UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LAENA FURTADO BORGES

Sobre Rigidez de Métricas quasi-Einstein

Goiânia
2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: [X] **Dissertação** [ ] **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Joana Furtado Borges

Título do trabalho: Sobre Rigidez de Métricas quasi-Einstein

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Joana Furtado Borges
Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 17 / 03 / 17

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

LAENA FURTADO BORGES

Sobre Rigidez de Métricas quasi-Einstein

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Mauricio Donizetti Pieterzack

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Borges, Laena Furtado
Sobre Rigidez de Métricas quasi-Einstein [manuscrito] / Laena Furtado Borges. - 2017.
83 f.

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia.

1. Métricas quasi-Einstein. 2. Produto torcido. 3. Rigidez. 4. Métricas Kähler. I. Pieterzack, Mauricio Donizetti, orient. II. Título.

CDU 514.77

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE LAENA FURTADO BORGES – Aos três dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (03/03/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Mauricio Donizetti Pieterzack - Orientador, Prof. Romildo da Silva Pina, e Prof. Carlos Maber Carrión Riveros, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **"Sobre Rigidez de Métricas quasi-Einstein"**, em nível de Mestrado, área de concentração em Geometria, de autoria de Laena Furtado Borges, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Mauricio Donizetti Pieterzack, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida a autora da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu a examinanda, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Geometria, pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack
Presidente - IME/UFG

Romildo da Silva Pina
Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros
Membro – DM/UnB

LAENA FURTADO BORGES

SOBRE RIGIDEZ DE MÉTRICAS QUASI-EINSTEIN

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 03 de março de 2017, pela Banca Examinadora constituida pelos professores:

Prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros
Departamento de Matemática – UnB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Laena Furtado Borges

Bacharela em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

A minha mãe Sandra Furtado.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus pelo dom da vida e por ter sido minha fonte inesgotável de força.

A minha mãe Sandra por ser a grande responsável por tudo que sou. Por sempre confiar em mim e me impulsionar a buscar o melhor para minha vida. Saiba que sou eternamente grata por tudo e tenho uma mãe incrível. Quero agradecer também a minha irmã Lorena por sempre estar ao meu lado.

Ao professor Marcos Antônio, responsável por eu começar a ver toda à beleza da matemática. Saiba que o senhor fez meu terceiro ano um ano incrível.

Ao meu namorado Lucas pela cumplicidade, ajuda e carinho que sempre teve comigo. Obrigada por me apoiar e dar forças para seguir em frente nos momentos mais difíceis.

A meus amigos Alexsandra, Anna Carolina, Chen, Jean, Jhone Caldeira, Maurício , Silvio e Susane por me apoiaram emocionalmente e psicologicamente nesses anos de estudo.

Aos amigos que fiz no mestrado, Andrés, Bruna, Elismar, Gregório, Kariny, Lucas, Mayk, Maria, Nielson e Raquel. Obrigada por todos os momentos juntos, sendo eles de desespero, alegria ou tristeza. Vocês foram uma parte muito linda nesses dois anos.

A meu orientador de mestrado, prof. Dr. Mauricio Donizetti Pieterzack, por me aceitar como orientanda, me ajudar e acreditar em mim. Agradeço por todo o ensinamento que tive nesses dois anos.

Aos professores Aline, Edcarlos, Marcos Leandro, Maxwell e Romildo por todo o ensinamento desses dois anos, saibam que aprendi muito e muitas coisas levarei para a vida toda. Agradeço em especial ao Romildo por todas as conversas, conselhos e apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

"O difícil é o desconhecido."

Romildo da Silva Pina.

Resumo

Borges, Laena Furtado. **Sobre Rigidez de Métricas quasi-Einstein**. Goiânia, 2017. 81p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Nesse trabalho, apresentaremos alguns conceitos de métricas quasi-Einstein. A partir disso, enunciaremos e demonstraremos resultados de rigidez para métricas quasi-Einstein, até que tenhamos material suficiente para a demonstração de um resultado de rigidez para métricas quasi-Einstein em dimensão dois. Por fim, daremos alguns conceitos de métricas kähler, provaremos um teorema e por fim demonstraremos um corolário que conecta o teorema principal do nosso trabalho com as métricas Kähler.

Palavras–chave

Métricas quasi-Einstein, Produto torcido, Rigidez, Métricas Kähler.

Abstract

Borges, Laena Furtado. **On rigidity of quasi-Einstein metrics**. Goiânia, 2017. 81p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we will present some concepts of quasi-Einstein metrics. From this, we will enunciate and demonstrate rigidity results for quasi-Einstein metrics until we have enough material to demonstrate a stiffness result for quasi-Einstein metrics of dimension two. Finally, we will give some concepts of Kähler metrics, prove a theorem and finally demonstrate a corollary that connects the main theorem of our work with Kähler metrics.

Keywords

Quasi-Einstein metrics, Warped product, Rigidity, Kähler metrics.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Preliminares **11**
- 2.1 Variedade Diferenciável 11
- 2.2 Divergente, Gradiente, Laplaciano e Hessiana em Variedades 15
- 2.3 Curvatura, Tensores e Formas diferenciáveis 20
- 2.4 Variedade Produto 27
- 2.5 Variedade Produto Torcido 33
  - 2.5.1 Curvatura do produto torcido 41

3 Métricas quasi-Einstein **48**
- 3.1 Métrica produto torcido Einstein 48
- 3.2 Fórmula e Rigidez para métricas quasi-Einstein 52
- 3.3 Métricas quasi-Einstein bi-dimensional 64

4 Métricas Kähler **71**
- 4.1 Variedades complexas e quase complexas 71
- 4.2 Métricas Hermitianas e Kähler 72
- 4.3 Métricas Kähler quasi-Einstein 73

Referências Bibliográficas **80**

CAPÍTULO 1

Introdução

A noção de curvatura em uma variedade Riemanniana foi introduzida por B. Riemann em 1868, mas não foi indicada uma maneira de calcular a curvatura seccional a partir da métrica de uma variedade M, que só foi feito em 1869 por E. B. Christoffel. Entre as variedades Riemannianas, aquelas com curvatura seccional constantes são as mais simples.

Existe na literatura vários trabalhos envolvendo variedades de curvatura seccional e escalar constantes. Por outro lado, não temos na literatura muitos exemplos de variedades Riemannianas com curvatura de Ricci constante. Estas são chamadas variedades de Einstein.

Na tentativa de descobrir algumas propriedades das variedades de Einstein, começam a surgir então pertubações da própria definição, introduzindo por exemplo o conceito de variedades quasi-Einstein.

Em 2000, M. C. Chaki e R. K. Maity introduziram o conceito de variedades quasi-Einstein. Neste trabalho eles exploraram a definição de variedades quasi-Einstein e encontraram propriedades que poderiam caracterizar essas variedades, ao mesmo tempo relacioná-las com outras variedades já existentes, ver [7].

Esta definição de quasi-Einstein não é a que utilizaremos no decorrer da dissertação, a que usaremos é a que foi introduzida por Jeffrey Case, Yu-Jen Shu e Guofang Wei em [4]. Nosso objetivo é fazer uma análise mais detalhada deste trabalho, buscando colocar todo o material necessário para o entendimento do artigo.

Depois do artigo que estudamos tiveram outros trabalhos de grande importância para o desenvolvimento da teoria, por exemplo, em [11] Peterson e Wylie estenderam o trabalho do Case-Shu-Wei para variedades produto torcido Einstein, e como aplicação classificaram as variedades produto torcido Einstein quando a base é localmente conformemente flat.

Em [6], Catino, Mantegazza, Mazzuri e Rimoldi provarram que toda variedade localmente conformemente flat quasi-Einstein de dimensão $n \geq 3$ é localmente um produto torcido com fibra $(n-1)$-dimensional de curvatura constante.

Catino introduziu em [5], a noção de variedade quasi-Einstein generalizada que generaliza conceitos de variedades Ricci soliton, quase Ricci soliton e quasi-Einstein. Provaram que uma variedade completa quasi-Einstein generalizada com tensor de Weyl harmônico e curvatura de Weyl radial zero é localmente um produto torcido com fibra $(n-1)$- dimensional.

Em [3], Brozos-Vásques, García-Rio e Gavino-Fernández mostraram que uma variedade Lorentziana localmente conformemete flat quasi-Einstein é globalmente equivalente ao espaço forma ou localmente isomético a uma pp-onda ou um produto torcido.

Mais recentemente, Ranieri e Ribeiro em [18], estudaram a geometria da variedade Bach-Flat steady quasi-Eisntein não compacto. Mostraram que variedades Bach-Flat steady quasi-Eisntein não compacto (M^n, g) com curvatura de Ricci positiva de tal modo que a função potencial tem pelo menos um ponto crítico para ser um produto torcido com fibra Einstein.

Métricas Einstein e suas generalizações são importantes não só para a matemática, mas para a física. Um exemplo particular é o estudo de métricas suaves em espaços de medida. Uma extensão natural do tensor de Ricci para uma métrica suave em um espaço de medida é o tensor de m-Bakry-Emery dado por

$$Ric_f^m = Ric + Hess f - \frac{1}{m} df \otimes df, para\ 0 < m \leq \infty. \tag{1-1}$$

Quando f é constante, este é o tensor de Ricci usual. Chamamos a tripla (M, g, f) (uma variedade Riemanniana (M, g) com uma função f de M)(m-) quasi-Einstein se satisfaz a equação

$$Ric_f^m = Ric + Hess f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g, \tag{1-2}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Quando $m = \infty$ é exatamente a equação do gradiente Ricci soliton, isto é, $Ric + Hess f = \lambda g$. Caso λ seja uma função, então temos um quase Ricci soliton gradiente.

Quando m é um inteiro positivo, esta equação é usada para estudar variedades produto torcido Einsten. No decorrer da dissertação trabalharemos um pouco sobre esse assunto, pois este é de grande importância para a demonstração de nosso resultado principal.

Quando f é constante, trata-se da equação de Einstein, isto é, $Ric = \lambda g$. Assim, se f é constante, chamaremos a métrica de quasi-Einstein trivial.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No Capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos e resultados preliminares que serão utilizados ao longo deste trabalho, sendo estas, definições básicas da geometria Riemanniana, bem como os enunciados de teoremas clássicos que utilizaremos nos capítulos posteriores. Além disso, estudaremos a geometria básica do produto torcido e também do produto Riemanniano, que será bastante

útil na construção de alguns exemplos.

No Capítulo 3, estudaremos variedades quasi-Einstein. Obteremos resultados de rigidez que serão de grande importância para a demonstração do nosso resultado principal. Por fim, demonstraremos o seguinte teorema: "Toda variedade compacta bidimensional tem métrica quasi-Einstein trivial".

No Capítulo 4, estudaremos variedades Kähler. Apresentaremos alguns conceitos preliminares sobre essas variedades, destacando algumas de suas propriedades e, logo após, demonstraremos um teorema e um corolário.

CAPÍTULO 2

Preliminares

2.1 Variedade Diferenciável

Neste capítulo, faremos uma breve abordagem de algumas noções de geometria Riemanniana. Para isso, definiremos variedades diferenciáveis, métricas Riemannianas e curvatura, além de outros resultados fundamentais para o entendimento do trabalho.

Definição 2.1 *Uma **variedade diferenciável** de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

i) $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$.

ii) Para todo par α, β, com $X_\alpha(U_\alpha) \bigcap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ são diferenciáveis.

iii) A família (U_α, X_α) é máxima relativamente às condições i) e ii).

O par (U_α, X_α) (ou a aplicação X_α) com $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p; $X_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p. Uma família (U_α, X_α) satisfazendo i) e ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M.

As variedades aqui apresentadas serão supostas Hausdorff e com base enumerável. A exigência de ser Hausdorff vem do fato de ficar bem definido o conceito de limite e como consequência diferenciabilidade visto que, neste caso, quaisquer dois pontos teriam vizinhanças disjuntas. Já o fato de ser base enumerável é exigido para que não tenhamos problemas ao definir uma métrica Riemanniana na variedade, usando a partição da unidade e o fato de ser Hausdorff.

Definição 2.2 *Sejam M_1^n e M_2^n variedades diferenciáveis. Uma aplicacao $\varphi : M_1^n \to M_2^n$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $Y : V \subset \mathbb{R}^n \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe*

uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ *em* p *tal que* $\varphi(X(U)) \subset Y(V)$ *e a aplicação*

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $X^{-1}(p)$. φ *é diferenciável em um aberto de* M_1*, se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.*

Nas definições seguintes indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 2.3 *Seja* M *uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *é chamada uma curva (diferenciável) em* M*. Suponha que* $\alpha(0) = p \in M$*. O* ***vetor tangente*** *à curva* α *em* $t = 0$ *é a função* $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$ *dada por* $\alpha'(0) f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\big|_{t=0}$, $f \in \mathcal{D}(M)$*. Um vetor tangente em* p *é o vetor tangente em,* $t = 0$*, de alguma curva* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *com* $\alpha(0) = p$*. O conjunto dos vetores tangentes a* M *em* p *será indicado por* T_pM*. Dada uma parametrização* $x : U \bigcup \mathbb{R}^n \to M^n$ *em* $p = x(0)$*, podemos exprimir a função* f *e a curva* α *nesta parametrização por*

$$f \circ x(q) = f(x_1, \cdots, x_n), q = (x_1, \cdots, x_n) \in U,$$

e

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo f *a* α*, obteremos*

$$\begin{aligned} \alpha'(0) f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), \cdots, x_n(t))\big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) f. \end{aligned} \tag{2-1}$$

Em outras palavras, o vetor $\alpha'(0)$ *pode ser expresso na parametrização* x *por*

$$\alpha'(0) f = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0.$$

Os campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ *são chamados de campos coordenados e para cada* $p \in M$ *temos que* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ *determina uma base para o espaço vetorial* T_pM *também chamado espaço tangente de* M *em* p*, sendo que a estrutura assim definida não depende da parametrização.*

Definição 2.4 *Um* ***campo de vetores*** *X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação diferenciável que para cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é possível escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $a_i(p)$ são funções diferenciáveis.

Definição 2.5 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ é uma* ***imersão*** *se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um* ***mergulho****. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N.*

Definição 2.6 *Uma* ***métrica Riemanniana*** *g em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $(X_1(p), \cdots, X_n(p)) = q \in X(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Definição 2.7 *O* ***fibrado tangente*** *a uma variedade M é o conjunto TM de pares, constituídos por um ponto p de M e um vetor tangente $v_p \in T_pM$, isto é, $TM = \{(p, v_p) | p \in M, v_p \in T_pM\}$.*

Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana chama-se uma Variedade Riemanniana.

A primeira coisa a se fazer depois de definir uma estrutura é estabelecer uma noção de equivalência para tal estrutura.

Definição 2.8 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma* ***isometria*** *se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M, u, v \in T_pM$.

Definição 2.9 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é dito* ***homotetia de coeficiente c*** *se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \frac{1}{c}\langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M, u, v \in T_pM$ *e* $c \neq 0$.

Definição 2.10 *Dados* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, o único campo vetorial* $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que,* $\forall\ f \in C^\infty(M), Zf = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf)$ *é chamado* ***Colchete de Lie*** *de* X *e* Y*, denotado por* $[X,Y] = XY - YX$.

Definição 2.11 *Uma* ***conexão afim*** ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ *e que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Os resultados a seguir podem ser encontrados com detalhes em [9].

Proposição 2.12 *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Uma conexão* ∇ *em* M *é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par* V *e* W *de campos de vetores ao longo da curva diferenciável* $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I.$$

Corolário 2.13 *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \ \ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 2.14 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita* ***simétrica*** *quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \ \ \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Note que existe uma única conexão com as propriedades acima. Isto nos é garantido pelo seguinte teorema.

Teorema 2.15 *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana* M*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *satisfazendo as condições:*

i) ∇ *é simétrica*

ii) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

A conexão dada pelo teorema acima e denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M.

Outro resultado que usaremos no decorrer do trabalho é a chamada **Fórmula de Koszul**, que estabelece que, para campos de vetores $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, vale a seguinte equação:

$$2\langle Z,\nabla_Y X\rangle = X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle.$$

Observação 1 *Dados* $X = \sum_i x^i X_i$ *e* $Y = \sum_j y^j Y_j$ *campos diferenciáveis em* M *onde* $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, Y_i = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ *temos que* $\nabla_X Y$ *pode ser expressada em coordenadas locais da seguinte forma*

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x^i y^j \Gamma_{ij}^k + X(y^k) \right) X_k, \tag{2-2}$$

onde Γ_{ij}^k *são funções diferenciáveis chamadas de* ***símbolos de Christoffel*** *da conexão, ou coeficientes de* ∇*, que são determinados pela expressão*

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} \right\} g^{km}, \tag{2-3}$$

onde g_{ij} *é a matriz da métrica em* M *e* g^{ij} *sua inversa. Para conferir essas expressões com mais detalhes, veja [9].*

Proposição 2.16 *Homotetias preservam conexão de Levi-Civita.*

Demonstração. Ver [12]. □

2.2 Divergente, Gradiente, Laplaciano e Hessiana em Variedades

Nesta seção, estudaremos o divergente e o gradiente de campos diferenciáveis numa variedade Riemanniana M, bem como o laplaciano e a hessiana de funções diferenciáveis definidas em M. Expressaremos esses operadores em coordenadas locais, para utilizarmos no decorrer do trabalho.

Definição 2.17 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in U \subset M$, onde U é uma vizinhança de p. Definimos os campos $e_1, \cdots, e_n \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $e_i(q), i = 1, \cdots, n$ formam uma base de T_qM. Diremos, neste caso, que $e_i, i = 1, \cdots, n$ é um* ***referencial móvel*** *em U. Se $e_1, \cdots, e_n \in \mathfrak{X}(M)$ formam uma base ortonormal de T_qM para cada $q \in U$, então dizemos que $e_i, i = 1, \cdots, n$ é um referencial local ortonormal. Se para $p \in U, \nabla_{e_i} e_j = 0$, para todos $1 \leq i, j \leq n$, dizemos que $e_i, i = 1, ..., n$ é um referencial geodésico em p.*

Definição 2.18 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. O* ***divergente de*** *X é definido como:*

$$\begin{aligned} divX : M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto traço(Y(p) \to \nabla_Y X(p)), \quad p \in M. \end{aligned}$$

Definição 2.19 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. O* ***gradiente de*** *f é definido como o campo vetorial $grad\, f$ em M tal que:*

$$\langle grad\, f(p), v \rangle = d f_p(v), \quad p \in M, v \in T_pM.$$

Definição 2.20 *Sejam M uma variedade Riemanniana. O* ***Laplaciano de*** *M é definido como o operador*

$$\begin{aligned} \Delta f : \mathcal{D}(M) &\to \mathcal{D}(M) \\ f &\mapsto \Delta f = div(grad\, f), \quad f \in \mathcal{D}(M). \end{aligned}$$

Vale lembrar que alguns autores definem esse operador com o sinal contrário.

Definição 2.21 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* ***hessiano de*** *f em $p \in M$ é o operador linear $(hess\, f)_p : T_pM \to T_pM$ dado por*

$$(hess\, f)_p(v) = \nabla_v grad\, f,$$

e a forma bilinear simétrica associada é o tensor Hessiana de $f : M \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} \nabla^2 f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to C^\infty(M) \\ (X, Y) &\mapsto \langle \nabla_X grad\, f, Y \rangle. \end{aligned}$$

Em coordenadas locais, temos que

$$(\nabla^2)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Vale notar que no decorrer da dissertação também usaremos "*Hess u*" para denotar o Hessiano da função u.

Adotando um referencial ortonormal $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ em $p \in M$, onde M é uma variedade Riemanniana de dimensão n, temos as seguintes proposições.

Proposição 2.22 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então para cada $p \in M$ temos*

$$(\Delta f)_p = traço(Hess f)_p.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \text{traço}(Hess f)_p &= \langle hess f(e_i), e_i \rangle_p = \langle \nabla_{e_i} grad f, e_i \rangle_p \\ &= div(grad f)(p) = \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.23 *Sejam e_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n = dim(M)$, um referencial ortonormal em $p \in M$, $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então o divergente de X, o gradiente e o laplaciano de f podem ser representados, respectivamente, por:*

$$divX(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f^i))(p), \quad grad f(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f)) e_i(p)$$

e

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)),$$

onde $X = \sum_i f^i e_i$.

Demonstração. Para o divergente temos que

$$\begin{aligned} divX &= \text{traço}\{Y(p) \to \nabla_Y X(p)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Usando a compatibilidade da conexão temos

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (e_i(f^i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle). \end{aligned}$$

Para o gradiente de f vamos tomar $v = e_i(p),\ i = 1,2,3,\ldots,n$ tal que

$$\langle grad\, f(p), e_i(p)\rangle = d\, f_p(e_i)(p) = e_i(f) = f^i.$$

Como

$$grad\, f(p) = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j(p),$$

temos que

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j(p), e_i(p) \right\rangle = a_i = f^i,$$

e, assim,

$$grad\, f(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f)) e_i(p).$$

Por fim, temos que o laplaciano de f pode ser obtido da Definição 2.20, e utilizando as expressões obtidas anteriormente para o gradiente e o divergente, obtemos que

$$\Delta f = div(grad\, f) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, grad\, f\rangle) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)).$$

□

Proposição 2.24 *Seja M uma Variedade Riemanniana, então*

(a) para f e h funções diferenciáveis em M, segue que

$$\Delta(f \cdot h) = f\Delta h + h\Delta f + 2\langle grad\, f, grad h\rangle$$

(b) se X é um campo vetorial diferenciável em M

$$div(fX) = f\, div X + \langle \nabla f, X\rangle.$$

Demonstração. Ver em [9]. □

Definição 2.25 *Uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é dita* ***convexa****, se para cada geodésica $\gamma : [a,b] \to M$, a função $(f \circ \gamma)$ for convexa, isto é*

$$f(\gamma(s)) \leq \frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b-a}(s-a) + f(\gamma(a)),$$

ou equivalentemente

$$f(\gamma(s)) \leq \frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b-a}(s-b) + f(\gamma(b)),$$

para todo $s \in [a,b]$.

Lema 2.26 *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Então* $\nabla^2 f \geq 0$ *se, e somente se,* f *é convexa.*

Demonstração. Suponha $\nabla^2 f \geq 0$. Então para uma geodésica qualquer $\gamma : [0,1] \to M$, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t) = (Hess f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq 0,$$

para todo $t \in [0,1]$. Então, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, quaisquer que sejam $t, t+h \in [0,1]$, existe c entre t e $t+h$, com

$$(f \circ \gamma)(t+h) = (f \circ \gamma)(t) + (f \circ \gamma)'(t)h + \frac{(f \circ \gamma)''(c)}{2}h^2.$$

Como $(f \circ \gamma)''(c) \geq 0$, temos $(f \circ \gamma)(t+h) \geq (f \circ \gamma)(t) + (f \circ \gamma)'(t)h$. Logo

$$\frac{(f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t)}{h} \leq (f \circ \gamma)'(t),$$

se $h < 0$, e

$$\frac{(f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t)}{h} \geq (f \circ \gamma)'(t),$$

quando $h > 0$. Equivalentemente, se $0 < s < 1$, então

$$\frac{(f \circ \gamma)(s) - (f \circ \gamma)(0)}{s} \leq \frac{(f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(s)}{1-s},$$

e, assim,

$$\begin{aligned} (1-s)((f \circ \gamma)(s) - (f \circ \gamma)(0) &\leq s(f \circ \gamma)(1) - s(f \circ \gamma)(s) \\ (f \circ \gamma)(s) &\leq (1-s)(f \circ \gamma)(0) + s(f \circ \gamma)(1). \end{aligned}$$

Portanto, f é convexa.

Reciprocamente, seja $\gamma : [r,t] \to M$ uma geodésica qualquer. Se f é convexa então, para quaisquer $s, a, b \in \mathbb{R}$ tais que, $s \in (a,b) \subset [r,t]$, temos

$$\frac{(f \circ \gamma)(s) - (f \circ \gamma)(a)}{s-a} \leq \frac{(f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a)}{b-a} \leq \frac{(f \circ \gamma)(s) - (f \circ \gamma)(b)}{s-b}.$$

Fazendo $s \to a$ na primeira desigualdade e $s \to b$ na segunda, obtemos

$$(f \circ \gamma)'(a) \leq (f \circ \gamma)'(b).$$

Logo, $(f \circ \gamma)'(s)$ é não-decrescente em $[r,t]$, donde $(f \circ \gamma)''(s) \geq 0$, para todo $[r,s]$. Isto conclui a demonstração do Lema, uma vez que

$$(f \circ \gamma)''(s) = (Hess\, f)_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)).$$

□

2.3 Curvatura, Tensores e Formas diferenciáveis

Apresentaremos agora algumas definições bem como propriedades básicas de Curvatura Seccional, Escalar, de Ricci e também o Operador Curvatura o qual, intuitivamente, mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana. Veremos também que tais curvaturas possuem comportamento tensorial.

Definição 2.27 *Um **tensor** T (diferenciável) de ordem (r,s) em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação multilinear diferenciável*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \mathfrak{X}(M)}_{s} \to \mathcal{D}(M),$$

onde $\mathfrak{X}^*(M)$ denota o espaço dual do conjunto dos campos de vetores tangentes $\mathfrak{X}(M)$ a M.

No caso em que $r = s = 0$, um tensor de ordem $(0,0)$ em M é exatamente uma função $f \in C^\infty(M)$. Tensores do tipo $(0,s)$ são chamados de covariantes, enquanto tensores do tipo $(r,0)$, com $r > 1$, são chamados contravariantes.

Definição 2.28 *Seja (M,g) uma variedade Riemannina. O **tensor curvatura de Riemann** é o (1, 3)-tensor $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X} \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 2.29 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana tem as seguintes propriedades:*

1. *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$, isto é,*

$$\begin{aligned} R(fX_1+gX_2,Y_1) &= fR(X_1,Y_1))+gR(X_2,Y_1) \\ R(X_1,fY_1+gY_2) &= fR(X_1,Y_1))+gR(X_1,Y_2) \end{aligned}$$

   $f,g\in\mathcal{D}(M)$, $X_1,X_2,Y_1,Y_2\in\mathfrak{X}(M)$;

2. *para todo par $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y):\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z+R(X,Y)W \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z; \end{aligned}$$

3. *vale a primeira identidade de Bianchi.*

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0;$$

4. *para todo $X,Y,Z,V\in\mathfrak{X}(M)$ e $f\in\mathcal{D}(M)$ valem as seguintes propriedades de simetria:*

   (a) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle+\langle R(Y,Z)X,T\rangle+\langle R(Z,X)Y,T\rangle=0$
   (b) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle=-\langle RY,X)Z,T\rangle$
   (c) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle=-\langle R(X,Y)T,Z\rangle$
   (d) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle=\langle R(Z,T)X,Y\rangle$.

Demonstração. (Ver [9]). □

Definição 2.30 *Dado um ponto $p\in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma\subset T_pM$, o número real*

$$K(x,y)=K(\sigma)=\frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2},$$

onde x,y é uma base qualquer de σ, é chamado ***Curvatura Seccional*** *de σ em p. É possível mostrar que $K(x,y)$ independe da escolha dos vetores x e y.*

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecerão com frequência no trabalho e merecem destaque. São a Curvatura de Ricci e a Curvatura Escalar, que definiremos a seguir.

Definição 2.31 *Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM. Tomando uma base ortonormal $\{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x,*

$$Ric_p(x) = \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n-1$$

é denominada ***Curvatura de Ricci na direção*** *x.*

Definição 2.32 *O $(0,4)$-**tensor curvatura de uma variedade Riemanniana** é definido por:*

$$R(X, Y, Z, V) = \langle R(X, Y)Z, V \rangle.$$

Em um sistema de coordenadas locais, suas componentes são dadas por

$$R(X_i, X_j, X_k, X_s) = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R^l_{ijk} g_{ls} = R_{ijks},$$

onde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *e* $R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \sum_s \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk}$.

Definição 2.33 *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o* ***tensor de Ricci*** *é definido por*

$$Ric(X, Y)(p) = traço\{z \longmapsto (R(X, z)Y)(p)\},$$

ou, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local,

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, e_i)Y, e_i \rangle.$$

Em um sistema de coordenadas locais, as componentes do Tensor de Ricci são dadas por

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} R^k_{ikj} = \sum_{k=1}^{n} g^{km} R_{ikjm},$$

onde g^{km} é a métrica inversa de g_{km}.

Já a ***curvatura escalar*** *é uma função real $R : M \to \mathbb{R}$ definida como o traço do tensor de Ricci:*

$$R = traço(Ric) = \sum_{i,j}^{n} g^{ij} R_{ij}.$$

Note que usaremos R para denotar a curvatura escalar e o operador curvatura.

Definição 2.34 *Seja T um tensor covariante de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $r+1$ dada por*

$$\nabla T(Y_1,...,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,...,Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, Y_2,...,Y_r) - ... - T(Y_1,...,Y_{r-1},\nabla_Z Y_r).$$

Para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a ***derivada covariante*** *$\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por:*

$$\nabla_Z T = \nabla T(Y_1,...,Y_r).$$

Definição 2.35 *Dado um 2-tensor covariante T, a* ***divergência*** *de T é o traço de ∇T. Ou seja,*

$$div(T) = traço(\nabla T).$$

Em coordenadas locais, sua expressão é dada por

$$(div(T))_i = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\nabla_k T_{ij}.$$

Considerando um referencial ortonormal local temos que o divergente de T aplicado em $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dado por

$$Div(T)(X) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} T)(e_i, X).$$

Definição 2.36 *Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades Riemannianas M e N. Se A é um tensor covariante de ordem r em N, o* ***pullback*** *de A é definido pelo tensor $\phi^* A$ em M como sendo:*

$$(\phi^* A)(V,...,V_r)(p) = A_{\phi(p)}(d\phi(V_1),...,d\phi(V_r)),$$

onde cada $V_i \in T_p M$.

Proposição 2.37 *(Segunda Identidade de Bianchi) Se R é o tensor de curvatura da variedade Riemanniana M, então, para quaisquer campos X,Y,Z,T,U tangentes em M, temos:*

$$(\nabla_X R)(Y,Z,T,U) + (\nabla_Y R)(Z,X,T,U) + (\nabla_Z R)(X,Y,T,U) = 0. \tag{2-4}$$

Em coordenadas locais, temos

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0. \tag{2-5}$$

Demonstração. Veja em [10]. □

Denotamos por $\Lambda^r(T_pM)$ o conjunto das aplicações r-lineares alternadas (anti-simétricas) de T_pM em $\mathbb{R}$.

Definição 2.38 *Uma **r-forma diferencial** ω em uma variedade diferenciável n-dimensional M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um elemento $\omega_p \in \Lambda^r(T_pM)$.*

Definição 2.39 *Seja ω uma 1-forma definida em uma variedade Riemanniana M. Definimos a **derivada covariante** de ω como sendo a 1-forma dada por:*

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y),$$

$\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Exemplo 2.40 *A **derivada covariante total do tensor métrico** g é o tensor identicamente nulo. De fato, devido à compatibilidade da conexão com a métrica, temos*

$$\begin{aligned} \nabla g(X,Y,Z) &= \nabla_Z g(X,Y) = Z[g(X,Y)] - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= Z\langle X,Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lema 2.41 *Dada uma variedade Riemanniana M vale que*

$$dR = 2div(Ric), \tag{2-6}$$

onde R e Ric são a curvatura escalar e o tensor de Ricci de M, respectivamente.

Demonstração. De fato, pois da Definição 2.35 segue que

$$(div(Ric))_i = \sum_{jk=1}^{n} g^{jk} \nabla_k R_{ij}.$$

Pela Identidade de Bianchi (2-5) temos que

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0.$$

Então, tomando o traço em relação a métrica, nos índices j e l, ficamos com

$$\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk}) = 0.$$

Donde, pela regra do produto tensorial e usando o Exemplo 2.40,

$$\nabla_m\left(\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}R_{ijkl}\right)+\nabla_k\left(\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}R_{ijlm}\right)+\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\nabla_l R_{ijmk}=0. \tag{2-7}$$

Como

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}R_{ipjq},\\ R_{ijlm} &= -R_{ijml},\\ R_{ijmk} &= R_{mkij}, \end{aligned}$$

o primeiro termo da soma será

$$\nabla_m R_{ik},$$

enquanto que o segundo termo

$$-\nabla_k R_{im}.$$

Sendo assim, a Equação (2-7) é equivalente a

$$\nabla_m R_{ik}=\nabla_k R_{im}-\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\nabla_l R_{ijmk}.$$

Daí, passando o traço em relação aos índices i e k, tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}\nabla_m R_{ik} &= \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}\nabla_k R_{im}-\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\nabla_l R_{ijmk}\\ &= (div(Ric))_m-\sum_{j,l=1}^{n}\nabla_l\left(\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}R_{ijmk}\right)\\ &= (div(Ric))_m+\sum_{j,l=1}^{n}\nabla_l\left(\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}R_{jimk}\right)\\ &= (div(Ric))_m+\sum_{j,l=1}^{n}\nabla_l R_{jm}\\ &= (div(Ric))_m+(div(Ric))_m\\ &= 2(div(Ric))_m. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_m R=\nabla_m\left(\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}R_{ik}\right)=\sum_{i,k=1}^{n}\nabla_m g^{ik}R_{ik}=2(div(Ric))_m.$$

E, como R é uma função real, temos que $\nabla R = dR$, provando então o lema. □

Definição 2.42 *Dado ω 1-forma definida em M temos que o* ***operador divergência*** δ *é dado por :*

$$\delta\omega = traço(\nabla\omega) = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\omega)(e_i).$$

O sinal positivo é apenas por comodidade.

Teorema 2.43 *Se ω é uma r-forma em uma variedade Riemanniana M, então existe uma única (r+1)-forma $d\omega$ em M tal que para todo conjunto de campos diferenciáveis $X_1,\ldots,X_{r+1}$ em M temos*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\ldots,X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,..,X_{r+1})) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq r+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{r+1}), \end{aligned}$$

onde o operador d é a diferencial agindo em r-formas e $\widehat{X}_i$ indica que estamos omitindo o campo X_i.

Demonstração. Ver em [19]. □

Lembre que um campo de vetores X é dito completo se houver um grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}$ gerado por X.

Definição 2.44 *Seja α um tensor e X um campo completo. A* ***derivada de Lie*** *de α com respeito a X é dada por*

$$\mathcal{L}_X\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_t^*\alpha - \alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\alpha,$$

onde φ_t^* é o difeomorfismo induzido pelo φ_t.

Proposição 2.45 *A derivada de Lie com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $f \in C^\infty(M)$ então $\mathcal{L}_X f = D_X f$.*
2. *Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$.*
3. *Sejam α e β tensores, então $\mathcal{L}_X(\alpha\otimes\beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\otimes\beta + \alpha\otimes(\mathcal{L}_X\beta)$.*

4. *Se* α *é um* $(0,r)$*-tensor, então para quaisquer* $Y_1,\cdots,Y_r \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\alpha)(Y_1,\cdots,Y_r) &= D_X(Y_1,\cdots,Y_r)\\ &- \sum_{i=1} r(Y_1,\cdots,Y_{i-1},[X,Y_i],Y_{i+1},\cdots,Y_r)\\ &= (\nabla_X)(Y_1,\cdots,Y_r)\\ &- \sum_{i=1} r(Y_1,\cdots,Y_{i-1},\nabla_{Y_i}X,Y_{i+1},\cdots,Y_r)\end{aligned}$$

Para uma prova veja o Capítulo 13 de [15].

Agora note que da proposição acima e do fato que $\nabla g \equiv 0$, temos que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X,Z) + g(Y,\nabla_Z X), \tag{2-8}$$

para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional conexa com fronteira ∂M diferenciável, mensurável e com densidade de medida sendo denotada por dA. Seja v um campo unitário normal e exterior a ∂M. Então, denotando $\langle,\rangle$ o produto interno em T_pM, $p \in M$ temos o resultado a seguir que será útil no decorrer do nosso trabalho.

Teorema 2.46 ***(Teorema da divergência)*** *Seja* X *um campo vetorial de classe* $C^1(\overline{M})$ *e com suporte compacto em* $\overline{M}$*. Então*

$$\int_M (divX)dV = \int_{\partial M} \langle X,v\rangle dA$$

Teorema 2.47 ***(Teorema de E. Hopf)*** *Sejam* M *uma variedade Riemanniana orientável compacta e conexa e* f *uma função diferenciável em* M *com* $\Delta f \geq 0$*. Então* $f = constante$*. Em particular, as funções harmônicas em* M*, isto é, aquelas para as quais* $\Delta f = 0$ *são constantes.*

Teorema 2.48 *(Identidade de Kazdan-Warner) Para qualquer campo de vetores conformes* X *numa variedade Riemanniana compacta* (M,g)*, vale a seguinte identidade*

$$\int_M \langle X,\nabla R\rangle dV_M = 0.$$

2.4 Variedade Produto

Nesta seção, veremos o comportamento da geometria básica do produto entre duas variedades Riemannianas, o que chamamos de produto Riemanniano, ou produto trivial. Veremos conceitos básicos que nos ajudarão a entender a próxima seção.

Definição 2.49 *Sejam M e N variedades diferenciáveis, sendo $\mathbb{F} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ e $\mathbb{G} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ estruturas diferenciáveis de M e N, respectivamente. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e a aplicação $Z_{\alpha\beta}(p,q) = (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)), p \in U_\alpha, q \in V_\beta$. Temos que $\mathbb{H} = (U_\alpha \times V_\beta, Z_{\alpha\beta})$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$, na qual as projeções $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \longrightarrow N$ são diferenciáveis. Com esta estrutura diferenciável, $M \times N$ é chamada a **variedade produto de** M **por** N.*

Observação 2 *Sejam M^n e N^m variedades e considere a variedade produto $M \times N$.*

Para cada $(p,q) \in M \times N$ os subconjuntos

$$M \times q = \{(r,q) \in M \times N;\ r \in M\},$$

$$p \times N = \{(p,s) \in M \times N;\ s \in N\},$$

são subvariedades de $M \times N$, difeomorfas a M e N, respectivamente.

Definição 2.50 *Sejam (M, g_M) e (N, g_N) variedades Riemannianas e considere $M \times N$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi : M \times N \to M$ e $\sigma : M \times N \to N$ as projeções canônicas. Definimos a **métrica Riemanniana produto em** $M \times N$ por:*

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi(u), d\pi(v)\rangle_p + \langle d\sigma(u), d\sigma(v)\rangle_q,\ \forall\ (p,q) \in M \times N,\ e\ u, v \in T_{(p,q)}(M \times N).$$

Definição 2.51 *Sejam (M, g_M) e (N, g_N) variedades Riemannianas, $\phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Diz-se que os **campos** X **e** Y **são** ϕ-**relacionados**, se $d\phi_p(X_p) = (Y \circ \phi)(p) = Y(\phi(p)) = Y_{\phi(p)}, \forall\ p \in M$. O qual denotamos por $X \overset{\phi}{\sim} Y$.*

Lema 2.52 *Sejam M, e N, variedades diferenciáveis $\phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. X e Y são ϕ-relacionados se, e somente se,*

$$X(g \circ \phi) = (Yg) \circ \phi, \forall g \in C^\infty(N).$$

Demonstração. De fato, dada $g \in C^\infty(N)$, $X(g \circ \phi)$ e $(Yg) \circ \phi$ são funções (reais) diferenciáveis em M. Logo, $X(g \circ \phi) = (Yg) \circ \phi$ são iguais se, e somente se, $\forall\ p \in M$, $X(g \circ \phi)(p) = ((Yg) \circ \phi)(p)$. Daí, dado $p \in M$, $X(g \circ \phi)(p) = X_p(g \circ \phi) = (d\phi_p(X_p))(g)$, e por outro lado $((Yg) \circ \phi)(p) = Y_{\phi(p)}(g)$, $\forall\ p \in M$, donde segue o resultado. □

Lema 2.53 *Sejam $\phi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável, M e N variedades, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Se $X_1 \overset{\phi}{\sim} Y_1$ e $X_2 \overset{\phi}{\sim} Y_2$, então $[X_1, X_2] \overset{\phi}{\sim} [Y_1, Y_2]$.*

Demonstração. Temos de mostrar que $d\phi_p([X_1,X_2]_p) = [Y_1,Y_2]_{\phi(p)}$, $\forall p \in M$, onde $[X_1,X_2](p) = [X_1,X_2]_p$. De fato, dados $p \in M$ e $f \in C^\infty(N,\mathbb{R})$, temos que $d\phi_p([X_1,X_2]_p)(f) = [X_1,X_2]_p(f\circ\phi) = ([X_1,X_2](f\circ\phi))(p)$, $\forall p \in M$, isto é o mesmo que,

$$\begin{aligned}
[X_1,X_2](f\circ\phi) &= X_1(X_2(f\circ\phi)) - X_2(X_1(f\circ\phi)) \overset{Lema 2.47}{=} X_1((Y_2 f)\circ\phi) - X_2((Y_1 f)\circ\phi) \\
&= d\phi(X_1)(Y_2 f) - d\phi(X_2)(Y_1 f) = Y_1(Y_2 f) - Y_2(Y_1 f) = [Y_1,Y_2](f).
\end{aligned}$$

Portanto, $d\phi_p([X_1,X_2]_p) = [Y_1,Y_2]_{\phi(p)}, \forall\, p \in M$. □

Lema 2.54 *$T_{(p,q)}(M\times N)$ é a soma direta dos subespaços $T_{(p,q)}M$ e $T_{(p,q)}N$. Isto é cada elemento $v \in T_{(p,q)}(M\times N)$ tem uma única representação $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in T_{(p,q)}M$ e $v_2 \in T_{(p,q)}N$.*

Demonstração. Como $T_{(p,q)}M$ e $T_{(p,q)}N$ são subespaços vetoriais de $T_{(p,q)}(M\times N)$ e, $\dim(T_{(p,q)}(M\times N)) = \dim(T_{(p,q)}M) + \dim(T_{(p,q)}N) < \infty$, basta mostrar que $T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N = \{0\}$, $0 \in T_{(p,q)}(M\times N)$. De fato, $\pi\big|_{p\times N}$ é constante, logo $d\pi_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}N} = 0$. Mas, $d\pi_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}M}$ é um isomorfismo em cada $(p,q) \in M\times\{q\}$ (pois $\pi\big|_{M\times q}$ é um difeomorfismo, logo a afirmação segue da aplicação inversa). Temos que, se existe $v \in T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N, v \neq 0$, por um lado $d\pi(v) = 0$, pois $v \in T_{(p,q)}N$ e por outro $d\pi(v) \neq 0$, pois $v \in T_{(p,q)}M$, o que é um absurdo. Logo, $T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N = \{0\}$, e portanto, $T_{(p,q)}(M\times N) = T_{(p,q)}M \oplus T_{(p,q)}N$. Além disso, poderíamos ter usado σ ao invés de π na demonstração, concluindo que $T_{(p,q)}M \subset ker(d\sigma)$ e $T_{(p,q)}N \subset ker(d\pi)$. Assim, dado qualquer $v \in T_{(p,q)}(M\times N)$, temos que $v = v_1 + v_2$, onde $d\pi(v) = v_1$ e $d\sigma(v) = v_2$. □

Observação 3 *Como $\pi\big|_{p\times N}$ é constante, temos que $d\pi_{(p,q)}(T_{(p,q)}N) = 0$. Com raciocínio análogo, concluímos que $d\sigma_{(p,q)}(T_{(p,q)}M) = 0$.*

Exemplo 2.55 *Sejam (M,g_M) e (N,g_N) variedades Riemannianas, $g_M = \langle\cdot,\cdot\rangle^M$ e $g_N = \langle\cdot,\cdot\rangle^N$ suas respectivas métricas e, $M\times N$ a variedade Riemannianas produto. Dados $u,v \in T_{(p,q)(M\times N)}$, tem-se que existem e são únicos $u_1,v_1 \in (d\sigma_{(p,q)})^{-1}(\{0\}) = T_{(p,q)}M \equiv T_pM$ e $u_2,v_2 \in (d\pi_{(p,q)})^{-1}(\{0\}) = T_{(p,q)}N \equiv T_qN$ tais que $v = v_1 + v_2$ e $u = u_1 + u_2$ com $d\pi(u) = u_1$, $d\sigma(u) = u_2$, $d\pi(v) = v_1$, $d\sigma(v) = v_2$. Assim,*

$$\begin{aligned}
\langle u,v\rangle_{(p,q)} &= \langle u_1,v_1\rangle_p^M + \langle u_2,v_2\rangle_p^N = \langle d\pi(u),d\pi(v)\rangle_{\pi(p,q)} + \langle d\sigma(u),d\sigma(v)\rangle_{\sigma(p,q)} = \\
&= (\pi^* g_M)(u,v) + (\sigma^* g_N)(u,v),\ \forall (p,q) \in M\times N,\ \forall\, u,v \in T_{(p,q)}(M\times N).
\end{aligned}$$

Definição 2.56 *Sejam M^n e N^m variedades, $f \in C^\infty(M)$ e considere a variedade produto $M \times N$.*

(a) *O* ***levantamento de*** *f a $M \times N$ é definido por $\widetilde{f} = f \circ \pi \in C^\infty(M \times N)$;*

(b) *Se $v \in T_pM$ e $q \in N$ então o levantamento de v a (p,q) é o único vetor $\widetilde{v} \in T_{(p,q)}M$ tal que $d\pi(\widetilde{v}) = v$. Como $\widetilde{v} \in T_{(p,q)}M$, $d\sigma(\widetilde{v}) = 0$;*

(c) *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, o levantamento de X a $M \times N$ é o campo vetorial $\widetilde{X}$ em $M \times N$ cujo valor em cada ponto $(p,q) \in M \times N$ é o levantamento de X_p a (p,q). Assim, $d\pi(\widetilde{X}_{(p,q)}) = (X \circ \pi)(p,q) = X_p$ e $d\sigma(\widetilde{X}_{(p,q)}) = 0$. Portanto, o levantamento de $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $M \times N$ é o único elemento de $\mathfrak{X}(M \times N)$ que é π-relacionado a X e σ-relacionado ao campo vetorial nulo em N. E ainda, como $d\sigma\Big|_{T_{(p,q)}M} = 0$, o levantamento $\widetilde{X}$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $M \times N$ é constante em cada fibra $\{p\} \times N$;*

(d) *O conjunto de todos os levantamentos $\widetilde{X}$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$ é denotado por $\mathfrak{L}(M)$ e tais levantamentos são chamados horizontais;*

(e) *Funções, vetores tangentes e campos de vetores em N são levantados para $M \times N$ da mesma forma usando-se a projeção σ. O conjunto de todos os levantamentos $\widetilde{Y}$ de $Y \in X(N)$ é denotado por $\mathfrak{L}(N)$, tais levantamentos são chamados verticais e, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M \times N)$.*

Lema 2.57 *Sejam M, N variedades e $\phi : M \to N$ um difeomorfismo. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ existe um único campo de vetores $d\phi(X) \in \mathfrak{X}(N)$ que é ϕ-relacionado a X.*

Observemos que este lema prova a unicidade do levantamento de campos, pois $\pi\big|_{M \times q}$ e $\sigma\big|_{p \times N}$ são ambos difeomorfismos.

Demonstração. De fato, como ϕ é um difeomorfismo, então $d\phi_p$ é um isomorfismo em cada $p \in M$. Definimos então $Y \in \mathfrak{X}(N)$ por $Y(q) := d\phi_p(X_p)$, $\forall\, q = \phi(p) \in N$. Temos que Y é único pois $d\phi_p$ é um isomorfismo e pela própria definição de ϕ-relacionado concluímos que $X \overset{\phi}{\sim} Y$. □

Corolário 2.58 *Sejam M, N variedades e considere a variedade produto $M \times N$. Se $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$ e $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(N)$, então*

(a) *$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]} \in \mathfrak{L}(M)$, e similarmente para $\mathfrak{L}(N)$.*

(b) *$[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = 0$, onde $0 \in \mathfrak{X}(M \times N)$ é o campo nulo.*

Demonstração. **(a)** Devemos mostrar que $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\pi}{\sim} [X,Y]$ e $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\sigma}{\sim} [0,0]$, onde $0 \in \mathfrak{X}(N)$ é o campo vetorial nulo em N. De fato,
Como $\widetilde{X}$, e $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$, então existem $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $\widetilde{X} \overset{\pi}{\sim} X$, $\widetilde{X} \overset{\sigma}{\sim} 0$, $\widetilde{Y} \overset{\pi}{\sim} Y$ e $\widetilde{Y} \overset{\pi}{\sim} 0$. Daí, pelo Lema 2.53, $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\pi}{\sim} [X,Y]$ e $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\sigma}{\sim} 0$. Portanto, $d\pi([\widetilde{X},\widetilde{Y}]) = [X,Y]$ e $d\sigma([\widetilde{X},\widetilde{Y}]) = [0,0]$.
(b) De modo análogo, como $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$ e $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(N)$, então existem $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \mathfrak{X}(N)$ tais que $\tilde{X} \overset{\pi}{\sim} X$, $\tilde{X} \overset{\sigma}{\sim} 0$, $\widetilde{V} \overset{\pi}{\sim} 0$, e $\widetilde{V} \overset{\sigma}{\sim} V$, onde 0 é o campo nulo em $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}(N)$. Pelo Lema 2.53, $[\widetilde{X},\widetilde{V}] \overset{\pi}{\sim} [X,0] = 0$ e $[\widetilde{X},\widetilde{V}] \overset{\pi}{\sim} [0,V] = 0$. O campo $[\widetilde{X},\widetilde{V}] \in \mathfrak{X}(M \times N)$ em cada ponto $(p,q) \in (M \times N)$ tem como componentes o vetor nulo (ou ainda, $[\widetilde{X},\widetilde{V}]$ é o levantamento de $0 \in \mathfrak{X}(M)$ e também o levantamento de $0 \in \mathfrak{X}(N)$), portanto, pelo Lema 2.54 $[\widetilde{X},\tilde{V}] = 0 \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

□

Proposição 2.59 *(Conexão produto) Sejam M e N variedades Riemannianas e considere a variedade Riemanniana produto $M \times N$ (isto é, com a métrica produto). Sejam ∇^M a conexão Riemanniana de M, ∇^N a conexão Riemanniana de N e $\widetilde{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $M \times N$. Se $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$ são os levantamentos de $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\widetilde{V},\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$ são os levantamentos de $V,W \in \mathfrak{X}(N)$, então*

(a) $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ *é o levantamento de* $\nabla^M_X Y \in \mathfrak{X}(M)$

(b) $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{W}$ *é o levantamento de* $\nabla^N_V W \in \mathfrak{X}(N)$

(c) $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = 0 = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{X} = 0$

Demonstração. (a) Se mostrarmos que $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} \overset{\sigma}{\sim} 0$ e $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} \overset{\pi}{\sim} \nabla^M_X Y$ provamos este item. Temos pela Fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \widetilde{Z}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} &= \widetilde{X}\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle_{(p,q)} + \widetilde{Y}\langle \widetilde{Z},\widetilde{X}\rangle_{(p,q)} - \widetilde{Z}\langle \widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} - \langle [\widetilde{X},\widetilde{Z}],\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} \\ &- \langle [\widetilde{Y},\widetilde{Z}],\widetilde{X}\rangle_{(p,q)} - \langle [\widetilde{X},\widetilde{Y}],\widetilde{Z}\rangle_{(p,q)}, \end{aligned} \tag{2-9}$$

onde $\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(M)$ é levantamento de $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $(p,q) \in M \times N$ com $p \in M$ e $q \in N$.

Pela métrica produto temos que $\langle \widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} = \langle X,Y\rangle_{\pi(p,q)} = \langle X,Y\rangle_p = \langle X,Y\rangle \circ \pi$. Logo

$$\widetilde{Z}\langle \widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} = \widetilde{Z}(\langle X,Y\rangle \circ \pi) = d\pi(\widetilde{Z})(\langle X,Y\rangle_{\pi(p,q)}) = Z\langle X,Y\rangle \circ \pi.$$

Do Corolário 2.58 temos que $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]_{(p,q)} = [X,Y]_{\pi(p,q)} = [X,Y] \circ \pi$. Portanto,

$\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\widetilde{Z}\rangle_{(p,q)} = \langle[X,Y],Z\rangle\circ\pi$. Então a Equação (2-9) torna-se

$$\langle\widetilde{Z},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} = \langle Z,\ \nabla^M_X Y\rangle\circ\pi.$$

Usando a métrica produto, ficamos com

$$\langle Z,\ \nabla^M_X Y\rangle\circ\pi = \langle\widetilde{Z},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi(\widetilde{Z}),d\pi(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})\rangle_{\pi(p,q)} = \langle Z,d\pi(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})\rangle\circ\pi.$$

Como $\pi\Big|_{M\times\{q\}}$ é difeomorfismo, então $d\pi\Big|_{M\times\{q\}}$ é isomorfismo. Portanto $d\pi(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}) = \nabla^M_X Y$.

Abaixo mostraremos que $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} \overset{\sigma}{\sim} 0$. De fato, pois por Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle\widetilde{V},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} &= \widetilde{X}\langle\widetilde{Y},\widetilde{V}\rangle_{(p,q)} + \widetilde{Y}\langle\widetilde{V},\widetilde{X}\rangle_{(p,q)} - \widetilde{V}\langle\widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} - \langle[\widetilde{X},\widetilde{V}],\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} \\ &- \langle[\widetilde{Y},\widetilde{V}],\widetilde{X}\rangle_{(p,q)} - \langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\widetilde{V}\rangle_{(p,q)}. \end{aligned} \tag{2-10}$$

Da métrica produto e do Corolário 2.58 temos que $[\widetilde{Y},\widetilde{V}]_{(p,q)} = 0$ e $\langle\widetilde{Y},\widetilde{V}\rangle_{(p,q)} = 0$. Temos também que

$$\widetilde{V}\langle\widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} = \widetilde{V}(\langle X,Y\rangle\circ\pi) = d\pi_{(p,q)}(\widetilde{V})(\langle X,Y\rangle_p) = 0,$$

pois $\widetilde{V} \overset{\pi}{\sim} 0$. Sendo assim $2\langle\widetilde{V},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} = 0$. Usando a métrica produto, obtemos que

$$0 = \langle\widetilde{V},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle_{(p,q)} = \langle d\sigma(\widetilde{V}),d\sigma(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})\rangle_q = \langle V,d\sigma(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})\rangle\circ\sigma.$$

Como o resultado vale para todo $0\neq\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(N)$, segue que $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} \overset{\sigma}{\sim} 0$.

(b) Análogo ao item (a)

(c) Da simetria da métrica e do Corolário 2.58 temos que

$$0 = [\widetilde{X},\widetilde{V}] = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{X}, \quad\Longrightarrow\quad \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{X}.$$

Temos que a Fórmula de Koszul ficará análoga a Equação (2-10) e por consequência $\langle\widetilde{W},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V}\rangle = 0$, independente se o campo W pertence a $\mathfrak{L}(M)$ ou $\mathfrak{L}(N)$. Portanto como vale para todo $\widetilde{W}\neq 0$, temos que $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = 0$. □

Os tensores curvatura e de Ricci e a curvatura escalar do produto Riemanniano serão estudados num contexto mais geral na próxima seção.

2.5 Variedade Produto Torcido

Agora estudaremos a geometria do ambiente em que trabalharemos no decorrer de todo o trabalho. Este ambiente é o que chamamos de produto torcido entre duas variedades Riemannianas, o qual é uma generalização de produto Riemanniano.

Definição 2.60 *Sejam* (B, g_B) *e* (F, g_F) *variedades Riemannianas e* $f \in C^\infty(B)$ *tal que* $f > 0$. ***O produto torcido (warped product)*** $M = B \times_f F$ *é a variedade produto* $B \times F$ *munida com a métrica*

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

onde * *representa o pullback de ambas as métricas realizados por suas respectivas projeções. Além disso, chamamos* f *de* ***função torção*** *(ou de* ***função warping****),* F *a* ***variedade fibra*** *e* B ***variedade base*** *de* M.

Explicitamente, se v é tangente a $B \times_f F$ em $(p,q) = x$, com $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in T_pB$, $v_2 \in T_qF$, então

$$\begin{aligned} g(v,v) &= \langle v, v \rangle_x = \left\langle d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(v) \right\rangle_p + f^2(p) \left\langle d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(v) \right\rangle_q \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle_p^B + (f \circ \pi)^2(p,q) \langle v_2, v_2 \rangle_q^F . \end{aligned}$$

Se $f \equiv 1$, então $M = B \times_f F$ reduz-se à variedade Riemanniana produto. Veremos nessa seção que é possível expressar a geometria de M em termos da *função torção* f e das geometrias de B e F.

Proposição 2.61 *Para cada* $(p,q) \in M = B \times_f F$, *as* ***fibras*** $\{p\} \times F = \pi^{-1}(p)$ *e as* ***folhas*** $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$, *com a métrica induzida de* g_M, *são subvariedades Riemannianas de* M *e a métrica torcida em* M *implica nas seguintes condições geométricas:*

a) *para cada* $q \in F$, *a aplicação* ${}_q\pi := \pi|_{B \times q}$ *é uma isometria sobre* B*;*

b) *para cada* $p \in B$, *a aplicação* ${}_p\sigma := \sigma|_{p \times F}$ *é uma homotetia positiva sobre* F, *com fator escalar* $1/f(p)$*;*

c) *Para cada* $(p,q) \in M$, *a folha* $\sigma^{-1}(q)$ *e a fibra* $\pi^{-1}(p)$ *são ortogonais em* (p,q).

Demonstração. De fato,

a) Para cada $q \in F$, a aplicação ${}_q\pi := \pi|_{B \times \{q\}} : B \times \{q\} \to B$ é um difeomorfismo. Assim, para cada $(p,q) \in B \times \{q\}$ e para todos $u, v \in T_{(p,q)}B \subset T_{(p,q)}(B \times F)$ tem-

se da definição de métrica torcida que

$$\begin{aligned}\langle v,u\rangle_{(p,q)} &= \left\langle d({}_q\pi)_p(u), d({}_q\pi)_p(v)\right\rangle_p^B + (f\circ\pi)^2(p,q)\underbrace{\left\langle d\sigma_{(p,q)}(u), d\sigma_{(p,q)}(v)\right\rangle_q^F}_{0}\\ &= \left\langle d({}_q\pi)_p(u), d({}_q\pi)_p(v)\right\rangle_p^B,\end{aligned}$$

pois, $d({}_q\pi)_p = d\pi_{(p,q)}|_{T_{(p,q)}B}$ e $d\sigma_{(p,q)}(T_{(p,q)}B) = d\sigma_{(p,q)}\left((d\sigma_{(p,q)})^{-1}(\{0\})\right) = 0$.

b) Para cada $p \in B$, a aplicação ${}_p\sigma := \sigma|_{\{p\}\times F} : \{p\}\times F \to F$ é um difeomorfismo. Assim, para cada $(p,q) \in \{p\}\times F$ e para todos $w,z \in T_{(p,q)}F \subset T_{(p,q)}(B\times F)$ tem-se da métrica produto torcido

$$\begin{aligned}\langle w,z\rangle_{(p,q)} &= \underbrace{\left\langle d\pi_{(p,q)}(w), d\pi_{(p,q)}(z)\right\rangle_p^B}_{0} + (f\circ\pi)^2(p,q)\left\langle d({}_p\sigma)_q(w), d({}_p\sigma)_q(z)\right\rangle_p^F\\ &= f^2(p)\left\langle d({}_p\sigma)_q(w), d({}_p\sigma)_q(z)\right\rangle_p^F,\end{aligned}$$

pois, $d\pi_{(p,q)}(T_{(p,q)}F) = d\pi_{(p,q)}\left((d\pi_{(p,q)})^{-1}(\{0\})\right) = 0$ e $d({}_p\sigma)_q = d\sigma_{(p,q)}|_{T_{(p,q)}F}$.

c) Dados $u \neq 0, \in T_{(p,q)}B$ e $w \neq 0, \in T_{(p,q)}F$, temos da métrica produto torcido que

$$\begin{aligned}\langle u,w\rangle_{(p,q)} &= \underbrace{\left\langle d\pi_{(p,q)}(u), d\pi_{(p,q)}(w)\right\rangle_p^B}_{0} + (f\circ\pi)^2(p,q)\underbrace{\left\langle d({}_p\sigma)_q(u), d({}_p\sigma)_q(w)\right\rangle_p^F}_{0}\\ &= 0,\end{aligned}$$

pois $d\pi_{(p,q)}(T_{(p,q)}F) = 0$ e $d\sigma_{(p,q)}(T_{(p,q)}B) = 0$. Sendo assim, $(T_{(p,q)}B)\perp(T_{(p,q)}F)$

□

Chamaremos de **horizontais** os campos tangentes às folhas e **verticais** os campos tangentes às fibras. Denotaremos por $\mathcal{H}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço horizontal $T_{(p,q)}B \equiv T_{(p,q)}(B\times\{q\})$ e por $\mathcal{V}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço vertical $T_{(p,q)}F = T_{(p,q)}(\{p\}\times F)$. Dessa forma, dado $v \in T_{(p,q)}M$, com $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in T_{(p,q)}B$, $v_2 \in T_{(p,q)}F$, então $\mathcal{H}(v) = v_1$ e $\mathcal{V}(v) = v_2$. E ainda, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{V}(X) \in \mathfrak{X}(M)$.

Ao espaço dos campos de $M = B\times_f F$ que são levantamentos de campos de B (respectivamente de F) denotaremos por $\mathfrak{L}(B)$ (respectivamente por $\mathfrak{L}(F)$).

Iremos agora determinar a conexão Riemanniana, o tensor de curvatura e o tensor de Ricci de uma variedade produto torcido, em função de f e das geometrias de B e F.

Antes disso, veremos na proposição seguinte como se comporta o gradiente de funções tanto de levantamento da base como levantamento da fibra.

Proposição 2.62 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido, $h \in C^\infty(B)$ e $\phi \in C^\infty(F)$, então*

(a) *$grad\ \widetilde{h} = \widetilde{{}^B grad\ h}$, onde $\widetilde{h} = h \circ \pi$ e $\widetilde{{}^B grad\ h}$ é o levantamento de ${}^B grad\ h \in \mathfrak{X}(B)$ para M.*

(b) *$grad\ \widetilde{\phi} = \dfrac{\widetilde{{}^F grad\ \phi}}{\widetilde{f}^2}$, onde $\widetilde{\phi} = \phi \circ \sigma$, $\widetilde{f} = f \circ \pi$ e $\widetilde{{}^F grad\ \phi}$ é o levantamento de ${}^F grad\ \phi \in \mathfrak{X}(F)$ para M.*

Onde $grad$, ${}^B grad$ e ${}^F grad$ são os gradientes com respeito a métrica de M, B e F respectivamente.

Demonstração.

(a) Devemos mostrar que $grad\ \widetilde{h}$ é horizontal (ou seja, σ-relacionado com o campo nulo em F) e $grad\ \widetilde{h}$ é π-relacionado com ${}^B grad\ h$ em B. De fato, em cada $(p,q) \in M$, dado um vetor vertical v, isto é, $v \in T_{(p,q)}F$, então da Definição 2.19 temos

$$\left\langle grad\ \widetilde{h}, v \right\rangle = v(\widetilde{h}) \quad = \quad v(h \circ \pi) = d(h \circ \pi)(v) = dh(d\pi(v)) = (d\pi(v))(h) = 0,$$

pois $d\pi(v) = 0$. Da métrica produto torcido, temos

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle grad\ \widetilde{h}, v \right\rangle_{(p,q)} &= \left\langle d\pi(grad\ \widetilde{h}), d\pi(v) \right\rangle_p^B + (f \circ \pi)^2 \left\langle d\sigma(grad\ \widetilde{h}), d\sigma(v) \right\rangle_q^F \\ &= (f \circ \pi)^2 \left\langle d\sigma(grad\ \widetilde{h}), d\sigma(v) \right\rangle_q^F, \end{aligned}$$

como $(f \circ \pi)^2 > 0$, implica que $\left\langle d\sigma(grad\ \widetilde{h}), d\sigma(v) \right\rangle_q^F = 0$. Como isso vale para todo $v \neq 0$, temos que $d\sigma(grad\ \widetilde{h}) = 0 \in T_{(p,q)}F$. Portanto, $grad\ \widetilde{h}$ é horizontal. Agora, dado um vetor horizontal u, isto é, $u \in T_{(p,q)}B$, então da Definição 2.19 e da métrica produto torcido segue que

$$\begin{aligned} \left\langle grad\ \widetilde{h}, u \right\rangle_{(p,q)} &= \left\langle d\pi(grad\ \widetilde{h}), d\pi(u) \right\rangle_p^B + (f \circ \pi)^2 \left\langle d\sigma(grad\ \widetilde{h}), \underbrace{d\sigma(u)}_{0} \right\rangle_q^F \\ &= u(h \circ \pi) \\ &= (d\pi(u)(h)) \circ \pi = \left\langle {}^B grad\ h, d\pi(u) \right\rangle_p^B \circ \pi, \end{aligned}$$

como $d({}_q\pi)_p : T_{(p,q)}B \to T_pB$ é isomorfismo, $\forall\ (p,q) \in M$, então $d\pi(grad\ \widetilde{h}) = {}^B grad\ h\ \forall\ (p,q) \in M$.

(b) Primeiramente mostremos que $grad\ \widetilde{\phi}$ é vertical. De fato, em cada $(p,q) \in M$, dado um vetor horizontal u, isto é, $u \in T_{(p,q)}B$, então

$$\left\langle grad\ \widetilde{\phi}, u \right\rangle \quad = \quad u(\widetilde{\phi}) = u(\phi \circ \sigma) = (d\sigma(u))(\phi) = 0.$$

Da métrica produto torcido segue que

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle grad\ \widetilde{\phi}, u \right\rangle_{(p,q)} &= \left\langle d\pi(grad\ \widetilde{\phi}), d\pi(u) \right\rangle_p^B + (f \circ \pi)^2 \left\langle d\sigma(grad\ \widetilde{\phi}), d\sigma(u) \right\rangle_q^F \\ &= \left\langle d\pi(grad\ \widetilde{\phi}), d\pi(u) \right\rangle_p^B, \end{aligned}$$

pois $d\sigma(u) = 0$. Como vale para todo $0 \neq u \in T_{(p,q)}B$, segue que, $d\pi(grad\ \widetilde{\phi}) = 0$. Portanto, $grad\ \widetilde{\phi}$ é vertical. Agora, dado um vetor vertical $v \in T_{(p,q)}F$, então

$$\begin{aligned} \left\langle grad\ \widetilde{\phi}, v \right\rangle_{(p,q)} &= \left\langle d\pi(grad\ \widetilde{\phi}), d\pi(v) \right\rangle_p^B + (f \circ \pi)^2 \left\langle d\sigma(grad\widetilde{\phi}), d\sigma(v) \right\rangle_q^F \\ &= (f \circ \pi)^2 \left\langle d\sigma(grad\ \widetilde{\phi}), d\sigma(v) \right\rangle_q^F \\ &= v(\widetilde{\phi}) = v(\phi \circ \sigma) = (d\sigma(v)(\phi)) \circ \sigma \\ &= \left\langle {}^F grad\ \phi, d\sigma(v) \right\rangle_q^F \circ \sigma, \end{aligned}$$

pois $d\pi(v) = 0$. Como $d({}_p\pi)_q : T_{(p,q)}F \to T_qF$ é isomorfismo, $\forall\ (p,q) \in M$, então $d\sigma(grad\ \widetilde{\phi}) = \dfrac{{}^F grad\ \phi}{(f \circ \pi)^2}$, $\forall\ (p,q) \in M$, isto é $grad\ \widetilde{\phi} = \widetilde{\dfrac{{}^F grad\ \phi}{(f \circ \pi)^2}}$.

□

Agora estudaremos a conexão Riemanniana no produto torcido, onde obteremos expressões da mesma em função de f e das geometrias de B e F.

Proposição 2.63 *Seja $M = B \times_f F$ uma variedade produto torcido. Se $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{V}$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$, então*

(a) $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ *é o levantamento de* ${}^B\nabla_X Y$ *em B.*

(b) $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{V} = \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{X} = \left(\dfrac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}} \right) \widetilde{V}.$

(c) $\mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W}) = -\left(\dfrac{\left\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \right\rangle}{\widetilde{f}} \right) grad\ \widetilde{f}.$

(d) $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) \in \mathfrak{L}(F)$ *é o levantamento de* ${}^{F}\nabla_{V}W$ *em* F.

Na notação acima, $\widetilde{f} = f \circ \pi$.

Demonstração.

(a) Devemos mostrar que $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é horizontal e π-relacionado com ${}^{B}\nabla_{X}Y$ em B. De fato, dado $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F)$, um campo vertical, então pela Fórmula de Koszul, pelo Corolário 2.58 e o fato de que campos tangentes as folhas são ortogonais a campos tangentes a base, temos que

$$\begin{aligned} 2\left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{V}\right\rangle &= \widetilde{Y}\underbrace{\left\langle \widetilde{X},\widetilde{V}\right\rangle}_{0} + \tilde{X}\underbrace{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{Y}\right\rangle}_{0} - \widetilde{V}\left\langle \widetilde{Y},\widetilde{X}\right\rangle - \left\langle \underbrace{[\widetilde{Y},\widetilde{V}]}_{0},\widetilde{X}\right\rangle - \left\langle \underbrace{[\widetilde{X},\widetilde{V}]}_{0},\widetilde{Y}\right\rangle \\ &- \left\langle [\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{V}\right\rangle = -\widetilde{V}\left\langle \widetilde{Y},\widetilde{X}\right\rangle - \left\langle [\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{V}\right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$, temos que $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \in (B)$ é o levantamento de $[X,Y]$ em B. Logo, $\left\langle [\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{V}\right\rangle = 0$. Portanto,

$$2\left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{V}\right\rangle = -\widetilde{V}\left\langle \widetilde{Y},\widetilde{X}\right\rangle.$$

Agora, pela métrica torcida, em cada $x = (p,q) \in M$, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{Y},\widetilde{X}\right\rangle(p,q) &= \left\langle d\pi_x(\widetilde{Y}), d\pi_x(\widetilde{X})\right\rangle_p^B + (f\circ\pi(x))^2 \left\langle \underbrace{d\sigma_x(\widetilde{Y})}_{0}, \underbrace{d\sigma_x(\widetilde{X})}_{0}\right\rangle_q^F \\ &= \langle (Y\circ\pi)(p,q), (X\circ\pi)(p,q)\rangle_p^B = \left(\langle X,Y\rangle^B \circ \pi\right)(p,q), \end{aligned}$$

isto é, $\left\langle \widetilde{Y},\widetilde{X}\right\rangle = \langle Y,X\rangle^B \circ \pi$ e daí,

$$\widetilde{V}\left\langle \widetilde{Y},\widetilde{X}\right\rangle = \widetilde{V}\left(\langle Y,X\rangle^B \circ \pi\right) = d\pi(\widetilde{V})(\langle Y,X\rangle^B) = 0,$$

pois $d\pi(\widetilde{V}) = 0$. Assim, $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é ortogonal a $\widetilde{V}\ \forall\ \widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F)$. Portanto, $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é um campo horizontal.
Agora, dado $\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$, temos que

$$\widetilde{Y}\left\langle \widetilde{X},\widetilde{Z}\right\rangle = \widetilde{Y}\left(\langle X,Z\rangle^B \circ \pi\right) = (d\pi(\widetilde{Y})\langle X,Z\rangle^B)\circ\pi = (Y\langle X,Z\rangle^B \circ \pi.$$

Logo, da métrica torcida temos

$$2\left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right\rangle_{(p,q)} = \left(2\left\langle d\pi(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}), d\pi(\widetilde{Z})\right\rangle_p^B\right)\circ\pi.$$

Da Fórmula de Koszul ficamos com

$$\begin{aligned}
\left(2\left\langle d\pi(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}), d\pi(\widetilde{Z})\right\rangle^{B}\right)\circ\pi &= 2\left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right\rangle \\
&= \widetilde{Y}\left\langle \widetilde{X},\widetilde{Z}\right\rangle + \widetilde{X}\left\langle \widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\rangle - \widetilde{Z}\left\langle \widetilde{Y},\widetilde{X}\right\rangle \\
&- \left\langle [\widetilde{Y},\widetilde{Z}],\widetilde{X}\right\rangle - \left\langle [\widetilde{X},\widetilde{Z}],\widetilde{Y}\right\rangle - \left\langle [\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{Z}\right\rangle \\
&= (Y\langle X,Z\rangle^{B} + X\langle Z,Y\rangle^{B} - Z\langle X,Y\rangle^{B} \\
&- \langle [Y,Z],X\rangle^{B} - \langle [X,Z],Y\rangle^{B} - \langle [Y,X],Z\rangle^{B})\circ\pi \\
&= (2\left\langle {}^{B}\nabla_{X}Y,Z\right\rangle^{B})\circ\pi,\ \forall\widetilde{Z}\in\mathfrak{L}(B).
\end{aligned}$$

Portanto, como $d\pi\Big|_{T_{(p,q)}B}$ é isomorfismo, segue o resultado. Ainda, como $\pi|_{B\times q}$ é uma isometria, em B, preserva a conexão que depende somente da métrica, ver (2-2). Portanto, ∇ quando aplicado a campos de levantamento da base é a conexão Riemanniana da base B, a menos de π-relacionados.

(b) Do Corolário 2.58 e da simetria da conexão, temos $0 = [\widetilde{X},\widetilde{V}] = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$. Logo $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$. Esses campos $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}$ e $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$ são verticais, pois por (a) e pela compatibilidade da conexão,

$$0 = \widetilde{X}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{Y}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V},\widetilde{Y}\right\rangle + \left\langle \widetilde{V},\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right\rangle \Rightarrow \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V},\widetilde{Y}\right\rangle = -\left\langle \widetilde{V},\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right\rangle.$$

Uma vez que, $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\in\mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(F)$.

Agora, dado $\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F)$, pela Fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}
2\left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle = {} & \widetilde{V}\underbrace{\left\langle \widetilde{X},\widetilde{W}\right\rangle}_{0} + \widetilde{X}\left\langle \widetilde{W},\widetilde{V}\right\rangle - \widetilde{W}\underbrace{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{X}\right\rangle}_{0} - \underbrace{\left\langle [\widetilde{V},\widetilde{W}],\widetilde{X}\right\rangle}_{0} \\
- & \left\langle \underbrace{[\widetilde{X},\widetilde{W}]}_{0},\widetilde{V}\right\rangle - \left\langle \underbrace{[\widetilde{V},\widetilde{X}]}_{0},\widetilde{W}\right\rangle = \widetilde{X}\left\langle \widetilde{W},\widetilde{V}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{2-11}$$

Encontraremos uma expressão para $\widetilde{X}\left\langle \widetilde{W},\widetilde{V}\right\rangle$ usando a métrica torcida. Pela

métrica torcida, em cada $x=(p,q)\in M$, temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle(p,q) &= \left\langle \underbrace{d\pi_x(\widetilde{V})}_{0},\underbrace{d\pi_x(\widetilde{W})}_{0}\right\rangle_p^B + (f\circ\pi(x))^2\left\langle d\sigma_x(\widetilde{V}),d\sigma_x(\widetilde{W})\right\rangle_q^F\\ &= (f\circ\pi(p,q))^2\left\langle (V\circ\sigma)(p,q),(W\circ\sigma)(p,q)\right\rangle_q^F\\ &= \widetilde{f}^2(p,q)\left((\langle V,W\rangle^F\circ\sigma)(p,q)\right).\end{aligned}$$

Isto é, $\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle = \widetilde{f}^2\left(\langle V,W\rangle^F\circ\sigma\right)$ e daí

$$\begin{aligned}\widetilde{X}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle &= \widetilde{X}\left[\widetilde{f}^2(\langle V,W\rangle^F\circ\sigma)\right] = \widetilde{X}(\widetilde{f}^2)(\langle V,W\rangle^F\circ\sigma) + \widetilde{f}^2\left[\widetilde{X}(\langle V,W\rangle^F\circ\sigma)\right]\\ &= 2\widetilde{f}\widetilde{X}(\widetilde{f})\left(\langle V,W\rangle^F\circ\sigma\right) + \widetilde{f}^2\left[\underbrace{d\sigma(\widetilde{X})}_{0}(\langle V,W\rangle^F)\right]\\ &= 2\widetilde{f}\widetilde{X}(\widetilde{f})\frac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}^2} = \frac{2(\widetilde{X}(\widetilde{f}))}{\widetilde{f}}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle,\end{aligned} \tag{2-12}$$

onde usamos, na penúltima equação, o fato que $\widetilde{f}^2\langle V,W\rangle_q^F\circ\sigma = \left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle_{(p,q)}$. Comparando (2-11) e (2-12), obtemos

$$2\left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle = \frac{2\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle,\ \forall\,\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F).$$

Portanto,

$$\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \left(\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right)\widetilde{V}.$$

(c) Temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) + \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$, em cada $(p,q)\in M$. Assim, como $\mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})\in\mathfrak{X}(M)$, temos $\left\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W},\widetilde{X}\right\rangle = \left\langle \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}),\widetilde{X}\right\rangle + \left\langle \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}),\widetilde{X}\right\rangle = \left\langle \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}),\widetilde{X}\right\rangle$, $\forall\,\widetilde{X}\in\mathfrak{L}(B)$, pois $\mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})\in\mathfrak{L}(B)$. Daí, dado $\widetilde{X}\in\mathfrak{L}(B)$ vem que

$$0 = \widetilde{V}\left\langle \widetilde{X},\widetilde{W}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X},\widetilde{W}\right\rangle + \left\langle \tilde{X},\nabla_{\tilde{V}}\tilde{W}\right\rangle.$$

Logo, de (b),obtemos que

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{X},\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right\rangle &= -\left\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X},\widetilde{W}\right\rangle = -\left\langle \widetilde{W},\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V}\right\rangle = -\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle\\ &= -\frac{\left\langle \widetilde{X},grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle = -\left\langle \widetilde{X},\frac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}}grad\ \widetilde{f}\right\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja, $\left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} \right\rangle = -\left\langle \widetilde{X}, \dfrac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f} \right\rangle$. Isso vale para todo $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$ e como $\left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} \right\rangle = \left\langle \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}), \widetilde{X} \right\rangle$, segue que,

$$\mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) = -\left(\frac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}}\right) grad\ \widetilde{f}.$$

(d) Novamente, temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) + \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$, em cada $(p,q) \in M$, $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) \in \mathfrak{X}(M)$, logo $\left\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}, \widetilde{U} \right\rangle = \left\langle \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}), \widetilde{U} \right\rangle + \left\langle \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}), \widetilde{U} \right\rangle = \left\langle \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}), \widetilde{U} \right\rangle$ $\forall$ $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F)$, pois $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) \in \mathfrak{L}(F)$. Observe que $d\pi(\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})) = 0$, $\forall$ $(p,q) \in M$, pois $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) \in \mathfrak{L}(F)$. Logo, $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$ é π-relacionado com o $0 \in \mathfrak{X}(B)$ (campo nulo). Agora, dado $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F)$, como $\left\langle \widetilde{V}, \widetilde{U} \right\rangle = \widetilde{f}^2(\langle V,U\rangle^F \circ \sigma)$, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}\left\langle \widetilde{V}, \widetilde{U} \right\rangle &= \widetilde{W}\left[\widetilde{f}^2(\langle V,U\rangle^F \circ \sigma)\right] = \widetilde{W}(\widetilde{f}^2)(\langle V,U\rangle^F \circ \sigma + \widetilde{f}^2\left[\widetilde{W}(\langle V,U\rangle^F \circ \sigma)\right] \\
&= 2\widetilde{f}(\widetilde{W}(\widetilde{f}))(\langle V,U\rangle^F \circ \sigma) + \widetilde{f}^2\left[(d\sigma(\widetilde{W})\langle V,U\rangle^F \circ \sigma)\right] \\
&= 2\widetilde{f}(\widetilde{W}(f\circ\pi))(\langle V,U\rangle^F \circ \sigma) + \widetilde{f}^2\left[(W\langle V,U\rangle^F \circ \sigma\right] \\
&= 2\widetilde{f}(\underbrace{d\pi(\widetilde{W})}_{0}(f)(\langle V,U\rangle^F \circ \sigma) + \widetilde{f}^2\left[(W\langle V,U\rangle^F)\circ\sigma\right] \\
&= \widetilde{f}^2\left[(W\langle V,U\rangle^F)\circ\sigma\right].
\end{aligned}$$

Da métrica torcida e da Fórmula de Koszul, temos que

$$\begin{aligned}
2\left\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}, \widetilde{U} \right\rangle &= 2\left\langle \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}), \widetilde{U} \right\rangle = 2(\widetilde{f})^2\left(\left\langle d\sigma(\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})), d\sigma(\widetilde{U})\right\rangle^F \circ \sigma\right) \\
&= \widetilde{W}\left\langle \widetilde{V}, \widetilde{U} \right\rangle + \widetilde{V}\left\langle \widetilde{U}, \widetilde{W} \right\rangle - \widetilde{U}\left\langle \widetilde{W}, \widetilde{V} \right\rangle - \left\langle [\widetilde{W}, \widetilde{U}], \widetilde{V} \right\rangle \\
&- \left\langle [\widetilde{V}, \widetilde{U}], \widetilde{W} \right\rangle - \left\langle [\widetilde{W}, \widetilde{V}], \widetilde{U} \right\rangle \\
&= \widetilde{f}^2[(W\langle V,U\rangle^F + V\langle U,W\rangle^F - U\langle W,V\rangle^F \\
&- \langle [W,U],V\rangle^F - \langle [V,U],W\rangle^F - \langle [W,V],U\rangle^F)\circ\sigma] \\
&= (\widetilde{f})^2[2\left\langle {}^F\nabla_V W, U\right\rangle^F)\circ\sigma] = 2(\widetilde{f})^2(\left\langle {}^F\nabla_V W, U\right\rangle^F \circ \sigma).
\end{aligned}$$

Como $d\sigma\Big|_{T_{(p,q)}F}$ é isomorfismo, segue que $d\sigma(\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})) = \nabla^F_V W$, ou seja, $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$ é σ-relacionado com $\nabla^F_V W$. Portanto, $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) = \widetilde{\nabla^F_V W} \in \mathfrak{L}(F)$ é a conexão Riemanniana em cada fibra $p \times F$, pois ${}_p\sigma$ é uma homotetia em cada fibra $p \times F$ sobre F, e da Proposição 2.16, temos que homotetia preserva a conexão.

□

2.5.1 Curvatura do produto torcido

Nesta seção vamos determinar o tensor curvatura, tensor de Ricci e a curvatura escalar, em função das correspondentes geometrias de B e F e da função torção f. Começamos com a seguinte definição:

Definição 2.64 *Seja $M = B \times_f F$ uma variedade produto torcido. Se T é um tensor covariante em B, o* ***levantamento*** $\widetilde{T}$ ***de*** *T a M é exatamente o pullback de T pela projeção $\pi : M \to B$, isto é, $\widetilde{T} := \pi^*(T)$.*

Observe que esta definição não envolve métrica, portanto são correspondentemente válidas para levantamentos de F.

Proposição 2.65 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido, R, ${}^BR$ e ${}^FR$ os tensores curvatura Riemanniana de M, B e F, respectivamente. Se $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$, então*

(a) $R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$ *é o levantamento de* ${}^BR(X,Y)Z$ *em B.*

(b) $R(\widetilde{V}, \widetilde{X})\widetilde{Y} = \dfrac{\widetilde{Hess\ f}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})}{\widetilde{f}}\widetilde{V}$, *onde* $\widetilde{Hess\ f}$ *é o levantamento do Hessiano de f a M.*

(c) $R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{V} = R(\widetilde{V}, \widetilde{W})\widetilde{X} = 0.$

(d) $R(\widetilde{X}, \widetilde{V})\widetilde{W} = \dfrac{\left\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \right\rangle}{\widetilde{f}} \nabla_{\widetilde{X}} grad\ \widetilde{f}.$

(e) $R(\widetilde{V}, \widetilde{W})\widetilde{U} = \widetilde{{}^FR(\widetilde{V}, \widetilde{W})\widetilde{U}} - \dfrac{\left\langle grad\ \widetilde{f}, grad\ \widetilde{f} \right\rangle}{\widetilde{f}^2} \left(\left\langle \widetilde{V}, \widetilde{U} \right\rangle \widetilde{W} - \left\langle \widetilde{W}, \widetilde{U} \right\rangle \widetilde{V} \right).$

Na notação acima, $\widetilde{f} = f \circ \pi$.

Demonstração.

(a) Para mostrarmos este item, basta verificar que $R\Big|_{\mathfrak{L}(B)}$ é horizontal e π-relacionado a ${}^BR$, isto é,

$$d\pi(R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}) = {}^BR((X,Y)Z) \circ \pi.$$

De fato, dado $\widetilde{S} \in \mathfrak{L}(B)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left\langle d\pi(R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}), d\pi(\widetilde{S})\right\rangle^B &= \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{S}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} + \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z},\widetilde{S}\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla^B_Y\nabla^B_X Z - \nabla^B_X\nabla^B_Y Z + \nabla^B_{[X,Y]}Z, S\right\rangle^B \circ \pi \\
&= \left\langle {}^BR(X,Y)Z,S\right\rangle^B \circ \pi \\
&= \left\langle {}^BR(d\pi(\widetilde{X}), d\pi(\widetilde{Y}))d\pi(\widetilde{Z}), d\pi(\widetilde{S})\right\rangle^B \circ \pi \\
&= \pi^*({}^BR)(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z},\widetilde{S}).
\end{aligned}$$

$R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}$ é horizontal. De fato,

$$\begin{aligned}
\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{V}\right\rangle &= (f\circ\pi)^2\left\langle d\sigma(R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}), d\sigma(\widetilde{V})\right\rangle^F \\
&= \left\langle \nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} + \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z},\widetilde{V}\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $R|_{\mathfrak{L}(B)} = \pi^*({}^BR)$, isto é, $R|_{\mathfrak{L}(B)}$ é o levantamento de ${}^BR$.

(b) Como $[\widetilde{X},\widetilde{V}] = 0$, temos que

$$R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{X}]}\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}.$$

Daí, pela Proposição 2.63, obtemos que

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} &= \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}((\widetilde{Y}(\widetilde{f})/\widetilde{f})\widetilde{V}) - ((\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(\widetilde{f})/\widetilde{f})\widetilde{V} \\
&= \widetilde{X}\left[\frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{V} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \frac{\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{Y}(\widetilde{f}))}{\widetilde{f}} + \widetilde{Y}(\widetilde{f})\widetilde{X}\left(\frac{1}{\widetilde{f}}\right)\right]\widetilde{V} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V} - \frac{\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V} \\
&= \frac{\widetilde{X}(\widetilde{Y}(\widetilde{f}))}{\widetilde{f}}\widetilde{V} - \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}^2}\widetilde{V} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V} - \frac{\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V} \\
&= \left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{Y}(\widetilde{f}))}{\widetilde{f}} - \frac{\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{V} = \frac{\widetilde{Hess\ f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}\widetilde{V}.
\end{aligned}$$

(c) Temos que,

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X} &= \nabla_{\widetilde{W}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}-\nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{X}+\nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X}\\
&= \nabla_{\widetilde{W}}(\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V})-\nabla_{\widetilde{V}}(\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{W})+\nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X}\\
&= \widetilde{W}\left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{V}+\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{V}-\widetilde{V}\left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{W}-\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}+\nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(\widetilde{f})(p,q) &= \widetilde{X}(f\circ\pi)(p,q)=\widetilde{X}(p,q)(f\circ\pi)\\
&= d\pi(\widetilde{X}(p,q))(f)=X(p)(f)\circ\pi=(X(f)\circ\pi)(p,q),
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}\left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right] &= \frac{\widetilde{V}(\widetilde{X}(\widetilde{f}))}{\widetilde{f}}+\widetilde{X}(\widetilde{f})\widetilde{V}\left(\frac{1}{\widetilde{f}}\right)=\frac{\widetilde{V}(X(f)\circ\pi)}{\widetilde{f}}-\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})\widetilde{V}(f\circ\pi)}{\widetilde{f}^2}\\
&= \frac{d\pi(\widetilde{V})(X(f))}{\widetilde{f}}-\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})d\pi(\widetilde{V})(f)}{\widetilde{f}^2}=0.
\end{aligned}$$

O mesmo vale para $\widetilde{W}\left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]$ ou qualquer outro campo pertencente a $\mathfrak{L}(F)$. Assim,

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X} &= \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\left[\nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{V}-\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right]+\nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X}=\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}[\widetilde{W},\widetilde{V}]+\nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X}\\
&= \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}[\widetilde{W},\widetilde{V}]+\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}[\widetilde{V},\widetilde{W}]=0,\ \forall\,\widetilde{X}\in\mathfrak{X}(B),\ \forall\,\widetilde{V},\widetilde{W}\in\mathfrak{X}(F),
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da Proposição 2.63(b) e a última segue da anti-simetria do colchete. Portanto, pela simetria do tensor curvatura, $\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle=\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X},\widetilde{Y}\right\rangle=0$. Por (a), segue que $\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V},\widetilde{Z}\right\rangle=-\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{V}\right\rangle=0$. Como essas equações valem para todo $\widetilde{Z}\in\mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F)$, logo

$$R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V}=0,\ \forall\,\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathfrak{L}(B),\ \forall\,\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(F).$$

(d) Sabemos que, $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W}$ é horizontal, pois $\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W},\widetilde{U}\right\rangle=\left\langle R(\widetilde{W},\widetilde{U})\widetilde{X},\widetilde{V}\right\rangle=0$, por (c). Como $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X}=0$, pela primeira Identidade de Bianchi, tem-se que $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W}=-R(\widetilde{W},\widetilde{X})\widetilde{V}=R(\widetilde{X},\widetilde{W})\widetilde{V}$. Assim, usando as simetrias do tensor

curvatura e por (b), obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W},\widetilde{Y}\right\rangle &= \left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y},\widetilde{W}\right\rangle = \left\langle \frac{\widetilde{Hess\ f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}\widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle \\ &= \frac{\widetilde{Hess\ f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}} = \frac{\left\langle \nabla_{\widetilde{X}} grad\ \widetilde{f},\widetilde{Y}\right\rangle\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}}.\end{aligned}$$

Como $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W}$ é horizontal e $\widetilde{Y}$ é qualquer, então

$$R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W} = \frac{\left(\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle\right)}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{X}} grad\ \widetilde{f}.$$

(e) Dado $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$, $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U}$ é vertical pois, pela simetria do tensor curvatura e por (c), tem-se que $\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U},\widetilde{X}\right\rangle = -\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X},\widetilde{U}\right\rangle = 0$. Pela Proposição 2.63 tem-se que

$$\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U} = \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U}) + \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U}) = \widetilde{{}^F\nabla_V U} - \frac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{U}\right\rangle}{\widetilde{f}} grad\ \widetilde{f}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\nabla_{\widetilde{W}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U} &= \nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{{}^F\nabla_V U} - \nabla_{\widetilde{W}}\left(\frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle}{\widetilde{f}} grad\ \widetilde{f}\right) \\ &= \widetilde{{}^F\nabla_W\, {}^F\nabla_V U} - \frac{\left\langle \widetilde{{}^F\nabla_V U},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}} grad\ \widetilde{f} - \frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{W}} grad\ \widetilde{f} \\ &- \widetilde{W}\left[\frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle}{\widetilde{f}}\right] grad\ \widetilde{f} = {}^F\ \widetilde{\nabla_W\, {}^F\nabla_V U} - \frac{\left\langle \widetilde{{}^F\nabla_V U},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}} grad\ \widetilde{f} \\ &- \frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle}{\widetilde{f}}\frac{\left\langle grad\ \widetilde{f}, grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}}\widetilde{W} - \widetilde{W}\left[\frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle}{\widetilde{f}}\right] grad\ \widetilde{f}.\end{aligned}$$

Daí, dado $\widetilde{T} \in \mathfrak{L}(F)$,

$$\left\langle \nabla_{\widetilde{W}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U},\widetilde{T}\right\rangle = \left\langle \widetilde{{}^F\nabla_W\, {}^F\nabla_V U},\widetilde{T}\right\rangle - \frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle\left\langle grad\ \widetilde{f}, grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}\left\langle \widetilde{W},\widetilde{T}\right\rangle.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{U},\widetilde{T}\right\rangle &= \left\langle \nabla_{[V,W]^{\sim}}\widetilde{U},\widetilde{T}\right\rangle = \left\langle \widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U} - \frac{\left\langle \widetilde{U},[V,W]^{\sim}\right\rangle}{\widetilde{f}} grad\ \widetilde{f},\widetilde{T}\right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U},\widetilde{T}\right\rangle,\end{aligned}$$

pois $grad\,\widetilde{f} = \widetilde{grad\ f} \in \mathfrak{L}(B)$. Logo,

$$\begin{aligned}\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U},\widetilde{T}\right\rangle &= \left\langle \widetilde{{}^F\nabla_W\,{}^F\nabla_V U},\widetilde{T}\right\rangle \\ &- \frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle\left\langle grad\ \widetilde{f},grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}\left\langle \widetilde{W},\widetilde{T}\right\rangle - \left\langle \widetilde{{}^F\nabla_V\,{}^F\nabla_W U},\widetilde{T}\right\rangle \\ &+ \frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{W}\right\rangle\left\langle grad\ \widetilde{f},grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}\left\langle \widetilde{V},\widetilde{T}\right\rangle + \left\langle \widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U},\widetilde{T}\right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{{}^F\nabla_W\,{}^F\nabla_V U} - \frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{V}\right\rangle\left\langle grad\ \widetilde{f},grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}\widetilde{W} - \widetilde{{}^F\nabla_V\,{}^F\nabla_W U}\right. \\ &+ \left.\frac{\left\langle \widetilde{U},\widetilde{W}\right\rangle\left\langle grad\ \widetilde{f},grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}\widetilde{V} + \widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U},\widetilde{T}\right\rangle,\end{aligned}$$

$\forall\ \widetilde{T} \in \mathfrak{L}(F)$. Portanto,

$$R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} = \widetilde{{}^FR}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} - \frac{\left\langle grad\ \widetilde{f},grad\ \widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}\left[\left\langle \widetilde{V},\widetilde{U}\right\rangle\widetilde{W} - \left\langle \widetilde{W},\widetilde{U}\right\rangle\widetilde{V}\right].$$

□

Corolário 2.66 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido, com $dimF = m > 1$, $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{V}$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$. Então,*

(a) $Ric(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = {}^BRic(X,Y) - \frac{d}{\widetilde{f}}\widetilde{Hess\ f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$.

(b) $Ric(\widetilde{X},\widetilde{V}) = 0$.

(c) $Ric(\widetilde{V},\widetilde{W}) = {}^FRic(V,W) - \left(\frac{\Delta_B f}{f} + (m-1)\frac{\langle grad\ f,grad\ f\rangle}{f^2}\right)\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle$.

Demonstração. Seja $\{\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_n,\widetilde{e}_{n+1},\ldots,\widetilde{e}_{n+d}\}$ um referencial ortonormal local em M, com $\widetilde{e}_i \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{e}_j \in \mathfrak{L}(F)$, de tal forma que $1 \le i \le n$, $n+1 \le j \le n+d$, onde $dimB = n$ e $dimF = m$.

(a) Da Definição 2.33 o tensor de Ricci em $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ é dado por

$$Ric(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \sum_{s=1}^{n+m} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_s)\widetilde{Y},\widetilde{e}_s \right\rangle.$$

No entanto, para $i = 1,\ldots,n$, pela Proposição 2.65(a) temos que

$$\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{Y},\widetilde{e}_i \right\rangle = \left\langle \widetilde{{}^{B}R(X,e_i)Y},\widetilde{e}_i \right\rangle = \left\langle {}^{B}R(X,e_i)Y,e_i \right\rangle^{B} \circ \pi$$

e para $j = n+1,\ldots,n+m$, pela Proposição 2.65(b) obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{Y},\widetilde{e}_j \right\rangle = -\left\langle R(\widetilde{e}_j,\widetilde{X})\widetilde{Y},\widetilde{e}_j \right\rangle &= -\left\langle \frac{\widetilde{Hess\, f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}\widetilde{e}_j,\widetilde{e}_j \right\rangle \\ &= -\frac{\widetilde{Hess\, f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Ric(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= \sum_{s=1}^{n+m} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_s)\widetilde{Y},\widetilde{e}_s \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{Y},\widetilde{e}_i \right\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+m} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{Y},\widetilde{e}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle {}^{B}R(X,e_i)Y,e_i \right\rangle^{B} \circ \pi + \sum_{j=n+1}^{n+m} -\frac{\widetilde{Hess\, f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}} \\ &= \left[{}^{B}Ric(X,Y) - \frac{d}{f} Hess\, f(X,Y) \right] \circ \pi. \end{aligned}$$

(b) Observe agora que, para $i = 1,\ldots,n$, $j = n+1,\ldots,n+d$, e pela Proposição 2.65(c) temos que $R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{V} = 0$ e $\left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{V},\widetilde{e}_j \right\rangle = \left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_j)\widetilde{X},\widetilde{e}_j \right\rangle = 0$, portanto

$$Ric(\widetilde{X},\widetilde{V}) = \sum_{s=1}^{n+m} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_s)\widetilde{V},\widetilde{e}_s \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{V},\widetilde{e}_i \right\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+m} \left\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{V},\widetilde{e}_j \right\rangle = 0.$$

(c) Por último, para $i = 1,\ldots,n$, $j = n+1,\ldots,n+d$, pela Proposição 2.65(d) e pela Proposição 2.65(e) temos que

$$\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_i)\widetilde{W},\widetilde{e}_i \right\rangle = \left\langle -R(\widetilde{e}_i,\widetilde{V})\widetilde{W},\widetilde{e}_i \right\rangle = -\frac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W} \right\rangle}{\widetilde{f}} \left\langle \nabla_{\widetilde{e}_i}\nabla\widetilde{f},\widetilde{e}_i \right\rangle,$$

$$\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_j)\widetilde{W},\widetilde{e}_j \right\rangle = \left\langle \widetilde{{}^{F}R(V,e_j)W} - \frac{\left\langle \nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f} \right\rangle}{\widetilde{f}^2} \left[\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W} \right\rangle \widetilde{e}_j - \left\langle \widetilde{W},\widetilde{e}_j \right\rangle \widetilde{V} \right], \widetilde{e}_j \right\rangle.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
Ric(\widetilde{V},\widetilde{W}) &= \sum_{s=1}^{n+m}\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_s)\widetilde{W},\widetilde{e}_s\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_i)\widetilde{W},\widetilde{e}_i\right\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+m}\left\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_j)\widetilde{W},\widetilde{e}_j\right\rangle \\
&= -\frac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{\widetilde{e}_i}\nabla\widetilde{f},\widetilde{e}_i\right\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+m}\left\langle {}^{F}\widetilde{R(V,e_j)}\widetilde{W},\widetilde{e}_j\right\rangle \\
&- \frac{\left\langle \nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}\left[\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle \sum_{j=n+1}^{n+m}\langle \widetilde{e}_j,\widetilde{e}_j\rangle - \sum_{j=n+1}^{n+m}\left\langle \widetilde{W},\widetilde{e}_j\right\rangle\left\langle \widetilde{V},\widetilde{e}_j\right\rangle\right] \\
&= -\frac{\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle}{\widetilde{f}}(\Delta_B f\circ\pi) + \sum_{j=n+1}^{n+m}\widetilde{f}^2(\langle {}^{F}R(V,e_j)W,e_j\rangle^{F}\circ\sigma) \\
&- \frac{\left\langle \nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\right\rangle}{\widetilde{f}^2}[d\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle - \left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle] \\
&= \widetilde{f}^2({}^{F}Ric(V,W)\circ\sigma) - \left[\left(\frac{\Delta_B f}{f} + (m-1)\frac{\langle\nabla f,\nabla f\rangle}{f^2}\right)\circ\pi\right]\left\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

□

CAPÍTULO 3

Métricas quasi-Einstein

Neste capítulo estudaremos a métrica produto torcido e variedades quasi-Einstein. Obteremos resultados de rigidez que serão de grande importância para a demonstração do nosso resultado principal.

Chamamos a tripla (M,g,f) (uma variedade Riemanniana (M,g) com uma função f de M)(m-) quasi-Einstein se satisfaz a equação

$$Ric_f^m = Ric + Hess f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Quando $m = \infty$ é exatamente a equação do gradiente Ricci soliton, isto é, $Ric + Hess f = \lambda g$. Caso λ seja uma função, então temos um quase Ricci soliton gradiente.

Quando m é um inteiro positivo, corresponde ao produto torcido de métricas Einstein. No decorrer da dissertação trabalharemos um pouco sobre esse assunto, pois este é de grande importância para a demonstração de nosso resultado principal.

Quando f é constante, trata-se da equação de Einstein, isto é, $Ric = \lambda g$. Chamaremos assim, uma métrica quasi-Einstein de trivial quando f é constante.

3.1 Métrica produto torcido Einstein

Nesta seção, vamos mostrar que quando m é um inteiro positivo a métrica quasi-Einstein (1-2) corresponde a alguma métrica produto torcido Einstein.

Recordemos que dada duas variedades Riemannianas $(M^n, g_M), (F^m, g_F)$ e uma função suave positiva u de M, a métrica produto torcido de $M \times F$ é definida por $g = g_M + u^2 g_F$. Denotamos isto por $M \times_u F$.

Quando $0 < m < \infty$, consideremos $u = e^{-\frac{f}{m}} \Rightarrow f = -m \log u$.

Considerando uma variedade com métrica quasi-Einstein, sabemos que a equação (1-2) é satisfeita, a saber

$$Ric_f^m = Ric + Hess f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g.$$

Vamos agora mostrar que essa equação é equivalente a $Ric - \frac{m}{u}Hessu = \lambda g$. Para isso, seja (U,X) um sistema de coordenadas em torno de um ponto $p \in M$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ a base associada a X. Então,

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Hess f(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_l},$$
$$R_{ij} = Ric(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_k R^k_{ikj}.$$

Note que $df_p v = \langle \nabla f(p), v\rangle$, $v \in T_pM$, $df(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $df_p \otimes df_p(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = df_p(\frac{\partial}{\partial x_i})df_p(\frac{\partial}{\partial x_j})$.

Daí, (1-2) é igual a

$$\sum_k R^k_{ikj} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_l} - \frac{1}{m}df_p(\frac{\partial}{\partial x_i})df_p(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \lambda g_{ij}. \tag{3-1}$$

Como $f = -m\log u$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = -m\frac{\partial}{\partial x_r}(\log u) = -m\frac{\frac{\partial u}{\partial x_r}}{u}, \quad df(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = -m\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}u - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}}{u^2}.$$

Assim, a equação (3-1) se transforma em,

$$\sum_k R^k_{ikj} - m\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}u - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}}{u^2} + \frac{m}{u}\sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_l} - \frac{m}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda g_{ij}$$
$$\Rightarrow \sum_k R^k_{ikj} - \frac{m}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{m}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{m}{u}\sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_l} - \frac{m}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda g_{ij}$$
$$\Rightarrow \sum_k R^k_{ikj} - \frac{m}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{m}{u}\sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_l} = \lambda g_{ij}$$
$$\Rightarrow \sum_k R^k_{ikj} - \frac{m}{u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) = \lambda g_{ij}.$$

Portanto,

$$Ric - \frac{m}{u}Hessu = \lambda g. \tag{3-2}$$

Assim, podemos usar a (3-2) para estudar (1-2) quando m é finito, ou vice-versa.

Uma variedade Riemanniana M é chamada **Einstein** se o tensor de Ricci é proporcional ao tensor métrico g, isto é, $Ric = \lambda g$, onde λ é uma constante em

M.

No resultado seguinte denotaremos por Ric, Ric_B, Ric_F o tensor curvatura de Ricci de M, B e F, respectivamente e g, g_B, g_F o tensor métrico de M, B e F, respectivamente. Logo segue que:

Proposição 3.1 *O produto torcido $M = B \times_u F$ é Einstein com $Ric = \lambda g$ se, e somente se,*

$$Ric_B = \lambda g_B + \frac{m}{u} Hess\, u, \tag{3-3}$$

$$F \text{ é Einstein com } Ric_F = \mu g_F, \tag{3-4}$$

$$u\Delta u + (m-1)|grad\, u|^2 + \lambda u^2 = \mu. \tag{3-5}$$

Demonstração. Assumindo que $B \times_u F$ é Einstein, então das equações de Ricci do produto torcido Corolário 2.66 temos que

$$Ric(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = Ric_B(X,Y) - \frac{m}{u} Hess\, \tilde{u}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \lambda g(\widetilde{X},\widetilde{Y}),$$

onde m é a dimensão de F e $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$. Portanto, isolando Ric^B e usando a definição de métrica produto torcido temos

$$Ric_B = \lambda g_B + \frac{m}{u} Hess\, u.$$

Seguindo com as equações de Ricci do produto torcido, temos

$$Ric(\widetilde{V},\widetilde{W}) = Ric_F(V,W) - \left(\frac{\Delta u}{u} + \frac{(m-1)}{u^2}\langle grad\, u, grad\, u\rangle\right) g(\widetilde{V},\widetilde{W}) = \lambda g(\widetilde{V},\widetilde{W}),$$

onde $\widetilde{V},\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$. Usando a métrica produto torcido, a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} Ric_F(V,W) &= (u\Delta u + (m-1)\langle grad\, u, grad\, u\rangle)\, g_F(V,W) + \lambda u^2 g_F(V,W) \\ &= \left(u\Delta u + (m-1)|grad\, u|^2 + \lambda u^2\right) g_F(V,W). \end{aligned}$$

Temos que o termo entre parênteses que multiplica a métrica g_F é constante em relação a F, pois depende somente da função torção u que está definida em B. Sendo assim, chamando $u\Delta u + (m-1)|grad\, u|^2 + \lambda u^2$ de μ, temos

$$Ric_F(V,W) = \mu g_F(V,W).$$

Ou seja, F é Einstein com constante $\mu = u\Delta u + (m-1)|grad\, u|^2 + \lambda u^2$.

Reciprocamente, assumindo que valem as Equações (3-3),(3-4) e (3-5) e usando novamente a Equação de Ricci do produto torcido vemos que

$$\begin{aligned} Ric(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= Ric_B(X,Y) - \frac{m}{u} Hess\, \tilde{u}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \lambda g(\widetilde{X},\widetilde{Y}), \\ Ric(\widetilde{X},\widetilde{V}) &= 0 = \lambda g(\widetilde{X},\widetilde{V}), \end{aligned}$$

pois $\lambda g_B(X,Y) = \lambda g(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ e $g(\widetilde{X},\widetilde{V}) = 0$.

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} Ric(\widetilde{V},\widetilde{W}) &= Ric_F(V,W) - \left(\frac{\Delta u}{u} + \frac{(m-1)}{u^2}|grad\ u|^2\right) g(\widetilde{V},\widetilde{W}) \\ &= \frac{\mu}{u^2} g(\widetilde{V},\widetilde{W}) - \left(\frac{\Delta u}{u} + \frac{(m-1)}{u^2}|grad\ u|^2\right) g(\widetilde{V},\widetilde{W}) \\ &= \left(\frac{u\Delta u + (m-1)|grad\ u|^2 + \lambda u^2}{u^2}\right) g(\widetilde{V},\widetilde{W}) \\ &- \left(\frac{\Delta u}{u} + \frac{(m-1)}{u^2}|grad\ u|^2\right) g(\widetilde{V},\widetilde{W}) \\ &= \lambda g(\widetilde{V},\widetilde{W}), \end{aligned}$$

o que mostra que $Ric = \lambda g$, ou seja $B \times_u F$ é Einstein, provando assim o resultado. □

Teorema 3.2 *(M,g) satisfaz a equação (1-2) se, e somente se, a métrica produto torcido $M \times_{e^{-\frac{f}{m}}} F^m$ é Einstein, onde F^m é uma variedade Einstein m-dimensional com constante de Einstein μ satisfazendo*

$$\mu e^{\frac{2}{m}f} = \lambda - \frac{1}{m}(\Delta f - |\nabla f|^2). \tag{3-6}$$

Demonstração. A demonstração decorre imediatamente do Teorema anterior, fazendo $u = e^{-\frac{f}{m}}$. □

O próximo teorema é encontrado no Kim-Kim,e ele nos mostra como construir produtos torcidos desde que temos alguma propriedades válidas, ver [13].

Teorema 3.3 *Seja (B^k, g_B) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $k \geq 2$. Suponha que f é uma função não constante e suave de B satisfazendo (3-3) para uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ e um número natural m. Então, f satisfaz (3-5) para uma constante $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, para um espaço de Einstein compacto (F, g_F) de dimensão m com $Ric_F = \mu g_F$, conseguimos um espaço com produto torcido Einstein compacto $M = B \times_f F$ com $Ric = \lambda g$.*

3.2 Fórmula e Rigidez para métricas quasi-Einstein

Nesta seção demonstraremos algumas fórmulas e resultados de rigidez para métricas quasi-Einstein. Estes resultados são importantes para a demonstração do nosso resultado principal.

Proposição 3.4 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, então*

$$div(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + D_X divX. \tag{3-7}$$

Sendo $X = \nabla f$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$div(\mathcal{L}_X g)(Z) = 2Ric(Z,X) + 2D_Z divX. \tag{3-8}$$

Demonstração. Dado um referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança de $p \in M$ qualquer e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
div(\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}\mathcal{L}_X g)(e_i,X) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(\mathcal{L}_X g(e_i,X)) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(\nabla_{e_i}e_i,X) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(e_i,\nabla_{e_i}X) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_i}X,X) + g(e_i,\nabla_X X)) - \sum_{i=1}^n (g(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}X,X) + g(\nabla_{e_i}e_i,\nabla_X X)) \\
&- \sum_{i=1}^n (g(\nabla_{e_i}X,\nabla_{e_i}X) + g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X)) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} g(\nabla_{e_i}X,X) + \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} g(e_i,\nabla_X X)) - \sum_{i=1}^n (g(\nabla_{e_i}X,\nabla_{e_i}X) - \sum_{i=1}^n g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X)).
\end{aligned}$$

Agora, note que sendo $\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, temos que

$$\alpha_j = g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2, e_j) = \nabla_{e_j}(\frac{1}{2}|X|^2) = g(\nabla_{e_j}X,X).$$

Assim,

$$\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{j=1}^n g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2,e_j)e_j = \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_j}X,X)e_j.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{1}{2}|X|^2 &= div(\nabla(\frac{1}{2}|X|^2)) = div(\sum_{j=1}^n g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2,e_j)e_j) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \nabla_{e_i} g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2,e_j)(e_j,e_i) = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2,e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (g(\nabla_{e_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2,e_i) + g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2,\nabla_{e_i}e_i) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2,e_i).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\nabla_{e_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2 &= \nabla_{e_i}(\sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{e_j}X,X)e_j) = \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{e_j}X,X)\nabla_{e_i}e_j + \sum_{j=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_j}X,X)e_j)e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_j}X,X)e_j)e_j.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{2}|X|^2 &= \sum_{i=1}^{n} g(\sum_{j=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_j}X,X)e_j)e_j,e_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_j}X,X))g(e_i,e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_i}X,X)).\end{aligned}$$

Lembrando que, $\nabla X = \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}X$ podemos concluir que $|\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X,\nabla_{e_i}X)$. Então,

$$\begin{aligned}(div\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}g(\nabla_{e_i}X,X) + \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}g(e_i,\nabla_X X)) \\ &- \sum_{i=1}^{n}(g(\nabla_{e_i}X,\nabla_{e_i}X) - \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X)) \\ &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 + \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}g(e_i,\nabla_X X)) - |\nabla X|^2 - \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X)) \\ &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}e_i,\nabla_X X) + \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{e_i}\nabla_X X)) \\ &- \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X)) \\ &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla^2_{e_i,X}X).\end{aligned}$$

Portanto,

$$(div\mathcal{L}_X g)(X) = \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla^2_{e_i,X}X).$$

Note ainda que,

$$Ric(X,X) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)X,e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{e_i,X}X - \nabla^2_{X,e_i}X,e_i).$$

Logo,

$$(div\mathcal{L}_X g)(X) = \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,e_i}X,e_i).$$

Usando que $X = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j$, encontramos que

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^{n} x^j\nabla_{e_j}e_i = 0 = \sum_{j=1}^{n} x^j\nabla_{e_i}e_j = \nabla_{e_i}X.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
D_X divX &= D_X \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_X g(\nabla_{e_i}X, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X \nabla_{e_i}X, e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X, \nabla_X e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,e_i}X, e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_X e_i}X), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,e_i}X, e_i).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$div(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + D_X divX.$$

Além disso, sendo $X = \nabla f$, então para todo $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$g(\nabla_Z X, Y) = Hess f(Z,Y) = Hess f(Y,Z) = g(Z, \nabla_Y X).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(div\mathcal{L}_X g)(Z) &= traço\{Y(p) \mapsto \nabla_Y \mathcal{L}_X g(z)\} = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\mathcal{L}_X g)(e_i, Z) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(\mathcal{L}_X g(e_i, Z)) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(\nabla_{e_i}e_i, Z) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(e_i, \nabla_{e_i}Z) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_i}X, Z) + g(e_i, \nabla_Z X)) - \sum_{i=1}^{n} (g(\nabla_{e_i}X, \nabla_{e_i}Z) + g(e_i, \nabla_Z X)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\nabla_{e_i}(g(\nabla_Z X, e_i) + g(e_i, \nabla_Z X))] - \sum_{i=1}^{n} (g(\nabla_{\nabla_{e_i}Z}X, e_i) + g(e_i, \nabla_{\nabla_{e_i}Z}X)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(2g(\nabla_Z X, e_i) - 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{e_i}Z}X, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (2g(\nabla_{e_i}\nabla_Z X, e_i) + (2g(\nabla_Z X, \nabla_{e_i}e_i) - 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{e_i}Z}X, e_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} (g(\nabla_{e_i}\nabla_Z X, e_i) + g(\nabla_{\nabla_{e_i}Z}X, e_i)) = 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{e_i,Z}X, e_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} [g(R(e_i, Z)X, e_i) + g(\nabla^2_{Z,e_i}X, e_i) \\
&= 2Ric(Z,X) + 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{Z,e_i}X, e_i) \\
&= 2Ric(Z,X) + 2D_Z divX.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(div\mathcal{L}_X g)(Z) = 2Ric(Z,X) + 2D_Z divX.$$

□

O seguinte Corolário será útil na demonstração de um resultado posterior.

Corolário 3.5 *Quando $X = \nabla f$ é um campo gradiente, a equação (3-7) se transforma*

em

$$2(divHess f)(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |Hess f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle. \tag{3-9}$$

Na notação de (1,1)-tensor,

$$div\nabla\nabla f = Ric\nabla f + \nabla\Delta f. \tag{3-10}$$

Demonstração. Temos agora que se $X = \nabla f$, então $\mathcal{L}_X g(Y,Z) = 2Hess f(Y,Z)$ e $D_X divX = \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle$.

De fato,

$$\nabla^2 f(Y,Z) = g(\nabla_Y \nabla f, Z) \text{ e}$$
$$\mathcal{L}_X g(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y X, Z) = 2g(\nabla_Y X, Z)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}_X g(Y,Z) = 2Hess f(Y,Z).$$

Temos também que,

$$\begin{aligned} D_{\nabla f} div\nabla f &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\sum_{k=1}^{n}\nabla_{e_k}(f)e_k}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g(\nabla_{e_k}(f)\nabla_{e_k}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g(\nabla_{e_k}(f)\nabla_{e_k}\nabla_{e_i}\sum_{j=1}^{n}\nabla_{e_j}(f)e_j, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\nabla_{e_k}(f)\nabla_{e_k}(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}(f))) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle &= \langle \sum_{k=1}^{n}[\nabla_{e_k}(f)e_k, \nabla(\sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f))]\rangle \\ &= \langle \sum_{k=1}^{n}\nabla_{e_k}(f)e_k, \sum_{i=1}^{n}[\nabla(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}(f))) - \nabla(\nabla_{e_i}e_i)(f)]\rangle \\ &= \langle \sum_{k=1}^{n}\nabla_{e_k}(f)e_k, \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n}[\nabla_{e_j}(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}(f)))e_j - \nabla_{e_j}((\nabla_{e_i}e_i)(f))e_j]]\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_k}(f)[\nabla_{e_k}(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}(f))) - \nabla_{e_k}((\nabla_{e_i}e_i)(f))] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_k}(f)\nabla_{e_k}(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}(f))). \end{aligned}$$

Portanto, de fato, $\langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle = D_{\nabla f} div\nabla f$. Concluímos assim de (3-7) que,

$$2(divHess f)(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |Hess f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle.$$

Como $\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \nabla\nabla f$, a equação (3-8) na forma de (1,1)-tensor pode ser escrito

$$div\nabla\nabla f = Ric\nabla f + \nabla\Delta f.$$

□

Tomando o traço de (1-2), obtemos

$$R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 = \lambda n, \tag{3-11}$$

onde R é a curvatura escalar.

Proposição 3.6 *Valem as seguintes igualdades:*

$$(i)\ div(df \otimes df) = \Delta f df + (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^*, \tag{3-12}$$

$$(ii)\ (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^*(\nabla f) = Hess f(\nabla f, \nabla f), \tag{3-13}$$

$$(iii)\ div(Ric(\nabla f)) = \langle divRic, \nabla f\rangle + tr(Ric \circ Hess f), \tag{3-14}$$

$$(iv)\ tr(Ric \circ (df \otimes df)) = Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{3-15}$$

Demonstração. (i) De fato, tomemos $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico, assim

$$\begin{aligned} div(df \otimes df)(e_i) &= div(df(e_i)\nabla f) = df(e_i)\Delta f + \nabla f(df(e_i)) \\ &= df(e_i)\Delta f + \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, e_i\rangle + \langle \nabla f, \nabla_{\nabla f} e_i\rangle \\ &= \Delta f df(e_i) + (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^*(e_i). \end{aligned}$$

(ii) De fato, por definição, $Hess f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle$, isto é

$$Hess f(\nabla f, \nabla f) = \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle = (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^*(\nabla f).$$

(iii) De fato,

$$\begin{aligned} div(Ric(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i}(Ric(\nabla f)), e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Ric)(\nabla f) + Ric(\nabla_{e_i}\nabla f, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Ric)(\nabla f), e_i) + \sum_{i=1}^n g(Ric(Hess f(e_i)), e_i) \\ &= \langle divRic, \nabla f\rangle + tr(Ric \circ Hess f). \end{aligned}$$

(iv) De fato,

$$\begin{aligned} tr(Ric\circ(df\otimes df)(e_i,e_j)) &= \sum_i Ric(e_i,e_j)df(e_i)df(e_i) = \sum_i Ric(df(e_i)e_i, df(e_i)e_i) \\ &= Ric(\sum_i df(e_i)e_i, \sum_i df(e_i)e_i) = Ric(\nabla f,\nabla f) \end{aligned}$$

□

O Lema a seguir apresenta algumas fórmulas para métricas quasi-Einstein que serão muito úteis nos resultados posteriores.

Lema 3.7 *Se* $Ric_f^m = \lambda g$, *então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess f|^2 - Ric(\nabla f,\nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f, \tag{3-16}$$

$$\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f, \tag{3-17}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R &= \frac{m-1}{m}tr(Ric\circ(\lambda I - Ric)) - \frac{1}{m}(R-n\lambda)(R-(n-1)\lambda) \\ &= -\frac{m-1}{m}\left|Ric - \frac{1}{n}Rg\right|^2 \\ &- \frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\big(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\big). \end{aligned} \tag{3-18}$$

Demonstração. Primeiramente demonstraremos (3-16).

De (3-9), temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = 2(divHess f)(\nabla f) + |Hess f|^2 - Ric(\nabla f,\nabla f) - \langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle. \tag{3-19}$$

Aplicando o divergente em (1-2) e sendo $divg = 0$, temos

$$divRic + divHess f - \tfrac{1}{m}div(df\otimes df) = \lambda divg = 0.$$

Da equação (3-12), temos

$$divRic + divHess f - \frac{1}{m}\Delta f df - \frac{1}{m}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^* = 0, \tag{3-20}$$

onde X^* é o dual do campo X. Usando (2-6), temos

$$\begin{aligned} &\frac{\nabla R}{2} + divHess f - \frac{1}{m}\Delta f df - \frac{1}{m}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^* = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\nabla R + 2divHess f - \frac{2}{m}\Delta f df - \frac{2}{m}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^* = 0. \end{aligned}$$

Daí, pela equação (3-13), temos

$$2divHess f(\nabla f) = -\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \frac{2}{m}\Delta f|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}Hess f(\nabla f, \nabla f). \tag{3-21}$$

Aplicando a derivada covariante em (3-11), temos

$$\nabla R + \nabla\Delta f - \frac{1}{m}\nabla|\nabla f|^2 = 0. \tag{3-22}$$

Substituindo (3-22) em (3-21), temos

$$2divHess f(\nabla f) = \langle \nabla\Delta f - \frac{1}{m}\nabla|\nabla f|^2, \nabla f\rangle + \frac{2}{m}\Delta f|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}Hess f(\nabla f, \nabla f).$$

Substituindo a expressão acima em (3-19), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \langle \nabla\Delta f - \frac{1}{m}\nabla|\nabla f|^2, \nabla f\rangle + \frac{2}{m}\Delta f|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}Hess f(\nabla f, \nabla f)\\
&+ |Hess f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle\\
&= \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle - \frac{1}{m}\langle \nabla|\nabla f|^2, \nabla f\rangle + \frac{2}{m}\Delta f|\nabla f|^2\\
&+ \frac{2}{m}Hess f(\nabla f, \nabla f) + |Hess f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle\\
&= |Hess f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}\Delta f|\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos na equação (3-16).

Agora mostraremos (3-17).

Substitua (3-20) em (2-6), assim

$$\begin{aligned}
\nabla R &= 2divRic = -2divHess f + \frac{2}{m}\Delta f df + \frac{2}{m}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^*\\
&= -2divHess f + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f.
\end{aligned}$$

Substituindo (3-10) na equação acima, e usando a equação (3-22), obtemos que

$$\begin{aligned}
\nabla R &= -2Ric(\nabla f) - 2\nabla\Delta f + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f\\
&= -2Ric(\nabla f) + 2\nabla R - \frac{2}{m}\nabla|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f\\
&= -2Ric(\nabla f) + 2\nabla R - \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f,
\end{aligned}$$

que acarreta em,

$$\nabla R = 2Ric(\nabla f) + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f - \frac{2}{m}\Delta f\nabla f. \tag{3-23}$$

De (1-2), temos que $Ric_f^m = Ric + Hess f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g$. Assim,

$$\begin{aligned}
&Ric(\nabla f, \nabla f) + Hess f(\nabla f, \nabla f) - \frac{1}{m} df \otimes df(\nabla f, \nabla f) = \lambda g(\nabla f, \nabla f) \\
&\Leftrightarrow Ric(\nabla f, \nabla f) + (\nabla_{\nabla f} \nabla f)(\nabla f) - \frac{1}{m} df(\nabla f) df(\nabla f) = \lambda |\nabla|^2 \\
&\Leftrightarrow Ric(\nabla f, \nabla f) + (\nabla_{\nabla f} \nabla f)(\nabla f) - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 |\nabla f|^2 = \lambda |\nabla|^2 \\
&\Leftrightarrow (\nabla_{\nabla f} \nabla f)(\nabla f) = \frac{1}{m} |\nabla f|^2 |\nabla f|^2 + \lambda |\nabla f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) \\
&\Leftrightarrow (\nabla_{\nabla f} \nabla f) = \left(\frac{1}{m} |\nabla f|^2 + \lambda \right) \nabla f - Ric(\nabla f).
\end{aligned}$$

Substituindo a equação acima em (3-23) e depois usando (3-11), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla R}{2} &= Ric(\nabla f) + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{1}{m} |\nabla f|^2 + \lambda \right) \nabla f - Ric(\nabla f) \right] - \frac{1}{m} \Delta f \nabla f \\
&= Ric(\nabla f) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} |\nabla f|^2 + \lambda \right) \nabla f - \frac{1}{m} Ric(\nabla f) - \frac{1}{m} \Delta f \nabla f \\
&= \frac{m-1}{m} Ric(\nabla f) + \frac{1}{m} (\lambda + R + \Delta f - \lambda n - \Delta f) \nabla f \\
&= \frac{m-1}{m} Ric(\nabla f) + \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) \nabla f.
\end{aligned}$$

Com isso, chegamos na equação (3-17).

Partiremos agora para a demonstração de (3-18).

Tomando o divergente da equação (3-17), temos

$$\frac{\Delta R}{2} = \frac{m-1}{m} div(Ric(\nabla f)) + \frac{1}{m} div((R - (n-1)\lambda) \nabla f). \tag{3-24}$$

Temos, por propriedade do divergente, que,

$$div((R - (n-1)\lambda) \nabla f) = (R - (n-1)\lambda) \Delta f + \langle \nabla R, \nabla f \rangle. \tag{3-25}$$

Então, usando (2-6), (3-9) e (1-2) na equação (3-14), e a identidade (3-15), temos

$$
\begin{aligned}
div(Ric(\nabla f)) &= \langle divRic, \nabla f\rangle + tr(Ric\circ Hess f)\\
&= \langle \frac{\nabla R}{2}, \nabla f\rangle + tr\left(Ric\circ\left(\frac{1}{m}df\otimes df + \lambda g - Ric\right)\right)\\
&= \langle \frac{\nabla R}{2}, \nabla f\rangle + tr\left(Ric\circ\left(\frac{1}{m}df\otimes df\right)\right) + tr(Ric\circ(\lambda g - Ric))\\
&= \left\langle \frac{\nabla R}{2}, \nabla f\right\rangle + \frac{1}{m}Ric(\nabla f, \nabla f) + tr(Ric\circ(\lambda g - Ric))\\
&= \left\langle \frac{\nabla R}{2}, \nabla f\right\rangle + \frac{1}{m-1}\left(\left\langle \frac{\nabla R}{2}, \nabla f\right\rangle - \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2\right)\\
&+ tr(Ric\circ(\lambda g - Ric)).
\end{aligned}
$$

Assim, colocando a expressão acima e (3-25) em (3-24) e usando (3-11), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta R}{2} &= \frac{m-1}{m}\Big[\langle \frac{\nabla R}{2}, \nabla f\rangle + \frac{1}{m-1}\left(\langle \frac{\nabla R}{2}, \nabla f\rangle - \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2\right)\\
&+ tr(Ric\circ(\lambda g - Ric))\Big] + \frac{1}{m}\left[(R-(n-1)\lambda)\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f\rangle\right]\\
&= \frac{m-1}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \frac{1}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle - \frac{1}{m^2}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2)\\
&+ \frac{m-1}{m}tr(Ric\circ(\lambda g - Ric)) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\Delta f + \frac{1}{m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle\\
&= \frac{m+2}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle - \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\left(\frac{|\nabla f|^2}{m} - \Delta f\right)\\
&+ \frac{m-1}{m}tr(Ric\circ(\lambda g - Ric))\\
&= \frac{m+2}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle - \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)(R + \Delta f - \lambda n - \Delta f)\\
&+ \frac{m-1}{m}tr(Ric\circ(\lambda g - Ric))\\
&= \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R - \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)(R-\lambda n) + \frac{m-1}{m}tr(Ric\circ(\lambda g - Ric)).
\end{aligned}
$$

Como Ric é um operador auto-adjunto, pelo Teorema Espectral, existe uma base de autovetores $\{e_i\}_{i=1}^n$, tais que $Ric(e_i) = \lambda_i e_i$.

Assim, $R = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ e $|Ric|^2 = tr(Ric(Ric)^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, onde $(Ric)^*$ é a adjunta do tensor de Ricci na forma de (1,1)-tensor. Assim,

$$
\begin{aligned}
tr(Ric\circ(\lambda I - Ric)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(\lambda - \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\\
&= \lambda R - |Ric|^2.
\end{aligned}
$$

Denotando por g^* a adjunta do tensor métrico na forma de (1,1)-tensor, temos

$$\begin{aligned}
\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2 &= tr\{(Ric-\frac{1}{n}Rg)(Ric-\frac{1}{n}Rg)^*\}\\
&= tr\{(Ric-\frac{1}{n}Rg)((Ric)^*-\frac{1}{n}Rg^*\}\\
&= tr\{Ric(Ric)^*\}-\frac{1}{n}Rtr(Ricg^*)-\frac{1}{n}Rtr(g(Ric)^*)-\frac{1}{n^2}R^2tr(gg^*)\}\\
&= |Ric|^2-\frac{1}{n}R\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\frac{1}{n}R\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\frac{1}{n^2}R^2n\\
&= |Ric|^2-\frac{1}{n}R^2.
\end{aligned}$$

Ou seja, $|Ric|^2=\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2+\frac{1}{n}R^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
tr(Ric\circ(\lambda I-Ric)) &= \lambda R-\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2-\frac{1}{n}R^2\\
&= -\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2+R(\lambda-\frac{1}{n}R).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta R}{2}-\frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R &= \frac{m-1}{m}\left\{-\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2+R(\lambda-\frac{1}{n}R)\right\}\\
&- \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)(R-\lambda n)=-\frac{m-1}{m}\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2\\
&+ \frac{m-1}{m}\frac{R}{n}(n\lambda-R)-\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)(R-\lambda n)\\
&= -\frac{m-1}{m}\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2-\frac{R-n\lambda}{mn}\{(m-1)R+n(R-(n-1)\lambda)\}\\
&= -\frac{m-1}{m}\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2-\frac{R-n\lambda}{mn}\{(m-1)R+nR-n(n-1)\lambda)\}\\
&= -\frac{m-1}{m}\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2-\frac{R-n\lambda}{mn}\{(m+n-1)R-n(n-1)\lambda)\}\\
&= -\frac{m-1}{m}\left|Ric-\frac{1}{n}Rg\right|^2-\frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\{R-\frac{n(n-1)\lambda}{m+n-1}\}.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos na equação, (3-18), o que conclui a demonstração. □

Proposição 3.8 *Se a variedade Riemanniana compacta satisfaz* (1-2) *e*

$$Ric(\nabla f,\nabla f)\leq\frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f, \tag{3-26}$$

então a função f é constante, de modo que é Einstein.

Demonstração. De (3-16), temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2 \Delta f$$

Mas como vale (3-26), temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 \geq |Hess f|^2 \geq 0.$$

Pelo Teorema 2.47, temos que $|\nabla f|^2$ é constante. Com isso, a função f é constante, pois se não for, ela é linear e sendo linear tem laplaciano igual a zero e assim, pelo Teorema citado acima, segue que f é constante, provando assim o resultado. □

Proposição 3.9 *Quando $m \neq 1$, uma métrica quasi-Einstein tem curvatura escalar constante se, e somente se,*

$$Ric(\nabla f) = -\tfrac{1}{m-1}(R-(n-1)\lambda)\nabla f.$$

Demonstração.

$\Rightarrow$) Suponha que a curvatura escalar seja constante, daí de (3-17),

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{m-1}{m}Ric(\nabla f) + \tfrac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f \\ \Leftrightarrow Ric(\nabla f) &= -\tfrac{1}{m-1}(R-(n-1)\lambda)\nabla f. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Suponhamos agora válida a igualdade e substituindo-a em (1-2), temos

$$\tfrac{\nabla R}{2} = \tfrac{m-1}{m}(-\tfrac{1}{m-1})(R-(n-1)\lambda)\nabla f + \tfrac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f = 0.$$

Concluímos assim, que a curvatura escalar é constante. □

Observação 4 *Quando $m = 1$ e a constante μ é zero na equação (3-6), a saber*

$$\mu e^{\frac{2}{m}f} = \lambda - \tfrac{1}{m}(\Delta f - |\nabla f|^2)$$

vemos que, $\lambda = \Delta f - |\nabla f|^2$. Combinando esse fato com a equação (3-11), podemos concluir que $R = \lambda(n-1)$, isto é, a curvatura escalar é constante.

Proposição 3.10 *Se a variedade Riemanniana M satisfaz (1-2) com $m \geq 1$ e*

1. *$\lambda > 0$ e M é compacta, então a curvatura escalar é limitada inferiormente por*

$$R \geq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda. \tag{3-27}$$

2. *$\lambda = 0$ e a curvatura escalar é constante, $m > 1$, então M é Ricci Flat.*

3. *$\lambda < 0$ e a curvatura escalar é constante, então*

$$n\lambda \leq R \leq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$$

e quando $m > 1$, R é igual a qualquer um dos valores extremos se, e só se, M é Einstein.

Demonstração.

1. De (3-18), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R &= -\frac{m-1}{m}\left|Ric - \frac{1}{n}Rg\right|^2 \\ &- \frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\left(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right).\end{aligned}$$

Como M é compacta, aplicando essa equação em um ponto de mínimo de R, temos

$$\begin{aligned}&0 \leq \frac{1}{2}\Delta R_{min} - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R_{min} = -\frac{m-1}{m}\left|Ric - \frac{1}{n}R_{min}g\right|^2 \\ &-\frac{m+n-1}{mn}(R_{min}-n\lambda)\left(R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{m+n-1}{mn}(R_{min}-n\lambda)\left(R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right) \geq \frac{m-1}{m}\left|Ric - \frac{1}{n}R_{min}g\right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Então,

(a) $n\lambda \geq R_{min}$ e $R_{min} \geq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$ ou

(b) $n\lambda \leq R_{min}$ e $R_{min} \leq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$.

Se (b) ocorrer, então $n\lambda \leq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$. Como $\lambda > 0$, dividindo a desigualdade por $n\lambda$, obtemos $1 \leq \dfrac{n-1}{m+n-1}$, o que é um absurdo, pois $m \geq 1$.

Logo, $R \geq R_{min} \geq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$.

2. Se R é constante, então em (3-18), temos

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\left(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right) = \frac{m-1}{m}\left|Ric - \frac{1}{n}Rg\right|^2 \geq 0.$$

Se além disso, tivermos $\lambda = 0$ e $m > 1$, temos

$$-\frac{m+n-1}{mn}R^2 = \frac{m-1}{m}\left|Ric - \frac{1}{n}Rg\right|^2 \geq 0.$$

Como $R^2 \geq 0$ e $-\dfrac{m+n-1}{mn} \leq 0$, concluímos que $-\dfrac{m+n-1}{mn}R^2 \leq 0$.

Segue-se daí, que $Ric = \dfrac{1}{n}Rg$ e $R = 0$, e assim é Ricci Flat.

3. De (3-18) e como R é constante, temos

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\big(R-\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\big) = \frac{m-1}{m}\big|Ric-\frac{1}{n}Rg\big|^2 \geq 0. \qquad (3\text{-}28)$$

Assim,

(a) $R \leq n\lambda$ e $R \geq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$ ou

(b) $R \geq n\lambda$ e $R \leq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$.

Se (a) ocorrer, então $\dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq n\lambda$. Como $\lambda < 0$, dividindo ambos os membros por $n\lambda$, temos $1 \leq \dfrac{n-1}{m+n-1}$, o que é um absurdo pois $m > 1$.

Assim, temos que $n\lambda \leq R \leq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$.

Se M é variedade de Einstein, então $Ric = \mu g$, para alguma $\mu : M \to \mathbb{R}$. Tomando o traço, temos que $R = \mu n$. Assim, $Ric = \dfrac{R}{n}g$. Substituindo em (3-28), temos que

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)\big(R-\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\big) = 0$$

Daí, $R = n\lambda$ ou $R = \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}$.

A recíproca é análoga.

□

3.3 Métricas quasi-Einstein bi-dimensional

O próximo Teorema tem uma grande importância, pois este nos exibe uma caracterização de métricas produto torcido a partir da Hessiana sendo múltipla da métrica.

Teorema 3.11 *(Brinkmann) Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um produto torcido $(a,b) \times_u N^{n-1}$ se, e somente se, existe uma função não trivial h tal que $Hess h = kg$, para alguma função $k : M \to \mathbb{R}$. $(u = h')$*

Para a demonstração ver [2], [8] e [16].

Agora daremos uma caracterização de métricas quasi-Einstein que são Einstein.

Proposição 3.12 *Uma métrica completa finita m-quasi-Einstein* (M^n, g, u) *é Einstein se, e somente se, u é constante ou M é difeomorfa ao* $\mathbb{R}^n$ *com estrutura de produto torcido* $(\mathbb{R} \times_{ae^{ar}} N^{n-1}, ae^{ar})$*, onde* N^{n-1} *é Ricci Flat e a é uma constante, ou* $(\mathbb{H}^n, dr^2 + a^2 senh^2 arg_{S^{n-1}}, acoshar)$.

Demonstração. Se g é Einstein, então $Ric = \lambda_1 g$, para alguma constante λ_1.

Por (3-2), temos

$$Hessu = \frac{\lambda_1 - \lambda}{m} ug, \tag{3-29}$$

para algum $u > 0$.

Se M é compacta, então u é constante. Se u não é constante, então M não é compacta e $\lambda \leq 0, \lambda_1 \leq 0$.

Se $\lambda = 0$ e $\lambda_1 \leq 0$, então (3-29) não tem solução completa que é positiva.

Quando $\lambda < 0$, pela proposição 3.10(c), $n\lambda \leq R \leq \dfrac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$, mas $Ric = \lambda_1 g \Rightarrow R = \lambda_1 n$, logo $\lambda_1 \geq \lambda$.

Se $\lambda_1 = \lambda$, então novamente (3-29) não tem solução positiva. Assim, nos resta que $\lambda < \lambda_1 \leq 0$ e com isso, pelo Lema 2.26, u é uma função estritamente convexa. Portanto, M^n é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Por, (3-29), $u = c_1 e^{ar} + c_2 e^{-ar}$, onde $a = \sqrt{\dfrac{\lambda_1 - \lambda}{m}}, c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ são constantes.

Pelo Teorema 3.11, M é $\mathbb{R} \times N^{n-1}$ com métrica produto torcido $g = dr^2 + a^2 e^{2ar} g_0$, para g_0 uma métrica Ricci Flat, ou M é o espaço hiperbólico $dr^2 + a^2 senh^2(ar) arg_{S^{n-1}}$.

Note que para demonstrar que g_0 é Ricci Flat, devemos usar o Teorema 3.1 e escrever todas as expressões a partir do produto torcido que temos, isto é,

$$Ric_B = \lambda g_B + \tfrac{m}{f} Hess\ f \Rightarrow 2\lambda_1 = \lambda.$$

E também,

$$f\Delta f + (m-1)|grad\, f|^2 + \lambda f^2 = \mu \Rightarrow \mu = 2\lambda_1 - \lambda = 0.$$

Portanto, é Ricci Flat, já que $Ric_F = \mu g_F = 0$. □

Observação 5 *Se* $n = 2$*, então* $Ric = \dfrac{R}{2} g$.

De fato, seja $\{e_i\}_{\cdot i=1}$ *uma base ortonormal. Então*

$$\begin{aligned} Ric(e_i, e_j) &= \sum_{k=1}^{n} g(R(e_k, e_i)e_j, e_k) \\ &= g(R(e_1, e_i)e_j, e_1) + g(R(e_2, e_i)e_j, e_2) \\ &= R_{1ij1} + R_{2ij2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Ric(e_1,e_1) &= R_{1111}+R_{2112}=R_{2112}=R_{1221}, \\ Ric(e_1,e_2) &= R_{1121}+R_{2122}=0, \\ Ric(e_2,e_2) &= R_{1211}+R_{2212}=0, \\ Ric(e_2,e_2) &= R_{1221}+R_{2222}=R_{1221}. \end{aligned}$$

Logo, $Ric(e_i,e_j)=0=R_{1221}g(e_i,e_j)$*, se* $i\neq j$ *e* $Ric(e_i,e_i)=R_{1221}g(e_i,e_i)$*. Isto é,* $Ric=R_{1221}g$*. Mas, observe que,*

$$R=trRic=Ric(e_1,e_1)+Ric(e_2,e_2)=2R_{1221}.$$

Portanto,

$$Ric=R_{1221}g=\frac{R}{2}g.$$

Corolário 3.13 *Uma métrica bidimensional quasi-Einstein que satisfaz* (3-2) *é uma métrica produto torcido.*

Demonstração. De (3-2) e $Ric=\frac{R}{2}g$, temos

$$\frac{R}{2}g-\frac{m}{u}Hessu=\lambda g\Rightarrow Hessu=\left(\frac{R}{2}-\lambda\right)\frac{gu}{m}.$$

Assim, pelo teorema 3.11, a métrica é um produto torcido. □

Agora vamos para nosso teorema principal, ele nos dará um importante resultado de rigidez para métricas em variedades compactas bidimensionais.

Teorema 3.14 *Toda variedade compacta bidimensional tem métrica quasi-Einstein trivial.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\lambda\leq 0$.

O tensor de Ricci satisfaz a equação (1-2) e vimos que para m finito, podemos escrevê-la na forma equivalente (3-2).

Temos, pela proposição 3.1, que uma variedade Riemanniana (M,g) satisfaz (3-2) se, e somente se, o produto torcido $M\times_u F^m$ é Einstein, onde F^m é uma variedade m-dimensional Einstein com constante μ satisfazendo

$$f\Delta f+(m-1)|\nabla f|^2+\lambda f^2=\mu. \tag{3-30}$$

Como $div(f\nabla f)=f\Delta f+|\nabla f|^2\Rightarrow f\Delta f=div(f\nabla f)-|\nabla f|^2$, substituindo em (3-30), obtemos

$$div(f\Delta f)+(m-2)|\nabla f|^2+\lambda f^2=\mu. \tag{3-31}$$

Agora, integrando a Equação (3-31) em M e usando a linearidade da integral, temos que

$$\int_M div(f\Delta f)dV_M+(m-2)\int_M|\nabla f|^2dV_M+\lambda\int_M f^2dV_M=\mu\int_M 1dV_M. \tag{3-32}$$

Usando o Teorema 2.46, podemos escrever essa última equação na forma

$$\mu=\frac{(m-2)}{V(M)}\int_M|\nabla f|^2dV_M+\frac{\lambda}{V(M)}\int_M f^2dV_M, \tag{3-33}$$

pois M é compacta sem bordo, onde $V(M)$ denota o volume de M.

Dividiremos o restante da prova em dois casos.

1º Caso: Suponha que $m\geq 3$. Seja $p\in M$ um ponto de máximo de f. Então temos que $f(p)>0$, $\nabla f(p)=0$ e $\Delta f(p)\leq 0$.

Portanto, temos que

$$0\geq f(p)\,\Delta f(p).$$

Da Equação (3-5) temos

$$0\geq f(p)\,\Delta f(p)=\mu-\lambda f(p)^2,$$

pois $\nabla f=0$. Usando a Equação (3-33) temos que

$$\begin{aligned}0\geq f(p)\,\Delta f(p) &= \frac{(m-2)}{V(M)}\int_M|\nabla f|^2dV_M-\frac{\lambda}{V(M)}\int_M f^2dV_M-\lambda f(p)^2\\ &= \frac{(m-2)}{V(M)}\int_M|\nabla f|^2dV_M+\frac{\lambda}{V(M)}\int_M(f^2-f(p)^2)dV_M\geq 0,\end{aligned}$$

pois, $m\geq 3,\lambda\leq 0$ e $f(p)^2\geq f^2$. Sendo assim,

$$\frac{(m-2)}{V(M)}\int_M|\nabla f|^2dV_M=0,$$

o que acarreta que $\nabla f=0$ e, portanto, f é constante.

2º Caso: Considere $m=1,2$. Nesse caso, escolhemos $q\in M$ ponto de mínimo de f em M. Portanto, $f(q)>0$, $grad\,f(q)=0$ e $\Delta f(q)\geq 0$. Das Equações (3-5) e (3-33) temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(q)\Delta f(q) \\ &= \mu - \lambda f(q)^2 \\ &= \frac{(m-2)}{V(M)}\int_M |\nabla f|^2 dV_M + \frac{\lambda}{V(M)}\int_M (f^2 - f(q)^2) dV_M \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{3-34}$$

Assim, como no 1º caso, a última desigualdade vem do fato de $\lambda \leq 0$, $f^2(p) \leq f^2$ e $m \leq 2$. Se $m = 1$ ou $\lambda < 0$, temos da Equação (3-34) que f é constante. Se $m = 2$ e $\lambda = 0$, temos da Equação (3-31) que

$$div(f\,\Delta f) = \mu.$$

Da Equação (3-33) temos que

$$div(f\,\Delta f) = \mu = \frac{(m-2)}{V(M)}\int_M |\nabla f|^2 dV_M + \frac{\lambda}{V(M)}\int_M f^2 dV_M = 0.$$

Portanto, $div(f\,\Delta f) = 0$. Da Proposição 2.24 temos que

$$0 = div(f\,\Delta f) + div(f\,\Delta f) = 2f\,\Delta f + 2|grad\, f|^2 = \Delta f^2.$$

Sendo assim, temos que $\Delta f^2 = 0$ e, portanto, f^2 é harmônica. Pelo Teorema 2.47 temos que f^2 é constante, consequentemente, f é constante, provando assim o teorema para o caso $\lambda \leq 0$.

Suponha que $\lambda > 0$.

Como $\lambda > 0$ e a dimensão é 2, por (3-27), temos

$$R \geq \frac{2\lambda}{m+1}$$

Temos também, por M ser bidimensional, que $Ric = \frac{R}{2}g$. Por (3-17), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla R &= \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f \\ &= \frac{m-1}{m}\frac{R}{2}g(\nabla f) + \frac{1}{m}R\nabla f - \frac{\lambda}{m}\nabla f \\ &= \frac{m+1}{2m}R\nabla f - \frac{\lambda}{m}\nabla f \\ \Rightarrow \nabla R &= \frac{m+1}{2m}\left(R - \frac{2\lambda}{m+1}\right)\nabla f. \end{aligned} \tag{3-35}$$

Agora, se $u = e^{\frac{f}{m}}$, então $\nabla u = -\frac{1}{m}e^{-\frac{f}{m}}\nabla f$. Pela equação (3-2) e substituindo $Ric = \frac{R}{2}g$, temos

$$Hessu = (Ric - \lambda g)\frac{u}{m} = \frac{u}{m}(\frac{R}{2} - \lambda)g.$$

Em particular, ∇u é conforme, pois fazendo $\rho = \frac{u}{m}(\frac{R}{2} - \lambda)$ e como $Hessu = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u}g$, temos $\mathcal{L}_{\nabla u}g = 2\rho g$.

Pelo teorema 2.48, segue que,

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla R\rangle dV_M = 0.$$

Substituindo ∇u na equação acima, temos

$$0 = \int_M \langle \nabla u, \nabla R\rangle dV_M = -\frac{1}{m}\int_M e^{-\frac{f}{m}}\langle \nabla R, \nabla f\rangle dV_M.$$

Usando (3-35) e como $R \geq \frac{2\lambda}{m+1}$, temos

$$\nabla R = \frac{m+1}{2m}\left(R - \frac{2\lambda}{m+1}\right)\nabla f \geq \frac{m+1}{2m}\left(\frac{2\lambda}{m+1} - \frac{2\lambda}{m+1}\right)\nabla f = 0, \tag{3-36}$$

Acarretando que, $\langle \nabla R, \nabla f\rangle \geq 0$. Assim, como $e^{-\frac{f}{m}} \geq 0$ e $\langle \nabla R, \nabla f\rangle \geq 0$, temos que $\langle \nabla R, \nabla f\rangle = 0$.

Mas, por (3-35), temos

$$0 = \langle \nabla R, \nabla f\rangle = \frac{m+1}{2m}\left(R - \frac{2\lambda}{m+1}\right)|\nabla|^2.$$

Então,

1. $R - \frac{2\lambda}{m+1} = 0$ ou
2. $|\nabla f|^2 = 0$.

Se valer (1), então $\nabla R = 0$. Com isso, M será difeomorfa com $\mathbb{S}^2$ e como $\mathbb{S}^2$ é Einstein, segue que f é constante.

Se valer (2), então f é constante. Assim, em ambos os casos temos que f é constante, o que completa a demonstração do teorema. □

Observação 6 *Observe que na demonstração quando $\lambda \leq 0$ não precisamos da hipótese de que a variedade tem dimensão 2. Ou seja, caso a curvatura escalar R seja negativa,*

conseguimos demonstrar de forma análoga que f é constante. Isso foi feito no artigo [13] dos autores Kim, Dong-Soo e Kim, Young Ho e estudado com mais detalhes na dissertação [1] de Elismar Dias Batista.

CAPÍTULO 4

Métricas Kähler

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos sobre variedades complexas e quase complexas, sendo essas importantes para o estudo de métricas Kähler. Mostraremos alguns resultados sobre métricas Kähler, e por fim, demonstraremos que não existem métricas Kähler em variedades quasi-Einstein compactas não-triviais.

4.1 Variedades complexas e quase complexas

Definição 4.1 *Uma estrutura quase complexa em uma variedade (conexa) é um corpo de automorfismos J do fibrado tangente TM satisfazendo*

$$J_x^2 = -I_x, \;\; x \in M,$$

onde I denota a identidade. Equivalentemente, uma estrutura quase complexa de M é uma ação do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos sobre TM, dando uma estrutura complexa de vetores fibrados sobre M.

A dimensão n da variedade quase complexa M pode ser escrita como $n = 2m$, onde m é a dimensão complexa de M, e o operador complexo J induz uma orientação em M, com uma estrutura ortonormal $\{e_1, Je_1, \cdots, e_m, Je_m\}$ que é positivamente orientada.

A estrutura quase complexa J induz uma divisão do fibrado tangente complexificado $T_{\mathbb{C}}M \simeq TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ em dois sub-fibrados complementares conjugados um ao outro

$$T_{\mathbb{C}}M \simeq T'M \oplus T''M,$$

onde em cada ponto $x \in M$, a fibra T'_xM(respectivamente T''_xM) é o auto espaço de J_x relativamente ao autovalor i(respectivamente $-i$). Reciprocamente, cada sub-fibrado complexo $T'M$ de $T_{\mathbb{C}}M$ com complementar conjugado determinam uma estrutura quase complexa J de M.

Os elementos de $T'M$(respectivamente $T''M$) são vetores (complexos) do tipo $(1,0)$ (respectivamente do tipo $(0,1)$).

Cada vetor tangente real X pode ser expresso de forma única como

$$X = U + \overline{U}, \tag{4-1}$$

onde U (respectivamente $\overline{U}$) é uma parte do tipo $(1,0)$ (resp. do tipo $(0,1)$). As componentes complexas U e $\overline{U}$ são por sua vez determinados por

$$U = \frac{1}{2}(X - iJX) \qquad \overline{U} = \frac{1}{2}(X + iJX).$$

Temos, nesse caminho, um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear de TM sobre $T'M$ e um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear de TM sobre $T''M$.

4.2 Métricas Hermitianas e Kähler

Definição 4.2 *Uma métrica hermitiana em M é uma métrica Riemanniana g tal que*

$$g(JX, JY) = g(X,Y), \ \forall\, X,Y \in T_xM, \ \forall\, x \in M.$$

Equivalentemente, o tensor métrico é do tipo $(1,1)$ ou J-invariante.

Obtemos o produto escalar hermitiano h em $T_{\mathbb{C}}M$ por

$$h(U,V) = g(U,\overline{V}), \ \forall\, U,V \in (T_{\mathbb{C}}M)_x, \ \forall\, x \in M.$$

A restrição de h ao sub fibrado $T'M$ induz, através da identificação 4-1 de $T'M$ com TM, o produto escalar hermitiano H em TM. Temos

$$H(X,Y) = \frac{1}{2}[g(X,Y) - ig(JX,Y)], \ \forall\, X,Y \in T_xM, \ \forall\, x \in M.$$

Teorema 4.3 *Seja (M,g,J) uma variedade quase-complexa. A métrica Riemanniana g em M é Hermitiana se, e somente se, $g(X,JX) = 0$ para todo $X \in TM$.*

Demonstração. Suponha que g é Hermitiana. Decorre da Definição 4.2 que

$$g(X,JX) = g(JX,J^2X) = -g(JX,X) = -g(X,JX),$$

donde

$$g(X,JX) = 0.$$

Agora iremos mostrar a recíproca. Se $g(X,JX)=0$ para todo $X \in TM$, então

$$\begin{aligned} 0 &= g(X+Y,J(X+Y)) = g(X,JX)+g(X,JY)+g(Y,JX)+g(Y,JY) \\ &= g(X,JY)+g(Y,JX), \end{aligned}$$

ou seja,

$$g(X,JY) = -g(Y,JX). \tag{4-2}$$

Portanto, $g(JX,JY) = -g(Y,J^2X) = g(Y,X)\ \forall\, X,Y \in TM$.

Logo g é Hermitiana. □

Definição 4.4 *A forma Kähler ω de uma métrica Hermitiana é uma 2-forma associada com o tensor métrico.*

Em relação ao produto escalar Hermitiano, a forma Kähler ω satisfaz a seguinte expressão:

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) = -2Im(H(X,Y)).$$

Definição 4.5 *Uma métrica Hermitiana é Kähler se o operador complexo J é paralelo com a conexão de Levi-Civita:*

$$DJ = 0 \Leftrightarrow D_X JY = JD_X Y,\ \forall\, X,Y \in T_xM,\ \forall\, x \in M.$$

Proposição 4.6 *Uma métrica Hermitiana é Kähler se, e somente se, a forma ω Kähler é fechada.*

Demonstração. Para a demonstração veja [2]. □

4.3 Métricas Kähler quasi-Einstein

Proposição 4.7 *Seja (M^n,g,J) uma variedade Kähler. Então*

(i) $R(X,Y)\circ J = J\circ R(X,Y)$,

(ii) $R(X,Y,JZ,JW) = R(X,Y,Z,W)$,

(iii) $Ric(JX,Y) = -Ric(X,JY)$

para todos $X,Y,Z,W \in TM$.

Demonstração. Como M é uma variedade Kähler, J é paralelo com respeito a conexão de Levi-Civita. Portanto

$$\begin{aligned}
R(X,Y)JZ &= \nabla_X\nabla_Y JZ - \nabla_Y\nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]}JZ \\
&= \nabla_X((\nabla_Y J)Z + J\nabla_Y Z) - \nabla_Y((\nabla_X J)Z + J\nabla_X Z) - (\nabla[X,Y]J)Z - J\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X J\nabla_Y Z - \nabla_Y J\nabla_X Z - J\nabla[X,Y]Z \\
&= (\nabla_X J)\nabla_Y Z + J\nabla_X\nabla_Y Z - (\nabla_Y J)\nabla_X Z - J\nabla_Y\nabla_X Z - J\nabla[X,Y]Z \\
&= J(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= JR(X,Y)Z,
\end{aligned}$$

isto é,

$$R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z \;\forall\, X,Y \in TM. \tag{4-3}$$

Assim concluímos o item (i). Agora usando as igualdades em (4-3) e (4-2), temos

$$g(R(X,Y)JZ,W) = g(JR(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)Z,JW),$$

donde $R(X,Y,JZ,W) = -R(X,Y,Z,JW)$.

Logo, segue-se o item (ii),

$$R(X,Y,JZ,JW) = -R(X,Y,Z,J^2W) = R(X,Y,Z,W) \;\forall\, X,Y,Z,W \in TM.$$

Mostraremos finalmente o item (iii). Veja que

$$\begin{aligned}
Ric(JX,Y) &= \sum_{i=1}^{n} R(e_i,JX,Y,e_i) = -\sum_{i=1}^{n} R(Je_i,X,Y,e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} R(Je_i,X,-J^2Y,e_i) = -\sum_{i=1}^{n} R(Je_i,X,JY,Je_i).
\end{aligned}$$

Como J é uma isometria, então $\{Je_1,\cdots,Je_n\}$ ainda é um referencial ortonormal local de TM. Daí,

$$Ric(JX,Y) = -Ric(X,JY)$$

para todos $X,Y \in TM$. □

Observação 7 *Sendo M variedade Kähler, temos que ω é paralela, logo* $(\nabla_X\omega)(Y,Z) =$

0, $\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. *Por outro lado, temos que*

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \omega)(Y,Z) &= X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= X\langle JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X JY, Z\rangle + \langle JY, \nabla_X Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $\langle \nabla_X JY, Z\rangle = \langle J\nabla_X Y, Z\rangle$, *e assim* $\nabla_X JY = J\nabla_X Y$.

Observação 8 *Vale a seguinte identidade:*

$$Ric(JU, JV) = Ric(U,V)$$

De fato, pela proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}
Ric(JU, JV) &= \sum_{i=1}^{n} (R(e_i, JU)JV, e_i) = \sum_{i=1}^{n} (JR(e_i, JU)V, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-JR(Je_i, U)V, e_i) = \sum_{i=1}^{n} (-J^2 R(Je_i, U)V, Je_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (R(Je_i, U)V, Je_i)
\end{aligned}$$

Como J *é uma isometria, então* $\{Je_1, \cdots, Je_n\}$ *ainda é um referencial ortonormal local de* TM. *Daí,* $Ric(JU, JV) = Ric(U,V)$.

O próximo Teorema tem grande importância para a caracterização de variedades completas e simplesmente conexas com métricas Kähler quasi-Einstein, pois ele nos diz que a variedade M será uma variedade produto $M_1 \times M_2$, onde M_1 e M_2 tem certas propriedades. A partir desse fato, podemos fazer uma ligação deste Teorema com o Teorema 3.14, que será visto no próximo Corolário.

Teorema 4.8 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa com métrica Kähler quasi-Einstein para* m *finito. Então* $M = M_1 \times M_2$ *é um produto Riemanniano,* f *é considerada uma função de* M_2, *onde* M_1 *é uma variedade Einstein* $(n-2)$*-dimensional com constante de Einstein* λ, *e* M_2 *é uma variedade quasi-Eisntein* 2*-dimensional.*

Demonstração. Sendo M uma variedade Kahler, a métrica e o tensor de Ricci de M são compatíveis com a estrutura complexa J. Assim, pela equação (3-2), temos

$$\begin{aligned}
Hessu(JU, JV) &= (Ric(JU, JV) - \lambda g(JU, JV))\frac{u}{m} \\
&= (Ric(U,V) - \lambda g(U,V))\frac{u}{m} \\
&= Hessu(U,V),\ \forall\, U,V.
\end{aligned}$$

Isso implica que,

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_{JX}\nabla u, JV\rangle = \langle \nabla_X \nabla u, V\rangle = \langle J\nabla_X \nabla u, JV\rangle \\
&\Rightarrow \langle \nabla_{JX}\nabla u - J\nabla_X\nabla u, JV\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \nabla_{JX}\nabla u = J\nabla_X \nabla u.
\end{aligned}$$

Definamos uma $(1,1)$-forma ϕ por $\phi(U,V) = Hessu(JU,V)$ uma $(1,1)$-forma. Temos que $2Hessu = \mathcal{L}_{\nabla u} g$. Assim, $\mathcal{L}_{\nabla u} JX = J\mathcal{L}_{\nabla u} X$. Então, $2\phi = \mathcal{L}_{\nabla u}\omega$, onde ω é uma forma Kähler.

Assim, se $d\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X d$ e ω é fechado, então ϕ é fechado, pois

$$d\phi = \frac{1}{2} d\mathcal{L}_{\nabla u}\omega = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u} d\omega = 0.$$

Além disso, se a forma de Ricci é fechada, por (3-2), temos que

$$dRic - md\frac{1}{u}Hessu = \lambda dg \Leftrightarrow 0 = d\frac{1}{u}Hessu \Leftrightarrow d\frac{1}{2u}\mathcal{L}_{\nabla u} u = 0 \Leftrightarrow d\frac{\phi}{u} = 0.$$

Isto é, a $(1,1)$-forma $\dfrac{\phi}{u}$ é também fechada. Então $du \wedge \phi = 0$.

Agora,

$$(du\wedge\phi)(U,V,W) \quad = \quad U_u g(\nabla_{JV}\nabla u, W) + V_u g(\nabla_{JW}\nabla u, U) + W_u g(\nabla_{JU}\nabla u, V). \quad (4\text{-}4)$$

Seja, $U,V \perp \nabla u, W = \nabla u$, então $Hessu(JU,V) = 0$, $\forall\, U,V \perp \nabla u$. Assim,

$$\nabla_X \nabla u \parallel J\nabla u, \ \forall\, X \perp \nabla u. \quad (4\text{-}5)$$

De fato, temos de (4-4),

$$0 \quad = \quad U_u g(\nabla_{JV}\nabla u, \nabla u) + V_u g(\nabla_{J\nabla u}\nabla u, U) + \nabla u_u Hessu(JU,V).$$

Queremos provar que $g(\nabla_{JV}\nabla u, \nabla u) = 0$ e $g(\nabla_{J\nabla u}\nabla u, U) = 0$.

Pela simetria da Hessiana, temos $g(\nabla_{JV}\nabla u, \nabla u) = -g(\nabla_{J\nabla u}\nabla u, V)$. Mas como $V \perp \nabla u$, então $J\nabla u g(\nabla u, V) = 0$. Daí,

$$g(\nabla_{J\nabla u}\nabla u, V) = -g(\nabla u, \nabla_{J\nabla u} V).$$

Assim, das igualdades acima e da simetria da Hessiana, temos

$$g(\nabla_{JV}\nabla u, \nabla u) = g(\nabla u, \nabla_{J\nabla u} V) = -g(\nabla u, \nabla_{J\nabla u} V) = 0.$$

Portanto, $g(\nabla_{JV}\nabla u, \nabla u) = 0$.

Agora, como $U \perp \nabla u$, então $J\nabla u g(\nabla u, U) = 0$. Daí,

$$g(\nabla_{J\nabla u}\nabla u, U) = -g(\nabla u, \nabla_{J\nabla u}U) = g(\nabla u, \nabla_{J\nabla u}U) = 0.$$

Portanto, $g(\nabla_{J\nabla u}\nabla u, U) = 0$.

Assim, concluímos que $Hessu(JU, V) = 0$.

Se $Hessu(JU, V) = 0$, então,

$$0 = g(\nabla_{JU}\nabla u, V) = g(J\nabla_{JU}\nabla u, JV) = -g(\nabla_U \nabla u, JV).$$

Assim, $\nabla_U \nabla u \perp JV$. Mas temos também que, $\nabla u \perp V$, daí $\nabla u \parallel JV$, pois $V \perp JV$ pelo Teorema 4.3. Com isso, $\nabla_U \nabla u \perp JV$ implica que $\nabla_U \nabla u \perp \nabla u$, e portanto $\nabla_U \nabla u \parallel J\nabla u$. Concluímos assim que, $\nabla_X \nabla u \parallel J\nabla u$, $\forall\, X \perp \nabla u$.

Seja $U' = \nabla u, V' = J\nabla u, W' \perp \nabla u$, então $\nabla_{\nabla u}\nabla u \parallel \nabla u$.

Provar que $\nabla_{\nabla u}\nabla u \parallel \nabla u$ é o mesmo que provar que $\nabla_{\nabla u}\nabla u \perp J\nabla u$.

Mas pelo que foi dito acima, sendo $X = J\nabla u, U = W', V = V'$ e $W = U'$, temos que $\nabla_{J\nabla u}\nabla u \parallel J\nabla u$, daí $\nabla_{J\nabla u}\nabla u \perp \nabla u$.

$$0 = g(\nabla_{J\nabla u}\nabla u, \nabla u) = g(J\nabla_{\nabla u}\nabla u, \nabla u) = -g(\nabla_{\nabla u}\nabla u, J\nabla u)$$

Assim, provamos que $\nabla_{\nabla u}\nabla u \parallel \nabla u$.

Consideremos uma distribuição bidimensional T_1 que é gerada por $\nabla u, J\nabla u$ nos pontos onde ∇u é não nulo. Mostraremos que $T_1 = span\{\nabla u, J\nabla u\}$ é invariante sobre o transporte paralelo. Equivalentemente, se γ é um caminho em M, e U é um campo paralelo ao longo de γ, então

$$\nabla_{\gamma'}\left(\frac{g(U,\nabla u)\nabla u}{|\nabla u|^2} + \frac{g(U, J\nabla u)J\nabla u}{|\nabla u|^2}\right) = 0.$$

Como a derivada covariante é linear em γ', podemos dividir em três casos:

(1) Quando $\gamma' \perp \nabla u$ e $\gamma' \perp J\nabla u$: Então, $\gamma' \perp \nabla u$ e $J\gamma' \perp \nabla u$, pois se $\gamma' \perp \nabla u, J\nabla u$, daí $0 = \langle J\nabla u, \gamma'\rangle = \langle J^2\nabla u, J\gamma'\rangle = -\langle \nabla u, J\gamma'\rangle$. Por (4-5), $\nabla_{\gamma'}\nabla u = 0$. Se a estrutura complexa J é paralela, $\nabla_{\gamma'}J\nabla u = J\nabla_{\gamma'}\nabla u = 0$. Por hipótese, $\nabla_{\gamma'}U = 0$, então

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'}\left(\frac{g(U,\nabla u)\nabla u}{|\nabla u|^2} + \frac{g(U, J\nabla u)J\nabla u}{|\nabla u|^2}\right) &= \gamma'\left(\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)\nabla u + \frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla_{\gamma'}\nabla u \\ +\gamma'\left(\frac{g(U,J\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)J\nabla u + \frac{g(U,J\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla_{\gamma'}J\nabla u &= 0.\end{aligned}$$

(2) Quando $\gamma' = \nabla u$: usando $\nabla_{\nabla u}\nabla u \parallel \nabla u$, temos

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{\gamma'}\left(\frac{g(U,\nabla u)\nabla u}{|\nabla u|^2}+\frac{g(U,J\nabla u)J\nabla u}{|\nabla u|^2}\right)=\gamma'\left(\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)\nabla u+\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla_{\gamma'}\nabla u\\
&+\gamma'\left(\frac{g(U,J\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)J\nabla u+\frac{g(U,J\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla_{\gamma'}J\nabla u=\nabla u\left(\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)\nabla u+\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla_{\nabla u}\nabla u\\
&+\nabla u\left(\frac{g(U,J\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)J\nabla u+\frac{g(U,J\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla_{\nabla u}J\nabla u=\frac{g(U,\nabla_{\nabla u}\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla u\\
&-2\frac{g(\nabla u,\nabla_{\nabla u}\nabla u)g(U,\nabla U)}{|\nabla u|^4}\nabla u+\frac{g(U,\nabla U)}{|\nabla u|^2}\frac{g(\nabla u,\nabla_{\nabla u}\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla u+\frac{g(U,\nabla_{\nabla u}J\nabla u)}{|\nabla u|^2}J\nabla u\\
&-2\frac{g(\nabla u,\nabla_{\nabla u}\nabla u)g(U,J\nabla U)}{|\nabla u|^4}J\nabla u+\frac{g(U,J\nabla U)}{|\nabla u|^2}\frac{g(J\nabla u,\nabla_{\nabla u}J\nabla u)}{|\nabla u|^2}J\nabla u.
\end{aligned}
$$

Onde a última igualdade é válida pois,

$$
\begin{aligned}
&\nabla u\left(\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)\nabla u=g\left(\nabla_{\nabla u}U,\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}\right)\nabla u+g\left(U,\nabla_{\nabla u}\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}\right)\nabla u\\
&=\frac{1}{|\nabla u|^2}g(\nabla_{\nabla u}U,\nabla u)\nabla u+\frac{1}{|\nabla u|^2}g(U,\nabla_{\nabla u}\nabla u)\nabla u+g\left(U,\nabla u\left(\frac{1}{|\nabla u|^2}\right)\nabla u\right)\nabla u\\
&=\frac{1}{|\nabla u|^2}g(U,\nabla_{\nabla u}\nabla u)\nabla u+\nabla u(|\nabla u|^{-2})g(U,\nabla u)\nabla u\\
&=\frac{g(U,\nabla_{\nabla u}\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla u-2\frac{g(\nabla u,\nabla_{\nabla u}\nabla u)}{|\nabla u|^4}g(U,\nabla U)\nabla u.
\end{aligned}
$$

E como $\nabla_{\nabla u}\nabla u \parallel \nabla u$, temos

$$
\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla_{\nabla u}\nabla u=\frac{g(U,\nabla U)}{|\nabla u|^2}\frac{g(\nabla u,\nabla_{\nabla u}\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla u.
$$

Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{\gamma'}\left(\frac{g(U,\nabla u)\nabla u}{|\nabla u|^2}+\frac{g(U,J\nabla u)J\nabla u}{|\nabla u|^2}\right)\\
&=\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}\left(Hessu(U,\nabla u)-Hessu(\nabla u,\nabla u)\frac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)\\
&+\frac{J\nabla u}{|\nabla u|^2}\left(-Hessu(JU,\nabla u)+Hessu(\nabla u,\nabla u)\frac{g(JU,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\right)\\
&=\frac{\nabla u}{|\nabla u|^2}Hessu\left(U-\frac{g(U,\nabla u)\nabla u}{|\nabla u|^2},\nabla u\right)-\frac{J\nabla u}{|\nabla u|^2}Hessu\left(JU-\frac{g(JU,\nabla u)\nabla u}{|\nabla u|^2},\nabla u\right)=0,
\end{aligned}
$$

onde a última equação segue de (4-5) e do fato que $U-\dfrac{g(U,\nabla u)}{|\nabla u|^2}\nabla u\perp\nabla u$.

(3) $\gamma'=J\nabla u$: Usando que $J\nabla_X\nabla u=\nabla_{JX}\nabla u$ a prova se reduz ao caso anterior.

Agora temos uma decomposição ortogonal do fibrado tangente $TM=T_1\oplus T_1^{\perp}$ que é invariante sobre o transporte paralelo. Pelo teorema da decomposição de DeRham, ver página 187 de [14], em uma variedade simplesmente conexa, M é um produto riemanniano, e assim segue o teorema. $\square$

Corolário 4.9 *Não existe métrica Kähler quasi-Einstein não trivial com m finito em variedades compactas.*

Demonstração. Seja M uma variedade compacta. Por [13], podemos assumir que $\lambda > 0$. Então, por [17], a cobertura universal $\widetilde{M}$ é também compacta.

Pelo Teorema 4.8, $M = M_1 \times M_2$, onde M_1 é Einstein $(n-2)$-dimensional e M_2 é quasi-Einstein 2-dimensional. Como M é compacta, então M_1 e M_2 são compactas. Mas se M_2 é compacta e 2-dimensional então a métrica quasi-Einstein é trivial pelo Teorema 3.14.

Portanto, não existe métrica Kähler quasi-Einstein não trivial em variedades compactas. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BATISTA, E. D. **Gradiente ricci solitions e variedades de einstein com métrica produto torcido**. Universidade Federal de Goiás (Dissertação de Mestrado), 2016.

[2] BESSE, A. L. **Einstein manifolds**, volume 10 de **Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]**. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] BROZOS-VÁZQUEZ, M; GARCÍ A RÍ O, E; GAVINO-FERNÁNDEZ, S. **Locally conformally flat Lorentzian quasi-Einstein manifolds**. Monatsh. Math., 173(2):175–186, 2014.

[4] CASE, J; SHU, Y.-J; WEI, G. **Rigidity of quasi-Einstein metrics**. Differential Geom. Appl., 29(1):93–100, 2011.

[5] CATINO, G. **Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor**. Math. Z., 271(3-4):751–756, 2012.

[6] CATINO, G; MANTEGAZZA, C; MAZZIERI, L; RIMOLDI, M. **Locally conformally flat quasi-Einstein manifolds**. J. Reine Angew. Math., 675:181–189, 2013.

[7] CHAKI, M. C; MAITY, R. K. **On quasi Einstein manifolds**. Publ. Math. Debrecen, 57(3-4):297–306, 2000.

[8] CHEEGER, J; COLDING, T. H. **Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products**. Ann. of Math. (2), 144(1):189–237, 1996.

[9] DO CARMO, M; RIEMANNIANA, G. **Impa (projeto euclides), 3a. ediçao**. Rio de Janeiro, 1, 2005.

[10] GALLOT, S; HULIN, D; LAFONTAINE, J. **Riemannian geometry**. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[11] HE, C; PETERSEN, P; WYLIE, W. **On the classification of warped product Einstein metrics**. Comm. Anal. Geom., 20(2):271–311, 2012.

[12] JÚNIOR, J. **Imersões em produtos torcidos**. Universidade Federal do Piauí-Centro de Ciências da Natureza (Dissertação de Mestrado), 2011.

[13] KIM, D.-S; KIM, Y. H. **Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature**. Proc. Amer. Math. Soc., 131(8):2573–2576 (electronic), 2003.

[14] KOBAYASHI, S; NOMIZU, K. **Foundations of differential geometry. Vol. I**. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[15] LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**, volume 218 de **Graduate Texts in Mathematics**. Springer-Verlag, New York, 2003.

[16] PETERSEN, P; WYLIE, W. **On the classification of gradient Ricci solitons**. Geom. Topol., 14(4):2277–2300, 2010.

[17] QIAN, Z. **Estimates for weighted volumes and applications**. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 48(190):235–242, 1997.

[18] RANIERI, M; RIBEIRO, E.. **Bach- flat noncompact steady quasi-einstein manifolds**. arXiv 1605.05592, 2016.

[19] SPIVAK, M. **A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I**. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.