

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DO MÉTODO
DE ESTIMAÇÃO DE ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA ATRAVÉS DA DI-
FERENÇA ENTRE OS VALORES SINGULARES DA MATRIZ DE
COVARIÂNCIA ESPACIAL

Hugo Vinícius Leão e Silva

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Pinto Lemos

Goiânia
2009

HUGO VINÍCIUS LEÃO E SILVA

REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DO MÉTODO
DE ESTIMAÇÃO DE ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA ATRAVÉS DA DI-
FERENÇA ENTRE OS VALORES SINGULARES DA MATRIZ DE
COVARIÂNCIA ESPACIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia Elétrica e de Computação, da Escola de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal de Goiás, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e de Computação.

Área de Concentração: Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Pinto Lemos

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

S586r Silva, Hugo Vinícius Leão e.
Redução da complexidade computacional do método de estimação de ângulos de incidência através da diferença entre os valores singulares da matriz de covariância espacial [manuscrito] / Hugo Vinícius Leão e Silva. – 2009.
xv,91 f. : il., figs., tabs..

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Pinto Lemos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica e de Computação, 2009.

Bibliografia: f.88-91.

Inclui lista de abreviaturas e siglas, símbolos, figuras e tabelas.

1. Antenas ajustáveis – Processamento de sinais 2. Ondas eletromagnéticas 3. Processamento de sinais – Técnicas digitais 4. Complexidade computacional Lemos, Rodrigo Pinto. II. Universidade Federal de Goiás, **Escola de Engenharia Elétrica e de Computação** III. Título.

CDU: 621.396.67:004.383.3

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por todas as oportunidades que tive para o meu crescimento.

À minha família, por ter me dado muitas oportunidades, muito apoio, alegrias e aprendizado nesta vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eng^o. Rodrigo Pinto Lemos, por sua confiança depositada em mim, por sua amizade, pelas orientações em todos os momentos solicitados e por sua paciência característica.

À minha namorada, Janaína, pela paciência que teve nos momentos de ausência para prosseguir com os meus estudos durante este o curso de Mestrado.

Ao grande amigo Gilberto Camilo, pela imensa ajuda que me dera durante as disciplinas eletivas durante o este curso de Mestrado.

Aos meus amigos, que me propiciaram diversos momentos de alegria.

Resumo

Este trabalho aborda o problema de estimação de ângulos de incidência (DOA) de ondas planas sobre um arranjo de sensores. Dentre os vários métodos encontrados na literatura, o método MODEX (*MODE with eXtra roots*) se destaca por seu desempenho e complexidade computacional. Recentemente, foi proposto o método SEAD (*SEArch of Direction by differential spectrum*), que apresenta desempenho de estimação mais robusto que o MODEX aos efeitos do ruído, contudo, possui complexidade computacional proibitiva para aplicações de tempo-real. Na busca por reduzir esta complexidade computacional, este trabalho apresenta uma nova proposta de seleção de estimativas para o SEAD que gera uma quantidade significativamente menor de ângulos candidatos. Adicionalmente, a inserção de um processo iterativo de refinamento de soluções permitiu que a resolução do estimador fosse aprimorada em relação àquela inicialmente ajustada, além de reduzir a complexidade computacional da seleção.

Palavras-chave: Arranjo de sensores, ULA, DOA, MODEX, SEAD, complexidade computacional.

Abstract

This work is concerned with the estimation of Direction-Of-Arrival (DOA) angles of plane waves impinging on a sensor array. Among all methods of estimation found in literature, MODEX (MODE with eXtra roots) outstands for its performance and computational complexity. However, recently, a method called SEAD (SEArch of Direction by differential spectrum) was proposed. It has shown better estimation performance against noise than MODEX has. However, its computational complexity is prohibitive for real-time applications. In order to reduce its computational complexity, a new estimate selection procedure on SEAD is proposed, that yields to significantly less candidate angles than before. Additionally, the introduction of iterative refinements on estimates has allowed improving resolution as well as complexity reduction.

Keywords: Sensor array, ULA, DOA, MODEX, SEAD, computational complexity.

Sumário

1	Introdução.....	16
1.1	Motivação	17
1.2	Objetivo Geral.....	19
1.3	Objetivos Específicos	19
1.4	Organização dos Capítulos	19
1.5	Patente depositada.....	20
2	Modelagem de Sinais para DOA baseada em propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre	21
2.1	Introdução	21
2.2	Observações gerais	21
2.3	Modelo de onda e do sinal captado no arranjo	26
2.4	Outras considerações sobre o sinal	29
2.5	Matriz de covariância espacial.....	31
2.6	Medida de desempenho de métodos de estimação de DOA.....	32
3	O Estimador de Máxima-Verossimilhança	34
3.1	Introdução	34
3.2	O Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE).....	34
3.2.1	Estimador ML Determinístico (DMLE).....	35
3.2.2	Estimador ML Estocástico (SMLE)	37
3.3	Considerações finais	38
4	Os métodos MODE e MODEX	40
4.1	Introdução	40
4.2	Fundamentação teórica dos estimadores derivados do DMLE.....	40
4.3	O método de estimação MODE	42
4.3.1	Algoritmo para o método MODE.....	44
4.4	O método de estimação MODEX	44
4.4.1	Processo de seleção de raízes no método MODEX.....	46
4.5	Complexidade computacional do método MODEX.....	47
4.6	Considerações finais	47
5	O método de estimação SEAD	48

5.1	Introdução	48
5.2	Comportamento dos valores singulares	48
5.2.1	Comportamento na ausência de ruído	49
5.2.2	Comportamento na presença de ruído	50
5.3	Critério Diferencial	53
5.3.1	Comportamento na ausência de ruído	54
5.3.2	Comportamento na presença de ruído	57
5.4	Seleção de estimativas DOA.....	59
5.5	Complexidade computacional do método SEAD	60
5.6	Considerações finais	61
6	Propostas de aprimoramento do método SEAD	62
6.1	Introdução	62
6.2	Considerações iniciais.....	62
6.3	Seleção de estimativas DOA.....	64
6.3.1	Problema de programação linear	64
6.3.2	Fundamentação teórica do método de busca <i>branch-and-cut</i>	65
6.3.3	Implementação da nova etapa de seleção	68
6.4	Critério Diferencial melhorado	71
6.5	Complexidade computacional.....	72
6.6	Considerações finais	73
7	Análise e resultados de desempenho de estimação e complexidade computacional.....	74
7.1	Introdução	74
7.2	Análise da complexidade computacional do método SEAD	74
7.2.1	Medida de complexidade computacional	75
7.2.2	Critério Diferencial.....	75
7.2.3	Etapa de seleção de estimativas da versão anterior do SEAD.....	76
7.2.4	Etapa de seleção de estimativas da versão aprimorada do SEAD.....	77
7.3	Resultados de simulação	78
7.3.1	Desempenho de estimação.....	78
7.4	Complexidade computacional.....	81
7.5	Considerações finais	84
8	Conclusões.....	85
8.1	Introdução	85
8.2	Conclusões sobre o novo método apresentado	86
8.3	Sugestões para prosseguimento do trabalho	86

Lista de abreviaturas e siglas

CRB	do inglês <i>Cramér-Rao Bound</i> – Limite de Cramér-Rao
DMLE	do inglês <i>Deterministic Maximum Likelihood Estimator</i> – Estimador de Máxima Verossimilhança Determinístico
DOA	do inglês <i>Direction-Of-Arrival</i> – Ângulo de Incidência
fdp	função densidade de probabilidade
MLE	do inglês <i>Maximum Likelihood Estimator</i> – Estimador de Máxima Verossimilhança
MODE	do inglês <i>Method Of Direction Estimation</i> – Método de Estimação de Direção
MODEX	do inglês <i>MODE with eXtra roots</i> – MODE com raízes extras
MUSIC	do inglês <i>MUltiple Signal Characterization</i> – Caracterização de Múltiplos Sinais
REQM	Raiz do Erro Quadrático Médio
SEAD	do inglês <i>SEArch of direction by Differential spectrum</i> – Busca de Direção por Espectro Diferencial
SMLE	do inglês <i>Stochastic Maximum Likelihood Estimator</i> – Estimador de Máxima Verossimilhança Estocástico
SNR	do inglês <i>Signal-to-Noise Ratio</i> – Relação Sinal-Ruído
SVD	do inglês <i>Singular Value Decomposition</i> – Decomposição em Valores Singulares
ULA	do inglês <i>Uniform Linear Array</i> – Arranjo Linear Uniforme
WiMAX	<i>Worldwide Interoperability for Microwave Access</i> – Padrão IEEE 802.16d/e

Lista de símbolos

$\mathbf{a}(\omega_m)$ é o vetor direção ou vetor de transferência da frequência ω_m .

\mathbf{A} é a matriz de transferência.

\mathbf{b} é o vetor de parâmetros após a reparametrização

$\bar{\mathbf{b}}$ é o vetor de parâmetros \mathbf{b} estendido.

\mathbf{B} é a matriz formada pelo vetor de coeficientes \mathbf{b} .

$\bar{\mathbf{B}}$ é a matriz formada pelo vetor de coeficientes $\bar{\mathbf{b}}$.

C é o número de combinações a serem realizadas (MODEX).

CD é o índice para denotar as região de varredura do Critério Diferencial.

D é o distanciamento arbitrário entre os ângulos candidatos na etapa iterativa de seleção de estimativas.

d é o interespaçamento entre os sensores adjacentes no arranjo linear de sensores.

E é o número de ângulos candidatos extras gerados para cada fonte a ser estimada (SEAD Aprimorado)

$E\{\mathbf{y}\}$ é a esperança estatística do vetor \mathbf{y} .

F é a função objetivo do problema.

$F_m(t)$ é a amplitude da m -ésima onda incidente.

F_{DMLE} é a função custo do critério ML Determinístico.

F_{SMLE} é a função custo do critério MD Estocástico.

$F(\mathbf{b})$ é a função custo equivalente reparametrizada em função do vetor \mathbf{b} .

$F_{MD}(\mathbf{b})$ é a função custo do método MODE.

$F_{MX}(\mathbf{b})$ é a função custo do método MODEX.

K é a quantidade de *snapshots*.

I é o número de iterações a serem realizadas (SEAD Aprimorado).

k é o índice do k -ésimo *snapshot*.

L_{DMLE} é a função de verossimilhança para o modelo de sinal determinístico

l_{DMLE} é o negativo do logaritmo natural de L_{DMLE} .

L_{SMLE} é a função de verossimilhança para o modelo de sinal incondicional.

M é o número de fontes de sinais.

m é o índice da m -ésima fonte.

MD é o índice para denotar as expressões referentes ao método MODE.

MX é o índice para denotar as expressões referentes ao método MODEX.

N_{exp} é o número de experimentos realizados.

N é o número de sensores do arranjo.

n é o índice do n -ésimo sensor.

$O(\cdot)$ é a medida de complexidade computacional para o pior caso.

P é o número de raízes extras (MODEX).

\mathbf{P} é a matriz de correlação dos sinais.

\mathbf{P}_A^\perp é o projetor ortogonal do espaço das colunas da matriz \mathbf{A} .

r_m é a distância até a origem de um sistema de coordenadas.

R é o índice para denotar a região de seleção de ângulos com refinamento (SEAD).

R é a resolução utilizada no intervalo de varredura do Critério Diferencial.

\mathbf{R} é a matriz de covariância espacial.

$\hat{\mathbf{R}}$ é a matriz de covariância estimada espacial.

$\mathbf{s}(k)$ é o vetor de sinais.

SA é o índice para denotar as expressões referentes à versão aprimorada do método SEAD.

SD é o índice para denotar as expressões referentes ao método SEAD.

T é o tamanho do intervalo de varredura do Critério Diferencial.

$\text{tr}[\mathbf{P}]$ é o traço da matriz \mathbf{P} .

\mathbf{U} é a matriz unitária cujas colunas são os autovetores de \mathbf{R} .

\mathbf{x} é o vetor composto por amostras de sinal.

$\hat{\mathbf{x}}$ é a estimativa de \mathbf{x} .

\mathbf{X}^H é o conjugado transposto (hermitiano) da matriz \mathbf{X} .

\mathbf{X}^T é o transposto da matriz \mathbf{X} .

\mathbf{y} é o vetor de dados (*snapshot*) na saída do arranjo (sinal + ruído).

$\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de coeficientes reais formado pela decomposição do vetor \mathbf{b} .

$\delta_{k,i}$ é a função delta de Kronecker.

$\phi_m(t)$ é a fase da m -ésima onda incidente.

λ_i é o i -ésimo valor singular da matriz $\hat{\mathbf{R}}$.

θ_m é o ângulo de incidência (DOA) da m -ésima onda incidente.

\mathcal{G} é o comprimento de onda da portadora do sinal.

σ^2 é a variância do ruído.

ω_m é o ângulo elétrico (frequência) equivalente da m -ésima onda incidente.

$\boldsymbol{\omega}$ é o vetor das frequências dos sinais.

$\boldsymbol{\xi}$ é o vetor de ruído.

$\boldsymbol{\Omega}$ é o conjunto de todas as combinações possíveis das estimativas candidatas geradas.

$\boldsymbol{\Lambda}$ é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de \mathbf{R} .

$\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ é a matriz diagonal dos \bar{M} maiores autovalores de $\hat{\mathbf{R}}$.

$\|\mathbf{X}\|$ é a norma Euclidiana de \mathbf{X} .

Lista de figuras

Figura 2.1: Situação hipotética de incidência de frentes de onda sobre um arranjo de sensores.	22
Figura 2.2: Um arranjo de sensores pode ajustar seu padrão de irradiação para melhorar o sinal desejado, anular ou reduzir a interferência e somar a potência do sinal refletido.	22
Figura 2.3: Diagrama de blocos de um arranjo de sensores.	23
Figura 2.4: Frentes de onda atingindo um arranjo linear com N sensores.	25
Figura 5.1: Raias espectrais dos valores singulares para a situação de ângulos afastados.	49
Figura 5.2: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos.	49
Figura 5.3: Raias espectrais para a situação de ângulos coincidentes.	50
Figura 5.4: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de 30 dB.	51
Figura 5.5: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de 10 dB.	51
Figura 5.6: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de 0 dB.	51
Figura 5.7: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de -10 dB.	52
Figura 5.8: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de 30 dB.	52
Figura 5.9: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de 10 dB.	52
Figura 5.10: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de 0 dB.	53
Figura 5.11: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de -10 dB.	53
Figura 5.12: Comportamento do Critério Diferencial para $\theta_{DOA} = 40^\circ$ e na ausência de ruído.	55
Figura 5.13: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados e na ausência de ruído.	55
Figura 5.14: Comportamento do Critério Diferencial de um arranjo com 10 sensores para ângulos próximos e na ausência de ruído.	56
Figura 5.15: Comportamento do Critério Diferencial de um arranjo com 30 sensores para ângulos próximos e na ausência de ruído.	56

Figura 5.16: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados e SNR de 15 dB.	57
Figura 5.17: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados numa SNR de 0 dB.	58
Figura 5.18: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados numa SNR de -10 dB.	58
Figura 5.19: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados numa SNR de -15 dB.	59
Figura 6.1 Alocação do tempo gasto no método SEAD para duas fontes.	63
Figura 6.2 Alocação do tempo gasto no método SEAD para três fontes.	63
Figura 6.3: Representação de uma árvore de busca.	67
Figura 6.4: Comportamento do Critério Diferencial para a situação de ângulos afastados numa SNR de -15 dB.	70
Figura 6.5: REQM média (linha sólida) e tempo médio de experimento (linha tracejada), utilizando o Critério Diferencial com o passo de resolução variando de 1° a 5°.	72
Figura 7.1: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos próximos utilizando sinais correlacionados.	79
Figura 7.2: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos próximos utilizando sinais descorrelacionados.	80
Figura 7.3: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos afastados utilizando sinais correlacionados.	80
Figura 7.4: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos afastados utilizando sinais descorrelacionados.	81
Figura 7.5: Tempo gasto para realizar 500 simulações para estimar a posição de 2, 3, 4 e 5 fontes.	83
Figura 7.6: Quantidade de operações necessárias para estimar a posição de 2, 3, 4 e 5 fontes.	84

Lista de tabelas

Tabela 7.1: Quantidade de projeções ortogonais em função do número de fontes e de candidatos por fonte.....	77
Tabela 7.2: Tempo médio de execução de 1000 experimentos.....	82

1 *Introdução*

A demanda de serviços baseados em tecnologias de comunicação sem-fio é sempre crescente. Segundo (BOAVENTURA, 1998), isto é baseado em dois pilares: o avanço tecnológico no acesso à informação, que, neste caso, pode ser exemplificado pelo advento da Internet, e o uso crescente de serviços multimídia. Junte-se a isto o fato de quantidade cada vez maior de dispositivos pessoais dotados de capacidade de processamento suficiente para fornecer serviços multimídia via Internet, além da exigência sempre crescente do aumento da qualidade destes serviços. Conforme (LIBERTI e RAPPAPORT, 1999), o uso de arranjos de sensores oferece várias maneiras de aumentar a capacidade destes sistemas sem-fio, como:

- Potencial de prover alcance estendido e/ou custos reduzidos quando empregados no início da implantação do sistema;
- Aumentar o desempenho de *link*, quando o sistema já está em operação; e
- Aumentar a capacidade do sistema no longo prazo.

O emprego de arranjo de sensores provê, também, o aumento da eficiência destes sistemas sem-fio, já que há potencial para reduzir a potência de transmissão por parte dos dispositivos móveis, ocasionando em autonomia maior, uma vez que grande parte destes dispositivos é alimentada por baterias.

Além disso, arranjos de sensores possuem diversas aplicações em radares, sonares, geofísica, radioastronomia, tomografia e qualquer outra aplicação que, porventura, venha a utilizar métodos de conformação de feixes, do inglês *beamforming*.

De acordo com (LIBERTI e RAPPAPORT, 1999), o emprego de arranjo de sensores nas comunicações móveis celulares, doravante denominados “antenas inteligentes”, implica em seis benefícios:

- Aumento de cobertura através do aumento do alcance, preenchimentos de “zonas cegas” e melhor penetração em construções;

- Devido ao aumento de cobertura, os custos iniciais de emprego da tecnologia num sistema sem-fio podem ser reduzidos;
- Aumento da robustez a perturbações no sistema e sensibilidade reduzidas a comportamentos não-ideais;
- Aumento da qualidade do *link* através do gerenciamento de multicaminhos;
- Separar espacialmente os sinais, permitindo diferentes assinantes compartilharem os mesmos recursos espectrais simultaneamente;
- Aumento da capacidade do sistema.

Segundo (ALVES, 2004), um dos parâmetros que se pode obter com o processamento de arranjo de sensores em radar é o ângulo de incidência (DOA, do inglês *Direction-Of-Arrival*) das frentes de onda sobre este arranjo, permitindo, desta maneira, localizar o alvo.

Na tomografia, podem-se usar arranjos de sensores para a aquisição de imagens de objetos e, com o processamento de sinais biomédicos, permitir o diagnóstico por imagens.

Processamento de arranjo possui aplicabilidade em geofísica na descoberta de reservas de gás e petróleo, com o uso de geofones, e a localização de epicentros de terremotos, com o uso de sismógrafos.

Para simplificar a análise do problema de estimação de ângulos de incidência, doravante denominado estimação DOA, este trabalho terá o seu foco nas comunicações móveis.

1.1 Motivação

O aumento da capacidade dos sistemas de comunicação é, na maior parte, alcançado obtendo o cancelamento (ou diminuição) de interferências com o uso de um padrão de irradiação adequado e que favorece a recepção de sinais vindos de uma determinada direção, ao mesmo tempo em que anula os sinais interferentes de outras direções (GODARA, 1997 *apud* ALVES, 2004).

De acordo com (FERREIRA, 2005), é necessário um aparato que permita estimar o ângulo de incidência dos sinais de interesse, para que o sistema de comunicação possa ajustar os parâmetros de tal forma a intensificar o padrão de irradiação na direção desejada.

No âmbito das técnicas de estimação, é importante frisar que se trata da determinação da quantidade de sinais presentes num ambiente contaminado por ruído. A estimação de sinais trata da determinação de parâmetros destes sinais, como frequência, fase, amplitude e,

em especial, o ângulo de incidência, partindo do pressuposto de que o número de sinais de interesse é conhecido (ALVES, 2004).

Outro aspecto importante é a capacidade de um determinado estimador de distinguir ângulos de incidência próximos entre si, doravante denominado estimador de alta resolução (ALVES, 2004).

Um estimador ideal deve possuir robustez com relação ao ruído, permitindo estimativas com a menor variância possível, mesmo em condições severas de SNR (*Signal-to-Noise Ratio*), implicando, deste modo, numa menor SNR de limiar, que é o valor de SNR abaixo do qual o desempenho do estimador sofre rápida degradação.

A maior parte das aplicações é de tempo real, exigindo que as estimações sejam realizadas em tempo muito curto e, para isto, é necessário que a complexidade computacional seja a menor possível (ALVES, 2004). Como exemplo, segundo (FUJITSU, 2008), as antenas inteligentes são recalibradas a cada cinco milissegundos quando aplicadas ao WiMAX (*Worldwide Interoperability for Microwave Access*) móvel, cujo padrão é o IEEE 802.16e.

Em suma, um bom estimador deve possuir alta resolução, pequena SNR de limiar e baixa complexidade computacional.

Conforme (ALVES, 2004), o método MODE (*Method Of Direction Estimation*) (STOICA e SHARMAN, 1990), deu origem ao método MODEX (*MODE with eXtra roots*) (GERSHMAN e STOICA, 1999). No âmbito deste trabalho, este último será utilizado como referência de desempenho de estimação e de complexidade computacional.

O método MODEX, segundo (ALVES, 2004), possui pequena SNR de limiar, além de bom desempenho na condição de poucas amostras de dados (ou *snapshots*), N , entretanto, possui complexidade computacional consideravelmente maior do que a do método MODE, do qual ele deriva.

Seguindo outra linha de pesquisa, em (FERREIRA, 2005) propõe-se o método SEAD (*SEArch of Direction by differential spectrum*), que é extensivamente baseado no comportamento dos valores singulares da matriz de covariância espacial, possuindo bom desempenho de estimação aliado a SNR de limiar ainda menor, se comparado ao método MODEX.

Analisando experimentalmente em condições onde é necessário o uso de estimadores de alta resolução, o SEAD demonstrou possuir maior robustez ao ruído do que o MODEX, especialmente em condições de sinais correlacionados e ângulos de incidência próximos entre si, principalmente quando estes estão próximos à normal ao arranjo.

Contudo, o método SEAD, como fora proposto em (FERREIRA, 2005), apresenta complexidade computacional extremamente elevada e que o torna inadequado para aplicações de tempo real.

1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é analisar o funcionamento do método SEAD em relação a sua complexidade computacional e, deste modo, diminuir esta complexidade a ponto de torná-lo competitivo com o MODEX.

1.3 Objetivos Específicos

Podem-se dividir os objetivos nos seguintes tópicos:

- Estudar o método SEAD e defini-lo matematicamente;
- Estudar o método MODEX, sob os pontos de vista do desempenho de estimação e da complexidade computacional;
- Levantar os tempos gastos em cada um dos trechos do método SEAD e propor a estimação analítica de limite superior para a complexidade computacional;
- Propor melhorias no método SEAD e realizar análise da complexidade computacional desta proposta; e
- Avaliar estatisticamente o desempenho de estimação e o tempo gasto pelos métodos estudados e proposto.

1.4 Organização dos Capítulos

Este trabalho está organizado de maneira a apresentar a definição do problema e a fundamentação teórica de estimação DOA, os estimadores de Máxima-Verossimilhança, MODE, MODEX e SEAD, além de apresentar melhorias sugeridas para o método SEAD, com seus resultados e conclusões.

O capítulo 2 apresenta os princípios básicos de funcionamento de um arranjo adaptativo, além dos modelos de sinal e de ruído e as expressões que explicam a equivalência entre o ângulo de incidência e a frequência elétrica, o que torna possível a aplicação de conceitos de estimação de frequência ao problema de estimação DOA e vice-versa. Também, é apresentada

a matriz de covariância espacial, que é utilizada em todos os métodos abordados neste trabalho, bem como as medidas de avaliação e de limite teórico de desempenho de estimação.

O capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica do Estimador de Máxima-Verossimilhança para estimação DOA, permitindo analisar algumas características deste estimador e compreender os métodos dele derivados, entre os quais tem-se MODE e MODEX.

O capítulo 4 apresenta a fundamentação teórica dos métodos MODE e MODEX de estimação DOA. Estes métodos são baseados no Estimador de Máxima-Verossimilhança e possuem complexidade computacional consideravelmente menor, devido à reparametrização da função objetivo. Também, é apresentada a equação de limite superior para a complexidade computacional do método MODEX.

O capítulo 5 apresenta o método SEAD, que se baseia no comportamento dos valores singulares principais da matriz de covariância espacial. Desenvolve-se também a equação de limite superior para a complexidade computacional deste método.

O capítulo 6 apresenta as melhorias propostas para o método SEAD, juntamente com a fundamentação teórica, no que diz respeito às etapas de seleção de estimativas DOA e do cálculo do Critério Diferencial, com a respectiva equação de limite superior para a complexidade computacional resultante destas propostas.

No capítulo 7 são apresentados os resultados dos três métodos abordados neste trabalho, tanto sob a perspectiva do desempenho de estimação quanto da complexidade computacional envolvida. Além disso, são apresentadas algumas considerações sobre as melhorias propostas.

O capítulo 8 trata a análise do impacto das melhorias propostas sobre os resultados de desempenho de estimação e de complexidade computacional do método SEAD. Além disso, traz propostas para prosseguimento deste trabalho.

1.5 Patente depositada

Este trabalho originou pedido de patente, protocolado no Instituto Nacional da Propriedade Industrial (INPI) com o número 0000220900977423, através do Núcleo de Inovação e Transferência de Tecnologia (NITT), da Universidade Federal de Goiás (UFG), em 18 de março de 2009,

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS. SILVA, H. V. L.; LEMOS, R. P.; FERREIRA, Y. R. *Método e sistema de estimação de ângulos de incidência de sinais de interesse.*

2 Modelagem de Sinais para DOA baseada em propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre

2.1 Introdução

Os métodos de processamento de sinais de arranjo utilizam modelos de sinais e de ruído que descrevem as ondas incidentes tendo como base o formato do arranjo de sensores, as características das formas de onda, dos sensores e do meio de propagação (ALVES, 2004).

Além disso, estes modelos de sinal permitem relacionar ângulo de incidência (DOA) a frequência elétrica, permitindo o uso de conceitos do problema de estimação DOA no problema de estimação de frequência e vice-versa.

2.2 Observações gerais

A definição de antenas adaptativas é, segundo (LIBERTI e RAPPAPORT, 1999):

Arranjos de antenas que são capazes de ajustar dinamicamente o padrão de irradiação para ajustar o ruído, interferência e o multicaminho. Arranjos adaptativos de antenas podem ajustar seu padrão para rastrear usuários móveis. Antenas adaptativas são usadas para melhorar os sinais recebidos e também podem ser usados para formar feixes para transmissão.

Há também os sistemas de feixe chaveado que, de acordo com (LIBERTI e RAPPAPORT, 1999):

Usam um número de feixes fixos na antena. O receptor seleciona o feixe que provê a maior melhoria de sinal e redução de interferência. Sistemas de feixe chaveado podem não oferecer o grau de melhoria de desempenho oferecido pelos sistemas adaptativos, mas eles são freqüentemente menos complexos e mais fáceis de serem retro-adaptados em tecnologias sem-fio existentes.

Os sistemas de antenas inteligentes (ou arranjos de sensores) podem incluir tanto tecnologias de antena adaptativa e chaveamento de feixes. Contudo, apenas antenas adaptativas serão abordadas neste trabalho.

O funcionamento de um sistema utilizando um arranjo de sensores pode ser mais bem descrito através das figuras 2.1 e 2.2.

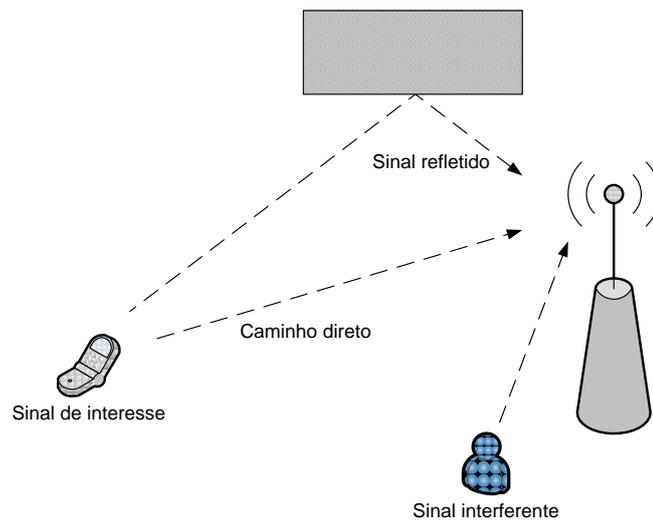


Figura 2.1: Situação hipotética de incidência de frentes de onda sobre um arranjo de sensores.

A Figura 2.1 ilustra sinais vindos de três pontos distintos e incidindo sobre o arranjo de sensores: pelo caminho direto da fonte de sinal até o arranjo, pela reflexão deste sinal em um obstáculo e de um sinal interferente. Considerando esta situação, a Figura 2.2 ilustra o padrão de irradiação deste arranjo de sensores. Nela se destaca o feixe principal na direção do sinal desejado, enquanto anula ou diminui a potência do sinal interferente.

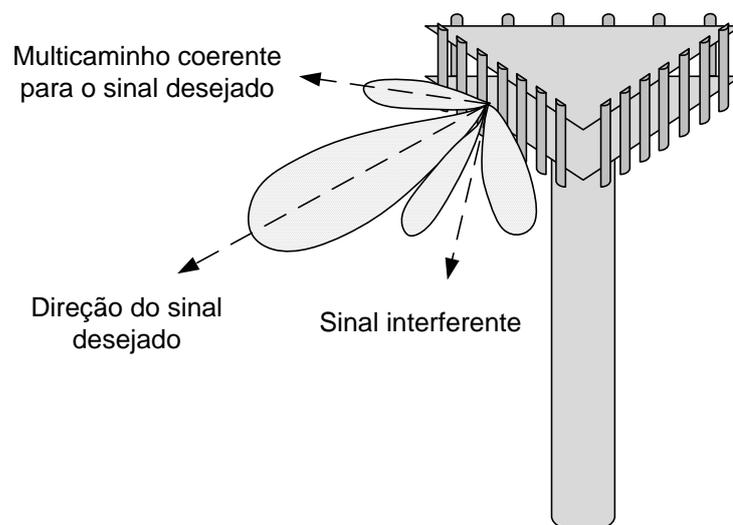


Figura 2.2: Um arranjo de sensores pode ajustar seu padrão de irradiação para melhorar o sinal desejado, anular ou reduzir a interferência e somar a potência do sinal refletido.

Segundo (LIBERTI e RAPPAPORT, 1999) e (BALANIS, 1997), antenas inteligentes são formadas por sensores (antenas) omnidirecionais de baixo ganho (ou de baixa diretividade), conectadas por uma rede que combina os sinais de cada sensor, obtendo alta diretividade em aplicações onde é necessário. Além disso, não há a necessidade de que os sensores sejam todas iguais, porém, é mais conveniente, simples e prático. Para simplificar a análise dessas antenas, são feitas algumas considerações:

- O espaçamento entre os sensores é pequeno o suficiente para que não haja variação de amplitude entre os sinais recebidos pelas diferentes antenas;
- Não há acoplamento mútuo entre os sensores;
- Existe um número finito de sinais, de tal forma a permitir a decomposição de todos os campos incidentes num número discreto de ondas planas;
- A largura de faixa do sinal incidente é estreita se comparada à frequência da portadora.

O arranjo possui N sensores dispostos de maneira pré-definida e possui a seguinte representação em diagrama de blocos mostrada na Figura 2.3.

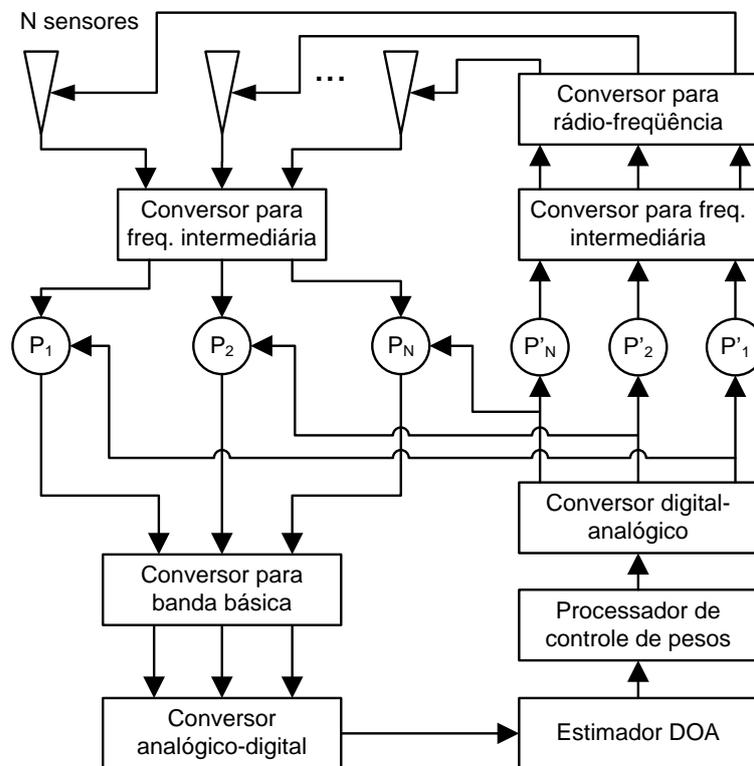


Figura 2.3: Diagrama de blocos de um arranjo de sensores.

Na Figura 2.3 é possível observar que o sinal proveniente dos sensores passa pelo conversor para uma frequência intermediária, onde pode ser amostrado de maneira adequada.

Logo após, é digitalizado e enviado ao estimador DOA. O estimador, então, envia os parâmetros de direção ao aparato que realiza o ajuste de ganho e/ou deslocamento de fase. Este aparato é formado por um processador de controle de pesos, por um conversor digital-analógico, onde há o “direcionamento” do sinal, através da aplicação dos pesos e/ou deslocamentos de fase (FERREIRA, 2005).

Caso este direcionamento seja realizado durante a recepção do sinal, aplicam-se os pesos e/ou deslocamentos de fase em P_1, \dots, P_N . Caso seja realizado durante a transmissão do sinal, os pesos e/ou deslocamentos de fase são aplicados em P'_1, \dots, P'_N .

Depois, o sinal passa pelos circuitos responsáveis pela conversão para frequência intermediária e pela conversão para rádio-frequência, onde o sinal $y(t)$ é filtrado, amplificado e enviado aos sensores.

O sinal, com os pesos e deslocamentos de fases já aplicados, é representado pela seguinte equação:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n u_n(t), \quad (2.1)$$

onde w_n representa os pesos complexos, sendo a parte real responsável pelo ajuste do ganho e a parte complexa responsável pelo deslocamento de fase. u_n é o sinal recebido em cada sensor do arranjo.

Com a aplicação destes pesos e deslocamentos de fase, o sinal é direcionado para a posição desejada e, desta forma, reforçando a potência do sinal de interesse, ao mesmo tempo em que os sinais interferentes são mitigados (FERREIRA, 2005).

Este direcionamento do campo total irradiado só é possível utilizando arranjos de sensores, uma vez que é resultado da soma vetorial dos campos irradiados de cada um dos sensores, desprezando-se o acoplamento entre eles.

Para que este direcionamento seja realizável, é necessário que os campos de cada um dos sensores interfiram construtivamente (o que equivale a somar os sinais) nas direções desejadas, e interfiram destrutivamente (o que equivale a um cancelar o campo do outro) nas direções restantes. Na prática, esta interferência é somente aproximada (BALANIS, 1997).

Considerando um arranjo formado por sensores idênticos, são cinco os parâmetros que definem o padrão de irradiação (BALANIS, 1997):

1. A configuração geométrica (linear, circular, retangular, esférica, etc.);

2. O distanciamento entre os sensores;
3. A amplitude de excitação de cada um dos sensores;
4. A fase de excitação de cada um dos sensores; e
5. O padrão de irradiação de cada um dos sensores.

No âmbito deste trabalho, a fase é o parâmetro de direcionamento do campo irradiado pelo arranjo. Especificamente para o caso das antenas inteligentes, é utilizada a fase elétrica do sinal que incide sobre o arranjo. Estes sistemas são conhecidos como *phased array*, e são baseados na alimentação das antenas do arranjo por deslocadores de fase (MAKAROV, 2002 *apud* FERREIRA, 2005).

A configuração geométrica mais simples e prática é aquela onde as antenas estão dispostas sobre uma linha (BALANIS, 1997), e, na literatura da área, é frequentemente chamada de Arranjo Linear Uniforme (ULA, do inglês *Uniform Linear Array*) e foi adotada neste trabalho (SILVA, 2007).

A representação esquemática de frentes de onda de uma fonte atingindo o arranjo do tipo ULA com N sensores é a seguinte (ALVES, 2004), (LIBERTI e RAPPAPORT, 1999) e (ZOOGBY, 2005), ilustrada na Figura 2.4.

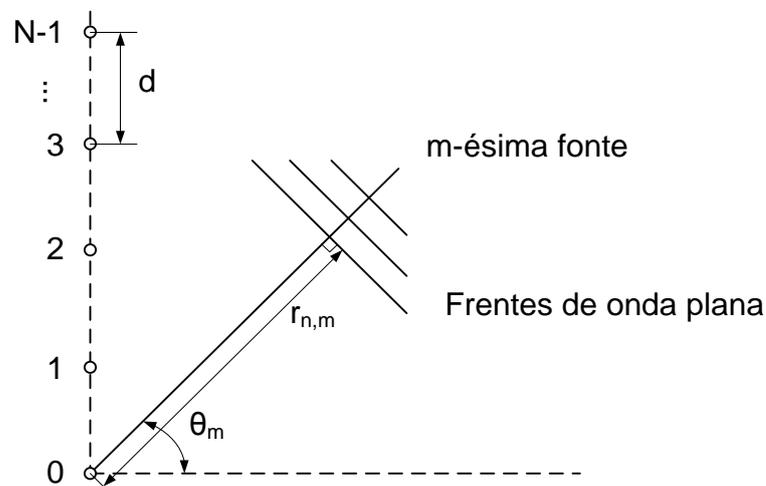


Figura 2.4: Frentes de onda atingindo um arranjo linear com N sensores.

Na Figura 2.4 pode-se verificar que os sensores estão posicionados sobre uma reta vertical, com espaçamento uniforme d , equivalente à metade do comprimento de onda dado por c/f , onde c é a velocidade da luz no vácuo, 3×10^8 m/s (metros por segundo) e f é a frequência da onda, em Hz (Hertz).

2.3 Modelo de onda e do sinal captado no arranjo

A Figura 2.4 mostra um arranjo do tipo ULA contendo N sensores, onde incidem frentes de onda geradas por uma fonte m , puntual e situada num local muito distante do arranjo (ALVES, 2004). Desta forma, pode-se considerar as frentes de onda planas. Os sensores estão dispostos de maneira linear e vertical, com espaçamento uniforme d entre eles. O ângulo de incidência, θ_m , é tido como o ângulo formado entre a direção de propagação de onda e a normal ao arranjo. A variável $r_{n,m}$ representa a distância percorrida pelas frentes de onda entre o sensor n e a m -ésima fonte, e é dada por (SILVA, 2007):

$$r_{n,m} = nd \sin(\theta_m). \quad (2.2)$$

Considere-se que a m -ésima fonte produza uma onda plana dada por (SILVA, 2007):

$$f_m(t) = F_m(t) e^{j\left[\omega_c^m t - \frac{2\pi}{\mathcal{G}_m} r_m + \phi_m(t)\right]}, \quad (2.3)$$

onde $F_m(t)$ é a amplitude de um sinal variando no tempo; ω_c^m é a frequência da onda portadora; \mathcal{G}_m é o comprimento de onda na direção de propagação; r_m é a distância até a origem de um sistema de coordenadas e $\phi_m(t)$ é uma fase arbitrária.

Ainda, suponha-se que $F_m(t)$ e $\phi_m(t)$ possuam faixa estreita em relação à onda portadora \mathcal{G}_m , isto é, ambas variam lentamente em relação à onda portadora. Então, pode-se afirmar que as duas variáveis apresentam os mesmos valores em todos os sensores em cada instante de tempo, mesmo com as diferenças de percurso do sinal, uma vez que as distâncias entre eles são da ordem de metade do comprimento de onda.

Considerando-se sensores com ganhos unitários e omnidirecionais, o sinal captado pelo sensor n devido à onda gerada pela m -ésima fonte é (ALVES, 2004):

$$x_{n,m}(t) = F_m(t) e^{j\left[\omega_c^m t - \frac{2\pi}{\mathcal{G}_m} r_{n,m} + \phi_m(t)\right]}. \quad (2.4)$$

As equações (2.3) e (2.4) asseguram que a diferença entre as fases de um sinal captado por dois sensores se deve apenas ao atraso sofrido pelo sinal entre eles.

Considerando o princípio da superposição e que o arranjo linear da Figura 2.4 seja atingido por M ondas planas de direções distintas, obtém-se a seguinte expressão para o sinal:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M x_{n,m}(t) = \sum_{m=1}^M F_m(t) e^{j\left[\omega_c^m t + \phi_m(t)\right]} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\mathcal{G}_m} r_{n,m}\right)}. \quad (2.5)$$

No caso em que todas as ondas apresentam a mesma portadora, como em situação de sinais refletidos de uma mesma fonte ou sinais interferentes co-canal, tem-se que $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \dots = \mathcal{G}_M = \mathcal{G}$, podendo-se, assim, simplificar o termo da segunda exponencial de (2.5) para:

$$\frac{2\pi}{\mathcal{G}_m} r_{n,m} = \frac{2\pi}{\mathcal{G}} nd \sin(\theta_m). \quad (2.6)$$

Definindo-se o ângulo elétrico equivalente da m -ésima onda incidente por:

$$\omega_m = -\frac{2\pi}{\mathcal{G}} d \sin(\theta_m), \quad (2.7)$$

onde ω_m é dado em radianos, (2.5) pode ser reescrita como:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M F_m(t) e^{j\omega_c t} e^{j\phi_m(t)} e^{jn\omega_m}. \quad (2.8)$$

Como o sinal é convertido para banda básica antes do conversor analógico-digital na Figura 2.3, desconsidera-se a primeira exponencial, relativa à portadora, resultando em:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M F_m(t) e^{j\phi_m(t)} e^{jn\omega_m}. \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) representa um sinal composto de M exponenciais complexas com as frequências normalizadas ω_m , fases $\phi_m(t)$, e amplitudes $F_m(t)$. Isto permite que as técnicas de estimação DOA sejam utilizadas em problemas de estimação de frequência quando as condições de equivalência são adequadas, ou vice-versa (BRESLER e MACOVSKI, 1986 *apud* SILVA, 2007; ALVES, 2004).

Ainda se pode simplificar a notação de (2.9) da seguinte maneira:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M a_n(\omega_m) s_m(t), \quad (2.10)$$

onde

$$a_n(\omega_m) = e^{jn\omega_m} \quad (2.11)$$

é relativa ao ângulo elétrico da m -ésima onda incidente, que é multiplicado pelo fator:

$$s_m(t) = F_m(t) e^{j\phi_m(t)}. \quad (2.12)$$

Expandindo (2.10) para o caso de um arranjo do tipo ULA contendo N sensores, obtém-se (ALVES, 2004):

$$x(t) \equiv \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} a_0(\omega_m) \\ a_1(\omega_m) \\ \vdots \\ a_{N-1}(\omega_m) \end{bmatrix} s_m(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}, \quad (2.13)$$

ou, de forma compacta:

$$x(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{a}(\omega_m) s_m(t). \quad (2.14)$$

O vetor $\mathbf{a}(\omega_m)$ é chamado de vetor de direção, em analogia ao método de conformação de feixe (*beamforming*), onde o arranjo é ajustado para ter um ganho pré-determinado numa certa direção ou ângulo de incidência (KRIM e VIBERG, 1986 *apud* SILVA, 2007).

A Equação (2.14) pode ser escrita em termos matriciais, resultando em:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(t), \quad (2.15)$$

onde

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \dots \quad s_M(t)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1} \quad (2.16)$$

e é chamado de vetor das amplitudes complexas dos sinais; a operação $(\cdot)^T$ é a transposta matricial; $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de amostras do sinal captado; $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_M]^T$, e $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ é a matriz direção, dada por:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j_1\omega_1} & \dots & e^{j_1\omega_M} \\ e^{j_2\omega_1} & \dots & e^{j_2\omega_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j_{(N-1)}\omega_1} & \dots & e^{j_{(N-1)}\omega_M} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A matriz $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ possui estrutura de Vandermonde e, caso os sinais incidentes sejam totalmente independentes, as colunas de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ são linearmente independentes e a matriz possui posto cheio e igual ao número de sinais (ALVES, 2004). Para simplificar a notação, a matriz $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ será referida apenas como matriz \mathbf{A} .

No problema de estimação DOA, existem dois limites: quando a fonte se encontra ou em $\theta_M = -\pi/2$ rad = -90° , ou em $\theta_M = \pi/2$ rad = 90° , com relação à normal do arranjo.

Uma vez que os ângulos de incidência devem estar entre estes dois limites, as frequências elétricas associadas a esses ângulos possuem valores limitados por:

$$-\frac{2\pi d}{g} \leq \omega_m \leq \frac{2\pi d}{g}. \quad (2.18)$$

Quanto maior a relação d/g , maior é a excursão do parâmetro ω_m e, conseqüentemente, maior a resolução do arranjo. Para determinar a máxima resolução, é necessário que haja correspondência biunívoca entre θ e ω , ou seja, enquanto a frequência elétrica, ω , estiver limitada entre $+\pi$ e $-\pi$ e o ângulo de incidência, θ , estiver limitado entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ (SILVA, 2007).

Tomando um dos casos extremos, quando $\theta_m = -\pi/2$, tem-se que $\omega_m = (2\pi d/g)(-1)$. O valor extremo de ω_m sob a condição de biunivocidade ocorre quando $d = g/2$. Então, para $\omega_m = -\pi$, tem-se que o ULA tem a máxima resolução. Este valor de d , de metade do comprimento de onda, é extensivamente adotado na literatura da área e também neste trabalho, sempre que for necessário fazer a conversão entre DOA e frequência elétrica (SILVA, 2007).

Deve-se, ainda, considerar que o arranjo dispõe de uma quantidade limitada de amostras do sinal, obtidas nos instantes $t = k\Delta t$, para $k = 0, \dots, K-1$, onde K é o número de *snapshots*, ou instantâneos do arranjo. Para designar estes *snapshots* de maneira simplificada, substitui-se em (2.15) a variável t por k (ALVES, 2004).

Nos sistemas reais, o sinal $\mathbf{x}(k)$ é contaminado por ruído aditivo e a expressão que representa o sinal obtido pelo arranjo é:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k) + \xi(k), \quad (2.19)$$

ou

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \xi(k), \quad (2.20)$$

onde $\xi(k)$ é o vetor de ruído aditivo.

2.4 Outras considerações sobre o sinal

De acordo com (SILVA, 2007), a quantidade de fontes a serem estimadas, M , é conhecida e é menor do que a quantidade de sensores no arranjo, N . Isto é necessário, pois assegura que o número de parâmetros a serem estimados, igual a $M \times (N-1)$, seja menor do que o

número de amostras de dados, que é igual a $K \times N$. Caso M não seja conhecido, existem técnicas para a sua estimação (WAX e KAILATH, 1985 *apud* SILVA, 2007; KAVEH, WANG e HUNG, 1987 *apud* SILVA, 2007).

Tanto o sinal quanto o ruído são considerados processos aleatórios Gaussianos complexos, independentes, estacionários, de média nula e possuem as seguintes características (ALVES, 2004; FERREIRA, 2005):

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(i)\} &= \mathbf{P}\delta_{k,i}, \\ E\{\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^T(i)\} &= 0, \quad \forall k \text{ e } i, \end{aligned} \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} E\{\xi(k)\xi^H(i)\} &= \sigma^2 \mathbf{I}_{N \times N} \delta_{k,i} \\ E\{\xi(k)\xi^T(i)\} &= 0, \quad \forall k \text{ e } i, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $E\{\cdot\}$ representa o operador de esperança estatística; $\delta_{k,i}$ representa a função delta de Kronecker, sendo que é igual a 1, para $k=i$, e igual a 0, para $k \neq i$; a operação $(\cdot)^H$ produz o transposto conjugado (hermitiano) de vetor ou matriz; \mathbf{P} é a matriz de correlação dos sinais de um mesmo *snapshot* e σ^2 é a variância ou potência média do ruído.

A matriz \mathbf{P} é hermitiana e seu posto assume valores entre 1 e M . Caso a matriz \mathbf{P} seja proporcional à matriz identidade, os sinais possuem mesma potência e são completamente decorrelacionados, ou seja, os vetores de amplitude complexa dos sinais são independentes entre si no *snapshot* e, portanto, $\text{posto}(\mathbf{P}) = M$, ou posto^1 cheio. Quando um sinal é uma cópia com defasamento e potência escalonada de outro sinal, é dito que estes são coerentes ou totalmente correlacionados (SILVA, 2007). Neste caso, \mathbf{P} tem posto unitário. Esta situação é representada na Figura 2.1, onde um sinal refletido do sinal de interesse atinge o arranjo.

As expressões indicadas em (2.21) indicam total decorrelação entre as partes real e imaginária do sinal e a igualdade de suas variâncias, garantindo, desta forma, completa decorrelação temporal entre os sinais.

¹ O posto de uma matriz é o número de linhas não-nulas quando a mesma está escrita na forma reduzida escalonada por linhas.

² O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

³ Uma breve explicação sobre a notação utilizada para descrever a complexidade computacional dos estimadores é dada no Capítulo 7.

⁴ A determinação da complexidade computacional do cálculo da SVD é dada no Capítulo 7.

⁵ Do inglês *O notation*. Também é conhecida como *Big-Oh*.

⁶ Segundo (GIBBONS, 1985) o teste de Wilcoxon é um teste de hipótese nula de que os dados amostrais vêm de

Este modelo de sinal é tido como incondicional, pois as propriedades estatísticas do vetor de dados $\mathbf{y}(k)$ são incondicionais, devido a $\mathbf{s}(k)$ variar a cada experimento (STOICA e NEHORAI, 1990). É o modelo de sinal mais utilizado na literatura da área, além de ser o mais realístico (ALVES, 2004), e por isso foi adotado neste trabalho.

Na Equação (2.22) é assegurada a decorrelação entre as partes real e imaginária do vetor de ruído e entre vetores de *snapshots* distintos. Com isto, há a completa decorrelação espacial e temporal, ou seja, o modelo de ruído adotado também é incondicional.

Outro modelo de sinal é o condicional, onde é mantido o grau de decorrelação no espaço e no tempo. Contudo, ao longo dos experimentos, a seqüência de valores do sinal é mantida fixa, variando-se apenas o ruído aditivo. Um caso específico é o modelo determinístico, onde o mesmo vetor de sinais é utilizado em todos os snapshots. Normalmente, é utilizado em estimação de frequências, quando se possui apenas uma seqüência de amostras (ALVES, 2004).

2.5 Matriz de covariância espacial

O método proposto neste trabalho utiliza em sua estrutura a matriz de covariância espacial (FERREIRA, 2005), que pode ser calculada a partir dos *snapshots* e dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= E \{ \mathbf{y}(k) \mathbf{y}^H(k) \} \\
 &= E \{ [\mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \boldsymbol{\xi}(k)] [\mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \boldsymbol{\xi}(k)]^H \} \\
 &= \mathbf{A} E \{ \mathbf{s}(k) \mathbf{s}^H(k) \} \mathbf{A}^H + E \{ \boldsymbol{\xi}(k) \boldsymbol{\xi}^H(k) \} \\
 &= \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

A matriz de covariância espacial tem dimensões $N \times N$ e sua decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*) é dada por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_R \boldsymbol{\Sigma}_R \mathbf{U}_R^H, \tag{2.24}$$

onde \mathbf{U}_R é uma matriz unitária cujas colunas são formadas pelos vetores singulares à direita de \mathbf{R} e $\boldsymbol{\Sigma}_R$ é uma matriz diagonal formada pelos valores singulares de \mathbf{R} , $\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \}$, ordenados de maneira decrescente (FERREIRA, 2005).

Para M fontes de sinal captadas por um arranjo formado por N sensores, tem-se que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M > \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_N = \sigma^2$. Num ambiente sem ruído, tem-se que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M > \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_N = 0$. Por outro lado, se sinais provenientes de duas fontes

distintas com o mesmo ângulo de incidência, a SVD produzirá apenas um valor singular não-nulo, mesmo que se conheça, *a priori*, a quantidade de fontes (FERREIRA, 2005).

Este cálculo possui elevada importância no processamento de sinais por causa de sua habilidade única de separar a matriz de dados, neste caso, a matriz de covariância espacial, num subespaço referente aos sinais ruidosos (subespaço de sinal), e outro exclusivamente ao ruído (subespaço de ruído), que são ortogonais entre si (KNOCKAERT, DE BACKER e DE ZUTTER, 1999).

Desta forma, a SVD de \mathbf{R} pode ser reescrita como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_\xi \boldsymbol{\Sigma}_\xi \mathbf{U}_\xi^H, \quad (2.25)$$

onde a primeira parcela diz respeito ao subespaço de sinal e a segunda ao subespaço de ruído.

Para K *snapshots*, a matriz de covariância espacial estimada é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^H(k)\} \\ &= \mathbf{A} \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(k)\} \right] \mathbf{A}^H + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{\boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{\xi}^H(k)\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

cuja SVD pode ser similarmente expressa por:

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_\xi \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\xi \hat{\mathbf{U}}_\xi^H. \quad (2.27)$$

2.6 Medida de desempenho de métodos de estimação de DOA

As medidas de desempenho envolvem a comparação entre os índices obtidos pelos estimadores e os limites teóricos de estimação DOA. Isto possibilita avaliar diferentes métodos, além de detectar situações onde os estimadores produzem estimativas com menor variância, tidas como melhores resultados.

O Limite de Cramér-Rao (CRB, do inglês *Cramér-Rao Bound*) é tido como principal referência no problema de estimação DOA e representa o menor valor teórico que pode ser atingido pelo erro quadrático médio (EQM) das estimativas geradas por um estimador não-polarizado. É calculado em função do número de sensores, número de sinais, espaçamento entre frequências, SNR, entre outros. Uma explicação mais detalhada sobre o tema pode ser encontrada em (ALVES, 2004; STOICA e NEHORAI, 1990; VAN TREES, 2002).

O método mais comum de comparação de desempenho de estimadores distintos é através da avaliação da curva do erro quadrático médio, doravante denominada curva de de-

sempenho. É obtida em função da SNR ou outro parâmetro. Cada ponto desta curva é calculado através da raiz do erro quadrático médio (REQM) do conjunto de estimativas obtidas em relação aos ângulos de incidência verdadeiros (SILVA, 2007). A REQM para um determinado ângulo é calculada por:

$$REQM(\hat{\theta}_m) = \sqrt{\frac{1}{N_{exp}} \sum_{r=1}^{N_{exp}} [(\hat{\theta}_{rm} - \theta_m)]^2}, \quad (2.28)$$

onde $REQM(\hat{\theta}_m)$, $\hat{\theta}_{rm}$ e θ_m são dados em graus. N_{exp} é o número de estimativas disponíveis ou o número de experimentos realizados e $\hat{\theta}_{rm}$ é a r -ésima estimativa de θ_m .

Para SNR grande, o desempenho de alguns estimadores aproxima-se bastante da curva do CRB. Diminuindo-se a SNR, enquanto se mantêm os outros parâmetros fixos, chega-se a um valor de onde o desempenho do estimador afasta-se muito rapidamente da CRB, com um aumento da variância do erro das estimativas geradas. Portanto, o método falha a partir deste ponto. Este ponto crítico é chamado de SNR de limiar (SILVA, 2007) e representa um importante parâmetro de avaliação de estimadores, pois, quanto menor, significa obter bom desempenho em condições mais severas de contaminação por ruído (ALVES, 2004).

O comportamento assintótico do estimador é outro parâmetro bastante importante. É desejável que a variância do erro das estimativas decresça conforme o número de *snapshots* aumenta. Um estimador que possui esta propriedade é dito ser consistente ou assintoticamente eficiente (ALVES, 2004).

O fator de correlação entre os sinais é outro parâmetro que afeta de maneira significativa a variância do erro das estimativas. Alguns métodos de estimação não possuem bom desempenho quando os sinais são parcial ou totalmente correlacionados (ou coerentes) (SILVA, 2007). Os métodos MUSIC (*MULTiple Signal Classification*) (SCHMIDT, 1979) e seu derivado, Root-MUSIC (BARABELL, 1983), segundo (FERREIRA, 2005), são inadequados à estimação DOA no caso de sinais coerentes.

A complexidade computacional necessária para realizar as estimações é outro parâmetro de grande importância para a estimação DOA, uma vez que está completamente relacionado ao tempo de processamento e à viabilidade de aplicações em tempo real (SILVA, 2007).

Em suma, um estimador ideal deve gerar estimativas não-polarizadas e apresentar a menor SNR de limiar possível, com a curva de desempenho mais próxima possível do CRB e com a menor complexidade computacional possível (ALVES, 2004).

3 *O Estimador de Máxima-Verossimilhança*

3.1 Introdução

O Estimador de Máxima-Verossimilhança (MLE) é um método de estimação de parâmetros clássico, onde as estimativas destes parâmetros são obtidas por amostras dos sinais contaminados por ruído. Entretanto, a sua complexidade computacional é elevada, o que inviabiliza sua implementação direta (SILVA, 2007).

O MLE possui duas versões (OTTERSTEN, 1989) e são diferenciadas entre si pelo modelo de sinais. A primeira é o Estimador de Máxima-Verossimilhança Determinístico (D-MLE) e usa o modelo de sinal condicional. A outra versão é o Estimador de Máxima-Verossimilhança Estocástico (SMLE), que usa o modelo de sinal incondicional (ALVES, 2004).

3.2 O Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE)

O MLE consiste na estimação de um vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ que maximiza a função de verossimilhança, $L(\boldsymbol{\omega})$, de $\mathbf{y}(k)$, com $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ pertencente ao conjunto de parâmetros Ω . $L(\boldsymbol{\omega})$ é definida como sendo a função densidade de probabilidade (fdp) $p^K(\mathbf{y}(k); \boldsymbol{\omega})$ dos K vetores $\mathbf{y}(k)$, vista como função do vetor de parâmetros desconhecido $\boldsymbol{\omega}$ (KAY, 1993 *apud* SILVA, 2007).

Quando uma amostra específica tiver sido obtida, $\mathbf{y}(k)$ torna-se fixo e a fdp conjunta pode ser entendida como sendo uma função do vetor de parâmetros desconhecido, denominada função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\omega})$, onde $\boldsymbol{\omega}$ se torna variável.

O critério de Máxima-Verossimilhança (ML) consiste na escolha do vetor $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ que maximiza $L(\boldsymbol{\omega})$.

Normalmente, uma estimativa de máxima-verossimilhança é calculada através da solução de um sistema de equações denominadas equações de verossimilhança. Estas equações são obtidas ao igualar a zero as derivadas parciais do logaritmo natural da função $L(\boldsymbol{\omega})$ em função dos parâmetros a serem estimados (SILVA, 2007).

3.2.1 Estimador ML Determinístico (DMLE)

Este estimador utiliza o modelo de sinal condicional, onde os sinais são aleatórios dentro de um *snapshot*, porém, esta mesma seqüência é utilizada nos experimentos seguintes, variando-se apenas o ruído aditivo (ALVES, 2004; SILVA, 2007).

A expressão do DMLE é obtida da fdp do vetor de amostras e de um vetor de parâmetros, na chamada função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\omega})$, que é maximizada pelo vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\omega}}$. Alternativamente, $L(\boldsymbol{\omega})$ pode ser obtida a partir da função erro quadrático médio (EQM) da qual se obtém uma estimativa da amplitude complexa (KUMARESAN, SCHARF e SHAW, 1986 *apud* ALVES, 2004). Esta estimativa é substituída na função erro original, resultando numa outra igual à função custo do DMLE.

O modelo de ruído dado no Capítulo 2 é dado como um processo aleatório branco e gaussiano de média nula. Com isso, $\mathbf{y}(k)$ também é gaussiano, com média $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(k)$ e variância σ^2 , com a matriz de correlação dada por $\sigma^2\mathbf{I}$, resultando na seguinte fdp condicional de $\mathbf{y}(k)$ (ALVES, 2004; KAY, 1993 *apud* SILVA, 2007):

$$p(\mathbf{y}(k); \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2}{\sigma^2}}, \quad (3.1)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana, $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor com as frequências dos sinais, $\mathbf{s}(k)$ é o vetor com as amplitudes complexas para o k -ésimo *snapshot* e σ^2 é a variância do ruído.

Sendo os K *snapshots* independentes entre si, obtém-se a seguinte pdf conjunta:

$$\begin{aligned} p^K(\mathbf{y}(k); \boldsymbol{\omega}) &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{KN}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A partir daí e, considerando serem conhecidos os *snapshots* $\mathbf{y}(k)$, é possível obter a seguinte função de verossimilhança:

$$L_{DMLE}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(k), \sigma^2) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{KN}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(k)\|^2}, \quad (3.3)$$

que deve ser maximizada para obter as estimativas ML $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, $\hat{\mathbf{s}}(k)$ e $\hat{\sigma}^2$ dos parâmetros.

A dependência entre \mathbf{A} e $\boldsymbol{\omega}$ não será mostrada nas equações seguintes, com as estimativas do ML definidas como os argumentos que minimizam o negativo do logaritmo natural da expressão (3.3) (ALVES, 2004; SILVA, 2007), ou seja:

$$\begin{aligned} l_{DMLE}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(k), \sigma^2) &= -\ln[L_{DMLE}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(k), \sigma^2)] \\ &= KN \ln(\pi) + KN \ln(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

ignorando-se o termo constante $KN \ln(\pi)$, obtém-se:

$$l_{DMLE}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}(k), \sigma^2) = KN \ln(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\|^2. \quad (3.5)$$

Uma maneira comumente usada para minimizar (3.5) é fixar $\boldsymbol{\omega}$ e realizar a minimização em relação a $\mathbf{s}(k)$ e σ^2 , uma vez que os três são independentes entre si. Então, substitui-se um dos valores mínimos em (3.5) e prossegue-se com a minimização em relação a $\boldsymbol{\omega}$, produzindo (ALVES, 2004; SILVA, 2007):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \text{tr}[\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}] \quad (3.6)$$

e

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y}(k), \quad (3.7)$$

onde tr denota a operação de traço² da matriz e \mathbf{P}_A^\perp é um projetor ortogonal dado por (ALVES, 2004):

$$\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H, \quad (3.8)$$

que projeta um vetor no espaço ortogonal ao espaço das colunas de \mathbf{A} .

Com isso, as estimativas das frequências são obtidas resolvendo-se o problema de minimização representado pela seguinte função custo:

² O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{DMLE} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \{F_{DMLE}(\boldsymbol{\omega})\}, \quad (3.9)$$

onde

$$F_{DMLE}(\boldsymbol{\omega}) = \text{tr}[\mathbf{P}_A^{-1} \hat{\mathbf{R}}] \quad (3.10)$$

é a função custo do DMLE para o parâmetro frequência.

De maneira prática, a minimização dada pela Equação (3.9) pode ser interpretada como a seleção do conjunto de parâmetros $\boldsymbol{\omega}$, dentre todo o espaço de soluções M -dimensional, associados ao ponto mínimo de $F_{DMLE}(\boldsymbol{\omega})$.

Pode-se interpretar em (3.10) que os sinais $\mathbf{y}(k)$ são projetados num subespaço ortogonal a todas componentes do sinal e a potência é estimada. No caso da projeção remover todas as componentes verdadeiras do sinal, ou seja, quando $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}$, a potência será a menor possível. Porém, devido ao número finito de *snapshots*, esta potência não será perfeitamente estimada. Com o aumento do número de *snapshots*, a tendência do erro é convergir para o limite inferior do CRB. Porém, para N pequeno, mesmo com K tendendo ao infinito, o CRB nunca será alcançado (SILVA, 2007).

Além disso, o critério determinístico é tido como um problema de otimização não-linear N -dimensional de (3.9) e é resolvido numericamente. Algoritmos baseados na técnica de Gauss-Newton podem ser usados para esta finalidade (SILVA, 2007).

Caso seja fornecida uma boa estimativa inicial, a convergência é, normalmente, rápida. Em caso contrário, pode haver convergência para um mínimo local. Contudo, não há garantia de convergência para o mínimo global, independente da estimativa inicial. Após as frequências terem sido estimadas, as estimativas das amplitudes complexas e da variância do ruído são obtidas através das equações (3.6) e (3.7) (ALVES, 2004; KRIM e VIBERG, 1996 *apud* SILVA, 2007).

3.2.2 Estimador ML Estocástico (SMLE)

O SMLE utiliza o modelo de sinal incondicional, onde tanto o sinal quanto o ruído aditivo são processos aleatórios gaussianos e a aleatoriedade no tempo e no espaço são mantidas em todos os experimentos.

O conjunto de parâmetros a ser estimado é formado pelas frequências $\boldsymbol{\omega}$, pela matriz de correlação dos sinais \mathbf{P} e pela variância do ruído σ^2 . A função de verossimilhança é dada por (COLARES, 2000 *apud* ALVES, 2004):

$$L_{SMLE}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{P}, \sigma^2) = \prod_{k=1}^K \pi^{-M} |\mathbf{R}|^{-M} e^{\mathbf{y}^T(k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}(k)}. \quad (3.11)$$

Realizando as mesmas etapas aplicadas ao critério determinístico e considerando a independência dos parâmetros, fixa-se $\boldsymbol{\omega}$ e se realizam as estimativas de σ^2 e \mathbf{P} (KRIM e VIBERG, 1996 *apud* ALVES, 2004):

$$\sigma_{SMLE}^2(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{N-M} \text{tr}(\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}) \quad (3.12)$$

e

$$\mathbf{P}_{SMLE}(\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \left[\hat{\mathbf{R}} - \sigma_{SMLE}^2(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{I} \right] \left[(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \right]^H. \quad (3.13)$$

Substituindo estas estimativas na função de verossimilhança do SMLE e simplificando-a, as estimativas das frequências são obtidas da seguinte expressão (KRIM e VIBERG, 1996 *apud* ALVES, 2004):

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{SMLE} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \{ F_{SMLE}(\boldsymbol{\omega}) \}, \quad (3.14)$$

onde

$$F_{SMLE}(\boldsymbol{\omega}) = \log_{10} \det \left[\mathbf{A} \hat{\mathbf{P}}_{SMLE}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{A}^H + \hat{\sigma}_{SMLE}^2(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{I} \right] \quad (3.15)$$

é a função custo do SMLE.

A minimização descrita em (3.14) é um problema não-linear, assim como no critério determinístico, e pode apresentar diversos mínimos locais. Normalmente, é calculada através de técnicas como o método de Gauss-Newton, *simulated annealing*, redes neurais ou algoritmos genéticos, todos com complexidade computacional considerável. Contudo, o critério estocástico possui maior precisão do que o determinístico (ALVES, 2004; SILVA, 2007).

3.3 Considerações finais

O objetivo deste capítulo foi apresentar a fundamentação teórica do Estimador de Máxima-Verossimilhança. Dois tipos de estimadores de Máxima-Verossimilhança foram a-

presentados: o MLE determinístico, baseado no modelo de sinal condicional, e o MLE estocástico, baseado no modelo de sinal incondicional.

Os dois estimadores apresentam desempenhos assintoticamente eficientes em relação à SNR e ao número de *snapshots*, quando o número de sensores é suficientemente grande em relação ao número de fontes (STOICA e NEHORAI, 1989). Contudo, a complexidade computacional necessária para realizar a minimização apresentada nas equações (3.9) e (3.14) é conhecida e bastante elevada. Ainda assim, não há garantia para o mínimo global, podendo apresentar diversos mínimos locais distantes das frequências verdadeiras, como é mostrado em (ALVES, 2004).

Com isso, métodos iterativos foram desenvolvidos para obter estimativas a partir de uma versão modificada da função custo do critério determinístico do Estimador de Máxima-Verossimilhança, enquanto proporcionam complexidade computacional menor.

4 Os métodos *MODE* e *MODEX*

4.1 Introdução

O método *MODE* (*Method Of Direction Estimation*) é um método iterativo e de alta resolução e se baseia numa versão reparametrizada da função custo do critério determinístico do Estimador de Máxima Verossimilhança (DMLE) (FERREIRA, 2005; SILVA, 2007).

Ele foi projetado especificamente para a estimação de ângulos de incidência (DOA) de ondas planas de sinais de faixa estreita incidindo sobre um conjunto de sensores. O seu objetivo é obter curvas de desempenho próximas do Limite de Cramér-Rao (CRB) enquanto mantém a complexidade computacional baixa (ALVES, 2004).

O método *MODEX* (*MODE with eXtra Roots*) utiliza o polinômio utilizado pelo método *MODE*, porém com ordem aumentada, produzindo raízes extras e, conseqüentemente, um maior grau de liberdade. Contudo, isto exige um procedimento de combinação e seleção de raízes, através de um procedimento de máxima-verossimilhança (ALVES, 2004; FERREIRA, 2005).

A fundamentação teórica dos métodos derivados do DMLE será apresentada para dar maior consistência à apresentação dos métodos *MODE* e *MODEX*. Também, a fundamentação teórica do *MODE* será apresentada, uma vez que o *MODEX* é baseado neste método.

4.2 Fundamentação teórica dos estimadores derivados do DMLE

O problema de minimização descrito pela função custo (3.10) envolve uma função não-linear das frequências desconhecidas e não há uma expressão algébrica para se obter o conjunto de parâmetros Θ para os quais a função custo atinge seu ponto mínimo. Com isto, é necessária uma busca M -dimensional destas frequências, exigindo uma elevada complexidade computacional (ALVES, 2004; SILVA, 2007).

Geralmente, esta busca tem sido evitada através da reparametrização do vetor de frequências elétricas $\mathbf{\Theta}$ pelo vetor de coeficientes \mathbf{b} , dado por (ALVES, 2004):

$$\mathbf{b} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_M]^T \quad (4.1)$$

do polinômio (BRESLER e MACOVSKI, 1986; KUMARESAN, SCHARF e SHAW, 1986):

$$\begin{aligned} p_M(z) &= b_0 z^M + b_1 z^{(M-1)} + \cdots + b_M \\ &= b_0 \prod_{m=1}^M (z - e^{j\omega_m}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

As raízes deste polinômio são $e^{j\omega_m}$, com $m=1,2,\dots,M$, ou seja, situam-se sobre a Circunferência de Raio Unitário (CRU), resultando em (ALVES, 2004):

$$\sum_{m=0}^M b_m e^{j(n-m)\omega_i} = 0, \quad (4.3)$$

com $n=0,1,\dots,N-1$ e $i=1,2,\dots,M$. Com isto, esta expressão pode ser reescrita como (ALVES, 2004):

$$\mathbf{B}^H \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

onde \mathbf{B} é uma matriz Toeplitz formada pelos coeficientes b_0, \dots, b_M da seguinte maneira (ALVES, 2004):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_M & \cdots & b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & b_M \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times (N-M)}. \quad (4.5)$$

e \mathbf{A} é a matriz de transferência.

A Equação (4.4) indica que o espaço gerado pelas linhas de \mathbf{B}^H corresponde ao espaço nulo de \mathbf{A}^H (BRESLER e MACOVSKI, 1986 *apud* SILVA, 2007). Então, tanto $\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$ quanto $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ são projeções ortogonais de \mathbf{A}^H , produzindo (STOICA e SHARMAN, 1990 *apud* SILVA, 2007):

$$\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (3.10), tem-se a seguinte função custo reparametrizada em função de \mathbf{b} (SILVA, 2007):

$$F(\mathbf{b}) = \text{tr} \left\{ \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{R}} \right\}. \quad (4.7)$$

As estimativas de $\hat{\mathbf{b}}$ são obtidas pela solução da seguinte minimização (KRIM e VI-BERG, 1996; STOICA e SHARMAN, 1990; SILVA, 2007):

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{b} \in D} \{ F(\mathbf{b}) \}, \quad (4.8)$$

onde D é o conjunto que faz com que haja uma relação biunívoca entre \mathbf{b} e $\boldsymbol{\omega}$, desde que $\mathbf{b} \neq 0$.

Assim como ocorreu na minimização das funções custo do Estimador de Máxima-Verossimilhança, não existe uma expressão algébrica para $\hat{\mathbf{b}}$, devido à não-linearidade desta minimização em relação ao vetor $\hat{\mathbf{b}}$. Contudo, a Equação (4.7) é mais adequada para manipulação algébrica e é a base dos estimadores derivados do DMLE (ALVES, 2004).

Esta minimização produz as estimativas das frequências elétricas desconhecidas $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ que são calculadas extraindo-se os ângulos das raízes do polinômio $p_M(z)$ descrito em (4.2) (ALVES, 2004).

4.3 O método de estimação MODE

O método MODE estima os ângulos de incidência (DOA) através da aproximação iterativa da função custo (4.7) localmente em torno de \mathbf{b}_0 , a solução ótima, por uma função quadrática obtida a partir da substituição de $\hat{\mathbf{R}}$ pelo resultado de sua autodecomposição (ALVES, 2004):

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H + \hat{\mathbf{U}}_\xi \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\xi \hat{\mathbf{U}}_\xi^H, \quad (4.9)$$

onde $\hat{\mathbf{U}}_S$ e $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_S$ são os autovalores e autovetores do subespaço de sinal e $\hat{\mathbf{U}}_\xi$ e $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_\xi$ são os autovalores e autovetores do subespaço de ruído.

Utilizando o índice MD em todas as expressões referentes ao método MODE e considerando situação assintótica em relação a K , tem-se que a função custo é dada por (STOICA e SHARMAN, 1990):

$$F_{MD}(\mathbf{b}) = \text{tr} \left\{ \mathbf{B} \left(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{MD} \hat{\mathbf{U}}_S^H \right\}, \quad (4.10)$$

onde $\hat{\Psi}_{MD}$ é uma matriz ótima, para que a variância do estimador seja mínima e é dada por (ALVES, 2004):

$$\hat{\Psi}_{MD} = \text{diag} \left\{ \frac{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_1}, \frac{(\hat{\lambda}_2 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_2}, \dots, \frac{(\hat{\lambda}_{\bar{M}} - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_{\bar{M}}} \right\}, \quad (4.11)$$

onde $\bar{M} = \min \{M, \text{posto}(\mathbf{P})\}$, $\hat{\lambda}_i$ é o i -ésimo valor de $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\sigma}^2$ é uma estimativa da potência do ruído, dada por (SILVA, 2007):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - \bar{M}} \left[\text{tr} \{ \hat{\Lambda}_\xi \} \right] = \frac{1}{N - \bar{M}} \left[\text{tr} \{ \hat{\mathbf{R}} \} - \text{tr} \{ \hat{\Lambda}_s \} \right]. \quad (4.12)$$

A Equação (4.10) é minimizada por:

$$\hat{\mathbf{b}}_{MD} = \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathbf{D}} \left[\mathbf{b}^T \mathbf{\Omega}_{MD} \mathbf{b} \right], \quad (4.13)$$

onde \mathbf{D} é um conjunto de restrições imposto a $\hat{\mathbf{b}}_{MD}$ (ALVES, 2004) e

$$\mathbf{\Omega}_{MD} = \mathbf{\Omega}_P^H \mathbf{\Omega}_P, \quad (4.14)$$

tal que (FERREIRA, 2005)

$$\mathbf{\Omega}_P = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{H}_P \mathbf{W}) \\ \Im(\mathbf{H}_P \mathbf{W}) \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

e

$$\mathbf{H}_P = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{chol}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{chol}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{\bar{M}} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

onde $\tilde{\mathbf{B}}_{chol}$ é a decomposição Cholesky de $\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}}$, cujo valor na primeira iteração é \mathbf{I} , e $\tilde{\mathbf{S}}_{\bar{M}} \in \mathbb{C}^{N \times \bar{M}}$ é a matriz composta pelos \bar{M} autovetores definida em (STOICA e SHARMAN, 1990; LI, STOICA e LIU, 1998; FERREIRA, 2005).

Então, a solução para o método MODE, em função dos coeficientes do polinômio $p_M(z)$ é dada pela seguinte minimização (FERREIRA, 2005):

$$\hat{\mathbf{b}}_{MD} = \arg \min_{\mathbf{b}} \{ F_{MD}(\mathbf{b}) \}. \quad (4.17)$$

4.3.1 Algoritmo para o método MODE

O método MODE realiza o seguinte procedimento para obter as estimativas das frequências (STOICA e SHARMAN, 1990 *apud* ALVES, 2004; SILVA, 2007):

1. Calcula-se a matriz de covariância estimada $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^H(k)\}; \quad (4.18)$$

2. Realiza-se a decomposição de $\hat{\mathbf{R}}$ em autovalores e autovetores. Apenas os \bar{M} maiores autovalores e seus respectivos autovetores serão usados, ou seja, $\hat{\mathbf{U}}_s$ e $\hat{\mathbf{\Lambda}}_s$;
3. Obtém-se a estimativa da potência de ruído, $\hat{\sigma}^2$, expressa em (4.12);
4. Minimiza-se $F_{MD}(\mathbf{b})$, expressa em (4.10), com $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{I}$, para se obter $\hat{\mathbf{b}}_{MD}$;
5. Iterativamente, minimiz-se novamente $F_{MD}(\mathbf{b})$, desta vez, utilizando a matriz $\hat{\mathbf{B}}$ gerada da primeira estimativa de \mathbf{b} . A cada iteração, utiliza-se a última estimativa de \mathbf{b} para atualizar $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1}$, visando melhorar as estimativas. O número de iterações dependerá do critério de convergência requerido e valores maiores do que três se mostram irrelevantes para o desempenho do estimador (LI, STOICA e LIU, 1998);
6. Determinam-se as raízes do polinômio $p_M(z)$ expresso em (4.10), cujos coeficientes \hat{b}_m vêm do passo anterior. As raízes são as estimativas de máxima verossimilhança de $\mathbf{\Theta}$;
7. Obtém-se as estimativas DOA, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, através da relação definida por (2.7).

4.4 O método de estimação MODEX

Segundo (ALVES, 2004; FERREIRA, 2005; SILVA, 2007), o método MODE apresenta desempenho insatisfatório quando a quantidade de *snapshots* é pequena e/ou em valores pequenos de SNR.

Isto se deve à matriz dos autovetores do subespaço de sinal estimado, $\hat{\mathbf{U}}_S$, possuir componentes significantes do espaço nulo de \mathbf{A} e, conseqüentemente, levando o estimador a alocar raízes em regiões distantes daquelas referentes aos ângulos de incidência desejados.

Então, a proposta do método MODEX é utilizar P raízes extras para corrigir este problema encontrado no método MODE, com $0 < P < N - M$. Estas raízes extras permitem que o estimador aloque raízes próximas aos ângulos de incidência desejados e em outros locais. Elas são obtidas a partir do redimensionamento da matriz $\hat{\Psi}_{MD}$ por “zero-padding”, ou seja, anexação de zeros para estender sua dimensão. Utilizando o índice MX em todas as expressões referentes ao método MODEX, tem-se que a matriz resultante $\hat{\Psi}_{MX}$, com dimensão estendida $(\bar{M} + P) \times (\bar{M} + P)$, é dada por (SILVA, 2007):

$$\hat{\Psi}_{MX} = \text{diag} \left\{ \hat{\Psi}_{MD} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right\} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{MD} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N+P) \times (N+P)}. \quad (4.19)$$

Com o vetor \mathbf{b}_{MX} de dimensões $(P + M + 1) \times 1$ dado por:

$$\mathbf{b}_{MX} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{P+M}]^T \in \mathbb{C}^{(M+P+1) \times 1}. \quad (4.20)$$

a matriz \mathbf{B}_{MX} torna-se (ALVES, 2004):

$$\mathbf{B}_{MX} = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M+P} & \cdots & b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{M+P} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times (N-M+P)}. \quad (4.21)$$

Devido à presença dos elementos extras de $\hat{\Psi}_{MX}$, a matriz dos autovetores, $\hat{\mathbf{U}}_{S\,MX}$, passa a ter dimensões $N \times (M + P)$ e é dada por:

$$\hat{\mathbf{U}}_{S\,MX} = [\hat{s}_1 \quad \cdots \quad \hat{s}_K \quad \hat{g}_1 \quad \cdots \quad \hat{g}_P]. \quad (4.22)$$

A partir das equações (4.19) e (4.22), obtém-se que (SILVA, 2007):

$$\hat{\mathbf{U}}_{S\,MX} \hat{\Psi}_{MX} \hat{\mathbf{U}}_{S\,MX}^H = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\Psi}_{MD} \hat{\mathbf{U}}_S^H. \quad (4.23)$$

E o vetor de parâmetros para o método MODEX é:

$$\boldsymbol{\beta}_{MX} = \arg \min_{\beta \in D} \left\{ \text{tr} \left[\left(\hat{\mathbf{U}}_S^H \mathbf{B}_{MX} \right) \left(\hat{\mathbf{B}}_{MX}^H \mathbf{B}_{MX} \right)^{-1} \left(\mathbf{B}_{MX}^H \hat{\mathbf{U}}_S \right) \hat{\Psi}_{MD} \right] \right\}, \quad (4.24)$$

sendo que a diferença de (4.24) para (4.10) é a matriz \mathbf{B}_{MX} , que é montada utilizando o vetor de parâmetros \mathbf{b}_{MX} , de ordem estendida.

Enquanto no método MODE, o número de raízes do polinômio $p_M(z)$ é igual ao número de fontes (FERREIRA, 2005), no método MODEX, o polinômio possui número de raízes maior do que o número de fontes, provendo maior grau de liberdade no ajuste e selecionando o conjunto de M raízes que mais se aproximam da CRU (ALVES, 2004).

O parâmetro P pode ser escolhido livremente, entretanto, seu valor deve ser suficientemente pequeno para não aumentar muito a complexidade computacional, pois a quantidade de combinações depende deste parâmetro (ALVES, 2004). Neste sentido, uma análise realizada em (GERSHMAN e STOICA, 1999) constatou que, para $M = 2$, não há melhora significativa do desempenho do MODEX ao se utilizar $P > 4$.

4.4.1 Processo de seleção de raízes no método MODEX

Após a geração das $(2M + P)$ raízes pelo polinômio $p_M(z)$, estas são combinadas M a M , selecionando-se a M -upla pelo critério determinístico (DMLE) dado em (4.7). Com isso, o processo de seleção é dado pela seguinte minimização:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{MX} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \{F_{DMLE}(\boldsymbol{\omega})\}, \quad (4.25)$$

onde $F_{DMLE}(\boldsymbol{\omega})$ é dado em (3.10).

Utilizando o critério estocástico (SMLE), o processo de seleção passa a ser dado pela seguinte minimização (ALVES, 2004):

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{MX} = \arg \min_{\boldsymbol{\omega}} \{F_{SMLE}(\boldsymbol{\omega})\}, \quad (4.26)$$

onde $F_{SMLE}(\boldsymbol{\omega})$ é dado em (3.15).

Em ambos os critérios, $\boldsymbol{\omega} \subset \boldsymbol{\Phi}$, onde $\boldsymbol{\Phi}$ é o conjunto de todas as combinações possíveis das raízes geradas pelo MODEX.

O critério estocástico possui um desempenho melhor do que o determinístico, no caso de sinais correlacionados. Porém, para sinais descorrelacionados, o desempenho do MODEX é igual para os dois critérios. Contudo, a Equação (4.26) possui uma complexidade computacional maior, além de também ser um problema de otimização não-linear (GERSHMAN e STOICA, 1999 *apud* FERREIRA, 2005).

4.5 Complexidade computacional do método MODEX

O número de combinações formadas é dado por (GERSHMAN e STOICA, 1999):

$$C = \frac{(2M + P)!}{M!(M + P)!}, \quad (4.27)$$

Com o limite superior para a complexidade computacional da ordem³:

$$L_{MX} = O(CMN^2), \quad (4.28)$$

expresso em operações de ponto-flutuante por segundo (FLOPS). MN^2 refere-se à complexidade computacional para calcular (3.10).

4.6 Considerações finais

Este capítulo teve como objetivo apresentar os métodos MODE e MODEX, derivados do critério determinístico do Estimador de Máxima-Verossimilhança.

As simulações exibidas no Capítulo 7 mostram que o método MODEX apresenta um desempenho robusto tanto para fontes próximas quanto afastadas e para sinais correlacionados ou descorrelacionados, mesmo em condições severas, como pequenas SNRs e pequeno número de *snapshots*. Estas características fazem do MODEX um dos métodos mais poderosos encontrados na literatura (ALVES, 2004) e, por isso, ele será utilizado como referência para a avaliação das medidas de desempenho de estimação e de complexidade computacional neste trabalho.

Além disso, pode-se dizer que o método MODEX é indicado para ambientes com multipercurso, como em telefonia celular em centros urbanos, onde os sinais refletidos, que atingem a antena inteligente situada na torre, comportam-se como sinais altamente correlacionados, assim como os sinais que incidem sobre radares (FERREIRA, 2005).

O método MODEX é recomendado para valores pequenos de M , já que sua complexidade computacional cresce rapidamente conforme M aumenta (ALVES, 2004).

Além disso, o método MODEX exige uma complexidade computacional maior do que o dobro daquela do método MODE, pois o processo de seleção de raízes consiste em executá-lo novamente (ALVES, 2004).

³ Uma breve explicação sobre a notação utilizada para descrever a complexidade computacional dos estimadores é dada no Capítulo 7.

5 *O método de estimação SEAD*

5.1 **Introdução**

Em (FERREIRA, 2005), motivado pela determinação de um espectro angular mais robusto aos efeitos do ruído sobre o sinal, é proposto um novo método de estimação de ângulos de incidência (DOA), denominado SEAD (*SEArch of Direction by Differential Spectrum*).

Assim como o MODE e o MODEX, este estimador foi projetado especificamente para sinais de frentes de onda incidindo sobre arranjos de antenas cujos elementos estejam uniformemente espaçados.

Este método tem como ponto-chave o Critério Diferencial, uma etapa de pesquisa angular baseada na diferença entre os valores singulares da matriz $\hat{\mathbf{R}}$.

Além disso, o SEAD foi desenvolvido nas versões com e sem refinamento, sendo que a primeira possui uma REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) menor, especialmente em SNRs (*Signal-to-Noise Ratio*) grandes, associada a uma elevada complexidade computacional. A segunda possui uma complexidade computacional menor, associada a uma REQM maior, especialmente para valores grandes de SNR.

5.2 **Comportamento dos valores singulares**

O método SEAD possui uma etapa denominada Critério Diferencial que faz uso extensivo da Decomposição em Valores Singulares (SVD). Como a estimação DOA pode ser considerada um caso análogo ao de estimação de frequências, o comportamento da SVD da matriz de covariância espacial inspirou a técnica proposta em (FERREIRA, 2005).

O comportamento dos valores singulares será representado na próxima seção utilizando raias espectrais nos casos de presença e de ausência de ruído aditivo. O eixo vertical é adimensional, servindo apenas para o traçado de cada raia com um mesmo tamanho. As posi-

ções horizontais das raias representam as magnitudes dos valores singulares extraídos da operação de SVD da matriz de covariância espacial. As amplitudes apresentadas estão normalizadas em relação ao maior valor singular. A matriz de covariância espacial foi gerada a partir de obtenção de sinais de duas fontes de onda descorrelacionadas por parte de um arranjo composto por dez sensores e tomando-se 100 *snapshots*.

As fontes de onda se encontram em três situações distintas: ângulos próximos, 10° e 15° ; ângulos afastados, 10° e 45° , e ângulos coincidentes, 10° .

5.2.1 Comportamento na ausência de ruído

Num ambiente sem ruído, há apenas dois valores singulares não-nulos do subespaço de sinal. Todos os valores singulares do subespaço de ruído são nulos, conforme descrito na Seção 2.5.

Nas figuras de 5.1 a 5.11, são ilustradas raias espectrais que indicam as magnitudes dos valores singulares normalizadas pelo maior valor singular.

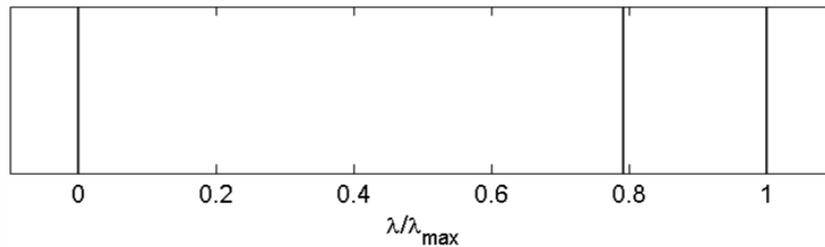


Figura 5.1: Raias espectrais dos valores singulares para a situação de ângulos afastados.

Para a situação de ângulos afastados, na Figura 5.1, os dois valores singulares do subespaço de sinal estão próximos entre si, com o primeiro igual a $1\lambda_{max}$ e o outro próximo de $0,8\lambda_{max}$. Os valores singulares do subespaço de ruído posicionam-se todos em $0\lambda_{max}$.

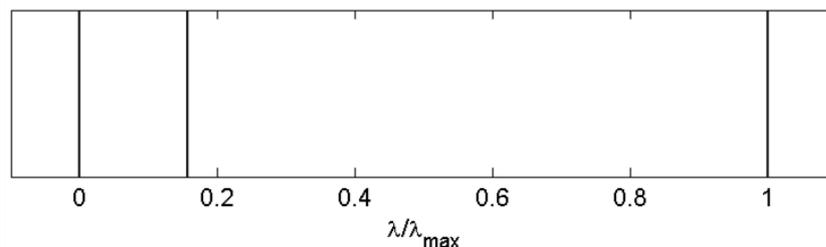


Figura 5.2: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos.

Na Figura 5.2, para a situação de ângulos próximos, nota-se que os valores singulares do subespaço de sinal estão mais afastados um do outro: o primeiro em $1\lambda_{max}$ e outro próximo de $0,2\lambda_{max}$. Novamente, os valores singulares do subespaço de ruído estão em $0\lambda_{max}$.

Para o caso de fontes com o mesmo ângulo de incidência, ilustrado na Figura 5.3, percebem-se apenas duas raias: uma situada em $0\lambda_{max}$ relativa aos valores singulares do subespaço de ruído, e a outra em $1\lambda_{max}$, que pertence ao subespaço de sinal. Desta forma, há um aparente conflito entre a quantidade de fontes e a quantidade de valores singulares do subespaço de sinal, já que, *a priori*, um reflete o outro (FERREIRA, 2005).

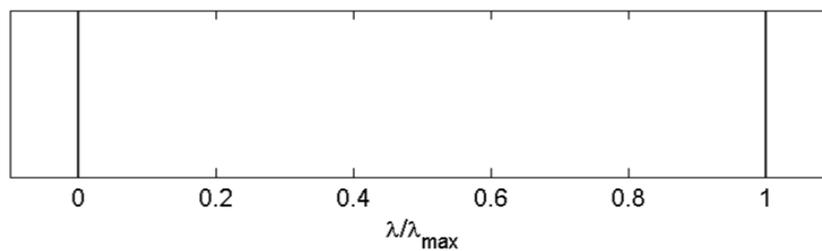


Figura 5.3: Raias espectrais para a situação de ângulos coincidentes.

É possível perceber nesta breve análise experimental que o aumento da distância entre os ângulos de incidência está associado à aproximação dos valores singulares do subespaço de sinal. O contrário também ocorre: a proximidade entre os ângulos de incidência implica no distanciamento desses valores singulares, com λ_2 mais próximo dos valores singulares do subespaço de ruído (FERREIRA, 2005).

5.2.2 Comportamento na presença de ruído

A degradação do comportamento dos valores singulares aumenta gradativamente conforme a relação sinal-ruído diminui.

Nas figuras de 5.4 a 5.11, são ilustradas as raias espectrais dos valores singulares referentes a dez experimentos, para mostrar os desvios dos valores singulares causados pelo ruído aditivo. Aplica-se o valor de SNR indicado nas respectivas legendas, sendo que as figuras de 5.4 a 5.7 ilustram o comportamento dos valores singulares para a situação de ângulos afastados.

Antes de iniciar todos os experimentos, a semente geradora de números pseudoaleatórios foi reiniciada, com o intuito de analisar a degradação causada apenas sob o ponto de vista da potência do ruído.

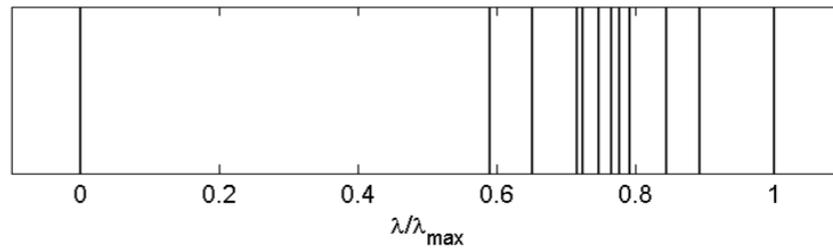


Figura 5.4: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de 30 dB.

A Figura 5.4 mostra a variação de λ_2 , que, na ausência de ruído, situava-se próximo de $0,8\lambda_{max}$. No caso ruidoso, λ_2 assumiu valores entre $0,6\lambda_{max}$ e $0,9\lambda_{max}$. Os valores singulares do subespaço de ruído, apesar de não-nulos, são muito pequenos, da ordem de $0,0001\lambda_{max}$.

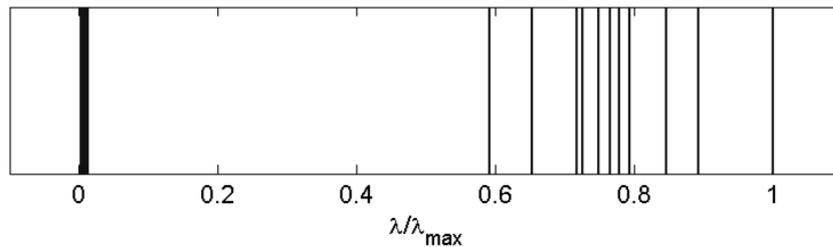


Figura 5.5: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de 10 dB.

A Figura 5.5 apresenta comportamento semelhante, com leve deslocamento para a direita dos valores singulares do subespaço de sinal. Contudo, os valores singulares do subespaço de ruído variaram entre $0,0140\lambda_{max}$ e $0,0060\lambda_{max}$.

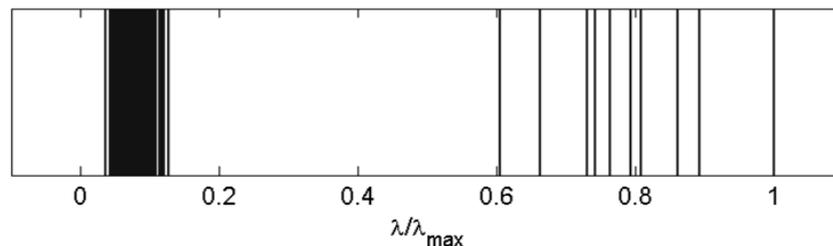


Figura 5.6: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de 0 dB.

Na Figura 5.6 também ocorre leve deslocamento dos valores singulares do subespaço de sinal para a direita e maior dispersão dos valores singulares do subespaço de ruído.

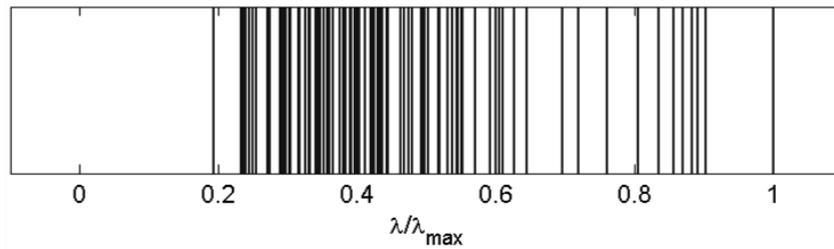


Figura 5.7: Raias espectrais para a situação de ângulos afastados e SNR de -10 dB.

Agora, na Figura 5.7 não é possível distinguir os valores singulares do subespaço de sinal e do subespaço de ruído, que possuem a mesma ordem de grandeza.

As figuras de 5.8 a 5.11 ilustram o comportamento dos valores singulares para a situação de ângulos próximos e aplicando-se o valor de SNR indicado nas respectivas legendas.

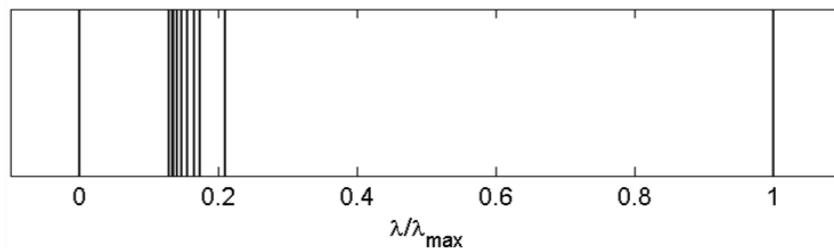


Figura 5.8: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de 30 dB.

A Figura 5.8 mostra a variação de λ_2 , que, na ausência de ruído, situava-se próximo de $0,2\lambda_{max}$. No caso ruidoso, λ_2 assumiu valores entre $0,13\lambda_{max}$ e $0,21\lambda_{max}$. Os valores singulares do subespaço de ruído assumem valores da ordem de $0,0001\lambda_{max}$.

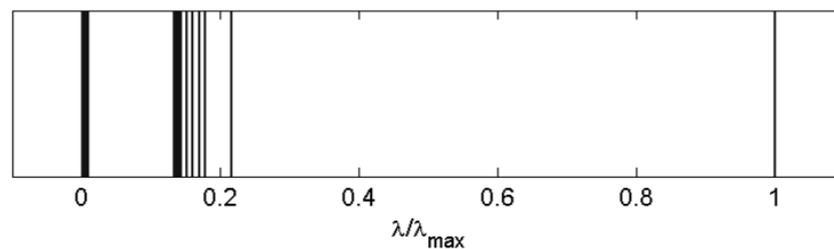


Figura 5.9: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de 10 dB.

A Figura 5.9 apresenta comportamento semelhante, contudo, os valores singulares do subespaço de ruído variaram entre $0,0140\lambda_{max}$ e $0,0060\lambda_{max}$.

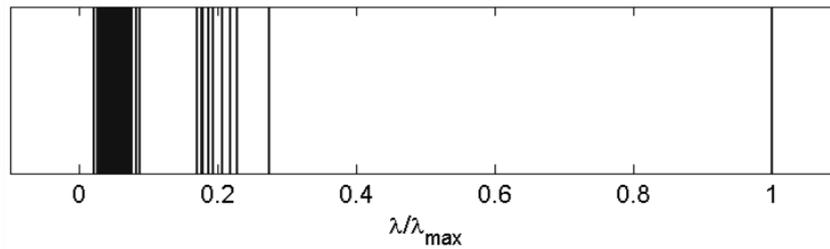


Figura 5.10: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de 0 dB.

Na Figura 5.10, para a SNR de 0 dB, a potência do ruído é significativa, provocando maior dispersão dos valores singulares do subespaço de ruído, que se aproximam das posições associadas a λ_2 .

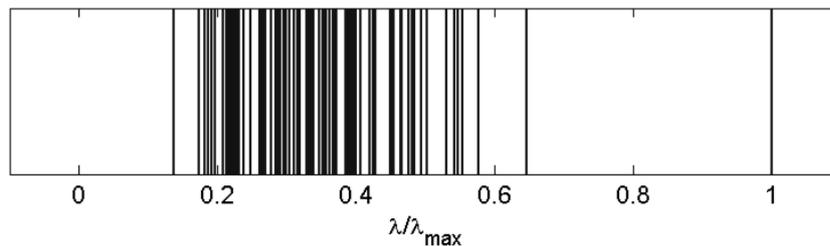


Figura 5.11: Raias espectrais para a situação de ângulos próximos e SNR de -10 dB.

Na Figura 5.11, já não é possível distinguir os valores singulares do subespaço de sinal e do subespaço de ruído. Observa-se que, para ângulos próximos, a dificuldade de se separar os subespaços é potencializada pelo ruído, devido à maior proximidade entre o segundo maior valor singular do supespaço de sinal e os valores singulares do subespaço de ruído.

5.3 Critério Diferencial

O método SEAD possui todo o seu funcionamento baseado numa fase de varredura denominada Critério Diferencial. Nesta etapa, calcula-se a matriz de teste, dada por:

$$\mathbf{R}_T = \mathbf{a}(\omega_T) \mathbf{a}^H(\omega_T), \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{a}(\omega_T)$ é um vetor de direção da forma apresentada em (2.13). A frequência elétrica ω_T é associada a um ângulo de incidência de teste, θ_s , que é utilizado na pesquisa angular. Neste procedimento, originalmente θ_s é variado de -90° a 90° , em passos de 1° . A cada passo, calcula-se um novo vetor de direção e se atualiza a matriz de teste.

A matriz de teste atualizada é combinada com a matriz de covariância espacial para produzir a matriz de pesquisa angular, dada por (FERREIRA, 2005):

$$\hat{\mathbf{R}}_{PA} = \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{R}_T. \quad (5.2)$$

Para cada ângulo de incidência de teste, efetua-se a SVD da matriz $\hat{\mathbf{R}}_{PA}$ e, então, se calcula a diferença entre seus dois maiores valores singulares, dada por:

$$D_{\theta_s} = \lambda_1 - \lambda_2. \quad (5.3)$$

O conjunto dessas diferenças é utilizado para formar o vetor \mathbf{C} , denominado Critério Diferencial (FERREIRA, 2005), ou seja:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} D_{\theta_{s_1}} & D_{\theta_{s_2}} & \cdots & D_{\theta_{s_F}} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

onde θ_{s_F} é o último valor de θ_s . O mapeamento gráfico dos elementos do vetor \mathbf{C} em função dos respectivos ângulos de incidência de teste produz um espectro que pode ser utilizado para a estimação DOA. Basicamente, cada ângulo de incidência é estimado pela posição horizontal de um pico espectral, cuja amplitude máxima ultrapassa um limiar de restrição de amplitude. Segundo (FERREIRA, 2005), valores entre 0,3 e 0,4 para este limiar estabelecem um compromisso entre o esforço computacional e o desempenho da estimação REQM do método SEAD. Em todas as simulações deste trabalho, utilizou-se limiar de restrição igual a 0,3.

5.3.1 Comportamento na ausência de ruído

As figuras de 5.12 a 5.14 ilustram o comportamento do Critério Diferencial em função do ângulo de teste, na ausência de ruído, para um arranjo linear uniforme formado por 10 sensores omnidirecionais espaçados entre si de metade do comprimento de onda, e tomando-se 100 *snapshots*.

Na Figura 5.12, percebe-se um pico principal, cujo ápice encontra-se em 40° , posição de θ_{DOA} em relação à normal do arranjo, e representado por uma linha vertical sólida. A linha tracejada horizontal representa o limiar de restrição de amplitude utilizado que é, neste caso, 0,3. Apenas picos que têm seu máximo acima deste limiar produzem ângulos candidatos na etapa posterior de seleção angular.

Na Figura 5.13, é ilustrado o Critério Diferencial para dois ângulos afastados, também na ausência de ruído, onde se destacam dois picos principais, cujos ápices se encontram nas posições reais dos ângulos de incidência, 10° e 45° .

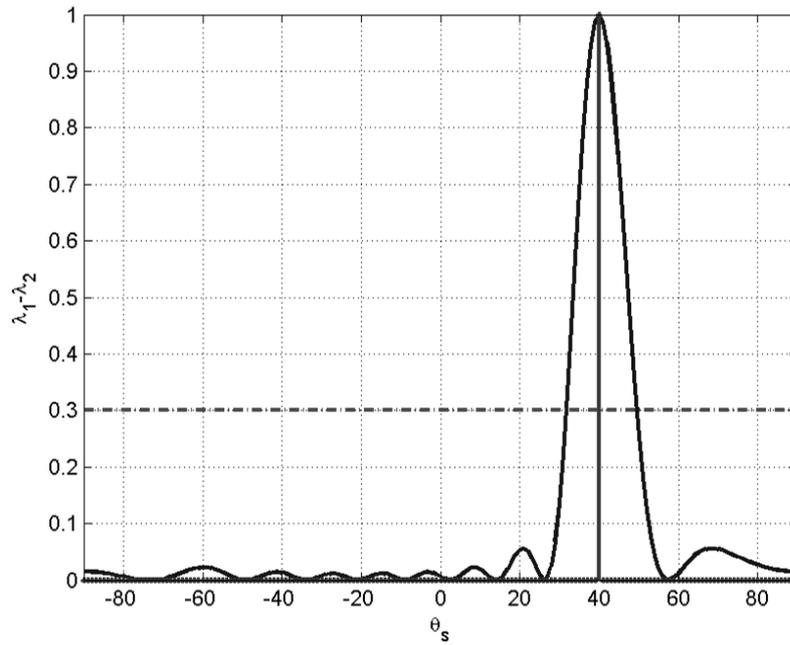


Figura 5.12: Comportamento do Critério Diferencial para $\theta_{DOA} = 40^\circ$ e na ausência de ruído.

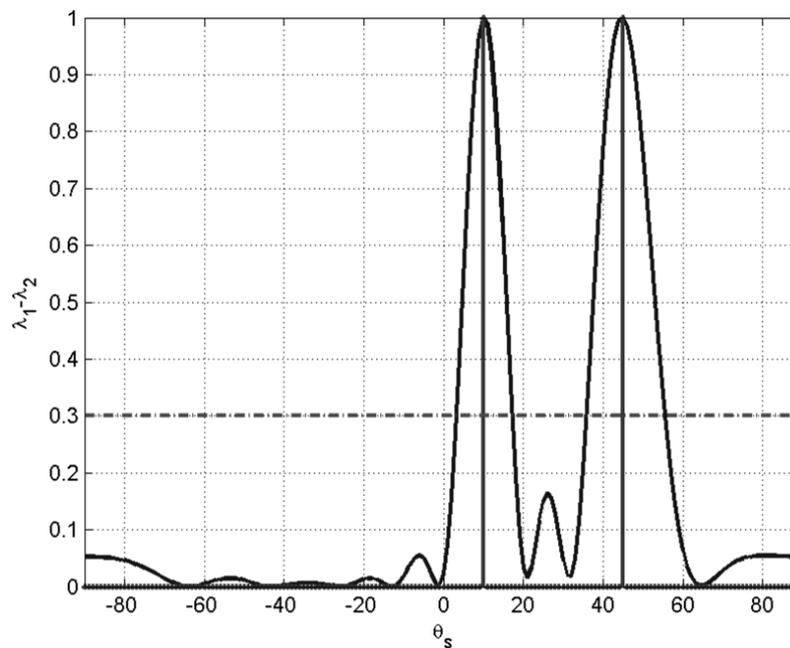


Figura 5.13: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados e na ausência de ruído.

Para ângulos próximos, situação comumente encontrada na literatura da área e utilizada em (GERSHMAN e STOICA, 1999; ALVES, 2004; SILVA, 2007), percebe-se um único pico principal, conforme se vê na Figura 5.14. Isto denuncia falta de resolução do arranjo.

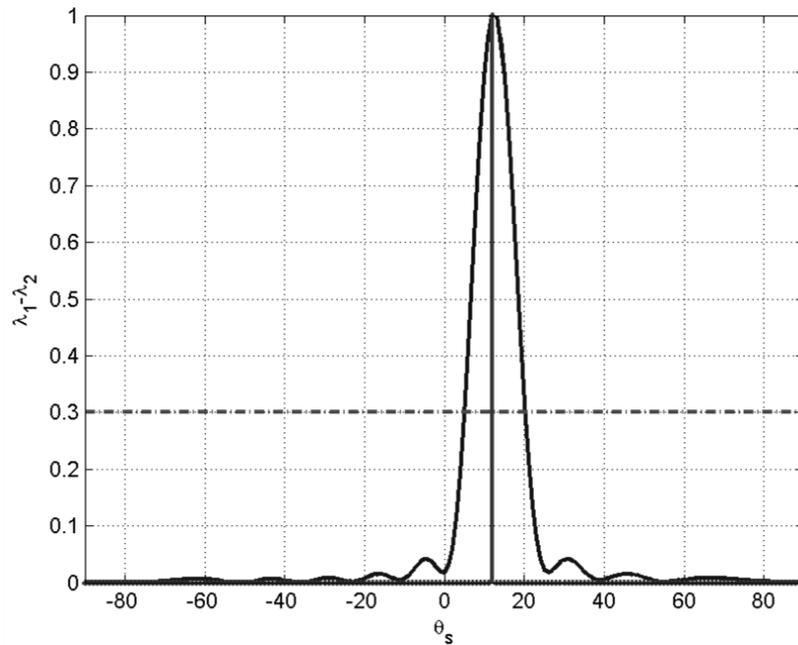


Figura 5.14: Comportamento do Critério Diferencial de um arranjo com 10 sensores para ângulos próximos e na ausência de ruído.

Contudo, a Figura 5.15 ilustra que, para maior número de sensores, o Critério Diferencial torna-se mais preciso. Aumentando-se de 10 para 30 sensores, percebe-se o aparecimento de dois picos próximos entre si, cujos ápices identificam os ângulos de incidência: 10° e 15° .

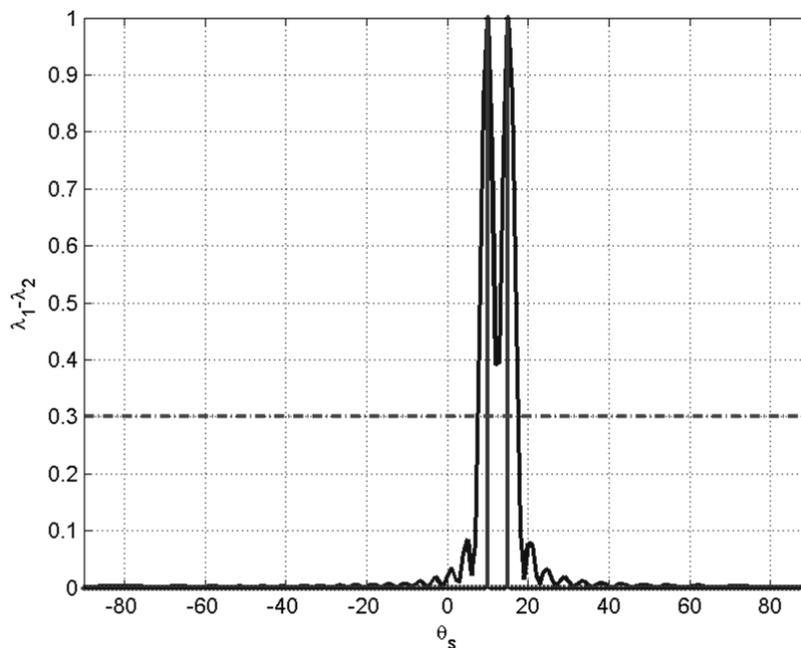


Figura 5.15: Comportamento do Critério Diferencial de um arranjo com 30 sensores para ângulos próximos e na ausência de ruído.

5.3.2 Comportamento na presença de ruído

Os principais efeitos do ruído no Critério Diferencial estão associados ao aparecimento de picos espúrios do subespaço de ruído, a um ligeiro desvio dos ápices dos picos principais do subespaço de sinal, tanto para a esquerda quanto para a direita (FERREIRA, 2005), e à diferença de amplitude de picos principais no caso de ângulos afastados cujos sinais possuem a mesma intensidade.

As figuras de 5.16 a 5.19 mostram o comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados, de um arranjo com 10 sensores omnidirecionais espaçados de metade do comprimento de onda, tomando-se 100 *snapshots* e aplicando o valor de SNR indicado nas respectivas legendas.

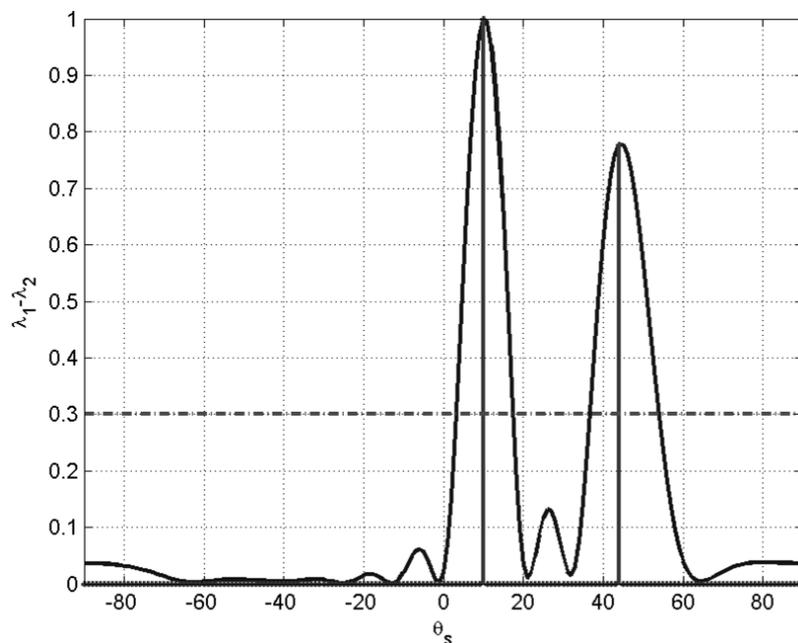


Figura 5.16: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados e SNR de 15 dB.

Para o caso de SNR de 15 dB, a Figura 5.16 mostra que o comportamento do Critério Diferencial é bastante semelhante àquele observado na ausência de ruído. A principal mudança se deve à diferença de amplitude dos picos principais.

Para as SNRs de 0 dB e -10 dB, nas figuras 5.17 e 5.18 respectivamente, o que se percebe é o aumento dos picos espúrios. Contudo, ainda se observa pouca distorção em relação ao comportamento do Critério Diferencial na ausência de ruído.

Mesmo para SNR de -10dB, os ápices dos picos espúrios possuem amplitudes inferiores ao limiar de restrição, portanto não produzem ângulos candidatos.

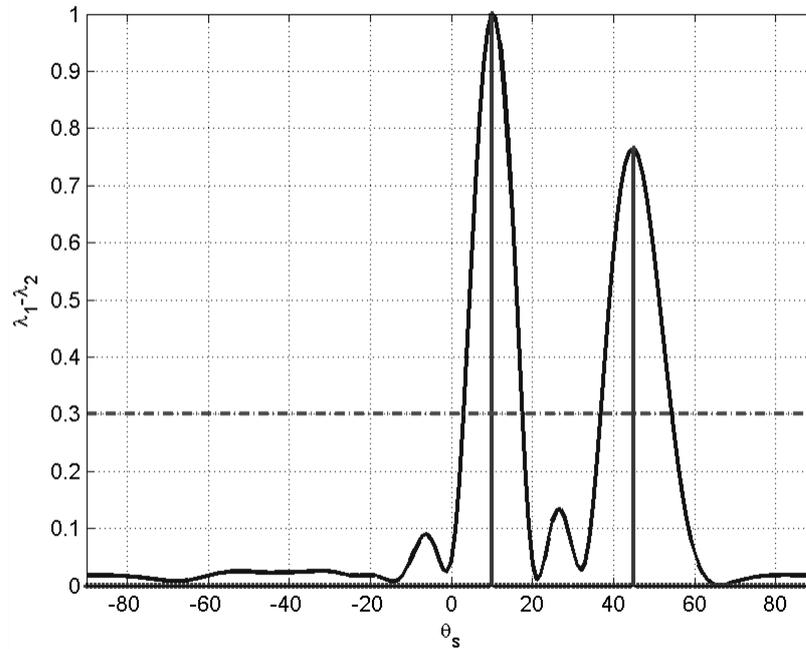


Figura 5.17: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados numa SNR de 0 dB.

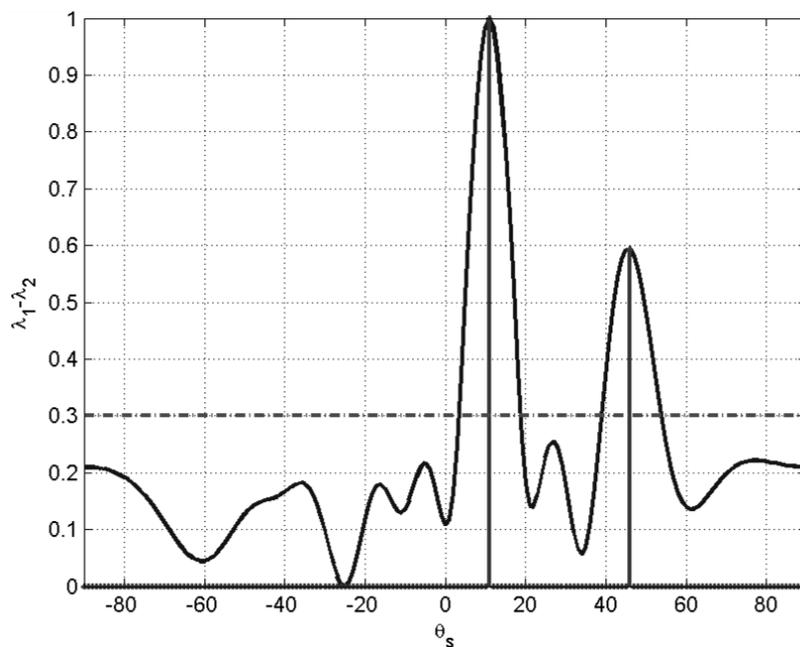


Figura 5.18: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados numa SNR de -10 dB.

Contudo, na Figura 5.19, para a SNR de -15 dB percebe-se a distorção dos picos principais e o aumento suficiente das amplitudes dos picos espúrios para produzirem ângulos candidatos. Mesmo nesse caso, os picos principais mantêm-se maiores que os picos espúrios.

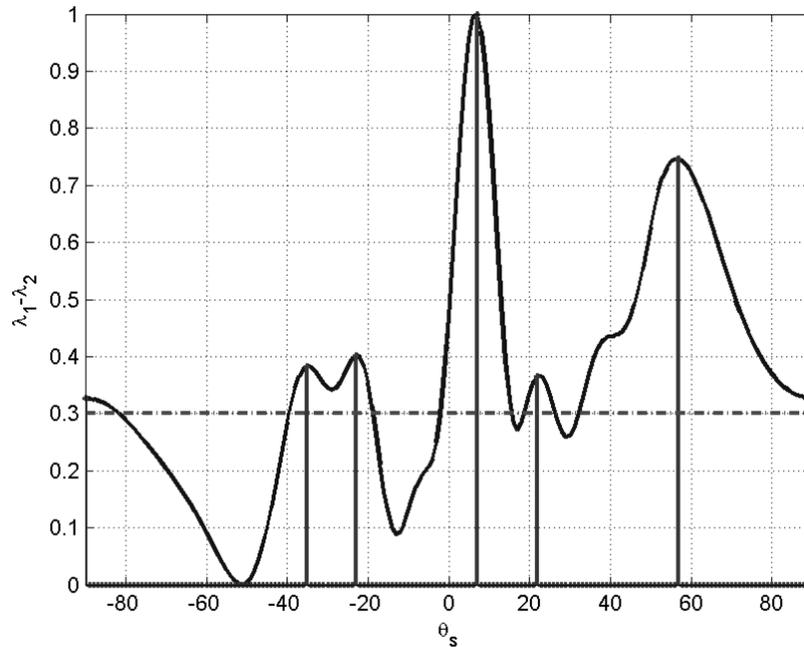


Figura 5.19: Comportamento do Critério Diferencial para ângulos afastados numa SNR de -15 dB.

Portanto, conforme (FERREIRA, 2005), o Critério Diferencial apresenta robustez aos efeitos do ruído, uma vez que os ápices dos picos principais mantêm-se próximos das posições dos ângulos de chegada reais inclusive em condições de baixíssima SNR. Este procedimento mostra-se mais robusto ao ruído do que o fazem os métodos espectrais de Fourier (LEMOS, 1995; ANTUNES, 1992 *apud* FERREIRA, 2005).

5.4 Seleção de estimativas DOA

Na presença de ruído aditivo e de proximidade entre fontes, pode ocorrer no Critério Diferencial que o número de ângulos candidatos, produzidos pelos picos acima do limiar, seja diferente do número de fontes. Desta forma, assim como o MODEX necessita de uma seleção de raízes, o SEAD precisa realizar a seleção dos ângulos candidatos. Para tal, (FERREIRA, 2005) define dois métodos de seleção.

O primeiro método adota como candidatos todos os ângulos inteiros na vizinhança dos ângulos candidatos produzidos pelo critério diferencial. Os limites dessas vizinhanças são definidos pelos pontos de cruzamento dos picos com o limiar de restrição de amplitude. Este método limita o desempenho em termos de REQM, mesmo para grandes valores de SNR.

O segundo método reduz a vizinhança a um intervalo de até 3° antes a até 3° após cada ângulo candidato produzido pelo critério diferencial, conforme estimativa da potência do

ruído. Em seguida, toma por candidatos os ângulos nestas vizinhanças, afastados entre si de uma fração de grau. Este procedimento, denominado seleção com refinamento, permite obter estimativas mais precisas dos ângulos de incidência (DOA), porém resulta em elevada complexidade computacional.

Detalhadamente, a seleção com refinamento é calculada em duas fases. Logo após se obter os ângulos candidatos a partir do critério diferencial, o conjunto de todas suas combinações M a M é armazenado na matriz $\mathbf{\Omega}$. Então, é feita a primeira seleção da M -upla através da minimização da função custo $F_{DMLE}(\mathbf{\omega})$ dada em (3.10). Em outras palavras, calcula-se a função custo para cada M -upla $\mathbf{\omega}$, selecionando-se aquela para a qual F_{DMLE} apresenta valor mínimo:

$$\hat{\mathbf{\omega}}_{SD} = \arg \min_{\mathbf{\omega}} \{F_{DMLE}(\mathbf{\omega})\}, \quad (5.5)$$

onde $\mathbf{\omega} \subset \mathbf{\Omega}$. A minimização é calculada por (2.17) em função de \mathbf{A}_{Ω} , que é a matriz direção formada pelas M -uplas candidatas contidas em $\mathbf{\Omega}$, ou seja:

$$F_{DMLE}(\mathbf{\omega}) = \text{tr} \left[\mathbf{P}_{\mathbf{A}_{\Omega}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}} \right], \quad (5.6)$$

onde

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}_{\Omega}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Omega} (\mathbf{A}_{\Omega}^H \mathbf{A}_{\Omega})^{-1} \mathbf{A}_{\Omega}^H. \quad (5.7)$$

Este procedimento de seleção por amplitude e projeção ortogonal é denominado restrição combinada.

Na segunda fase, são determinadas regiões em torno dos ângulos candidatos $\hat{\mathbf{\theta}}_{SD}$ associados às frequências elétricas $\hat{\mathbf{\omega}}_{SD}$ divididas em passos de $0,1^{\circ}$ e limitadas por $\pm \hat{\sigma}$, que é a estimativa da variância de ruído e dada em (4.12) (FERREIRA, 2005).

Os valores de ângulos candidatos gerados em cada região são combinados M a M e armazenados na matriz $\mathbf{\Omega}_R$. Da mesma forma que ocorre na primeira fase de seleção, seleciona-se a M -upla que minimiza (5.6).

5.5 Complexidade computacional do método SEAD

O método SEAD, utilizando a seleção de ângulos com refinamento, possui o limite superior para a complexidade computacional da ordem:

$$L_{SD} = O \left(\frac{T_{CD}}{R_{CD}} N^3 + \left(1 + 2 \times \frac{T_R}{R_R} \right)^M MN^2 \right), \quad (5.8)$$

dado em FLOPS. T_{CD} é o tamanho do intervalo de varredura do Critério Diferencial, R_{CD} é o passo utilizado nesta varredura e T_R e R_R se referem à varredura na etapa de seleção de ângulos com refinamento. N^3 refere-se à complexidade computacional para calcular a SVD da matriz de covariância espacial⁴. MN^2 refere-se à complexidade computacional para calcular a função custo apresentada na Equação (5.6).

5.6 Considerações finais

Este capítulo teve como objetivo apresentar o método SEAD, que também utiliza uma função de verossimilhança reparametrizada.

As simulações que serão exibidas no Capítulo 7 mostram que o método SEAD apresenta melhor desempenho se comparado ao MODEX. Contudo, foi na situação de fontes próximas e sinais correlacionados onde o método SEAD apresentou seu melhor desempenho.

Partindo puramente do ponto de vista de desempenho de estimação, o método SEAD é indicado em situações adversas, como fontes próximas, valores baixos de SNR e sinais totalmente correlacionados (FERREIRA, 2005).

Entretanto, o SEAD apresenta complexidade computacional muitas vezes maior do que a do MODEX. Há duas causas para isto: a) muito tempo é gasto durante o cálculo do Critério Diferencial e, em maior parte, b) a utilização de uma seleção de estimativas semelhante ao do Estimador de Máxima-Verossimilhança.

Este procedimento de seleção de estimativas utiliza uma busca multidimensional, evidenciada pelo rápido crescimento da quantidade de projeções ortogonais a serem realizadas, que se deve, principalmente, à combinação de um grande número de ângulos candidatos. Há a necessidade, portanto, de melhorias no método SEAD, para que apresente complexidade computacional competitiva, enquanto mantém desempenho de estimação semelhante àquele apresentado em (FERREIRA, 2005).

⁴ A determinação da complexidade computacional do cálculo da SVD é dada no Capítulo 7.

6 *Propostas de aprimoramento do método SEAD*

6.1 **Introdução**

O método SEAD (*SEArch of Direction by differential spectrum*) apresentado no Capítulo 5 apresenta complexidade computacional muitas vezes superior em relação àquela do método MODEX (*MODE with eXtra roots*), utilizado como referência neste trabalho. Faz-se necessária seleção de estimativas de ângulos de incidência (DOA) mais eficiente do que a busca multidimensional até então utilizada, considerada um método de força-bruta. Nestes métodos, o problema de otimização é resolvido através de busca de ordem exponencial no espaço de soluções, com tempo de execução também exponencial. Portanto, estes métodos devem ser evitados, através do entendimento mais profundo do problema, podendo produzir um algoritmo de tempo polinomial (SIPSER, 1997), que, de acordo com (CARVALHO, CERIOLI, DAHAB *et al.*, 2001), entende-se por algoritmo eficiente.

Este capítulo apresenta os aprimoramentos computacionais propostos para o método SEAD, com o objetivo de torná-lo competitivo com o MODEX. Uma análise numérica acerca da complexidade computacional dos métodos tratados neste trabalho é mostrada no Capítulo 7.

6.2 **Considerações iniciais**

Através de uma breve análise experimental do método SEAD, foram coletados os tempos de execução do Critério Diferencial e do processo de seleção de estimativas DOA. Foram realizados 100 experimentos, utilizando duas e três fontes, cujos ângulos de incidência estão afastados entre si em 15° , utilizando sinais completamente decorrelacionados.

As figuras 6.1 e 6.2 ilustram a alocação do tempo gasto nas simulações para as duas etapas supracitadas em função do tempo total.



Figura 6.1 Alocação do tempo gasto no método SEAD para duas fontes.

É possível perceber na Figura 6.1 que o tempo gasto no Critério Diferencial é significativamente menor do que aquele gasto no processo de seleção de estimativas DOA. Para duas fontes, o Critério Diferencial consome aproximadamente 4% do tempo total, enquanto que a seleção de estimativas dispende cerca de 96%.



Figura 6.2 Alocação do tempo gasto no método SEAD para três fontes.

Na Figura 6.2, nota-se que praticamente todo o tempo de execução é alocado exclusivamente ao processo de seleção de estimativas DOA.

Esta breve análise torna evidente a necessidade de um método de seleção de estimativas DOA que seja mais eficiente. Com isto, os esforços em reduzir a complexidade computacional do método SEAD foram concentrados em desenvolver um método de busca eficiente no contexto de estimação DOA.

6.3 Seleção de estimativas DOA

O novo método de seleção de estimativas DOA, aqui proposto, tem como fundamento a utilização de uma abordagem iterativa em vez da técnica de força-bruta, utilizada anteriormente pelo método SEAD. A proposta é baseada no método denominado *branch-and-cut* e adequada ao problema de estimação DOA.

As próximas seções tratam da definição do problema de programação linear, assim como do método em questão, para melhor entendimento.

6.3.1 Problema de programação linear

Um problema de programação linear pode ser definido como o problema de maximizar ou minimizar uma função subjetiva linear com o uso de restrições lineares, podendo estas restrições serem igualdades ou desigualdades (FERGUSON, 2008).

Segundo (CARVALHO, CERIOLI, DAHAB *et al.*, 2001; VANDERBEI, 2008), a definição de um problema de programação linear é a seguinte: Dada uma matriz \mathbf{A} de dimensões $M \times N$, um vetor \mathbf{b} de M posições, um vetor \mathbf{c} de N posições e partições $\{M_1, M_2, M_3\}$ e $\{N_1, N_2, N_3\}$ de M e N respectivamente, encontrar um vetor \mathbf{x} de N posições que:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 & \text{sujeito a} && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & && a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & && \vdots \\
 & && a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 & && x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

A forma com a qual o problema (6.1) foi formulado é denominada de forma padrão. Neste caso, há m restrições e n variáveis de decisão (VANDERBEI, 2008).

Entretanto, nesta seção será usada a abreviatura $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, com a seqüência de conjuntos $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$ subentendida nessa notação (CARVALHO, CERIOLI, DAHAB *et al.*, 2001).

A função $\tau = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ é chamada de função objetivo. No contexto de estimação DOA, a função a ser minimizada pelo estimador é chamada de função custo e neste trabalho foi adotada esta nomenclatura.

O problema descrito em (6.1) é um problema de minimização. Na maioria das vezes, os problemas reais são formulados naturalmente como minimizações. Contudo, convertê-los para que sejam problemas do tipo de maximização é trivial, do ponto de vista do modelo (tanto minimizar o custo ou maximizar o lucro), uma vez que minimizar τ é o mesmo que maximizar $-\tau$ (CARVALHO, CERIOLI, DAHAB *et al.*, 2001; VANDERBEI, 2008).

Define-se solução viável (*feasible solution*) do problema como qualquer vetor \mathbf{x} que satisfaça as restrições. Solução ótima é qualquer solução viável \mathbf{x} que minimize o produto escalar $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ (CARVALHO, CERIOLI, DAHAB *et al.*, 2001).

O conjunto de todas as soluções viáveis do problema $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ é denotado por $X(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Caso $X(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ seja vazio, diz-se que o problema é inviável (*infeasible*).

Um problema é dito ser limitado (*bounded*) se existe um número η tal que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \geq \eta$ para todo \mathbf{x} em $X(\mathbf{A}, \mathbf{b})$; caso contrário, o problema é ilimitado (*unbounded*). É importante notar que problemas inviáveis e ilimitados não possuem solução ótima (CARVALHO, CERIOLI, DAHAB *et al.*, 2001).

A notação para descrever o método de busca na próxima seção adotada é a seguinte (KORTE e VYGEN, 2008):

$$\min \{ \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}, \quad (6.2)$$

onde $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é a função objetivo e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ é a restrição do problema.

6.3.2 Fundamentação teórica do método de busca *branch-and-cut*

Este método é utilizado na resolução de problemas de otimização discreta, incluindo os problemas de otimização combinatorial, uma vez que muitos problemas deste tipo podem ser formulados como problemas de programação linear inteira mista (MIP, do inglês *linear mixed-integer programming*), cujas variáveis assumem valores inteiros e contínuos (MITCHELL, 2001; ESPEJO e GALVÃO, 2002; MITCHELL, 2002).

Este método consiste numa combinação dos métodos *cutting plane* e *branch-and-bound* e são utilizados para resolver uma seqüência de relaxações de programação linear do problema de programação inteira (IP, do inglês *linear integer programming*) (MITCHELL, 2001).

Estas relaxações consistem na substituição de uma restrição formada apenas por valores inteiros por outra restrição, mais fraca, formada pelo intervalo contínuo delimitado por

esses valores inteiros. Em outras palavras, resolve-se o problema P através de uma seqüência de problemas “fáceis” obtidos a partir de relaxações do problema original. Através da solução destes problemas, procura-se obter limites para o valor da solução ótima de P (ESPEJO e GALVÃO, 2002).

O método *cutting plane* aumenta a relaxação do problema para deixá-lo mais próximo do problema de programação inteira, enquanto o método *branch-and-bound* provê uma sofisticada estratégia de “dividir para conquistar” para resolver o problema (MITCHELL, 2001).

Considere que \mathbb{R}_+^o seja o conjunto dos vetores o -dimensionais, com valores não-negativos e reais. Considere, também, que \mathbb{Z}_+^e seja o conjunto de vetores e -dimensionais, com valores não-negativos e naturais. Para as variáveis $l \in \mathbb{R}_+^o$ e $j \in \mathbb{Z}_+^e$, um MIP é dado por (LUCENA e BEASLEY, 1998):

$$\min \{ \mathbf{c}l + \mathbf{h}j : \mathbf{I}l + \mathbf{H}j \geq \mathbf{b}, \quad l \in \mathbb{R}_+^o, j \in \mathbb{Z}_+^e \}, \quad (6.3)$$

onde \mathbf{c} , \mathbf{h} e \mathbf{b} são vetores de dimensões o , e e q , respectivamente. \mathbf{A} e \mathbf{G} são matrizes de dimensões $q \times o$ e $q \times e$, respectivamente.

A região viável, ou conjunto de soluções candidatas, associada ao problema descrito é:

$$F = \{ \mathbf{I}l + \mathbf{H}j \geq \mathbf{b}, \quad l \in \mathbb{R}_+^o, j \in \mathbb{Z}_+^e \}, \quad (6.4)$$

onde

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}l + \mathbf{h}j \quad (6.5)$$

é a função objetivo a ser otimizada sobre F .

Quando todas as variáveis em (6.3) são restritas a valores inteiros, o problema é conhecido como sendo do tipo IP. De modo oposto, um problema puro de programação linear (LP, do inglês *linear programming*) é resultado de quando todas as variáveis em (6.3) são restritas a valores reais (LUCENA e BEASLEY, 1998).

Para o caso de problemas do tipo MIP, freqüentemente ocorre que, em vez de tentar otimizar (6.5) diretamente sobre F , pode ser vantajoso dividir esta região num número finito de sub-regiões e otimizar a função objetivo sobre cada uma delas individualmente.

Neste processo, deve-se assegurar que a solução ótima de (6.3) esteja contida em, no mínimo, uma dessas sub-regiões. No contexto da estimação DOA, isto deve ser levado em

conta, uma vez que, não atendida esta exigência, pode haver a convergência para mínimos locais.

Esta estratégia básica de solução pode ser estendida para outros problemas do tipo MIP. Em particular, esta estratégia seria atrativa quando os problemas resultantes não podem ser facilmente resolvidos com as ferramentas disponíveis.

Uma forma conveniente de representação destes problemas é descrevê-los sob a forma de árvore, conforme a Figura 6.3.

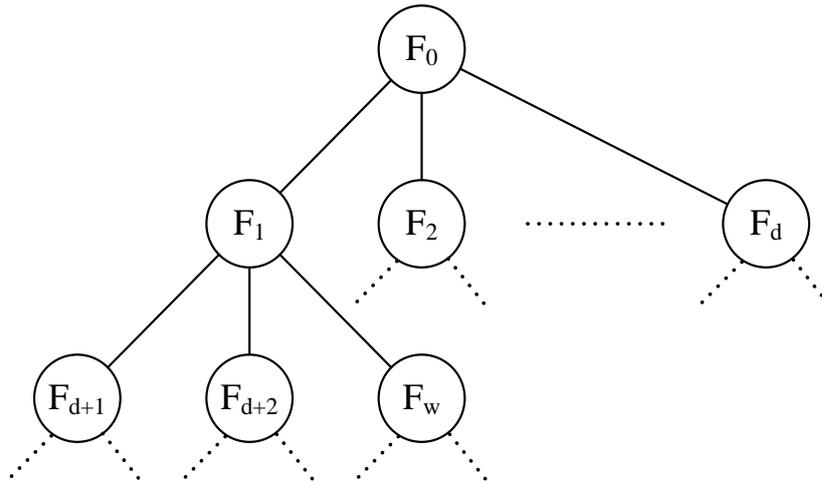


Figura 6.3: Representação de uma árvore de busca.

Um nó na árvore de busca representa o problema do tipo MIP dado por (LUCENA e BEASLEY, 1998):

$$\min \{ \mathbf{c}l + \mathbf{h}j : (l, j) \in F_d \}, \quad (6.6)$$

onde $F_d \subseteq F$.

O problema (6.3) pode ser representado, nesta notação, como o nó-raiz ($d=0$) da árvore, ou seja, $F_0 = F$. Quanto mais se mover para baixo na árvore, as sub-regiões F_d vão se tornando menores.

Eventualmente, pode ser possível, para um dado F_d , ou obter a solução ótima para (6.6), ou determinar que não há solução ótima para (6.3) dentro da sub-região F_d . Para que tal esquema seja aplicável na prática, deve-se trabalhar com relaxações de (6.6) em vez de usá-lo diretamente. Por exemplo, a relaxação de (6.6) é:

$$\min \{ w(l, j) : (l, j) \in R_d \}, \quad (6.7)$$

onde $F_d \subseteq F_d$ e $w(l, j) \leq \mathbf{c}l + \mathbf{h}j, (l, j) \in R_d$. A Equação (6.7) dá um limite inferior para (6.6). No entanto, (6.7) deve ser muito mais fácil para ser resolvido do que (6.6) (LUCENA e BEASLEY, 1998).

Para o problema (6.3), uma relaxação válida tem a seguinte função objetivo:

$$w(l, j) = \mathbf{c}l + \mathbf{h}j, \quad (6.8)$$

com a seguinte região provável:

$$R = \{ \mathbf{I}l + \mathbf{H}j \geq \mathbf{b}, \quad (l, j) \in \mathbb{R}_+^{o+e} \}. \quad (6.9)$$

Segundo, (LUCENA e BEASLEY, 1998), com a introdução destas relaxações, a estratégia de solução do problema é consideravelmente aprimorada. Com esta modificação, a um dado nó da árvore de busca, quando o problema do tipo MIP associado não puder ser facilmente resolvido, é a versão com relaxação que passa a ser resolvida.

Conseqüentemente, a estratégia de solução pode ser aprimorada ainda mais caso esta também é capaz de gerar um bom limite superior, correspondente à região provável de (6.3), denominado $v(ub)$. Isto pode resultar em árvores de pesquisa cada vez menores, já um nó é descartado quando é possível estabelecer que ele não contém a solução que melhora $v(ub)$.

Esta estratégia é genericamente chamada de *branch-and-bound* (ramifica-e-delimita). Nela, a ramificação lida com o processo de dividir, de maneira conveniente, as regiões prováveis a cada nó da árvore, em sub-regiões. A delimitação envolve a geração de limites superiores e inferiores para os subproblemas envolvidos.

O método *branch-and-cut* (ramifica-e-poda) pode ser visto como um *branch-and-bound* onde, sistematicamente, tenta-se obter maiores relaxações de programação linear, em cada nó da árvore de busca. Maiores relaxações, neste contexto, implicam em maiores valores da função objetivo. De maneira particular, isto é obtido com a ajuda do método *cutting planes* (LUCENA e BEASLEY, 1998).

6.3.3 Implementação da nova etapa de seleção

A etapa de seleção é dividida em duas fases: pré-seleção e seleção iterativa. A primeira fase consiste em desconsiderar os picos cujos ápices sejam menores do que o limiar de amplitude aplicado.

Há dois motivos de realizar esta remoção: 1) evitar que estes candidatos normalmente associados ao subespaço de ruído sejam combinados e, desta forma, aumentar, desnecessa-

riamente, a complexidade computacional; e 2) balizar a criação, ou não, de ângulos candidatos extras.

Esta geração de ângulos candidatos extras é balizada pela quantidade de picos maiores que o limiar, Q , e pelo número de fontes a serem estimadas, M . Para $Q < M$, que, normalmente ocorre para fontes próximas, realiza-se o seguinte procedimento:

1. Calcula-se a diferença: $\Delta = Q - M$, que é a quantidade de ângulos candidatos extras a serem adicionados a cada um dos picos;
2. Monta-se a matriz, $\mathbf{\Omega}_{PS}$, com Q linhas por M colunas, contendo combinações seletivas dos ângulos candidatos, já inclusos os extras. Em cada uma das linhas, apenas um pico possui Δ ângulos candidatos, com distanciamento arbitrário, tipicamente 3° , em relação à posição do pico. No restante, é considerada a posição do pico como sendo ângulo candidato. Nas iterações seguintes, os picos com Δ ângulos candidatos são alternados, de forma a cobrir todas as combinações possíveis para a configuração de um ou Δ ângulos candidatos em cada pico.

Para $Q \geq M$, realiza-se a combinação M a M de todos os ângulos candidatos e a armazena na matriz $\mathbf{\Omega}_{PS}$.

De maneira análoga à primeira fase de seleção de estimativas do método SEAD, seleciona-se a M -upla de $\mathbf{\Omega}_{PS}$ que maximiza (5.6) e se entra na fase de seleção iterativa, onde se encontra a implementação do método de *branch-and-cut*.

Esta fase possui um número fixo de iterações. Em cada iteração, são realizados os seguintes passos:

1. Criam-se ângulos candidatos extras à esquerda e à direita, para cada ângulo candidato contido na M -upla, utilizando-se um distanciamento arbitrário. Tipicamente, são dois ângulos candidatos extras, sendo um de cada lado;
2. Realiza-se uma combinação seletiva, M a M , dos ângulos candidatos de um pico com os de outros picos, de tal forma que os ângulos candidatos de um mesmo pico não sejam combinados entre si, armazenando-a na matriz $\mathbf{\Omega}_{FI}$;
3. Seleciona-se a M -upla de $\mathbf{\Omega}_{FI}$ que maximiza (5.6);

4. Diminui-se à metade o distanciamento arbitrário entre os ângulos candidatos. Caso não seja a última iteração, este distanciamento será utilizado na iteração seguinte.

Para um melhor entendimento, tem-se como referência um gráfico representando o comportamento do Critério Diferencial na Figura 6.4, para a situação de ângulos afastados, $10,5^\circ$ e $45,5^\circ$ e SNR de -15 dB.

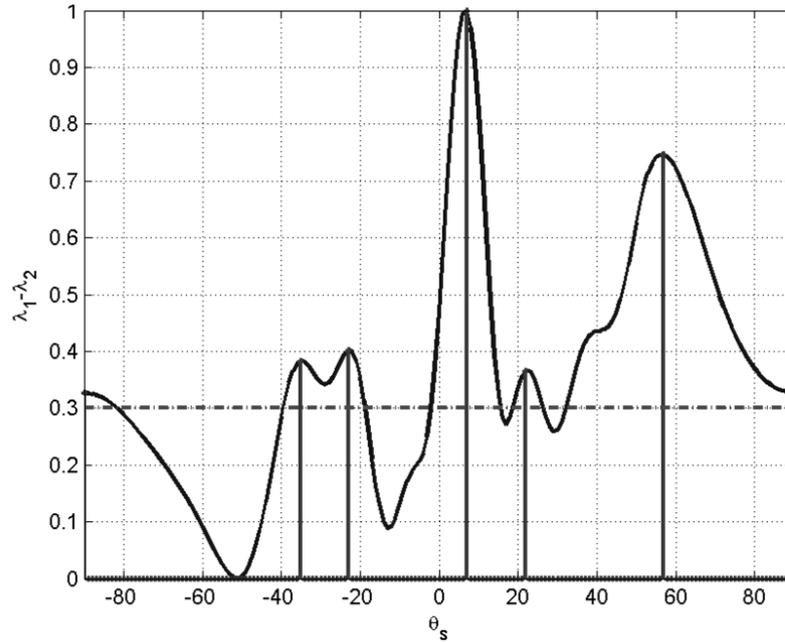


Figura 6.4: Comportamento do Critério Diferencial para a situação de ângulos afastados numa SNR de -15 dB.

Analisando a Figura 6.4, todos os picos passam pela aplicação do limiar de amplitude. Por se tratarem de fontes afastadas, a fase de pré-seleção realiza a combinação M a M dos ângulos referentes às posições dos picos.

Em situações de SNR suficientemente grande, apenas os maiores picos, situados em 10° e 45° , devem passar pela seleção por projeção ortogonal e se tornam ângulos candidatos para a fase de seleção iterativa. Na fase de seleção iterativa, criam-se os ângulos candidatos à esquerda e à direita de 10° e 45° , resultando nos seguintes ângulos candidatos:

$$\mathbf{\Omega}_{FI} = \begin{bmatrix} 10^\circ - D & 10^\circ & 10^\circ + D \\ 45^\circ - D & 45^\circ & 45^\circ + D \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

onde, tipicamente, $D = 3^\circ$.

Combinando os ângulos candidatos de cada um dos dois picos, resulta em:

$$\mathbf{C}_{\Omega_{FI}} = \begin{bmatrix} 7^\circ & 7^\circ & 7^\circ & 10^\circ & 10^\circ & 10^\circ & 13^\circ & 13^\circ & 13^\circ \\ 42^\circ & 45^\circ & 48^\circ & 42^\circ & 45^\circ & 48^\circ & 42^\circ & 45^\circ & 48^\circ \end{bmatrix}^T, \quad (6.11)$$

já considerando o distanciamento arbitrário.

Considere-se que a M -upla selecionada seja $C_s = [10^\circ \ 45^\circ]$. Inicia-se, então, a próxima iteração com $D = 1,5^\circ$. A matriz contendo os novos ângulos candidatos é igual a:

$$\mathbf{C}_{\Omega_{FI}} = \begin{bmatrix} 8,5^\circ & 8,5^\circ & 8,5^\circ & 10^\circ & 10^\circ & 10^\circ & 11,5^\circ & 11,5^\circ & 11,5^\circ \\ 43,5^\circ & 45^\circ & 46,5^\circ & 43,5^\circ & 45^\circ & 46,5^\circ & 43,5^\circ & 45^\circ & 46,5^\circ \end{bmatrix}^T. \quad (6.12)$$

Este procedimento prossegue até que se chegue ao número máximo especificado para as iterações que é, tipicamente, 5.

6.4 Critério Diferencial melhorado

Com a nova etapa de seleção de estimativas DOA, a resolução do estimador se tornou menos dependente da resolução do Critério Diferencial. Com isto, propõe-se neste trabalho maior flexibilidade, no sentido de diminuir esta resolução, com a conseqüente diminuição do tempo de execução desta etapa. Isto se faz com o pretexto de que o resultado do Critério Diferencial é utilizado apenas como uma estimativa que é refinada no processo de seleção, não implicando numa perda significativa da resolução do estimador.

Utilizando resolução de 1° , como na versão anterior do método SEAD, totalizam-se 181 operações de Decomposição em Valores Singulares (SVD). Na sua versão aprimorada, propõe-se a adoção da resolução de 5° , resultando em 37 operações de SVD.

Esta proposta teve pequeno impacto no desempenho do estimador, como pode ser visto na Figura 6.5, que mostra a média da REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) e do tempo gasto utilizando a varredura de 1° a 5° , em passos unitários. Foram realizados 1000 experimentos independentes para cada valor de SNR, variando -15 dB a 10 dB. Simulou-se arranjo formado por 10 sensores, tomando-se 100 *snapshots*, para fontes em ângulos próximos, $10,5^\circ$ e $15,5^\circ$, e sinais correlacionados.

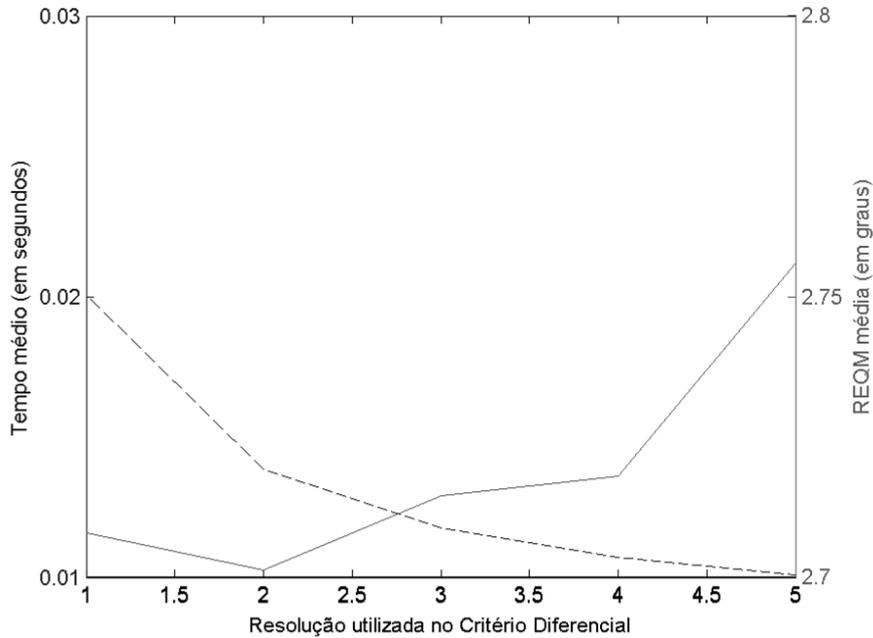


Figura 6.5: REQM média (linha sólida) e tempo médio de experimento (linha tracejada), utilizando o Critério Diferencial com o passo de resolução variando de 1° a 5°.

A Figura 6.5 mostra que, variando-se o passo de resolução do critério diferencial de 1° a 5°, o tempo de estimação de duas fontes caiu pela metade, enquanto que a REQM média teve uma variação centesimal. Apesar de simples, esta proposta permite uma mudança de paradigma, em que se admitem estimativas iniciais grosseiras para as posições dos picos no Critério Diferencial, as quais são aprimoradas iterativamente na etapa de seleção de estimativas.

6.5 Complexidade computacional

A versão aprimorada do método SEAD, utilizando o novo método de seleção de ângulos, possui o limite superior para a complexidade computacional da ordem:

$$L_{SA} = O\left(\frac{T_{CD}}{R_{CD}} N^3 + IE^M MN^2\right), \quad (6.13)$$

dado em FLOPS. T_{CD} é o tamanho do intervalo de varredura do Critério Diferencial, R_{CD} o passo utilizado nesta varredura. N^3 refere-se à complexidade computacional para calcular a SVD da matriz de covariância espacial. I é o número de iterações a serem realizadas no processo de seleção de estimativas DOA e E se refere à quantidade de ângulos candidatos extras gerados para cada fonte a ser estimada. MN^2 refere-se à complexidade computacional para calcular a função custo (5.6).

6.6 Considerações finais

Com as mudanças propostas neste trabalho, resolve-se o problema do ótimo desempenho de estimação do método SEAD aliado a uma complexidade computacional muito alta.

A maior parte da redução da complexidade computacional percebida na versão aprimorada do SEAD se deu na utilização de um método de seleção de estimativas DOA muito mais eficiente que a busca multidimensional utilizada na versão anterior. Este novo método de busca divide o problema de seleção de ângulos em problemas menores, direcionando a busca para os ângulos candidatos que obtiverem maior projeção ortogonal e apresentando rápida convergência, realizando uma quantidade de combinações significativamente menor.

Também foi possível reduzir ainda mais a complexidade computacional devido à diminuição da quantidade de operações de SVD na etapa do Critério Diferencial. O método de seleção proposto diminuiu a dependência da resolução do estimador em relação à resolução utilizada no critério diferencial. Isto foi possível com o uso de resolução crescente em cada iteração e pode ser vista como uma proposta para a parte de delimitação do algoritmo *branch-and-bound*, inserido no contexto de estimação DOA baseada em varredura, que é o caso do método SEAD.

A rápida convergência do método de seleção aqui proposto possui permitido o uso desta abordagem de resolução crescente, ocasionando numa baixa variância do estimador em valores altos de SNR, o que não ocorria no caso do método SEAD utilizando a seleção de ângulos sem refinamento.

Os gráficos de desempenho no Capítulo 7 mostram que o desempenho de estimação da versão aprimorada do SEAD está bastante próximo do desempenho da versão original, entretanto, com complexidade computacional significativamente menor, que o torna competitivo com o MODEX.

7 *Análise e resultados de desempenho de estimação e complexidade computacional*

7.1 **Introdução**

Neste capítulo, é realizada a análise da complexidade computacional e dos resultados de desempenho do método MODEX (*MODE with eXtra roots*) e das duas versões do método SEAD (*SEArch of Direction by differential spectrum*).

Além disso, uma breve descrição da complexidade computacional do cálculo da Decomposição em Valores Singulares (SVD) é abordada neste capítulo.

7.2 **Análise da complexidade computacional do método SEAD**

O limite superior para a complexidade computacional das versões anterior e aprimorada do método SEAD foi obtido através da medição do tempo de execução de trechos do programa.

Para tanto, todas as variáveis, com exceção de uma, foram mantidas inalteradas, de forma a avaliar o impacto da mudança desta única variável no tempo de execução dos métodos citados.

As variáveis avaliadas neste processo foram as seguintes:

- Número de sensores do arranjo, N ;
- Número de fontes, M ;
- Número de *snapshots*, K ;
- Passo utilizado na varredura do Critério Diferencial, R ;
- Relação sinal-ruído, para a versão anterior do SEAD;

- Número de iterações utilizadas na fase de seleção iterativa da etapa de seleção de estimativas da versão aprimorada do SEAD, I ;
- Quantidade de ângulos candidatos extras gerados na fase de seleção iterativa da etapa de seleção de estimativas da versão aprimorada do SEAD, E ;

Ao se determinar o limite superior da complexidade computacional das versões anterior e aprimorada do SEAD, estas foram divididas em: etapa do Critério Diferencial e etapa de seleção de estimativas de ângulos de incidência (DOA).

7.2.1 Medida de complexidade computacional

A medida de complexidade computacional adotada neste trabalho é a notação- O ⁵. A notação- O , denotada por $f(n) = O(g(n))$, onde $g(n)$ é uma função qualquer, descreve o limite superior assintótico da complexidade computacional para determinado algoritmo, que possui complexidade computacional de ordem $g(n)$ (GURARI, 1989; CORMEN, LEISERSON, RIVEST *et al.*, 2001).

A definição de $O(g(n))$ requer que cada elemento de $O(g(n))$ seja assintoticamente não-negativo, ou seja, $f(n)$ deve ser não-negativo para qualquer valor de n , quando este é suficientemente grande. Conseqüentemente, a função $g(n)$ também deve ser assintoticamente não-negativa, ou o conjunto $O(g(n))$ é negativo. Desta forma, deve-se assumir que toda função dentro da notação- O seja assintoticamente não-negativa (CORMEN, LEISERSON, RIVEST *et al.*, 2001).

7.2.2 Critério Diferencial

A avaliação de complexidade computacional do Critério Diferencial realizada nesta seção se aplica às duas versões do SEAD.

Recapitulando o escrito nos capítulos 5 e 6, a primeira parcela das equações de complexidade computacional das duas versões do SEAD refere-se ao Critério Diferencial. Isolando-a, obtém-se:

⁵ Do inglês *O notation*. Também é conhecida como *Big-Oh*.

$$L_{CD} = O\left(\frac{T_1}{R_1} N^3\right). \quad (7.1)$$

Utilizando a varredura de -90° a 90° , tem-se que:

$$\begin{aligned} T_1 &= |-90^\circ \text{ a } 90^\circ| \\ &= 181. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Com o passo $R_1 = 1^\circ$, utilizado na versão anterior do SEAD, resulta em $(181/1) = 181$ operações de Decomposição em Valores Singulares (SVD) da matriz de covariância espacial, cuja complexidade computacional é representada em (7.1) por N^3 .

Segundo (TEŠIĆ, 1999), a SVD de uma matriz de dimensões $m \times n$ possui a complexidade computacional da ordem:

$$L_{SVD} = O(mn^2). \quad (7.3)$$

No contexto da estimação DOA, a matriz de covariância espacial possui ordem $N \times N$, ou seja, a complexidade da SVD sempre é igual a $O(N^3)$.

Na versão aprimorada do SEAD, foi proposta a flexibilização da resolução utilizada no Critério Diferencial. Em todas as simulações de desempenho realizadas neste trabalho, utilizam-se passos de 5° . Desta forma, o número de SVDs a serem realizadas no Critério Diferencial cai de 181 para 37.

7.2.3 Etapa de seleção de estimativas da versão anterior do SEAD

A etapa de seleção de estimativas da versão anterior do método SEAD, representada pela segunda parcela de (5.8), cria regiões em torno dos picos e são delimitadas pela estimativa da potência de ruído, $\hat{\sigma}$.

Estas regiões possuem ângulos candidatos, tipicamente a cada $0,1^\circ$, que, por sua vez, são combinados, M a M , com os ângulos candidatos de regiões distintas.

Como é um método de força-bruta e, para não aumentar excessivamente a complexidade computacional, $\hat{\sigma}$ foi limitado em 3, ou seja, os valores possíveis para $\hat{\sigma}$ são 1, 2 e 3.

Desta forma, para valores pequenos de Relação Sinal-Ruído (SNR), como -15 dB, tem-se que $\hat{\sigma} = 3$, totalizando em $1 + 2 \times (3/0,1) = 61$ projeções ortogonais para cada fonte.

Portanto, para $M = 3$ e que cada fonte esteja suficientemente afastada uma da outra, tem-se que $61^3 = 226.981$ projeções ortogonais.

O melhor caso ocorre em valores grandes de SNR, como 10 dB, e resultando em $\hat{\sigma} = 1$ e $1 + 2 \times (1/0,1) = 21$ projeções ortogonais para cada fonte. Utilizando o mesmo caso anterior $M = 3$ e que cada fonte esteja suficientemente afastada uma da outra, tem-se que $21^3 = 9.261$ projeções ortogonais.

7.2.4 Etapa de seleção de estimativas da versão aprimorada do SEAD

A etapa de seleção de estimativas DOA proposta neste trabalho, representada na segunda parcela de (6.13), em vez de criar regiões com ângulos candidatos com uma maior resolução, cria três ângulos candidatos, sendo, tipicamente, um 3° à esquerda e outro 3° à direita, para cada ângulo candidato já existente.

Então, o novo conjunto de ângulos candidatos é combinado M a M e a quantidade de projeções ortogonais a serem calculadas é bastante reduzida, conforme mostra a tabela abaixo:

Tabela 7.1: Quantidade de projeções ortogonais em função do número de fontes e de candidatos por fonte.

Fontes a serem Estimadas	Candidatos por fonte	Projeções ortogonais por iteração
2	1	1
2	2	4
2	3	9
2	4	16
2	5	25
3	1	1
3	2	8
3	3	27
3	4	64
3	5	125
4	1	1
4	2	16
4	3	81
4	4	256
4	5	625

Nas simulações realizadas neste trabalho, utilizam-se três candidatos por fonte. Comparando com a situação descrita na seção anterior tem-se que, para $M = 3$, a quantidade de projeções ortogonais a serem calculadas é de 27 a cada iteração. Tipicamente, o número de iterações utilizado é 5, ou seja, serão necessárias 135 projeções ortogonais na fase iterativa da etapa de seleção de estimativas.

Considerando valor grande de SNR, há, ainda, uma projeção ortogonal calculada na fase pré-seletiva da etapa de seleção de estimativas.

Desta forma, em condições semelhantes, a versão anterior do SEAD necessitou de 9.261 projeções ortogonais, contra 136 da versão aprimorada, uma redução de 68 vezes.

7.3 Resultados de simulação

Os resultados foram divididos em duas subseções: a primeira trata do desempenho de estimação e a segunda trata da complexidade computacional.

7.3.1 Desempenho de estimação

Os casos a serem simulados envolvem um arranjo linear uniforme composto por dez sensores omnidirecionais, cujo espaçamento é de metade do comprimento de onda, e tomando-se 100 *snapshots*. Duas fontes emitem sinais de banda estreita com a mesma potência de sinal que atingem o arranjo, com ângulos de incidência próximos (GERSHMAN e STOICA, 1999), $10,5^\circ$ e $15,5^\circ$, ou afastados entre si, $10,5^\circ$ e $45,5^\circ$.

O número de raízes extras geradas pelo método MODEX é igual a quatro e o número de iterações utilizado na minimização é três. A SNR varia de -15 dB a 10 dB em passo unitário, com 1000 realizações independentes para cada valor de SNR.

Para a versão anterior do método SEAD, a varredura utilizada no Critério Diferencial é de -90° a 90° , em passo unitário. Na versão aprimorada do método SEAD, a varredura utiliza passos de 5° , o número de iterações do processo de seleção de ângulos é cinco. Para as duas versões do SEAD, o limiar de restrição de amplitude aplicado é 0,3.

O afastamento angular na fase de pré-seleção, no caso do número de picos maiores que o limiar ser menor do que o número de fontes a serem estimadas, foi fixado em 3° , analogamente ao que ocorre na versão anterior do SEAD.

Na fase iterativa da etapa de seleção angular, também foi arbitrado o afastamento inicial de 3° .

O modelo de sinal utilizado é o incondicional, apresentado no Capítulo 2, com fontes utilizando sinais totalmente decorrelacionados ou totalmente correlacionados.

Cada ponto da curva de desempenho é calculado como a média dos dois valores das REQM das estimativas, dada em graus, como mostrado na Equação (2.28). Quanto menores estes valores, menor a variância do erro das estimativas e, portanto, mais próximos dos valores reais dos ângulos de incidência.

As figuras de 7.1 a 7.4 ilustram a evolução da REQM das estimativas, dadas em graus, em função da SNR aplicada. A linha tracejada indica o limite inferior de Cramér-Rao, para análise do desempenho assintótico dos estimadores.

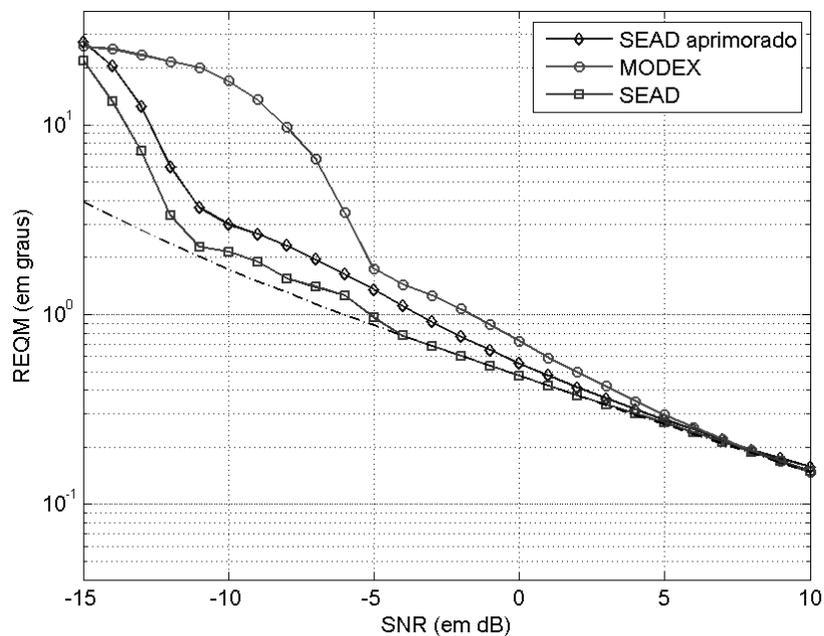


Figura 7.1: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos próximos utilizando sinais correlacionados.

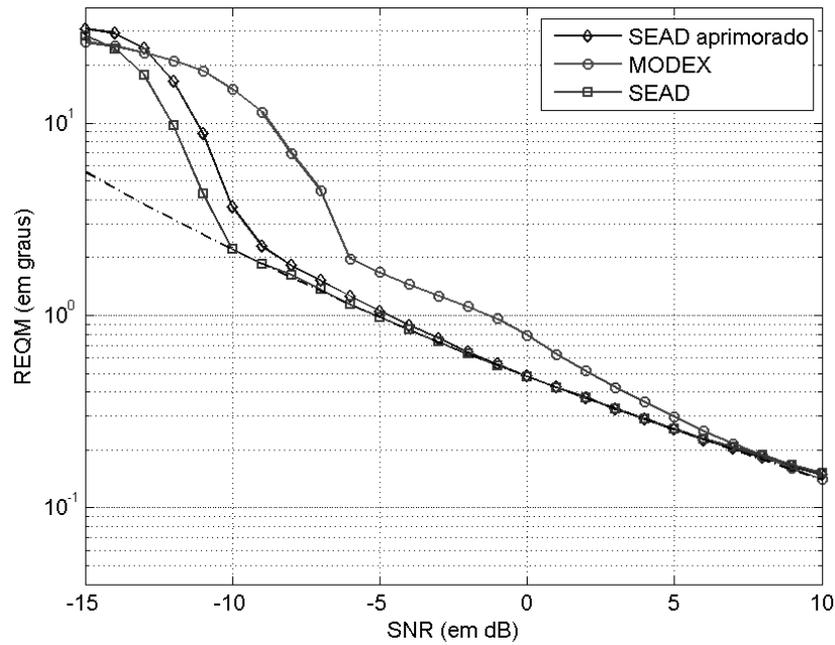


Figura 7.2: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos próximos utilizando sinais descorrelacionados.

No caso de ângulos próximos e sinais correlacionados, Figura 7.1, a SNR de limiar foi igual a -12 dB, para a versão anterior do método SEAD, -11 dB para a versão aprimorada do método SEAD e -5 dB para o método MODEX. Utilizando sinais descorrelacionados, Figura 7.2, as SNRs de limiar foram de -10 dB, -9 dB e -6 dB, respectivamente.

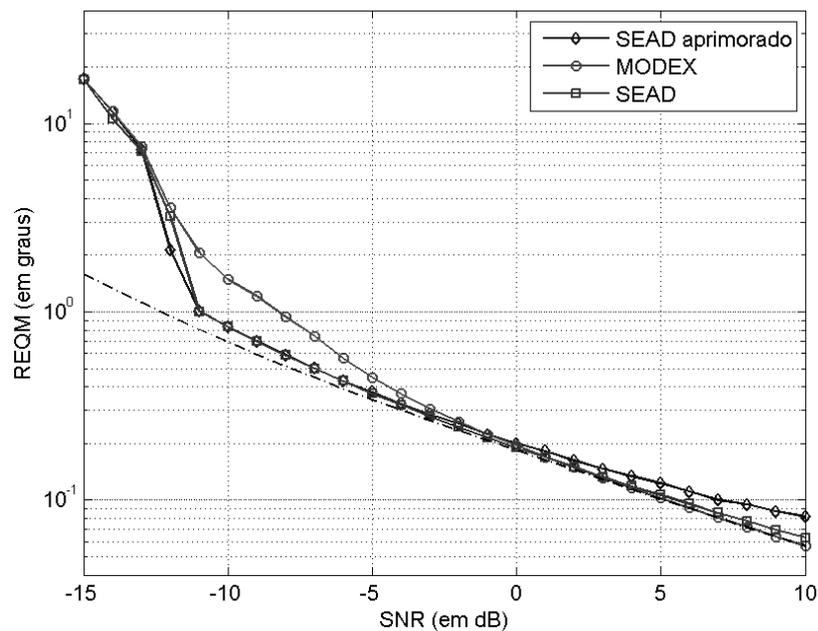


Figura 7.3: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos afastados utilizando sinais correlacionados.

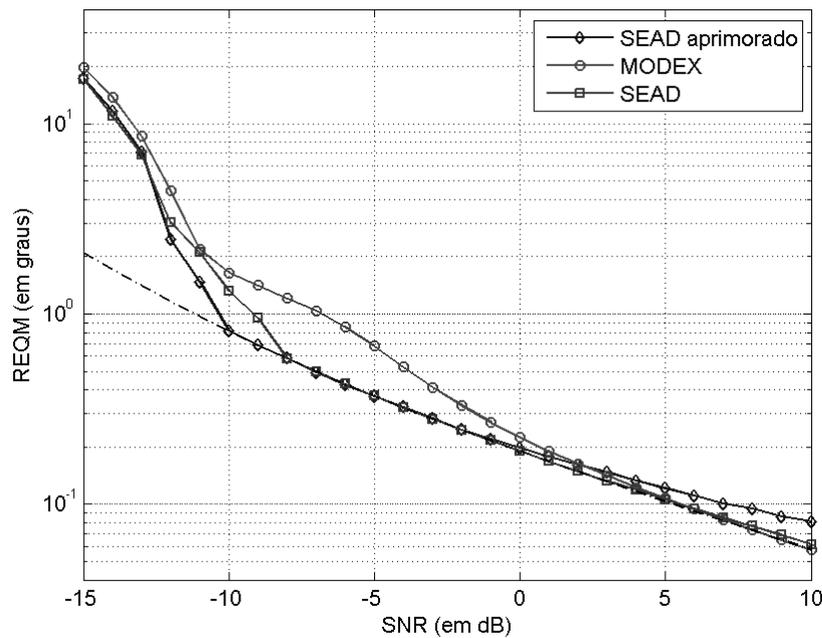


Figura 7.4: Raiz do erro quadrático médio dos estimadores para a situação de ângulos afastados utilizando sinais descorrelacionados.

Para ângulos afastados e sinais correlacionados, Figura 7.3, a SNR de limiar foi igual a -11 dB para as versões aprimorada e anterior do método SEAD e -5 dB para o método MODEX. No caso de sinais descorrelacionados, Figura 7.4, as curvas de desempenho acompanharam o Limite de Cramér-Rao até -10 dB, -8 dB e -3 dB, respectivamente.

Nota-se uma diferença de desempenho entre as versões anterior e aprimorada do método SEAD, porém, as SNRs de limiar se mantiveram próximas para os dois estimadores, mantendo, portanto, um desempenho competitivo com o do método MODEX.

7.4 Complexidade computacional

A complexidade computacional destes estimadores é aspecto de grande importância, por servirem aplicações que, na maioria das vezes, são de tempo-real.

Em todas as simulações, foi utilizado o software Mathworks Matlab, versão R2007b, executando sobre uma plataforma Intel P35, com o processador Intel Core2 Duo E6550, 4 GB de memória RAM (Memória de Acesso Aleatório) padrão DDR2-667 com canal duplo e sistema operacional Microsoft Windows Vista x64.

Ao considerar a média do tempo de execução, a versão aprimorada do método SEAD foi entre 19 e 29 vezes mais rápida do que sua versão anterior. Contudo, esta diferença pode chegar a 40 vezes para o caso de SNR pequena e, para SNRs grandes, a diferença fica em

torno de seis vezes, que se dá devido à variação da largura da região de busca com refinamento em função da SNR na versão anterior do método SEAD. É importante ressaltar que tanto a versão aprimorada do método SEAD quanto o método MODEX possuem tempos de estimação constantes em função da SNR aplicada. Para comparação, é mostrado o tempo de estimação dos métodos estudados, onde se observa diferença marginal entre a versão aprimorada do método SEAD e o método MODEX, conforme é mostrado na Tabela 7.2.

Tabela 7.2: Tempo médio de execução de 1000 experimentos.

Ângulos/sinais	SEAD aprim.	SEAD	MODEX
Próximos e descorrelacionados	10,21 s	232,80 s	11,39 s
Próximos e correlacionados	10,24 s	197,19 s	10,84 s
Afastados e descorrelacionados	10,31 s	303,71 s	11,40 s
Afastados e correlacionados	10,28 s	210,88 s	10,85 s

Armazenando-se o tempo de execução dos 26 mil experimentos realizados em cada uma das combinações de distanciamento de ângulos (próximos e afastados) e grau de correlação (correlacionados e descorrelacionados), realizou-se o teste de Wilcoxon⁶. Para o nível de significância de 5%, a hipótese nula (H_0) de mesma mediana nas distribuições dos tempos médios de execução do SEAD aprimorado e do MODEX foi rejeitada com probabilidade de falhar igual a zero em todos os casos. Como os tempos médios do SEAD foram inferiores aos do MODEX em todos os casos da Tabela 7.2 e, como as probabilidades de falhar foram inferiores a 1%, pode-se afirmar que, em média, o tempo de execução do SEAD é inferior ao do MODEX com alto grau de significância estatística.

Outro aspecto de elevada importância é a evolução do tempo gasto na estimação DOA em função da quantidade de ângulos de incidência a serem estimados.

Para determinar a curva do tempo gasto pelas simulações, foi utilizado um arranjo que possui as mesmas características do utilizado nas simulações de desempenho, com a SNR fixada em 10 dB e com o número de ângulos de incidência variando entre dois e cinco, em passo unitário, com espaçamento de 15° entre elas, utilizando sinais descorrelacionados. Adotou-se este valor de SNR para reduzir o impacto do ruído sobre o tempo de execução.

⁶ Segundo (GIBBONS, 1985) o teste de Wilcoxon é um teste de hipótese nula de que os dados amostrais vêm de uma distribuição com mediana nula, simétrica e contínua, contra a alternativa de que a distribuição não possui mediana nula.

Foram realizadas duas execuções consecutivas de 500 experimentos para cada cardinalidade de fontes e para cada estimador, cujos tempos de execução foram obtidos. Entretanto, a medição do tempo gasto pela primeira execução foi descartada, pois parte dela foi considerada um período de aquecimento⁷, de modo a evitar a ocorrência de *outliers*⁸, em decorrência do programa não estar na memória *cache*⁹ do processador.

A Figura 7.5 ilustra a evolução do tempo gasto de execução, dado em segundos, variando em função do número de fontes a serem estimadas.

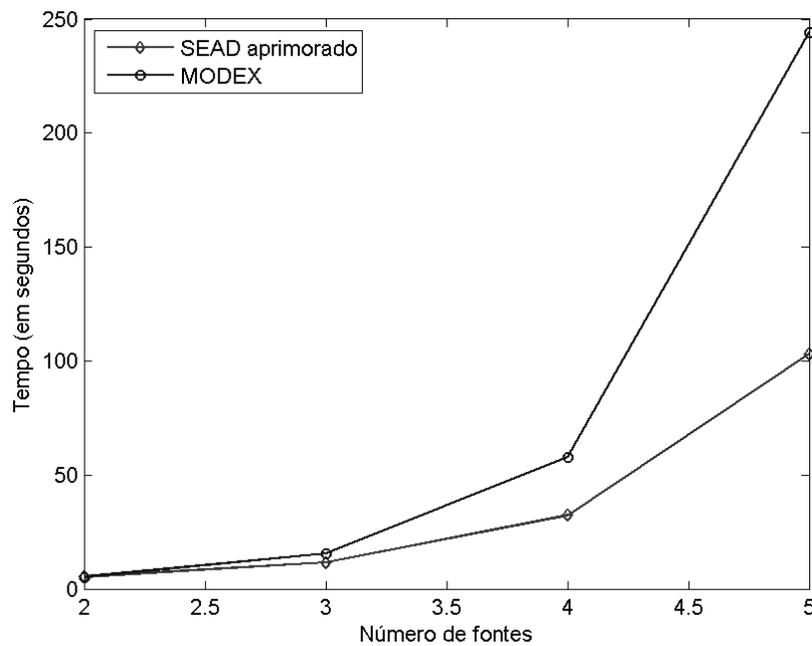


Figura 7.5: Tempo gasto para realizar 500 simulações para estimar a posição de 2, 3, 4 e 5 fontes.

Na Figura 7.5 nota-se que, em todas as medições, o tempo de execução da versão aprimorada do método SEAD foi menor do que o do método MODEX. Um ponto importante a ser ressaltado é que, com cinco fontes, o tempo de estimação da versão aprimorada do método

⁷ Período de aquecimento ou *warm-up* é, segundo (MAHAJAN e INGALLS, 2004), um período da execução de uma simulação que apresenta resultados inconsistentes (*initialization bias*). Conforme (HOAD, ROBINSON e DAVIES, 2008), a análise destes resultados pode ser equivocada e tendenciosa, diminuindo a acurácia das estimativas de medida de desempenho. Desta forma, os resultados referentes ao período de aquecimento devem ser descartados.

⁸ *Outliers* são definidos em (BARNETT e LEWIS, 1994) como sendo observações de um conjunto de dados que parecem ser inconsistentes com o restante desse mesmo conjunto de dados.

⁹ Memória *cache* é uma memória de pouca capacidade e alta velocidade que se situa entre a memória principal e o processador e se baseia no princípio da localidade, dando a impressão de que existe uma memória muito grande que pode ser acessada tão rápido quanto uma memória pequena. O princípio da localidade diz que um determinado programa não acessa todos os seus itens (código ou dados) o tempo todo, com igual probabilidade. Como o programa faz referência a um determinado conjunto de itens num curto espaço de tempo, permite que estes itens se situem em memória cache, tornando os acessos subsequentes mais rápidos (HENNESSY e PATTERSON, 1998).

SEAD equivale a aproximadamente 40% do tempo de estimação do método MODEX: 103 s contra 244 s.

A Figura 7.6 ilustra a evolução da equação de complexidade computacional para o pior caso, dada em FLOPS, para a versão aprimorada do método SEAD, descrita no Capítulo 6, e do método MODEX, variando em função do número de fontes a serem estimadas.

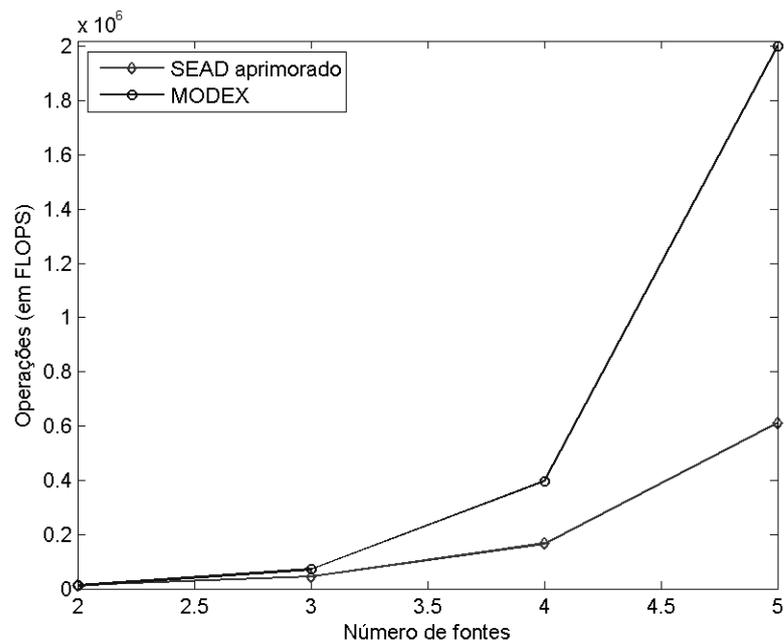


Figura 7.6: Quantidade de operações necessárias para estimar a posição de 2, 3, 4 e 5 fontes.

Analisando as figuras 7.5 e 7.6, notam-se semelhanças na evolução das curvas de tempo de execução e de operações de ponto-flutuante.

7.5 Considerações finais

Os resultados apresentados neste capítulo mostram que o novo processo de seleção de estimativas implementado no método SEAD foi responsável pela significativa queda no tempo de estimação, associada a complexidade computacional menor do que a do método MODEX.

Ainda assim, o método SEAD apresenta desempenho de estimação bastante robusto, o que o torna bastante competitivo com o método MODEX.

8 *Conclusões*

8.1 **Introdução**

A estimação de ângulos de incidência (DOA) é um campo que encontra várias aplicações em diversas áreas da tecnologia. Algumas delas exigem métodos de estimação que possuem alta resolução, ou seja, capazes de distinguir ângulos de incidência próximos entre si com pouca informação disponível, em pequenas SNRs e na presença de correlação entre os sinais, que dificulta ainda mais esta tarefa.

Diante desta perspectiva, o Estimador de Máxima-Verossimilhança (MLE) possui desempenho de estimação excelente. Contudo, sua complexidade computacional é proibitiva, limitando seu uso em aplicações de tempo real. Para superar este obstáculo, foram derivados do MLE métodos como o MODEX (*MODE with eXtra roots*).

Não obstante, o método MODEX ainda possui complexidade computacional de ordem combinatória, onde o tempo de estimação cresce rapidamente em função da quantidade de fontes.

O método SEAD (*SEArch of Direction by differential spectrum*), por sua vez, apresenta complexidade computacional elevada, o que limita o seu uso em aplicações de tempo-real. O objetivo deste trabalho foi diminuir esta complexidade computacional, de forma a torná-lo viável e competitivo com outros métodos.

Neste trabalho, é apresentada a versão aprimorada do SEAD, que possui um algoritmo cuja complexidade computacional é significativamente menor, mantendo seu desempenho de estimação próximo ao da versão original. Outra característica, esta versão aprimorada apresenta crescimento menor da curva tempo de execução em função do número de ângulos de incidência a serem estimados, enquanto gera estimativas de menor variância, se comparada ao método MODEX.

8.2 Conclusões sobre o novo método apresentado

Nos resultados de desempenho de estimação apresentados no Capítulo 7, pôde-se verificar que os aprimoramentos propostos ao método SEAD produziram valores de Relação Sinal-Ruído (SNR) de limiar bem próximos daqueles encontrados em (FERREIRA, 2005). As variâncias dos erros de estimação apresentadas pela nova proposta mostraram-se marginalmente maiores àquelas da versão anterior do SEAD. Entretanto, isto é largamente compensada pela significativa redução do tempo de estimação proporcionada pelas propostas deste trabalho.

Constatou-se ainda, nos casos simulados, que o desempenho de estimação e os valores de SNR de limiar e de tempo de estimação obtidos com os aprimoramentos propostos foram superiores em comparação com o método MODEX, tornando-o bastante competitivo.

Os resultados da simulação mostraram, também, que a nova proposta possui desempenho convergente em relação ao Limite de Cramér-Rao, enquanto a SNR aumenta. No caso de fontes afastadas, esta convergência foi limitada pela quantidade de iterações.

Também, pôde-se inferir que o Critério Diferencial apresenta resolução crescente com o número de sensores do arranjo, com desempenho assintoticamente eficiente em função deste parâmetro.

8.3 Sugestões para prosseguimento do trabalho

Um estudo acerca da relação entre o tamanho do arranjo, a resolução do Critério Diferencial é proposto e altamente recomendado, com o objetivo de gerar estimativas com menor variância.

Ainda há espaço para uma redução ainda maior da complexidade computacional e aumento da qualidade das estimativas do SEAD, ao se adotar a abordagem adaptativa na definição do limiar de restrição de amplitude, do distanciamento utilizado na fase iterativa da etapa de seleção de estimativas e da quantidade de iterações a serem realizadas.

A determinação do valor de limiar de restrição de amplitude é de elevada importância e deve ser feita com critério, já que pode levar o SEAD apresentar comportamento errático durante a estimação dos ângulos de incidência. Isto reforça a premissa de que o uso de um valor arbitrário e estático não é interessante, uma vez que os sinais e o ruído branco são variáveis aleatórias e independentes, produzindo situações adversas. Desta forma, o uso do limiar

de restrição adaptativo pode diminuir ainda mais a SNR de limiar, sem apresentar aumento do comportamento errático do estimador.

O distanciamento dos ângulos candidatos extras na fase iterativa da etapa de seleção de estimativas também carece de uma abordagem adaptativa, já que o uso de valores pequenos, como 3° , favorece o desempenho do SEAD para valores de SNR grandes e fontes próximas, permitindo que a REQM (Raiz do Erro Quadrático Médio) alcance o Limite de Cramér-Rao (CRB). Para ângulos afastados e valores grandes de SNR, esta convergência é limitada e mais iterações são necessárias, aumentando o tempo de estimação.

Propõe-se o uso de distanciamento adaptativo na fase iterativa da etapa seleção de estimativas, permitindo diminuir a variância do erro das estimativas, deixando-as mais próximas do CRB.

Além disso, propõe-se a implementação adaptativa da fase de seleção iterativa, no que tange na eliminação contínua de ângulos candidatos à medida que as iterações ocorrem, com perspectivas de diminuir o tempo de estimação, como descrito a seguir:

- Caso a variação entre um ângulo candidato selecionado na iteração atual e seu correspondente da iteração anterior for menor do que um valor de tolerância pré-definido, elimine-o da seleção de estimativas e continue a seleção utilizando apenas os ângulos candidatos restantes. No caso de não houver nenhuma eliminação, considere um valor máximo de iterações a serem realizadas.

Utilizando a Tabela 7.1 como referência, esta proposta pode diminuir a quantidade de projeções ortogonais à mesma razão da quantidade de candidatos por fonte, por exemplo: três ângulos candidatos e três candidatos por fonte implicam em 27 projeções ortogonais. Caso seja eliminado um ângulo candidato, a quantidade de projeções ortogonais a ser realizada cai para 9.

Referências bibliográficas

ALVES, C. A. *Análise Teórica e Experimental de Métodos de Estimação de DOA e de Estimação de Freqüências com Alta Resolução*. 2004. 129 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

ANTUNES, E. J. B. *Detecção de Freqüências através de Predição Linear*. 1992. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BALANIS, C. A. *Antenna Theory – Analysis and Design*. 2 ed. New York: Wiley-Interscience, 1997.

BARABELL, A. J. *Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms*. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing '83, v. 8, p. 336-339, abr. 1983.

BARNETT, V.; LEWIS, T. *Outliers in statistical data*. 3. ed. West Sussex: John Wiley and Sons Ltd., 1994.

BOAVENTURA, A. M. S. *Avaliação de Métodos de Estimação da Direção de Chegada de Sinais em Sistemas de Comunicações Celulares*. 1998. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

BRESLER, Y.; MACOVSKI, A. *Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise*, IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, v. 34, p. 1081–1089, out. 1986.

COLARES, R. F.; ALVES, C. A.; LOPES, A. *Proposta para Aplicação do Metodo WTLS em DOA*. In: XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBT 2000, Gramado – RS – Brasil, CD-ROM, set. 2000.

- CARVALHO, M. H.; CERIOLI, M. R.; DAHAB, R. *et al.* *Uma Introdução Sucinta a Algoritmos de Aproximação*. Universidade de São Paulo: 2001. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/dcc/livros/aprox>>. Acesso em 05/01/2009.
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L. *et al.* *Introduction to Algorithms*. 2 ed. Boston: MIT Press, 2001.
- ESPEJO, L. G. A.; GALVÃO, R. D. *O uso das relaxações Lagrangeana e surrogate em problemas de programação inteira*, Pesquisa Operacional, v. 22, n. 3, p. 387-402, jul. 2002.
- FERGUSON, T. S. *Linear Programming – A Concise Introduction*. University of California at Los Angeles: 2008. Disponível em <<http://www.math.ucla.edu/~tom>>. Acesso em 12/01/2009.
- FERREIRA, Y. R. *Método de Estimação de Ângulos DOA*. 2005. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado em Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2005.
- GERSHMAN, A.; STOICA, P. *New MODE-based techniques for direction finding with an improved threshold performance*, Signal Processing, v. 76, p. 221-235, ago. 1999.
- GIBBONS, J. D. *Nonparametric Statistical Inference*. 2 ed. New York: M. Dekker, 1985.
- GODARA, L. C. *Applications of antenna arrays to mobile communications, part II: Performance improvement, feasibility and systems considerations*. Proceedings of the IEEE, v. 85, n. 7, p. 1031–1060, jul. 1997.
- GURARI, E. *An introduction to the Theory of Computation*. New York: Computer Science Press, 1989.
- HENNESSY, J.; PATTERSON, D. *Computer Organization and Design: The hardware/software interface*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1998.
- HOAD, Kathryn; ROBINSON, Stewart; DAVIES, Ruth. *Automating warm-up length estimation*. Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference, p. 532-540, dez. 2008.
- KAVEH, M.; WANG, H.; HUNG, H. *On the theoretical performance of a class of estimators of narrow-band sources*. IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, v. 35, n. 9, p. 1350–1352, set. 1987.
- KAY, S. M. *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988.
- KAY, S. M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1993.

- KNOCKAERT, L.; DE BACKER, B.; DE ZUTTER, D. *SVD Compression, Unitary Transforms and Computational Complexity*, IEEE Transactions on Signal Processing, v. 47, n. 10, p. 2724-2729, out. 1999.
- KORTE, B.; VYGEN, J. *Combinatorial Optimization – Theory and Algorithms*. 4 ed. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- KRIM, H.; VIBERG, M. *Two Decades of Array Signal Processing*. IEEE Signal Processing Magazine, v. 13, n. 4, p. 67-94, jul. 1996.
- KUMARESAN, R.; SCHARF, L. L.; SHAW, A. K. *An Algorithm for Pole-Zero Modeling and Spectral Analysis*, IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, v. 34, n. 3, p. 637-640, jun. 1986.
- LEMOS, R. P. *Métodos de Alta Resolução com restrição de Subespaço para Detecção de Frequências*. 1995. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.
- LEMOS, R. P. *Mínimos Quadrados Totais e Máxima Verossimilhança em Estimação de Frequências*. 1997. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.
- LIBERTI, J. C.; RAPPAPORT, T. S. *Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1999.
- LI, J.; STOICA, P.; LIU, Z. *Comparative study of IQML and MODE direction-of-arrival estimators*. IEEE Transactions on Signal Processing, v. 46, n. 1, p. 149–160, jan. 1998.
- LUCENA, A.; BEASLEY, J. E. *Branch and cut algorithms*. Networks, v. 31, n. 1, p. 39-59, dez. 1998.
- MAHAJAN, P. S.; INGALLS, R. G. *Evaluation of methods used to detect warm-up period in steady state simulation*. Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference, p. 663-671, dez. 2004.
- MAKAROV, S. N. *Antenna and EM Modeling with Matlab*. New York: Wiley-Interscience, 2002.
- MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 2000.
- MITCHELL, John E. *Integer Programming: Branch-and-cut algorithms*. Encyclopedia of Optimization, v. 2, p. 519-525, ago. 2001.
- MITCHELL, J. E. *Branch-and-Cut Algorithms for Combinatorial Optimization Problems*. Handbook of Applied Optimization. New York: Oxford University Press, 2002.

- OTTERSTEN, B. E. *Parametric Subspace Fitting Methods for Array Signal Processing*. 1989. Tese (Doutorado) – Stanford University, Palo Alto, 1989.
- SCHMIDT, R. O. *Multiple emitter location and signal parameter estimation*. RADC Spectrum Estimation Workshop, 1979. p. 243-258.
- SILVA, F. J. *Uso de Filtragem em Métodos de Estimação de DOA Através de arranjo de Sensores*. 2007. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.
- SIPSER, M. *Introduction to the Theory of Computation*. Boston: PWS Publishing Company, 1997.
- STOICA, P.; NEHORAI, A. *MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramér-Rao Bound*. IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, v. 37, n. 5, p. 720-741, mai. 1989.
- STOICA, P.; NEHORAI, A. *Performance Study of Conditional and Unconditional Direction-of-Arrival Estimation*, IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, v. 38, n. 10, p. 1783–1795, out. 1990.
- STOICA, P.; SHARMAN, K. *Novel Eigenanalysis Method for Direction Estimation*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, v. 137, p. 19-26, fev. 1990.
- TEŠIĆ, J. *Evaluating a Class of Dimensionality Reduction Algorithms*. University of California at Santa Barbara: 1999. Disponível em: <<http://vision.ece.ucsb.edu/~jelena/research>>. Acesso em 28/01/2009.
- VAN TREES, H. L. *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part IV: Optimum Array Processing*. New York: Wiley-Interscience, 2002.
- VANDERBEI, R. J. *Linear Programming – Foundations and Extensions*. 3 ed. New York: Springer, 2008.
- WAX, M.; KAILATH, T. *Determining the number of sources by information methods*. IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, p. 387-392, abr. 1985.
- ZOOGHBY, A. E. *Smart Antenna Engineering*. Norwood: Artech House, 2005.