Considerando-se as equações de equilíbrio (2.4), que em uma formulação aninhada são satisfeitas ao se proceder a análise via MEF, e a simetria da matriz de rigidez \mathbf{K} , tem-se:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = \mathbf{U}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

Derivando-se a equação de equilíbrio (2.4) em relação à variável de projeto x_j tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{U} + \mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.14)$$

Substituindo-se (2.14) em (2.13), obtém-se:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = -\mathbf{U}(\mathbf{x})^T \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

Na ABE as variáveis de projeto são as próprias densidades nos elementos. Assim, considerando-se que a matriz de rigidez do domínio estendido \mathbf{K} é uma montagem das matrizes de rigidez dos elementos \mathbf{k}_e e que essas, aplicando-se o modelo SIMP, é dada pela equação (2.9), tem-se:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = -p \mathbf{r}_e(\mathbf{x})^{p-1} \mathbf{u}_e(\mathbf{x})^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

Na AVN as variáveis de projeto relacionam-se com as densidades nos elementos pela equação (2.11). Assim, considerando-se que a matriz de rigidez do domínio estendido \mathbf{K} é uma montagem das matrizes de rigidez dos elementos \mathbf{k}_e e que essas, aplicando-se o modelo SIMP, é dada pela equação (2.9), tem-se:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = \sum_{e \in S_{x_i}} -\frac{1}{n} p \mathbf{r}_e(\mathbf{x})^{p-1} \mathbf{u}_e(\mathbf{x})^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

Onde:

n – é o número de elementos afetados pela variável de projeto x_i ;

S_{x_i} – é o conjunto de elementos que contém a variável de projeto x_i .

2.1.6. Filtros de sensibilidade

O filtro de sensibilidade foi uma das primeiras técnicas desenvolvidas para combater as instabilidades numéricas do tipo tabuleiro de xadrez (SIGMUND; PETERSSON, 1998; SIGMUND, 2001). O filtro é uma relação heurística que modifica as sensibilidades da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Para cada variável de projeto adota-se uma homogeneização das sensibilidades de todas as variáveis contidas na região definida por um raio r . A sensibilidade em relação a cada variável é associada a um peso w que decresce linearmente à medida que se afasta do centro, conforme equação (2.18).

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial x_i} = \frac{\sum_{j \in R_i} w_j^i x_j \frac{\partial c}{\partial x_j}}{x_i \sum_{j \in R_i} w_j^i} \quad (2.18)$$

Onde:

i – é o índice da variável de projeto que terá a sensibilidade alterada;

j – é o índice da variável de projeto contida na vizinhança R_i ;

$\frac{\partial \hat{c}}{\partial x_i}$ – é a sensibilidade corrigida da função objetivo em relação a x_i ;

$\frac{\partial c}{\partial x_j}$ – é a sensibilidade analítica da função objetivo em relação à variável de projeto x_j ;

w_j^i – é o peso associado às variáveis i e j , calculado pela equação (2.19):

$$w_j^i = \frac{r_{\min} - r_j}{r_j} \quad (2.19)$$

Onde:

r_{\min} – é o raio de atuação do filtro;

r_j – é a distância entre as variáveis de projeto i e j .

O filtro de sensibilidade é uma relação heurística, o que gera questionamentos quanto sua eficiência. No entanto, Sigmund (2001, 2007) afirma que o método é eficiente e que se chega a essa conclusão por suas diversas aplicações numéricas.

2.2. MÉTODO GROUND STRUCTURE

O método de *ground structure* (DORN *et al.*, 1964) tem sido empregado para a obtenção da topologia ótima de estruturas (SOKÓL, 2011a, 2011b, LIU; TOVAR, 2014, ZEGARD; PAULINO, 2014, 2015). O método consiste em determinar uma estrutura reticulada altamente interconectada, denominada estrutura base ou *ground structure*, e a partir dela remover as barras desnecessárias para o equilíbrio da estrutura. As áreas das seções transversais são as variáveis de projeto e não há realmente uma remoção das barras. As barras não necessárias assumem um valor mínimo de área, muito pequeno para promover ganho significativo de rigidez à estrutura base.

Esta seção apresenta duas formulações comumente usadas para obtenção de topologias ótimas pelo método de *ground structure*: baseada nas relações de equilíbrio elásticas; projeto de barras totalmente tensionadas; e baseada nos mecanismos de colapso em uma treliça com material rígido – plástico.

2.2.1. Formulação elástica clássica

Uma das estratégias mais utilizadas para obtenção de soluções pelo método de *ground structure* é a minimização da flexibilidade média da estrutura considerando as relações elásticas do material. Assim, o problema pode ser descrito matematicamente na forma (2.20).

$$\begin{aligned}
\text{Obter:} & \quad \mathbf{x} \\
\text{que minimiza:} & \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}) \\
\text{tal que:} & \quad \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \\
& \quad \sum_{j=1}^{N_b} L_j A_j(\mathbf{x}) \leq V_{m\acute{a}x} \\
& \quad x_{\min} \leq x_j \leq x_{m\acute{a}x}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Na maioria dos trabalhos na área adota-se a formulação aninhada (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009), na qual as equações de equilíbrio (2.21) são satisfeitas ao se proceder a análise via MEF e não constituem restrições diretas do problema de otimização

$$\mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \tag{2.21}$$

Assim, o problema (2.20) toma a forma apresentada em (2.22).

$$\begin{aligned}
\text{Obter:} & \quad \mathbf{x} \\
\text{que minimiza:} & \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) \\
\text{tal que:} & \quad \sum_{j=1}^{N_b} L_j A_j(\mathbf{x}) \leq V_{m\acute{a}x} \\
& \quad x_{\min} \leq x_j \leq x_{m\acute{a}x} \\
\text{com:} & \quad \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Onde:

- \mathbf{x} – é o vetor das variáveis de projeto;
- c – é a flexibilidade média da estrutura base;
- \mathbf{U} – é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura base;
- \mathbf{K} – é a matriz de rigidez global da estrutura base;
- \mathbf{F} – é o vetor de forças aplicadas;
- \mathbf{A} – é o vetor que contém as áreas A_i das seções transversais das barras;
- \mathbf{L} – é o vetor que contém os comprimentos L_i das barras;
- N_b – é o número de barras da estrutura base.
- $V_{m\acute{a}x}$ – é o volume máximo admitido para a estrutura;
- x_{\min} e x_{\max} – são, respectivamente, limites inferior e superior das variáveis de projeto.

O cálculo da sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto segue o mesmo procedimento adotado para os métodos de densidade, resultando em:

$$\frac{\partial c}{\partial x_j} = -\mathbf{u}_j^T \mathbf{k}_j \mathbf{u}_j \quad (2.23)$$

Onde:

\mathbf{u}_j – é o vetor de deslocamentos nodais do elemento j associado à variável de projeto x_j ;

\mathbf{k}_j – é a matriz de rigidez do elemento j .

Se os parâmetros N_n e N_s forem a quantidade de nós e restrições de apoio, respectivamente, o número de graus de liberdade para solução do sistema de equações em estruturas bidimensionais será dado pela equação (2.24) e em estruturas tridimensionais pela equação (2.25). Esses valores não se alteram com a alteração do nível de conectividade das barras.

$$N_{def} = 2 N_n - N_s \quad (2.24)$$

$$N_{def} = 3 N_n - N_s \quad (2.25)$$

2.2.2. Projeto de barras totalmente tensionadas

Michell (1904) explicitou as condições necessárias para a minimização do volume de uma treliça sujeita a carregamentos estáticos e restrições de tensões. Sejam $\sigma_T > 0$ o limite admissível para a tensão de tração e σ_C o limite admissível para a tensão de compressão. A tensão limite média dada por:

$$\mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{s}_T + \mathbf{s}_C}{2} \quad (2.26)$$

Segundo Michell (1904), a treliça assim definida é ótima se:

1. Estiver em equilíbrio;
2. Cada barra apresentar tensão igual a σ_T ou a $-\sigma_C$;

3. Existir um campo de deformações compatível onde as deformações das barras tracionadas sejam iguais a $\varepsilon_t = \sigma_0 \varepsilon_0 / \sigma_T$ e as deformações das barras comprimidas iguais a $\varepsilon_c = \sigma_0 \varepsilon_0 / \sigma_C$.

Os elementos resultantes nessa configuração ótima estarão dispostos na direção das deformações principais para o campo de deslocamentos. As soluções de Michell englobam infinitos elementos e têm aplicação limitada a problemas simples, dada a dificuldade de se encontrar soluções analíticas para domínios complexos. Essa última limitação pode ser sanada utilizando aproximações numéricas nas quais a densidade de elementos formadores da treliça depende da densidade da estrutura base e do nível de conexão das barras.

Considerando uma treliça rígida e assumindo que os apoios são suficientes para prevenir deslocamentos de corpo rígido tem-se a formulação elástica para minimização do volume:

$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} & \quad \mathbf{x} \\
 \text{que minimiza:} & \quad V(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{L}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\
 \text{tal que:} & \quad \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \\
 & \quad -\mathbf{s}_C \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{s}_T \\
 & \quad A_i \geq 0 \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, N_b
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Da mesma forma que feito nos casos anteriores, é mais usual adotar-se a formulação aninhada (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009), na qual as equações de equilíbrio (2.21) são satisfeitas ao se proceder a análise via MEF e não constituem restrições diretas do problema de otimização, o qual toma a forma apresentada em (2.28).

$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} & \quad \mathbf{x} \\
 \text{que minimiza:} & \quad V(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{L}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\
 \text{tal que:} & \quad -\mathbf{s}_C \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{s}_T \\
 & \quad A_i \geq 0 \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, N_b \\
 \text{com:} & \quad \mathbf{K}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Teoricamente, um elemento é removido da treliça se $A_i = 0$, o que pode gerar a violação da restrição de tensão (SVED; GINOS, 1968), caracterizando um fenômeno conhecido como “restrições dependentes do projeto”.

A treliça ótima para o caso de um único carregamento, sob condições elásticas lineares, sujeita a restrição de tensão pode ser tratada como um problema de programação linear (OHSAKI, 2010).

2.2.3. Formulação plástica

Pelo teorema do limite inferior pode-se obter o campo de tensões estaticamente admissíveis, onde não há violação das condições de equilíbrio e contorno. Neste caso não se leva em consideração as condições de compatibilidade da estrutura base, diferindo assim da formulação elástica. Para um problema com carregamento único, ambas as formulações levam a mesma solução (ROZVANY *et al.*, 2014).

Assim, a formulação plástica apresentada por Kirsh (1993) para o problema é descrita em termos de uma matriz de equilíbrio nodal \mathbf{B} (com dimensões $N_{dof} \times N_b$), construída a partir dos cossenos diretores dos elementos, e um vetor \mathbf{n} com as forças internas axiais de todos os elementos da estrutura base.

$$\begin{aligned}
 \text{Obter:} & \quad \mathbf{x} \\
 \text{que minimiza:} & \quad V(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{L}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\
 \text{tal que:} & \quad \mathbf{B}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^T \mathbf{n} = \mathbf{F} \\
 & \quad -\mathbf{s}_c \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{s}_t \\
 & \quad A_i \geq 0 \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, N_b
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

As restrições de tensão, tanto na tração quanto compressão, devem estar ativas para todos os elementos no ponto ótimo e a restrição de tensão pode ser expressa em termos de força nos elementos. Então, pode-se converter as desigualdades em igualdades incorporando as variáveis de folga na restrição de tensão s_i^+ e s_i^- (HEMP, 1973; ACHTZIGER, 2007).

$$\Lambda_i = \frac{s_i^-}{\mathbf{s}_t} + \frac{s_i^+}{\mathbf{s}_c} \tag{2.30}$$

$$n_i = s_i^+ - s_i^- \tag{2.31}$$

Introduzindo-se as equações (2.30) e (2.31), o problema apresentado na equação (2.29) pode ser resolvido com apresentado na equação (2.32).

$$\begin{aligned}
\text{Obter :} & \quad \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \\
\text{Que minimiza :} & \quad \bar{V} = \mathbf{1}^T \left(\frac{\mathbf{s}^+}{\mathbf{s}_T} + \frac{\mathbf{s}^-}{\mathbf{s}_C} \right) \\
\text{Tal que :} & \quad \mathbf{B}^T (\mathbf{s}^+ + \mathbf{s}^-) = \mathbf{F} \\
& \quad s_i^-, s_i^- \geq 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

2.3. GERAÇÃO DA ESTRUTURA BASE

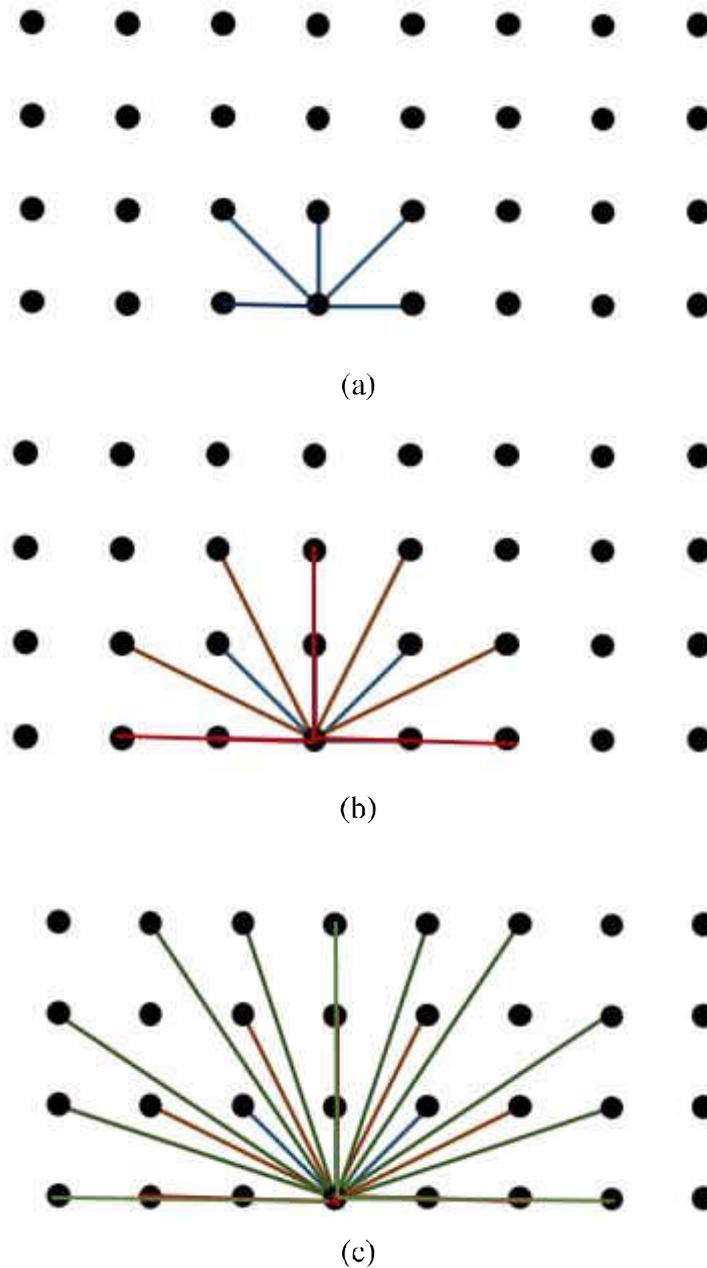
Esta seção apresenta duas técnicas para geração da estrutura base: a proposta por Sokól (2011b) para malhas estruturadas; e a proposta por Zegard e Paulino (2014) para malhas não estruturadas.

2.3.1. Geração da estrutura base para malhas estruturadas em domínios convexos

O método de *ground structure* desenvolveu-se em diversas pesquisas resultando em implementações simples e de fácil uso. Contudo, a geração da estrutura base para grandes aplicações constitui uma limitação à difusão do método. Sokól (2011b) apresenta uma abordagem que consiste em usar uma estrutura base fixa em domínios ortogonais. A ideia é utilizar uma espécie de carimbo um padrão em todos os nós da malha, de forma que este padrão não apresente barras sobrepostas. Com isso a estrutura base apresenta-se bastante regular, já que é composta de grupos idênticos de elementos havendo a necessidade de calcular grandezas, como matriz de rigidez e cossenos diretores, uma única vez. Logo, a estrutura pode ser densa e ao mesmo tempo econômica em termos computacionais.

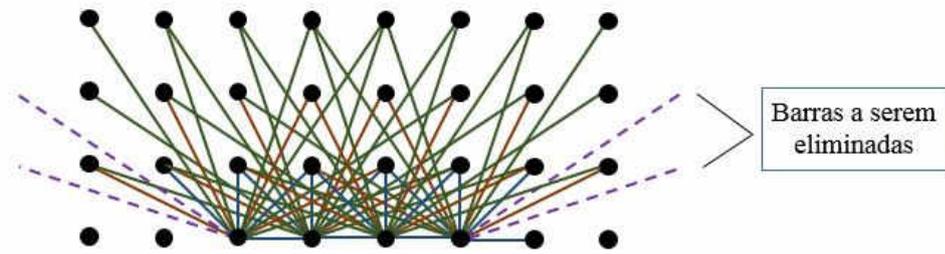
Para a criação do padrão o usuário deve definir o nível de conectividade desejado em função da análise que será realizada. Partindo do conceito que dois nós pertencentes ao mesmo elemento auxiliar são considerados vizinhos pode-se afirmar que o nível de conectividade 1 permitirá a criação de barras interligando nós vizinhos, conforme pode-se observar na Figura 2.3(a). O nível de conectividade 2 permitirá a criação de barras interligando os nós vizinhos dos vizinhos conforme ilustrado na Figura 2.3(b). O nível de conectividade 3 permitirá a criação de barras interligando os nós vizinhos dos vizinhos dos vizinhos conforme ilustrado na Figura 2.3(c). Níveis maiores podem ser criados sucessivamente, até a obtenção de uma estrutura base totalmente interconectada.

Figura 2.3 – Padrão de geração da estrutura base: (a) nível de conectividade 1; (b) nível de conectividade 2; (c) nível de conectividade 3.



Definido o nível de conectividade desejado o padrão deverá ser aplicado a todos nós da malha. Ao carimbar o padrão deve-se ficar atento para a existência de elementos que ultrapassem a malha definida para o problema. Verificando a existência de elementos que excedam a malha, estes devem ser eliminados da estrutura base conforme ilustra a Figura 2.4.

Figura 2.4 – Eliminação de elementos que excedam a malha



Após a eliminação das barras excedentes é necessário verificar se a aplicação do carimbo resultou em barras colineares. Caso uma barra adicionada no nível de conectividade n_c apresente colinearidade com barras de níveis de conectividade anteriores, a barra adicionada por último deve ser eliminada. O vetor do cosseno diretor do nó “ p ” para o nó “ q ” pode ser calculado conforme a equação (2.33).

$$\hat{\mathbf{d}}_{p,q} = \frac{\mathbf{d}_{p,q}}{\|\mathbf{d}_{p,q}\|}, \quad (2.33)$$

Onde:

$\mathbf{d}_{p,q}$ – representa a distância entre os nós p e q ;

$\hat{\mathbf{d}}_{p,q}$ – representa a distância normalizada entre os nós p e q .

O ângulo entre dois vetores cossenos diretores pode ser observado na Equação 2.34.

$$\cos(\angle qpr) = \hat{\mathbf{d}}_{p,q} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{p,r} \quad (2.34)$$

Logo, se houver m candidatas a nova barra originando de um específico nó i , estas devem ser verificadas em relação a n barras existente do mesmo nó. Os vetores diretores das candidatas a novas barras podem ser agrupados na matriz \mathbf{D}_{new} e as barras previamente aceitas são agrupadas em \mathbf{D}_{old} . Obtém-se então o produto escalar através da equação (2.35).

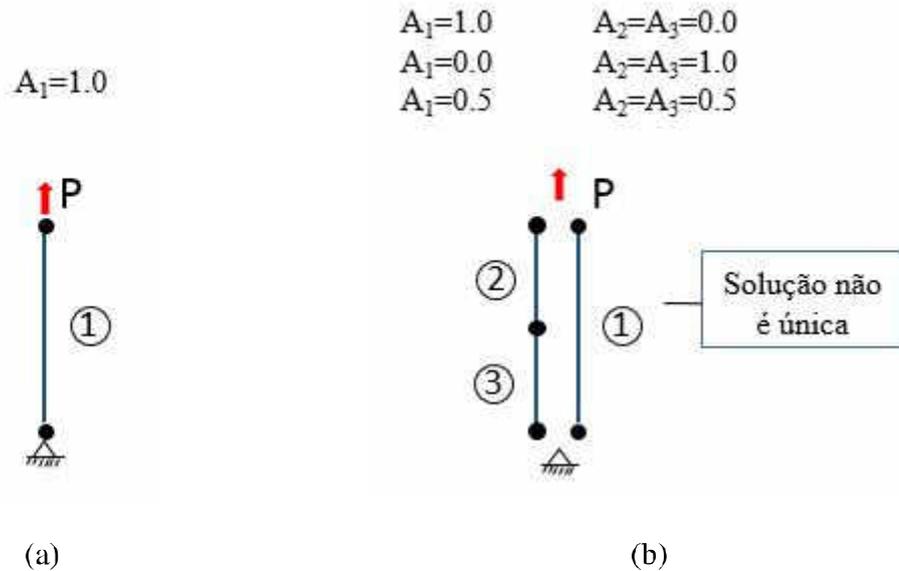
$$\mathbf{C} = \mathbf{D}_{old} \mathbf{D}_{new}^T, \quad (2.35)$$

Assim, uma candidata a barra j é colinear se alguma entrada na coluna j for igual a 1. Para o programa que será utilizado estabelece-se uma tolerância de colinearidade $ColTol < 1$ e a barra

é removida se a expressão (2.36) for atendida. A Figura 2.5 mostra um exemplo de barras colineares.

$$C_{i,j} > ColTol \quad \forall i = 1 \dots n \quad (2.36)$$

Figura 2.5 - Eliminação de elementos colineares. (a) problema com solução única. (b) problema com solução não única.



2.3.2. Geração da estrutura base para malhas não estruturadas em qualquer tipo de domínio

Zégard e Paulino (2014) em seu código GRAND propõem a geração da estrutura base a partir do PolyMesher (TALISCHI *et al.*, 2012), programa educacional desenvolvido com o intuito de prover uma ferramenta computacional capaz de gerar malhas compostas de elementos poligonais. O objetivo inicial desse programa era prover malhas de elementos poligonais para aplicação principalmente no método de densidade de OT, já que estes se mostraram não ser suscetíveis as instabilidades numéricas características desse método. O código permite a representação de geometrias complexas que não poderiam ser representadas por domínios retangulares ou malhas estruturadas quadradas.

O primeiro passo do algoritmo é a geração de um conjunto de pontos dentro do domínio do problema. Esses pontos conhecidos como sementes são gerados de forma aleatória, conforme

ilustrado na Figura 2.6(a). Após a geração das sementes é realizada a triangulação de Delaunay onde todos os pontos são ligados a seus vizinhos imediatos, formando um domínio discretizado em triângulos, conforme ilustrado na Figura 2.6(b). Por fim, são traçadas linhas perpendiculares aos lados dos triângulos que compõem cada semente. Essas linhas são estendidas de modo que, ao se cruzarem, definam o contorno da célula, conforme ilustra a Figura 2.6(c). Assim, obtém-se a malha poligonal a ser utilizada no processo de OT dos métodos de densidade.

Mesmo tendo sido originalmente desenvolvido para a geração de malhas para o método de densidade, Zégard e Paulino (2014) perceberam que a malha obtida poderia ser utilizada no método da *ground structure*. Assim, o programa GRAND utiliza as malhas obtidas pelo PolyMesher, sendo que os nós da malha são utilizados como nós da estrutura base. A obtenção da estrutura base é análoga ao processo proposto Sokól (2011b), onde deve-se definir o nível de conectividade da estrutura, gerar as barras utilizando a técnica do carimbo e eliminar as barras que excedam o domínio e as barras colineares.

A Figura 2.7(a) mostra o exemplo de uma malha poligonal com 10 elementos obtida pelo PolyMesher. As Figuras 2.7(b), 2.7(c), 2.7(d), 2.7(e) e 2.7(f) mostram as estruturas base para os níveis de conectividade 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Figura 2.6 – Etapas da geração de malha usando o PolyMesher: (a) geração das sementes; (b) triangulação de Delaunay; (c) geração de células.

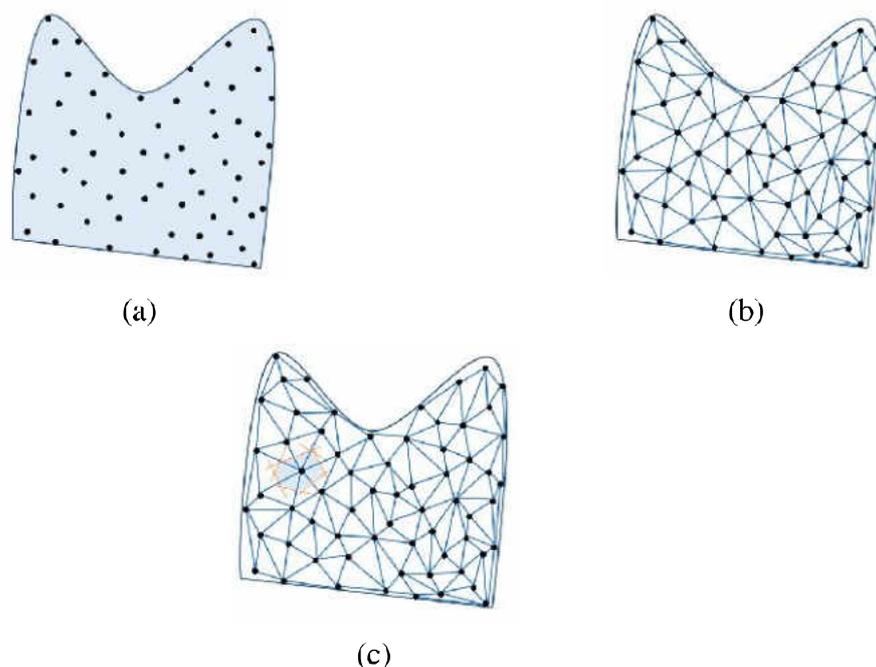
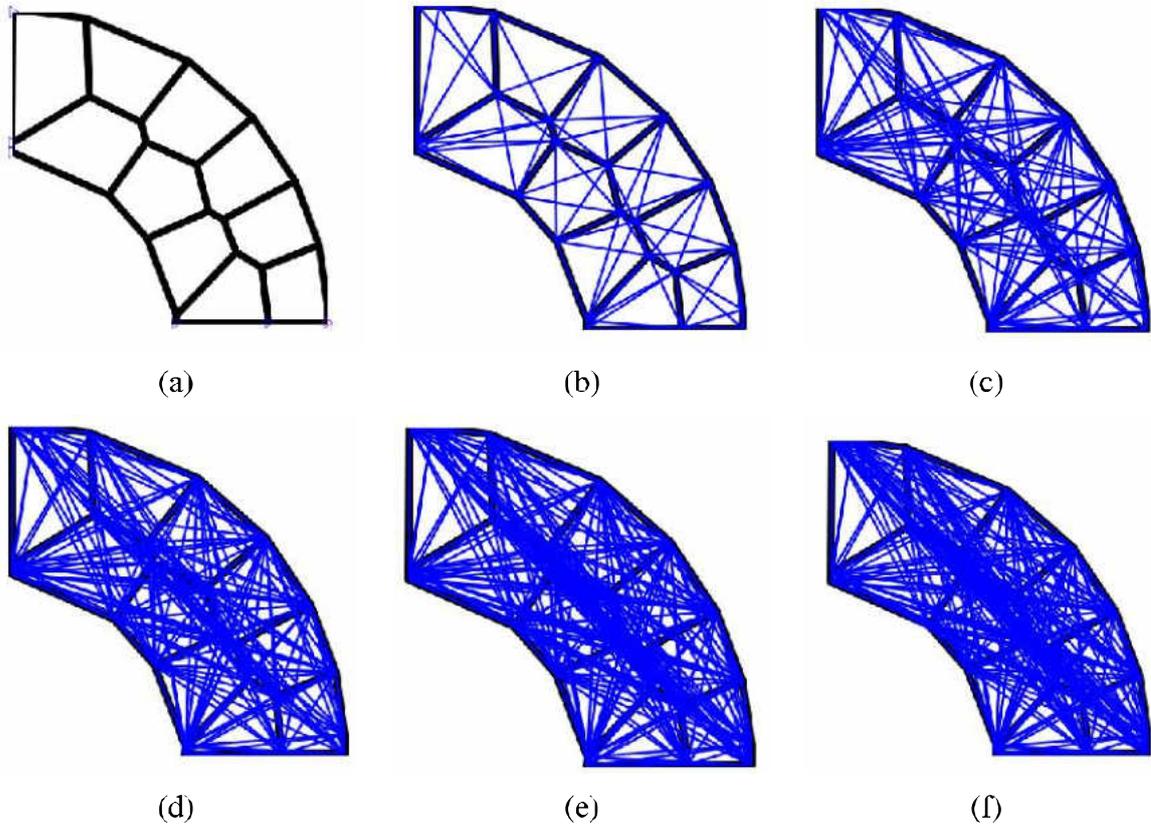


Figura 2.7 Exemplo malha gerada pelo PolyMesher: (a) Malha poligonal com 10 elementos. (b) Nível de Conectividade 1. (c) Nível de Conectividade 2. (d) Nível de conectividade 3. (e) Nível de conectividade 4. (f) Nível de Conectividade 5



CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Neste capítulo são mostradas as técnicas que deverão ser utilizados para a aplicação dos métodos de otimização de topologia em edifícios altos. Pensando nas necessidades práticas de manufatura busca-se controlar o layout da estrutura a fim de garantir que a solução final seja compatível com as técnicas construtivas. São desenvolvidas as formulações para imposição de condições de simetria e repetição de padrões e a correspondente alteração das formulações matemáticas apresentadas no Capítulo 2 para incorporar essas condições. Em seguida é apresentada a formulação para aplicação de múltiplas combinações não simultâneas de carregamento. Por fim, apresentam-se também as técnicas adotadas neste trabalho para a geração da estrutura base nas análises tridimensionais.

3.1. TÉCNICAS DE CONTROLE DE LAYOUTS – MÉTODO DE DENSIDADE

A otimização de topologia é considerada uma ferramenta para as fases iniciais da concepção estrutural, já que apesar da maturidade da área, muitas vezes apresenta soluções não aplicáveis na prática. Algumas técnicas desenvolvidas para o controle de instabilidades numéricas servem também para o controle das dimensões dos elementos, fato que é essencial para a manufatura da estrutura (GUEST *et al.*, 2004; ALMEIDA *et al.*, 2009). No entanto, as estruturas das edificações necessitam de um maior controle sobre o layout, exigindo algumas padronizações de layout, seja por questões de fabricação ou ainda para tirar proveito arquitetônico do layout do sistema estrutural. Dentre as padronizações possíveis destaca-se a repetição de padrão e a imposição de simetria.

3.1.1. Repetição de padrões

A técnica de repetição de padrões consiste na imposição ao algoritmo a formação de estruturas com algum tipo de padronização de layout (ALMEIDA *et al.*, 2010). Os padrões são formados através do mapeamento das variáveis de projeto y em conjuntos de densidades do elemento d .