Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

MODELOS ELEMENTARES DE PERCOLAÇÃO

Samira Moreira Cunha de Paula

Goiânia
2015

Samira Moreira Cunha de Paula

MODELOS ELEMENTARES DE PERCOLAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior

Goiânia

2015

Samira Moreira Cunha de Paula

Modelos Elementares de Percolação

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de julho de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Valdivino Vargas Júnior

Prof. Dr. Valdivino Vargas Junior
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

JEdV.

Prof. Dr. José Éder Salvador de Vasconcelos
Membro Externo IFG - GOIÂNIA

Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibido a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, da autora e do orientador.

Samira Moreira Cunha de Paula graduou-se em Matemática na modalidade Licenciatura pela Universidade Federal de Goiás em 2006.
Tornou-se Especialista em Métodos e Técnicas de Ensino pela Universidade Salgado de Oliveira em 2009.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração pela oportunidade concedida, bem como ao IMPA e à CAPES.

Ao meu orientador Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior pela paciência e pelo suporte durante a produção deste trabalho, além de suas correções e incentivos.

Aos meus pais, Creuza e Osvaldo, e ao meu irmão, André, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Ao meu esposo Tibério e ao meu filho Henrique, que por tantas vezes tiveram que lidar com minha ausência e saudade.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um histórico da probabilidade, bem como um panorama atual do ensino de probabilidade no Brasil, concluindo que boa parte dos alunos não compreendem os conceitos envolvidos em tal conteúdo. Para isto, sugerimos que se utilize modelos de percolação para deixar o aprendizado mais agradável e conciso. Assim, há uma breve definição de percolação, principais áreas onde essa teoria é utilizada e apresentação de dois modelos básicos, com cálculos a nível de graduação. Finalizando, são propostas duas aplicações da teoria para o Ensino Básico, uma envolvendo circuitos elétricos e a outra a brincadeira do telefone sem fio, objetivando um melhor aprendizado por parte dos alunos.

Palavras-chave: Probabilidade; Ensino; Percolação.

ABSTRACT

This paper presents a history of probability and a current panorama of education in Brazil , concluding that most of the students do not understand the concepts involved in such content. For this , we suggest you use percolation models to leave the most pleasant and concise learning. Thus, there is a brief definition of percolation , the main areas where this theory is used and presentation of two basic models with calculations at the undergraduate level. Finally, two applications of the theory to basic education are proposals, one involving electrical circuits and other wireless phone prank , aiming a better learning by students .

key-words: Probability ; Education; Percolation .

Lista de Figuras

4.1 Modelo de recipientes interligados em série. 28
4.2 Modelo de Recipientes interligados em árvores. 42
4.3 Gráfico da probabilidade de extinção em função de p para $d = 2$. 44
4.4 Gráfico da probabilidade de extinção em função de p para $d = 2$. 47

5.1 Circuito em série 50
5.2 Circuito em paralelo 51
5.3 Organização em fila para o telefone sem-fio. 53
5.4 Organização circular para o telefone sem-fio 54
5.5 Gráfico comparativo das probabilidades. 59

Sumário

INTRODUÇÃO **10**

1 O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA **11**

1.1 História da Probabilidade 11

1.2 A Probabilidade no Ensino Básico 12

2 A TEORIA DE PERCOLAÇÃO **15**

2.1 Percolação e Eletricidade 15

2.2 Percolação e Epidemias 16

2.3 Percolação e Petróleo 16

2.4 Percolação e Hidrocarbonetos 17

2.5 Percolação e Fogos Florestais 17

2.6 Percolação e Ecopaisagem 18

2.7 Percolação e Tintas Condutoras 18

2.8 Percolação e Óleo 18

2.9 Percolação e Rede de Computadores 19

2.10 Percolação e Sistemas Celulares 19

2.11 Percolação e Propagação de Rumores 20

3 REFERENCIAL TEÓRICO **21**

3.1 Definições 21

3.2 Teoremas, Lemas e Proposições 25

4 ALGUNS MODELOS TEÓRICOS **28**

4.1 Primeiro Modelo: Percolação Por Dutos em Série 28

4.2 Segundo Modelo: Percolação em Árvores 41

5 APLICAÇÕES DA TEORIA DE PERCOLAÇÃO NO ENSINO MÉDIO **49**

5.1 Circuitos Elétricos 49

5.2 Transporte de Informação: Telefone Sem Fio 51

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 60

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 61

INTRODUÇÃO

O conteúdo de Probabilidade vem cada vez mais ganhando espaço nos currículos brasileiros. Porém, o simples "transmitir" de fórmulas e conceitos não torna seu aprendizado agradável e conciso. Para tanto, trabalhar com conteúdos contextualizados e com possíveis aplicações palpáveis e passíveis de observação de nossos alunos auxilia na obtenção de melhores resultados.

Paralelamente, observamos uma expansão, durante as últimas décadas, no desenvolvimento de modelos matemáticos para percolação, o qual se trata de um dos possíveis modelos probabilísticos, definida comumente na literatura como o movimento e filtragem de fluidos por materiais porosos. A aplicação de seus conceitos encontra-se presente nas mais diversas áreas do conhecimento, como na física, biologia, informática etc., tendo seu alicerce nas teorias probabilísticas.

Diante de tal cenário, é possível aliar estes dois conceitos, probabilidade e percolação, no intuito de melhorar a compreensão dos alunos na Educação Básica. No entanto, é necessário que o professor responsável por ministrar tal conteúdo conheça a teoria da percolação, suas aplicações e saiba adaptá-las ao nível de seus alunos do Ensino Básico.

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de auxiliar nessa compreensão, além de analisar o panorama atual da probabilidade no Brasil e sugerir aplicações adaptadas da teoria de percolação aos alunos do Ensino Médio, tornando-se assim o aprendizado não tão desconexo com o que encontramos em nosso cotidiano.

O trabalho encontra-se organizado em seis capítulos. O primeiro é destinado à Probabilidade, incluindo seu histórico e a maneira como o conteúdo encontra-se presente na Educação Básica brasileira. Já o segundo capítulo, abordará a definição de Percolação, bem como sua aplicação nas diversas áreas. O terceiro elencará todo o referencial teórico necessário para a interpretação e compreensão dos modelos apresentados na sequência do trabalho. O quarto capítulo apresentará dois modelos teóricos de percolação à nível de graduação, enquanto o quinto mostrará duas sugestões de aplicação para a Educação Básica, mais precisamente à nível Médio. Por fim, serão apresentadas algumas considerações finais e conclusões do trabalho aqui desenvolvido.

Capítulo 1

O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

1.1 História da Probabilidade

De acordo com FERREIRA, a palavra probabilidade tem origem latina *(probare)*, que significa "qualidade do que é provável". Sendo assim, há uma notória associação da palavra provável à incerteza de acontecimentos.

Historicamente, a noção de probabilidade nasceu com os comerciantes marítimos, há mais de 5000 anos, quando estes instituíram seguros com o intuito de protegerem sua atividade comercial (SILVA, 2010). Para tanto, embasavam-se em "estimativas empíricas das probabilidades em acidentes para estipularem as taxas e os valores das possíveis indenizações" (SILVA, 2010, p.8).

Já no século XVII, quando a popularidade dos jogos de azar era incontestável, tornou-se necessário a criação de métodos para elencar possibilidades de determinado evento ocorrer ou não. Foi exatamente nesse período que Blaise Pascal (1627-1662) e Pierre Fermat (1601-1665) começaram a trocar correspondências acerca do assunto, momento esse considerado como o pioneiro na formulação dos princípios básicos da teoria da probabilidade (SILVA, 2010).

Segundo BOYER (1996, p. 334):

> O trabalho desenvolvido por estes dois matemáticos não recorreu às ideias de Cardano de um século antes, que permaneceram esquecidas até 1663. É só da troca de cartas sobre estes problemas e sobre outras questões com eles relacionadas, que vai nascer o ponto de partida, ou seja, alguns fundamentos, da moderna teoria das probabilidades. Fermat e Pascal são, então, considerados os fundadores da teoria matemática das probabilidades.

Assim que o matemático holandês Christian Huygens (1629-1695) tomou conhecimento dessas correspondências, publicou em 1657 o livro cujo título era *"O raciocínio nos jogos de azar"*, tido como o primeiro a respeito de probabilidade, contribuindo assim

para que as demais áreas do conhecimento, tais como Biologia, Química, dentre outras, utilizassem tal teoria.

Cardano (1501-1576) foi um dos pioneiros na descrição de um método específico para o cálculo de probabilidade. Em seu livro *"Tudo sobre os jogos de azar"*, publicado em 1665, além de estudar as leis da probabilidade, analisa os jogos de azar, auxilia na compreensão destes e na tomada de decisão sobre como jogar.

Perpassando os trabalhos de Leibniz (1646-1716), Jaques Bernoulli (1654-1705), Moivre (1667-1759) e Thomas Bayes (1702-1701), a teoria das probabilidades foi sendo desenvolvida.

No entanto, segundo BOYER (1196, p. 334):

> A teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. A partir de 1774, ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados incorporou no clássico livro *Teoria Analítica das Probabilidades*, de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis.

Já a respeito do cálculo de probabilidades, Laplace (apud NASCIMENTO, 2014, p. 3) escreveu:

> A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo que permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto. É natutal como tal ciência, que começou com estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano.

Já no final do século XVIII e início do século XIX, matemáticos como Lagrange, Laplace, Gauss, Poisson e De Moivre conseguiram aprofundar na teoria de probabilidade, visualizando aplicações nas ciências sociais, biológicas e na física.

Apesar de muitos anos de estudo, a probabilidade só apareceu em nossos currículos em 1997, como será apresentado na próxima seção.

1.2 A Probabilidade no Ensino Básico

Para compreender o panorama atual do ensino de Probabilidade na Educação Básica brasileira, principalmente no Estado de Goiás, é necessário conhecer os documentos e a legislação vigente no que tange a este assunto, sendo eles os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM, Lei de Diretrizes e Bases - LDB, e o Currículo Referência do Estado de Goiás.

Apesar de ser um assunto datado de 5000 anos, a probabilidade somente foi inserida como conteúdo escolar em 1997, com a elaboração dos PCN's. Neste documento, o ensino de Probabilidade está alocado no bloco de conteúdos denominado "Tratamento da Informação".

Para o Ensino Fundamental, o conteúdo aparece nos 3º e 4º ciclos (6 a 9º Ano). Para o terceiro ciclo, temos que: (BRASIL, 1998, p.70)

> Neste ciclo, também amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana.

Apesar desta introdução no Ensino Fundamental, há uma sugestão de que o tema tenha uma abordagem de caráter informal nestes ciclos, tendo sua consolidação no Ensino Médio.

Nos Parâmetros curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), de 2000, encontramos o ensino de Probabilidade como uma "competência na qual deve ser desenvolvida a compreensão do caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e a utilização de instrumentos adequados de amostras e cálculo de probabilidades."(LIMA, 2013, p. 44)

Ainda segundo o PCNEM, o estudo da análise combinatória e da probabilidade é pré-requisito para uma boa compreensão de outros temas, como as leis da hereditariedade, na Biologia, por exemplo.

No ano de 2007, foi publicado pelo Governo Federal um documento complementar ao PCNEM, conhecido como PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio). Quanto ao ensino de Probabilidade, SMOLE e DINIZ afirmam que (SMOLE e DINIZ, 2002, p. 30):

> A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente.

O PCN+ deixa como sugestão que o ensino de Probabilidade seja efetuado na Segunda Série do Ensino Médio, sugestão esta acatada no Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás. De acordo com a Secretaria Estadual de Educação de Goiás, tal currículo foi implantado nas escolas estaduais em 2013, e teve como objetivo contribuir com as Unidades Educacionais apresentando propostas de bimestralização dos conteúdos para melhor compreensão dos componentes do currículo e sua utilização na sala de aula.

Na verdade, o intuito foi uniformizar os conteúdos ministrados, com o objetivo de que o aluno, ao se transferir de uma escola para outra, não sofresse com perda de conteúdos.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) está propondo, neste ano de 2015, que haja uma reestruturação do Ensino Básico. Nesta proposta, o ensino das técnicas de contagem aconteceria na Segunda Série do Ensino Médio, enquanto o ensino de probabilidade aconteceria somente na série seguinte.

Apesar do ensino de Probabilidade proporcionar um amplo espaço de trabalho, inclusive interdisciplinar, os dados do Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional

(INAF) nos mostram um grande índice de desconhecimento ou dificuldade de se dominar certo assunto. Segundo REZENDE e FERREIRA (2011), "o ensino de Probabilidade na escola básica, quando acontece, ainda se dá, muitas vezes, vinculado a fórmulas e associações com situações conhecidas e repetidas, quase sempre fora da realidade do aluno, o que provoca desinteresse por parte deste". (REZENDE e FERREIRA, 2011).

Nesse sentido, trabalhar a teoria da probabilidade associada ao conceito de percolação, torna o estudo mais interessante, uma vez que sua aplicação pode ser observada em vários campos.

O próximo capítulo apresenta a definição da teoria de percolação, bem como sua aplicação em diversas áreas do conhecimento.

Capítulo 2

A TEORIA DE PERCOLAÇÃO

O modelo de Percolação foi formulado em fins da década de 50 por Broadbent e Hammersley como um modelo de transporte de fluido em meio poroso onde a propagação dos fluidos ocorre de uma forma não linear. De fato, existem dois regimes bem definidos, a propagação e a extinção, separados por uma transição brusca - a transição de percolação. Este modelo pode ser descrito como um dos mais simples modelos da física estatística na rede a exibir transição de fase.

De acordo com FONTES (1996), este modelo teve seus primeiros resultados não triviais provados por Broadbent e Hammersley. Desde então, esta teoria vem sendo desenvolvida e observada a possibilidade de aplicação em diversas áreas do conhecimento, como física, biologia, sistemas de informação etc. No entanto, a percolação hoje é usada para descrever processos de natureza estatística, e está mais associada com o meio do que com o fluido (ZARA, 2000). A seguir, mostraremos de forma sucinta como sua aplicação é encontrada em algumas situações. Ressaltamos que o objetivo, neste capítulo, não é apresentar os modelos de percolação em si, mas indicar as aplicações deste modelo e citar trabalhos onde maiores informações poderão ser encontradas.

2.1 Percolação e Eletricidade

De acordo com a ANEEL (2008), o principal objetivo das empresas de distribuição de energia é oferecer um serviço confiável e econômico na área de concessão, respeitando os padrões impostos pela lei vigente. Desta maneira, quando as empresas conseguem prever seus empreendimentos futuros, juntamente com a quantidade de energia elétrica que será necessária a seus usuários, a empresa terá informações importantes para o planejamento das redes de distribuição, permitindo a avaliação do volume de obras necessárias para seu reforço, ampliações e correções diversas, para levar a energia requerida onde for necessário.

Tomando como problemática a necessidade de modelar o crescimento espaço-temporal do consumo de energia elétrica dos novos usuários em um sistema de distribuição para auxiliar o planejamento das empresas de distribuição de energia, APOLINÁRIO, FRANCO e MELO (2012) apresentam um trabalho intitulado *Aplicações da Teoria da Percolação na Modelagem do Crescimento de Cargas em Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica.*

Neste trabalho, os autores modelam os aglomerados na cidade formados por novos usuários e seu crescimento dinâmico segundo a teoria da percolação, utilizando para isso o modelo de percolação por invasão. Para maiores informações acerca deste tipo de percolação, sugerimos a leitura da tese de ZARA (1996), intitulada *Percolação por invasão múltipla*, disponível no banco de teses da USP.

2.2 Percolação e Epidemias

Ao tratarmos do espalhamento de uma epidemia em relação a uma população, estão envolvidos dois níveis de interação, um microscópico, que se refere às interações entre o agente causador da doença no vetor e no hospedeiro, e um macroscópico, onde o principal fator é a interação entre os indivíduos infectados e os suscetíveis de infecção.

SOUZA (2012), em seu trabalho intitulado *Transição de fases em modelos estocásticos para descrever epidemias*, estuda o modelo de epidemia suscetível-infectado-recuperado (SIR) estocástico e espacialmente estruturado.Segundo este autor, (SOUZA, 2012, p. 5):

> Nesse modelo, os indivíduos são divididos em três classes: suscetível (S), infectado devido ao contato com um vizinho infectado, e um indivíduo infectado pode recuperar-se espontaneamente. Este modelo exibe transição de fase em que a doença se espalha e uma fase em que não há espalhamento da doença. Tratando cada par suscetível-infectado como uma conexão através da qual pode haver propagação da epidemia, mostramos que é possível estabelecer uma conexão entre o modelo SIR e o modelo de percolação. Assim, pudemos utilizar métodos da teoria de percolação usual para determinar o limiar de espalhamento epidêmico.

2.3 Percolação e Petróleo

Na indústria petrolífera, devido à intensa demanda, é necessário que haja a recuperação do petróleo. SOARES (2007), em seu trabalho intitulado *Fractais e Percolação na Recuperação de Petróleo*, apresenta um dos métodos mais comuns de recuperação de petróleo, utilizando a injeção de um fluido em um poço, com a finalidade de criar uma frente de deslocamento para empurrar o óleo ali existente para outros poços.

Apesar do óleo passar por meios porosos altamente heterogêneos, as rochas porosas podem ser classificadas como boas, ou seja, aquelas que têm alta permeabilidade, e as consideradas ruins, onde há baixa ou nenhuma permeabilidade. Como a distribuição espacial destas rochas se dá de maneira aleatória, podemos caracterizar este como um problema típico de percolação.

2.4 Percolação e Hidrocarbonetos

Juntamente com o crescimento populacional, há um aumento na demanda de combustíveis, em especial a gasolina. Porém, quando não acondicionada de maneira correta, esta gasolina pode contaminar solo e água durante seu transporte ou em más condições de armazenamento. Segundo FOGAÇA et al. (2014, p. 01):

> Por meio de oleodutos a gasolina é conduzida das refinarias até os pontos estratégicos de distribuição e comercialização. Ocorrência de vazamentos em oleodutos subterrâneos provoca a contaminação do solo e, dependendo das condições físico-químicas deste, o contaminante sofre percolação, podendo atingir reservatórios subterrâneos e/ou superficiais de água, comprometendo o abastecimento de água potável para as regiões do entorno.

Neste segmento, conhecer a teoria de percolação ajuda a impedir que hidrocarbonetos alcancem o lençol freático, evitando assim a contaminação das águas.

2.5 Percolação e Fogos Florestais

Estudar a evolução dos fogos florestais se torna tarefa árdua, uma vez que métodos das ciências experimentais não podem ser utilizados. No entanto, traduzindo o problema para a linguagem da percolação, podemos utilizar o modelo de percolação de sítios, o qual é explicado na tese de LEBENSZTAYN (2002), intitulada *O modelo de percolação em grafos: Um estudo de condições para a transição de fases*, disponível no banco de teses da USP. Para este exemplo, a floresta é representada por uma rede quadrada com N sítios. O efeito da desordem é modelado através da ocupação aleatória de uma fração dos sítios da rede. Os sítios estão ocupados por uma árvore, com probabilidade p, $0 \leq$ p ≤ 1, que representa a densidade de florestação. Em média, $p \cdot N$ sítios estão ocupados e $(1-p) \cdot N$ sítios estão desocupados. Segundo BARROSO, et al. (2010)

> A propagação do fogo é simulada de acordo com as regras seguintes. Incendeia-se uma fila de árvores na orla esquerda da floresta. Uma árvore começa a arder se alguma das vizinhas estiver a arder nesse instante. Uma árvore arde durante uma unidade de tempo e uma árvore queimada é equivalente a um sítio sem árvores. O fogo não pode saltar sobre sítios sem árvores e esses sítios não podem arder nem incendiar outros, bloqueando a propagação do fogo. A simulação termina quando o fogo chegar à outra orla da floresta ou quando já não houver árvores a arder. A média sobre várias simulações permite calcular a percentagem de árvores queimadas e a duração do fogo, para cada valor de p.

2.6 Percolação e Ecopaisagem

No campo da ecopaisagem, a teoria da percolação foi mencionada pela primeira vez por Gardner et al (1987), na obra intitulada *Neutral models for the analysis of broad-scale landscape pattern*. Nesta obra, o objetivo dos autores era buscar um método para comprovar se um determinado padrão de paisagem era ou não devido a existência de um dado processo. Nesse sentido, foram construídos, a partir das premissas da Teoria da Percolação, modelos da paisagem na ausência de efeitos de processos (ex: perturbações, invasão...) sendo assim denominados modelos neutros. Os padrões gerados por esses modelos foram comparados com padrões de paisagem observados.

2.7 Percolação e Tintas Condutoras

Segundo JUNQUEIRA (2012, p. 08),

> Chamamos de compósito a combinação de dois ou mais materiais distintos que formam um terceiro material, no qual seus componentes estão separados em fases. Esse terceiro material forma uma classe de materiais heterogêneos, multifásicos, que podem ser poliméricos ou não. São produzidos artificialmente visando à combinação das melhores propriedades das fases constituintes. Geralmente, uma fase, a matriz, é contínua e envolve a fase dispersa.

Ao adicionar certa concentração de algum tipo de carga condutora a uma matriz polimérica, é possível observar que essa matriz, antes isolante, passa a conduzir corrente elétrica.

Um compósito condutor apresenta duas fases, uma condutora e a outra isolante. Esse tipo de sistema exibe um limiar de percolação. Sendo assim, para compreender o mecanismo de condução nesse compósito condutor utilizamos a teoria de percolação, por possibilitar uma interpretação do comportamento da condução elétrica.

Segundo a teoria de percolação, a condutividade elétrica de um compósito é diretamente dependente da concentração de material condutor adicionado a matriz isolante, bem como de quanto condutivo é esse material.

A probabilidade de percolação nada mais será que a probabilidade de uma determinada região estar conectada com o resto, compondo, dessa forma, uma trilha condutora.

2.8 Percolação e Óleo

Um dos modelos mais comuns para análise do comportamento de óleos ao entrar em contato com regiões porosas baseia-se numa versão simples de percolação ori-

entada. Para maiores informações sobre este tipo de percolação, sugerimos a leitura da obra de STOVER (1999), intitulada *Oriented Percolation Model*.

A espécie de fluxo e o tamanho do derrame dependem da porosidade do solo, que determina a probabilidade de percolação. O comportamento do sistema depende desta probabilidade. O modelo é caracterizado por dois regimes: fluxos contínuos para porosidades elevadas e fluxos superficiais para porosidades baixas.

2.9 Percolação e Rede de Computadores

Nos dias atuais, vários sistemas de interesse tecnológico e comercial, tais como a internet, são elementos de redes que podem ser convenientemente representadas por grafos (maiores informações sobre grafos serão dadas no próximo capítulo).

É possível investigar o comportamento das propriedades de conectividade destas redes frente à remoção de alguns de seus vértices. Para isso, pode-se usar como base a teoria da percolação, cujo parâmetro principal está relacionado com a fração máxima de vértices retirados antes da total fragmentação da rede em subgrafos desconexos.

Maiores informações acerca desse assunto podem ser obtidas no artigo de MICHEL e ZARA (2004), intitulado *Percolação e Estratégias de Ataque em Redes de Escala Livre*.

2.10 Percolação e Sistemas Celulares

Com o intuito de minimizar congestionamento espectral e aumentar a capacidade em relação ao número de usuários do sistema, criou-se a telefonia celular. Dessa forma, é oferecida uma alta capacidade de uso em uma limitada alocação de espectro de frequência.

Devido ao grande crescimento de usuários e da demanda por sinal, novos serviços de transmissão foram criados. Um dos tipos de propagação das ondas é via rádio, sendo dependente do terreno, se é plano, montanhoso, com curvas e ângulos de subida ou descida, e, dos obstáculos, tais como, edificações, árvores, veículos e pessoas. As perdas causadas pela propagação por múltiplos percursos e pelo sombreamento afetam a área de cobertura do sinal e podem resultar em erros de decodificação.

Nesse sentido, surge a ideia de representar um ambiente de propagação urbano por uma malha aleatória na qual a teoria da percolação pudesse ser aplicada para modelar o canal urbano, modelando a radiação das ondas como um fluxo de fótons propagando-se no ambiente, além de relacionar a propagação de raios em aglomerados de percolação em áreas urbanas onde cada obstáculo torna-se uma nova fonte de ondas que são espalhadas

em todas as direções.

Maiores informação acerca do assunto poderão ser encontradas na dissertação de FERREIRA (2010) intitulada *Influência do Excesso de Atraso do Canal na Taxa de Transmissão para o Planejamento de Sistemas Celulares.*

2.11 Percolação e Propagação de Rumores

Uma outra possível aplicação para a teoria da percolação é no estudo de propagação de rumores, utilizando processos de modelagem para representar como o rumor se espalha.

A propagação de rumores é um processo comunicacional, promovida pelo coletivo. Pode ser descrita, de acordo com REULE (2008, pag. 05), como:

> um tipo de informação não confirmada que se propaga em rede e que circula com a intenção de ser tomada como verdadeira. Apesar de poder ser inofensivo, o rumor também pode ser prejudicial, gerando graves conseqüências quando se trata de uma informação falsa. Nesta condição, sua disseminação num corpo social pode ser motivo de preocupação, dependendo da rapidez com que ele é passado adiante e da dimensão alcançada.

Os indivíduos envolvidos podem ter um papel ativo ou passivo, ou seja, repassa ou recebe a informação, sendo representados como um conjunto de variáveis aleatórias e tendo como objetivo encontrar condições para que haja ou não chance do rumor ser propagado de forma indefinida. Maiores informações podem ser obtidas no artigo de JÚNIOR, MACHADO e ZULUAGA (2015), intitulado *"Propagação de rumores"*.

Capítulo 3

REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo encontramos todas as definições, teoremas e lemas necessários para a compreensão e desenvolvimento dos modelos teóricos apresentados à frente. As demonstrações dos teoremas e lemas foram omitidas, porém podem ser encontradas em LEBENSZTAYN(2012), GRADSHTEYN e RYZHIK (2007) e FEOFILOFF, KOHAYAKAWA e WAKABAYASHI (2001).

3.1 Definições

Definição 1 (Experimento aleatório)**.** São experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado.

Definição 2 (Espaço Amostral)**.** Denominamos *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e denotamos por Ω. Um subconjunto $A \subset \Omega$ é chamado *evento*.

Definição 3. A reunião de n eventos é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre, e escrevemos assim a operação: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Definição 4. A interseção de n eventos é o evento que ocorre se todos eles ocorrem, e escrevemos assim a operação: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

Definição 5. O complementar de um evento A é o evento que ocorre se A não ocorre, e escrevemos assim a operação: A^c.

Definição 6. A diferença entre dois eventos A e B é o evento que ocorre se somente A ocorre e B não ocorre, e escrevemos assim a operação: $A|B$ ou $A \cap B^c$.

Leis de De Morgan:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c;$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c.$$

Definição 7. Uma classe de eventos aleatórios é um conjunto de eventos (ou subconjuntos) do espaço amostral que satisfaz:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
3. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para $n = 1, 2, 3, ...,$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Para o caso em que o espaço amostral é enumerável, podemos escrever Ω como $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots\}$ e sendo A em $\mathcal{F}$, então

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

em que $p(\omega_i)$ representa a probabilidade do evento simples, $p(\omega_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$.

Definição 8 (Definição clássica de probabilidade)**.** Seja um espaço amostral Ω com N resultados possíveis (chamados eventos simples), todos equiprováveis. Seja ainda A um evento com um total de m eventos simples. Então, a probabilidade de A, denotada $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

Definição 9 (Definição Frequentista de Probabilidade)**.** Seja A um evento aleatório relativo a um experimento aleatório. Suponhamos que este experimento é repetido n vezes nas mesmas condições. A probabilidade de A pode ser definida como

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = \lim_{n\to\infty} f_{n,A},$$

onde $f_{n,A}$ é denominada frequência relativa de A nas n repetições do experimento, onde $n(A)$ representa o número de repetições que o evento A associado a esse experimento ocorre após n repetições do experimento aleatório.

Observação: Intuitivamente, isso significa que se n é grande, $P(A) \simeq \frac{n(A)}{n}$.

Definição 10 (Definição axiomática)**.** Uma probabilidade é uma função P a valores reais definida em uma classe $\mathcal{F}$ de eventos de um espaço amostral Ω , que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Aditividade enumerável: para qualquer sequência A_1, A_2, ... $\in \mathcal{F}$ de dois eventos dois a dois disjuntos,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A tripla (Ω, $\mathcal{F}$, P) é chamada um *espaço de probabilidade.*

Definição 11. Sejam A e B eventos de Ω, espaço amostral. A e B são ditos *independentes* se e somente se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$;

Definição 12. Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uma função a valores reais definida em Ω , tal que

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

para todo $X \in \mathbb{R}$.

Na definição acima, $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ significa que $\{X \leq x\}$ é um evento aleatório.

Se os valores assumidos por X são finitos ou infinitos enumeráveis, então dizemos que X é uma variável aleatória discreta, mas se X assume valores num intervalo de números reais, então dizemos que X é uma variável aleatória contínua. Nesse trabalho focamos apenas em variáveis discretas.

Definição 13. A uma variável aleatória X está associado uma probabilidade P escrita $P(X = x)$ em que x representa o valor que a variável X assume e $P(X = x)$ é chamada distribuição de probabilidade.

Definição 14. Um vetor $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, onde cada X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, é uma variável aleatória, é chamado vetor aleatório. Em particular, se cada X_i é discreta, temos um vetor aleatório discreto.

Definição 15 (Variáveis aleatórias independentes)**.** As variáveis $X_1, \cdots X_n$ são independentes se, para qualquer conjunto $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$,

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Definição 16 (Distribuição Binomial)**.** Suponha um experimento composto de n repetições independentes, onde há somente dois resultados possíveis: sucesso e fracasso, com probabilidades respectivamente iguais a p e $1-p$. Seja X o número de sucessos nas n repetições. A variável aleatória X terá distribuição Binomial com parâmetros n e p. Notação: $X \sim binomial(n, p)$.

Definição 17 (Esperança)**.** A esperança matemática de uma variável aleatória discreta X que assume os valores x_i, com respectivas probabilidades $P(X = x_i)$, para i=1, 2, ..., n é dada por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i).$$

Definição 18. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ um vetor aleatório. A função

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \cdots, X_n = x_n)$$

é chamada função de probabilidade conjunta.

Definição 19 (Variância)**.** Seja X uma variável aleatório com média $E(X)$. Então, a variância de X, representada por $Var(X)$, é definida como sendo

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

Definição 20 (Grafos)**.** Um *grafo* é um par $G = (V, E)$ formado por um conjunto não-vazio V, cujos elementos são chamados *vértices*, e um conjunto E de *arestas*. Uma aresta é um par não ordenado (v_i, v_j), onde v_i e v_j são elementos de V.

Definição 21. O número de arestas incidentes a um vértice v_i é chamado *grau* do vértice i.

Definição 22. Uma *árvore* é um grafo onde, para qualquer par e vértices v_i e v_j existe um único caminho conectando v_i a v_j.

Definição 23 (Rede Bethe)**.** Uma árvore será chamada de rede bethe, quando existir um vértice denominado raiz, e cada vértice der origem a α descendentes na geração seguinte.

Definição 24 (Processo de Ramificação)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\{N_m^{(n)}\}_n$ ($N_m^{(n)}$ é o número de filhos do m-ésimo indivíduo da n-ésima geração). Agora defina $Z_0 = 1$ e indutivamente:

$$Z_n = N_1^{(n-1)} + N_2^{(n-1)} + \cdots + N_{Z_{n-1}}^{(n-1)}, \ para\ n \geq 1.$$

Z_n representa o tamanho total da população na n-ésima geração. O processo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é chamado **Processo de Ramificação**.

Definição 25 (Probabilidade de Extinção)**.** Seja $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um processo de ramificação.A probabilidade de extinção desse processo é a probabilidade π de que em algum momento finito não haja novos descendentes no processo. Isto é:

$$\pi = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}[Z_n = 0]\right).$$

3.2 Teoremas, Lemas e Proposições

Lema 3.2.1. Sejam A, B e C eventos do espaço amostral de um experimento aleatório, temos:

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$;
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Lema 3.2.2. Sejam os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ do espaço amostral, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right).$$

Teorema 3.2.3 (Teorema da Multiplicação)**.** Se $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ são eventos com $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Teorema 3.2.4 (Fórmula da Probabilidade Total)**.** Seja $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω em eventos de probabilidade positiva, isto é, esses eventos são dois a dois disjuntos, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ e $P(B_i) > 0$ para todo A_i. Então, para qualquer evento A,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i).$$

Teorema 3.2.5 (Continuidade da Probabilidade)**.** Se $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ existe, então

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Teorema 3.2.6. Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim binomial(n, p)$. Sua função de probabilidade será:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, ..., n.$$

Proposição 3.2.7. Seja X uma variável aleatória discreta. Então:

$$E(h(X)) = \sum_{x} h(x)P(X = x).$$

Proposição 3.2.8. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ um vetor aleatório. Então:

$$E(h(X_1, \cdots, X_n)) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \cdots, x_n) P(x_1, \cdots, x_n).$$

Proposição 3.2.9. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ um vetor aleatório. Então:

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Proposição 3.2.10. A variância da soma de variáveis aleatórias independentes é a soma das suas variâncias. Ou seja, para as variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, ..., X_n$, teremos:

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n).$$

Teorema 3.2.11. A média (ou esperança) $E(X)$ de uma distribuição $X \sim binomial(n, p)$ será dada por:

$$E(X) = np.$$

Lema 3.2.12. Seja X uma variável aleatória. Então:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Teorema 3.2.13 (Lema de Borel-Cantelli)**.** Seja $A_1, A_2, ...$ uma sequência de eventos em um espaço de probabilidade (Ω, F, P).
a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, então $P(A_n \; infinitas \; vezes) = 0$;
b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ e $A_1, A_2, \cdots$ são independentes, então $P(A_n \; infinitas \; vezes) = 1$.

Teorema 3.2.14. Seja $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um processo de ramificação tal que μ é o número médio de descendentes por indivíduos. Temos $E(Z_n) = \mu^n$.

Teorema 3.2.15. Seja $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um processo de ramificação tal que μ é o número médio de descendentes por indivíduo. Suponha que $P(Z_1 = 0) > 0$ e $P(Z_1 = 0) + P(Z_1 = 1) < 1$. Então:
a) π é o menor número positivo satisfazendo

$$z = \sum_{j=0}^{n} z^j \cdot P(Z_1 = j)$$

Ou seja, o menor número positivo satisfazendo $z = G_{Z_1}(z)$, onde $z = G_{Z_1}(z)$ é a função geradora de probabilidade de Z_1.
b) $\pi = 1$ se e somente se $\mu \leq 1$.

Teorema 3.2.16. Seja $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um processo de ramificação tal que μ é o número médio de descendentes por indivíduo. Se $\mu < 1$, então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Z_n) = \frac{1}{1-\mu}.$$

Teorema 3.2.17. Seja $f(x)$ uma função positiva não crescente para $N \leq x < \infty$. Temos:

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

Capítulo 4

ALGUNS MODELOS TEÓRICOS

Conforme dito anteriormente, percolação é o fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Assim, serão apresentadas duas situações envolvendo recipientes, dutos e fluidos.

4.1 Primeiro Modelo: Percolação Por Dutos em Série

Inicialmente, imaginemos $n+1$ recipientes, interligados por n dutos. Estes dutos podem estar abertos ou fechados e os recipientes encontram-se em série, conforme o esquema a seguir:

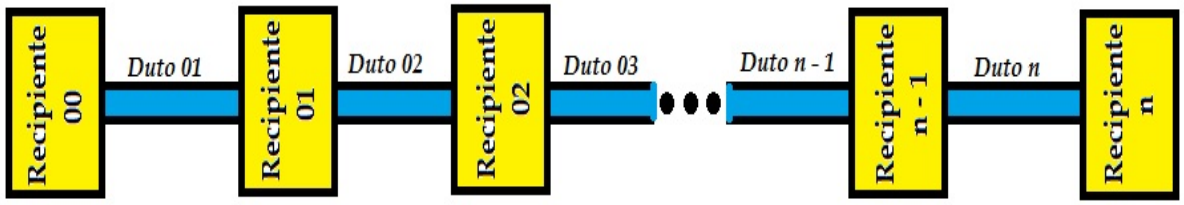

Figura 4.1: Modelo de recipientes interligados em série.

Cada duto d_i, $1 \leq i \leq n$, possui uma probabilidade p_i de estar ligado. Definam-se:

A_i :“ *i-ésimo duto está aberto*”

C_n : “ *número de dutos abertos*”

R_k : “ *o líquido chega ao recipiente k*”, com $k = 1, 2, 3, ..., n$

S_n : “*números de dutos por onde o líquido passa*”

Façamos ainda

$$I_i = \begin{cases} 1, \text{se o i-ésimo duto está aberto} \\ 0, \text{se o i-ésimo duto está fechado} \end{cases}.$$

Assim, podemos afirmar que

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Diante destas considerações, os seguintes Teoremas e Corolários podem ser enunciados:

Teorema 4.1.1. Sejam n+1 recipientes em série, interligados por n dutos, conforme a situação descrita acima. A probabilidade de termos k dutos abertos, com $k \neq 0$, poderá ser calculada pela fórmula

$$P(C_n = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} p_{i_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}}}^{n} (1 - p_j).$$

OBS: Para $k = 0$, teremos:

$$P(C_n = 0) = \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j).$$

Demonstração. Sabemos que k dutos devem ser escolhidos para estarem abertos, independente da ordem, e os demais $n - k$ dutos devem estar fechados. Assim,

$$\{C_n = k\} = \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \left\{ \left[\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right] \cap \left[\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}}}^{n} A_j^c \right] \right\}$$

Logo, queremos a probabilidade de que este fato ocorra. Ou seja:

$$P(C_n = k) = P\left(\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \left\{ \left[\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right] \cap \left[\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}}}^{n} A_j^c \right] \right\} \right)$$

Pelo Axioma 3 da Definição 10,

$$P(C_n = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}}}^{n} P(A_j^c)$$

$$P(C_n = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} p_{i_j} \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}}}^{n} (1 - p_j).$$

□

Corolário 4.1.2. Seja $p_i = p, \forall i$. Nesse caso, a probabilidade em questão será dada por:

$$P(C_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Na verdade, ao termos todos os dutos com a mesma probabilidade de estarem abertos, passamos a trabalhar com uma distribuição Binomial de parâmetros n e p.

Exemplo 1. Se $p_i = 1 - \frac{1}{i}$, teremos:

$$P(C_n = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{i_j}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}}}^{n} \frac{1}{j}$$

$$P(C_n = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{i_j}\right) \frac{\prod_{j=1}^{k} i_j}{n!}$$

Logo,

$$P(C_n = k) = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} (i_j - 1).$$

Teorema 4.1.3. Seja ainda a situação descrita no Teorema 4.1.1. Neste caso, a média e a variância de C_n serão dadas respectivamente por:

$$E(C_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j.$$

$$Var(C_n) = \sum_{j=1}^{n} \left[p_j (1 - p_j) \right].$$

Demonstração.

$$E(C_n) = E\left(\sum_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} E(I_j)$$

Como os possíveis valores para I_j são 0 ou 1, teremos:

$$E(I_j) = 0 \cdot (1 - p_j) + 1 \cdot p_j = p_j$$

Assim,

$$E(C_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j$$

Para encontrar a variância, temos que:

$$Var(C_n) = Var\left(\sum_{j=1}^{n} I_j\right)$$

Como as variáveis aleatórias são independentes, podemos escrever:

$$Var(C_n) = \sum_{j=1}^{n} Var(I_j)$$

No entanto,

$$Var(I_j) = E(I_j^2) - [E(I_j)]^2$$

$$E(I_j^2) = 0^2 \cdot P(I_j = 0) + 1^2 \cdot P(I_j = 1) \Rightarrow E(I_j^2) = p_j$$

$$Var(I_j) = p_j - p_j^2 = p_j \cdot (1 - p_j)$$

Logo,

$$Var(C_n) = \sum_{j=1}^{n} [p_j \cdot (1 - p_j)].$$

□

Corolário 4.1.4. Para $p_j = p$, teremos:

$$E(C_n) = \sum_{j=1}^{n} p = n \cdot p$$

$$Var(C_n) = \sum_{j=1}^{n} [p \cdot (1 - p)] = n \cdot p \cdot (1 - p).$$

Exemplo 2. Seja $p_j = 1 - \frac{1}{j}$. Neste caso, teremos:

$$E(C_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Pelo Teorema 3.2.17, teremos:

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \ln n.$$

Daí,

$$n - \ln n - 1 \leq n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq n - \ln n - \frac{1}{n}$$

Portanto,

$$n - \ln n - 1 \leq E(C_n) \leq n - \ln n - \frac{1}{n}.$$

Quanto à variância,

$$Var(C_n) = \sum_{j=1}^{n} \left[(1 - \frac{1}{j}) \cdot \frac{1}{j}\right] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{i}{j} - \frac{1}{j^2}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}.$$

Também pelo Teorema 3.2.17, teremos:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n-1} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$\ln n + \frac{2}{n} - 2 \leq Var(C_n) \leq lnn + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}.$$

Para n grande,

$$E(C_n) \approx n - \ln n.$$

$$Var(C_n) \approx \ln n.$$

Teorema 4.1.5. A probabilidade de que o líquido passe por exatamente k dutos será dada por:

$$P(S_n = k) = (1 - p_{k+1}) \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i, \qquad para \;\; k = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$P(S_n = n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

$$P(S_n = 0) = 1 - p_1$$

Demonstração. Para que o líquido passe por exatamente k dutos, com $k = 1, 2, \ldots, n-1$, é necessário que os *k-ésimos* primeiros dutos estejam abertos e o duto de posição $k+1$ esteja fechado, impedindo assim a passagem do líquido para os demais dutos. Ou seja:

$$(S_n = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap \left(A_{k+1}^c\right)$$

Assim,

$$P(S_n = k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap (A_{k+1}^c)\right)$$

$$P(S_n = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cdot P(A_{k+1}^c)$$

$$P(S_n = k) = (1 - p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i.$$

Para que o líquido não chegue a nenhum recipiente, é necessário que nenhum duto esteja aberto. Assim,

$$(S_n = 0) = A_1^c$$

$$P(S_n = 0) = P(A_1^c)$$

$$P(S_n = 0) = 1 - p_1$$

Agora, para que o líquido chegue ao n-ésimo recipiente, é necessário que todos os dutos estejam abertos. Assim

$$(S_n = n) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$P(S_n = n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$P(S_n = n) = \prod_{i-1}^{n} p_i.$$

□

Corolário 4.1.6. Para o caso $p_i = p$, podemos afirmar que:

$$P(S_n = k) = p^k(1-p), \qquad para\ k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1).$$

$$P(S_n = n) = p^n.$$

Exemplo 3. Seja $p_j = \frac{j}{j+1}$. Dessa maneira, podemos calcular $P(S_n = k)$ quando $k = 1, 2, \cdots, (n-1)$:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{k+2} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{i}{i+1} \right)$$

$$P(S_n = k) = \frac{1}{k+2} \cdot \frac{k!}{(k+1)!}$$

$$P(S_n = k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Quando $k = 0$, teremos:

$$P(S_n = 0) = 1 - \frac{1}{2}.$$

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{2}.$$

E, quando $k = n$, teremos:

$$P(S_n = n) \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$$

$$P(S_n = n) = \frac{1}{n+1}.$$

Teorema 4.1.7. A média e a variância de S_n serão, respectivamente:

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(k(1 - p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i \right) + n \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

$$Var(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k\,(1 - p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i \left[k + \sum_{j=1}^{n-1} j p_{j+1} \prod_{i=1}^{j} p_i - \sum_{j=1}^{n} j \prod_{i=1}^{j} p_i - n \prod_{i=1}^{n} p_i \right]$$
$$+ n^2 \prod_{i=1}^{n} p_i \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i \right].$$

Demonstração. Pela Definição 17, Temos que:

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} k P(S_n = k)$$

Separando o somatório, teremos:

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k(1 - p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i + n \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Para a variância, temos que:

$$E(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 P(S_n = k) + n^2 P(S_n = n)$$

$$E(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(1-p_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} p_i + n^2 \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Logo,

$$Var(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2 =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2(1-p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i + n^2 \prod_{i=1}^{n} p_i\right] - \left[\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i + n \prod_{i=1}^{n} p_i\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2(1-p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i + n^2 \prod_{i=1}^{n} p_i - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i\right)^2$$

$$-2n \prod_{i=1}^{n} p_i \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i - n^2 \prod_{i=1}^{n} p_i^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i \left[k - \sum_{j=1}^{n-1} j(1-p_{j+1}) \prod_{i=1}^{j} p_i - 2n \prod_{i=1}^{n} p_i\right] + n^2 \prod_{i=1}^{n} p_i \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i\right].$$

Logo,

$$Var(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k\,(1-p_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} p_i \left[k + \sum_{j=1}^{n-1} j p_{j+1} \prod_{i=1}^{j} p_i - \sum_{j=1}^{n} j \prod_{i=1}^{j} p_i - n \prod_{i=1}^{n} p_i\right]$$

$$+n^2 \prod_{i=1}^{n} p_i \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i\right].$$

□

Corolário 4.1.8. Para o caso onde $p_i = p$, teremos:

$$E(S_n) = \frac{p}{1-p}[1-p^n]$$

e

$$Var(S_n) = \frac{p + n(n-1)p^n - (2n+1)p^{n+1} + (2n+1)p^{n+2} - p^{2n+2}}{(1-p)^2}.$$

Demonstração. Temos que

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1}[k(1-p)p^k] + np^n$$

$$E(S_n) = (1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + np^n.$$

Retirando-se um fator p do somatório, teremos:

$$E(S_n) = (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n$$

Porém, $kp^{k-1} = (p^k)'$. Logo,

$$E(S_n) = (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1}(p^k)' + np^n.$$

$$E(S_n) = (1-p)p\left(\sum_{k=1}^{n-1}p^k\right)' + np^n$$

$$= (1-p)p\left(p\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right)' + np^n$$

$$= p\frac{[1+p^{n-1}(np-n-p)]}{1-p} + np^n.$$

Logo,

$$E(S_n) = \frac{p}{1-p}[1-p^n].$$

Para n grande, teremos,

$$E(S_n) \approx \frac{p}{1-p}.$$

Para a variância, façamos:

$$E(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1}k^2(1-p)p^k + n^2p^n$$

$$E(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k+k)(1-p)p^k + n^2p^n$$

$$E(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)(1-p)p^k + \sum_{k=1}^{n-1}k(1-p)p^k + n^2p^n$$

$$E(S_n^2) = (1-p)p^2\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)p^{k-2} + (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1} + n^2p^n$$

Porém $kp^{k-1} = (p^k)'$ e $k(k-1)p^{k-2} = (p^k)''$. Assim,

$$E(S_n^2) = (1-p)p^2\sum_{k=1}^{n-1}(p^k)'' + p(1-p)\sum_{k=1}^{n-1}(p^k)' + n^2p^n$$

$$E(S_n^2) = (1-p)p^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}(p^k)\right)'' + p(1-p)\left(\sum_{k=1}^{n-1}(p^k)\right)' + n^2p^n.$$

Sendo $E(S_n) = \frac{p}{1-p}(1-p^n)$, teremos:

$$Var(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2$$

$$Var(S_n) = (1-p)p^2\left(\sum_{k=1}^{n-1} p^k\right)'' + p(1-p)\left(\sum_{k=1}^{n-1} p^k\right)' + n^2p^n - \frac{p^2}{(1-p)^2}(1-p^n)^2.$$

Desenvolvendo tais cálculos, concluiremos que:

$$Var(S_n) = \frac{p + n(n-1)p^n - (2n+1)p^{n+1} + (2n+1)p^{n+2} - p^{2n+2}}{(1-p)^2}.$$

Podemos notar que, para n grande, teremos:

$$Var(S_n) \approx \frac{p}{(1-p)^2}.$$

□

Exemplo 4. Seja $p_j = \frac{j}{j+1}$. Assim, teremos:

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[k\left(1 - \frac{k+1}{k+2}\right)\prod_{i=1}^{k}\frac{i}{i+1}\right] + n\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{i+1}$$

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[k\frac{1}{k+1}\prod_{i=1}^{k}\frac{i}{i+1}\right] + n\frac{1}{n+1}$$

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k}{k+2}\frac{k!}{(k+1)!}\right] + n\frac{1}{n+1}$$

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)(k+2)} + \frac{n}{n+1}.$$

Pelo Teorema 3.2.17, teremos:

$$\ln\left[\frac{(n+2)^2}{n+1}\right] + \ln\frac{2}{9} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)(k+2)} \leq \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n}\right] + 1 + \ln\frac{2}{9}.$$

Assim,

$$\ln\left[\frac{(n+2)^2}{n+1}\right] + \frac{n}{n+1} + \ln\frac{2}{9} \leq E(S_n) \leq \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n}\right] + \frac{2n+1}{n+1} + \ln\frac{9e}{2}.$$

Para n grande, teremos:

$$E(S_n) \approx \ln n.$$

Quanto à variância, teremos:

$$Var(S_n) = \sum_{k=1}^{n-1}k^2\left(1 - \frac{(k+1)}{(k+2)}\right)\prod_{i=1}^{k}\frac{i}{i+1} + n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{i+1} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)(k+2)} + \frac{n}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{(k+2)(k+1)} + \frac{n^2}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)} \right)^2$$

$$- \frac{2n}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)} + \frac{n}{n+1} \right) - \frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k}{(k+1)(k+2)} \left(k - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{(j+2)(j+1)} - \frac{2n}{n+1} \right) \right] + \frac{n^3}{(n+1)^2}.$$

Teorema 4.1.9. A probabilidade de que o líquido chegue ao k-ésimo recipiente será dada por:

$$P(R_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i.$$

Demonstração. De fato, para que o líquido chegue ao k-ésimo recipiente, é necessário que os k primeiros dutos estejam abertos. Assim,

$$P(R_k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right)$$

$$P(R_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i.$$

□

Agora, imaginemos que tenhamos infinitos recipientes, interligados em série por infinitos dutos. Cada duto d_i, $1 \leq i \leq n$, com $n \to \infty$, possui uma probabilidade p_i de estar ligado. Defina-se:

C_∞ : *"número de dutos abertos quando temos infinitos dutos".*

S_∞ : *"número de dutos por onde o líquido passa quando temos infinitos dutos".*

Teorema 4.1.10. Para este caso, teremos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty \Rightarrow P(C_\infty = +\infty) = 1;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n < +\infty \Rightarrow P(C_\infty = +\infty) = 0.$$

Demonstração. Tomemos $A_n = \{I_n = 1\}$. Dessa forma, podemos escrever

$$P(C_\infty = +\infty) = P(\{I_n = 1\}\ infinitas\ vezes)$$

Ora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{I_n = 1\}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Pelo Lema de Borel Cantelli, podemos afirmar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty \Rightarrow P(\{I_n = 1\}\ infinitas\ vezes) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \Rightarrow P(\{I_n = 1\}\ infinitas\ vezes) = 1$$

□

Corolário 4.1.11. Seja $p_n = p$. Neste caso, teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p = +\infty \Rightarrow P(C_\infty = +\infty) = 1.$$

Exemplo 5. Seja $p_n = \frac{1}{n+1}$. Assim, teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty \Rightarrow P(C_\infty = +\infty) = 1.$$

Teorema 4.1.12. Para o caso descrito no Teorema 4.1.10, teremos:

$$P(S_\infty = j) = (1 - p_{j+1}) \prod_{i=1}^{j} p_i.$$

$$E(S_\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} j \left[\prod_{i=1}^{j} p_i (1 - p_{j+1}) \right].$$

Defin $R = \lim_{k\to\infty} R_k$. Temos $P(R) > 0$ se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_k) < \infty.$$

Demonstração. Temos que:

$$\{S_\infty = j\} = \left(\bigcap_{i=1}^{j} A_i\right) \cap A_{j+1}^c$$

$$P(S_\infty = j) = P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{j} A_i\right) \cap A_{j+1}^c\right]$$

$$P(S_\infty = j) = P(A_{j+1}^c)\prod_{i=1}^{j} P(A_i)$$

$$P(S_\infty = j) = (1 - p_{j+1})\prod_{i=1}^{j} p_i.$$

Quanto à média, teremos;

$$E(S_\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} jP(S_\infty = j) = E(S_\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} j\left[\prod_{i=1}^{j} p_i(1 - p_{j+1})\right].$$

Para a terceira afirmação, note que $R_{k+1} \subset R_k$ para todo k. Logo, $R_k \uparrow R$ e, pelo Teorema da Continuidade da probabilidade, temos;

$$P(R) = \lim_{k\to\infty} P(R_k).$$

Mas

$$R_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i,$$

donde

$$P(R_k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

Assim,

$$P(R) = \lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{k} p_i = \prod_{i=1}^{\infty} p_i = \prod_{i=1}^{\infty}[1 - (1 - p_i)].$$

O resultado segue por GRADSHTEYN e RYZHIK(2007, pag. 14). □

Corolário 4.1.13. Caso $p_i = p$, teremos:

$$P(S_\infty = j) = p^j(1 - p).$$

$$E(S_\infty) = \frac{p}{1 - p}.$$

$$P(R) = 0.$$

Exemplo 6. Para $p_j = \frac{j}{j+1}$, teremos:

$$P(S_\infty = j) = \left[1 - \frac{(j+1)}{(j+2)}\right] \prod_{i=1}^{j} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{(j+2)(j+1)}.$$

$$E(S_\infty) = \sum_{j=1} \infty P(S_\infty = j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{(j+2)(j+1)} = +\infty.$$

$$P(R) = 0, \quad pois \quad \sum_{j=1}^{\infty}(1-p_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{j}{j+1}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j+1} = +\infty$$

E, para $p_j = \frac{j(j+2)}{(j+1)^2}$, teremos:

$$P(S_\infty = j) = \left(1 - \frac{(j+1)(j+3)}{(j+2)^2}\right) \prod_{i=1}^{j} \frac{i(i+2)}{(i+1)^2} = \frac{1}{2(j+1)!}.$$

$$E(S_\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} j\frac{1}{2(j+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{(j+1)!}.$$

Segundo GRADSHTEYN e RYZHIK(2007, pag. 13), tem-se que;

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{(j+1)!} = 1.$$

portanto,

$$E(S_\infty) = \frac{1}{2}.$$

E, como

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-p_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[-\frac{j(j+2)}{(j+1)^2}\right] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^2} < \infty.$$

Portanto,

$$P(R) > 0.$$

4.2 Segundo Modelo: Percolação em Árvores

Seja a rede bethe uma árvore com todos os vértices tem grau $d+1$ exceto a raiz R_0, que possui grau d, descrita na figura abaixo.

1ª Situação: Cada vértice da árvore possui um recipiente, e cada aresta corresponde a um duto. Inicialmente, apenas o recipiente R_0 possui líquido.Quando o líquido chega a um recipiente, no próximo instante de tempo este passa para cada vizinho com probabilidade

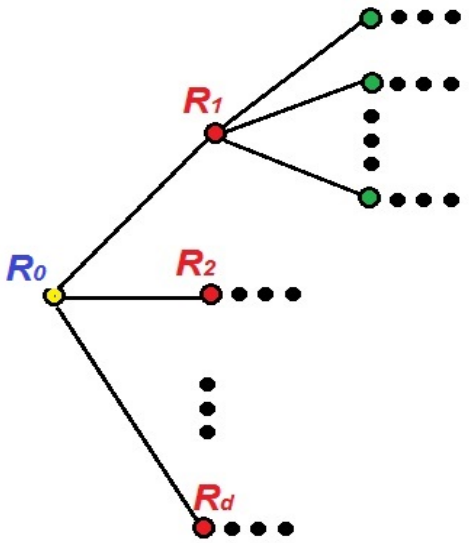

Figura 4.2: Modelo de Recipientes interligados em árvores.

p, independente dos demais. Dizemos que o processo sobrevive se em qualquer instante de tempo houver um recipiente recebendo líquido. Caso contrário, dizemos que o processo morre. Em outras palavras, o processo sobrevive quando infinitos recipientes recebem o líquido. Nessas circunstâncias, podemos enunciar os seguintes teoremas e corolários:

Teorema 4.2.1. O processo exibe transição de fase. Mais especificamente, se V é o evento onde o processo sobrevive, teremos:

$$P(V) = 0 \ \ se \ \ dp \leq 1 \ \ e \ \ P(V) > 0 \ \ se \ \ dp > 1$$

Demonstração. Seja N_{R_0} o número de recipientes que recebem o líquido de R_0, onde $N_{R_0} \in \{0, 1, 2, \cdots, d\}$. Temos que N_{R_0} é uma distribuição binomial com parâmetros d e p. Logo,

$$\mu = dp.$$

O resultado segue pelo Teorema 3.2.15. □

Teorema 4.2.2. A probabilidade π de extinção do processo será o menor valor não negativo de s que satisfaz a equação:

$$s = (sp + 1 - p)^d.$$

Demonstração. Calculando inicialmente $P(N_{R_0} = r)$, observamos que devemos escolher quantos r dutos para estarem abertos e $d-r$ dutos para estarem fechados. Ou seja, temos d ensaios de Bernoulli com probabilidade p de sucesso. Assim:

$$P(N_{R_0} = r) = \binom{r}{v} p^r (1-p)^{d-r}$$

Pelo Teorema 3.2.11 temos que a probabilidade de extinção π é o menor número não negativo satisfazendo

$$s = E[s^{N_{R_0}}]$$

Calculemos então $E[s^{N_{R_0}}]$.

$$\begin{aligned} E[s^{N_{R_0}}] &= \sum_{v=0}^{d} s^d P(N_{R_0} = v) \\ &= \sum_{v=0}^{d} s^d \binom{r}{v} p^r (1-p)^{d-r} \\ &= \sum_{v=0}^{d} \binom{r}{v} (sp)^v (1-p)^{d-v} \end{aligned}$$

$$E[s^{N_{R_0}}] = (sp + 1 - p)^d.$$

Logo,

$$s = (sp + 1 - p)^d.$$

□

Corolário 4.2.3. Para o caso onde $d = 2$, teremos:

$$\pi = \begin{cases} 1, & \text{se } p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^2, & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

O que pode ser observado na figura 4.3.

Demonstração. Como $d = 2$, teremos:

$$s = (sp + 1 - p)^2$$

Resolvendo a equação, encontraremos:

$$s = \frac{1 - 2p + 2p^2 \pm \mid 1 - 2p \mid}{2p^2}$$

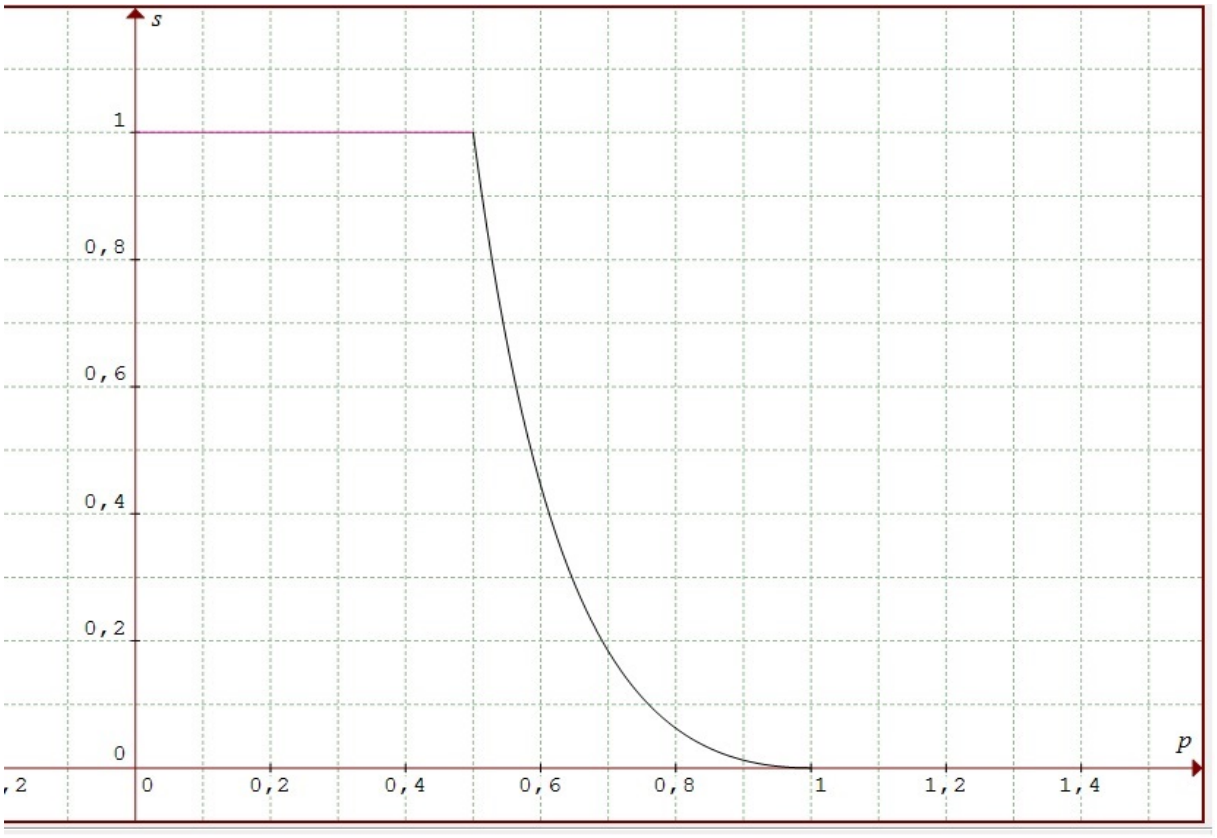

Figura 4.3: Gráfico da probabilidade de extinção em função de p para $d = 2$.

Portanto,

$$\pi = \begin{cases} 1, & \text{se } p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^2, & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

□

Outra demonstração:

Seja B_i o evento onde o líquido flui do recipiente da origem para o i-ésimo recipiente vizinho à origem e V o evento onde o processo não se extingue. Temos que:

$$P(V) = \sum_{i=0}^{d} P(B_i)P(V \mid B_i).$$

Sendo π a chance de extinção, teremos:

$$1 - \pi = P(V) = \sum_{i=0}^{d} P(N_{R_0} = i)P(V \mid \{N_{R_0} = i\}).$$

Podemos observar que:

$$P(V \mid N_{R_0} = 0) = 0$$

$$P(V \mid N_{R_0} = 1) = 1 - \pi$$

$$P(V \mid N_{R_0} = 2) = 1 - P(V^c \mid N_{R_0} = 2) = 1 - \pi^2$$

Analogamente, podemos afirmar que:

$$P(V \mid N_{R_0} = i) = 1 - \pi^i$$

Dessa forma,

$$1 - \pi = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} p^i (1-p)^{d-i} (1 - \pi^i).$$

Desenvolvendo esta equação, obteremos:

$$(p\pi + 1 - p)^d = \pi.$$

Conforme o encontrado com a primeira demonstração!

Teorema 4.2.4. Suponha que $dp < 1$. O número médio de recipientes que recebem o líquido $E(Z_n)$ e o número médio de recipientes no processo todo serão:

$$E(Z_n) = (dp)^n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Z_n) = \frac{1}{1 - dp}.$$

Demonstração. Temos que N_{R_0} é uma distribuição binomial com d repetições com probabilidade p de sucesso em cada. Assim,

$$\mu = dp.$$

Pelo Teorema 3.2.10, teremos,

$$E(Z_n) = (dp)^n$$

e, pelo Teorema 3.2.12, podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Z_n) = \frac{1}{1 - dp}$$

□

2ª Situação: Considere agora a situação onde cada vértice da árvore possui um recipiente, e cada aresta corresponde a um duto. Inicialmente, apenas o recipiente R_0 possui líquido. Diferente da primeira situação, suponha que quando um líquido chega a um

recipiente, no próximo instante de tempo há apenas duas possibilidades: o líquido é repassado para todos os recipientes vizinhos com probabilidade p ou não é repassado para nenhum, com probabilidade $1-p$. Dizemos que o processo sobrevive se em qualquer instante de tempo houver um recipiente recebendo líquido. Caso contrário, dizemos que o processo morre. Em outras palavras, o processo sobrevive quando infinitos recipientes recebem o líquido. Nesta situação, os seguintes teoremas e corolários podem ser enunciados:

Teorema 4.2.5. O processo exibe transição de fase. Mais especificamente, se V é o evento onde o processo sobrevive, teremos:

$$P(V) = 0 \ \ se \ \ dp \leq 1 \ \ e \ \ P(V) > 0 \ \ se \ \ dp > 1.$$

Demonstração. Note que para este caso

$$P(N_{R_0} = d) = p = 1 - P(N_{R_0} = 0).$$

Logo,

$$\mu = dp.$$

O resultado segue pelo Teorema 3.2.15. □

Teorema 4.2.6. A probabilidade π de extinção do processo será o menor valor não negativo de s que satisfaz a equação

$$ps^d - s + 1 - p = 0.$$

Demonstração. Temos que:

$$E[s^{N_{R_0}}] = s^0 \cdot P(N_{R_0} = 0) + s^d \cdot P(N_{R_0} = d)$$

$$E[s^{N_{R_0}}] = (1-p) + s^d p$$

Dessa forma, π será o menor número que irá satisfazer a equação

$$ps^d - s + 1 - p = 0.$$

□

Corolário 4.2.7. Para o caso onde $d = 2$, teremos:

$$\pi = \begin{cases} 1, & \text{se } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p}, & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

O que pode ser observado na figura 4.4.

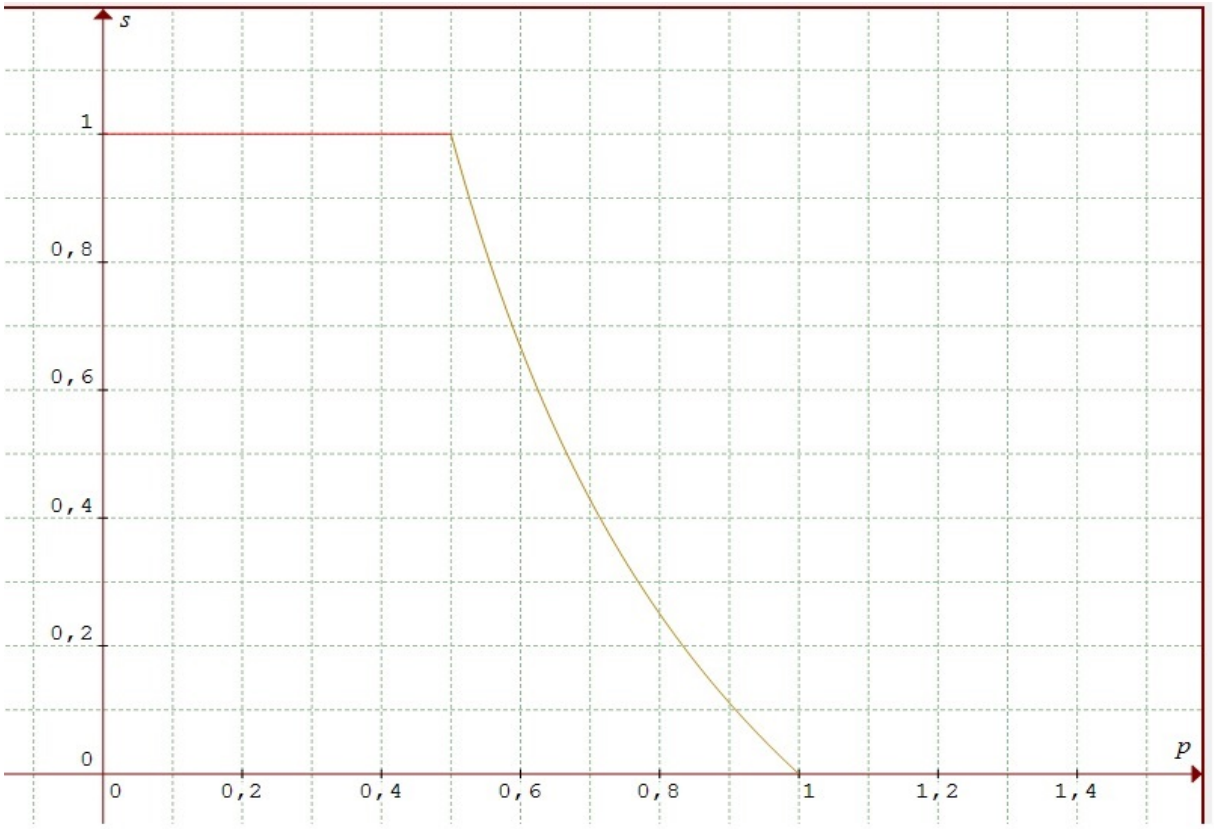

Figura 4.4: Gráfico da probabilidade de extinção em função de p para $d = 2$.

Demonstração. Temos que d=2. Assim,

$$ps^2 - s + 1 - p = 0$$

Resolvendo a equação, encontraremos:

$$s = \frac{1 \pm \mid 1 - 2p \mid}{2p}.$$

Portanto,

$$\pi = \begin{cases} 1, & \text{se } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p}, & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

□

Outra demonstração:

Seja V o evento onde o processo não se extingue e A o evento onde o líquido do recipiente da origem flui para os vizinhos. Assim, temos que:

$$P(V) = P(A^c)P(V \mid A^c) + P(A)P(V \mid A)$$

Podemos observar que

$$P(V \mid A^c) = 0$$

e

$$P(V \mid A) = 1 - P(V^c \mid A)$$

$$P(V \mid A) = 1 - \pi^d.$$

Logo,

$$1 - \pi = (1 - p) \cdot 0 + p \cdot (1 - \pi^d)$$

$$p\pi^d - \pi + 1 - p = 0.$$

Conforme encontrado na primeira resolução!

Teorema 4.2.8. O número médio de recipientes que recebem o líquido, $E(Z_n)$, e número médio de recipientes no processo todo serão:

$$E(Z_n) = (dp)^n$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Z_n) = \frac{1}{1 - dp}.$$

Demonstração. Temos que:

$$\mu = E(N_{R_0}) = 0 \cdot (1 - p) + dp = dp.$$

Logo,

$$E(Z_n) = (dp)^n.$$

Pelo Teorema 3.2.10, teremos,

$$E(Z_n) = (dp)^n.$$

E, pelo Teorema 3.2.12, podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Z_n) = \frac{1}{1 - dp}.$$

□

Capítulo 5

APLICAÇÕES DA TEORIA DE PERCOLAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Neste momento, apresentaremos duas propostas de aplicação da teoria de percolação que estão presentes no cotidiano de nossos alunos: circuitos elétricos e a conhecida brincadeira do "telefone sem fio".

5.1 Circuitos Elétricos

Circuitos elétricos são os caminhos para a transmissão elétrica, isto é, para transportar eletricidade na forma de corrente elétrica. Para isso, a seguinte aula foi planejada:

PÚBLICO-ALVO

Alunos da segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para a conclusão da atividades, será necessária uma hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar familiarizado com os termos de probabilidade e combinatória, bem como os teoremas da multiplicação e da união.

OBJETIVOS

Aplicar o teorema da multiplicação em um problema simples, com interdisciplinaridade com a física.

CONTEÚDOS

Probabilidade e transporte de corrente elétrica.

METODOLOGIA

Serão propostas duas situações envolvendo circuitos elétricos.

1ª situação: Seja o circuito abaixo, onde C_1 e C_2 são componentes eletrônicos idênticos cuja probabilidade da corrente elétrica perpassar cada um é p, com $0 \leq p \leq 1$.

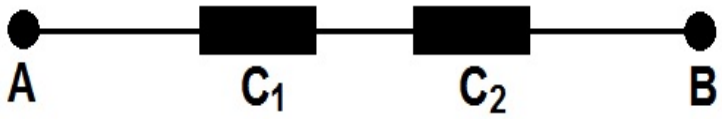

Figura 5.1: Circuito em série

Qual a probabilidade da corrente elétrica sair de A e chegar a B?

Esse tipo de associação de componentes é chamado de associação em série. Sendo assim, caso o componente C_1 falhe e a corrente não passe, esta não chegará a C_2, tampouco a B. Espera-se que os alunos observem a necessidade de que a corrente passe por C_1 e C_2. Sendo assim, pelo teorema da multiplicação, e definindo $P(C_1)$: probabilidade da corrente passar por C_1 e $P(C_2)$: probabilidade da corrente passar por C_2, teremos:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2 \mid C_1) = p \cdot p = p^2$$

2ª situação: Seja o circuito abaixo, onde C_1, C_2 e C_3 são componentes eletrônicos idênticos cuja probabilidade da corrente elétrica perpassar cada um é p, com $0 \leq p \leq 1$.

Qual a probabilidade da corrente elétrica sair de A e chegar a B?

Esse tipo de associação é chamado de associação em paralelo. Aqui, a corrente tem duas "opções" de caminho a seguir: **ou** ela passa pelos componente C_1 e C_2 **ou**

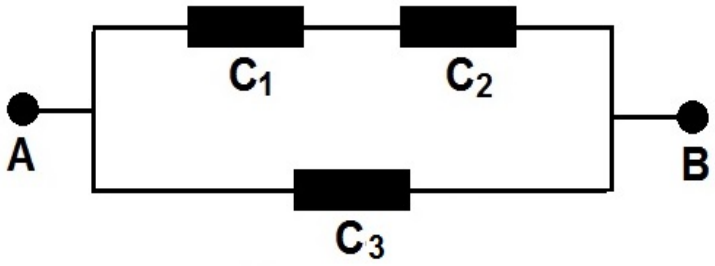

Figura 5.2: Circuito em paralelo

ela passa por C_3, podendo ainda passar por todos ao mesmo tempo. Espera-se que os alunos consigam observar a necessidade do cálculo da probabilidade da união de dois eventos. Assim, para que a corrente parta de A e chegue a B, devemos calcular a seguinte probabilidade:

$$P[(C_1 \cap C_2) \cup C_3] = P(C_1 \cap C_2) + P(C_3) - P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = p^2 + p - p \cdot 3$$

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Quadro e giz.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua participação e empenho durante as atividades propostas e discussão de resultados.

5.2 Transporte de Informação: Telefone Sem Fio

A conhecida brincadeira do "Telefone sem fio" compete em dispor algumas pessoas em fila ou círculo. A primeira pessoa diz uma frase ao próximo da fila, sem repetir e sem que os demais escutem. A pessoa que ouviu a frase deve transmiti-la ao próximo da mesma forma, e assim sucessivamente, até chegar à última pessoa. Esta diz a frase em voz alta e verifica-se se há discrepância entre a frase original e a frase dita ao final. Tomando como referência esta brincadeira, a seguinte aula foi planejada:

PÚBLICO-ALVO

Alunos da segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade serão necessárias 3 horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar familiarizado com os termos de probabilidade e combinatória, bem como os teoremas da multiplicação e da união.

OBJETIVOS

- Aplicar o teorema da multiplicação em um problema simples.
- Compreender a ligação entre a brincadeira e a teoria da percolação utilizada no transporte de informações.

CONTEÚDOS

- Teorema da multiplicação.
- Percolação e transporte de informação.

METODOLOGIA

Serão propostas quatro situações envolvendo a brincadeira de telefone sem fio:

1ª situação: Os alunos serão dispostos em fila, passaremos uma informação à primeira pessoa e esta deverá repassá-la, conforme a brincadeira, até a última pessoa na fila. Ou seja, inicialmente colocaremos os alunos para "brincar". Em seguida, será proposta a seguinte situação problema:

Oito pessoas estão dispostas em fila. Sabe-se que a probabilidade da informação ser repassada corretamente ao próximo da fila é constante e igual a $p, 0 \leq p \leq 1$. *Qual a probabilidade da informação partir da primeira pessoa e chegar à última corretamente?*

Para resolver tal situação, proporemos o seguinte esquema:

Seja $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 8$, onde n representa a posição ocupada pela pessoa na fila. Defina-se:

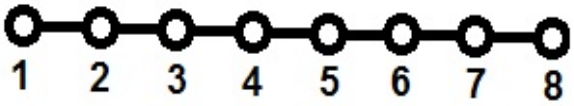

Figura 5.3: Organização em fila para o telefone sem-fio.

A_n: a informação chega corretamente à pessoa na posição n.

Assim, temos que calcular a probabilidade da informação partir de $n = 1$ e chegar em $n = 8$. Provavelmente, um erro comum será o fato dos alunos simplesmente multiplicarem as probabilidades, cabendo ao professor realizar a interferência, chamando a atenção para o fato dos eventos não serem independentes, ou seja, a pessoa na posição 2, por exemplo, só poderá transmitir a informação corretamente para a pessoa na posição 3 se tiver recebido da pessoa 1 corretamente. Cabe aqui, então, a aplicação do teorema da multiplicação, pois queremos saber

$$P\left(\bigcap_{i=2}^{8} A_i\right).$$

Assim, de acordo com esse teorema,

$$P\left(\bigcap_{i=2}^{8} A_i\right) = P(A_2)\cdot P(A_3 \mid A_2)\cdot P(A_4 \mid A_2 \cap A_3)\cdot \ldots \cdot P(A_8 \mid A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7)$$

Como cada uma das probabilidades acima vale p, obtemos:

$$P\left(\bigcap_{i=2}^{8} A_i\right) = p^7$$

Aqui, podemos generalizar o problema, perguntando aos alunos qual seria a probabilidade de, com n pessoas dispostas em fila, a última pessoa receber a informação corretamente. Espera-se que os alunos possam concluir que:

$$P\left(\bigcap_{i=2}^{n} A_i\right) = p^{n-1}$$

2ª situação: Agora iremos supor que estas oito pessoas estejam dispostas em círculo, conforme a figura abaixo:

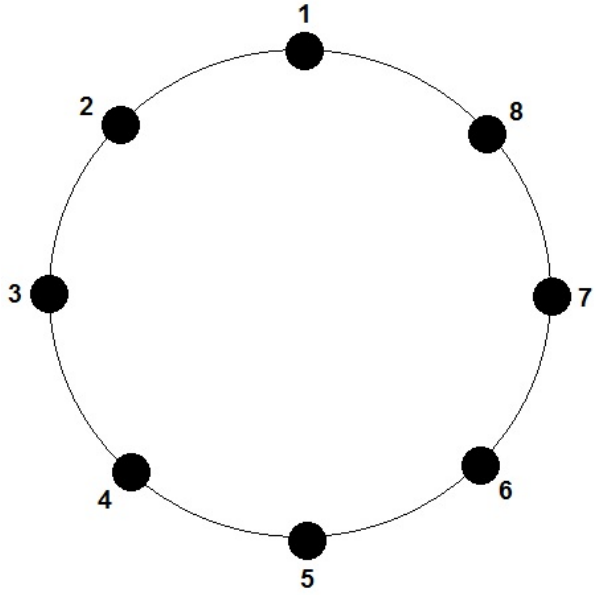

Figura 5.4: Organização circular para o telefone sem-fio

Seguindo as mesmas regras da primeira situação, qual a probabilidade da pessoa na posição 1 receber a informação corretamente ao final de uma volta?

Utilizando como ponto de partida os resultados da primeira situação, poderemos concluir que:
1º: A informação deve chegar corretamente à pessoa na posição 8.
2º: A pessoa na posição 8 deve passar corretamente a informação à pessoa na posição 1.

Assim, a probabilidade solicitada será:

$$P\left(\bigcap_{i=2}^{8} A_i\right) \cdot P(A_1) = p^7 \cdot p = p^8$$

Novamente, podemos propor aos alunos uma generalização para n pessoas dispostas em círculo, que facilmente pode ser calculada por:

$$P\left(\bigcap_{i=2}^{n}\right) \cdot P(A_1) = p^{n-1} \cdot p = p^n$$

3ª situação: Agora iremos supor que estas oito pessoas estejam ainda dispostas em círculo, porém a informação partirá da pessoa na primeira posição e poderá ser repassada tanto para a pessoa que está à direita quanto a pessoa que está à esquerda. Dessa maneira, lançamos o seguinte problema:

Qual a probabilidade da pessoa na quinta posição receber a informação corretamente?

Para satisfazer o proposto no enunciado, temos dois "caminhos" que podem ser percorridos pela informação:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$$

ou

$$1 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5.$$

Defina:

A_i : pessoa na i-ésima distância à direita de 1 recebe a informação corretamente no sentido anti-horário.

B_j : pessoa na j-ésima distância à esquerda de 1 recebe a informação corretamente no sentido horário.

C_k : pessoa na k-ésima distância de 1, sendo $k = min[i, j]$ recebe a informação corretamente independente do sentido.

Podemos observar que a pessoa que está na posição 5 está a exatas quatro posições da pessoa na posição 1, tanto para a direita quanto para a esquerda. Como a informação pode percorrer o sentido horário ou anti-horário, pela probabilidade da união de dois eventos, a probabilidade solicitada será:

$$\begin{aligned} P(C_4) = P(A_4 \cup B_4) &= P(A_4) + P(B_4) - P(A_4 \cap B_4) \\ &= p^4 + p^4 - p^4 \cdot p^4 \\ &= 2p^4 - p^8. \end{aligned}$$

4ª situação: *Tomando como referência as regras da terceira situação, em qual posição é mais provável a pessoa receber a informação corretamente?*

Intuitivamente, quanto mais próxima a pessoa estiver da fonte de informação, mais provável será receber corretamente. Mas, como demonstrar?

Basicamente, para confirmar nossa intuição, devemos mostrar que:

$$P(C_4) \leq P(C_3) \leq P(C_2) \leq P(C_1).$$

Ora, para a pessoa na posição 2 teremos $i = 1, j = 7$ e $k = 1$ e para a pessoa na posição 8 teremos $i = 7, j = 1$ e $k = 1$. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} P(C_1) &= P(A_1 \cup B_7) = P(A_7 \cup B_1) \\ &= P(A_1) + P(B_7) - P(A_1 \cap B_7) \\ &= p + p^7 - p^8. \end{aligned}$$

Para a pessoa na posição 3 ou 7, teremos, com raciocínio análogo ao anterior:

$$\begin{aligned} P(C_2) &= P(A_2 \cup B_6) \\ &= P(A_2) + P(B_6) - P(A_2 \cap B_6) \\ &= p^2 + p^6 - p^8. \end{aligned}$$

Analogamente, para a pessoa nas posições 4 ou 6, teremos:

$$\begin{aligned} P(C_3) &= P(A_3 \cup B_5) \\ &= P(A_3) + P(B_5) - P(A_3 \cap B_5) \\ &= p^3 + p^5 - p^8. \end{aligned}$$

Para comprovarmos nossa ideia intuitiva, inicialmente mostraremos que $P(C_4) \leq P(C_3)$. Ora,

$$P(C_4) \leq P(C_3) \Leftrightarrow 2p^4 - p^8 \leq p^3 + p^5 - p^8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^4 + p^4 - p^3 - p^5 \leq 0 \Leftrightarrow p^3(p + p - 1 - p^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$p^3(p - 1 + p - p^2) \leq 0 \Leftrightarrow p^3[1 \cdot (p - 1) - p(p - 1)] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^3(p-1)(1-p) \leq 0.$$

Como $0 \leq p \leq 1$, teremos:

$$p^3 \geq 0$$

$$(p-1) \leq 0$$

$$(1-p) \geq 0$$

Assim,

$$p^3 \cdot (p-1) \cdot (1-p) \leq 0$$

Ou seja,

$$P(C_4) \leq P(C_3) \qquad (1)$$

Analogamente, queremos mostrar que $P(C_3) \leq P(C_2)$. Ora,

$$P(C_3) \leq P(C_2) \Leftrightarrow p^3 + p^5 - p^8 \leq p^2 + p^6 - p^8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^3 - p^2 + p^5 - p^6 \leq 0 \Leftrightarrow p^2(p-1+p^3-p^4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$p^2[-1 \cdot (1-p) + p^3(1-p)] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$p^2(1-p)(p^3-1) \leq 0.$$

Como $0 \leq p \leq 1$, teremos:

$$p^2 \geq 0$$

$$(1-p) \geq 0$$

$$(p^3-1) \leq 0.$$

Assim,

$$p^2(1-p)(p^3-1) \leq 0.$$

Ou seja,

$$P(C_3) \leq (PC_2) \qquad (2)$$

Por fim, resta mostrar que $P(C_2) \leq P(C_1)$. Ora,

$$P(C_2) \leq P(C_1) \Leftrightarrow p^2 + p^6 - p^8 \leq p + p^7 - p^8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 - p + p^6 - p^7 \leq 0 \Leftrightarrow p(p-1) - p^6(p-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(1-p^5)(p-1) \leq 0.$$

Como $0 \leq p \leq 1$, teremos:

$$p \geq 0$$

$$(1-p^5) \geq 0$$

$$(p-1) \leq 0.$$

Assim,

$$p(1-p^5)(p-1) \leq 0$$

Ou seja,

$$P(C_2) \leq P(C_1) \qquad (3)$$

Por $(1), (2)$ *e* (3) e pela transitividade, podemos concluir que:

$$P(C_4) \leq P(C_3) \leq P(C_2) \leq (PC_1).$$

Ou seja, nossa intuição estava correta, afinal, quanto mais perto a pessoa estiver da origem da informação, maior a probabilidade de recebê-la corretamente.

Também podemos analisar qual a maior probabilidade por meio de interpretação gráfica, com a probabilidade em função de p, ou seja, $P(C_k) = f(p)$, com $0 \leq p \leq 1$. Como até o segundo ano do Ensino Médio os alunos estudaram apenas gráficos de funções polinomiais de primeiro e segundo grau, podemos utilizar como ferramente para esta construção o software graphmatica, que auxilia na construção de gráficos, obtendo o gráfico da figura 5.5.

Pelo gráfico, podemos observar que para qualquer que seja o valor de $p, 0 \leq p \leq 1$, teremos

$$P(C_4) \leq P(C_3) \leq P(_2) \leq P(C_1)$$

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Quadro, giz, computador com o graphmatica e data-show.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua participação e empenho durante as atividades propostas e discussão de resultados.

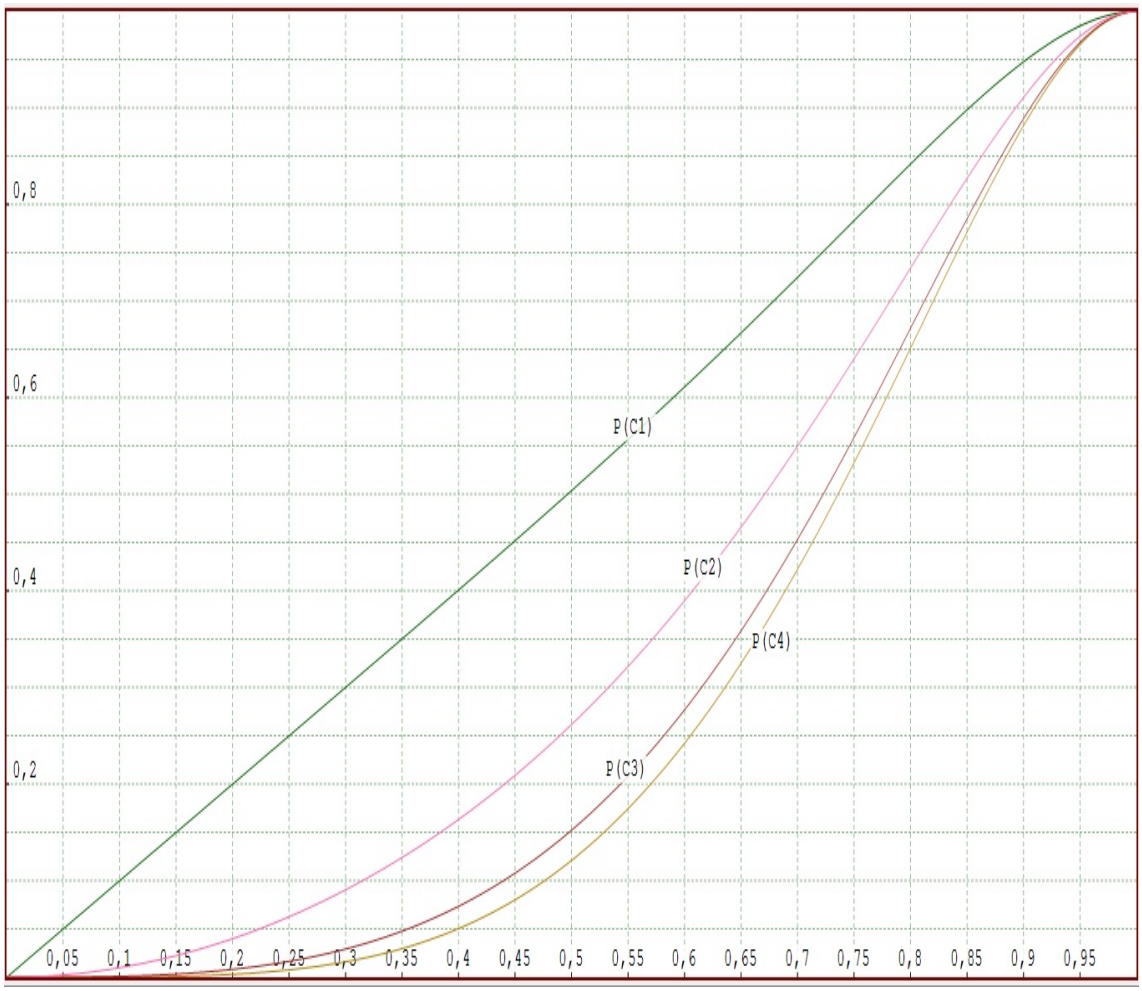

Figura 5.5: Gráfico comparativo das probabilidades.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É fato a amplitude do campo de trabalho envolvendo probabilidade. No entanto, a maneira como este conteúdo é ministrado na sala de aula ainda é regada a fórmulas sem sentido para os alunos e problemas desconexos com sua realidade.

Nesse sentido, este trabalho analisou o histórico e o panorama atual da probabilidade no Ensino Básico, mostrando que, apesar dos recentes avanços, ainda é necessária uma melhoria no que tange este conteúdo, uma vez que boa parte dos alunos saem do Ensino Médio apenas decorando as fórmulas, e não as compreendendo, como seria a expectativa.

Auxiliando nessa melhoria, foi sugerido a utilização de alguns modelos de percolação aplicados ao Ensino básico, com o intuito de auxiliar os alunos na melhor compreensão dos conteúdos de probabilidade. Para tanto, demonstrou-se diversas possibilidades de aplicação desta teoria, que está presente desde o controle de fogos florestais até a análise da tecnologia utilizada em celulares.

Os modelos básicos apresentados no quarto capítulo demonstram como problemas cotidianos podem ser solucionados com o suporte da teoria de percolação. No entanto, seus cálculos necessitam de um conhecimento a nível de graduação daqueles que os desenvolvem. Já no quinto capítulo, foi possível observar como a adaptação desta teoria poderia ser feita para ser trabalhada com alunos do Ensino Médio.

Apesar da aplicação das aulas não ter ocorrido, acreditamos em sua eficácia, uma vez que partimos de uma brincadeira e de algo estudado na física, proporcionando interdisciplinaridade e despertando no aluno maior interesse.

Vale aqui ressaltar que qualquer conteúdo que é simplesmente "jogado" no quadro-negro, sem que haja uma contextualização e possíveis aplicações, se torna desinteressante e desagradável aos olhos dos alunos. Caberá sempre ao professor se responsabilizar por tornar o aprendizado agradável e significante para seu aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEEL. *Procedimentos de Distribuição* - PRODIST 2008, Módulo 2. 2008. Disponível em < http://www.aneel.gov.br/visualizar_texto.cfm?id txt=1865/> Acesso em 20/04/2012

APOLINÁRIO, D. D.; FRANCO, E. M.; MELO, J. D.. *Aplicações da Teoria da Percolação na modelagem do crescimento de cargas em sistemas de Distribuição de Energia Elétrica.*. In: Congresso Brasileiro de Automática, XIX, Anais, Campina Grande, 2012, 2342-2348. Disponível em <http://www.eletrica.ufpr.br/anais/cba/2012/Artigos/100104.pdf>. Acesso em 11/03/2015.

BARROSO, et al. *Modelos de Percolação e Fogos Florestais.* 2010. Centro de Física Teórica e computacional. disponível em <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo 5/modulo6/topico1.php>. Acesso em 02/04/2015.

BOYER, Carl B.. *História da Matemática.* Tradução Elza F. Gomide, 2ª ed. São Paulo: Blücher / Edusp, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática. Brasília: MEC, 1998. 148p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 10/02/2015.

P. FEOFILOFF; Y. KOHAYAKAWA; Y. WAKABAYASHI.. *Uma introdução Sucinta à Teoria dos Grafos.* USP. 2001. Disponível em <http://www.ime.usp.br/pf/teoriadosgrafos/. Acesso em: 04/03/2015.

FERREIRA, A. B. H.. *Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.* Disponível em <http://www.dicionariodoaurelio.com/probabilidade>. Acesso em 01/10/2015.

FERREIRA, S. F. P. *Influência do Excesso de Atraso do Canal na Taxa de Transmissão para o Planejamento de Sistemas Celulares.* 2010. Disponível em <http://www.iecom.org.

br/dissertacoes_teses/Sergio_Ferraz.pdf>. Acesso em: 30/03/2015.

FOGAÇA, L. B. V. et al. *Comportamento da Percolação de poluentes hidrocarbonetos em função da textura do solo.* 2014. Disponível em <http://www.ibeas.org.br/congresso/Trabalhos2014/XI-024.pdf>. Acesso em 27/03/2015.

FONTES, L. R. G.. *Notas em Percolação.* IME, 1996. Disponível em <www.ime.usp.br/∼lrenato/per.pdf

GARDNER R. H. et al. *Neutral Models for the analysis of broad-scale landscape pattern.* 1987. Disponível am <http://landscape.zoology.wisc.edu/people/Turner/Gardner1987NLM.pdf>. Acesso em 05/04/2015.

GRADSHTEYN, I. S.;RYZHIK, I. M.. *Table of Integrals, Series and Products.* Academic Press, 2007.

JÚNIOR, V. V.; MACHADO, F. P.; ZULUAGA, M.. *Rumor processes on N.* 2010. Disponível em <http://arxiv.org/pdf/1011.0355v1.pdf>. Acesso em 20/05/2015.

JUNQUEIRA, V.. *Percolação e Caracterização Elétrica em Tintas Condutoras.* UFI: Itajubá, 2012. Disponível em <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7b83343D08-C505-4C85-8E33-DB0175C307EB%7d_Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Completa.pdf>. Acesso em 01/04/2015.

LEBENSZTAYN, E. *O modelo de percolação em grafos: Um estudo de condições para transição de fases.* 2002. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45133/tde-05052013-214912/pt-br.php>. Acesso em 01/04/2015.

LEBENSZTAYN, E. *Exercícios de probabilidade.* 2012. Disponível em <http://www.ime.usp.br/ fmachado/MAE221/LivroElcio.pdf>. Acesso em 15/02/2025.

LIMA, F. M. B.. *O ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos.* São Carlos, 2013. Disponível em <http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=6303>. Acesso em 10/02/2015.

MICHEL, N. F.; ZARA, R.A.. *Percolação e Estratégias de Ataque em Redes de Escala Livre.* 2004. Disponível em <http://www.ufrgs.br/niee/eventos/CBCOMP/2004/html/pdf

/Redes_Computadores/t170100056_3.pdf>. Acesso em: 10/04/2015.

NASCIMENTO, J. R. A.. *O Poker como ferramenta de ensino da Matemática na Educação Básica.* UFRP: Recife, 2014. Disponível em <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1410/2012_01215_JOSE_ROBERTO_AMARAL_ NASCIMENTO.pdf?sequence=1>. Acesso em 03/04/2015.

REULE, D. S. *A dinâmica dos rumores na rede : a web como espaço de propagação de boatos virtuais.* 2008. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/13796>. Acesso em: 14/04/2015.

REZENDE, F. M. C.; FERREIRA, A. C.. *O Ensino de Probabilidade na Educação Básica:* Análise da Produção de um Grupo de Estudos de Professores de Matemática. In: EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 1, 2011. Campina Grande, PB. Anais... Campina Grande: 2011. Disponível em <http://www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/a77e1c267041245bcce8d35e03a8c39a.pdf>. Acesso em 21/03/2015.

SILVA, A. F. L.. *O enfoque histórico no Ensino de Probabilidades no Ensino Médio.* Revista Ciências & Idéais, N. 2. Volume 1. 2010.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.. *Ler, Escrever e Resolver Problemas.* Porto Alegre: ARTMED, 2002.

SOARES, R. F.. *Fractais e Percolação na Recuperação de Petróleo.* 2007.. Disponível em < http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16551/1/RooseweltFS.pdf>. Acesso em 22/03/2015.

SOUZA, D. R.. *Transições de fase em modelos estocásticos para descrever epidemias.* 2012. Disponível em < http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-26032013-131452/pt-br.php>. Acesso em 13/03/2015.

STOVER, C. *Oriented Percolation Model.* 1999. Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/OrientedPercolationModel.html>. Acesso em: 04/04/2015.

ZARA, R. A.. *Novas formas de percolação.* Tese de Doutorado, Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2000. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/

disponiveis/76/76131/tde-19092008-095318/pt-br.php>. Acesso em 10/02/2015.