UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DIOGO GETULIO FREIRE

DOS SIGNIFICADOS DA ÁLGEBRA À ÁLGEBRA DOS SIGNIFICADOS: UMA IMERSÃO NO ETHOS FORMATIVO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

GOIÂNIA
2021

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
GERÊNCIA DE CURSOS E PROGRAMAS INTERDISCIPLINARES

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

DIOGO GETULIO FREIRE

3. Título do trabalho

DOS SIGNIFICADOS DA ÁLGEBRA À ÁLGEBRA DOS SIGNIFICADOS: UMA IMERSÃO NO ETHOS FORMATIVO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Jose Pedro Machado Ribeiro**, **Professor do Magistério Superior**, em 18/08/2021, às 12:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **DIOGO GETÚLIO FREIRE**, **Discente**, em 18/08/2021, às 18:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de

8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2244912** e o código CRC **026061DF**.

Referência: Processo nº 23070.012302/2021-35 SEI nº 2244912

DIOGO GETULIO FREIRE

DOS SIGNIFICADOS DA ÁLGEBRA À ÁLGEBRA DOS SIGNIFICADOS: UMA IMERSÃO NO ETHOS FORMATIVO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado Submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática, eixo de pesquisa Ensino e Aprendizagem de ciências e Matemática e área de concentração Qualificação de Professores de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Pedro Machado Ribeiro

GOIÂNIA
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Freire, Diogo Getulio
DOS SIGNIFICADOS DA ÁLGEBRA À ÁLGEBRA DOS SIGNIFICADOS [manuscrito] : UMA IMERSÃO NO ETHOS FORMATIVO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA / Diogo Getulio Freire. - 2021.
CXXIV, 124 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Jose Pedro Machado Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Pró reitoria de Pós-graduação (PRPG), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Goiânia, 2021.
Bibliografia. Anexos.
Inclui siglas, símbolos, tabelas.

1. Educação em Ciências e Matemática. 2. Formação de Professores de Matemática. 3. Álgebra. I. Ribeiro, Jose Pedro Machado , orient. II. Título.

CDU 51:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

GERÊNCIA DE CURSOS E PROGRAMAS INTERDISCIPLINARES

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata da sessão de Defesa de Dissertação de DIOGO GETULIO FREIRE, que confere o título de Mestre(a) em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, na área de concentração em **Qualificação de Professores de Ciências e Matemática**.

Ao/s **26 dias do mês de março de 2021**, a partir da(s) **14:00**, por videoconferêcia, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "DOS SIGNIFICADOS DA ÁLGEBRA À ÁLGEBRA DOS SIGNIFICADOS: UMA IMERSÃO NO ETHOS FORMATIVO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA". Os trabalhos foram instalados pelo(a) Orientador(a), Professor(a) Doutor(a) JOSE PEDRO MACHADO RIBEIRO - UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor(a) Doutor(a) JULIANA SILVA CANELLA - UFPA, membro titular externo; Professor(a) Doutor(a) NILTON CEZAR FERREIRA - IFG, membro titular externo; Professor(a) Doutor(a) PABLO VANDRÉ JACOB FURLAN - IFG, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido(a) o(a) candidato(a) **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo(a) Professor(a) Doutor(a) JOSE PEDRO MACHADO RIBEIRO, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Nilton Cezar Ferreira**, **Usuário Externo**, em 09/03/2021, às 17:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **PABLO VANDRE JACOB FURLAN**, **Usuário Externo**, em 26/03/2021, às 17:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Juliana Silva Canella**, **Usuário Externo**, em 26/03/2021, às 17:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Pedro Machado Ribeiro**, **Professor do Magistério Superior**, em 26/03/2021, às 17:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Processo nº 23070.012302/2021-35 SEI nº 1929350

*"Os limites da minha linguagem denotam os limites de meu mundo" (*WITTGENSTEIN, 1921, p. 111)

Ao Binômio {Miriã, Benício}.

AGRADECIMENTOS

O autor deste trabalho não reivindica para si nada além das presumíveis limitações técnicas e conceituais que possivelmente possam residir no trabalho aqui apresentado. Os agradecimentos que aqui figuram são para fazer justiça aqueles que diretamente foram os protagonistas por eventuais aspectos relevantes ou úteis existentes nessas linhas, e esses são os responsáveis por aquilo que eventualmente possa existir de melhor aqui. Agradeço primeiramente àqueles que foram meus professores; à professora Noêde Maria que na 5ª quinta série ao me presentear com o gosto pela investigação me legando ainda um livro (que ainda tenho em meu poder) cuja dedicatória implantava em mim a fantasia delirante de ser um “iluminado nas ciências”. Agradeço especialmente ao meu orientador, professor José Pedro Machado Ribeiro, pelos anos de amizade, generosa aprendizagem, (muita) paciência e exemplo constante de como ser um excelente, amigo, professor e pesquisador. Agradeço também nas pessoas da Banca, professor Nilton, Juliana, e Pablo, grandes pesquisadores e professores, a oportunidade que me permitiram de melhorar, evoluir, através da reflexão imposta por suas leituras deste trabalho e aos amigos que fizeram parte de minha trajetória acadêmica, Edgar, Eduardo, Pablo e Cleidson, e mais recentemente a parceria e amizade de meus “irmãos” que fiz no Pós Graduação, e especialmente ao Grupo de Pesquisa Matema por ter certamente tido papel central no meu letramento para pesquisa. Agradeço também aos meus colegas professores, com os quais sempre aprendi e ainda tenho tanto a aprender. Da mesma forma agradeço aos meus alunos, aos da educação básica e superior, com os quais pude partilhar muitos aspectos dessa experiência. Agradeço aos amigos do SENAI, destacando aqui o constante apoio, amizade e inspiração da dileta Maristela Nunes e ao amigo Raphael referência de inteligência e que me ajudou em todos os momentos que não tinha a menor ideia de como formatar um parágrafo (muitas vezes parágrafos de minha vida), e a todos os demais colegas por estarem também de alguma forma presentes aqui. Agradeço especialmente aos meus familiares, notadamente aos meus irmãos e irmãs: Eduardo, Josias, João, Cássia e Joyce; assim como à minha mãe, Sra. Mônica e especialmente ao meu pai, Sr. Josias Freire. Agradeço aos amigos, Leandro Pereira, Tadashi, pelas palavras de incentivo para conclusão exitosa deste trabalho. Por fim, agradeço a minha companheira Miriã: principal referência de sensibilidade e força, inteligência e persistência, sem a qual essa jornada nem teria começado.

RESUMO

Das experiências que partilhamos em nosso itinerário formativo, humano, docente e de pesquisador e diante das inquietações que emanavam de cada uma dessas experiências engendramos a seguinte pergunta de pesquisa: *Seria possível um levar a cabo um processo formativo de professores, permeado pelo ensino-aprendizagem de Álgebra Abstrata, que dialogue com a formação suficiente e necessária para atender as demandas propostas pela atividade docente dos futuros professores de Matemática que pretendem atuar na Educação Básica?* Apresentamos uma revisão bibliográfica que contempla uma arqueologia da história da álgebra nos currículos. Em seguida, movimentamos em direção ao registro da experiência que tivemos como professores pesquisadores da disciplina de Álgebra Abstrata em uma turma de licenciatura em matemática da Universidade Federal de Goiás. Amparados na visão ofertada pelo Modelo Teórico dos Campos Semânticos e lançando mão das noções de produção de significado, comunicação efetiva e produção de conhecimento concebemos uma matriz analítica que nos possibilitou classificar os fenômenos observados em duas categorias: leituras efetivas e leituras vacantes. Ambas se referem a dinâmica de produção de significados manifestadas durante a disciplina ministrada. Por fim, destacamos algumas considerações gerais que podem elucidar novas maneiras de compreender os diálogos que se estabelecem no diálogo formativo de professores e em possíveis caminhos para revestir de efetividade esse movimento.

Palavras-chave:

Educação Matemática, Álgebra Abstrata, Formação de Professores, Pesquisa Qualitativa, Modelo Teórico dos Campos Semânticos.

ABSTRACT

Based on the experiences we share in our human, docent and teacher formation itinerary and facing the difficulties that emanate from each one of these experiences, we pose the following question for our research: Is it possible for someone to manage a formative process of teachers, based on the teaching-learning process of Abstract Algebra, which dialogues with a sufficient and necessary formation in order to correspond to the demands of the docent practice of the future Mathematics teachers who intend to work at the basic level education? We presented a bibliographic revision, which contemplates the archaeology of the Algebra's history in the basic education curriculum. Posteriorly, we focused on the documentation of our experiences as professors and researchers in the Abstract Algebra subject, which was offered to students of the Mathematics course of the Federal University of Goiás. Guided by the *Theoretical Model of Semantic Field* and utilizing the concepts of construction of meanings, effective communication and production of knowledge, we created an analytical matrix, what enabled us to classify the phenomena observed in two different categories: *Effective Readings* and *Vacant Readings*. These expressions refer to the dynamic of production of meanings observed in the subject offered to the undergraduates. Finally, we highlighted some general considerations that may elucidate and facilitate the comprehension of the conversations present in the teacher formation dialogues and enable the emergence of new ways to add effectiveness to this process.

Key-Words:

Mathematics education, Abstract Algebra, Teachers formation, Qualitative research, Theoretical Model of Semantic Field.

SUMÁRIO

The First World War: German artilleryman wearing his gas mask whilst in a battery position near Les Boeufs on the Somme.
Fonte: < https://www.iwm.org.uk/collections/item/object/205194051>

INTRODUÇÃO

> Diadorim era aquela estreita pessoa – não dava de transparecer o que cismava profundo, nem o que presumia. Acho que eu também era assim. Dele eu queria saber? Só se queria e não queria. Nem para se definir calado, em si, um assunto contrário absurdo não concede seguimento. Voltei para os frios da razão" (ROSA, 2001, p. 77).

> Hardy costumava visitá-lo enquanto ele agonizava em um hospital de Putney. Foi em umas dessas visitas que aconteceu o incidente da chapa do táxi. Hardy tinha ido para Putney de táxi - como sempre fazia, o seu meio de transporte predileto. Entrou no quarto em que estava deitado Ramanujan. Hardy, sempre, inepto para iniciar uma conversa, disse, provavelmente sem cumprimentá-lo e certamente sem explicar nada: "Acho que o número do meu táxi era 1792. Pareceu-me um número bastante sem graça." Ao que Ramanujan retrucou:" Não, Hardy! Não, Hardy! É um número muito interessante. É o menor número exprimível como a soma de dois cubos de duas maneiras diferentes." (HARDY, 2000, p. 32)

> "Por que, diabo, me preocupo eu desta maneira e sofro todas estas inquietações por causa de uma bagatela?", pensou, sorrindo estranhamente. "Hum! Sim, é isso, está tudo ao alcance do homem e tudo lhe vem parar às mãos, simplesmente, o medo.... Isto é um axioma.... É curioso: de que será que as pessoas têm mais medo? O que mais temem é o primeiro caso, a primeira palavra... (DOSTOIEVSKI, 1886, p.4)

Em um dos textos de Wittgenstein ele afirmava que seu trabalho era constituído de duas partes, a parte em que ele dizia algo e a parte que em que não dizia, e afirmava ele, essa segunda parte era a mais importante. Analisar as memórias na memória, buscar nos registros neurofisiológicos sedimentos do que possa nos explicar e do que poderia explicar o que fazemos enquanto existimos. Um mergulho pelo caótico conteúdo cotejado pelos desafios dados pela nossa condição material no tempo e no espaço em busca dos nexos que constituem nosso modo de ser no mundo. Essa empreitada hermenêutica por nossa memória constituída por "bombardeios neuroquímicos" e o esforço para transformá-lo em uma narrativa que justifique o itinerário assumido por esse pretenso professor-pesquisador muitas vezes pode suscitar os sentimentos descritos por Wittgenstein na frase inicial que abre esse trabalho.

Ao rememorar tempos idos em busca dos significados que possam ter assumido as pretensões dessa atividade nos defrontamos com um estudante que ainda na infância, absolutamente fascinado pelas leituras de divulgação científica da época (isso há quase trinta anos) pretendia escrever uma "bíblia da ciência" até aos 9 anos de idade, descobrir na estante de casa o livro "o homem que calculava de Malba Tahan.

Após ler avidamente tal livro se impor a tarefa de se tornar o Beremiz Samir em Três meses de estudo de Matemática o que evidentemente se mostrou uma empreitada inglória e infrutífera. Uma década depois passou e esse mesmo estudante a flertar com leituras amadoras de filosofia, passando de Sócrates à Platão, Aristóteles até chegar no *"Le Etre et Le Neant"* de Sartre, o que potencializava e muito as condições de questionamento sobre questões referentes a natureza do conhecimento, da aprendizagem, bem como o deslumbramento pela possibilidade de existência de "verdades" como as encontradas na física e na Matemática. Ao chegar no momento do vestibular opinou pelo curso de Matemática por duas razões: a primeira razão diz respeito ao edital do vestibular na época - ao percorrer todos os cursos que devido à concorrência teria condições de pleitear vaga ao ler a parte final da apresentação da parte de Matemática onde estava destacado: "opinar por uma graduação em Matemática é uma escolha difícil e que irá requerer total dedicação...o candidato deverá estar ciente dessas dificuldades..." A segunda razão dizia respeito a uma frase de um livro que dizia *matematicus non fit, nascitur*.

Cedi ao desafio vaidoso e romântico de fazer uma escolha profissional que parecia exclusividade das mentes mais dedicadas e bem-preparadas para lidar com conhecimento complexo, sem ter noção de como se estruturava um curso de Matemática, e de como seria desafiador me adaptar a uma rotina acadêmica muito diferente do que eu imaginava, e muito menos empolgante do que eu concebia.

A motivação que nos levou investigar como se dá a urdidura da trama entre o processo de formação de professores e a atuação desses professores na Educação Básica remonta os caminhos formativos que trilhamos. Esses caminhos foram balizados por dilemas e contradições que enfrentamos, pois, ao mesmo tempo em que estávamos em formação acadêmica, assumimos a responsabilidade de também formar alunos na condição de professor de Matemática em turmas da Educação básica.

Nossa perplexidade foi ganhando envergadura e forma, na medida em que começamos a perceber as incongruências entre, de um lado, o modelo formativo ao qual éramos submetidos em um curso de formação de professores e, do outro lado, os desafios apresentados no âmbito da Educação Básica, na qual iniciávamos nossa atividade docente. Esses dilemas começaram a emergir em torno de 2006, ano em que este professor-pesquisador ingressou, por meio de vestibular, no curso de Licenciatura em de Matemática da Universidade Federal de Goiás, no mesmo instante que assumia o posto de professor temporário para turmas da rede pública de Educação básica, no município de Aparecida de Goiânia, trabalhando com alunos do 6º ano do ensino fundamental ao 3º Ano do Ensino Médio (na época 5ª Série do 1º Grau ao 3º ano do 2º Grau).

Desse modo, o processo de se formar professor enquanto também integrávamos o processo formativo de alunos da Educação básica revelou-se um evento rico em experiências e desafios. Isso porque tais atividades exigiam uma reflexão mais robusta e profunda sobre os significados do que (e de como) estávamos aprendendo, enquanto professor em formação, e sobre o que (e como) deveríamos estar ensinando aos alunos.

A circunstância de estar em processo de formação profissional enquanto também estava envolvido no processo de formação do outro se demonstrou fortemente profícua para a nossa trilha formativa. É interessante observar que esse fato não é incomum, principalmente num lugar onde a carência por profissionais formados em Matemática, associada ao desinteresse ostentado pelo poder público no que se refere às políticas para a Educação, favorece o ingresso na docência em contratos temporários de trabalho, mesmo que seja de maneira marginal.

Embora as condições de maturidade inerentes à habilitação efetiva para a docência ainda não fossem atendidas por nós naquela ocasião, essa circunstância se constituiu em uma oportunidade única de se refletir sobre a características de um curso de formação de professores de Matemática da Educação Básica e a correlação desta com o exercício da docência nesse nível escolar, deixando indeléveis os aspectos de coerência e incoerência presentes no processo formativo em questão.

A experiência, até então inédita, de assumir turmas da Educação Básica na condição de professor de Matemática representou uma oportunidade de rememorar os próprios passos, enquanto ainda estava na condição de estudante da Educação Básica, e, de certa forma, nos gerou grande perplexidade: Os conteúdos abordados e as metodologias empregadas pareciam não ter se alterado no tempo.

Uma disciplina, em especial, nos enchia de perplexidade: a que o curso de licenciatura em Matemática caracteriza como Álgebra Abstrata e, em geral, lhe é conferida pela comunidade acadêmica (matemáticos e professores de Matemática) status privilegiado no contexto formativo do professor, pois com seus elementos aparentemente exotéricos para o não matemático (relações, operações, grupos, anéis e corpos), ela fundamenta várias outras disciplinas dentro da Matemática, sendo estruturante nos fundamentos de outros elementos matemáticos.

Ao cursarmos a disciplina de Álgebra Abstrata no curso de licenciatura em Matemática, tivemos uma grande decepção, pois tradicionalmente a disciplina é considerada como uma disciplina estruturante de muito dos conteúdos de um curso de matemática e considerada como fundamento da maior parte dos conteúdos matemáticos apresentados na Educação Básica. A decepção se deu em função da disciplina mais se assemelhar há um mero exercício de práticas mnemônicas de definições, teoremas e corolários, na qual nos parecia não haver direito à cidadania para uma reflexão mais abrangente sobre o valor do conhecimento algébrico, sobretudo na organização de atividades humanas.

No que se refere a nossa atividade docente na Educação Básica, íamos tomando conhecimento do hiato existente entre o que estávamos aprendendo em nosso processo de formação, enquanto professores de Matemática da Educação Básica, e os conteúdos que ministrávamos e que tradicionalmente são nomeados de Álgebra na Educação Básica: propriedades operatórias aritméticas, produtos notáveis, equações, funções, matrizes etc.

Nessa via de mão dupla na qual aprender ensinando e ensinar aprendendo integra um único movimento, as dificuldades vão assumindo uma configuração de uma espiral de dúvidas, incertezas e motivação, em que produzir significados para o que nos aprendíamos e para o que nós ensinávamos ganhou importância fundamental. Buscamos compreender as possíveis conexões entre o que aprendíamos e o que deveríamos ensinar aos nossos alunos, principalmente no que se refere àqueles saberes associados à disciplina de Álgebra e como deveríamos buscar uma maneira de fazer intervenções legítimas em sala de aula para que fomentássemos em nossos alunos a postura de pensar algebricamente e usar a Álgebra como parte de organização de seus saberes.

Nessa época ainda, movidos por inquietações que emanavam dessa situação, começamos a engendrar, mesmo que em forma rudimentar, a questão que iria nos fazer assumir, no futuro, uma posição de inquérito sistemática e metódica que, anos depois, iria deflagrar nossa pergunta de pesquisa. Em nossa monografia apresentada como requisito parcial para graduação, intitulada “A construção do formal: Uma proposta de ensino de demonstrações em sala de aula”, nós propusemos uma compreensão de quais caminhos possíveis para que os conhecimentos matemáticos pudessem se aproximar dos conhecimentos que frequentam o cotidiano dos alunos da Educação Básica, constituindo, assim, significado para as experiências sociais nas quais eles participavam.

A preparação para o mestrado foi frustrada pela primeira vez devido a imaturidade acadêmica para conceber um projeto que reunisse as características necessárias para fundar um projeto de investigação acadêmica.

Os problemas referentes ao projeto foram mitigados com o nosso ingresso no grupo de pesquisa *Matema – Grupo de Pesquisa e Formação em Educação Matemática da UFG* - coordenado pelo professor José Pedro Machado Ribeiro, onde devido aos importantes debates com pesquisadores e alunos de pós-graduação nos possibilitou um imenso amadurecimento rumo a concepção de um pré-projeto que garantisse nosso ingresso no programa de mestrado em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás.

Na ocasião em que ingressamos no mestrado, no Programa de Pós-Graduação em Educação e Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás, no ano de 2018, essas inquietações tomaram forma e se cristalizaram em nosso projeto de mestrado, que foi levado a cabo no 2º semestre do ano de 2018, sob a orientação do prof. José Pedro Machado Ribeiro. Nosso projeto de pesquisa de mestrado, organizado no que academicamente é nomeado de investigação-ação, e como fruto da experiência que adquirimos em nosso itinerário formativo (como ser humano, professor e pesquisador) apresentou nossa pergunta de pesquisa (que plasmava todas as nossa inquietações, e que se colocava nos seguintes termos semânticos “Seria possível um levar a cabo um processo formativo que permeasse o ensino-aprendizagem de Álgebra Abstrata e que dialogasse com a formação *suficiente* e *necessária* para atender as demandas estabelecidas pela atividade docente dos futuros professores de Matemática que pretendem atuar na Educação Básica?”, pergunta essa que carregamos para nossa investigação que culminou nessa dissertação.

Assumindo como objetivo principal de nosso trabalho investigar os tipos possíveis de intervenções no ensino de Álgebra, ofertado aos alunos do curso de licenciatura em Matemática da UFG, que poderiam atender às demandas de formação do professor de Matemática de Educação Básica, e como objetivos específicos identificar de que modo os conteúdos aprendidos num curso de Álgebra impactam na formação do professor de Educação Básica e caracterizar os tipos de conhecimentos, presentes no curso de Álgebra, que têm conexão direta com os conteúdos ensinados na Educação Básica.

Nosso solo investigativo, no caso uma turma de licenciatura em Matemática que na ocasião cursava a disciplina de Álgebra Abstrata, nos possibilitou perceber importantes aspectos dos matizes que constituem o *ethos* docente e as possíveis conexões entre o que é ensinado em certos cursos de formação de professores, e os conteúdos presentes na Educação Básica. Entre algumas das perspectivas inauguradas pelo movimento de pesquisa, destacamos que a resposta positiva para a pergunta, deveria passar pela possibilidade de se reconhecer a importância de criar uma conexão legítima entre os conteúdos ensinados aos professores de Matemática na disciplina de Álgebra Abstrata e os conteúdos da Educação Básica, por meio da produção de significados por parte da atividade professor aluno.

O termo significado, que ora se apresenta como ponto de partida nesta proposta investigativa, possui amplo escopo de significados muitas vezes imprecisos ou contraditórios, que pairam na literatura em geral. Assim, dentre as possibilidades para a utilização do termo significado, neste trabalho, tomamos o termo num sentido preciso dado por Lins (1993), no qual o significado de um objeto é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre o objeto numa dada atividade, ou seja, a enunciação cumprindo um papel protagonista dentro das atividades humanas.

No primeiro capítulo inaugurando nosso solo pré-reflexivo iremos fazer um levantamento bibliográfico sobre a Álgebra Abstrata e seus significados, o Sentido atribuído pela Educação Matemática a disciplina de Álgebra Abstrata, além de seu lugar na formação de professores de professores de Matemática da Educação Básica e uma reflexão que esclareça as inter-relações entre as dimensões típicas de enfoque do conhecimento algébrico: a dimensão social, formal e subjetiva das relações entre os processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Abstrata em um contexto de formação de professores.

E no segundo capítulo apresentamos a forma e o conteúdo de que trata nosso trabalho assim como nossa região de inquérito, descrevendo o *lócus* onde se deu o trabalho, e os atores da pesquisa. Neste capítulo fazemos uma discussão sobre alguns aspectos da concepção de linguagem e comunicação como atividade social resgatando algumas das ideias colocadas por Bakhtin, discutimos brevemente aspectos da concepção de ensino na perspectiva da matemática realística, discutimos sobre o significado semântico do termo *significado* e apresentamos o Modelo Teórico dos Campos Semânticos, perspectiva epistemológica que assumimos ao organizar e analisar nossos dados.

No capítulo III o posicionamento teórico assumido explicitando e elucidando aspectos de análise suscitados pela pesquisa. Aqui é onde estabelecemos as razões de nossa opção metodológica, circunscrevemos a cena de *investigação-ação,* e a maneira de executar a aquisição e o tratamento dos dados.

No capítulo IV explicitamos a nossa perspectiva analítica para escrutínio e compreensão dos dados adquiridos em nosso movimento investigativo, estabelecendo a necessária tecitura argumentativa para revestir de nexo as conexões entre cada unidade de informação (avaliação final oral aplicada aos sujeitos).

Como conclusão ora denominada *considerações últimas* nos ocupamos com as conclusões extraídas desse trabalho. Como disse Wittgenstein certa vez esse trabalho é constituído do que foi escrito e do que *não* foi escrito, e, é essa, justamente a parte mais importante desse trabalho, o não dito, que seus possíveis leitores poderão elaborar a partir de reflexões próprias.

CAPÍTULO I. Da Álgebra Abstrata à Sala de Aula da Educação Básica

1.1 Álgebra em Matemática em Educação Matemática

> Les chansonniers disent que le plaisir rend l'âme bonne et amollit le coeur. La chanson avait raison ce soir-là, relativement à moi. Non seulement j'étais attendri par cette famille d'yeux, mais je me sentais un peu honteux de nos verres et de nos carafes, plus grands que notre soif. Je tournais mes regards vers les vôtres, cher amour, pour y lire ma pensée ; je plongeais dans vos yeux si beaux et si bizarrement doux, dans vos yeux verts, habités par le Caprice et inspirés par la Lune, quand vous me dites : « Ces gens-là me sont insupportables avec leurs yeux ouverts comme des portes cochères ! Ne pourriez-vous pas prier le maître du café de les éloigner d'ici ? »Tant il est difficile de s'entendre, mon cher ange, et tant la pensée est incommunicable, même entre gens qui s'aiment (BALDELAIRE, ANO, p. 60)[1]

Tentar compor uma teia que relacione as visões e entendimentos sobre Álgebra Abstrata em uma perspectiva a partir da Matemática e da Educação Matemática nos impõe um desafio homérico, somos levados aos limiares fronteiriços de campos de investigação com conceitos, metodologias, visões epistemológicas, políticas, e da noção de verdades muitas vezes contraditórias e mutuamente excludentes, uma vez que frequentemente as construções discursivas elaborados pelos atores desses campos parecem particionar a realidade do conhecimento com que lidam em classes de equivalência, onde conjuntos de noções e compreensões sobre seus objetos de investigação são incomunicáveis, intraduzíveis, ocupando salas isoladas hermeticamente.

Nesse contexto nos sentimos na necessidade de empreender uma busca orientada pela literatura a disposição e em nossa forte motivação enquanto pesquisador para mitigar os hiatos e contradições que *parecem* existir e são manifestas nas diversas visões que esses campos são apresentados na literatura vigente, buscando com isso encontrar para todo delta maior que zero, um Épsilon maior que zero que nos permitam

---

[1]Dizem os cancionistas que o prazer torna a alma boa e amolece o coração. Não somente essa família de olhos me enternecia, mas ainda me sentia um tanto envergonhado de nossas garrafas e copos, maiores que nossa sede. Voltei os olhos para os seus, querido amor, para ler neles meu pensamento; mergulhava em seus olhos tão belos e tão estranhamente doces, nos seus olhos verdes habitados pelo Capricho e inspirados pela Lua, quando você me disse: "Essa gente é insuportável, com seus olhos abertos como portas de cocheira! Não poderia pedir ao maître para os tirar daqui? Como é difícil nos entendermos, querido anjo, e o quanto o pensamento é incomunicável, mesmo entre pessoas que se amam! Tradução nossa.

aproximar conceitos e visões aparentemente contraditórios, mas que através de uma visão transdisciplinar tem profundos pontos complementares ou mesmo de convergências.

É importante aqui ressaltar que não buscamos conciliar pontos teóricos que são irredutíveis dentro de seus próprios campos disciplinares, nem constituir um sincretismo anacrônico de noções de maneira ambígua, imprecisa e contraditória, como se pretendêssemos escamotear estruturas que em certa medida não são passíveis de redução, por não possuírem dentro de uma perspectiva de investigação e reflexão sistemática e rigorosa compartilhando algum divisor comum conceitual.

Obviamente tanto a Matemática quanto Educação Matemática possuem métodos e validações de verdade próprios, pois a própria noção de verdade (ou validade como costumam dizer os lógicos) carecem de um significado nivelador, dada as próprias características polissêmicas do que o ser humano tem considerado historicamente como verdade.

Nosso compromisso inicialmente é constituir uma arqueologia dos significados impostos à Matemática e a Educação Matemática, para a partir de então colocar sobre escrutínio as noções de Álgebra Abstrata, pensamento algébrico e os significados que se constituem a partir desses elementos.

A partir daí pretendemos destacar as intersecções conceituais que emanam dessas discussões e nesse contexto acabam por estabelecer as condições que possibilitaram inquirirmos sobre as questões que motivaram buscarmos sistematicamente estabelecer as questões balizadoras dessa pesquisa e discutir os resultados que emergiram dessa nossa investigação.

Uma vez estabelecidos esse nosso solo pré-reflexivo efetuaremos uma busca sistemática pelas relações com que esses conceitos, tantos oriundos das visões epistemológicas e sociais se articulam e de que modo isso é manifestado na formação de professores de Matemática da Educação Básica.

1.2 Para cada *Épsilon* conceitual existe um *Delta* histórico

> "Eis o túmulo de Diofanto - maravilha de contemplar. Com um artifício aritmético a pedra ensina a sua idade. Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo na adolescência; um sétimo em seguida, foi passado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos,

> depois do que lhe nasce um filho. Mas esse filho - desgraçado e, no entanto, bem-amado! - Apenas tinha atingido a metade da idade que viveu seu pai, morreu. Quatro anos ainda, mitigando sua própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofanto, antes de chegar ao termo de sua existência." Calcule, sem usar Álgebra, a idade de Diofanto ao morrer. (MALBA TAHAN, 1974, p. 72)

A literatura histórica em geral sinaliza que o é entendido hoje comumente como Álgebra é um corpo de conhecimento e práticas que remontam a antiguidade e com contribuição de diversos povos sob diferentes épocas, recebendo influências tanto historicamente anônimas bem como de personagens históricos cuja materialidade da existência pode ser mais ou menos atestada.

Como um desses exemplos históricos podemos destacar Diofanto, matemático grego de Alexandria, que viveu entre o século II e III e que é considerado por muitos como o fundador da Álgebra como nós a conhecemos ocupando espaço similar ao que personalidades como Euclides (Séc. III a.C.) ocupa na Geometria ou então Ptolomeu (Séc. I) teve na ciência astronômica.

O pensamento de Diofanto influenciou fortemente a maneira de se trabalhar com Matemática sobretudo no que se refere a conceitos e procedimentos algébricos, particularmente na maneira como as aplicações práticas foram sendo modeladas pela notação escrita que naquela época eram registradas, inaugurando assim a concepção e emprego simbólico dos registros matemáticos, provavelmente para sintetizar o manuseio de ideias escritas para representar situações problemas.

Isso foi o que possibilitou com que as expressões que descreviam problemas matemáticos que até então eram descritos em termos de linguagem natural com o emprego natural de palavras, ganhando em eficiência de manuseio nos procedimentos algorítmicos.

Na contramão de seus predecessores que nos procedimentos de resoluções de problemas utilizavam excessivamente descrições através de palavras sem fazer uso de símbolos com o intuito de representar valores desconhecidos em dadas situações, Diofanto redefiniu práticas Matemáticas inaugurando um novo e profícuo cenário para lidar com a Álgebra e de suas representações o que acarretou uma nova maneira de pensar, registrar e manusear situações algébricas de maneira otimizada pelo emprego do simbolismo, por exemplo lançando mão de abreviações ao representar valores ou quantidades desconhecidos (as incógnitas), como no caso de encontrar dois números cuja soma e o produto sejam números dados (modernamente temos aí uma resolução de uma equação de segundo grau).

Na literatura a gênese epistemológica da palavra Álgebra parece remontar uma variante latina da palavra árabe *al-jabr*, usada no título de um livro, *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá em torno do século IX pelo matemático *árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi* (Os termos algarismo e algoritmo parecem ser tributários desse matemático, ainda nesse mesmo século, fazendo alusão a seu nome).

No contexto em que ele aparece, o termo *al-jabr* refere-se à operação de manuseio através de transposições de expressões que designavam quantidades que seriam subtraídas de um lado de uma equação para o outro lado, onde se torna uma quantidade agrupada. *Al-muqâbalah* refere-se à redução de um termo positivo, subtraindo quantidades iguais de ambos os lados da equação.

Um significado para a palavra al-jabr diz respeito ao procedimento de *reunião de ossos quebrados* o que garante nexo metafórico na maneira empregada por essa palavra no parágrafo anterior. Um pouco mais tarde com a influência dos mouros na Espanha a palavra *al-jabr* ainda carregava essa pecha, o termo *algebrista* designava o cirurgião-barbeiro especializado em remendar ossos quebrados ou luxados, presente por exemplo na literatura como a obra Dom Quixote, de Miguel de Cervantes.

Nos séculos seguintes o que se viu foi um sucessivo desenvolvimento que a partir das notações mais finas que permitiram um manejo cada vez mais eficientes de situações estruturadas pela Álgebra e o que trouxe consigo também a possibilidade de reflexão sobre objetos mais abstratos, abrindo caminho para a inauguração de estruturas algébricas mais sofisticadas que iriam de uma vez por todas modificar a maneira de se entender objetos algébricos e mesmo a Matemática como um todo.

Dois grandes nomes que emergem nesse contexto, são o norueguês Niels Henrik Abel (5 de agosto de 1802 - 16 de abril de 1829) e do francês Évariste Galois (25 de outubro de 1811 — 31 de maio de 1832), cujas suas contribuições foram decisivas para resolver importantes problemas que estavam abertos em sua época, contribuindo com isso para o desenvolvimento de conceitos inteiramente novos do conhecimento algébrico tendo como a ideia de *grupo* o grande protagonista dessas teorias que desempenhou um papel unificador nos conceitos precedentes.

Na Álgebra, o conceito de *grupo* foi sem dúvida o mais importante fator de compreensão de estruturas Matemáticas de forma mais geral, gerando possibilidades muito mais robustas de análise de sua estrutura e de seus objetos, constituindo um fator essencial na ascensão do sofisticado grau de abstração e por conseguinte importância que a Álgebra atingiu a partir de então.

A ideia de grupo não é tributária de um trabalho individual uma vez que diversos matemáticos se dedicaram a seu desenvolvimento, mas no que se refere ao entendimento desse conceito como algo estruturante de muitas outras ideias Matemáticas sem sombra de dúvida foi o jovem Evariste Galois, um dos grandes responsáveis por estabelecer uma compreensão a partir da tentativa de buscar determinadas soluções para equações por meio de radicais.

Outros matemáticos, dentre eles o suíço Leonard Euler (1707-1783), o francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855)), e o italiano Paolo Ruffini (1765-1822), todos contemporâneos também colaboraram para o crescimento desta área, além de ter apresentados importantes trabalhos também em outros campos da Matemática.

A definição moderna de grupo foi enunciada pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) que definia a estrutura de grupo pelas leis internas de regulação de seus elementos e a relação entre eles. A maneira como esses conceitos são abordados tradicionalmente nos cursos de graduação em Matemática, seja no bacharelado seja na licenciatura, variam muito pouco em conteúdo e forma sendo comumente apresentado para os alunos primeiro a estrutura de grupo, em seguida anéis, e por fim corpos.

A seguir apresentamos a definição de grupo que apresentada em Elementos de Álgebra de Yves Lequain e Arnaldo Garcia e a definição de anel no livro Tópicos de Álgebra de Irish Nathan Herstein, dois textos tradicionalmente usados em um curso de Álgebra Abstrata.

Figura 1 - Definição moderna de Grupo

Definição V.1.1. Um conjunto G com uma operação

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a,b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

é um *grupo* se as condições seguintes são satisfeitas:

(i) A operação é associativa, isto é,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall\, a, b, c \in G.$$

(ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists\, e \in G \quad \text{tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \quad \forall\, a \in G.$$

(iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,

$$\forall\, a \in G, \quad \exists\, b \in G \quad \text{tal que } a \cdot b = b \cdot a = e.$$

O grupo é *abeliano* ou *comutativo* se:

(iv) A operação é comutativa, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall\, a, b \in G.$$

Fonte: Elementos de Álgebra (2001, p. 135).

Figura 2 – Definição moderna de Anel[2]

Um conjunto não vazio R é dito um anel associativo se em R estão definidas duas operações, indicadas por + e ▪ respectivamente, tais que para todos a, b e c em R:

(1) $a + b$ *está em* R.

(2) $a + b = b + a$.

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(4) Existe um elemento 0 em R tal que $a + 0 = a$ (para cada a em R).

(5) Existe um elemento $-a$ em R tal que $a + (-a) = 0$.

(6) $a.b$ está em R.

(7) $a.(b.c) = (a.b).c$.

(8) $a.(b + c) = a.b + a.c$ e $(b + c).a = b.a + c.a$ (as duas leis distributivas).

Fonte: Tópicos de Álgebra (HERSTEIN, 1964, p. 101).

---

2 Esse conceito costuma ser enunciado de maneiras diferentes em textos consagrados. Uma definição alternativa pode ser: Sejam A um conjunto e (+) e (·) duas de operações em A, chamadas de adição e multiplicação. A terna (A, +, .) será chamada de anel se as operações gozarem das seguintes propriedades. A1 (A adição é associativa). Quaisquer que sejam a, b, c ∈ A, tem-se que (a + b) + c = a + (b + c). A2 (A adição é comutativa). Quaisquer que sejam a, b ∈ A tem-se que a + b = b + a A3 (Existe um elemento neutro para a adição) Existe α ∈ A tal que α + x = x, para todo x ∈ A. A4 (Todo elemento de A possui um simétrico) Para todo α ∈ A, existe a' ∈ A tal que a + a´ = α. M1 (A multiplicação é associativa) Quaisquer que sejam a, b, c ∈ A tem-se que (a. b). c = a. (b. c). M2 (A multiplicação é comutativa) Quaisquer que sejam a, b ∈ A, tem-se que a. b = b. a. M3 (Existe um elemento neutro para a multiplicação) Existe e ∈ A com e ≠ 0, tal que x. e = x para todo x ∈ A. AM (A multiplicação é distributiva com relação à adição) Quaisquer que sejam a, b, c ∈ A, tem-se que a. (b + c) = a. b + a. c. (Hefez, 1993, p. 24).

Naturalmente como em geral toda ideia nova, essa concepção de grupo não foi bem aceita e compreendida até que o matemático alemão Walther Franz Anton von Dyck (1856-1934) ampliou e disseminou as ideias de grupo lançando os fundamentos da teoria combinatória de grupos, parece ter sido o primeiro a estudar sistematicamente um grupo por geradores e relações em 1882.

Nesta época, o estudo dos grupos assumiu seu caráter abstrato e independente e se desenvolveu muito rapidamente se tornando uma das mais profícuas áreas de estudo atualmente sendo no século XIX o momento que essas ideias ganharam imensa envergadura por seu nível de abstração, rigor e generalidade. Nas palavras de Boyer (1974, p. 419),

> The nineteenth century, more than any preceding period, deserved to be known as the Golden Age in mathematics. The additions to the subject during these one hundred years far outweighed, both in quantity and quality, the total combined productivity of all preceding ages.[3]

Embora, as maiores contribuições dadas ao desenvolvimento da Álgebra do século XIX tenham sido os ingleses que passaram algum tempo na América, Cayley e J. J. Sylvester (1814 – 1897) – e foi principalmente na universidade de onde esses provinham, Cambridge, que se deu o aparecimento do que conhecemos por Álgebra Moderna.

O ponto de inflexão na Matemática inglesa veio em 1815, o algebrista George Peacock (1791 – 1858) não produziu resultados novos notáveis em Matemática, mas teve grande importância na reforma do assunto na Inglaterra, especialmente no que diz respeito à Álgebra. Num esforço para justificar as ideias mais amplas na Álgebra, Peacock em 1830 publicou seu *Treatise on Algebra*, em que procurou dar à Álgebra uma estrutura lógica comparável à de "O*s elementos* de Euclides".

De certa maneira a visão que Peacock tinha de Álgebra sugeria que os símbolos para objetos que habitavam a estrutura algébrica não necessariamente precisavam se restringir a números.

---

[3] O século XIX, mais do que qualquer período anterior, merecia ser conhecida como a Era de Ouro em Matemática. As adições ao assunto durante esses cem anos superaram em quantidade e qualidade,a produtividade total combinada de todas as idades anteriores. *Tradução nossa*.

Ampliando essa visão Augustus De Morgan (1806 – 1971) entendia que as interpretações dos símbolos para as operações eram regras arbitrárias e assim George Boole (1815 – 1864) estabeleceu uma nova maneira de encarar os procedimentos sintáticos no campo da Álgebra e até hoje várias linguagens computacionais fazem referência ao seu nome ao empregarem a lógica binária estabelecida pelos dígitos 0 e 1.

Dessa maneira a Matemática assumiu um caráter que extrapolava investigações vinculadas a propriedades numéricas contínuas e discretas, mas passou também a ocupar com o estudo da regulação de suas sintaxes, ou seja, para além do conteúdo a forma de se apresentar Matemática ganha *direito à cidadania*.

A partir do trabalho Galois e através das contribuições de matemáticos como J. W. R. Dedekind (1831 – 1916), Leopold Kronecker (1823 – 1891) e Ernst Eduard Kummer (1810 – 1893), estabeleceram o que se pode chamar tratamento aritmético da Álgebra, similar à aritmetização da análise, e nessa nova abordagem estava imbricado o desenvolvimento de um cuidadoso tratamento postulacional da estrutura algébrica.

Outras grandes contribuições foram dadas pelo italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) cujo nome é lembrado hoje em conexão com os axiomas de Peano[4] dos quais dependem tantas construções rigorosas da Álgebra e da Análise Matemática.

É de fato verdade que um processo gradual de generalização na Álgebra tinha sido desenvolvido no século dezenove, mas no século vinte o grau de abstração ganhou imensa envergadura, pois variáveis já não representavam mais necessariamente números, medidas ou segmentos, como na obra de Descartes; agora podiam designar

---

[4] As quatro considerações feitas por Peano são:
1. Existe uma função *s* : N → N, que associa a cada n ∈ N um elemento s(n) ∈ N, chamado o *sucessor* de *n*.
2. A função s : N → N é injetiva.
3. Existe um único elemento, denotado por **1**, no conjunto N, tal que 1 ≠ s(n), ∀ n ∈ N.
4. Se um subconjunto X ⊂ N ´e tal que 1 ∈ X e s(X) ∈ X ⇒ X = N.
O primeiro axioma nos garante a sucessão dos números Naturais. Em outras palavras, tomando *s(n) = n + 1*, garantimos que todo sucessor de um dado n ∈ N, também está em N. O segundo axioma garante que todo número Natural é contemplado com a propriedade da função s. Desta forma, não há a possibilidade de um "hiato" no domínio, pois caso isto ocorresse, a integridade do conjunto dos Naturais seria comprometida. O terceiro axioma afirma a existência de um elemento denominado **1** que não é sucessor de ninguém. Em outras palavras, a função *s* parte de **1**. O quarto e último axioma é, talvez, um dos mais importantes e utilizados em demonstrações de determinadas propriedades dos números Naturais, pois dá origem ao método de demonstração por Indução. Este último axioma afirma que se em um determinado conjunto X, dado um n ∈ X, se n+1 ∈ X, então X se identifica com os Naturais.

elementos genéricos de qualquer natureza arbitrária – substituições, figuras geométricas, matrizes, polinômios e funções, dentro de estruturas absolutamente genéricas, em que era parte importante da Matemática passava a se deslocar para as investigações das formas de relação estabelecidas e as condições necessárias e suficientes para obtenção de resultados.

Nunca a Matemática esteve tão unificada quanto hoje, pois os resultados desse ramo têm aplicação tão ampla que as classificações antigas, Álgebra, Análise, Geometria, já não condizem com o nível de transdisciplinaridade que as tais pesquisas transitam e são apresentadas. A maior parte do enorme desenvolvimento durante os vinte anos seguintes à Segunda Grande Guerra Mundial teve pouco que ver com as ciências naturais, sendo estimulada por problemas na própria Matemática pura por exemplo o estabelecimento dos teoremas da incompletude que Kurt Gödel[5], que causou perplexidade na comunidade matemática, mas também para além de seus muros (se é que existe muros) fomentando reflexões que abrangem tanto até mesmo a natureza e o papel da ciência e de conceitos como verdade (ou validade).

Em suma a Álgebra que em *Al-Khowarizmi* designou certos tipos de operações empregadas na busca da resolução de determinadas equações, mas no século XVI já era empregado ao estudo das situações em que essas operações eram utilizadas.

A partir de então a Álgebra passou por profundas transformações de conteúdo e forma e quando atingiu séculos XIX e XX, a acepção atribuída a palavra passou a designar um *locus* conceitual absolutamente vasto que passa pelo estudo de construções

---

[5] **Primeiro Teorema de Gödel:** Numa teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar, existe uma sentença verdadeira, mas indemonstrável.
Segundo Teorema de Gödel: É impossível provar a consistência de uma teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar.
Segue-se aqui uma breve ilustração da estrutura geral da prova de Gödel. Suponhamos uma sentença A, análoga ao paradoxo do mentiroso: "Um mentiroso diz que está mentido. Ele diz a verdade ou mente?" - que é equivalente a uma afirmação que afirme que ela mesma não é demonstrável. Teremos então (i): A diz que A não é demonstrável. Assumamos também que, independentemente de qualquer sistema, sentenças falsas não podem ser demonstradas. Teremos então (ii): sentenças falsas não são demonstráveis. Assumindo a consistência do sistema (i.e., que o sistema não produz contradições), suponhamos que a sentença A seja falsa. Pela afirmação (i), teríamos então que A é demonstrável. No entanto, o fato de A ser falso e demonstrável contradiz a afirmação (ii). Logo, por *reductio ad absurdum,* A é verdadeira, mas indemonstrável. A negação ¬A também é não demonstrável, pois, dado que A é verdadeiro, ¬A é falso; e por (ii) temos que sentenças falsas não são demonstráveis, logo ¬A é não-demonstrável.

Matemáticas específicas tais como como a Álgebra proposicional, booleana ou a Álgebra de conjuntos, até física quântica.

É importante reconhecer que os sentidos que a palavra Álgebra atualmente tem assumido levam em consideração tanto a posição histórica quanto a de conteúdo da Álgebra.

O termo é usualmente empregado no contexto de *Álgebra escolar* que se ocupa das regras envolvendo resolução de equações, problemas, e regras de operações Matemáticas, conteúdos esses que se aproximam bastante do que era considerado Álgebra em seus primórdios, ou seja, *Álgebra antiga* e a ideia de *Álgebra abstrata* (Álgebra moderna, Álgebra I) que se ocupa sobretudo com investigações sobre estruturas gerais da Matemática tais como grupos, anéis, corpos, objetos esses que são apresentados em cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática.

Para Usiskin (1994), as concepções que historicamente constituíram e atribuíram significado a atividade algébrica pode se caracterizar por quatro maneiras: Álgebra como aritmética generalizada, Álgebra entendida como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, de Álgebra como estudo de relações como grandezas e de Álgebra como estudo das estruturas, onde as diferentes concepções da Álgebra relacionam-se com os diferentes usos das variáveis, conforme esquema simplificado a seguir:

Quadro 1 - Concepções de Álgebra

Concepção de Álgebra	**Uso das variáveis**
Aritmética Generalizada	Generalizadora de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin (1994 p. 20)

Nessa perspectiva o autor destaca o papel central da ideia de função no estudo da Álgebra, uma vez que é ligada a noção de relação entre quantidades ainda que seja possível notar outros papeis da Álgebra nessa noção tais como a própria ideia de aritmética generalizada ou como provedora de meios para a resolução de problemas, destacando com isso o papel ocupado pela Álgebra na atualidade (considerando mais ou menos todos os seus níveis):

> A Álgebra continua sendo um veículo para a resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e analisarem relações. é a chave para a caracterização e a compreensão de estruturas Matemáticas. Dados esses trunfos e a matematização crescente da sociedade, não é de se surpreender que a Álgebra seja hoje a área-chave de estudo da Matemática na escola secundária e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo. (USISKIN, 1995, p. 21)

A Matemática e a atividade Matemática têm assumido mais do que nunca lugar de destaque nas conquistas tecno-científicas, bem como na própria interpretação desse mundo que e reinaugurado a cada dia mediante a atividade humana.

Nesse sentido a Álgebra como disciplina independente no campo matemático mas com seus valiosos mecanismos de organização da atividade social humana ganha envergadura e impacta diretamente em áreas multidisciplinares que envolve diretamente teorias emanadas da Matemática tais como a cibernética a inteligência artificial, processos de digitalização e incorporação de inteligência industrial, mineração de dados para mapeamento de comportamento de consumo humano (*behavior score*), bem como o desenvolvimento de arquiteturas tecnológicas cada vez mais sofisticadas e que estão presentes no entretenimento, Educação e modos de produção e gestão industrial. Ao analisarmos os processos históricos de produção Matemática notamos que essa face da Matemática é tributária entre várias situações por um lado por seu desenvolvimento enquanto ciência aplicada aos processos industriais que do século XVII, e por outro lado passando pelo profícuo processo de refinamento e especialização de seus códigos próprios, que teve seu ápice na negação do i*gnoramibus* proposto pelo programa de Hilbert e que veio por terra com os trabalhos de Kurt Godel. Sobre isso comenta Herstein (19700, um dos autores de um dos textos mais tradicionalmente usados no ensino de Álgebra em nível de graduação destaca bem essa situação:

> Uma das características surpreendentes da Matemática do século XX tem sido seu reconhecimento do poder do método abstrato. (...). No despertar destes desenvolvimentos surgiu não apenas uma nova Matemática, mas uma visão nova, e junto com isto, demonstrações simples de resultados clássicos difíceis. O isolamento de um problema em seus essenciais simples tem-nos revelado a localização adequada, no esquema global das coisas, de resultados

> considerados especiais e separados e tem-nos demonstrado inter-relações entre áreas antes consideradas como desligadas. (HERSTEIN, 1970, p. 1).

Naturalmente essas características assumidas pela Matemática no início do século XX impactou no modo como se faz, como se experimenta ciência e como se percebe atividade científica.

Só para citar um exemplo a marcha desencadeada pela atividade tecnológica inaugurada a partir dessas transformações que se iniciam a partir do século XVIII e encontra seu ápice no século XX a Álgebra ganha na modernidade um caráter de matriz unificadora das técnicas, conceitos e procedimentos matemáticos, servindo ao mesmo tempo de corpo organizado de conhecimento e como ferramenta integradora de visões conceituais dos campos matemáticos.

Nesse sentido a Matemática foi se constituindo como uma coluna em que se articula quase toda as áreas da Matemática, em torno em torno de um eixo comum que fundamenta a coerência interna das áreas dentro da própria Matemática, uma vez que serve se tanto como intérprete nos processos de transposição conceitual *intramatemáticos* devido as características linguísticas robustas e ao mesmo tempo sofisticadas dado a natureza sui generis de como se apresenta o que é comunicado em Matemática.

Ainda compartilhando da percepção de HERSTEIN, a Álgebra é reelaborada a partir desse novo cenário:

> A Álgebra que surgiu como um produto de tudo isso não é apenas uma matéria com vida e vigor independentes – ela é atualmente umas das áreas de pesquisa mais importantes em Matemática – mas também funciona como um fio unificador que entrelaça quase toda a Matemática – geometria, teoria dos números, análise, topologia e mesmo Matemática aplicada. (HERSTEIN, 1970, p. 1).

A Álgebra Abstrata então emerge como uma metáfora unificada da linguagem, dos procedimentos e dos conceitos matemáticos modernos como se fosse uma reversão da torre de babel no terreno científico, em que uma nova maneira de estruturar experiências Matemáticas muito gerais e as vezes até distintas encontram a possibilidade de se comunicarem via uma espécie de isomorfismo de campus de conhecimentos.

Mesmo se consolidando pelo seu caráter abstrato a Álgebra Abstrata ganhou envergadura no terreno tecnológico e científico no que se refere a modelar estruturas e processo. Por exemplo uma aplicação importante da Teoria do Grupos é a solução da equação Schrödinger, que descreve a evolução temporal e espacial da forma de onda associada a uma partícula qualquer. Ao imaginarmos um sistema físico muito simples, por exemplo como o átomo de hidrogênio, é possível obter um modelo teórico cuja solução analítica pretendida seja exata.

Entretanto para a grande maioria dos sistemas, é necessário recorrer a cálculos numéricos trabalhosos e aproximados, mas o trabalho envolvido pode ser reduzido consideravelmente com a aplicação da Teoria de Representações de Grupos. Isto é particularmente verdadeiro nos cálculos da energia eletrônica em Física do estado sólido, onde cálculos precisos só são viáveis quando os grupos teóricos são usados para explorar a simetria do sistema de maneira robusta.

1.3 Lentes da Educação Matemática

A Educação Matemática enquanto campo próprio vem ganhando autonomia em relação as áreas que compartilham em maior ou menor grau de alguns elementos de investigação teórica, se ocupando cada vez mais de novos objetos de estudo fazendo se constituindo assim campo do conhecimento altamente complexo e que lida com fenômenos inerentes à atividade humana frente a atividade educacional.

Para Kilpatrick (2009), estudioso que buscou delimitar o escopo da Educação Matemática

> O campo da Educação Matemática tem aspectos profissionais e acadêmicos. Do lado acadêmico, a questão do que é considerado pesquisa está ainda sendo debatida. Um exame de dois conjuntos de critérios propostos para avaliar a qualidade da pesquisa em Educação Matemática revela que, apropriadamente interpretados, os critérios emprestados das ciências naturais e sociais são relevantes para um campo que está tentando ser científico. Do lado profissional, a Educação Matemática deve inevitavelmente preocupar se com a aplicação do conhecimento especializado para auxiliar os estudantes e os professores que são seus clientes. A formação de professores continua sendo a função maior da Educação Matemática, paralelamente à busca do conhecimento sólido para ser aplicado. Os educadores matemáticos universitários precisam trabalhar junto com matemáticos e com professores em sala de aula no desenvolvimento da teoria e da prática. A Educação Matemática tem se desenvolvido bem em países nos quais as estruturas institucionais a apoiam como um campo acadêmico identificável. (1996, p. 99).

Deste modo os estudiosos que se ocupam com a Educação Matemática vêm buscando através de estudos sistemáticos e críticos consolidar essa área do conhecimento buscando com isso consolidar esse campo de investigação, com isso também buscando se ocupar das tematizações sobre o papel da Educação Matemática enquanto demanda do conhecimento e da experiência humana, compreendendo a Educação como a possibilidade por um lado da reprodução cultural humana, mas por outro lado fruto de contradições que permitem o homem superar as condições impostas pela própria cultura e classe social se reconstruindo a cada instante na sociedade.

Outro fator que merece consideração é a ideia sustentada nessa passagem é a constatação que a Educação Matemática tem se constituído como área de amplo escopo porem sendo inegável seu protagonismo no que se refere a investigações oriundas de questionamentos acerca da formação do professor de Matemática enquanto agente de destaque nas instituições científicas.

Nessa perspectiva a atividade humana de educar ganha sentido apenas se estiver em conexão com a própria atividade social, pois é conjuntamente que o homem cria sua história, e isso é sem dúvida uma das questões mais importantes que devem ser compreendidas em qualquer perspectiva de análise que busque uma visão que integre de maneira coerente as interpretações que se tem da ciência e da Matemática.

Uma das possíveis maneiras de interpretar essa condição diz respeito a reconhecer que a atividade histórica social da humanidade se dá quando é facultado as pessoas a possibilidade de se conectarem, comungarem de maneira simétrica suas aspirações, suas visões de mundo seus conhecimentos próprios, seus valores e suas experiências existenciais enquanto agentes. Paulo Freire coloca bem essa questão:

> O diálogo fenomeniza e historiciza a essencial intersubjetividade humana; ele é relacional e, nele, ninguém tem iniciativa absoluta. Os dialogantes "admiram" um mesmo mundo; afastam-se dele e com ele coincidem: nele põem-se e opõem-se. Vimos que, assim, a consciência se existência e busca perfazer-se. O diálogo não é um produto histórico, é a própria historicização. É ele, pois, o movimento constitutivo da consciência que, abrindo-se para a infinitude, vence intencionalmente as fronteiras da finitude e, incessantemente, busca reencontrar-se além de si mesma. Consciência do mundo, busca-se ela a si mesma num mundo que é comum; porque é comum esse mundo, buscar-se a si mesma é comunicar-se com o outro. O isolamento não personaliza porque não socializa. Intersubjetivando-se mais, mais densidade subjetiva ganha o sujeito (FREIRE, 1983, p. 8-9).

Nessa perspectiva conceituar Educação Matemática e seu papel passa necessariamente por considerá-la enquanto atividade social, que se constitui na medida em que sujeitos interajam socialmente com o objetivo de atingirem seus objetivos pessoais e sociais. Ubiratan D'Ambrósio, ao abordar as dimensões que constitui a Educação Matemática põe a questão de maneira precisa:

> O que vem a ser Educação Matemática? Um ramo da Educação? Sim. Não se pode tirar Educação Matemática de seu lugar muito natural entre as várias áreas da Educação. Mas não seria também uma especialização da Matemática? Claro. Tem tudo a ver com Matemática. E por que, então, distingui-la como uma disciplina autônoma? Não poderíamos simplesmente falar em Educação Matemática como o estudo e o desenvolvimento de técnicas ou modos mais eficientes de se ensinar Matemática? Ou como estudos de ensino e aprendizagem da Matemática? Ou como metodologia de seu ensino no sentido amplo? Claro, não se pode negar que a Educação Matemática aborda todos esses e inúmeros outros desafios da Educação e, portanto, é tudo isso. Não obstante, há certas especificidades que tornam a Educação Matemática merecedora de um espaço próprio. (D´AMBROSIO, 1993, p. 7)

Com isso o autor quer nos chamar atenção para o caráter epistemológico *sui generis* da Educação Matemática que não se constitui apenas enquanto didática, tão pouco enquanto um catálogo de metodologias que pretendem balizar estratégias para seu ensino ou sob quais condições "ideias" acontece sua aprendizagem em contextos formais, o que na verdade significa que esses aspectos também compõe um possível painel descritivo do que possa ser (e qual função possa ter) a definição de Educação Matemática, definição essa que em geral peca por só desvelar por completo o caráter que enuncia mediante um quadro referencial bem situado.

Obviamente não podemos a partir dessas reflexões e a partir desse ponto deduzir que as contradições e as crises impostas ao modelo axiomático dedutivo de ciência bem como na sua utilidade dentro de um contexto maior devam indeferir qualquer possibilidade de conciliação entre pontos de vistas distintos no que se refere a concepção de ciência e Matemática em especial bem como seu ensino pois como afirma Otte (1993, p. 17):

> A superação desta crise, portanto, não pode consistir, como acreditam certos críticos da ciência, em abandonar o caminho errado do pensamento especialista para retornar à corrente principal do pensamento natural, mas a superação desta crise do conhecimento e da ciência só se pode efetuar continuando a desenvolver nossas formas de pensamento teoricamente estruturados e não recaindo num suposto estado natural, qualquer que seja a imagem que criamos dele. A crise da ciência e do pensamento cotidiano não pode ser eliminada sem ciência e sem novas formas do pensamento cotidiano.

Nesse sentido o autor busca destacar que não é indo de um extremo ao outro em uma posição epistemológica frente a Educação Matemática, aos modos de fazer e ensinar Matemática (ações distintas, mas com importantes pontos de intersecção) pois o próprio *droit de cité* da Educação Matemática é tributária das manifestações e compreensões que circunscrevem a própria Matemática enquanto atividade estruturante da experiência humana e constituindo-se como campo de estudo teórico para a auto constituição. D´Ambrósio (1993) coloca sob escrutínio essa perspectiva destacando que:

> O futuro da Educação Matemática não depende de revisões de conteúdo, mas da dinamização da própria Matemática, procurando levar nossa prática à geração de conhecimento. Tampouco depende de uma metodologia "mágica". Depende essencialmente de o professor assumir sua nova posição, reconhecer que ele é um companheiro de seus estudantes na busca de conhecimento, e que a Matemática é parte integrante desse conhecimento. Um conhecimento que dia-a-dia se renova e se enriquece pela experiência vivida por todos os indivíduos deste planeta (D´AMBROSIO, 1993, p. 14).

Ainda nesse mesmo viés Paulo Freire estabelece em sua interpretação de Educação uma forte ênfase no caráter político do ato educativo (evidentemente em uma perspectiva que possibilite uma acepção muito mais ampla ao termo político, político, alinhando aos conceitos como do indivíduo com a sociedade enquanto agente transformador de sua própria realidade e a componente histórica de sua marcha.

> Por que não estabelecer uma necessária “intimidade” entre os saberes curriculares fundamentais dos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos? Por que não discutir as implicações políticas e ideológicas de um tal descaso dos dominantes pelas áreas pobres da cidade? A ética de classe embutida neste descaso? Porque, dirá um educador reaccionariamente pragmático, a escola não tem nada a ver com isso. A escola não é partida. Ela tem que ensinar os conteúdos, transferi-los aos alunos. Aprendidos, estes operam por si mesmos (FREIRE, 2000, p. 34).

Eis aí um dos aspectos quem mais merecem ser enfatizados ao se discursar acerca das condições em que se dá a atividade de ensino e aprendizagem enquanto atividades que garantem a manutenção o patrimônio cultural passado de geração em geração: A conexão entre as diversas dimensões humanas não pode ser escamoteada em troca de uma pretensa neutralidade política (em um sentido lato) e sim reconhecidas a cada movimento que implique esses discursos.

1.4 Breve panorama do Ensino de Álgebra no Brasil

As diversas maneiras que a Álgebra e o pensamento algébrico se manifestaram historicamente, principalmente dada as características de emprego em uma vasta generalidade de situações acabaram a lhe garantir um caráter polissêmico tanto no que se refere a sua caracterização quanto seus limites e escopo impactando assim na forma que a Álgebra vem tradicionalmente sendo ensinada.

No que se refere a Álgebra enquanto disciplina escolar Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), destacam o papel ocupado pela Álgebra e sua concepção sendo identificada pelo chamado *transformismo algébrico* que foi a base do ensino de Álgebra, tanto no Brasil quanto em outros países, durante todo o século XIX e a primeira metade do século XX.

Essa concepção de Álgebra e os desdobramentos para a maneira que ela passa a ser ensinada caracterizou-se fundamentalmente pela manipulação simbólica de equações, em que a ênfase é fundamentalmente dada ao domínio e emprego de regras operatórias, o que em última instancia significou não mais que a redução da Álgebra a jogos sintáticos e a resolução mecânica de problemas (na maioria das vezes absolutamente artificiais, no sentido de não possuírem qualquer relação com o cotidiano dos alunos).

Porém, a partir da década de 1950, e estendendo-se até os anos 1970, começou a se destacar o Movimento da Matemática Moderna que fez um contraponto à concepção acima mencionada, buscando com isso deslocar a ênfase do ensino de Álgebra para os fundamentos e estruturas mais gerais dessa disciplina.

Nessa direção, prevaleceu a ideia de, ao se justificar as passagens presentes no *transformismo algébrico* via a introdução de propriedades estruturais das operações, isso bastaria para se capacitar o estudante na identificação dessas estruturas em outros contextos, assim como nas suas aplicações.

Para tanto, os tópicos algébricos foram reorganizados de tal sorte que se ensinassem em primeiro lugar os conjuntos numéricos, suas propriedades estruturais, as sentenças abertas e fechadas, o conjunto-universo e o conjunto-verdade e as equações e inequações do 1° grau. Só após esse estudo é que seriam abordadas as expressões algébricas, valores numéricos, operações e a fatoração.

De maneira geral quando os estudantes que ingressam em um curso de licenciatura em Matemática e tem um primeiro contato um livro de Álgebra abstrata e examinam o índice, em geral impressionados com o desconhecimento de quase todos os tópicos que vemos listados: grupo, corpos, anéis, enfim uma vasta gama de termos nunca examinados em nenhuma etapa escolar, o que é natural, entretanto são termos muitas vezes pouco (ou nunca) empregados em outras disciplinas do curso e Matemática.

De que maneira podemos caracterizar a disciplina de Álgebra que é um frequenta o cotidiano escolar de maneira corriqueira, mas que assume acepções absolutamente diversas no léxico educacional?

Em primeiro lugar devemos destacar que há uma profunda diferença de ênfase dada em seu uso ordinário e em seu uso acadêmico (sobretudo em um curso de graduação) pois na Álgebra elementar, em geral o que é ensinado é simbolismo básico e metodologia de manipulação de equações e expressões algébricas algumas vezes, geralmente vinculados a resolução de problemas do mundo real, enfatizando como esses problemas podem ser reduzidos a conjuntos de equações e como essas equações podem ser resolvidas para gerar respostas numéricas.

Esta técnica para a tradução de problemas complicados em símbolos é a base de todo trabalho adicional em Matemática e em especial em Álgebra sendo um dos mecanismos mais importantes para o ser humano estruturar sua realidade.

No entanto, a Álgebra não pode ser reduzida a um mero conjunto de técnicas operacionais, se constituindo como um ramo do aprendizado, uma disciplina, como cálculo, física ou química. É um ramo coerente e unificado constituído por um conjunto de conhecimentos que pode estruturado sistematicamente, a partir dos primeiros princípios e da construção.

Assim a primeira diferença entre o curso elementar e o mais avançado em Álgebra é que, enquanto anteriormente, nos concentramos na técnica, agora vamos desenvolver esse ramo da Matemática chamado Álgebra em de maneira sistemática. Ideias e princípios gerais terão precedência sobre a solução de problemas, a propósito, isso não significa que a Álgebra moderna não tenha aplicações - é exatamente o contrário, como veremos em breve.

1.5 Uma proposta de Base frágil na base: A BNCC

Considerar os documentos que regulamentam os processos educacionais no país é considerar as inúmeras contradições que emergem dos jogos de interesses e desequilíbrio de forças sociais em conflito por interesses próprios, afirmando-se enquanto identidades diversas e em franca competição pelo domínio político econômico. No Brasil os documentos que mais cristalizam essas forças sociais são a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), e a Base Nacional Comum Curricular (primeira versão em 2015 e depois de várias revisões a última versão foi disponibilizada em 2018).

A ideia central da proposta de uma base parece ganhar clareza na seguinte caracterização:

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à Educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)1, e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). (BNCC, 2018, p. 7).

Evidentemente precisamos considerar o jogo de forças que estão imbricados na gênese de qualquer documento normativo a BNCC traz de maneira cristalizada esses intensões subjacentes a interesses de grupos sociais.

1.5.1 A BNCC e o ensino fundamental

Tradicionalmente o que é consagrado em nosso modelo educacional posiciona o ensino sistemático de Álgebra e técnicas algébricas no nível do Ensino Fundamental, e esse posicionamento muitas vezes é estabelecido pelos livros didáticos adotados, que hoje ainda no Brasil constituem robustos instrumentos de manutenção do que deve ser ensinado e como deve ser ensinado. A BNCC tematiza o que deve ser entendido por finalidade e elementos essenciais a serem alcançados nos conteúdos algébricos. Assim a BNCC dispõe sobre Álgebra:

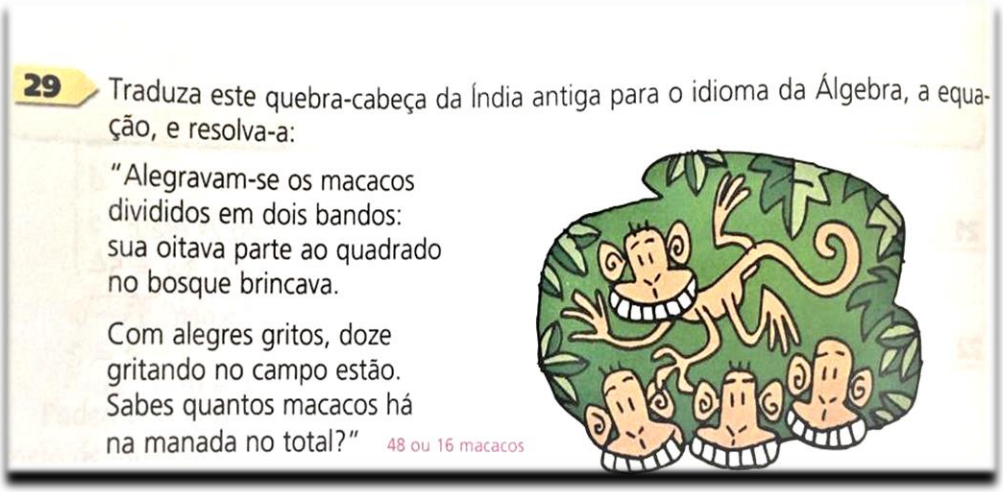
> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas Matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis Matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BNCC, 2018, p. 270).

Sendo assim a BNCC tematiza o que deve ser entendido por finalidade e elementos essenciais a serem alcançados nos conteúdos algébricos, definindo o escopo e a profundidade que as ideias inerentes a Álgebra e as habilidades envolvidas no raciocínio algébrico, apresentando uma descrição do que entende ser imprescindível na atividade de ensino nesses níveis de Educação, primeiramente estabelecendo o que seja relevante para nos anos iniciais:

> Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a Álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, (...)A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas(...) (BNCC, 2018, p. 270).

Nessa mesma veia a BNCC se ocupa também do que deve ser abordado em termos de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, e é nesse momento que os estudantes passam a ter contato com resolução de equações através dos procedimentos clássicos, usando modelos de equações para modelar problemas como o da figura a seguir:

Figura 3 – Problema apresentado em livro didático do 9º ano



Fonte: Oscar Guelli, Matemática Construção (1998, p. 68)

Um outro aspecto relevante e que também ganha destaque na BNCC é a posição de privilegiada que deve ocupar a noção entre função e variável, bem como as noções de regularidade em sequencias numéricas e, sobretudo, a resolução de equações, enfatizando problemas específicos e não meramente um estudo isolado e sem conexão com temas cotidianos, ou problemas à deriva de meros procedimentos algorítmicos:

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BNCC, 2018, p. 270).

A maneira como esses conhecimentos devem ser introduzidos devem se conectar naturalmente com conhecimentos, habilidades e experiências que os alunos tenham tido previamente na sala de aula, mas não se limitando a ela, articulando aspectos de outros conteúdos vistos dentro da própria Matemática, buscando com isso apresentar uma visão unificadora e integradora dos conhecimentos algébricos estruturados de outras maneiras:

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da Matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência. (BNCC, 2018, p. 298).

Um outro aspecto relevante e que também ganha destaque na BNCC é a posição privilegiada que deve ocupar a noção entre função e variável, bem como as noções de regularidade em sequencias numéricas e, sobretudo, a resolução de equações, enfatizando problemas específicos e não meramente um estudo isolado e sem conexão com temas cotidianos, ou problemas à deriva de meros procedimentos algorítmicos, estabelecendo condições para que a Álgebra se firme enquanto modelo de comunicação simbólica capaz de estruturar a comunicação sobre a realidade e suas representações sistemáticas:

> Da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem Matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. (BNCC, 2018, p. 298).

Em suma, no que se refere a maneira que a BNCC estrutura o ensino de Álgebra, tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais do Ensino Fundamental o documento parece propor uma articulação entre os níveis de aprendizagem bem como os conteúdos tratados destacando a importância da articulação entre esses conhecimentos.

Entretanto sem apresentar alternativas muito diferentes do que já e consagrado em termos clássicos de abordagem dessa disciplina. Em seguida apresentamos um quadro/resumo extraído da BNCC, mapeando os conteúdos a serem trabalhados por nível de ensino.

Quadro 2 - Concepções de Álgebra na BNCC

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
6 ANO	Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade Matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7 ANO	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(**EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas artes e na literatura. **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(**EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.
8 ANO	Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo ax2 = b	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo ax2 = b.

	Sequências recursivas e não recursivas	**(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
9 ANO	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: BNCC, p. 183

Esse quadro sinóptico busca estabelecer um resumo descritivo das competências e habilidades que devem ser adotadas como marco no Ensino Fundamental mas parece recair em generalidades, quando observamos de maneira mais detida, pois nessa perspectiva mais próxima, parece que o mesmo acaba carecendo de aspectos importantes para a melhor compreensão do que de fato se enseja enquanto documento padronizador de conteúdo, em outras palavras, ostensivamente é feito usos de slogans, se no entanto esclarecer objetivamente o que se discute e qual perspectiva política é assumida.

Esse é um sintoma típico de um documento que infelizmente não foi constituído com uma legítima colaboração democrática e pública da comunidade envolvida com os processos educacionais em nosso país.

1.5.2 A BNCC e o *novo* Ensino Médio

Seguindo a mesma linha do que é proposto para o Ensino Fundamental a Base também dispõe sobre Ensino Médio, com a pretensão de aprofundar as aprendizagens que foram levadas a cabo nas etapas anteriores de ensino, enfatizando a importância de uma visão estruturada da Matemática e de aplicabilidade a realidade:

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BNCC, 2018, p. 527).

O documento de maneira geral dá destaque para conceitos como *competências* sem, no entanto, definir de maneira clara, para esse nível de ensino como se entende isso. Na verdade, o documento mesmo que tentando seguir a mesma coerência da parte que estabelece os requisitos para o Ensino Fundamental parece recair em descrições genéricas do que se espera nesse nível de ensino, como a noção de representação, abordagem da Matemática como linguagem necessária para estruturação de problemas e comunicação dos resultados.

> As competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático.
> Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, em especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da Matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. (BNCC, 2018, p. 529).

Essa maneira que parece romper com o nível de detalhamento proposto no Ensino Fundamental parece carecer de significado se confrontarmos por exemplo com o detalhamento dos conteúdos tradicionalmente plasmados em alguns dos livros didáticos mais adotados nas redes básicas de ensino, por exemplo no *livro Matemática Contexto e Aplicações* do Luiz Roberto Dante, um dos materiais mais conhecidos nos meios de ensino, a coleção de livros do ensino médio é dividido em três volumes onde no 1º volume os conteúdos são: revisão de produtos notáveis, conjuntos e conjuntos numéricos, funções, função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, logaritmo e função logarítmica, progressões, matemática financeira, trigonometria no triângulo retângulo e geometria plana.

No segundo volume os conteúdos explorados são trigonometria (resolução em triângulos quaisquer), conceitos de trigonometria básicos, seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica, relações trigonométricas, transformações trigonométricas, funções trigonométricas, matrizes, determinantes, sistemas lineares, geometria espacial e da posição, poliedros (prismas e pirâmides), corpos redondos (cilindro, cone e esfera), análise combinatória e probabilidade.

No terceiro volume os conteúdos abordados são o princípio da indução finita, estatística, geometria analítica (ponto e reta), geometria analítica (a circunferência), geometria analítica (secções cônicas), números complexos, polinômios e equações algébricas e noções intuitivas sobre derivadas.

Essa maneira de explorar e organizar os conteúdos parece comum em boa parte de livros didáticos, sobretudo aqueles adotados pela rede pública de ensino, o que para nós seguindo a lógica de como foi organizado os conteúdos para o Ensino Fundamental (Quadro 2) daria subsídios para que o documento estruturasse de maneira similar os conteúdos do Ensino Médio.

Entretanto a ênfase do documento é dada no caráter de centralidade na competência de *comunicar,* ou seja, o aspecto de se fazer compreender via linguagem natural e social, possibilitando experiências que parecem fazer referência ao mundo do trabalho ou experiência similar:

> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de **comunicar** ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e **elaborando relatórios**, entre outros **registros**. (BNCC, 2018, p.530, grifo nosso).

No documento é desenvolvida ideia na direção de *competência de argumentar*, *que* incluiria maneiras de raciocinar típicos do que é considerado matemático como a capacidade de criar e poder validar ou não resultados, com justificativas para tal maneira de validar aquela compreensão apresentada:

> Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar. (BNCC, 2018, p. 530).

Em suma, o documento apresenta um quadro geral dos conceitos que devem ser ensinados e das competências a serem desenvolvidas durante o itinerário formativo dos estudantes, fazendo uma descrição pormenorizada nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, sem, no entanto, avançar em questões que de fato proponham uma nova identidade para o Ensino Médio, recaindo também em generalizações que tematizam pouco ou quase nada os conceitos a serem ensinados nesse nível de ensino.

Novamente aqui o problema nos parece se referir a maneira que foi elaborado esse documento que assim como a parte que se refere a educação no Ensino Fundamental.

1.6 A Álgebra Abstrata e o nosso solo investigativo: A Formação de Professores no âmbito da Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Goiás

O distanciamento entre a formação universitária de professores de Matemática e prática de sala de aula da escola básica não é novidade. É observado há, pelo menos, um século, como aponta o alemão Felix Klein em seu *livro Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*, de 1908:

> In recent years a far reaching interest has arisen among university teachers of mathematics and natural science directed toward a suitable training of candidates for the higher teaching positions. This is really quite a new phenomenon. For a long time prior to its appearance,university men were concerned exclusively with their sciences, without giving a thought to the needs of the schools, without even caring to establish a connection with school mathematics. What was the result of this practice? The young university student found himself, at the outset, confronted with problems which did not suggest, in any particular, the things with which he had been concerned at school. Naturally he forgot these things quickly and thoroughly. When, after finishing his course of study, he became a teacher, he suddenly found himself expected to teach the traditional elementary mathematics in

> the old pedantic way; and, since he was scarcely able, unaided, to discern any connection between this task and his university mathematics, he soon fell in with the time honored way of teaching, and his university studies remained only a more or less pleasant memory which had no influence upon his teaching (KLEIN, 1908, p. 1).[6]

Esse trecho cristaliza uma das maiores preocupações que nos motivaram a condensar nossas inquietações em uma pergunta que engendrasse nosso movimento de pesquisa uma vez que carrega em seu bojo

A seguir apresentamos um resumo da gênese no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. O documento na íntegra pode ser encontrado na página oficial do IME[7].

O curso de matemática é inaugurado em 1969 compondo o IMF (Instituto de Matemática e Física). Quase três décadas depois, em 1996, é reestruturado e passa a integrar o IME (Instituto de Matemática e Estatística) da UFG.

Em sua gênese o curso era ministrado com certo destaque pela Universidade Federal de Goiás, principalmente em três municípios: Goiânia, Jataí e Catalão, que a posteriori iriam ganhar Universidades próprias, UFCAT E UFJ, com a modalidade de bacharelado sendo ofertado exclusivamente no município de Goiânia.

Na Universidade Federal de Goiás, atualmente a disciplina que mencionamos como Álgebra Abstrata é nomeada de Álgebra I, e é uma disciplina obrigatória de carga horária de 64 horas, 4 horas por semana, ministrada de acordo com a sugestão de fluxo (matriz 2012) no sexto período. Antecede essa disciplina no fluxo as disciplinas de Fundamentos de Matemática, Introdução a Teoria dos Números e Álgebra Linear.

---

[6] Nos últimos anos, surgiu um interesse de longo alcance entre os professores universitários de Matemática e ciências naturais, direcionados a um *treinamento* adequado de candidatos para os cargos de ensino superior. Este é realmente um fenômeno completamente novo. Durante muito tempo, antes do seu aparecimento, os universitários preocupavam-se exclusivamente com suas ciências, sem pensar nas necessidades das escolas, sem sequer se preocuparem em estabelecer uma conexão com a Matemática escolar. Qual foi o resultado dessa prática? O jovem estudante universitário viu-se, de início, confrontado com problemas que não sugeriam, em particular, as coisas com as quais ele se preocupara na escola. Naturalmente, ele esqueceu essas coisas de maneira rápida e completa. Quando, depois de terminar seu curso de estudo, tornou-se professor, de repente se viu ensinado a Matemática elementar tradicional da maneira antiga e pedante; e, como ele mal conseguia, sem ajuda, discernir qualquer conexão entre essa tarefa e sua Matemática universitária, ele logo se interessou pela maneira honrada de ensinar, e seus estudos universitários continuaram sendo apenas uma memória mais ou menos agradável, sem influência sobre o seu ensino. (tradução nossa).

[7] https://ime.ufg.br/up/29/o/projeto_pedagogico_final.pdf

Na disciplina de Fundamentos de Matemática é apresentada entre outras coisas noções de lógica, técnicas de demonstração Matemática e aspectos relacionados às definições de conjuntos numéricos. Na disciplina de Álgebra Linear será apresentado os conceitos de espaços vetoriais e seus axiomas, as noções de base e dimensão, transformações lineares entre outros conteúdos, fazendo apelo muitas das vezes a interpretação geométrica de alguns fatos (usando os conhecimentos adquiridos em Geometria Analítica). Na disciplina de Introdução a Teoria dos Números, é apresentada e discutida propriedade dos números inteiros, conceitos como divisibilidade, e a introdução da relação de congruência módulo m. Essas disciplinas direta ou indiretamente servem como requisitos ou pelo menos suporte para os conceitos que serão apresentados na disciplina de Álgebra I. A seguir apresentamos as ementas dessas disciplinas:

Quadro 3 – Ementa Fundamentos de Matemática

Fundamentos da Matemática – 64 horas **Ementa** Noções de Lógica; Teoremas: métodos de demonstração; Princípio da Indução Finita; Linguagem da Teoria dos Conjuntos; Conjuntos numéricos (linguagem sem construção); Números Racionais: frações e representações decimais; Números reais: números irracionais, irracionalidade de $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{6}$, etc. **Bibliografia Básica** 1. Silva, Jhone Caldeira, G. O. R. Estruturas Algébricas para Licenciatura: Introdução à Teoria dos Números. Do Autor, Brasília, 2008. 2. Iezzi, Gelson; Murakami, C. Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1: Conjuntos, Funções. Atual, São Paulo, Brasil. 3. Alencar Filho, E. D. Iniciação à Lógica Matemática. Nobel, São Paulo, 1995. **Bibliografia Complementar** 1. Domingues, H. H.; Iezzi, G. Álgebra Moderna: vol. único. Atual, São Paulo. 2. De Maio, W. Álgebra: estruturas algébricas básicas e fundamentos da teoria dos números: (Fundamentos de Matemática). LTC, Rio de Janeiro. 3. Do Carmo, Manfredo Perdigão; Morgado, A. C. Trigonometria, Números Complexos. SBM, São Paulo, Brasil, 1992.

Fonte - https://ime.ufg.br/ Acessado em 20 abr. 2019

Quadro 4 – Ementa Introdução à Teoria dos Números

Introdução à Teoria dos Números – 64 horas **Ementa** Indução Finita; Divisibilidade; Algoritmo de Euclides; MDC; Números Primos; MMC; Critérios de Divisibilidade; Congruência Linear; Os Teoremas de Euler, Fermat e Wilson; Teorema Chinês do Resto; Princípio da Casa dos Pombos; A função de Euler; A função de Möebius; Números Perfeitos; Recorrência e Números de Fibonacci; Resíduos quadráticos; Símbolo de Legendre e o Critério de Euler; Lei da Reciprocidade quadrática.

Bibliografia Básica

1. Santos, J. P. O. Introdução à Teoria dos Números, CMU, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

2. Silva, Jhone Caldeira, Gomes, Olímpio Ribeiro. Estruturas Algébricas para Licenciatura: Introdução à Teoria dos Números. Brasília: Ed. Do Autor, 2008.

3. Shokranian, S.; Soares, M.; Godinho, H. Teoria dos Números, Brasília: EdUnB, 1994.

Bibliografia Complementar

1. Domingues, H. H., Fundamentos de Aritmética, Atual, São Paulo, 1990.
2. FILHO, Edgard de Alencar, Teoria Elementar dos Números. 3. ed. São Paulo: Nobel 1992.
3. McCoy, Neal H. The Theory of Numbers, The Macmillan Company, New York, 1966.
4. Leveque , W. J. Fundamentals of Number Theory. Dover, São Paulo, 1996.
5. Maier, Rudolf Richard. Teoria dos Números. Textos de Aula. Basília: UnB, 2005. http://maierr.mat.unb.br/.
6. Silva, V. V. Números: construção e propriedades. Goiânia: Cegraf UFG, 2005.

Fonte - https://ime.ufg.br/ Acessado em 20 abr. 2019

Quadro 5 – Ementa Álgebra 1

Álgebra I – 64 horas

Ementa

Definição de Grupos – Exemplos; Subgrupos; Subgrupos Normais e Grupos Quocientes; Homomorfismos de Grupos; Automorfismos; Teorema de Cayley; Grupos de Permutações; Teorema de Cauchy – Teoremas de Sylow; Definições e exemplos de Anéis. Homomorfismos de Anéis; Ideais e anéis quocientes; O Corpo de frações de domínios de integridade.

Bibliografia Básica

1. Garcia, Arnaldo; Lequain, Y. Elementos de àgebra, 6ª ed. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2013.
2. Herstein, I. Tópicos de Álgebra, 1 ed. Polígono, São Paulo, Brasil, 1970.
3. Gonçalves, A. Introdução à Álgebra, 1 ed. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil 2005.

Bibliografia Complementar

1. Dean, R.A, Elementos de Álgebra Abstrata, LTC S.A.,R.J., 1974.
2. Fraleigh, J. B., A First Course in Abstract Algebra, 6th ed., Addison Wesley Longman, 2000.
3. Herstein, I. N. Abstract Algebra, 3rd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
4. Hungerford, T. W. Abstract Algebra An Introduction, Saunders College Publishing, Philadelphia, 1990.
5. Lang. S. Estruturas Algébricas, Ao Livro Técnico S.A., R.J., 1972.
6. Monteiro, L.H. J. Elementos de Álgebra, Ao Livro Técnico S.A., R.J., 1971.
7. Rotman, J.J., An Introduction to the Theory of Groups, 2nd ed., Allyn and Bacon Inc., 1973.
8. Rotman, J. The Theory of Groups, Allyn and Bacon Inc. 2nd edition, 1973.

Fonte - https://ime.ufg.br/ Acessado em 20 abr. 2019

Quadro 6 – Ementa Álgebra Linear

Álgebra Linear - 64 horas

Ementa

Sistemas lineares e Matrizes. Espaços Vetoriais. Transformações lineares. Autovalores e Autovetores. Espaços com produto interno. Aplicações.

Bibliografia Básica

1. Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L., Wetzler, H. G., Álgebra Linear, Harbra, 3a edição, São Paulo, 1986. 2. Callioli, C.A., Domingues, H.H., Costa, R.C.F.; Álgebra Linear e Aplicações; Editora Atual, 2a edição, São Paulo, 1978. **3**. Lipschutz, S.; Álgebra Linear, Mcgraw-Hill, 2a edição, São Paulo, 1974. **Bibliografia Complementar** 1. APOSTOL, T., Linear Algebra: A First Course with Applications to Differential Equations, Wiley-Interscience, 1ª ed., 1997. 2. KOLMAN, B. e HILL, D., Introdução a Álgebra Linear e Aplicações, 8ª Ed., Editora LTC. 3. HERSTEIN, I.N., Topics in Algebra, Wiley, 2. edição1975. 4. HOFFMAN, K., KUNZE, R., Linear Algebra, Prentice Hall, 2ªed., 1971. 5. HOWARD, A., RORRES, C.; Álgebra Linear com Aplicações; Bookman, 8a edição, Porto Alegre, 2001. 6. LIMA, E.L, Álgebra Linear, IMPA (Coleção Matemática Universitária), 7. edição 2006. 7. SHOKRANIAN, SALAHODDIN, Introdução a Álgebra Linear e Aplicações, Unb, 1 edição, 2004. 8. SILVA, V. V., Álgebra Linear, CEGRAF, Goiânia, 1992. 9. STRANG, G., Introduction to Linear Algebra, Wellescley – Cambridge Press.

Fonte - https://ime.ufg.br/ Acessado em 20 abr. 2019

Embora essas disciplinas tenham ementas distintas muitas dos tópicos apresentados nelas se articulam em maior ou menor grau, e, de certa forma constituem um conjunto de objetos, conceitos e procedimentos de natureza análoga. A não compreensão de determinada disciplina acima colocada em geral compromete um desempenho mais robusto nas demais disciplinas, entretanto a maneira como as disciplinas são ministradas por diferentes professores muitas das vezes estabelecem hiatos conceituais entre as próprias disciplinas comprometendo a articulação conceitual entre elas tendo como consequência uma fragmentação da visão da própria Matemática que em geral é incorporada pelos estudantes.

CAPÍTULO II. Referencial Teórico

2.1 Um Sobrevoo Sobre os Meridianos Teóricos da Pesquisa

A despeito das inúmeras contendas históricas que se observam pela disputa em relação às noções de Educação e, sobretudo, de Educação Matemática, hoje parece ser quase consensual que se admita o componente social das atividades inerentes ao processo de Educação, que é fortemente reconhecido. Por exemplo, para o matemático e educador Otte (1993):

> Tanto a tradição histórico-hermenêutica como também a tradição mais técnico-pragmática do debate sobre a concepção de Educação geral refere-se ao estoque de experiências e conquistas que uma sociedade acumula, utiliza e procura transmitir pedagogicamente e didaticamente, mas não se interessam pelos mecanismos da gênese do saber. Essa concepção da Educação tenta antes responder à questão de como transmitir a quantidade cada vez maior de conhecimentos e de experiências. (OTTE, 1993, p. 26).

Para Otte, o homem, assim como sua ação no mundo, é constituído por três componentes, quais sejam: a dimensão formal, a dimensão social e a dimensão subjetiva, que se inter-relacionam e se implicam mutuamente, na construção e interpretação do mundo humano. Nesse sentido, o autor destaca que, a despeito de qualquer ontologia que tente dar conta dos aspectos platônicos de nossa atividade cognitiva, no processo de Educação, o ser humano se destaca precisamente por sua atividade social. Nesse sentido, ele pontua que:

> Nós homens somos por um lado indivíduos, mas, por outro, seres sociais, e isto significa apegados a uma consciência de uma determinação geral de nossa pessoa. Estes dois lados de nossa existência se expressam de forma fecunda na questão educacional. Educação significa sempre a autoformação de uma personalidade individual. Mas ninguém se torna uma personalidade educada sem se espelhar no outro, sem ter a disposição e a possibilidade de se colocar no ponto de vista do outro. (OTTE, 1993, p. 28)

O autor, que não nega os aspectos individuais atrelados à questão educacional, se refere ao fenômeno educacional também como integrante da atividade social humana, indissociável em sua essência das práticas sociais estabelecidas. Ou seja, mesmo no que se refere aos conhecimentos matemáticos, em que tradicionalmente existe uma noção de formalismo que transcende a experiência comum das pessoas em seu cotidiano, há também o ponto de partida no próprio cotidiano. Por exemplo, ao se referir a demonstrações Matemáticas, que são ferramentas de validação dos argumentos matemáticos, o autor as considera como o lado comunicativo da Matemática, pois para Otte (1993, p. 24), “uma prova só pode ser compreendida por aquele que já acumulou a experiência suficiente para que, sozinho, pudesse ter encontrado a prova”.

Nesse sentido, ele destaca que a questão educacional se impõe dialeticamente na medida em contempla as relações dinâmicas do binômio sujeito-sociedade, integrando com suas ideias a dimensão subjetiva e social, no contexto da experiência educacional:

> A questão educacional não é apenas uma questão da formação da personalidade individual, mas é ao mesmo tempo um problema social. Educação é, de certa forma, a visão da totalidade. Esta totalidade também compreende o contemplador. Educação é, por isso, sempre, também uma autocontemplação. (OTTE, 1993, p. 28)

O autor conclui afirmando que o sujeito é autor *da* e *é* atingido pela Educação. Ele pontua que “a relação entre esses lados do sujeito, entretanto, nunca é direta, mas mediada num contexto social”. O autor destaca a importância da dimensão social na constituição da rede de significados que a própria atividade social elabora e reelabora constantemente, num movimento pendular que deve partir do sujeito em direção à dimensão social.

2.2 Um tempero epistemológico soviético

Nessa seção buscaremos fazer uma aproximação da Teoria da *Atividade*, pois é através da *atividade* que iremos cotejar nossas discussões no decorrer desse trabalho nesse trabalho, uma vez que a partir da teoria da atividade nosso referencial teórico principal está fundamentado, e nossa abordagem interpretativa dos resultados gerados para essa investigação terão estofo teórico lastreado na noção de atividade.

A teoria ganha destaque com Vygotsky que foi o predecessor teórico de Leontiev e teve seu interesse centrado no processo de interação do homem com os signos na comunicação. Avançando e apoiando-se nessas ideias, Alexei Nikolaevich Leontiev desenvolveu a *Teoria da Atividade.* Para esse teórico, o papel da atividade prática dos sujeitos, as relações práticas com o mundo eram protagonistas em relação aos processos de comunicação, pois, para Leontiev, a comunicação se dá na atividade prática no momento mesmo em que ocorre.

Leontiev, foi colega e seguidor de Vygotsky, efetuando seus primeiros estudos tendo como referência a Teoria Histórico-social, na qual situou o conceito de *atividade*, responsável pelo desenvolvimento das funções psíquicas da criança. Esse autor, assim como Vygotsky, problematiza a condição humana através da natureza sócio-histórica do psiquismo humano e, para fundamentar suas ideias, também lastreada na teoria do desenvolvimento social, de Karl Max,

A teoria marxista, segundo o próprio Leontiev começou a ser empregada pelos cientistas soviéticos a partir da década de 1920, quando eles perceberam que esse fundamento, além de trazer posicionamentos da dialética, proporcionava a crítica às ideologias da psicologia divulgada no mundo, fato conveniente na época, visto que a União Soviética atuava sob um regime de governo socialista.

Nesse cenário, os estudos da Psicologia, na União Soviética, foram sendo direcionados para uma construção e abordagem fundamentada na concepção com base no materialismo histórico, o que evidentemente também traz em seu bojo um projeto político na acepção mais ampla do termo, uma vez que esse projeto está inserido em uma sociedade que pretendia implantar um modelo político circunscrito no que entendemos por socialismo.

Para Leontiev a teoria marxista destaca a atividade humana, seu desenvolvimento e sobretudo constrói esquemas explicativos dessa atividade inaugurando uma nova perspectiva de entendimento de psicologia humana. É através da ideia central da atividade humana que há o desenvolvimento cognitivo, em que percepções e pensamentos se originam e se desenvolvem:

> In reality the philosophic discovery of Marx consists not in identifying practice with cognition but in recognizing that cognition does not exist outside the life process that in its very nature is a material, practical process. The reflection of reality arises and develops in the process of the development of real ties of cognitive people with the human world sur-rounding them; it is defined by

> these ties and, in its turn, has an effect on their development. (LEONTIEV, 1978. p. 44). [8]

Leontiev estabelece que a teoria do desenvolvimento deve se constituir considerando a importância dos laços cognitivos estabelecidos pelos indivíduos com o universo social em que estão situados, e como se inter-relacionam com o mundo pois para ele “o desenvolvimento de laços reais de seres cognitivos com o mundo humano ao seu redor é definido por laços e, por sua vez, afeta o desenvolvimento deles.” (1979, p.44).

O autor comenta o panorama geral em que a psicologia se encontrava até então, fundamentada em conceitos mais ou menos metafísicos, reforçando binômios tipo exterioridade-interioridade como absolutamente excludentes uns dos outros, em suma um recorte absolutamente idealista do ser humano.

> The old metaphysical psychology knew only abstract individuals being subjected to the action of an environment that resisted them, who on their part exhibited characteristic psychic capabilities: perception, thought, will, feelings. (Leontiev, 1979 p. 45).

A partir dessas reflexões o autor desenvolve o que caracteriza por *atividade* e quais os mecanismos subjacentes a aceitação desse conceito como estruturador da cognição e experiência humana no mundo, situando os fenômenos referentes aos processos de reflexão e ação no mundo, linguagem e a própria existência humana em uma topografia onde a ideia de atividade é estruturante:

> The emergence in activity of goal-directed processes or actions was historically the consequence of the transition of humans to life in society. The activity of the participants of collective labor is induced by its product, which initially met the needs of each participant directly. However, the emergence of even the simplest technical division of labor necessarily leads to isolation of the separate partial results, which are achieved by the separate participants in the collective labor activity, but do not *in and of themselves* satisfy their needs. Their needs are not satisfied by these “intermediate” results, but by the portions of the product of their aggregate activity that each

[8] Na realidade, a descoberta filosófica de Marx consiste não em identificar a prática com a cognição, mas em reconhecer que a cognição não existe fora do processo da vida que, por sua própria natureza, é um processo material e prático. O reflexo da realidade surge e se desenvolve no processo de desenvolvimento dos laços reais das pessoas cognitivas com o mundo humano que as cerca; é definido por esses laços e, por sua vez, afeta o seu desenvolvimento.

participant receives on the basis of the relations with each other during the labor process, i.e., on the basis of *social* relations.[9]

Essa perspectiva nos dá um panorama descritivo de como se articula a atividade individual e a atividade social, concebendo a noção de *atividade* como um projeto planejado que visa atender demandas tanto nas esferas individuais quanto nas esferas coletivas. Nesse ponto talvez nos fosse mister estabelecer o questionamento de como acontece essa articulação. Para nós em o protagonismo da atividade comunicativa e seus elementos estruturantes parecem dar conta desse questionamento, inclusive por meio da consideração de ideias oriundas de uma abordagem semiótica da linguagem.

A. Pino (1995), por exemplo, coloca de maneira bastante interessante essas noções, particularmente articulando essa postura teórica à elementos da semiótica, uma vez que a experiência fundamenta ontologicamente na condição humana enquanto movimento dialético entre a interioridade e a exterioridade (numa tensão dinâmica por engendrada por um lado por estruturas contraditórias e por outro lado complementares), imbricado no compromisso com a ação:

> As características social e instrumental da atividade humana conferem-lhe sua qualidade produtora, ou seja, de possibilitar a transformação simultânea do objeto e do sujeito da ação. O duplo caráter instrumental da atividade humana define o conceito de trabalho social, o qual implica um duplo processo: de objetivação da subjetividade - o produto da ação é a materialização das qualidades do sujeito agente - e de subjetivação da atividade objetivada - o produto da própria ação pode ser reapropriado pelo sujeito. (PINO, 1995 p. 32)

Nessa perspectiva o caráter dual da caracterização humana no mundo colocando sob escrutínio a atividade humana enquanto produtora e reprodutora da própria

---

[9] O surgimento de atividades de processos ou ações direcionadas a objetivos foi historicamente a conseqüência da transição dos seres humanos para a vida em sociedade. A atividade dos participantes do trabalho coletivo é induzida por seu produto, que inicialmente atendeu diretamente às necessidades de cada participante. Contudo, o surgimento até da divisão técnica mais simples do trabalho leva necessariamente ao isolamento dos resultados parciais separados, que são alcançados pelos participantes separados da atividade coletiva de trabalho, mas não por si mesmos satisfazer suas necessidades. Suas necessidades não são satisfeitas por esses resultados *intermediários*, mas pelas porções de o produto de sua atividade agregada que cada participante recebe com base nas relações durante o processo de trabalho, ou seja, com base nas relações sociais.

humanidade lastreada no conceito de trabalho que em última instância é por excelência responsável pela materialização e objetivação da atividade humana no mundo.

Bakhtin (1988) com um projeto de descrever os processos comunicativos sendo amparado por uma perspectiva de base marxista, buscou integrar a esse seu projeto conceitos que implicam em uma inauguração de uma abordagem também semiótica da linguagem, situando os processos de significação num contexto de permutação de sentidos entre interlocutores historicamente determinados, onde de fato o conhecimento e por isso mesmo a significação existe mesmo no ato comunicativo enquanto tal:

> Na verdade, a significação pertence a uma palavra enquanto traço de união entre os interlocutores [...]. A significação não está na palavra nem na alma do falante, assim como também não está na alma do interlocutor. Ela é o efeito da interação do locutor e do receptor produzido através do material de um determinado complexo sonoro. É como uma faísca elétrica que só se produz quando há contato dos dois polos opostos. (BAKHTIN, 1988, p.132).

Em outras palavras, mais uma vez aí está enfaticamente presente a ideia de significação como inerente à um processo (social) donde emana as principais ideias referentes aos mecanismos comunicativos do falante enquanto agente cognitivo vinculado em sua corporeidade, e própria experiência de mundo, que representa em última instância o protagonismo da componente social na definição dos aspectos humanos de cognição.

Uma vez estabelecida a dimensão social como protagonista na constituição da experiência humana, as respostas para modelos em que possamos discutir as propriedades caracterizadoras do ser humano e de sua ação no mundo parecem emergir quando inquirimos dois aspectos constituintes da própria humanidade: como se estrutura o *pensamento* e como se estrutura a *ação humana* no mundo - e para nós esses dois elementos se articulam em torno da linguagem constituindo a própria humanidade. Se por um lado a ação enquanto manifestação de concretude humana no mundo transforma o mundo ao mesmo tempo que transforma o homem no mundo, o próprio pensamento é transformado também nesse movimento hegeliano de implicação mútua, tendo sua existência cristalizada no fenômeno na linguagem e da comunicação.

Uma maneira de compreender esses aspectos inerentes ao próprio pensamento é entendê-lo em sua natureza social, pois é através dessa abordagem que a própria noção de desenvolvimento humano se posta de maneira mais coerente.

A Teoria da *Atividade*, desenvolvida por Leontiev, propõe que o ser humano se desenvolve devido a necessidade de interagir com o meio em que está inserido para satisfazer a suas demandas pessoais. O desenvolvimento das funções psíquicas decorrerá de um processo de apropriação de algum saber, que internaliza a atividade externa. Nessa via teórica, a aprendizagem é uma atividade humana movida por um objetivo, articulando-se em torno de três componentes: se manifesta plasmando-se em um meio social, através de uma atividade mediada nas relações entre os seres humanos e é uma atividade inter-relacionada com sujeitos e objetos de aprendizagem.

No âmbito do ensino e aprendizagem, está atrelado à noção de que se deve ter um *motivo* para aprender algo, para interiorizar esse algo. Assim, é o *motivo* que por exemplo mobiliza a ação do aluno, de modo que como corolário dessa mobilização ele se aproprie de seu processo de aprendizagem, promovendo seu desejo de saber o porquê de determinada atividade e onde se pretende chegar com ela. Um dos grandes problemas no ensino de Matemática é o fato de não se compreender o propósito de determinada atividade ou ação pelo aluno, logo, não basta simplesmente trabalhar com determinado conteúdo matemático em sala de aula para garantir sua compreensão

2.3 Um passeio pelo quintal da Matemática Realística

Um dos pensadores que se ocupou da questão de implementar novas possibilidades para a compreensão dos processos de ensino-aprendizagem em Matemática foi Hans Freudenthal, matemático de origem holandesa, com que foi um arguto crítico da chamada Matemática Moderna que era um slogan nos anos 60. Esse movimento da Matemática Moderna enfatizava uma prática de ensino e aprendizagem de Matemática fundamentada entre outras premissas na teoria dos conjuntos. Para Freudenthal a Matemática Moderna abstraiu a Matemática de maneira artificial, reificando a maneira de conceber Matemática enquanto instância puramente abstrata. O autor entendia que ao contrário do projeto plasmado no movimento de Matemática Moderna, a abordagem de ensino e aprendizagem da Matemática deveria passar necessariamente pela compreensão do papel ocupado pela Matemática na experiência humana de estruturar a realidade.

Para o autor essa realidade de experiência seria passível de transformações e aprimoramentos e a própria Matemática seria uma possibilidade de refinar essa realidade:

> I prefer to apply the term reality to what common sense experiences as real at a certain stage'. Reality is understood as a mixture of interpretation and sensual experience, which implies that mathematics, too, can become part of a person's reality. Reality and what a person counts as common sense are not static but grow and are afected by the individual's learning process[10].

O autor acredita que se por um lado que se é justamente na dimensão abstrata da Matemática que a flexibilidade (linguística) encontra direito à cidadania, por outro lado, em geral, nos indivíduos comuns essa flexibilidade não é tão frequente:

> In an objective sense the most abstract mathematics is without doubt also the most flexible. But not subjectively, since it is wasted on individuals who are not able to avail themselves of this flexibility (FREUDENTHAL, 1968, p. 5).[11]

Uma questão que poderia ser colocada era que a noção de aplicabilidade *da Matemática* para potencializar seu ensino, entretanto essa abordagem também era frequentemente problemática por conceber um tipo de Matemática que seria útil apenas em um conjunto limitado de contextos. No entanto, o problema não poderia ser mitigado ao adotar a postura de se ensinar Matemática pura e depois mostrando como aplicá-la.

Em vez disso, a Matemática deveria ser ensinada como deveria ser ensinada à matemáticos. Esta visão da tarefa da Matemática escolar não foi apenas motivada por sua importância para a utilidade; para Freudenthal a Matemática era, em primeiro lugar, uma atividade inerente à humana. Como matemático de formação, e grande

---

[10] Prefiro aplicar o termo realidade ao que o senso comum experimenta como real em um determinado estágio . A realidade é entendida como uma mistura de interpretação e experiência sensual, o que implica que a Matemática também pode se tornar parte da realidade de uma pessoa. A realidade e o que uma pessoa considera como senso comum não são estáticos, mas crescem e são afetados pelo processo de aprendizagem do indivíduo.

[11] Num sentido objetivo, a Matemática mais abstrata é sem dúvida também a mais flexível. Mas não subjetivamente, uma vez que é subutilizada em pessoas que não conseguem se beneficiar dessa flexibilidade (Freudenthal 1968, p. 5).

pesquisador, ele compreendia que *fazer* Matemática era mais importante para aprendizagem do que assumir a Matemática como um produto pronto, e esse *fazer* matemático seria uma maneira de se apropriar dos conceitos e procedimentos matemáticos no interior de uma *atividade* [12]Matemática.

Para o autor na Educação Matemática essa postura seria a mais profícua uma vez que a Educação Matemática foi um processo de fazer Matemática que levou a um resultado, a uma Matemática como *produto*. No ensino tradicional de Matemática, o resultado das atividades Matemáticas de outras pessoas foi tomado como ponto de partida para aprendizagem. Freudenthal caracterizou essa postura como um instrumento anti-didático pois havia inversão processual que inviabilizava o desenvolvimento de habilidades Matemáticas bem como a construção e interpretação de conceitos. As coisas estavam de cabeça para baixo se alguém começasse ensinando resultado de uma atividade (sentido usual do termo) em vez de ensinar a própria atividade.

> [Mathematics as a human activity] is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach (FREUDENTHAL, 1971, p. 413± 414).[13]

Ele nomeou essa atitude de estruturação da experiência de *matematização* em outras publicações e deve-se enfatizar que envolve tanto o substrato da *realidade* quanto os objetos matemáticos. Em outras palavras, Freudenthal incluía ambas

[12] Aqui estamos propondo uma a acepção histórico cultural de atividade, situando a leitura de Freudenthal nas proximidades conceituais dessa teoria, buscando uma intersecção entre as estruturas enunciativas dessas teorias.

[13] A Matemática como atividade humana] é uma atividade de resolução de problemas, de busca de problemas, mas também é uma atividade de organização de um assunto. Isso pode ser uma questão da realidade, que deve ser organizada de acordo com padrões matemáticos, se os problemas da realidade tiverem que ser resolvidos. Também pode ser uma questão Matemática, resultados novos ou antigos, próprios ou de terceiros, que devem ser organizados de acordo com novas idéias, para serem melhor compreendidos, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática (Freudenthal 1971: 413 ± 414).

Matemática Aplicada e *Matemática Pura* em sua concepção de matematização, tematizando a complementariedade desses conceitos aparentemente contraditórios.

Nesse sentido, seu ponto de partida difere da perspectiva dominante da divisão entre aplicação e teoria que se concentraram em discursos acadêmicos que buscam estabelecer uma hierarquia entre essas dimensões da Matemática.

Para nós essa maneira de compreender e tematizar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática são absolutamente importantes no estabelecimento de visões que impliquem melhorias no processo formativo de professores que irão se ocupar de ensinar Matemática. Em nossa própria investigação tivemos o cuidado de possibilitar aos alunos (professores em formação) que tivessem experiências que possibitassem a autonomia da descoberta, através do engajamento em atividades que permitissem descobrir, reinventar, tanto conceitos algébricos quanto posturas enquanto futuros docentes.

2.4 Significados para *Significado* e a constituição de nosso *Ethos* docente.

> Ser significa ser para o outro e, por meio do outro, para si próprio. (BAKHTIN,2003, p.341).

Em primeiro lugar cumpre destacarmos que a acepção que damos ao léxico *Ethos* refere-se ao conjunto de características comuns a um grupo de indivíduos pertencentes a uma mesma sociedade, que compartilham costumes, culturas e práticas. Aqui em nossa referência estamos querendo significar o âmbito e os processos que perpassam desde a formação docente até a atuação e práxis nos diversos contextos de atuação/intervenção na sociedade. Um termo que poderíamos tomar emprestado é o conceito de *Habitus* proposto por Bourdieu:

> um sistema de disposições duráveis e transponíveis que, integrando todas as experiências passadas, funciona a cada momento como uma matriz de percepções, de apreciações e de ações – e torna possível a realização de tarefas infinitamente diferenciadas, graças às transferências analógicas de esquemas [...] (BOURDIEU, 1983, p. 65).

Obviamente não pretendemos discutir a fundo esses conceitos neste espaço, queremos apenas consignar que nosso entendimento por Ethos tem por escopo desde a formação docente (no caso de nossa investigação a turma de Álgebra I do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás) até seu exercícios profissional (que em alguns casos acontece como em nosso próprio processo formativo, concomitantemente formação e atuação profissional).

Ao tentarmos estabelecer uma arqueologia do termo *significado* encontramos nos mais diversos contextos definições, sejam elas em filosofia, sociologia, psicologia, linguística etc. A acepção que atribuiremos a esse termo em nossa investigação está conectada algumas origens conceituais que remontam certas tradições filosóficas que se ocuparam de desenvolver uma teoria fundamentada no marxismo.

Aproximando desse conceito desse apresentado na literatura que encontramos em nosso amparo teórico, iniciamos nossa visita à noção de *signo* proposto por Bakhtin (2006):

> Os signos só podem aparecer em um terreno interindividual. Ainda assim, trata-se de um terreno que não pode ser chamado de "natural" no sentido usual da palavra: não basta colocar face a face dois *homines sapiens* quaisquer para que os signos se constituam. É fundamental que esses dois indivíduos estejam socialmente organizados, que formem um grupo (uma unidade social): só assim um sistema de signos pode constituir-se. (BAKHTIN, 2006, p. 33).

A partir da aproximação do conceito de signo, Bakhtin vai situar o fenômeno da gênese desse elemento na atividade socialmente organizada, através dos processos humanos de experiência e intersubjetividade. O autor enfatiza a relação dialética presente na articulação entre a social e a dimensão individual, e pelas condições essa articulação se manifesta, a saber, na urdidura histórica das relações socioculturais. O autor comenta:

> Todo signo, como sabemos, resulta de um consenso entre indivíduos socialmente organizados no decorrer de um processo de interação. Razão pela qual as formas do signo são condicionadas tanto pela organização social de tais indivíduos como pelas condições em que a interação acontece. Uma modificação destas formas ocasiona uma modificação do signo. (BAKHTIN, 2006, p. 43).

Se por um lado a natureza contratual desse consenso compromete as pessoas envolvidas com um engajamento num projeto comunicativo comum, por outro lado a própria arquitetura da organização social ressignifica o signo. Essa característica de mútua implicação possibilitará em última instância que os processos comunicativos, amparados em seus mecanismos sociais e individuais de regulação garantam a efetividade da manutenção cultural, cristalizada na comunicação das experiências humanas, pois do contrário, a única solução possível seria admitirmos que residimos em uma Torre de Babel.

Esse processo de ressignificação do signo constitui elemento substancial da própria consciência humana, que justamente por ser engendrada tanto no âmbito individual, quanto no âmbito social, não será passível de escrutínio e muito menos manejo epistemológico emprestados das ciências naturais, pois como afirma Bakhtin:

> Nem a biologia nem a fisiologia estão em condições de resolver esse problema. A consciência constitui um fato socioideológico, não acessível a métodos tomados de empréstimo à fisiologia ou às ciências naturais. É impossível reduzir o funcionamento da consciência a alguns processos que se desenvolvem no interior do campo fechado de um organismo vivo. Os processos que, no essencial, determinam o conteúdo do psiquismo, desenvolvem-se não no organismo, mas fora dele, ainda que o organismo individual participe deles. (BAKHTIN, 2006, p.47).

Com isso o Bakhtin destaca que a consciência enquanto fator socioideológico não pode ser passível de métodos deliberadamente empregados nas investigações metodologicamente tributárias das ciências naturais, que devido ao caráter dialético mitiga a dualidade *interioridade x exterioridade* do fenômeno da consciência, escapando de qualquer procedimento pautado em abordagens consagradas pela tradição científica.

As reflexões de Bakhtin possibilitam caracterizar em última instancia como se estabelece o processo de comunicação desde a gênese do signo, situando-o no bojo do fenômeno social sem, no entanto, escamotear as demais dimensões de constituição humana incluindo aspectos cognitivos e subjetivos. Grosso modo o autor estabelece as características essenciais de figuração da enunciação no processo comunicativo, pois para o autor é justamente nesse processo, que está fortemente atrelado ao trinômio fisiologia-subjetividade-socialização que se estabelece a enunciação em si:

> Como se apresenta a enunciação monológica do ponto de vista do subjetivismo individualista? Vimos que ela se apresenta como um ato puramente individual, como uma expressão da consciência individual, de seus desejos, suas intenções, seus impulsos criadores, seus gostos etc. A categoria da expressão é aquela categoria geral, de nível superior, que engloba o ato de fala, a enunciação. (BAKHTIN, 2006 p.112).

Uma vez lançado os elementos conceituais para o entendimento da estruturação dos signos, pode-se conceber um esquema onde os signos se articulam em estruturas cada vez mais complexas, ganhe envergadura suficiente para possibilitar o movimento de exteriorização individual que se cristaliza em cadeias maiores, as expressões, responsáveis por integrarem as noções de psiquismo individual à exterioridade social:

> Mas o que é afinal a expressão? Sua mais simples e mais grosseira definição é: tudo aquilo que, tendo se formado e determinado de alguma maneira no psiquismo do indivíduo, exterioriza-se objetivamente para outrem com a ajuda de algum código de signos exteriores. (BAKHTIN, 2006, p.113)

Colocada dessa maneira a noção de expressão delimita por um lado e por outro lado articula aspectos referentes ao conteúdo da consciência e a objetivação exterior desse conteúdo (manifestação sociocultural), donde seus aspectos duais, permite estabelecer conceitualmente a dinâmica do próprio ato comunicativo:

> A expressão comporta, portanto, duas facetas: o *conteúdo* (interior) e sua *objetivação exterior* para outrem (ou também para si mesmo). Toda teoria da expressão, por mais refinadas e complexas que sejam as formas que ela pode assumir, deve levar em conta, inevitavelmente, essas duas facetas: todo o ato expressivo move-se entre elas. (BAKHTIN, 2006, p.113)

Por fim, ao conjunto de signos ideológicos, que constituem a expressão, por sua vez vão se articulando em estruturas mais complexas constituindo-se enquanto *enunciados.* E é a partir do conceito de *enunciado* é que iremos conceber a noção de *significado*, considerando que reconstrução de enunciações de sujeitos, outros sujeitos, ao compartilharem experiências humanas passiveis de serem estruturadas pela linguagem.

Uma consequência importante que obtemos a partir dessa abordagem conceitual é que a própria noção de *conhecimento* pode ser compreendida enquanto residente no domínio da *enunciação* do sujeito que comunica para outro sujeito.

Para Bakhtin, é o enunciado e não o signo a unidade básica de comunicação, pois ao se falar em enunciado pressupomos um enunciador cristalizado por um sujeito concreto em sua historicidade que enuncia algo para um receptor, para *o outro*.

O outro para muito além do reconhecimento de uma alteridade é o *lócus* onde se empreende a busca pelo sentido, mas também, simultaneamente, da incompletude e da provisoriedade. Essa perspectiva apresenta a condição de inacabamento permanente do sujeito no mundo, assim como também denuncia a precária condição das teorias que buscam, através de uma linguagem instrumental, representar a totalidade da experiência do homem no mundo.

Em suma, Bakhtin, postula que a língua é um fato social cuja existência funda-se nas necessidades de comunicação e o processo de comunicação encontra na linguagem o instrumento necessário para possibilitar a interação social, sendo construída e reconstruída em cada instante como numa ciranda de dimensões humanas dançando em torno de uma constelação de signos que se revelam e se dispõe a serem interpretados.

Figura 4 - Uma metáfora para comunicação

Fonte: – Ciranda, de Poteiro, 2007.[14]

[14] Coletado em: https://www.belgaleria.com.br/peca.asp?ID=2536878 em 01 out. 2019

2.5 Uma proposta de leitura para o *Ethos* docente: O MTCS

Cumpre notar primeiramente que quando buscamos uma caracterização que consiga estabelecer uma estrutura enunciativa que comunique o significado do que entendemos pelo Nosso principal aporte teórico, que conduziu nosso posicionamento epistemológico é prático em nossa investigação assume como interlocutor Lins[15] (1992), que fez inúmeras contribuições no contexto de ensino-aprendizagem do pensamento algébrico, varrendo em suas pesquisas desde a fase pré-escolar até ao nível de formação de professores, sendo considerando uma referência internacional em *Algebra Thinking*.

Em suas pesquisas esse autor problematiza os aspectos inerentes à produção de significado algébrico e a relação especial entre cognição e práticas sociais associadas inaugurando uma nova abordagem epistemológica e metodológica para o ensino de Álgebra a partir de um estudo histórico e um estudo experimental sobre as características epistemológicas e sociais dos processos de ensino e aprendizagem de dessa disciplina.

Para o autor a noção de que não se deve estabelecer a priori um juízo sobre determinado conhecimento sem antes considerar o projeto político que está a que está circunscrito essa noção de conhecimento ganha protagonismo, estabelecendo assim uma visão crítica de teoria de ciência e teoria do conhecimento sinalizando que

> Julgamentos de valor sobre se um conhecimento é importante ou não, mais importante que outro ou não, digno de atenção ou não, só fazem sentido contra o pano de fundo de algum projeto político de mundo. Nenhuma teoria do conhecimento que mereça o nome pode estabelecer estes julgamentos *em seu interior*, caso contrário estará confessando que já pertence a um grupo ou classe, e a serviço de seus interesses. Estes julgamentos são sempre

[15] O Professor Dr. Romulo Campos Lins, foi professor Livre Docente da UNESP de Rio Claro, onde atuou por 25 anos junto aos programas de mestrado e doutorado. Por toda a sua obra, é considerado por seus pares como um dos principais pensadores de sua geração e reconhecido internacionalmente por seus estudos sobre Álgebra Thinking. Ao longo de sua vida acadêmica criou o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) um modelo epistemológico e uma ferramenta teórica inspirada em suas leituras em especial de teóricos russos como Leontiev, e ingleses como Nelson Goodman. Rômulo Lins foi presença constante em eventos internacionais teve atuação destacada nas conferências do PME, CIEAEM e ICME entre outras, tendo sido organizador do ICMI Study "A Educação Profissional e Desenvolvimento de Professores de Matemática" realizado no ano de 2005 no Brasil. Membro de dezenas de comitês científicos e do corpo editorial de revistas científicas nacionais e estrangeiras. Seus artigos escritos num estilo próprio são referências para muitos estudos e projetos de Educação Matemática.

> atos políticos e devem ser bem identificados como tais. Teoria da Ciência não é o mesmo que Teoria do Conhecimento. (LINS, 2012, p. 12)

Lins desenvolveu uma abordagem de Educação Matemática em que precisou fundamentar epistemologicamente as bases de sua compreensão sobre Álgebra e pensamento algébrico (noções que ele diferencia conceitualmente), propondo como ponto de partida para compreensão dos fenômenos relacionados ao pensamento o *Modelo Teórico dos Campos Semânticos,* ou MTCS ou ainda, simplesmente MCS. Sobre essa maneira de abordar o fenômeno vinculado ao ensino aprendizagem o autor comenta:

> O Modelo constitui-se em um pequeno número de noções e nas relações entre elas; ele sempre foi pensado como um quadro de referência apenas, a partir do qual o que vai existindo (sempre de forma emergente e emergencial) é tratado: a complexidade é apenas um possível resultado de um processo de produção de conhecimento e de significado, e o Modelo apenas existe enquanto está em movimento, "em ação". Estudar o MCS é usá-lo, exatamente isto. (LINS, 2012, p. 11)

Uma vez constituindo as noções e os elementos integrantes dessa abordagem o autor destaca que um esforço para compreensão das ações de um autor deve necessariamente estar plasmada da necessidade de considerar a perspectiva desse mesmo autor, em sua visão de mundo. Essa postura de compreensão viabiliza uma nova maneira de se compreender os processos de comunicação humana:

> Toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível. (LINS, 1999, p.93).

Essa abordagem entre outras coisas nos possibilita constituir uma nova visão de *comunicação* centrada no fenômeno comunicativo no exato momento em que se realiza, em um processo que explicita constituição social da atividade de leitura e produção de significados, portanto a própria caracterização de comunicação reside no fato de postularmos que somos semelhantes por constituirmos um espaço de intersecção em nossa atividade cognoscente:

> Uma forma de dizer o que é sermos semelhantes - embora certamente não a única forma de fazê-lo -, é dizer que sermos semelhantes é sermos capazes de compartilhar um espaço comunicativo; esta é a caracterização de sermos semelhantes que adotarei. Para discutir melhor esta caracterização, examinarei também a noção de comunicação. (1999, p.80).

Nesse sentido o autor estabelece as condições que possibilitam conceber as bases de sua teoria, fundamentada sobretudo em uma abordagem comunicativa em que *autor* e *leitor* alternam suas posições no jogo comunicativo estabelecido, e de maneira cadenciada buscam fundar um *espaço* no qual ambos compartilhem interlocutores (direções em que se fala), a fim de conseguirem se *lerem,* se entenderem em um movimento de construção e reconstrução de significados. O autor compara a ideia de campo semântico à uma espécie de jogo autorregulatório onde os participantes vão assumindo de maneira escalonada a posição de produtores de conhecimento, quanto consumidores, entendendo conhecimento como a crença afirmação seguida de uma *justificação*.

É nesse sentido que o processo de efetiva comunicação é considerado, na medida em que as pessoas compartilham interlocutores nessa dança de troca de papeis enunciativos. Para Lins:

> Um campo semântico, de modo geral, é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores dentro de limites; que limites são estes, só sabemos a posteriori: enquanto a interação contínua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico. (2012, p.17).

Ao estabelecer as noções de *texto*, *autor*, e *leitor,* Lins pretende ressignificar papéis e redefinir protagonismos em um modelo comunicativo que incorpore as contradições e complementariedades dos processos de comunicação em que seja possível falar-se em partilha de campos semânticos no interior de um diálogo em que a realidade da comunicação é recriada assumindo uma perspectiva teórica em que. o *autor* ao falar sempre *diz* para um *alguém,* mas mesmo que esse *autor* esteja concretamente falando para um público, uma sala de aula por exemplo, ou para uma banca avaliativa, esse *alguém* para quem ele fala não corresponde a indivíduos deste *público*, e sim a um *leitor* que o *autor* constitui.

O que Lins destaca nessa maneira de esquematizar seu modelo é que este *interlocutor* não deve ser identificado com o *outro*; O pontilhado refere-se a natureza vetorial do interlocutor. Aqui Lins faz uma distinção entre ser biológico (*o outro*) e ser cognitivo (o interlocutor a quem o sujeito se dirige, e que pode ou não corresponder a um outro). O processo inverso, aquele no qual o leitor *lê*, é semelhante, mas não idêntico, pois ne nesse processo *o leitor* constitui sempre *um autor*, e é em relação ao que este *um autor* diria que o leitor produz significado para o texto (que assim se transforma em texto).

Dentro do modelo que o autor propõe, o que pode explicar a convergência que é percebida é o fato de que os *um* leitor e os *um* autor não são constituídos de forma arbitrária e sim são constituídos a partir dos modos de produção de significados que o autor ou o leitor internalizaram como sendo legítimos.

Nesse solo teórico *texto* é o resíduo de uma enunciação, resíduo esse que pode ser verbal, escrito, esquemático. Mas quem pode dizer se algo é um texto ou não é apenas o leitor, e apenas no instante em que este leitor produz significado para o texto. Tanto quanto não há leitor sem texto, não há texto sem leitor. Um livro de álgebra só se constitui um *texto* no momento mesmo em que é *lido* e mais radicalmente não existe conhecimento fora da operação instantânea de nossa estrutura cognitiva.

Assim para Lins o *autor* produz uma enunciação, para cujo resíduo o leitor produz significado através de uma outra enunciação, e assim segue.

> A convergência se estabelece apenas na medida em que compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um espaço comunicativo não é necessária a transmissão para que se evite a divergência. (Lins, 1999, p.82)

Nesse sentido e considerando esse processo Lins afirma:

> O sujeito cognitivo se encontra com o que acredita ser um resíduo de enunciação, isto é, algo que acredita que foi dito por alguém (um autor). Isto coloca uma demanda de produção de significado para aquele algo, demanda que é atendida (esperançosamente) pela produção de significado de o autor em que se tornou o leitor. O autor-leitor fala na direção do um autor que aquele constitui; o um autor é o interlocutor (um ser cognitivo). Vê-se que o ser cognitivo pode ou não ser associado (de acordo com alguma conveniência) a algum ser biológico: deve ser fantasmagórico conceber um mundo todo de seres cognitivos todos desprovidos de corpo biológico ou pelo menos uma persona, um traço de corpo biológico. Digo deve ser porque não

sei se é ou não, já que não consigo acreditar de verdade que isto seja realmente possível; de todo modo, mesmo a possibilidade ficcional já pode causar um estranhamento considerável. (Lins, 2012, p.15).

É importante compreender inicialmente que nossa perspectiva se situa nos limites do mundo (humano) constituído (não só) mas fundamentalmente pela linguagem, e que a linguagem expressa a humanidade da atividade exclusivamente humana (cultura) nas condições objetivas que o ser humano está lastreado.

Isso significa que essa abordagem nos permite vislumbrar uma nova maneira de compreender a comunicação que não é mais uma atividade unilateral *autor-leitor*, como se as pessoas estivessem frente a frente e já não existisse espaço para problemas de comunicação, o que evidentemente é uma quimera pois assim o processo de ensino aprendizagem se resumiria em tráfego de dados e estaria assegurado dado a banalidade da interconexão estabelecida entre os sujeitos da comunicação.

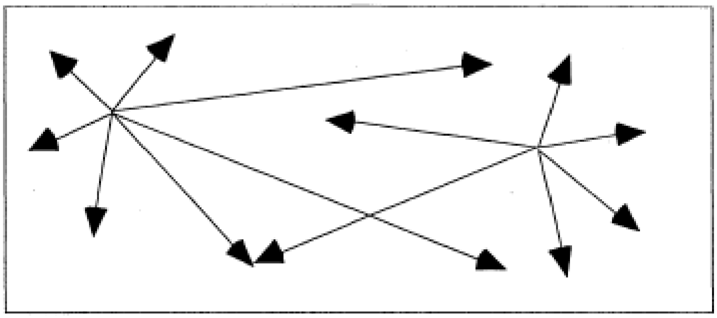
Lins lança mão do diagrama a seguir para salientar a natureza de cada momento: *O autor* fala na direção de *Um leitor* (instituído) e no movimento inverso, *Um autor* é pressuposto pelo *O leitor.*

Diagrama 1– Espaço Comunicativo

Fonte: Lins, (1999, p. 83)

Uma das grandes vantagens dessa visão é que constituímos uma visão panorâmica de espaços comunicativos compartilhados, onde as condições e protagonismos vão se revezando até se integrarem num espaço dialógico multidimensional e não apenas linear. A imagem que representa essa dinâmica poderia ser esta:

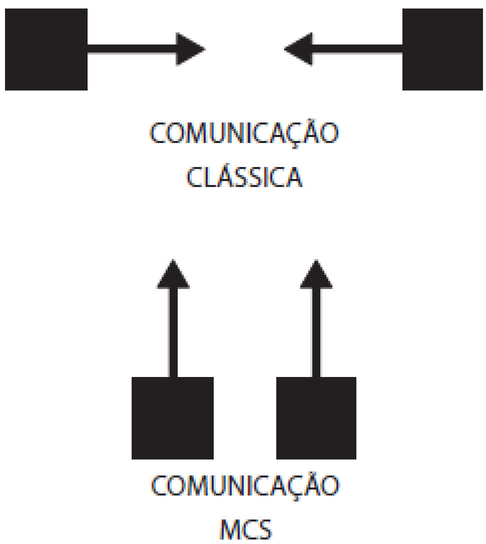
Diagrama 2– Espaço Comunicativo



Fonte: Lins, (1999, p. 83)

Dentro deste espaço comunicativo pode até acontecer a convergência direta, mas ela não é necessária. o que importa é que não nos afastemos demais. Esse enfoque subverte o modelo de comunicação clássica uma vez que desloca o eixo da comunicação de um espaço de uma dimensão onde autor e leitor falam de frente uma para o outro, e estabelece a noção de *espaço comunicativo,* ampliando a dimensão em que ocorre esse fenômeno:

Diagrama 3 – Comunicação Clássica *vs* Espaço Comunicativo



Fonte: Lins, (2012, p. 24)

O autor sinaliza que como dessa maneira de abordar os processos comunicativos se desprendem duas consequências que merecem destaque especial:

A primeira consequência é que, uma vez que aos nos postarmos incessante e alternadamente na posição de *o autor* e de *o leitor* em cada processo dialógico estabelecido, terminamos por fundir as duas imagens fazemos com que experienciamos a sensação de comunicação efetiva. (no diagrama 1 acima as flechas vazadas se tornam contínuas).

A segunda consequência deste modelo é, então, que o que dizemos não é apenas aquilo que afirmamos (por acreditar), mas também, e constitutivamente, o que nos *autoriza* a dizer o que dizemos. O autor exemplifica:

> por exemplo quando uma criança diz que 2+3=5, porque juntando dois dedos com três dedos e o matemático diria que 2+3=5, porque segundo os axiomas de Peano, porém para compartilhar um espaço comunicativo com a criança, o matemático compartilha o juntar dedos como forma legítima de se produzir significado para a adição. (Lins, 1999, p.83)

No fundo o que a discussão que o autor propôs de mais relevante é o fato de que, em sua abordagem, sempre falamos na direção de um interlocutor pode esclarecer uma situação importante, que se refere à existência de coisas universais.

> Quando alguém diz que é óbvio que "2+3=5" é um fato universal, ela pode estar dizendo duas coisas: A primeira, e que parece ser o significado produzido quase sempre, é que é falso que 2+ 3 ≠ 5, e já que isto é falso sua negação é verdadeira. Mas há uma outra possibilidade, a de que nem 2+3=5 nem 2+3 ≠ 5 possam ser enunciados. (Lins, 1999, p.83)

Na Matemática intuicionista (Brouwer e seus seguidores) é possível falar que nem uma proposição nem sua negação formal são verdadeiras, e o motivo é que é possível que não se tenha uma demonstração construtiva para nenhuma das duas proposições. Mas se no caso de 2+3=5 há, evidentemente, uma demonstração construtiva, como podemos dizer que esta proposição não seja universal? A resposta é que, assim como os intuicionistas podiam deixá-la em suspensão pela falta de demonstração construtiva, outros podem deixá-la em suspensão por outros motivos, por exemplo, porque estamos falando de uma cultura na qual não se quantifica acima de três, a não ser como muitos.

Em suma, portanto, o autor apresenta para essa abordagem estão postos: significado, conhecimento, interlocutores, núcleos/estipulações locais, objetos. E outras noções essenciais: atividade, espaço comunicativo, texto, legitimidade, que sintetizamos nos quadros a seguir.

Quadro 5 - Elementos definidores do MTCS

1 o elemento-chave é uma re-caracterização da noção "conhecimento": conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação que me autoriza a produzir aquela enunciação: • conhecimento é algo do domínio da enunciação, • sempre há um sujeito do conhecimento (e não do conhecer), • o papel da justificação é produzir legitimidade para minha enunciação, • um texto é constituído como um resíduo de uma enunciação; **2 toda produção de conhecimento é feita na direção de um interlocutor** que, acredito, produziria a mesma enunciação com a mesma justificação: • o compartilhamento de interlocutores constitui um espaço comunicativo; **3 o conjunto das estipulações locais - que funcionam como verdades** absolutas locais - constitui um núcleo com relação ao qual produzo significados/conhecimentos: • estas estipulações são compartilhadas com o interlocutor; 4 é na produção de significados que se constituem objetos: • a produção de significados se dá sempre no interior de atividades.

Fonte: Lins, (2012, p. 24)

A partir de estabelecer os conceitos explicativos da teoria que sustenta estabelece que no MTCS, dado que conhecimento é do domínio da *enunciação*, esclarece-se suficientemente que não há conhecimento em livros enquanto objetos, pois ali há apenas enunciado e que é preciso o estabelecimento de uma enunciação efetiva (mobilização cognitiva) daqueles enunciados para que eles tomem parte **na produção de conhecimentos**.

Tudo isto posto, há uma questão central que o autor admite que deva ser discutida, que é a da *verdade*. Em todas as caracterizações de conhecimento que tivemos até hoje, pelo menos um aspecto comum existia: não se pode conhecer o que não é verdadeiro. Acontece que este verdadeiro se referiu sempre a uma proposição, esta verdadeira ou falsa. Por exemplo, não se poderia conhecer que "2+3=6" porque esta proposição é falsa.

A formulação que o *MCS* dá para conhecimento, no entanto, coloca esta questão em uma outra perspectiva. Se quiséssemos falar de *verdadeiro* só poderíamos nos referir, em primeiro lugar, a *conhecimento*, mas a própria *enunciação* que o faz existir garante que ele é verdadeiro para alguém e, uma vez que o ser cognitivo não se identifica ao biológico, ele não é nunca verdadeiro para um indivíduo isolado. o que para Lins possibilita um rompimento com as noções absolutas de *verdade* - sempre problemáticas -, ao mesmo tempo que não se concede um relativismo absoluto - também igualmente problemático. Este é um relativismo cujos limites são postos por práticas sociais e por culturas, através do compartilhamento de *interlocutores*, de estipulações (locais ou não) e de espaços comunicativos.

Para Lins uma importante consequência que emana dessa abordagem é que a afirmação de que um conhecimento é melhor, bom ou ruim, assim como decisões sobre se uma enunciação é ou não aceita como legítima por um ou o outro, têm sempre um sujeito, e este sujeito tem intenções partindo da visão de que o silêncio antecipa o a fala e o que *não se diz é o pressuposto ou dado, o que se diz é o novo*, na dinâmica da produção de significados e nessa via coexistem três grandes categorias: o *novo*, a *justificação* e o *dado*. Nesse sentido o autor considera que

> a fala da pessoa que resolve um problema tende a explicitar o 'novo' e a silenciar o 'dado'. Isto é, quando estamos resolvendo um problema, 'falamos' as coisas que estamos tentando entender ou descobrir, mas silenciamos as coisas que tomamos como certas, como dadas. (Lins, 1997, p.122).

Desse fragmento e dialogando com o autor podemos o silêncio que o autor sinaliza não é absoluto, ele é parcial e no bojo do processo de justificação, a fala vai deixando os fragmentos do que é o dado para o sujeito naquele momento e estes fragmentos são de suma importância para compreendermos a maneira de operar desse sujeito pois o que é dado é o que nos conta onde o sujeito está e a partir de que *lugar* ele está falando.

Nesse processo, a justificação tem o importante papel de ser o elo entre o novo e o dado. É a partir dela que ocorre o processo em que o novo vai se transformando em dado frente a novas situações. Por exemplo, sobre o processo de produção de conhecimento, Lins comenta:

> Num conhecimento produzido, a crença-afirmação corresponde ao que é novo, ao passo que a justificação corresponde ao que é dado. Justificações estabelecem um vínculo entre crenças-afirmações e núcleos, que são um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais o significado está sendo produzido. (LINS, 1997, p.144).

Essa maneira de compreender a comunicação reconhece a intersubjetividade como verdadeiro espaço comunicativo, imbricando nisso uma revalorização interindividual e estabelecendo uma perspectiva que consiga dar conta da complexidade do fenômeno comunicacional e mais especificamente as questões ligadas aos processos de ensino aprendizagem. O Tempero soviético que demos ao nosso gosto sintetiza isso de maneira clara e objetiva:

> Os signos só podem aparecer em um terreno interindividual. Ainda assim, trata-se de um terreno que não pode ser chamado de “natural” no sentido usual da palavra2: não basta colocar face a face dois h*omo sapiens* quaisquer para que os signos se constituam. É fundamental que esses dois indivíduos estejam socialmente organizados, que formem um grupo (uma unidade social): só assim um sistema de signos pode constituir-se. A consciência individual não só nada pode explicar, mas, ao contrário, deve ela própria ser explicada a partir do meio ideológico e social. (BAKHTIN/VOLOSHINOV, 2004, p. 35)

Assim na análise de nossos dados buscamos evidenciar a partir dessas perspectivas teóricas rastrear o dito e o não dito, presente na enunciação produzidas pelos nossos sujeitos de pesquisa, afim de estabelecer uma leitura positiva para a produção de significados que eles realizaram durante a disciplina de Álgebra I, onde sempre que possível os alunos eram provocados a articularem vínculos com o que estavam aprendendo e de que modo esses elementos da aprendizagem pudesse amparar sua atividade enquanto docentes dos níveis básicos de ensino.

CAPÍTULO III. Opção Metodológica

3.1 A Execução do ato

Evidentemente, quando fazemos uma opção metodológica, em certo sentido, estamos apostando no sucesso de uma abordagem que nos favoreça encontrar os possíveis caminhos para as respostas que desejamos. Sendo assim, assumimos uma postura de honestidade epistemológica ao considerarmos que a maneira que ora assumimos enquanto nossa opção metodológica é apenas uma das maneiras possíveis de considerarmos a execução deste projeto. Para Tozoni:

> Lembremos que um dos maiores problemas da pesquisa na perspectiva das ciências humanas e sociais não é o método, ao contrário do que afirmam outras áreas do conhecimento, mas a interpretação da realidade. As escolhas que os cientistas fazem em suas atividades não dizem respeito somente aos aspectos metodológicos do trabalho científico, antes e principalmente, referem-se aos aspectos filosóficos, éticos, sociais, políticos e culturais do processo de produção de conhecimentos. (TOZONI, 2013, p. 8).

Entendemos que o caminho escolhido nos exigiu forte empenho, motivação e, certamente, compreendemos também que o próprio movimento da pesquisa em qualquer instante teve que se submeter a ajustes em função da própria organicidade da investigação, pois o movimento pesquisa bem como seus sujeitos com as complexidades inerentes a eles suscitaram um esforço de assumir alternativas metodológicas e teóricas que dessem conta dessa volatilidade, uma vez que a própria investigação cientifica assim como a vida, são modelos para estruturar, interpretar e interagir com a humanidade elaborados e reelaborados a cada instante ou, como destacou Otte (1993, p. 30),

> Em momento algum na vida dispomos primeiro de todas as alternativas para depois poder fazer uma escolha. Esta é uma certa atitude de pessoas que se comportam como se fossem hóspedes neste mundo ou fregueses, que ainda precisam considerar a oferta, que a vida representa, antes de decidir se é esta a vida que querem ou sob quais condições a querem. Mas a situação não é essa e para muitos seria melhor se perdessem seu dinheiro e largassem essa existência de fregueses para ver que não existe nada de real fora a própria vida.

Durante o percurso assumido, buscamos elucidar as questões de pesquisa, constituindo uma possibilidade de potencializarmos um importante debate que precisa ser travado, que é justamente o questionamento de paradigmas na prática docente e, sobretudo, aquelas protagonizadas pelos significados dados ao conhecimento escolar que aqui, no caso se refere ao conteúdo de Álgebra Abstrata. Acreditamos, dessa maneira, que a presente pesquisa além de ter contribuído com a nossa própria formação, pode representar uma importante contribuição para a formação de professores, impactando na Educação básica no ensino de ciências e Matemática.

Nessa perspectiva, lançamos mão de estratégias que buscaram dar conta de nossa condição de trabalho, assumindo uma investigação orientada pelos pressupostos de uma abordagem qualitativa, cujos direcionamentos buscou diálogos com o contexto analisado, de modo a contemplar nosso fenômeno de interesse por meio de múltiplas estratégias de observação, que não mitiguem a organicidade do nosso quadro de investigação.

A pesquisa em Educação tem por foco de investigação a possibilidade articulação dos conteúdos da Álgebra Abstrata ensinado aos futuros professores de matemática às Álgebras que eles viriam (ou já o fazem) no Ensino Básico.

Pensando sobre a pesquisa social, Minayo (1994) chama a atenção para o forte vínculo entre o pesquisador e o seu campo de estudo. Sobre estes aspectos, destacamos que os caminhos, que conduziram metodologicamente as ações e reflexões aqui presentes, perpassam uma infinidade de possibilidades de abordagem, sob uma revisão bibliográfica, construção de uma fundamentação teórica e metodológica em virtude das relações que são estabelecidas entre o conhecimento algébrico e a produção de significados a partir de um contexto de formação de professores.

Como nossa investigação foi desenvolvida e amparada na abordagem qualitativa assumimos a perspectiva Ludke e André (2014), que visam construir novos conceitos, novas formas de compreensão da realidade e novos olhares

Acreditamos, dessa forma, que a abordagem que propomos nos permitirá compreender a realidade do nosso estudo de forma mais profunda e completa possível. O enfoque qualitativo, que daremos ao nosso objetivo, permitirá, por meio de nossa abordagem, interpretá-lo como um conjunto orgânico que possui uma dinâmica própria e guarda uma forte relação com seu contexto sociocultural (FIORENTINI; LORENZATO, 2010). Os procedimentos analíticos que assumimos para a interpretação de nossos dados se pautam no Modelo dos Campos Semânticos que já discutimos na seção anterior.

3.2 A cena da Investigação-ação

Nossa escolha pela *investigação-ação* se justifica por ser um modus *operandi* que pela possiblidade de assumir estratégias de mobilização investigativa que possibilitam continuamente que os processos de intervenção passem de elaborações e reelaboração de posturas mediante uma dada atitude de pesquisa. No caso das aulas ministradas no âmbito de um curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Goiás mediante a atividade dos alunos-professores em formação. A turma era constituída por 42 alunos, contando com o Professor Doutor, José Pedro Machado Ribeiro como professor responsável pela turma, eu na condição de Professor Investigador, e a Professa Aline Barbosa colaborando com nossa investigação ao mesmo tempo que realizava seu estágio docência. Os alunos em sua maioria já desempenhavam atividade docente na Educação Básica, muitos deles na eminência de se formarem, e alguns com várias reprovações na disciplina de Álgebra I.

Nossa opção pela apresentação dos conteúdos foi em via distinta do que usualmente é adotado no Instituto de Matemática e Estatística da UFG pelos professores de Álgebra. Por exemplo optamos por apresentar o conceito de grupos e anéis concomitantemente, pois se por um lado essa abordagem possibilitasse a apresentação teórica para os alunos de elementos e conceitos que dialogassem com os conteúdos por eles inventariados e que pertenciam a educação básica, por outro lado não existe justificativa plausível para assegurar univocamente que o modelo tradicionalmente empregado na UFG, grupos e depois anéis não se justifica nem pedagogicamente nem formalmente.

Partimos inicialmente das ideias dos alunos sobre os conceitos de Álgebra que poderiam ser encontradas na educação básica, e tendo como ponto de partida a própria fala (e produção escrita) dos alunos, para então termos condições de estabelecer matrizes analíticas onde pudéssemos fazer uma leitura positiva do que os alunos produziram.

3.3 Da Aquisição e Tratamento dos Dados

Nossa aquisição de dados foi feita mediante registros audiovisuais, áudio-gravações e produção escrita dos alunos. A organização do primeiro processo interpretativo, qual seja, valorização fenomênica e técnica das informações coletadas devem ocorrer mediante três etapas: primeiro - preparação e reunião dos dados; segundo - avaliação de sua qualidade; e terceiro - elaboração de categorias de análise.

Na primeira etapa, transcrevemos os dados qualitativos levantados. A produção escrita e o material de áudio-gravações foram categorizados dentro de estruturas de justificação mais ou menos similares, como em *classes de equivalência* constituindo assim uma matriz analítica que servisse de chave para nossa leitura das produções de significados sobre as produções que os alunos fizeram durante o curso.

À medida foram lidas as transcrições, destacamos aquelas que consideramos relevantes na narrativa ou nos dados qualitativos levantados, tendo em conta os eixos estruturadores da pesquisa, seguidos de edição das narrativas ou dos dados coletados e a análise propriamente dita, confrontando quando possível com as produções escritas.

Na segunda etapa, realizaremos a avaliação dos dados primários coletados, sendo essa fase considerada como nosso pré-reflexivo para podermos estabelecer um panorama geral de conclusões. Os objetivos do estudo foram retomados, nesse momento, e, em seguida, foi discutido a aderência das categorias anteriormente estabelecidas aos dados levantados. Posteriormente, nessa segunda etapa, a investigação deve ser ancorada no diálogo com autores que tratam questões pertinentes às categorias de análise emergidas das narrativas ou dos dados coletados. Portanto, em face da necessidade de esclarecimento tanto das categorias quanto dos diversos elementos que surgem no processo de levantamento de dados, dentre outras variáveis analíticas, justifica-se a importância da recorrência aos autores.

Nessa etapa, as construções verbais (áudio-gravadas) e as produções escritas foram trabalhadas no sentido de refletir, contextualizar, exemplificar e elucidar as diversas dimensões que possam ser atribuídas às atividades propostas, envolvendo situações que podem ser estruturadas por raciocínios algébricos. Ainda aqui, a elaboração de alguns questionamentos poderá contribuir para essa investigação, tais como: se existem elementos ou aspectos que tenham características comuns nas narrativas ou nos dados coletados ou se são congruentes; se existem informações distintas em decorrência de uma possível diversidade de contexto do qual as informações emergiram; se os temas, os assuntos, as opiniões ou as dificuldades, no caso de justificativas algébricas elaboradas pelos professores, se as justificativas mantêm relação entre si; se a informação prestada por um sujeito ou se os dados coletados são diferenciados dos outros e em que dimensão; além das sincronias e diacronias discursivas que possam ser estabelecidas no âmago do processo de construção de significados para as atividades algébricas.

O terceiro e último processo interpretativo foi caracterizado pela reinterpretação, em outras palavras, criação de significados para os significados criados, pelos sujeitos da pesquisa onde buscamos topografar através de suas falas (e de seus silêncios) os elementos explicativos de nossa teoria, ou seja, as justificações e as crenças afirmações.

O Quadro 7, a seguir, sintetiza o escopo deste projeto de investigação:

Quadro 15 – Organização da pesquisa

Procedimento de campo	• Submissão do projeto ao comitê de ética. • Apresentação da proposta de disciplina optativa. • Levantamento bibliográfico e documental. • Observação Participante.
Fonte de coletas	• Documentos oficiais. • Referenciais teóricos. • Atividades desenvolvidas, fotos, áudios e vídeos.
Análise de dados	• Análise de documentos e atividades • Categorização dos dados pela matriz analítica

Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse movimento em busca da compreensão de quais lugares nossos sujeitos falavam e quais crenças-afirmações e justificações frequentavam seus processos enunciatários, procuramos constituir a teia comunicativa como um todo, constituídos enquanto elementos construídos coletivamente.

Com isso buscamos identificar e caracterizar regularidades discursivas de nossos sujeitos que remeteram ao seu *ethos* de formação enquanto professores de matemática o que nos possibilitou apresentar como resultado de nosso movimento investigativo apresentar certos traços que podem colaborar para o entendimento de questões inerentes ao processo de ensino e aprendizagem sobretudo nas cenas o professor de matemática é protagonista.

CAPÍTULO IV. Procurando figuras nas constelações – Nosso olhar, escrutinando nossos registros, nossas interpretações

4.1 Nosso olhar

Em nossa investigação nos ocupamos fundamentalmente de documentar e procurar topografar a rede de comunicação que partem dos alunos-professores e integram a rede de enunciações legitimada pela experiência oportunizada pela maneira que a disciplina de Álgebra abstrata foi conduzida.

Como o nosso próprio referencial teórico sinaliza, buscamos compreender a maneira de que a estruturação da *realidade* [16] onde fosse possível manejarmos conceitualmente ao menos por aproximação os aspectos inerentes a produção de significados no contexto de formação de professores de matemática.

Uma distinção precisa ser estabelecida nesse momento uma vez que ao dizermos que nos orientamos pela perspectiva de que a enunciação *cria* a realidade, não estamos com isso estabelecendo um subjetivismo hipostasiado que toma a si próprio pelo cabelo em busca de salvação assim como *modus operandi* do Barão de Münchhausen ao tentar se salvar.

Em nosso referencial teórico quando falamos de produzir significado, estamos sempre falando de constituir objetos.

> Os modelos epistemológicos que não consideram a possibilidade das diferentes justificações para crenças afirmações da álgebra devem, então, responder a uma pergunta: de que forma são constituídos os objetos do conhecimento algébrico? Uma resposta, a do conhecimento matemático dos matemáticos, é que é na própria Matemática que tais objetos são constituídos. (Lins, 1994, p. 37).

A natureza desse produzir significados, de *criar,* é sancionada pela atividade coletivamente mobilizada por nossos sujeitos em seu próprio *ethos,* assim como o conhecimento matemático é constituído na própria matemática.

---

[16] Aqui no caso obviamente uma discussão de caráter ontológico demandaria por si só visitar uma profusão de fontes e perspectivas. Nesse momento com esse termo estamos interessados na realidade da produção de significado para objetos algébricos.

A própria noção de teorema (espetáculo) é exibir, enunciar conexões de um sujeito cognoscente no ato comunicativo.

> Todo teorema pulveriza, entre seu enunciado e o *CQD*, os possíveis traços de uma enunciação, e, portanto, de um sujeito do conhecimento, ao não permitir que haja ali dentro pontos de basta, só indo do princípio ao fim é que se pode produzir significado para o enunciado. (Lins, 1994, p. 37).

Nesse sentido buscamos olhar tanto para o *locus* enunciativo dos sujeitos quanto para a *direção* que os sujeitos falam ao constituir o *Outro* ao mesmo tempo que busca um caminho de justificação que o autorize ao dizer o que diz ao outro.

Isso em última análise significa que o tempo todo não estivemos interessados de maneira significativa no protagonismo ou não da instrumentalização do repertório algébrico na solução dos problemas propostos aos sujeitos, mas sim colocar sobre escrutínio os jogos da linguagem que são mobilizados no interior da atividade enunciativa.

A condução da disciplina buscou questionar alguns padrões tradicionalmente estabelecidos no IME em forma e em conteúdo, assim por exemplo ao contrário da apresentação tradicional da estrutura de grupo para depois disso ser introduzida a estrutura de anel, ambas as estruturas foram apresentadas de maneira simultânea buscando com isso um diálogo com os objetos frequentemente encontrados nos conteúdos de Ensino Fundamental e Médio.

Nosso referencial teórico que nos emprestou certa confiança na maneira que estruturávamos textualmente (os fragmentos residuais e evidentemente provisórios, que compõe esse trabalho) o fenômeno da comunicação nos possibilitou planejar um protocolo interpretativo instaurado (leitura positiva) para o fenômeno que nosso movimento de pesquisa buscava contemplar e tornar inteligível e cristalizável na estrutura documental manifestada nessa dissertação.

Nosso ceticismo que outrora era apenas um anarquismo epistemológico ingênuo atrelado a uma certa dose de materialismo vulgar buscava resgatar a dignidade de nossa crença na atividade científica amparada em nossa plataforma de conceitos e procedimentos estruturados pela nossa atividade cognitiva (biológica) humana.

Para além da atividade do carbono em declínio ao mesmo tempo que nutria zelo pela versatilidade de assumir uma arquitetura que viabilizasse seu consumo por aqueles que se sentissem provocados pelas questões que essa proposta de escrutínio direta ou indiretamente alfinetava certos cânones educacionais.

Por último, cumpre notar que nossa opção por uma abordagem explicitamente distinta das abordagens convencionais que imperavam no *modus operandi* dos formadores de professores foi nutrida de maneira copiosa pelos resultados abundantes da dificuldade, despreparo e carência formativa, tanto nos aspectos práticos quanto nos aspectos conceituais daqueles estudantes-professores que tinham por prioridade completar seu itinerário formativo profissional. Para explicitar isso de maneira mais concreta em nossa investigação temos que registrar que no bojo de nossa opção metodológica (e obviamente atrelada a nossa plataforma teórica) nos ocupamos fundamentalmente de constituir um inventário dos processos de comunicação, mais especificamente, tentar estruturar uma narrativa de nossas interpretações sobre as interpretações que nossos alunos faziam do que eles apreendiam das aulas que conduzíamos.

4.2 A chave analítica

Não é uma conclusão atípica daqueles que se ocupam do exercício investigativo notar que a literatura disponível nos dias hoje nos disponibiliza os diversos obstáculos e complicações que residem em perspectivas interpretativas que pretendam estabelecer um quadro compreensivo, coerente de fenômenos cuja observação seja alicerçada na experiência oral, pois não e incomum emergir da leitura de falas plasmadas em recortes textuais, demandas de consumo de arquétipos interpretativas que nos convidam a iniciar passeios peripatéticos que não de maneira incomum nos fazem esbarrar em transeuntes Whitehead e Lacan, ou Frege e Zizek.

O homérico esforço despendido na empreitada de encontrar pontos de equilíbrio que harmonizem as diversas matizes epistemológicas e as posições metodológicas que pudessem ser facilitadoras na abordagem ao problema e que buscasse lançar luz sobre as limitações técnicas, metodológicas e conceituais talvez não tenha sido suficientemente robustas para mitigar esses mesmos problemas.

Movidos pelo desejo de que o registro de nossa pesquisa apresentasse resultados e conclusões que se articulassem coerentemente com posição teórica que adotamos e com a perspectiva metodológica que nos pareceu menos indesejável assumimos um protocolo de escrutino e análise dos dados que contemplasse desde a delimitação de seu escopo em nossa pesquisa até a concepção e elaboração de uma chave interpretativa que permitisse uma leitura a mais fina possível para os registros documentais oriundos falas dos sujeitos.

Buscamos a partir de nossa tentativa de compreensão do fenômeno comunicativo dispor de um instrumento que permitisse caracterizar e discutir os processos de produção de significado dos sujeitos considerando seus elementos, *resíduo, núcleo, leitor, autor, texto* como arquétipos que representassem pela plausibilidade a experiência cognitiva plasmada nas falas dos sujeitos.

Assim motivados de nossa análise buscamos fazer uma leitura que buscasse mapear os repertórios e processos que integram a formação de significado a partir dos textos, livros, aulas e demais *textos* disponíveis para os alunos no transcorrer da disciplina concebemos um painel descritivo que integrasse os elementos e os processos que protagonizam a teoria que empregamos para aproximar dos registros do fenômeno de interesse e ao mesmo tempo (quando possível) categorizar determinados aspectos dos conteúdos da enunciação dos alunos concebemos a matriz analítica apresentada a seguir no quadro 16.

Quadro 16 – Matriz Analítica

Núcleo e estipulações locais	**Conhecimento {Crença-afirmação + Justificação}**	**Instauração de Interlocutor Produção de Significado**	**Leitura Plausível**
O sujeito parece não demonstrar em suas falas que constituiu repertório suficiente de núcleos para possibilitar o engajamento no diálogo. Suas falas não estão aderidas aos resíduos textuais que compuseram o a cena de ensino-aprendizagem que a investigação se propôs a escrutinar.	A exposição de suas crenças-afirmações que parecem estar fragmentadas sem conexão ou articulação estabelecidas, sugerindo debilidade (ou até ausência) justificações. E como consequência demonstrassem desconforto, distanciamento ou apatia (silenciamento via fuga do diálogo), parecendo negar ou desconhecer as vias que poderiam/deveriam revestir sua postura discursiva diante da atividade.	Interlocutor Desconhecido/ Não Instaurado/Não compartilhado. O sujeito situa sua fala em territórios estranho ao estabelecido pelo diálogo imposto na avaliação, sugerindo distância explícita de sua fala das demandas interpretativas requeridas pela avaliação. Dentro da atividade parecem ostentar insegurança, incompreensão ou desconforto no engajamento dialógico, parecendo apresentar deliberado distanciamento das propostas de aproximação e reconhecimento de vias que possibilitassem o compartilhamento de interlocutores. (o silêncio aqui parece uma resistência para ser localizado ou uma insegurança ao partir). O sujeito não internalizou interlocutores, legitimidades.	Leitura Vacante

O sujeito parece demonstrar em suas falas que constituiu repertório suficiente de núcleos para possibilitar o engajamento no diálogo. Parece conseguir mobilizar os processos de nucleação impostos pela natureza dialógica do processo avaliativo articulando os núcleos entre si e ampliando o repertório de especificações locais. Ostenta robustez no repertório de suas especificações locais, conseguiam transitar pelos processos de nucleação habilmente.	A exposição de suas crenças-afirmações que estar solidamente estabelecidas por justificações bem constituídas. E como consequência demonstrassem conforto em ir se aproximando paulatinamente de interlocutores que apresentassem novos elementos ou em algumas circunstâncias, elementos inteiramente novos.	O sujeito parece ter internalizado interlocutores, legitimidades ou ainda parece ter conseguido instaurar novos interlocutores através da reelaboração de esquemas dados, negociando novas fronteiras dos núcleos constituídos, inaugurando perspectivas enunciativas que	Leitura Viável

Fonte: Elaboração do Autor

A presente matriz serviu para que pudéssemos nos aproximar dos fragmentos enunciativos contidos em nossos recortes amostrais e estabelecer uma topografia da teia comunicacional que os sujeitos foram tecendo a medida que intencionavam patentear em uma prova oral a *capacidade de manifestarem* oralmente (e algumas vezes escrita no quadro) o repertório de conceitos e técnicas algébricas discutidas durante o curso e que permitisse que esses sujeitos conseguissem instituir interlocutores a partir da interiorização de legitimações constituídas em seu processo comunicacional.

A configuração de nossa matriz articula os conceitos centrais de nossa filiação teórica servindo para organizar esquematicamente os conceitos integrantes do processo de comunicação estabelecendo um quadro de indicadores que permite aferir qualitativamente e estabelecer classes de equivalência (categorias) de leitura dos fenômenos, de acordo com a lógica descritiva interna apresentada em cada fala.

Partindo das ideias de núcleo e especificações locais, sem desconsiderarmos a volatilidade do núcleo, no sentido de poder assumir novas posições de especificação local de leitura viável e leitura vacante reside a contribuição para novas maneiras de abordar o fenômeno investigativo em questão.

4.3 Escrutinado nossos registros

O protocolo inicial que propomos na estrutura de condução da disciplina se alicerçou na resolução de listas de exercícios (estratégia metodológica tipicamente comum na condução da disciplina de Álgebra Abstrata), a apresentação dessas soluções e a apresentação para os colegas na sala de aula, em grupos de estudantes, onde os demais grupos de estudantes que assistiam a apresentação poderiam intervir nas soluções/conceitos apresentados de maneira ativa, já ofereciam indícios da riqueza e a diversidade de maneira que nossos sujeitos iam buscar instituir espaços comunicativos no âmago de nossa atividade final (a avaliação oral).

Entretanto, a despeito da gama de possibilidades reflexivas que toda disciplina nos proporcionou foi na avaliação oral que ficou evidente a riqueza dos resultados encontrados e os caminhos reflexivos que podemos tomar com base nas conjecturas que podem ser estabelecidas a partir da experiência da fala dos sujeitos, categorizadas de acordo com nossa chave interpretativa (matriz analítica), e a análise a posteriori dos recortes amostrais que fizemos do tecido discursivo plasmado no movimento de engajamento dialógico dos alunos, demonstrou que nosso modelo interpretativo pareceu ser conveniente para descrever o processo que ia se estabelecendo, assim como a maneira que os elementos discursivos mais simples iam se articulando num movimento de crescente complexidade que permitia fertilizar espaço para produção de significado.

A seguir apresentamos de modo transcrito as gravações e análise reflexiva que fizemos de seis de nossos sujeitos de pesquisa.

§ 1. A fala de *Annie*

Prof.: O que é um anel?
Annie: Um conjunto não vazio, munido de duas operações ...é... Que satisfaz algumas propriedades. Eu gosto de falar na hierarquia, posso? Eu gosto primeiro de pensar em grupo, porque aí o grupo é munido de uma operação, fechado nessa operação, e satisfaz três propriedades: elemento neutro, é... Reflec... simétrica e associativa. Se o grupo for comutativo ele é abeliano. é... Beleza... e a partir disso ele pode ter mais de uma operação e aí ele passa a ser anel. Aí o anel pode ser (longa pausa) é... aí é um anel, aí ele tem a propriedade distributiva, né, porque ele vai ter mais de uma operação. e aí pode ser... anel associativo, comutativo(?!) e depois do anel vem o corpo né!? Só que aí o corpo tem algumas propriedadezinhas que o anel não tem.

A leitura que faço dessa enunciação (e de todas as demais que irei apresentar) adere coerentemente ao meu referencial teórico ou melhor é com o que Lins nomeia de teorização (MTCS) desse processo de leitura que assumo para os resíduos enunciativos que cristalizam a transcrição da fala dos alunos. A pergunta inicial do professor mobiliza Annie a partir de uma situação em que se instituiu leitora se fazer *A Autora* estabelecendo uma *direção* a qual falar. Nesse momento dado as circunstâncias e condições em que é imposta e realizada a avaliação o primeiro movimento de Annie é estabelecer um interlocutor e nesse momento mesmo que ela institui esse leitor (se é o professor ou os alunos nos parece uma questão inatingível, mas uma leitura plausível para isso seja de que ela fale em direção à **O** Leitor).

Partindo de si próprio enquanto um aluno e se colocando como **O** autor é que o aluno apresenta inicialmente alguns conceitos que parecem constituir o núcleo através do qual ampara sua elaboração inicial. Por exemplo Annie parece desvelar um processo de nucleação ao dizer: *Eu gosto de falar na hierarquia, posso? Eu gosto primeiro de pensar em grupo.* Nesse ponto o um Leitor inicia o processo do que chamamos de nucleação partido de noções locais de sustentação para seu caminhar em direção a enunciação e em seguida parece apresentar sua justificação apresentando uma compreensão de como produz significado para os resíduos remanescentes do que um dia foi uma comunicação. O esforço para isso muitas vezes constitui afirmações tão tautológicas quanto as próprias definições em um discurso de um matemático como por exemplo no fragmento de fala "se o grupo for comutativo ele é abeliano."

A passagem a seguir registrada na fala de Annie exemplifica esse processo de articulação de conceitos e direção a conceitos mais e mais robustos que mencionamos.

Prof.: Qual é essa propriedade a mais?

Annie: Por exemplo, os números reais, os números reais eu posso considerar um corpo, porque eu consigo um elemento inverso, no caso, e já no cor...no anel nem sempre tem isso, por exemplo os números inteiros, os inteiros podem ser que sejam um anel mas que não seja um corpo. são, o inteiro é um anel, mas não é corpo. os números inteiros, munidos da operação de adição e da multiplicação.

Aqui a fala de Annie assume como parte da constituição do processo de estipulação local a noção da existência do inverso parece considerar como núcleo a ideia de a que conjunto a que se refere em abstrato, dando a impressão que a não enunciação desse fato por lhe figurar ora como óbvia parece indicar topologia dos núcleos que ela assume quando estabelece a enunciação.

Aqui cumpre notar um aspecto metodológico imposto pela própria natureza que ia se costurando no desenrolar da nossa investigação: o ritmo das perguntas efetuadas pelo professor ganhava cadência própria devido a cada peculiaridade das falas e respostas dadas pelo aluno que era avaliado no momento, evidenciado o escalonamento de papéis *autor-leitor* tanto em episódios simetria.

Isso ocorreu particularmente nos episódios que parecia claro que professor e aluno, ambos acertavam o passo da dança dialógica e com isso compartilhavam interlocutores, falando em um mesmo espaço comunicativo, quanto aqueles que aparentemente apresentavam assimetria comunicativa que eram explicitadas em outros momentos onde as falas pareciam ir em direções *ortogonais* e em determinadas circunstâncias em sentido diametralmente opostas.

Considerando mais um fragmento de nossa amostra:

Prof. O que é um domínio de integridade (ou anel de integridade)?
Annie: O anel de integridade no caso não tem a divisão por zero. Não tem divisor por zero, por exemplo, eu gosto de dar exemplo, porque fica mais fácil de entender, é... nesse... o anel de integridade poderia ser um...um... Zn com n composto, né!? É! Zn com n composto...calma, confundi. Anel de Integridade... não possui divisor por zero...divisão por zero... eu sei que o anel de integridade, ele não satisfaz alguma coisa, que não deixa ele ser corpo, tô confundindo aqui...

Annie não consegue elaborar de maneira estruturada um significado para o que pretende processar do resíduo para a enunciação, não obstante nos parece claramente presente os processos de nucleação em sua fala, que ora figuram sinalizados como os exemplos que ela tenta amparar sua lógica discursiva. A fala dela é marcada por alguns elementos que parecem balizar a busca por uma validação plausível, como por exemplo, marcadamente na fala "*por exemplo, eu gosto de dar exemplo", porque fica mais fácil de entender,* entretanto parece existir um desconforto entre a sua fala e sua expectativa de ajuste ao interlocutor que constituiu nessa atividade.

§ 2. A fala de Florence

Prof.: O que você entende por domínio de integridade?
Florence: Então, domínio de integridade, ele é um anel que é comutativo, unitário e sem divisores de zero. Ou seja, se eu tenho dois elementos se multiplicando e dando zero, ou um deles é zero, ou os dois são zero.

Essa resposta parece nos dar licença para entender que o processo de nucleação que Florence constituiu incorpora uma definição tipicamente matemática no que se refere a anel. O interessante é que sua produção de significado é genuinamente elaborada em termos de sua própria percepção (aqui patenteamos nossa afirmação em sua enunciação) da definição sustentada pelo resíduo de enunciação (no caso a referência bibliográfica adotada) na ocasião frequentado durante as aulas.

Prof.: E o que é um corpo?
Florence: Que que é um corpo? Ai, tô nervosa. É um anel de integridade que também...tentar lembrar aqui...que ele possui inverso multiplicativo?!

Esse tipo de enunciação parece demarcar o movimento através das estruturas de nucleação, com o intuito de revestir a comunicação de robustez suficiente para poder compartilhar interlocutores, o que, no entanto, de acordo com sua fala ainda apresentou falhas nesse processo. A validação perseguida na *afirmação-pergunta* telegrafa muito mais necessidade de compartilhar um espaço comunicativo do que necessariamente estar atrelado a volatilidade de produção de significado.

Prof.: De um exemplo de um domínio de integridade que não é corpo.
Florence: Ou seja, não tem inverso multiplicativo. Deixa eu pensar se os naturais vai ser um...não. Porque ele não é munido...oh os naturais são munidos n da adição, porque qualquer número que eu adicionar entre os naturais vai estar nos naturais. A multiplicação também. Ele é associativo? Os inteiros? Os inteiros munidos de adição e multiplicação?

Aqui como diria Lins, temos um *exemplo exemplar* de como a partir de resíduos de enunciação Florence pretende constituir a própria visão (cristalizada na comunicação) dos objetos com que está lidando. É nesse momento que se manifesta a distinção proposta pelo modelo teórico entre Álgebra (o texto) e Pensamento Algébrico (Produção de Significado emanando da *enunciação* do sujeito).

No final das contas o fenômeno que parece ocorrer é bastante típico e aí reside uma importante ideia da abordagem feita pelo MTCS: o movimento do *interlocutor* Florence devido a atividade está inicialmente situada em um contexto onde *o Outro* é de fato *o outro* mas as demandas por produção de significado desloca essa disputa do *Outro* para o *Eu*. Obviamente um *Eu* provisoriamente constituído (tudo é provisório), que busca também um terreno de equilíbrio comunicativo. Esse intercâmbio de papéis assumidos de maneira expressa ou tácita são velhos componentes de uma epistemologia que busca superar um essencialismo tradicionalmente consagrado em assumidos na perspectiva tipicamente kantiana da percepção e constituição da realidade.

§ 3. A fala de Henri

Prof.: Me dê um exemplo de grupo.
Henri: Posso usar o quadro?
Prof.: Pode.
Henri: Bom. Eu posso pegar o grupo Z3, munido da adição. Então ele é um grupo, porque ele vai satisfazer todas aquelas propriedades, né!? Ele é fechado para essa operação. Ele vai satisfazer a propriedade associativa. Vai possuir elemento neutro. E ele vai ter elemento simétrico. E ele é comutativo. Então além de ser grupo ele será um grupo comutativo ou abeliano.
Prof.: Faça a tábua para a gente.
Henri: (escrevendo no quadro e explicando) Então a operação aqui será + e os elementos [0],[1], [2] (constrói a tábua com êxito)

Buscamos agora a compreensão manifestada através de sua enunciação que de nosso solo teórico se distancia do *nominalismo essencialista* e se situa em uma perspectiva ontológica que se pronuncia pela elaboração associativa da realidade à construção conjugada entre a constituição biológica da subjetividade e sua aderência no tecido social.

Por sinal esse é um tópico delicado no que se refere a relação binomial interioridade-exterioridade e que filiados as perspectivas de nosso referencial teórico vamos compreender, em termos de uma constituição ontológica, que as especificações locais dadas axiomaticamente pelas heranças do exercício cultural.

Aproveitamos a oportunidade para solicitar que seja feita a tábua da operação. Henri não mobiliza de maneira mecânica o resultado de sua reflexão a partir dos *resíduos,* porém sem modéstia se filia à uma naturalidade enunciativa que carrega em seu bojo uma *interpretação plausível*, um *conhecimento*, uma *produção de significado* para os objetos que enuncia como o que fica denotado na maneira como organiza sua construção enunciativa que vai ganhando complexidade e envergadura, mimetizando, ainda que com desajustes a prática discursiva típica de matemáticos como por exemplo em "*Eu posso pegar o grupo Z_3, munido da adição (...*)". Aqui fica patente uma construção que segue a apresentação amparada no que via de regra é apresentado nos textos de Álgebra mais frequentados pelos estudantes da UFG. A direção em que Henri constitui seu interlocutor segue a mesma cadência discursiva matemática, embora pairando em certas passagens por uma familiaridade íntima e displicente como na fala "*Então ele é um grupo, porque ele vai satisfazer todas aquelas propriedades, né!?(...) Então além de ser grupo ele será um grupo comutativo ou abeliano*."

Prof.: Esse grupo é cíclico ou não?
Henri: Bom, vamos lá: é cíclico se eu tiver um elemento que vai gerar todo ele né!?...[pausa] ai professor, não sei te responder...mas tem um resultado que diz o seguinte: "se a ordem de um grupo...", por exemplo, se eu tenho aqui o Z6, Isso aqui, não ó! Se a ordem de um grupo vezes a ordem de outro grupo forem primos ele vai ser cíclico.

Aqui parece claro que Henri ostenta seu conhecimento do conhecimento (cogito) que se apropriou de uma especificação local ("se a ordem de um grupo...") enunciando uma propriedade à maneira dos matemáticos e ao mesmo tempo que honestamente proclama sua dificuldade em estabelecer negociações territoriais que extrapolem sua produção de significados a partir dessa especificação local. O fragmento a seguir coloca relevo nessa nossa perspectiva interpretativa:

Prof.: Ali na tábua se eu trocar a operação de adição por multiplicação, ainda eu terei uma estrutura de grupo? Com aqueles mesmos elementos.
Henri: Bom, vamos ver: Deixa eu pensar aqui. Elemento neutro... (escrevendo no quadro). Peraí, tô verificando aqui. Tem. O elemento neutro vai ser o zero. Olha em eu tenho um elemento x então eu opero e vou ter meu elemento x né?! Por exemplo o 0 operado com o 0 eu tenho o[0]. [0] operado com 1 ([1] é 0([0] ... ah não, mas não me retorna... então ele não é um grupo...eu não sei se eu tô errado. Pela sua cara estou..., mas isso aqui confundi, mas se você parar para pensar um pouco, agora realmente, se meu x são esses valores aqui né. 1 operado com 0 dá 0, 2 operado com 0 dá 0, o valor que tá me retornando...

Aqui o pensamento algébrico (que só pode existir em sua enunciação) parece não estar em sintonia com seu modo de aplicar álgebra que tenta recuperar de sua experiência textual, visibilizando a dicotomia que empregamos para metáfora que escolhemos para contrapor álgebra e pensamento algébrico. Conforme Lins nos explicita a tese de que:

> A distinção entre álgebra e pensamento algébrico que proponho é um exemplo exemplar de uma distinção mais geral e já indicada: a álgebra é um texto, e o pensamento algébrico é um - entre outros – modo de produzir significado para a álgebra. E, ainda, significado é a relação que se estabelece entre uma crença-afirmação e uma justificação para ela no momento da enunciação. (Lins, 1994).

Essa distinção teórica serve principalmente para demarcar as fronteiras conceituais do que é entendido por álgebra, e qualquer registro textual compartilhado por determinada comunidade, e pensamento algébrico, que é uma maneira entre outras de constituir significado, mobilizar os processos cognitivos, amparado pelos registros da atividade social cristalizados na escrita no momento que ganham vida e humanidade no ato da enunciação dos mesmos.

O processo de nucleação ostenta a plasticidade típica apresentada na definição desse conceito dentro de nosso referencial teórico. Por exemplo na enunciação "*vamos lá: é cíclico se eu tiver um elemento que vai gerar todo ele né!?*" há uma especificação de um núcleo que todavia tenta ser refeito para dar conta da constituição de uma direção a qual assumir no desafio desse tipo de avaliação.

Os dois próximos sujeitos encenam claramente esse tipo de episódio o tributo ao texto ampara em certa medida especificações locais, o que entretanto não garante a produção de significados próprios de suas enunciações, ainda que esses sujeitos pareçam procurar direções e possíveis legitimações para constituir *algum* tipo de significado para aqueles enunciados que tentam operar.

Em nossa posição investigativa não encontramos inconvenientes em destacar que as falas sujeitos a seguir apresentados poder ser circunscritos em típicas classes de equivalência daqueles que ostentaram desconforto ao se envolverem em atividades que exigissem a enunciação (apresentação) de suas ideias, como por exemplo dificuldade de engajamento no diálogo estabelecido pelos grupos ao apresentarem as suas soluções para as listas de exercícios propostas, mesmo que ainda lograssem moderado sucesso nas atividades que requeriam produção escrita (atividades extraclasse) e não extrapolassem os limites do registro não verbal.

§ 4. A fala de Gauss

Prof.: Fale para a gente a definição de grupos.
*Gauss: Então, grupos, se a gente for pegar a definição de grupos, a gente tem um conjunto, no caso vamos colocar G, e temos uma operação, vamos colocar essa operação *, e grupo seria o que? Seria aonde a operação tem que ser fechada, onde as operações que fizermos com os elementos do grupo tem que recair no próprio grupo, e, no caso tem que ter algumas propriedades, que no caso é a associativa, tem que ter o elemento neutro, né!? Uma das propriedades do elemento neutro diz que ele tem que ser único né. E tem que ser simetrizável, e, cada elemento tem que ter um único simétrico, aí isso é um grupo. E se tiver a propriedade comutativa, é abeliano.*
Prof.: E ampliando, o que seria anel?
*Gauss; Anel é o seguinte, vamos pegar o grupo G, o grupo... o conjunto G e duas operações. O que acontece? Vamos chamar primeira operação + e a segunda operação *, então esse primeiro aqui, o G, com a operação + tem que ser um grupo abeliano. E a segunda propriedade aqui, o*

que que tem que acontecer...essa outra operação aqui tem que ser distributiva em relação a operação lá ne...distributiva e associativa.
Prof.: E Domínio de Integridade, Anel de Integridade?
Gauss: Anel de integridade é o seguinte, além de tudo isso aí que a gente falou né, tem que ser um Anel Comutativo...calma, estou nervoso, ter a comutatividade, a segunda operação também tem que ser comutativa, e ela tem que ter unidade né, ou seja, tem que ter um elemento neutro lá né, e se por exemplo pegarmos dois elementos x e y e operarmos e x e y der zero, x é zero ou y é zero.
Prof.: E corpo?
Gauss: Vichi, essa aí, me pegou, estudei não...rs.

A maneira que Gauss parece operar discursivamente, logo de início apresenta sintomas de sua dificuldade de produzir significados para os conceitos solicitados pela avaliação, usando as conexões discursivas esperadas entre os textos estudados (como plataforma para esse tipo produção) e a constituição de uma direção que encontrasse alicerce em uma *justificação* que pudesse fundamentar uma legitimação, uma autoridade discursiva que induzisse um caminho ao prado *intercomunicativo* ensejado pela atividade requerida.

Continuando nosso passeio no *locus* discursivo inicial identificamos o que parece a ser a explicitação das estipulações locais que tem importância nuclear e que poderia ser uma justificação de outros raciocínios à posteriori, por exemplo na fala: *Então, grupos, se a gente for pegar a definição de grupos, a gente tem um conjunto, no caso vamos colocar G, e temos uma operação, vamos colocar essa operação *, e grupo seria o que?* Já parece patentear a dificuldade inerente a perspectiva que ele parece vislumbrar desde o texto (aqui a abordagem textual dele assume caráter absolutamente distinto de uma enunciação ao modo de um matemático) e mesmo a modéstia de suas investidas discursivas que buscassem equilibrar sua oferta enunciativa e a demanda mobilizada pelos questionamentos emanados da atividade avaliativa.

Nesse tipo de configuração que assumiu o jogo discursivo optamos por tentar através de uma *pergunta-resposta (maiêutica)* "É *a estrutura mais poderosa né? rs"*. e com esse caminho *induzir* uma revisitação do sujeito as condições textuais impostas a fim de *lhe impor* uma tônica discursiva mais promissora no que se refere a potencialidade de estabelecer ambientes comunicativos mais férteis. A interpelação seguinte cristaliza essa estratégia, que mesmo o malgrado do sucesso do projeto de compartilhamento comunicativo, já revela a negação desse processo, o que assim como o *reductio ad absurdum* pode nos contar algo a mais que as meras inspeções metodológicas diretas e em geral estéreis ao lidar com a complexidade discursiva.

Os desdobramentos que tipicamente se alinham esses mecanismos enunciativos não parecem guardar surpresas, principalmente no que se refere a elaboração de estruturas interpretativas para textos que exigem uma aderência mnemônica mais severa e exigente com é o caso do manejo de textos algébricos.

Prof.: É a estrutura mais poderosa né? rsrs.
Gauss: Isso né, que os reais, os reais é um corpo.
Prof.: O que que os reais têm que os inteiros não tem?
Gauss: Essa parte aí eu vacilei, vacilei feio... Fui só até Anel.
Prof.: Você consegue fazer aí, não precisa explicar não a tábua do Z4?
Gauss: Sim. (Elaborando no quadro.)
*Prof.: Bom, considerando essa tábua e trocando a + por * preservando os elementos.*
Gauss: Deixa eu ver aqui... .Aí eu acho que não né, porque o elemento neutro vai ser um né?
Prof.: Esse grupo aí com a adição, ele é cíclico?
Gauss: Se ele é cíclico? Sim ele é cíclico porque se não me engano, eu acho que o 1 ele gera todo grupo, né? Considerando esse grupo ainda, vc consegue destacar, com elementos dele um subgrupo? Nós podemos, bom, posso rascunhar aqui?
Prof.: Pode.
Gauss: (depois de testar no quadro) Então eu acho que um subgrupo seria 0 e 2. Por quê? Porque se a gente operar os elementos vai estar dentro do subgrupo né. O elemento neutro tá, aqui é o simétrico tá aqui também. Você consegue esboçar para gente aí as classes laterais desse subgrupo aí em Z4 = G. Chame ele de H....
Prof.: Quais as classes laterais?
Gauss: Vamos lá então... Adição tá... (silêncio)... pega ah tem que ser igual a...

Esse fragmento da atividade avaliativa apenas entre outras coisas patenteia e dá relevo ao nosso diagnóstico inicial donde o processo comunicativo estabelecido explicitam a posição do sujeito e sua dificuldade em constituir interlocutores novos, na medida em que se posiciona na órbita das especificações locais iniciais, não apresentando movimentos discursivos que distanciam ou reelaborem especificações locais, não apresentando aqui também surpresas significativas no que tange o itinerário discursivo cotejado pelo sujeito em sua experiência enunciativa:

> Mas o que se dá na interação entre o sujeito e interlocutores? O que é que interlocutores têm que o sujeito ainda não tem, e que depois de um tempo vai haver possivelmente internalizado? Obviamente, a resposta não pode ser “informação," pois o texto está Igualmente disponível a todos os envolvidos. Mais quando o texto está disponível ao sujeito, e há um fracasso em assimilar este texto - assimilar no sentido dos esquemas - o que não está sendo produzido é *significado* (Lins, 1994).

É justamente nesse sentido que Gauss parece se estabelecer discursivamente: não produzir conhecimento diante dos resíduos (textos) trabalhados em nossa experiência investigativa e proposta em nossa avaliação final. Para nós enquanto professores pesquisadores ocupa lugar privilegiado a compreensão da topologia onde se processa o fenômeno de ensino-aprendizagem que em última instância é um caso particular de interações comunicativas mais gerais que caracterizam o ser humano.

§ 5. A fala de Isabel

Prof.: Nos fale um pouco de anéis e subanéis
Isabel: É como se fosse um grupo abeliano. Na adição atender as propriedades de grupo e em relação a multiplicação tem que atender a associatividade e a distributividade.
Prof.: E um anel com unidade?
Isabel: Não sei
Prof.: Domínio Euclidiano
Isabel: Eu também não sei...
Prof.: E domínio de integridade, anel de integridade?
Isabel: Não sei rsr. Estudamos, mas não sei. A gente estuda em grupo daí um fala, outro fala...rsr
Prof.: Falando em Grupo, nos cite um exemplo de Grupo.
Meus Deus...Deixa eu ver...
Prof.: Pode ser lá da educação básica.
Deixa eu ver... (longa pausa)
Prof.: Para ser grupo, o que é preciso?
Isabel: De associatividade...
Prof.: Preciso de um conjunto...
(...)
Prof.: Qual a ordem de z12?
Isabel: 11?12?
Prof.: Então...
Isabel: Tinha anotado isso, mas falar não sei...
Prof O que é um homomorfismo de anéis?
Isabel: Tinha um exemplozinho, tentando lembrar aqui. (escrevendo no quadro).
Prof.: é navegando mais ou menos por esses mares aí...

O presente resíduo oriundo de nossa atividade investigativa embora aparentemente tímido em termos de volume nos fornece alguns elementos de importância central em nosso movimento de compreensão das dinâmicas comunicacionais estabelecidas nos processos de ensino-aprendizagem que nosso trabalho pretende esboçar uma vez que que a experiência enunciativa ostentada por Isabel é congruente com a performance de outros sujeitos que se engajaram na avaliação e constituíram seus processos comunicativos tipicamente de maneira similar.

A fala de Isabel parece manifestar assim como do sujeito anterior modéstia na produção de significado/constituição de interlocutor por carecer de robustez das especificações locais que ela demonstra deter em seu repertório comunicativo.

Por que Isabel performou aquém das expectativas? Na verdade o que parece ter ocorrido no processo foi justamente o desencontro topológico de onde se falava e para quem se fazia ser ouvido, pois para além das enunciações aderentes aos resíduos a distância dialógica expunha a distância entre interlocutores.

4.4 Dos Resultados: Alinhavando dados e tecendo significados

O movimento que faremos aqui é concatenar às falas dos sujeitos e das leituras que fizemos dessas falas à nossa matriz analítica, retomando em alguns momentos brevemente a nossa filiação teórica provisória (mesmo com as reconhecidas limitações, técnicas, e epistemológicas inerentes ao processo de produção textual) essa seção tem como finalidade apresentar (o que a nosso contra gosto mas atendendo os cânones que protocolam a atividade social da pesquisa) o que pretensamente designamos como *resultados* de nossa investigação.

Destacamos a seguir alguns episódios que registramos em nossa investigação e que em que atitudes como *pedir* para usar o quadro parece ser uma manifestação sintomática dos sujeitos que buscam através da *ação* elaborar um significado para texto (resíduo) encontrado em suas atividades preliminares de preparação para a avaliação.

Um traço marcante revelado pelo nosso trabalho se refere ao fato de que os padrões enunciativos se distinguiram basicamente por características que nos dão licença para classificar as falas dos sujeitos em duas grandes classes:

I) A classe de *leitura explícita* foi a categoria em que situamos os sujeitos que apresentaram em sua fala, entre outras características, duas de destaque pela recorrência: (a) a maneira como os sujeitos dessa classe estabelecia o processo de nucleação e a articulação entre as especificações locais de modo que o sujeito parece demonstrar em suas falas que constituiu repertório suficiente de núcleos para possibilitar o engajamento no diálogo. Parece conseguir mobilizar os processos de nucleação impostos pela natureza dialógica do processo avaliativo articulando os núcleos entre si e ampliando o repertório de especificações locais, ostentando robustez na articulação entre essas especificações, e por conseguinte conseguiam transitar pelos processos de nucleação e (b) a desenvoltura que com base em (a) que esses sujeitos apresentavam para encontrar o percurso e a tônica discursiva que deveriam trilhar e assumir para alcançar o que solicitávamos ou quando mesmo nos episódios onde não se colocavam em explícito movimento em nossa direção através de sua atividade enunciativa, nos forneciam pistas de onde estariam situados, nos possibilitando caminhar na direção onde estavam circunscritos discursivamente e permitisse que mobilizássemos estratégias para emprestarmos legitimidade as suas falas, e com isso, pudéssemos estabelecer um engajamento dialógico mútuo, robustamente conectado, sinalizando êxito em nosso modelo epistemológico: *produzir significado* para os *resíduos* oriundos de nossa atividade de ensino.

II) A classe de leitura vacante foi a categoria em que situamos os sujeitos que apresentaram em sua fala, *ausência parcial ou total das* características, descritas em I (a) e em I (b) ou ainda pela impermeabilização assumida no processo que foi mobilizado. Nessa categoria a vacância de leitura para as posturas enunciativas assumidas pelos sujeitos demonstrar malgrado possível *produzir significado* para os *resíduos* oriundos de nossa atividade de ensino.

Para citar um exemplo do tipo (I) sem incidir no enfado (pois já exploramos esses diálogos alhures) observemos que a fala de Annie fica bem demarcado esse processo de refinamento em direção cada vez mais sofisticada a validação de suas crenças-afirmações *"Um conjunto não vazio, munido de duas operações ...é... Que satisfaz algumas propriedades. Eu gosto de falar na hierarquia, posso?"* Nesse fragmento argumentativo fica patente o movimento de transformações das especificações locais preparando terreno para uma guinada rumo ao estabelecimento de novos interlocutores e, portanto, produção de significado, o que fica expressa na direção que vai assumindo sua argumentação, que que fica demonstrado pelo que vem na argumentação seguinte: *"Eu gosto primeiro de pensar em grupo, porque aí o grupo é munido de uma operação, fechado nessa operação, e satisfaz três propriedades: elemento neutro, é... Reflec... simétrica e associativa."*

Esse paradigma enunciativo foi recorrente nas estruturas discursivas tecidas pelos três primeiros sujeitos documentados e apresentados nesse trabalho, conforme podemos perceber nos recortes amostrais feitos.

Essa e falas sinalizam entre outras coisas que os sujeitos que protagonizaram as cenas descritas lançaram mão de processos de produção de significados similares na tônica e na sofisticação.

O último recorte contempla claramente a definição em (II): o sujeito apresentado no recorte avaliativo além de exibir fragilidades em seu repertório de especificações locais, o sujeito, parece ter ostentado o que denominamos alhures *impermeabilização,* ou seja, explicitar sua limitação em constituir qualquer interlocutor que permita um movimento na direção de produção de significados.

As razões para isso nos parecem estar atreladas a carência de estipulações locais em seu processo de consumo dos resíduos comunicacionais assumidos em nossa atividade. Em outras palavras nos parece que de fato aqui houve uma debilidade na capacidade, seja por motivação, maturidade, ou mesmo traquejo técnico, no engajamento no processo de produção de significado instaurado a partir das especificações locais (a comunista *atividade* em Leontiev).

Exemplo mais ameno, mas que ainda sim claramente denota um sujeito que encena as características descritas em (II) está bem caracterizado no penúltimo episódio avaliativo mencionado (Gauss) – que nem se distanciou nem se aproximaram das estipulações locais que buscava orbitar, manifestando através da baixa estatura de seus passos pelas estipulações locais que aparentava deter a cadência tímida em suas falas.

Permitindo que nossos pressupostos teóricos frequentem agora esse espaço, conferindo forma e tonalidade a leitura que o nosso paradigma interpretativo se propõe a fornecer para as indagações oriundas de nossa investigação, salientamos que entre o espectro de perguntas que possa/mereçam/devam ser respondidas talvez uma questão central se refira a elucidação dos mecanismos que asseguram êxito na construção de um processo comunicativo efetivamente instaurado entre sujeitos, passa pela compreensão desse processo como um roteiro de uma peça, onde os atores (sujeitos) assumem de maneira alternada e incessante a posição de determinados personagens, a saber, a posição de o autor e o leitor e a partir daí a imagem que obtemos desse movimento permite considerarmos que essas duas imagens se fundam e se separam, estabelecendo-se o que designamos em nosso léxico investigativo como compartilhamento de interlocutores e com isso explicando e descrevendo a experiência social e cognitiva denominada comunicação efetiva.

Um outro ponto que nos parece passível de menção e que ser articula estreitamente com aspectos já destacados anteriormente é o que se refere ao conceito de *legitimidade* que perseguiam e que buscavam (pelo menos desejavam) conferir em suas argumentações. Uma vez que as legitimações ficam instauradas a partir da constituição de interlocutores, que por sua vez se impõe a partir do solo das especificações locais ostentadas pelos sujeitos da enunciação, não é equivocado considerar que esses três aspectos, impermeabilização, processo de mobilização branda da *nucleação,* e a *Justificação* da crença afirmação (legitimidade concedida pelo estabelecimento/interiorização de interlocutores) se implicam mutuamente no processo constituinte dos campos semânticos.

Essas pontuações nos parecem autorizar a dizer que faz se necessário uma leitura alternativa para as concepções inerentes as dinâmicas comunicativas e por desdobramento as discussões que se circunscrevem no terreno em que se estabelece os paradigmas de conhecimento e significado, e, para além disso impacta fortemente na própria maneira usual de interpretar a experiência chamada *realidade.* Posições que reivindicam a supremacia de visões extremadas sobre a realidade, que em geral dão ênfase numa possível distinção entre interioridade e exterioridade tem tido ampla aceitação e adesão sem importantes críticas que podem ser estabelecidas as teorias tributárias dessas perspectivas.

Para citar um exemplo desse fato dentro das posições didáticas tradicionalmente oferecidas como modelos interpretativos tipicamente aceitos por pesquisadores, professores e estudiosos, se destaca a epistemologia genética de Piaget e as interpretações oriundas da tradição marxista (Davidov, Leontiev, Vigotsky), mas mesmo em certas leituras feitas Vigotsky, nos sentimos autorizados a destacar que a própria noção de exterioridade e realidade material carregam em seu bojo uma pecha essencialista que preserva a dicotomia exterioridade x interioridade. Posições mais amenas (menos radicais) podem ser encontradas em Goodman (1984), cujas discussões suscitadas deste último extrapolam o escopo desse nosso trabalho.

Com a possibilidade de contarmos com uma visão que consiga conciliar a assimetria “bipolar” das posições discutidas anteriormente, surge um novo horizonte de compreensão para noções como a efusiva discussão como o conceito de contextualização *de conhecimento.* Conceber esse último conceito unicamente como lastreado em uma experiência vivida (muitas vezes posta como única) além de empobrecer grandemente discussões sobre a própria natureza do que seja o indivíduo (retomaremos isso no último parágrafo), distorce alguns fenômenos cuja compreensão seja indispensável para explicar de maneira satisfatória qualquer teoria do conhecimento que queira fazer jus a essa adjetivação. Como destaca de maneira clara, Lins passa sua visão desses aspectos:

> Dizer que todo conhecimento é contextualizado, não pode ser apenas dizer que ele depende das experiências vividas por quem o produz; é preciso ir além e afirmar *que todo conhecimento é falado para o outro*, e inverter a afirmação de que "todo conhecimento é contextualizado," para dizer que todo contexto é 'conhecimentizado´. (Lins, 1994).

Em nossa tarefa investigativa um outro ponto que queremos dar ênfase diz respeito esses mesmos processos comunicativos que foram sendo estabelecidos pelos sujeitos e que claramente nos parece autorizar a reconhecer a *diversidade* como característica imperativa que permeou os processos de estabelecimento e articulação dos elementos constitutivos da comunicação, vistos à luz da teorização que empregamos para interpretar as ações apresentadas por cada sujeito da investigação.

CONSIDERAÇÕES ÚLTIMAS: Das possibilidades e caminhos que podem emergir desse trabalho

Nesta seção a partir de um movimento de caráter reflexivo pretendemos estabelecer algumas proposições conclusivas, considerando os dados apresentados e analisados no capítulo anterior, ensejando ainda fornecer respostas (provisórias) as questões que esse trabalho demandou respostas e ainda não tínhamos oferecido. Aqui também é o espaço onde emerge novas questões que precisam ser respondidas ulteriormente, originadas desse trabalho, mas que não puderam ser contempladas.

Uma primeira questão de interesse fundamental se refere às vantagens ou desvantagens de se colocar nos dias de hoje sob inquérito a noção de *indivíduo* mesmo com o *status quo* da neurociência, psicologia, pedagogia e demais *corpos de conhecimento* tipicamente considerados como os ditadores dos paradigmas que orbitam os conceitos que permeiam essa noção (de individuo/individualidade).

A nós nos parece legítimo *sim* colocar em discussão essa noção uma vez que ela em última análise é tributária das já questionadas posições essencialistas alhures exibidas nesse trabalho. Por exemplo, para Lins

> Esta ruptura com uma noção de *individuo* baseada na aplicação da distinção interno/externo à cognição, abre a possibilidade de novas perspectivas no estudo do processo de ensino e aprendizagem, em particular por mostrar que o processo de produção de *significado* deve ser explicitamente tratado nas salas de aula, ao invés de comparecer apenas na fundamentação das posições em didática. (Lins, 1994).

Como já ficou patente alhures nesse trabalho assumimos que conhecimento tem sempre um *sujeito*, que é justamente o sujeito de sua *enunciação*. Portanto falar de conhecimento é falar do conhecimento *do* sujeito. Isso não significa de modo nenhum que conhecimento se resida apenas na atividade da *fala,* mas que nos processos comunicativos - que por serem processos se articulam de maneira indissociáveis contemplem a escrita, os gestos e impreterivelmente a dimensão da *fala* quem nos parece não receber tributo devido, em particular nas experiências que envolvem as atividades sociais que caracterizamos hoje o ensino e as percepções e paradigmas didáticos da aprendizagem de disciplinas como a álgebra (e a matemática como um todo), em qualquer nível de ensino que seja, ensino fundamental, médio, superior e inclusive nos cursos de formação de professores de matemática.

E em último lugar gostaríamos de concluir que esse nosso trabalho investigativo desde seu início esteve comprometido com as possibilidades de potencializar as práticas realizadas em sala de aula, no *Ethos* de formação docente, assumindo contornos de *teorização* do conhecimento, entre outras razões por se reconhecer filiada à uma visão de mundo que tem clareza que toda pratica socialmente compartilhada que se pretenda, teoria, ciência, filosofia, epistemologia e todas as outras *ias* tem apresenta sempre movimento de intencionalidade política (política na acepção mais ampla do termo). Encontramos ainda em Lins uma reflexão absolutamente razoável sobre essa discussão:

> A luta pelo poder dentro de culturas (sociedades) se dá na forma do controle de quais são os modos de produção de significados legítimos; é nisto que ela é simbólica. E como a produção de significado é sempre local, sempre e inevitavelmente este controle vai ser frágil e temporário, cheio de fissuras e rachaduras. (Lins, 2012, p.28)

Com isso faz se urgente o reconhecimento das formas de controle que emanam dessas visões de mundo, de indivíduo e de conhecimento que tem corroborado a exclusão como marca de nossa sociedade, o que nas próprias palavras de Lins encontra materialidade ao notar que o silêncio, o riso, a reprovação escolar, a excomunhão, a internação psiquiátrica, são algumas formas de se negar legitimidade a dados modos de produção de significado.

A inquietação inicial que nos motivou a iniciar a caminhada em direção ao nosso movimento de pesquisa, amparada nosso questionamento inicial (que era se existiria possibilidades de um processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Abstrata que dialogasse com as demandas impostas pelo professor que irá atuar nos níveis básicos de educação foi nos conduzindo por um longo trajeto de leituras até então ignoradas, aquisição de maturidade e expertise técnica suficiente para que pudéssemos a partir da aquisição de nossos dados nos permitisse pelo menos de maneira preliminar responder as nossas inquietações.

O Painel construído pelos dados seguindo nossa filiação teórica e metodológica nos possibilitou ter uma compreensão holística de como se dá as interrelações entre os elementos que são mobilizados no processo comunicativo humano, e, sobretudo as implicações diretas da compreensão dessas interrelações para a constituição de uma visão mais consistente de como se dá os processos de ensino e aprendizagem (e no fundo o que eles significam), e nos munindo de uma perspectiva absolutamente profícua para a reflexão séria e comprometida com a atividade docente, em especial, a que se refere a atuação do professor de matemática.

Acreditamos que do que foi possível vislumbrar ao cabo de nossa tarefa investigativa conseguimos fomentar a possibilidade de uma leitura coerente dos fenômenos observados, a partir dos fantasmagóricos registros textuais que tentaram plasmar esses fenômenos observados, e que agora estão aqui impressos nessa dissertação, amparados no referencial teórico assumido e esperamos ter conferido tempero aos rastros de nossa atividade de pesquise apresentados nessas linhas. Que a leitura dessas linhas que não sejam insossas ao paladar daqueles que eventualmente se ocuparão dessa leitura e nem insalubres ao paladar da comunidade acadêmica, atendendo seus anseios e quimeras de rigor, em que foi engendrado parte da investigação que aqui temos a sombra textual, e quem se ocupar com essa tarefa que consiga produzir significado diante dos resíduos que apresentamos.

Referências Bibliográficas

BAKHTIN, M. O autor e a personagem na atividade estética' In: BAKHTIN, M**. Estética da criação verbal**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2003

BAKHTIN, M. **Marxismo e Filosofia da Linguagem**. S. Paulo: Ed. Hucitec. 1988.

BAUMGART, J. K. **Tópico de história da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo. ed: Atual, 1992.

BOURDIEU, P. **Questões de sociologia. Rio de Janeiro**: Marco Zero. 1983

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: uma visão do estado da arte**. Pro-posições, Campinas, v. 4, n. 1, p. 7-17, 1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1754/10-artigos-ambrosiou.pdf . Acesso em: 28 set. 2019.

DUCROT, O. **Princípios de Semântica Linguística:** dizer e não dizer. São Paulo: Cultrix, 1977.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 16. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2000.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido. 2.** ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1983.

FREUDENTHAL, H. (**Geometry between the devil and the deep sea**. Educational Studies in Mathematics, 3 (3/4), 413± 435. 1971.

FREUDENTHAL, H. **Why to teach mathematics as to be useful?** Educational Studies in Mathematics, 1 (1), 3± 8, 1968.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education:** *China Lectures* (Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991).

HARDY, G. H. **Em defesa de um matemático**. Tradução de Luís Carlos Borges. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

HEFEZ, A. Os Números Inteiros e Racionais. In **Curso de Álgebra** (2ª ed. pp. 22-41). Rio de Janeiro, 1993.

I. N. HERSTEIN. **Tópicos de Álgebra.** tradução de Adalberto P. Bergamasco, L. H. Jacy Monteiro. São Paulo. EDUSP; Polígono. 1970

LEONTIEV, A. N. The problem of activity in psychology. In J. V. WERTSCH (Ed.), **The concept of activity in Soviet psychology** (pp. 37–71). New York: Sharpe. 1979.

LINS, R. C.; Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa**. Revista da SBEM.** – SP Campinas, v.1, p. 75-91, set., 1993.

LINS, R. C.; O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis.** Blumenau, V.1, n.7, p. 29-39, abr/jun 1994.

LINS, R. C.; Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 37-60.

LINS, R. C.; Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo C. (orgs) Educação Matemática: **Pesquisa em Movimento**. São Paulo: Cortez, 2004a. p. 93-120.

LINS, R. C.; A diferença como oportunidade para aprender**.** In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. **Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas.** Porto Alegre: Edi PUCRS, v.3. p. 530-550, 2008.

LINS, R.C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L.; BARBOSA, E. P.; SANTOS, J. R. V.; DANTAS, S. C.; OLIVEIRA, V. C. A. (ogs**) Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**, São Paulo: Midiograf, 2012.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J.; **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997 (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

MINAYO, M. C. de S. (Org.). **Pesquisa social: teoria método e criatividade**. 17ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; Fiorentini, D. Contribuições para um Repensar…a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições** (Unicamp), v. 4, p. 78-91, 1993

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução: Miskulin, G. S. R.; Grado, C. R.; Araújo, E. A. **Zetetiké,** Campinas, v. 4, 1996. p. 99-120.

PINEAU. G. O sentido do sentido. In NICOLESCU, Basarab. **Educação e Transdisciplinaridade**. Trad. De Duarte, Vera, Maria F de Mello e Amenca Sommerman Brasília, DF: UNESCO, 2000. Edições UNESCO.

PINO, A. Semiótica e cognição na perspectiva histórico-cultural. **Temas psicol.**, Ribeirão Preto, v. 3, n. 2, p. 31-40, ago. 1995. Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-389X1995000200005&lng=pt&nrm=iso>. Acessos em 28 set. 2019.

ROSA. J. G .. Grande Sertão: Veredas. Rio de Janeiro: Nova Fronteira. 2001.

TOZONI-REIS, M. F. de Campos. A pesquisa e a produção de conhecimentos**:** introdução à pesquisa em educação. **Curso de pedagogia da Unesp**. 2010. Disponível em: <http://www.acervodigital.unesp.br/handle/123456789/195> Acesso em: 10 set. 2019.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus logico-philosophicus**. Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. 3.ed. São Paulo: EDUSP, 2001.

Apêndice A – Plano de Curso

Espera-se que o grupo de trabalho consiga através da perspectiva dialógica de trabalho/investigação, assistido pelo professor/pesquisador, fomentando condições de exercer com autonomia e maturidade os aspectos relacionados ao conteúdo trabalhado. Uma das expectativas se refere a capacidade dos discentes terem condições de perceberem a abrangência e as limitações circunscritas no campo de ensino de Álgebra, de maneira concatenada com o conteúdo a ser ensinado na Educação básica. A proposta é a promoção de diversas atividades, que serão desenvolvidas coletivamente na disciplina: serão criados 9 grupos de trabalho (4 ou 5 estudantes), cuja formação perdurará toda a disciplina. As atividades propostas para cada grupo de trabalho deverão estar atreladas a processos de avaliação, autoavaliação e reflexão crítica, a saber: (i) resolução de exercícios; (ii) problemas teóricos e práticos vinculados a disciplina de Álgebra I; (iii) atividades reflexivas sobre epistemologia da prática profissional do professor; e (iv) atividades diversas. Em (i), por exemplo, poderá ser proposto lista de exercícios que deverão ser resolvidas integralmente pelos membros do grupo, e posteriormente serem apresentadas em formato de miniaulas para os demais colegas de sala. Em (ii) por exemplo poderá ser proposto movimentos investigativos inerentes a problemas teóricos e práticos, lançando mão de cenários para investigação que possam suscitar reflexões e soluções para problemas que busquem mitigar o hiato entre o que está sendo trabalhado em sala de aula e o que deverá ser ensinado pelos futuros professores na Educação básica. Em (iii), no que se refere a epistemologia da prática profissional do professor, será proposta meta-análises e reflexões sobre as limitações e possibilidades de aplicação dos conteúdos apreendidos na disciplina, e suas implicações e/ou contribuições para as atividades docentes na Educação básica. Em (iv), por exemplo, serão propostas de atividades diversas, a partir da dinâmica do envolvimento dos grupos de trabalho, com características orgânicas e abrangentes, engendradas pelas devolutivas dos grupos de trabalho.

Conteúdo

Grupos e Anéis: conceitos, definição, exemplos e propriedades; Subgrupos e Subanéis; Ideais e anéis quocientes; Grupos cíclicos e geradores; Grupos de permutações; Classes laterais e Teorema de Lagrange: 24 hrs/aula.

Homomorfismos de grupos e de Anéis; Subgrupos normais; O corpo de frações de um domínio de integridade; Isomorfismos de grupos: 20 hrs/aula.

Teorema de Cayley; Teorema da Correspondência; Grupos quocientes; Grupos simples; Teoremas do isomorfismo; p-grupos e Teorema de Cauchy; Teoremas de Sylow: 16 hrs/aula,

Avaliação Oral: 4 hrs/aula.

O conteúdo programático será desenvolvido através de aulas dialógicas e reflexivas por meio de abordagens desenvolvidas com resolução de exercícios, discussões de problemas ou demonstrações e investigações sobre a aplicabilidade do conteúdo trabalhado no contexto em que esses futuros professores poderão trabalhar. Serão indicados exercícios relevantes (listas de trabalho), que cobrem aspectos teóricos da disciplina e sintetizam as técnicas utilizadas visando a criação do hábito do estudo frequente e a análise dos conteúdos abordados, além de promover o desenvolvimento de habilidades e incentivar a criatividade na resolução de problemas. Serão atividades avaliativas contínuas durante todo semestre. (Ver avaliação). O professor fará, quando necessário, alteração na ordem das unidades do conteúdo programático e a redistribuição das horas destina- das a cada tópico. Poderão também ser ministradas aulas em forma de estudo dirigido. Haverá disponibilidade de atendimento individual extraclasse a qualquer aluno (a) da disciplina (ver horário de atendimento).

ESTRATÉGIAS:

Aulas dialógicas, atividades em grupo, aulas expositivas abordando definições, conceitos e exemplos;

Aulas expositivas seguidas de leitura e resoluções de problemas em grupos; Estudo dirigido em sala de aula.

Seminários ou resolução de exercícios pelo aluno (individual ou em grupo).

RECURSOS:

Livro texto adotado e livros indicados;

Quadro e giz;

Desenvolvimento de exercícios;

Reprodução audiovisual utilizando Data show.

1. Desenvolver a capacidade de operar conceitos básicos da Álgebra Abstrata;
2. Desenvolver a habilidade de expressão em linguagem Matemática;
3. Desenvolver a habilidade de explicar ou justificar, por escrito, procedimentos de resolução de problemas;
4. Incentivar a pesquisa bibliográfica, por meio de material disponível na biblioteca e na internet;
5. Introduzir a utilização de conceitos abstratos e análise de estruturas algébricas em conjuntos;

Construir um espaço dialógico para reflexão acerca das correlações entre conteúdos de Álgebra Abstrata e a Álgebra presente na Educação Básica

Avaliação

Como avaliação da aprendizagem dos estudantes propõe quatro categorias de atividades avaliativas que serão desenvolvidas ao longo da disciplina. As 4 categorias de atividades avaliativas serão:

- Participação (Atividade individual): 20%
- Atividades de Listas de Trabalho (resolução e seminários): 30%
- Atividades variadas (atividades em grupo, estudo dirigido, etc.): 30%
- Avaliação oral (atividade individual): 20%

A média final será obtida pelo somatório das 4 categorias de atividades avaliativas perfazendo 100% (que equivalem 10,0 pontos).

Apêndice B – Falas Transcritas

Marcador	Pergunta	Justificação
1.1	O que é Anel	Um conjunto não vazio, munido de duas operações ...é... Que satisfaz algumas propriedades.eu gosto de falar na hierarquia, posso? Eu gosto primeiro de pensar em grupo, porque aí o grupo é munido de uma operação, fechado nessa operação, e satisfaz tres propriedades: elemento neutro, é... Reflec..simétrica e associativa. Se o grupo for comutativo ele é abeliano. é... beleza.. e apartir disso ele pode ter mais de uma operação e aí ele passa a ser anel.Aí o anel pode ser (longa pausa) é...aí é um anel, aí ele tem a propriedade distributiva, né, porque ele vai ter mais de uma operação. e ai pode ser...anel associativo, comutativo(?!) e depois do anel vem o corpo né!? Só que aí o corpo tem algumas propriedadezinhas que o anel não tem.
1.2	Qual é essa propriedade a mais?	Por exemplo, os números reais, os números reais eu posso considerar um corpo , porque eu consigo um elemento inverso, no caso, e já no cor...no anel nem sempre tem isso, por exemplo os números inteiros, os inteiros podem ser que sejam um anel mas que não seja um corpo. é, o inteiro é um anel mas não é corpo. os números inteiros, munidos da operação de adição e da multiplicação.
1.3	O que é um domínio de integridade (ou anel de integridade)?	O anel de integridade no caso não tem a divisão por zero. Não tem divisõr por zero, por exemplo, eu gosto de dar exemplo, porque fica mais fácil de entender, é..nesse..o anel de integridade poderia ser um...um.. Zn com n composto, né!? É! Zn com n composto...calma, confundi. Anel de Integridade... não possui divisor por zero...divisão por zero... eu sei que o anel de integridade, ele não satisfaz alguma coisa, que não deixa ele ser corpo, tô confundindo aqui...
1.4	Vamos pensar assim, ó, vc tem o conjunto dos múltiplos de três, munidos de duas operações, a adição usual e a multiplicação usual. É um corpo essa estrutura?	É! ,Porque não é anel de integridade.
1.5	Não é anel de integridade?	3Z...
1.6	$_3Z$, os múltiplos de 3... Adição usual, multiplicação usual, é um corpo?	é um corpo. É um corpo.

1.7	E é um anel de integridade?	é um anel de integridade. É porque todo corpo é anel de integridade né, mas nem todo anel de integridade é um corpo.
1.8	Qual o inverso multiplicativo do 3?	O inverso multiplicativo do 3?
1.9	Do 3. o 3 faz parte desse conjunto.	1/3 uai...
1.10	1/3 pertence a esse conjunto?	não...ah tá... Então não é corpo. Ah é mesmo..rsrs. Por exemplo então o exemplo que dei dos inteiros e dos reais, um é corpo e o outro é so anel de integridade.
1.11	E um exemplo de um corpo finito?	Um corpo finito? Os reais munidos de...
1.12	Finito...	Z7? É. Porque Zp com p primo, né?
1.13	com a adição e multiplicação...	é.
1.14	e o Z8? Com adição e multiplicação?	Não.
1.15	é anel de integridade?	Se ele é anel de integridade?...é! Não, não é, Porque ele, ele...por exemplo ele admite o [0] como divisor né. Aí ele não é anel de integridade. E não é corpo também né?!
1.16	Se não for anel de integridade não vai ser corpo.	é.
1.17	O que é homomorfismo de grupos?	homomorfismo? No caso ele pode ser injetor ou, ou, é, é injetor...entre dois grupos... Na verdade assim, ele vai comparar as estruturas do grupo né. Mas aí por exemplo, eu tenho o caso do isomorfismo que acontecem as mesmas propriedades, e no homomorfismo não. Não necessariamente. porque o isomorfismo é sobrejetor. porém homomorfismo tambem satisfaz as propriedades tipo o elemento neutro de G em G1 por exemplo, aí Φ(0), o elemento neutro levado em e1...
1.18	Mas, qual é a propriedade para ser homomorfismo?	ESCRITA NO QUADRO...
1.19	Dê um exemplo lá da educação básica.	De...homomorfismo?
1.20	De homomorfismo.	Vamos ver...(longa pausa)...uma f de ... Suponhamos que uma f(x) é igual a...ai, não sei. Travada aqui.
1.21	Vamos mudar de assunto então...	Mas eu sei, eu sei isso aqui. Eu fiz isso aqui, a gente fez isso na sala. E é coisa simples...
1.22	Voce sabe enunciar ou falar um pouco sobre o teorema de Cayley, teorema	Hum...

	de representação de grupos?	
1.23	O que ele prescreve?	Hum... Todo grupo finito...ai...tava lendo sobre isso agorinha. Rsrs... Não sei é como de um grupo finito que forma todos os outros, não me recordo direito não...
1.24	Pegue um grupo aditivo e um subgrupo dele... Quais são as classes laterais de 3Z em Z?	As classes laterais de 3Z em Z?
1.25	É.	Calma. Vou fazer aqui mas não sei se está certo. Eu tenho Z né, aqui...e aí..no caso aqui é um subgrupo normal né?
1.26	O que é um subgrupo normal?	Quando as classes laterais, a operação tanto pela direita como pela esquerda da o mesmo resultado.
1.27	E por que que esse subgrupo é normal?	Então, porque 3 operado com... As classes laterais... -2 operado com 3, -6, 3 operado com -2...ah não, é mais, to fazendo multiplicação. Não. Não é subgrupo normal não. Então, porque, mais... Vamos ver aqui... Por exemplo, (3) + (-2) daria 1...; -2 + (3) daria 1. Acho que é. é subgrupol normal. Não, to confundindo... O Z..., por que ai todos multiplos de 3, aí vai ser 3, 6, 9, 12, ou -3, -6, -9, aí, é por exemplo... ah não sei não...

Marcador	Pergunta	justificação
2.1	O que você entende por domínio de integridade?	Então, domínio de integridade, ele é um anel que é comutativo, unitário e sem divisores de zero. Ou seja, se eu tenho dois elementos se multiplicando e dando zero, ou um deles é zero, ou os dois são zero.
2.2	E o que é um corpo?	Que que é um corpo? Ai,tô nervosa. É um anel de integridade que também...tentar lembrar aqui...que ele possui inverso multiplicativo?!
2.3	Certo. Dá um exemplo de corpo, lá da educação básica.	Uai, os reais...
2.4	Quais operações?	Munidos de adição e multiplicação.
2.5	De um exemplo de um domínio de integridade que não é corpo.	Ou seja, não tem inverso multiplicativo. Deixa eu pensar se os naturais vai ser um...não. Porque ele não é munido...oh os naturais é munido da adição, porque qualquer número que eu adicionar entre os naturais vai tar nos naturais. A multiplicação também. Ele é

		associativo? Os inteiros?Os inteiros munidos de adição e multiplicação?
2.6	você tá perguntando?	Não, to afirmando.
2.7	Um subgrupo dos inteiros.	Um subgrupo dos inteiros?
2.8	Pega nos inteiros com a adição...	Nos inteiros com adição...hum...os múltiplos de 6?!
2.9	Os múltiplos de 3 também são?	Sim.
2.10	Então o grupo é os inteiros, aditivos, pegando um subgrupo 3Z, 3Z < Z, ache as classes laterais.	então H < G, e g ∈ G, multiplicamos por G.
2.11	multiplica? São iguais as classes? O conjunto dos inteiros é abeliano?	Se são iguais ?Soma são iguais, subgrupo normal, pois é comutativo, g
2.12	Então vamos achar todas as classes aí. Considerando G.	então... Primeiro pela esquerda...
2.13	tanto faz...	Então 0 + 3Z, acho melhor usar -3, -1, tipo assim...
2.14	Você que sabe...	(-3) + ...
2.15	Quantas classes laterais temos aí/	Aí seria assim, tipo, 3 + 3Z, isso aqui,..., entraria como 0? Porque como 3Z são os múltiplos de 3... Ah, tem 3 classes então...
2.16	Quais são?	Deixa eu pensar...só um minutinho. Agora estou em dúvida se são 3 ou 5, porque tem a questão dos negativos.
2.17	(-3) + 3Z é o que?	Agora fiquei em dúvida. Ah nem, que difícil!
2.18	Você tem um grupo G e um subgrupo H, qual seria o critério de normalidade?	Uai, se as classes laterais forem iguais, tipo assim, tenho um g ∈ G e o H que é o subgrupo então eu tenho aqui se Gh = hG. Aí tem aquela outra assim, óh, g-1..só que assim sempre esqueço essa. Enfim você pediu só uma... Rsrs.
2.19	O que é um homomorfismo?	Eu tenho um a operado com b é igual a f(a) operado com f(b).
2.20	De um exemplo.	A exponencial?! Que aí eu tenho ... Xa . Xb = xa+b

Marcador	Pergunta	justificação
3.1	Me de um exemplo de grupo	Posso usar o quadro?
3.2	Pode.	Bom. Eu posso pegar o grupo Z3, munido da adição. Então éle é um grupo, porrque ele vai satisfazer todas aquelas propriedades, né!? Ele é fechado para essa operação. Ele vai satisfazer a propriedade associativa. Vai possuir elemento neutro. E ele vai ter elemento simétrico. E ele é comutativo. Então além de ser grupo elé será um grupo comutativo ou abeliano.

3.3	Faça a tábua dele para a gente.	(escrevendo no quadro e explicando) Então a operação aqui será + e os elementos [0],[1], [2] (constrói a tábua com exito)
3.4	É cíclico ou não?	Bom, vamos lá: é cíclico se eu tiver um elemento que vai gerar todo ele né!?...[pausa] ai professor, não sei te responder...mas tem um resultado que diz o seguinte:"se a ordem de um grupo, por exemplo, se eu tenho aqui o Z6, Isso aqui, não ó! Se a ordem de um grupo vezes a ordem de outro grupo forem primos ele vai ser cíclico.
3.5	Voce ta falando de um cartesiano, né?	Isso, de um cartesiano.
3.6	Alí na tábua se eu trocar a operação de adição por multiplicação, ainda eu terei uma estrutura de grupo? Com aqueles mesmos elementos.	Bom, vamos ver: Deixa eu pensar aqui. Elemento neutro...(escrevendo no quadro). Peraí, tô verificando aqui. Tem. O elemento neutro vai ser o zero. Olha em eu tenho um elemento x então eu opero e vou ter meu elemento x né?! Por exemplo o 0 operado com o 0 eu tenho o 0barra. 0barra operado com 1 é zero...ah não mas não me retorna... então ele não é um grupo...eu não sei se eu tô errado. pela sua cara estou.. mas isso aqui confundi mas se voce parar para pensar um pouco, agora realmente, se meu x são esses valores aqui né.. 1 operado com 0 dá 0, 2 operado com 0 dá 0, o valor que tá me retornando...
3.7	Ta bom, vamos pra frente.	Tá bom professor, me pergunte outras coisas que eu sei.
3.8	Me fale sobre homomorfismo de grupos, defina homomorfismo de grupos.	Um homomorfismo vai ser uma aplicação, por exemplo seja um grupo G munido de uma operação • e um grupo J munido de uma operação * estou escrevendo assim pra falar que *podem* ser operações distintas, então um homomorfismo vai ser uma aplicação de uma f de um grupo, por exemplo, vou dar um exemplo. Exemplo: Eu pego um grupo. Por exemplo...vamos pensar na função exponencial, eu posso pensar sei lá, 4 elevado a x, aí eu quero verificar se essa função é homomorfíca, né!? então eu tenho que ver aqui se uma condição vai ser satisfeita, que condição é essa? vai ser um operação f(x+y) = f(x)*f(y), então agora eu to falando ... de um grupo com operação de soma e outro com operação de multiplicação, por exemplo, vou fazer assim,pegar um grupo G com operação de soma e outro grupo J com operação de multiplicação. Não vou definir, tentar mostrar quem é esse grupo aqui (se referindo ao grupo G), vamos só tentar mostrar isso aqui...(mostrando no quadro que a soma em G é a * em J), f(x + y) = 4^x+y e disso eu sei que isso é 4^x * 4^y. Então eu tenho que isso aí é um f(x)*f(Y), então de uma coisa consigo chegar no outro.
3.9	Para encerrar (paramim) o que é um domínio de integridade?	Dominio de Integridade, primeiramente é um anel, mas um anel de integridade, ele é um anel...que não possui elementos nilpotentes, ou seja, elementos divisores de zero. Ou seja, se eu tenho x*y = 0, nesse exemplo, ou x vai ser 0 ou y vai ser 0.

3.10	E corpo?	O corpo é chamado de anel de integridade. Se eu pegar um elemento lá dentro dele, por exemplo um a, ele possui unidade, quer dizer eu consigo um inversível dele com relação a multiplicação.
3.11	Z6 é isomormo a S3?	O senhor tá sendo malvado comigo, rsrs
3.12	Não ué, rere	Como é que é?
3.13	O Z6...Qual é a ordem do Z6?	Vamos lá, o número de elementos que possui Z6 né!? 6! 6. pois são 6 elementos né?
3.14	E do S3?	6. Que é o das permutações.
3.15	E eles são isomorfos?	oh, 6, 6 não são primos entre si. Deixa eu ver...eles são cíclicos porque o produto da ordem não são primos entre si Não sei se é a definição. Eu vi um resultado parecido com isso.rsr
3.16	Então eles não são isomorfos? O Z6 é abeliano?	Vamos lá, abeliano é comutativo,
3.17	Grupo aditivo...	sim. Para a adição ele é abeliano.
3.18	E o S3?	Sim. Eu acho que sim. Parece que a gente fez na sala.
3.19	Venceu o tempo, aqui é igual psicanálise, rsrs.	...
3.20	Não são isomorfos.	Não são né! Mas tem que pegar individual né?
3.21	Não é abeliano. Z6 é cíclico.	

Marcador	Pergunta	justificação
4.1	Fale pra gente a definição de grupos.	Então, grupos, se a gente for pegar a definição de grupos, a gente tem um conjunto, no caso vamos colocar G, e temos uma operação, vamos colocar essa operação * , e grupo seria o que? Seria aonde a operação tem que ser fechada, onde as operações que fizermos com os elementos do grupo tem que recair no próprio grupo,e, no caso tem que ter algumas propriedades, que no caso é a associativa, tem que ter o elemento neutro, né!? uma das propriedades do elemento neutro diz que ele tem que ser único né. E tem que ser simetrizável, e, cada elemento tem que ter um único simétrico, aí isso é um grupo. E se tiver a propriedade comutativa, é abeliano.
4.2	E ampliando, o que seria anel?	Anel é o seguinte, vamos pegar o grupo G, o grup.., o conjunto G e Duas operações. O que acontece? Vamos chamar primeira operação + e a segunda operação *, então esse primeiro a qui, o G, com a operação + tem que ser um grupo abeliano. E a segunda propriedade aqui, o que que tem que acontecer...essa outra operação aqui tem que ser distributiva em relação a operação lá ne...distributiva e associativa.

4.3	E dominio de integridade, anel de integridade?	Anel de integridade é o seguinte, além de tudo isso aí que a gente falou né, tem que ser um anel comutativo...calma, estou nervoso, ter a comutatividade, a segunda operação também tem que ser comutativa, e ela tem que ter unidade né, ou seja, tem que ter um elemento neutro lá né, e se por exemplo pegarmos dois elementos x e y e operarmos e x e y der zero, x é zero ou y é zero.
4.4	E corpo?	Ixi, essa ai, me pegou, estudei não...rsr
4.5	É a estrutura mais poderosa né?rsrs	Isso né, que os reais, os reais é um corpo.
4.6	O que que os reais tem que os inteiros não tem?	essa parte aí eu vacilei, vacilei feio... Fui só até anel.
4.7	Voce consegue fazer aí, não precisa explicar não a tábua do Z4?	Sim. (Elaborando no quadro.)
4.8	Bom, considerando essa tábua e trocando a + por * preservando os elementos.	Deixa eu ver aqui...Aí eu acho que não né, porque o elemento neutro vai ser um né?
4.9	Esse grupo ai com a adição, ele é cíclico?	Se ele é cíclico? Sim ele é cíclico porque se não me engano, eu acho que o 1 ele gera todo grupo, né?
4.10	Considerando esse grupo ainda, vc consegue destacar, com elementos dele um subgrupo?	Nos podemos, bom, posso rascunhar aqui?
4.11	Pode.	(depois de testar no quadro) então eu acho que um subgrupo seria 0 e 2. Por que? Porque se a gente operar os elementos vai estar dentro do subgrupo né. O elemento neutro tá aqui e o simétrico tá aqui também.
4.12	Voce consegue esboçar para gente aí as classes laterais desse subgrupo aí em Z4 = G. Chame ele de H.	...
4.13	Quais as classes laterais?	Vamos lá então.
4.14	Adição tá...	silencio
4.15	Quais as classes laterais?	pega ah tem que ser igual a ha
4.16	Fale do teorema de Cayley	se voce tem um grupo finito né, aí ele é isomorfo a um determinado grupo de permutação.
4.17	Então o Z3 é um grupo finito né?	sim.
4.18	De ordem 3	sim
4.19	Ele é isomorfo a qual grupo de permutações?	Deixa eu fazer aqui. Depois de dois minutos pensando) esse aqui (apontando para S3)

Marcador	Pergunta	justificação
5.1	Fale um pouco pra gente sobre Grupos.	Deixa eu respirar..é um conjunto, que envolve uma operação e que satifaz algumas propriedades: Associatividade, tem elemento neutro e é simetrizavel.
5.2	Que mais?	Existe o grupo abeliano também que tem todas as propriedades do grupo e é comutativa também.
5.3	e se eu tiver essa estrutura e além da operação, tivermos mais uma operação. O que falta falar aqui para termos um anel?	Da distritutividade e da ... associatividade.
5.4	isso é um anel né? E se for um anel comutativo?	Precisa da comutatividade.
5.5	E se for um anel comutativo com unidade?	Ai, um anel comutativo com unidade. Sei que não pode ter divisores... Ah me deu um branco. Inversa? A esqueci!
5.6	E um dominio de integridade?	O dominio de integridade é um anel comutativo que não possui divisores de zero.
5.7	O que significa não possuir divisores de zero?	Um exemplo? Por exemplo, que pelo menos um dois dois seja zero, por exemplo x vezes y igual á zero então y seja zero ou x seja zero.

5.8	E o corpo?	Corpo? Um corpo é um anel de integridade que possui inverso multiplicativo.
5.9	Dê um exemplo pra gente então de um corpo.	É difícil professor! Peraí, um corpo... Ele é um anel de integridade...ele é um anel de integridade (repetindo para si). Ah não lembro.
5.10	Dê exemplo de um grupo de ordem 6.	Z6.
5.11	É cíclico?	Para ele ser cíclico, todo elemento dele tem que ser gerado por um elemento de dentro que tem que gerar todo o grupo.
5.12	Então...Z6 com a adição.	tá, se é cíclico Z6, vamos lá.Ele tem como divisor o 2 o 4 e o 6. Tá me dando nervoso já.
5.13	d5 - você se lembra do teorema de Lagrange?	A ordem do subgrupo divide a ordem do grupo.
5.14	E isso quer dizer, por exemplo, que se eu pegar um grupo de ordem 10 eu terei um subrupo de ordem 5?	Não.
5.15	Não?	Sim...

5.16	Vai existir obrigatoriamente um subgrupo cuja ordem é divisor do grupo?	Nesse caso sim.
5.17	Você se lembra do teorema de Cayley? Teorema da representação.	Que é alguma coisa... Como é que é... Quando tem uma bijeção é um grupo isomorfo a um grupo de permutações. Deixa eu citar um exemplo de permutação. Deixa eu pensar.
5.18	Então, tem o Z6. Z6é cíclico não é?	Sim...
5.19	E o S3, eles são isomorfos?	Tem a bijeção, né?!
5.20	Então são isomorfos?	Não. Como que é? Não entendi.
5.21	Z6 e S3 são isomorfos, não?	Sim!
5.22	Qual é a definição de núcleo de um homomorfismo?	O Ker, não é?
5.23	Isso!	Isomorfismo...
5.24	Núcleo do Homomorfismo.	Então, no homomorfismo você tem dois grupos não? Então eu tenho dois grupos por exemplo o G e o J, então o elemento neutro do G é igual ao elemento neutro do J.
5.25	Igual?	é o mesmo. Não sei se eu falei certo...
5.26	Se quiser usar o quadro.	Eu to tremendo. Prefiro prova escrita do que prova oral.

5.27	Prefere prova escrita?	Sim, prova escrita sou eu e o papel então eu somente coloco tudo que eu li.
5.28	Mas tem haver com o conteúdo.	De mim mesmo. É mais difícil falar.
5.29	Voltando ao homomorfismo	Então eu tenho uma f definida em um grupo e uma fi no outro. Então f(xy) = fixfiy. A estrutura permanece...
5.30	e isomorfismo?	é que tem uma bijeção né?
5.31	Obrigado. Tá bom já.	

Marcador	Pergunta	justificação
6.1	Nos fale um pouco de aneis e subaneis	é como se fosse um grupo abeliano. Na adição atender as propriedades de grupo e em relação a multiplicação tem que atender a associatividade e a distributividade.
6.2	E um anel com unidade?	Não sei
6.3	Dominio Euclidiano	Eu também não sei.
6.4	E dominio de integridade, anel de integridade?	Não sei rsr. Estudamos mas não sei. A gente estuda em grupo daí um fala, outro fala ... rsr
6.5	Falando em Grupo, nos cite um exemplo de Grupo.	Meus Deus...Deixa eu ver...
6.6	Pode ser lá da educação básica.	Deixa eu ver...(longa pausa)
6.7	Para ser grupo, o que é preciso?	De associatividade...
6.8	Preciso de um conjunto...	Por exemplo o x está relacionado com o y
6.9	Pode mostrar no quadro	(escrevendo no quadro as propriedades associativa, existência de elemento neutro, e o simétrico)

6.10	Então, qual seria um exemplo.	(Longo silêncio)
6.11	Então vou te dar um exemplo de um conjunto e você me dirá se é grupo ou não. O conjunto dos números racionais mais a operação de multiplicação é grupo?	Explicar acho que não vou saber, mas acho que não né...os racionais com esses números quebrados.
6.12	Você acha esses números quebrados esquisitos? Rsr	É..rsr
6.13	E os inteiros com a adição, é um grupo?	Eu acho que sim.
6.14	Por que?	Posso escrever um exemplo?
6.15	Pode sim.	(Escrevendo no quadro - testando fraçoes particulares). Meu Deus...
6.16	Explique com suas palavras o que seria grupo cíclico	(silêncio)
6.17	E o teorema de Lagrange?	Eu sei enunciar ele, professor.
6.18	Diga então.	Deixa eu ver.Eu tenho G né, G um grupo finito e tenho H um subgrupo de G. A ordem de H divide a ordem de G.
6.19	Se você por exemplo tem o Z12, tá lembrada do Z12	0,1,...até o 11
6.20	Então qual é a ordem dos possíveis subgrupos de Z12?	A ordem?
6.21	Isso, por exemplo Z12 poderia ter um subgrupo de ordem 5?	Não.
6.22	Por que não?	silêncio
6.23	Pra que serve o teorema de Lagrange?	Tá, um subgrupo de Z12 né, de ordem 5...(silêncio)
6.24	Qual a ordem de z12?	11?12!
6.25	Então...	Tinha anotado isso, mas falar não sei...
6.26	O que é um homomorfismo de anéis?	Tinha um exemplozinho, tentanto lembrar aqui. (escrevendo no quadro.)
6.27	é navegando maisou menos por esses mares aí...	