UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

KAROLINE VICTOR FERNANDES

Métricas de Randers Localmente Dualmente Flat

Goiânia
2010

KAROLINE VICTOR FERNANDES

Métricas de Randers Localmente Dualmente Flat

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Goiânia
2010

Karoline Victor Fernandes

Graduou–se em Licenciatura em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante o Mestrado foi bolsista da CAPES. Atualmente é aluna do programa de Doutorado em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística – UFG.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

Fernandes, Karoline Victor.
F363m Métricas de Randers localmente dualmente flat [manuscrito] / Karoline Victor Fernandes. - 2010.
92 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática, 2010.
Bibliografia.
Apêndices.

1. Finsler, geometria de, 2. Métricas de Randers 3. Dualmente Flat. 4. Geometria riemanniana I. Título.

CDU: 514.763.6

KAROLINE VICTOR FERNANDES

Métricas de Randers Localmente Dualmente Flat

Dissertação defendida no Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de Fevereiro de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Marcelo Almeida de Souza

Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca

Carvalho

Profa. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho
Faculdade de Ciências Integradas do Pontal– UFU

Rosângela Maria da Silva

Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Às pessoas que mais amo:
meus pais, minha irmã,
meus avôs e meu noivo.

Agradecimentos

Agradeço:

Primeiramente à Deus pelo dom da vida, aos meus pais, pelo apoio contínuo em todos estes anos, ensinando-me, principalmente, a importância da construção e coerência de meus próprios valores.

Ao professor Marcelo Almeida de Souza, obrigado por ter aceitado a orientação de minha dissertação, pela dedicação, pela disponibilidade e por sempre indicar a direção certa a ser tomada nos momentos de maior dificuldade.

À todos os professores, funcionários do IME-UFG e aos amigos do curso de Mestrado.

À CAPES, pela bolsa concedida, que foi de grande ajuda para que pudesse me dedicar exclusivamente aos estudos e à elaboração desta dissertação.

Finalmente agradeço ao meu noivo Marco Túlio, meu companheiro nessa trajetória, que sempre entendeu minhas dificuldades, minhas ausências, obrigada pelo amor, pelo carinho, pela infinita paciência e pela crença absoluta na minha capacidade.

[1] Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES.

Resumo

Fernandes, Karoline Victor. **Métricas de Randers Localmente Dualmente Flat**. Goiânia, 2010. 93p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Estudaremos as métricas de Finsler, em uma variedade M, definidas como soma de uma métrica Riemanniana e de uma 1-forma, elas são conhecidas como métricas de Randers. Classificaremos aquelas que são localmente dualmente flat, isto é, para todo ponto existe um sistema de coordenadas no qual a equação das geodésicas tem uma forma especial pois os coeficientes do spray são dados em termos da métrica e de uma função escalar, caracterizaremos também as métricas de Randers que são localmente dualmente flat com curvatura flag quase-isotrópica.

Palavras–chave

Métricas de Finsler, Métricas de Randers localmente dualmente flat, Métricas de Randers localmente projetivamente flat, Curvatura flag.

Abstract

Fernandes, Karoline Victor. **Locally Dually Flat Randers Metric**. Goiânia, 2010. 93p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

We will study the Finsler metric, on a manifold M, defined as the sum of a Riemannian metric and a 1-form, they are known as Randers metric. We will classify those that are locally dually flat, that is, for all point exists a coordinate system in which the equation of the geodesic has a special form, the coefficients of spray is given in terms of the metric one and a local scalar function, we will also characterize the Randers metric that is locally dually flat with almost isotropic flag curvature.

Keywords

Finsler Metric, Locally Dually Flat Randers Metric, Locally Projectively Flat Randers Metric, Flag Curvature.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos as métricas de Finsler do tipo Randers, utilizando [10] como principal fonte bibliográfica. Dividiremos a apresentação em quatro capítulos. Nos três primeiros estaremos nos preparando para o desenvolvimento do último. Cada um desses capítulos se iniciará com uma introdução que servirá de motivação para o seu desenvolvimento. Utilizaremos livremente as fontes que constam nas referências bibliográficas, de modo que nem sempre será possível citar uma em particular.

No Capítulo 1, apresentaremos conceitos, exemplos e algumas motivações físicas das estruturas de Finsler, juntamente com alguns resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores. Enfatizaremos também a definição e algumas propriedades de formas diferenciáveis que serão muito úteis para o estudo da conexão de Chern, da curvatura flag e das 1-formas presentes nas métricas de Randers.

No Capítulo 2, introduziremos o fibrado vetorial π^*TM, onde a conexão de Chern é construída. A conexão de Chern é de torsão nula e quase compatível com a métrica, a partir dela podemos obter uma elegante expressão para os símbolos de Christoffel de segunda espécie. A conexão de Chern conhecide com a conexão de Levi-Civita quando a estrutura de Finsler é Riemannina assim, expressão que obtemos é analóga à expressão dos símbolos de Christoffel obtidos no caso Riemanniano. Neste capítulo deduziremos ainda os coeficientes do spray da métrica de Finsler.

No Capítulo 3, definiremos as formas de curvatura da conexão de Chern, obtidas por diferenciação da equação de estrutura descrita pela propriedade de torsão nula. Apresentaremos algumas propriedades das componentes das formas de curvatura e também é fórmulas explícitas para essas componentes. Finalmente, definiremos curvatura flag e a calcularemos no caso em que a variedade de Finsler é localmente projetivamente flat.

Encerraremos o trabalho com a demonstração de dois importantes teoremas que caracterizam as métricas de Randers localmente dualmente flat e aquelas com curvatura flag quase-isótropica.

CAPÍTULO 1

A Geometria de Finsler

1.1 Introdução

Riemann, em sua histórica tese de 1854, introduziu a geometria Riemanniana. Seu caso bidimensional havia sido desenvolvido por Gauss, em 1827, e é a parte fundamental da geometria diferencial. O assunto foi realçado pela teoria da relatividade geral de Einstein, em 1915. Einstein demorou sete anos para passar da relatividade especial em 1908 à sua relatividade geral em 1915, devido às dificuldades técnicas e filosóficas que envolviam o conceito de variedade. Segundo Einstein, *"não é tão fácil se livrar da idéia de que coordenadas não têm um significado métrico imediato"* (Einstein, 1949). Em 1913, Weil formalizou o conceito de variedade. Em 1922, Elie Cartan desenvolveu uma importante ferramenta analítica, o cálculo diferencial exterior, que tornou as variedades diferenciáveis objetos mais acessíveis.

Tradicionalmente, estruturas diferenciáveis são focadas na métrica Riemanniana, que é uma forma diferencial quadrática. Segundo Riemann, esta restrição a uma forma diferencial quadrática constitui apenas um caso especial. Mas, embora Riemann tenha visto a diferença entre o caso quadrático e o caso geral, deixou o caso geral adormecido ao pensar que *"o estudo da métrica que é a raiz quarta de uma forma diferencial quártica é bastante parecido e não traz nova luz ao problema"*. Interesse no caso geral foi retomado em 1918, na tese de Paul Finsler, escrita sob orientação de Carathéodory. Por esta razão, iremos nos referir ao caso geral como geometria de Finsler. Segundo S.S. Chern, a geometria de Finsler não é uma generalização da geometria Riemanniana, sendo melhor descrevê-la como a geometria Riemanniana sem a restrição quadrática.

No entanto, o sucesso da geometria Riemanniana neste último século tem sido tão espetacular que serviu para obscurecer o sucesso lento mas constante da geometria de Finsler. Felizmente, trabalhos recentes indicam que esta lacuna está se estreitando. Na estrutura apropriada, um grande número de resultados se generalizam facilmente de espaços Riemannianos para espaços Finslerianos e as evidências mostram que a " restrição quadrática " é raramente necessária. A geometria de Finsler também é frequentemente uma ferramenta essencial para aplicações em Biologia, Teoria do Controle, Engenharia e Física. Em particular, P. L. Antonelli tem usado a geometria de Finsler para modelar a evolução de organismos coloniais. Devido a estas considerações, segundo o ponto de vista de S.S. Chern, já é tempo da geometria de Finler ocupar uma posição mais importante nos currículos da geometria diferencial básica.

1.2 Preliminares

No decorrer do trabalho, usaremos a notação da convenção de Einstein, isto é, pares de índices repetidos indicam somatório (o símbolo Σ será, portanto, omitido). Por exemplo, $y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ denotará $\sum_{i=1}^{n} y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Usaremos também $[F]_{y^i}$ no lugar de $\frac{\partial F}{\partial y^i}$, e similarmente para derivadas parciais de ordem superior.

Começaremos com a definição de função homogênea de grau r, $r \in \mathbb{N}$ e com um teorema que as caracteriza. Este teorema é conhecido como Teorema de Euler e será utilizado sistematicamente no decorrer do trabalho. Veja [19].

Definição 1.2.1 *Uma função $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é positiva homogênea de grau r se $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$, para todo $\lambda > 0$ e $y \in \mathbb{R}^n$.*

Observação 1.2.1 *Se H é positiva homogênea de grau r, então H^n é positiva homogênea de grau nr, pois $H^n(\lambda y) = \lambda^{nr} H^n(y)$.*

Teorema 1.2.1 (Teorema de Euler) *Suponha uma função $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e considere $y = (y^1, \cdots, y^n)$, temos que H é positiva homogênea de grau r, se, e somente se, $H_{y^i}(y)y^i = rH(y)$.*

Prova. Suponhamos primeiramente que H é positiva homogênea de grau r,

$$H(\lambda y^1, \cdots, \lambda y^n) = \lambda^r H(y^1, \cdots, y^n),$$

derivando a expressão acima em relação a λ,

$$\frac{dH}{d\lambda} = H_{\lambda y^i}(\lambda y)y^i = r\lambda^{r-1}H(y),$$

tomando $\lambda = 1$, obtemos que $H_{y^i}(y)y^i = rH(y)$.

Agora, se H satisfaz

$$H_{\lambda y^i}(\lambda y)\lambda y^i = rH(\lambda y),$$

podemos multiplicá-la por λ^{r-1} e obter que

$$\lambda^r \left[H_{\lambda y^i}(\lambda y)y^i\right] - r\lambda^{r-1}H(\lambda y) = \lambda^{2r}\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{H(\lambda y)}{\lambda^r}\right] = 0.$$

Assim
$$\frac{H(\lambda y)}{\lambda^r} = C \text{ , onde } C \text{ é constante.}$$

Para $\lambda = 1$ temos que $H(y) = C$ e com isto, $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$. □

Como consequência do Teorema de Euler temos o seguinte corolário, que será muito útil em futuras demonstrações.

Corolário 1.2.1 *Se $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e positiva homogênea de grau r então H_{y^i} é positiva homogênea de grau $r-1$.*

Prova. Pelo Teorema de Euler $H_{y^i}(y)y^i = rH(y)$, derivando em relação a y^j,

$$H_{y^i y^j}(y)y^i + H_{y^i}(y)\frac{\partial y^i}{\partial y^j} = rH_{y^j}(y), \ \forall\ j.$$

Assim

$$[H_{y^j}(y)]_{y^i}y^i = rH_{y^j}(y) - H_{y^j}(y) = (r-1)H_{y^j}(y), \ \forall\ j,$$

usando o Teorema de Euler para a função H_{y^j} concluímos que

$$H_{y^j}(\lambda y) = \lambda^{r-1}H_{y^j}(y).$$

□

Em [14] obtemos as seguintes definições e exemplos a respeito de variedades diferenciáveis.

Definição 1.2.2 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto $M \neq \emptyset$ e uma família de aplicações biunívocas, de classe C^∞, $x_a : U_a \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos U_a de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:*

1. $\bigcup_a x_a(U_a) = M$;
2. *Para todo a, b, com $x_a(U_a) \cap x_b(U_b) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_a^{-1}(W)$ e $x_b^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_b^{-1} \circ x_a$ são de classe C^∞;*
3. *A família $\{(U_a, x_a)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2);*

O par (U_a, x_a) (ou a aplicação x_a) com $p \in x_a(U_a)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p; $x_a(U_a)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p. Uma família $\{(U_a, x_a)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M.

Definição 1.2.3 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é chamada curva (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja Υ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, \ \ f \in \Upsilon.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.2.4 *O espaço vetorial T_pM é chamado espaço tangente em p e definido por $T_pM = \{v$: v é tangente a M em $p\}$.*

Definição 1.2.5 *O conjunto*

$$TM = \{(p,v);\, p \in M, v \in T_pM\}$$

é chamado fibrado tangente da variedade n-dimensional M.

Exemplo 1.2.1 *O fibrado tangente é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.*

De fato, seja $\{(U_a, x_a)\}$ uma estrutura diferenciável máxima de M. Indicaremos por $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$ a base associada ao espaço tangente de $x_a(U_a)$. Para cada α, defina $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$ por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, \mu_1, \ldots, \mu_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto $(p,v) \in TM$ as coordenadas $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ de p junto com as coordenadas $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de v na base $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$.

Considerando a aplicação $dx_\alpha : \mathbb{R}^n \to T_pM$ dada por $dx_\alpha(v) = \beta'(0)$ onde $\beta = \varphi \circ \alpha$, $\varphi : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma aplicação diferenciável e para cada $q \in U_\alpha$ e $v \in T_pM$, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = v$.

Vamos mostrar que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável para TM. Como $\bigcup_a x_a(U_a) = M$ e $(dx_\alpha)q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M, q \in U_\alpha$, segue que, $\bigcup_a y_a(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$, o que verifica a primeira condição da Definição 1.2.2. Para cada par de índices α e β seja agora $(p,v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \bigcap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$. Então $(p,v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta))$, onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, v_α, $v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha)).$$

Como $(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ é diferenciável, $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ também o é. Decorre daí que $(y_\beta^{-1} \circ y_\alpha)$ é diferenciável, o que verifica a condição 2 da Definição 1.2.2.

Observação 1.2.2 *O fibrado tangente* TM *também pode ser definido como* $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$.

O espaço dual de T_xM é o conjunto das aplicações lineares $\omega : T_xM \to \mathbb{R}$, este espaço será denotado por T_x^*M e denominado o *espaço cotangente* a M em x. A união $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$ é chamada o *fibrado cotangente* de M.

1.3 Formas Diferenciáveis

O estudo local das variedades diferenciáveis pode ser feito usando um referencial natural associado a uma parametrização, isto é, para cada $x = (x^1, \cdots, x^n) \in M$ escolhemos os vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$, associados à parametrização $x_\alpha(x^1, \cdots, x^n)$, como uma base de T_xM, em geral esse referencial não é ortonormal. No método do referencial móvel introduzido por E. Cartan podemos escolher uma base ortonormal para T_xM. As formas diferenciáveis são usadas para obter as equações de estrutura de Cartan que são fundamentais para o estudo de variedades por meio do referencial móvel.

Abaixo segue algumas definições e propriedades das formas diferenciáveis, para maiores detalhes consulte [13], [16], [19].

Definição 1.3.1 *Sejam* $E_1, E_2, \cdots, E_k, U$ *espaços vetoriais. Uma aplicação*

$$f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \longrightarrow U$$

é chamada de k-linear quando é linear separadamente em relação a cada uma das suas variáveis. Isto significa que se tem:

1. $f(x_1, x_2, \cdots, x_i + \widetilde{x}_i, \cdots, x_k) = f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_k) + f(x_1, x_2, \cdots, \widetilde{x}_i, \cdots, x_k)$;
2. $f(x_1, x_2, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_k) = \lambda f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_k)$, *onde* $x_1 \in E_1, \cdots, x_k \in E_k, \widetilde{x}_i \in E_i$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Existem dois casos importantes de transformações k-lineares:

- Simétricas: $f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_k) = f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \cdots, x_k)$, onde $x_1, x_2 \cdots, x_k \in E$;
- Alternadas: $f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \eta, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \eta, x_{j+1}, \cdots, x_k) = 0$, onde $x_1, x_2, \cdots, x_k, \eta \in E$.

Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional e T_xM seu espaço tangente. T_xM é um espaço vetorial de dimensão n, com uma base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$. Um campo de vetores em M é uma aplicação v, $v : M \longrightarrow TM$ que a cada ponto $x \in M$ associa um $v(x) \in T_xM$; v pode ser escrito na forma

$$v(x) = a_i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

O campo de vetores é dito *diferenciável* quando as funções $a_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis. Para cada espaço tangente consideremos seu dual T_x^*M. Uma base para T_x^*M é obtida tomando $\{dx^i\}$, onde $x^i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na i-ésima coordenada. De fato, o conjunto $\{dx^i\}$ forma uma base dual para T_x^*M, pois $dx^i \in T_x^*M$ e

$$(dx^i)(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Definição 1.3.2 *Uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma 0-forma diferenciável em M.*

Definição 1.3.3 *Uma forma diferenciável de grau 1 ou, simplesmente, uma 1-forma em um conjunto M é uma aplicação $\omega : M \longrightarrow T_x^*M$ que associa a cada $x \in M$ um funcional linear $\omega(x)$ sobre T_xM, $\omega(x) : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Todo funcional linear sobre T_xM se exprime de modo único como combinação linear $a_i dx^i$. Assim, considerar uma 1-forma ω num conjunto M equivale a definir n funções reais, $a^1, \cdots, a^n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que, para cada $x \in M$, se tenha

$$\omega(x) = a_i(x) dx^i.$$

Escrevemos, neste caso, $\omega = a_i dx^i$. Para cada $x \in M$ a aplicação do funcional $\omega(x)$ no vetor $v = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ dá como resultado o número real

$$\omega(x)v = a_i(x) dx^i(v) = a_i(x)\eta^i. \tag{1-1}$$

Diremos que a 1-forma $\omega : M \longrightarrow T_x^*M$ é de classe C^k $(0 \leq k \leq \infty)$ quando, para todo vetor $v \in T_xM$, a função $x \longmapsto \omega(x)v$ é de classe C^k em M. Isto ocore se, e somente se, $\omega = a_i dx^i$, onde as funções $a_1, \cdots, a_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^k. De fato, esta condição é suficiente em virtude da igualdade (1-1) acima e necessária porque $a_i(x) = \omega(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ para todo $x \in M$ e todo $i = 1, \cdots, n$.

Definição 1.3.4 *Sejam ω e $\overline{\omega}$ 1-formas em M, o produto tensorial de ω e $\overline{\omega}$ denotado por $\omega \otimes \overline{\omega}$ é uma aplicação que para cada $x \in M$, associa uma transformação bilinear*

$\omega \otimes \overline{\omega} : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$(\omega \otimes \overline{\omega})_x(v_1, v_2) = \omega_x(v_1)\overline{\omega}_x(v_2).$$

Definição 1.3.5 *Um forma diferenciável de grau 2 ou uma 2-forma em um M é uma aplicação ϕ que para cada $x \in M$, associa uma transformação bilinear alternada ϕ_x : $T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\phi_x = f_{ij}(x)(dx^i \wedge dx^j)_x$, onde f é uma função diferenciável de M em $\mathbb{R}$. Denotaremos simplesmente $\phi = f_{ij}dx^i \wedge dx^j$.*

No caso em que ω e $\overline{\omega}$ são 1-formas diferenciáveis em M, o *produto exterior* de ω e $\overline{\omega}$, denotado por $\omega \wedge \overline{\omega}$, é uma aplicação que para cada $x \in M$, associa uma transformação bilinear e alternada $\omega \wedge \overline{\omega} : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\omega \wedge \overline{\omega} = \omega \otimes \overline{\omega}_x - \overline{\omega} \otimes \omega_x,$$

onde $(\omega \wedge \overline{\omega})_x(v_1, v_2) = \omega_x(v_1)\overline{\omega}_x(v_2) - \overline{\omega}_x(v_1)\omega_x(v_2)$.

Passaremos agora a uma generalização das formas diferenciáveis. Seja $\wedge^k(T_x^*M)$ o conjunto das funções k-lineares alternadas $\mu : \overbrace{T_xM \times \cdots \times T_xM}^{k\ vezes} \longrightarrow \mathbb{R}$. Com as operações usuais $\wedge^k(T_x^*M)$ é um espaço vetorial. Se $\mu_1, \cdots, \mu_k$ são 1-formas, podemos obter um elemento $\mu_1 \wedge \mu_2 \cdots \wedge \mu_k$ de $\wedge^k(T_x^*M)$, definido como

$$(\mu_1 \wedge \mu_2 \cdots \wedge \mu_k)(v^1, \cdots, v^k) = det(\mu_i(v^j)).$$

Decorre das propriedades de determinante que $\mu_1 \wedge \mu_2 \cdots \wedge \mu_k$ é de fato k-linear e alternada. Em particular, $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_k} \in \wedge^k(T_x^*M)$.

Observação 1.3.1 *O conjunto*

$$\{dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_k}\},$$

$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, onde $i_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, forma uma base para $\wedge^k(T_x^*M)$.

Definição 1.3.6 *Uma k-forma exterior em M $(k \geq 1)$ é uma aplicação φ que a cada $x \in M$ associa um $\varphi(x) \in \wedge^k(T_x^*M)$, φ pode ser escrito como*

$$\varphi(x) = a_{i_1, i_2, \cdots, i_k}(x)dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_k},$$

$i_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $a_{i_1, i_2, \cdots, i_k}$ são aplicações de M em $\mathbb{R}$. Se as funções $a_{i_1, i_2, \cdots, i_k}$ forem diferenciáveis, φ é chamada de k-forma diferenciável.

Indicaremos por I a n-upla $(i_1, i_2, \cdots, i_k), i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$, $i_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e usaremos a seguinte notação:

$$\varphi = a_I dx^I.$$

Definição 1.3.7 *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão n e m, respectivamente, e consideremos a função diferenciável $f : M \longrightarrow N$. A aplicação linear*

$$df_x : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N,$$

induz uma transformação linear

$$f_x^* : \wedge^k (T_{f(x)}^* N) \longrightarrow \wedge^k (T_x^* M),$$

que a cada $\varphi \in \wedge^k (T_{f(x)}^* N)$ associa $f_x^*(\varphi)$, definida da seguinte maneira:

$$(f_x^*(\varphi))(v^1, \cdots, v^k) = \varphi(df_x(v^1), \cdots, df_x(v^k),$$

$v^1, \cdots, v^k \in T_x M$. Fazendo o ponto x variar em M, obteremos uma aplicação f^* que leva k-formas de N em k-formas de M, $f^*(\omega)$ será chamada aplicação pull-back da k-forma ω por meio de f.

Convenciona-se que $f^*(g) = g \circ f$, se g é uma 0-forma.

Se $f : M \longrightarrow N$ é diferenciável, temos as seguintes propriedades:

1. $f^*(\varphi + \psi) = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$, onde φ e ψ são k-formas de N;
2. $f^*(\varphi\psi) = f^*(\varphi) f^*(\psi)$, onde φ é uma 0-forma e ψ é k-forma de N;
3. $f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*(\varphi) \wedge f^*(\psi)$, onde φ e ψ são 1-formas de N.

Se φ e ψ são duas k-formas $\varphi = a_I dx^I$, $\psi = b_I dx^I$ podemos definir a soma

$$\varphi + \psi = (a_I + b_I) dx^I.$$

Definição 1.3.8 *Sejam φ uma k-forma e ψ uma s-forma, o produto exterior $\varphi \wedge \psi$ é uma $(s+k)$-forma definida por $\varphi \wedge \psi = a_I b_J dx^I \wedge dx^J$, onde $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ e $J = (j_1, j_2, \cdots, j_k)$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.*

Sejam ω uma k-forma, φ uma s-forma e ζ é uma r-forma. A operação produto exterior goza das seguintes propriedades :

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \zeta = \omega \wedge (\varphi \wedge \zeta)$;
2. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$;

3. $\omega \wedge (\varphi + \zeta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \zeta$, quando $r = s$;

Definição 1.3.9 *Seja $\varphi = a_I dx^I$ uma k-forma, a diferencial exterior de φ é uma $(k+1)$-forma definida por $d\varphi = da_I \wedge dx^I$.*

No caso em que $\omega = P_i dx^i$ é uma 1-forma diferenciável. A diferencial exterior de ω, denotada por $d\omega$, é a 2-forma diferenciável $d\omega = dP_i \wedge dx^i$, onde $dP_i = \dfrac{\partial P_i}{\partial x^j} dx^j$.

A operação diferencial exterior goza das seguintes propriedades:

1. $d(\varphi + \zeta) = d\varphi + d\zeta$, onde φ e ζ são k-formas;
2. $d(\varphi \wedge \zeta) = d\varphi \wedge \zeta + (-1)^k \varphi \wedge d\zeta$, onde φ é uma k-forma e ζ é uma s-forma;
3. $d(d\varphi) = d^2\varphi = 0$, onde φ é uma k-forma;
4. $d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f d\varphi$, onde φ é uma k-forma e f é uma 0-forma;
5. $d(f^*\varphi) = f^*(d\varphi)$, onde φ é uma k-forma em N e $f : M \longrightarrow N$ é diferenciável.

1.4 Motivações Físicas

A geometria de Finsler tem sua gênese na integral da forma

$$\int_a^b F\left(x^1, \cdots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \cdots, \frac{dx^n}{dt}\right) dt,$$

onde a função $F(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$ é positiva a menos que $y = (y^1, \cdots, y^n)$ seja o vetor nulo. Ela também é positiva homogênea de grau um em relação a variável y. Em [4] encontramos contextos nos quais essa integral aparece, vejamos alguns:

- Em certos exemplos físicos, se $x = (x^1, \cdots, x^n)$ denota a posição e $y = (y^1, \cdots, y^n)$ o vetor velocidade então $F = F(x, y)$ teria o significado de velocidade e t faria o papel de tempo. Neste caso, a integral mediria a distância percorrida, entretanto outras interpretações são possíveis;
- Tomando o sistema óptico por exemplo, e considerando um meio anisotrópico, a velocidade da luz depende da direção percorrida. Em cada posição x, visualizamos y como uma seta que sai de x. $F(x, y)$ é a quantidade de tempo que a luz gasta pra sair de x e chegar a ponta de y. A hipótese de homogeneidade permite-nos reescrever a integral indicada como $\int_a^b F(x, dx)$, esta integral representa o tempo total que a luz gasta para percorrer uma trajetória (possivelmente curvílinea) neste meio;

- Particular interesse refere-se ao tempo gasto para percorrer um determinado trajeto em um terreno montanhoso, a premícia aqui é que a velocidade depende fortemente da inclinação do terreno e assim das direções percorridas;
- Exemplos interessantes são obtidos quando aplicamos essa teoria na Ecologia. Por exemplo x pode indicar um recife de coral e y o vetor deslocamento de um estado x para um estado $x+dx$. Assim a integral $\int_a^b F(x,dx)$ é a energia total gasta na evolução dos corais em um trajeto determinado.

1.5 Estruturas de Finsler

Considerando M uma variedade n-dimensional e TM o seu fibrado tangente começaremos com a definição de estrutura (ou métrica) de Finler:

Definição 1.5.1 *A métrica (ou estrutura) de Finsler em uma variedade M é uma função*

$$F : TM \longrightarrow [0,\infty)$$

satisfazendo as condições:

1. *$F(x,y)$ é C^∞ em $TM \backslash \{0\}$ (Regularidade);*
2. *$F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y), \forall \lambda > 0$ e $(x,y) \in TM$ (Positiva homogênea de grau um em relação a y);*
3. *O tensor fundamental $g_{ij}(x,y)$ é positivo definido para todo $(x,y) \in TM$, onde $g_{ij}(x,y) := \dfrac{1}{2}\left[F^2\right]_{y^i y^j}(x,y)$ (Convexidade forte).*

Observação 1.5.1 *Dada uma variedade M e uma estrutura de Finsler, o par (M,F) é chamado um espaço (ou variedade) de Finsler.*

Usaremos as seguintes observações:

1. Vamos denotar a métrica de Finsler por $F = F(x,y)$;
2. Uma matriz $A_{n\times n}$ será denotada por (a_{ij}) e sua inversa por $a^{ij} = (a_{ij})^{-1}$, isto é,
$$a_{ij}a^{jl} = \delta_{il};$$
3. Chamaremos de “levantamento”e “rebaixamento”de índices, respectivamente, a seguinte notação $a^{ij}t_j = t^i$ e $a_{ij}t^j = t_i$, onde $t^i = t^i(x,y)$ e $t_j = t_j(x,y)$;

4. Em algumas situações, a função de Finsler é absolutamente homogênea em y, isto é, $F(x,\lambda y) = |\lambda| F(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Em geral, esta propriedade é muito restritiva, pois exclui alguns exemplos importantes de Espaços de Finsler, como os espaços de Randers (veja [7]);

5. A matriz real simétrica (a_{ij}) é positiva definida se cumpre uma e portanto todas, as seguintes equivalências (veja [18]):

   (a) Para todo vetor não nulo $\xi \in T_pM$ temos que $\xi^T(a_{ij})\xi > 0$ onde ξ^T é o vetor transposto de ξ;

   (b) Todos os auto-valores λ_i de (a_{ij}) são positivos;

   (c) Todos os menores principais de (a_{ij}) são positivos;

6. Toda matriz (a_{ij}) positiva definida é inversível e sua matriz inversa $(a_{ij})^{-1}$ também é positiva definida (veja [18]).

Se F é uma métrica de Finsler, então usando o Teorema de Euler prova-se que $F(x,y) = \sqrt{g_{ij}(x,y)y^jy^i}$. De fato

$$2g_{ij}(x,y)y^jy^i = \left[F^2\right]_{y^iy^j}(x,y)y^jy^i = \left[F^2\right]_{y^i}y^i(x,y) = 2F^2(x,y).$$

A seguir apresentaremos alguns exemplos de métricas de Finsler.

Exemplo 1.5.1 *Métrica Euclidiana:*

$$F(x,y) = F(y) = \sqrt{c_{ij}y^iy^j},$$

onde $y = y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ *é uma base de* T_xM *e* $c_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$ *é constante.*

Exemplo 1.5.2 *Métrica de Minkowski:*

$$F(x,y) = F(y) = \sqrt{g_{ij}(y)y^iy^j},$$

onde $y = y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ *é uma base de* T_xM *e* $g_{ij}(y) = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$.

Exemplo 1.5.3 *Métrica Riemanniana:*

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j},$$

onde $y = y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ *é uma base de* T_xM *e* $a_{ij}(x) = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$.

Exemplo 1.5.4 *Métrica de Funk: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio fortemente convexo e uma norma de Minkowski $\phi(y)$ em $\mathbb{R}^n$, tal que*

$$U := \{y \in \mathbb{R}^n | \phi(y) < 1\}.$$

Defina $F = F(x,y) > 0$, $y \neq 0$, por $x + \dfrac{y}{F} \in \partial U$, $\;y \in T_xU = \mathbb{R}^n$, F é chamada métrica de Funk em U.

Podemos deduzir uma expressão para F considerando que

$$\phi^2\left(x + \frac{y}{F}\right) = \left\langle x + \frac{y}{F}, x + \frac{y}{F}\right\rangle = 1.$$

Neste caso teremos que

$$< x,x > +2\left\langle x, \frac{y}{F}\right\rangle + \left\langle \frac{y}{F}, \frac{y}{F}\right\rangle = \phi^2(x) + 2\left\langle x, \frac{y}{F}\right\rangle + \frac{\phi^2(y)}{F^2} = 1,$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} &F^2\phi^2(x) + 2F\langle x,y\rangle + \phi^2(y) - F^2 = \\ &-\left(1-\phi^2(x)\right)F^2 + 2\langle x,y\rangle F + \phi^2(y) = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação quadrática em F e considerando $\phi(x) < 1$ temos que:

$$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 + 4\left(1-\phi^2(x)\right)\phi^2(y) > 0,$$

Assim

$$F = \frac{-2\langle x,y\rangle \pm 2\sqrt{\phi^2(y) - \phi^2(x)\phi^2(y) + \langle x,y\rangle^2}}{-2\left(1-\phi^2(x)^2\right)}.$$

Observe que:

$$F = \frac{\langle x,y\rangle + \sqrt{\phi^2(y) - \phi^2(x)\phi^2(y) + \langle x,y\rangle^2}}{1-\phi^2(x)} > 0$$

e

$$F = \frac{\langle x,y\rangle - \sqrt{\phi^2(y) - \phi^2(x)\phi^2(y) + \langle x,y\rangle^2}}{1-\phi^2(x)} < 0,$$

pois

$$\sqrt{\phi^2(y) - \phi^2(x)\phi^2(y) + \langle x,y\rangle^2} > \langle x,y\rangle,$$

já $\left(1-\phi^2(x)\right)\phi^2(y) > 0$, faz com que $\langle x,y\rangle^2 + \left(1-\phi^2(x)\right)\phi^2(y) > \langle x,y\rangle^2$.

Portanto a expressão para a métrica de Funk em U é dada por

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{\phi^2(y) - \phi^2(x)\phi^2(y) + \langle x,y\rangle^2}}{1-\phi^2(x)} \pm \frac{\langle x,y\rangle}{1-\phi^2(x)}. \tag{1-2}$$

Observe que $x + \dfrac{y}{F} \in \partial U$ se

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{\phi^2(y) - \phi^2(x)\phi^2(y) + \langle x,y\rangle^2}}{1-\phi^2(x)} + \frac{\langle x,y\rangle}{1-\phi^2(x)}$$

e $x + \dfrac{y}{(-F)} = x - \dfrac{y}{F} \in \partial U$ se

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{\phi^2(y) - \phi^2(x)\phi^2(y) + \langle x,y\rangle^2}}{1-\phi^2(x)} - \frac{\langle x,y\rangle}{1-\phi^2(x)}.$$

Observação 1.5.2 *Se U é uma bola unitária $B^n \subset \mathbb{R}^n$ então a métrica de Finsler em B^n é dada por*

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{|y|^2 - |x|^2|y|^2 + \langle x,y\rangle^2}}{1-|x|^2} \pm \frac{\langle x,y\rangle}{1-|x|^2}. \tag{1-3}$$

Exemplo 1.5.5 *Métrica de Randers:*

$$F(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$$

onde $\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ é uma métrica Riemanniana e $\beta(x,y)$ é uma 1-forma em M definida por $\beta(x,y) = b_i(x)dx^i(y) = b_i(x)y^i$ e

$$b := ||\beta||_\alpha(x) < 1. \tag{1-4}$$

Observe que

$$||\beta||_\alpha(x) := \sup_{\alpha(x,y)=1,\, y\in T_xM} \beta(x,y),$$

isto significa que $||\beta||_\alpha(x)$ é o supremo de $\beta(x,y)$ quando tomamos um referencial $\{e_i\} \in T_pM$ ortonormal em relação a métrica α, ou seja $\langle e_i, e_j\rangle_\alpha = 0$, se $i \neq j$ e $\langle e_i, e_i\rangle_\alpha = 1$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (veja [18]), temos que

$$dim\, T_pM = dim\, Ker\, \beta(x,\cdot) + dim\, Im\, \beta(x,\cdot),$$

onde $Ker\, \beta(x,\cdot) := \{y; \beta(x,y) = 0\}$ é chamado de *núcleo* de $\beta(x,\cdot)$.

Se $\beta(x,\cdot)$ é a 1-forma nula, então a dimensão do núcleo de $\beta(x,\cdot)$ é n e a dimensão da imagem de $\beta(x,\cdot)$ é 0, caso contrário, como a dimensão de T_pM é n e a dimensão da imagem de $\beta(x,\cdot)$ é 1, temos que a dimensão do núcleo de $\beta(x,\cdot)$ será $n-1$, assim tomando $\{e_i\} \in T_pM$, temos que $\beta(x,e_\varepsilon) = 0$ quando $1 \leq \varepsilon \leq n-1$.

De fato, vamos tomar um referencial ortonormal em relação a métrica α dado por

$$e_\varepsilon = (\varepsilon_\varepsilon)^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \;\; 1 \leq \varepsilon \leq n-1$$

e

$$e_n = cb_s a^{sk} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

onde $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ é uma base para T_pM.

Do fato que $\langle e_\varepsilon, e_n \rangle_\alpha = 0$, $\forall\ 1 \leq \varepsilon \leq n-1$ segue que

$$cb_s a^{si} (\varepsilon_\varepsilon)^k a_{ik} = c\delta_{sk} b_s (\varepsilon_\varepsilon)^k = cb_k (\varepsilon_\varepsilon)^k = 0,$$

portanto $\beta(x,e_\varepsilon) = b_k(\varepsilon_\varepsilon)^k = 0$, onde $1 \leq \varepsilon \leq n-1$.

Por outro lado, do fato que $\langle e_n, e_n \rangle_\alpha = 1$ segue que $cb_s a^{si} cb_s a^{sj} a_{ij} = c^2 \delta_{js} b_s b_s a^{sj} = c^2 b_j b_s a^{sj} = 1$ e portanto $c = \dfrac{1}{\sqrt{b_j b_s a^{sj}}}$, onde $b := \sqrt{b_j b_s a^{sj}}$. Neste caso

$$\beta(x,e_n) = b_k cb_s a^{si} = \frac{b_k b_s a^{sk}}{b} = \frac{b^2}{b} = b$$

e portanto $b = \sup\limits_{\alpha(x,y)=1,\; y \in T_xM} \beta(x,y)$.

No caso da métrica de Randers temos que $g_{ij} = g_{ij}(x,y)$ é dado por

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \frac{1}{2}\left[F^2\right]_{y^i y^j} \\
&= F_{y^j} F_{y^i} + F F_{y^i y^j} \\
&= (\alpha+\beta)_{y^j} (\alpha+\beta)_{y^i} + F(\alpha+\beta)_{y^i y^j} \\
&= (\alpha_{y^j} + \beta_{y^j})(\alpha_{y^i} + \beta_{y^i}) + F(\alpha_{y^i y^j} + \overbrace{\beta_{y^i y^j}}^{=0}) \\
&= \alpha_{y^j}\alpha_{y^i} + \alpha_{y^j}\beta_{y^i} + \alpha_{y^i}\beta_{y^j} + \beta_{y^j}\beta_{y^i} + F\alpha_{y^i y^j} \\
&= \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha} + \frac{y_j}{\alpha} b_i + \frac{y_i}{\alpha} b_j + b_i b_j + \frac{F}{\alpha}(a_{ij} - \alpha_{y^j}\alpha_{y^i}) \\
&= \frac{F}{\alpha}\left(a_{ij} - \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha}\right) + \left(b_i + \frac{y_i}{\alpha}\right)\left(b_j + \frac{y_j}{\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{1-5}$$

onde $y_i := a_{ij}y^j$ e $a_{ij} = a_{ij}(x)$. Concluímos de [20] e da igualdade (1-5) que (g_{ij}) é positiva definida se, e somente se,

$$b := ||\beta||_\alpha(x) = \sqrt{a^{ij}b_ib_j} < 1.$$

Podemos escrever a métrica de Randers de uma forma mais simples, denominada *forma normal* esse é o objetivo da seguinte proposição

Proposição 1.5.1 *Seja $F = \alpha + \beta$ uma métrica de Randers em uma variedade M, n-dimensional. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal na métrica $\alpha = \alpha(x,y)$ tal que o vetor e_n tenha direção e sentido do vetor $b_ja^{ji}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Então $F = F(x,y)$ tem a seguinte forma normal*

$$F(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2} + by^n, \;\; \forall y = y^ie_i \in T_xM, \tag{1-6}$$

onde $b = \sqrt{a^{ij}b_ib_j}$ é a norma (1-4) da 1-forma β.

Prova. Primeiramente observemos que no referencial $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ a métrica é dada por

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}y^iy^j} + b_i(x)y^i, \;\; \forall y = y^k\frac{\partial}{\partial x^k},$$

pois $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_\alpha = a_{ij}$ e $\beta = b_iy^i$. Agora considerando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em relação a métrica α, obtemos a primeira parcela de (1-6), pois basta usarmos o fato que $\langle e_i, e_j\rangle_\alpha = \delta_{ij}$. Logo neste referencial $a_{ij} = \delta_{ij}$.

Para a segunda parcela de (1-6) devemos proceder como anteriormente e tomar um referencial $e_\varepsilon = (\varepsilon_\varepsilon)^k\frac{\partial}{\partial x^k}$, $1 \leq \varepsilon \leq n-1$ e $e_n = cb_sa^{sk}\frac{\partial}{\partial x^k}$, onde $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ é uma base para T_xM. Neste caso

$$\beta(x, e_\varepsilon) = b_k(\varepsilon_\varepsilon)^k = 0, \;\; 1 \leq \varepsilon \leq n-1$$

e

$$\beta(x, e_n) = b = \sup_{\alpha(x,y)=1,\, y\in T_xM} \beta(x,y).$$

Tomando $y = y^\varepsilon e_\varepsilon + y^n e_n$ e usando o fato que β é linear temos que

$$\beta(x,y) = y^\varepsilon\beta(x,e_\varepsilon) + y^n\beta(x,e_n) = y^nb.$$

$\square$

Para a métrica de Finsler em uma variedade M as *geodésicas* $c = c(t)$ de $F = F(x,y)$ em um sistema de coordenadas locais (x^i) são caracterizadas pela equação

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \tag{1-7}$$

onde $x^i(t)$ são coordenadas de $c(t)$ e $G^i = G^i(x,y)$ são definidos por

$$G^i = \frac{g^{il}}{4}\left\{\left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k - \left[F^2\right]_{x^l}\right\}, \tag{1-8}$$

onde $g_{ij} = g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}\left[F^2\right]_{y^i y^j}(x,y)$ e $g^{ij} := \left(g_{ij}\right)^{-1}$.

As funções locais $G^i = G^i(x,y)$ definem um campo de vetores global

$$G(x,y) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

em TM. G é chamado de *spray* de F e G^i são chamados os *coeficientes do spray* de F.

A seguir temos exemplos dos coeficientes do spray de F no caso Euclidiano e Riemanniano.

Exemplo 1.5.6 *Se $F(x,y) = F(y)$ é Euclidiana*

$$G^i(x,y) = 0,$$

pois $\left[F^2\right]_{x^k}(y) = 0$, para todo $k \in \{1,...,n.\}$

Exemplo 1.5.7 *Se $F(x,y)$ é Riemanniana, denotaremos o coeficiente do spray neste caso por $G^i_\alpha = G^i_\alpha(x,y)$. Utilizando os símbolos de Christoffel da conexão Levi-Civita*

$$\overline{\Gamma}^i_{rs} = \frac{a^{il}}{2}\left(\frac{\partial a_{rl}}{\partial x^s} + \frac{\partial a_{sl}}{\partial x^r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x^l}\right),$$

onde $\overline{\Gamma}^i_{rs} = \overline{\Gamma}^i_{rs}(x)$ e $a^{il} = a^{il}(x)$. Temos que

$$\begin{aligned} G^i_\alpha &= \frac{a^{il}}{4}\left\{\left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k - \left[F^2\right]_{x^l}\right\} \\ &= \frac{a^{il}}{4}\left(\frac{\partial a_{rl}}{\partial x^k} y^r y^k + \frac{\partial a_{sl}}{\partial x^k} y^s y^k - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x^l} y^r y^s\right) \\ &= \frac{a^{il}}{4}\left(\frac{\partial a_{rl}}{\partial x^s} y^r y^s + \frac{\partial a_{sl}}{\partial x^r} y^r y^s - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x^l} y^r y^s\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a^{il}}{2}\left(\frac{\partial a_{rl}}{\partial x^s} + \frac{\partial a_{sl}}{\partial x^r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x^l}\right) y^r y^s\right]. \end{aligned}$$

Com isto

$$G^i_\alpha = \frac{1}{2}\overline{\Gamma}^i_{rs} y^r y^s, \tag{1-9}$$

Neste caso o sistema de equações das geodésicas é dada por

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \overline{\Gamma}^i_{rs}\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt} = 0; \quad i \in \{1, \cdots, n\}. \tag{1-10}$$

No próximo capítulo faremos uma análise mais detalhada do spray de F e de seus coeficientes.

Definição 1.5.2 *A métrica de Finsler $F = F(x,y)$ em uma variedade é localmente dualmente flat se para todo ponto existe um sistema de coordenadas (x^i), com os coeficientes do spray da forma*

$$G^i = -\frac{1}{2}g^{ij}H_{y^j}, \tag{1-11}$$

onde $H = H(x,y)$ é uma função escalar.

Lema 1.5.1 *A métrica de Finsler $F = F(x,y)$ em um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dualmente flat se e somente se satisfaz*

$$\left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k - 2\left[F^2\right]_{x^l} = 0, \tag{1-12}$$

onde $H = H(x,y)$ é dada pela equação: $H = -\dfrac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^m} y^m$.

Prova. Primeiramente consideramos que F é localmente dualmente flat neste caso

$$\begin{aligned} G^i &= -\frac{1}{2}g^{il}H_{y^l} \\ &= -\frac{1}{2}g^{il}\left(-\frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^l}\right), \end{aligned}$$

como pela definição

$$\begin{aligned} G^i &= \frac{g^{il}}{4}\left(\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \left[F^2\right]_{x^l}\right) \\ &= \frac{g^{il}}{2}\left(\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \frac{1}{2}\left[F^2\right]_{x^l}\right), \end{aligned}$$

podemos igualar essas duas expressões e obter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g^{il}}{2}\left[\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\left[F^2\right]_{x^l}\right] \\ &= \frac{g^{il}}{2}\left(\frac{2}{6}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \frac{4}{6}\left[F^2\right]_{x^l}\right) \\ &= \frac{g^{il}}{6}\left(\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^l}\right). \end{aligned} \tag{1-13}$$

Multiplicando (1-13) por g_{ik} e usando que $(g^{il}) = (g_{il})^{-1}$, isto é, $g_{ik}g^{il} = \delta_{kl}$, obtemos

$$g_{ik}g^{il}\left(\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^l}\right) = \delta_{kl}\left(\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^l}\right) = 0.$$

Concluímos então que $\left[F^2\right]_{x^m y^k} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^k} = 0$.

Utilizando a definição do coeficiente do spray temos que

$$\begin{aligned}
G^i &= \frac{g^{il}}{4}\left(\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \left[F^2\right]_{x^l}\right)\\
&= \frac{g^{il}}{2}\left(\frac{3}{6}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \frac{3}{6}\left[F^2\right]_{x^l}\right)\\
&= \frac{g^{il}}{2}\left(\frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m + \frac{2}{6}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \frac{3}{6}\left[F^2\right]_{x^l} + \frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^l} - \frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^l}\right)
\end{aligned}$$

Utilizando agora (1-12) temos que

$$\begin{aligned}
G^i &= \frac{g^{il}}{2}\left(\frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m + \frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^l}\right) + \frac{g^{il}}{6}\left(\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^l}\right)\\
&= -\frac{g^{il}}{2}\left(-\frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - \frac{1}{6}\left[F^2\right]_{x^l}\right)\\
&= -\frac{1}{2}g^{il}H_{y^l}.
\end{aligned}$$

□

Em [2] e [3] encontramos a seguinte proposição, que dá condições necessárias e suficientes para que uma métrica Riemanniana seja localmente dualmente flat.

Proposição 1.5.2 *A métrica Riemanniana $F = F(x,y)$ é localmente dualmente flat se, e somente se, pode ser localmente expressa por $a_{ij}(x) = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^i x^j}(x)$, onde $\psi = \psi(x)$ é uma função escalar local em M.*

Prova. Observe que $F = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$, onde $a_{ij} = a_{ij}(x)$ e que

$$\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x^m y^l} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^l} &= \left[a_{ik}y^i y^k\right]_{x^m y^l} y^m - 2\left[a_{ik}y^i y^k\right]_{x^l}\\
&= \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^m} y^i y^k\right]_{y^l} y^m - 2\left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} y^i y^k\right]\\
&= \frac{\partial a_{lk}}{\partial x^m} y^k y^m + \frac{\partial a_{li}}{\partial x^m} y^i y^m - 2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} y^i y^k\\
&= \frac{\partial a_{lk}}{\partial x^i} y^k y^i + \frac{\partial a_{li}}{\partial x^k} y^i y^k - 2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} y^i y^k.
\end{aligned}$$

Se F é localmente dualmente flat, pelo Lema 1.5.1

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} = 2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l}. \tag{1-14}$$

Permutando i com l em (1-14) obtemos

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^l} = 2\frac{\partial a_{lk}}{\partial x^i}. \tag{1-15}$$

Subtraindo (1-14) de (1-15)

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial a_{lk}}{\partial x^i}.$$

Permutando i com k em (1-14) obtemos

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} = 2\frac{\partial a_{li}}{\partial x^k}. \tag{1-16}$$

Subtraindo (1-14) em (1-16) obtemos

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^l}. \tag{1-17}$$

Assim temos que

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^l} = \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i}. \tag{1-18}$$

Se $\psi = \psi(x)$ é tal que

$$\psi = \iint a_{il} dx^l dx^i,$$

então usando (1-18) segue que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^k} = \int \left(\int \frac{\partial a_{il}}{\partial x^k} dx^l \right) dx^i = \int \left(\int \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} dx^l \right) dx^i = \int a_{ik} dx^i$$

e

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^k \partial x^l} = \int \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l} dx^i = \int \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} dx^i = g_{kl}.$$

Reciprocamente se $a_{ij} = a_{ij}(x)$ é tal que

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i x^j},$$

onde $\psi = \psi(x)$ é uma função escalar em M então

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^i} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^k x^i x^l} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^i x^k x^l} = 2\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^l x^i x^k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^l}$$

e portanto F é localmente dualmente flat. □

Definição 1.5.3 *Uma métrica de Finsler $F = F(x,y)$ é localmente projetivamente flat se para todo ponto há um sistema de coordenadas $\left(x^i\right)$, onde as geodésicas são linhas retas, ou equivalentemente, os coeficientes do spray, $G^i = G^i(x,y)$, são da forma $G^i = y^i P$, onde $P = P(x,y)$ é uma função escalar local.*

Métricas projetivamente flat em subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ são caracterizadas por uma simples Equação Diferencial Parcial.

Lema 1.5.2 *A métrica de Finsler $F = F(x,y)$ em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é projetivamente flat se e somente se satisfaz a equação*

$$F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l} = 0. \tag{1-19}$$

Neste caso, a função local $P = P(x,y)$ é dada por $P = \dfrac{F_{x^k} y^k}{2F}$.

Prova. Observe que $[F^2]_{x^l} = 2FF_{x^l}$ e $[F^2]_{x^k y^l} = 2F_{y^l}F_{x^k} + 2FF_{x^k y^l}$. Neste caso temos que

$$\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k &= 2F_{y^l}F_{x^k}y^k + 2FF_{x^k y^l}y^k \\
&= \left(\frac{2F_{x^k}y^k}{F}\right)\frac{2FF_{y^l}}{2} + 2FF_{x^k y^l}y^k \\
&= \frac{2F_{x^k}y^k}{F}\frac{\left[F^2\right]_{y^l}}{2} + 2F\left(F_{x^k y^l}y^k\right).
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Euler

$$\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k &= \frac{2F_{x^k}y^k}{F}\frac{\left[F^2\right]_{y^l y^m} y^m}{2} + 2F\left(F_{x^k y^l}y^k\right) \\
&= \frac{2F_{x^k}y^k}{F} g_{ml} y^m + 2F\left(F_{x^k y^l}y^k\right),
\end{aligned}$$

Neste caso os coeficientes do spray $G = G(x,y)$ tem a forma

$$\begin{aligned} G^i &= \frac{g^{il}}{4}\left([F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l}\right) \\ &= \frac{g^{il}}{4}\left(\frac{2F_{x^k}y^k}{F} g_{ml} y^m + 2FF_{x^k y^l} y^k - 2FF_{x^l}\right) \\ &= \frac{F_{x^k}y^k}{2F} g^{il} g_{ml} y^m + \frac{F}{2} g^{il}\left(F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l}\right) \\ &= \frac{F_{x^k}y^k}{2F} \delta_{im} y_m + \frac{F}{2} g^{il}\left(F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l}\right) \\ &= \frac{F_{x^k}y^k}{2F} y^i + \frac{F}{2} g^{il}\left(F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l}\right), \end{aligned} \tag{1-20}$$

onde $g_{ij} = g_{ij}(x,y)$.

Se F é localmente projetivamente flat então $G^i = y^i P = y^i \dfrac{F_{x^k}y^k}{2F}$, por (1-20) temos que $g^{il}\left(F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l}\right) = 0$ e $g_{ji} g^{il}\left(F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l}\right) = \delta_{jl}\left(F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l}\right) = 0$, e portanto $F_{x^k y^j} y^k - F_{x^j} = 0$. Reciprocamente se $F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l} = 0$, $\forall\, l$, então novamente por (1-20) temos que $G^i = y^i P$. □

Observação 1.5.3 *No caso em que $F = F(x,y) = \alpha(x,y)$ é Riemanniana temos que a equação $\alpha_{x^m y^k} y^m = \alpha_{x^k}$ é chamada equação projetivamente flat de Hamel.*

Agora definiremos algumas observações que serão posteriormente utilizadas.

Observação 1.5.4 *Seja $F(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$ uma métrica de Randers em uma variedade M. Defina $b_{i|j}(x)$ por*

$$b_{i|j}(x)\theta^j := db_i(x) - b_j(x)\theta_i^j(x),$$

onde $\theta^i = dx^i$ e $\theta_i^j(x) := \bar{\Gamma}_{ik}^j(x)dx^k$ denota a conexão de Levi-Civita de $\alpha(x,y)$. Considere

$$\begin{aligned} r_{ij}(x) &:= \frac{1}{2}(b_{i|j}(x) + b_{j|i}(x)); \\ s_{ij}(x) &:= \frac{1}{2}(b_{i|j}(x) - b_{j|i}(x)); \\ r_{00}(x,y) &:= r_{ij}(x) y^i y^j; \\ s_{k0}(x,y) &:= s_{km}(x) y^m. \end{aligned}$$

Observação 1.5.5 *Como $r_{ij}(x) := \frac{1}{2}(b_{i|j}(x) + b_{j|i}(x))$ e $s_{ij}(x) := \frac{1}{2}(b_{i|j}(x) - b_{j|i}(x))$, somando as duas expressões obtemos que $b_{i|j}(x) = r_{ij}(x) + s_{ij}(x)$.*

Observação 1.5.6 *Por definição temos que*

$$\begin{aligned} b_{i|j}(x)\theta^j &= b_{i|j}(x)dx^j \\ &= \frac{\partial b_i}{\partial x^l}(x)dx^l - b_j(x)\overline{\Gamma}^j_{ik}(x)dx^k \\ &= \left(\frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - b_k(x)\overline{\Gamma}^k_{ij}(x)\right)dx^j. \end{aligned}$$

Como $\{dx^j\}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ *é uma base para* T^*_pM *temos que*

$$b_{i|j}(x) = \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - b_k(x)\overline{\Gamma}^k_{ij}(x).$$

Podemos associar os $s_{ij}(x)$ definidos acima com as 1-formas diferenciáveis através da seguinte proposição.

Proposição 1.5.3 *Uma* 1*-forma* $\beta(x,\cdot) = b_i(x)dx^i(\cdot)$ *é fechada (*$d\beta(x,\cdot) = 0$*) se, e somente se,* $s_{ij}(x) = 0$.

Prova. Como $b_{i|j}(x) = \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - b_k(x)\overline{\Gamma}^k_{ij}(x)$ e os símbolos de Christofell da conexão Levi-Cevita de α são simétricos, isto é, $\overline{\Gamma}^k_{ij}(x) = \overline{\Gamma}^k_{ji}(x)$ temos que

$$\begin{aligned} s_{ij}(x) : &= \frac{1}{2}(b_{i|j}(x) - b_{j|i}(x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - b_k(x)\overline{\Gamma}^k_{ij}(x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x) + b_k(x)\overline{\Gamma}^k_{ji}(x)\right) \qquad (1\text{-}21) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x)\right). \end{aligned}$$

Calculando a diferencial exterior de $\beta(x,\cdot) = b_i(x)dx^i(\cdot)$ (veja seção 1.3), temos que

$$\begin{aligned}
d\beta(x,\cdot) &= db_j(x) \wedge dx^j \\
&= \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x)dx^i \wedge dx^j \\
&= \left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x)dx^i \wedge dx^j_{(i<j)} + \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x)dx^i \wedge dx^j_{(i>j)}\right) \\
&= \left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x)dx^i \wedge dx^j_{(i<j)} + \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x)dx^j_{(i<j)} \wedge dx^i\right) \\
&= \left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x)dx^i \wedge dx^j_{(i<j)} - \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x)dx^j_{(i<j)} \wedge dx^i\right) \\
&= \left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x)\right) dx^i \wedge dx^j_{(i<j)}.
\end{aligned}$$

Se $d\beta(x,\cdot)$ é a 2-forma nula então na expressão acima temos uma combinação linear de elementos da base das 2-formas diferenciáves se anulando e portanto $s_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(x)\right) = 0$. Reciprocamente se $s_{ij}(x) = 0$ temos que $d\beta(x,\cdot) = 0$ e portanto que $\beta(x,\cdot)$ é fechada. □

CAPÍTULO 2

A Conexão de Chern

2.1 Introdução

Um problema fundamental na geometria diferencial é o problema de equivalência: decidir quando duas métricas diferem apenas por uma mudança de coordenadas. No caso da geometria Riemanniana, este problema foi resolvido em 1870 por Christoffel e Lipschitz, e levou Christoffel aos seus símbolos e a noção de derivação covariante. Em 1917, Levi-Civita construiu uma conexão simétrica (torsão nula) e compatível com a métrica, chamada conexão de Levi-Civita, usando os símbolos de Christoffel.

No caso da geometria de Finsler, a forma de Hilbert, definida por Hilbert em 1900, desempenhou um papel fundamental. Sua diferenciação exterior dá imediatamente uma conexão, chamada conexão de Chern, que se reduz à conexão de Christoffel/Levi-Civita no caso Riemanniano.

Outras conexões em espaços de Finsler foram definidas por Synge (1925), Taylor (1925), Berwald (1925) e Cartan (1934). Em 1948, Chern resolveu o problema de equivalência da geometria de Finsler. Na solução deste problema, Chern deduziu uma família de conexões que inclui como casos particulares as conexões mencionadas acima. A conexão de Chern que estudaremos é uma "conexão especial" desta família.

A conexão de Chern não é construída diretamente sobre o fibrado tangente TM, como a conexão de Levi-Civita, mas sobre o *fibrado vetorial pull-back* π^*TM, usando o método do referencial móvel e a diferenciação exterior, como veremos nas próximas seções.

A conexão de Chern é de torsão nula, mas não é completamente compatível com o produto interno de π^*TM definido por g. A propósito, demostraremos que em espaços Finslerianos, não é possível ter uma conexão em π^*TM simultaneamente de torsão nula e compatível com a métrica.

2.2 A Conexão de Chern em π^*TM

Antes de introduzir a conexão de Chern, daremos uma breve descrição de fibrado vetorial e de uma conexão linear em um fibrado vetorial.

Um fibrado de vetores k-dimensional sobre uma variedade diferenciável N é uma variedade diferenciável V com uma transformação $\pi : V \longrightarrow N$ de classe C^∞, tal que para toda coordenada em um domínio $U \subset N$, $\pi^{-1}(U)$ é difeomorfo a $U \times \mathbb{R}^k$, e por restrição ao difeomorfismo $\pi^{-1}(x)$ é difeomorfo a $\{x\} \times \mathbb{R}^k$, para todo $x \in U$. O conjunto $V_x := \pi^{-1}(x)$ é chamado a fibra em x. Usualmente denotamos o fibrado de vetores por V.

Para um fibrado de vetores V sobre uma variedade N, uma secção de V é uma transformação $X : N \longrightarrow V$ tal que $X(x) \in V_x$ para todo $x \in N$. Um referencial local de V é um conjunto $\{e_i\}_{i=1}^k$ de secções de V, de classe C^∞, definidas em algum conjunto aberto $U \subset N$ tal que $\forall x \in U$, o conjunto $\{e_i(x)\}_{i=1}^k$ é uma base para a fibra V_x em x. Dado um referencial local $\{e_i\}_{i=1}^k$ de V, qualquer secção X de V pode ser localmente expressa por $X = X^i e_i$. Então X é de classe C^∞ se, e somente, se todos os coeficientes X^i são de classe C^∞. Denotaremos por $C^\infty(V)$ o espaço de todas as secções de V de classe C^∞ .

Podemos ver o fibrado vetorial V sobre a variedade N como a união de espaços vetoriais V_x indexados em N, $V = \bigcup_{x\in N} V_x$. Seja V_x^* o espaço vetorial dual de V_x. Por definição, V_x^* é um espaço vetorial de funções lineares em V_x. Então $V^* = \bigcup_{x\in N} V_x^*$ é um fibrado vetorial sobre N. Chamaremos V^* o espaço vetorial dual de V.

Seja V um fibrado de vetores sobre uma variedade N. A conexão linear ∇ em V é uma família de transformações lineares $\nabla : T_xN \times C^\infty(V) \longrightarrow V_x$, i.e,

$$\nabla : (v, X) \in T_xN \times C^\infty(V) \longmapsto \nabla_v X \in V_x,$$

com a seguinte condição adicional

$$\nabla_v(fX) = df(v)X + f(x)\nabla_v X,$$

$f \in C^\infty(M)$. Para um referencial local $\{e_i\}_{i=1}^k$ de V, seja $X = X^i e_i$. Então

$$\nabla_v X = \{dX^i(v) + X^j \omega_j^i\} e_i,$$

onde $\{\omega_j^i\}$ é um conjunto de 1-formas em N. $\{\omega_j^i\}$ são chamadas *Formas de Conexão* de ∇ com respeito a $\{e_i\}_{i=1}^k$. Removendo v na identidade acima podemos expressar $\nabla X : T_xN \longrightarrow V_x$ ou $\nabla X \in T_x^*N \otimes V_x$ por

$$\nabla X = \{dX^i + X^j \omega_j^i\} \otimes e_i, \; X = X^i e_i.$$

Seja

$$\Omega_j^{\,i} := d\omega_j^{\,i} - \omega_j^{\,k} \wedge \omega_k^{\,i}.$$

Cada $\Omega_j^{\,i}$ é localmente uma 2-forma. O conjunto $\{\Omega_j^{\,i}\}$ é chamado de *Formas de Curvatura* de ∇ com respeito a $\{e_i\} = \{e_i\}_{i=1}^k$. Se o conjunto $\{\omega^i\}$, chamado coreferencial dual de V^*, denota a base dual de $\{e_i\}$, isto é, $\omega^i(e_j) = \delta_{ij}$, então

$$\Omega := \Omega_j^{\,i}\omega^j \otimes e_i$$

é um tensor bem definido sobre N, o qual é uma seção de $T^*N \otimes V$.

Seja M uma variedade diferenciável conexa. Seja

$$TM_0 := TM\backslash 0 = \{(x,y); x \in M, y \neq 0 \in T_xM\}.$$

TM_0 é chamado *fibrado tangente "slit"* , sobre M.

No esquema abaixo, apresentamos a projeção π, sua diferencial $d\pi = \pi_*$ e a aplicação π^*, pull-back da projeção π. (veja seção 1.3).

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM_0 & \longrightarrow & M \\ (x,y) & \longmapsto & \pi(x,y) = x, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \pi_* : T_{(x,y)}(TM_0) & \longrightarrow & T_{\pi(x,y)}M = T_xM \\ V & \longmapsto & \pi_*(V) = v, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \pi^* : T_x^*M & \longrightarrow & T^*_{(x,y)}(TM_0) \\ \omega & \longmapsto & \pi^*\omega, \end{array}$$

onde $\pi^*(\omega(V)) := \omega(\pi_*(V)) = \omega(v)$,

$$T_x^*M = \{\theta : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ linear}\}$$

e

$$T_x^*(TM_0) = \{\xi : T_x(TM_0) \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ linear}\}.$$

A *pull-back* da projeção natural π induz um fibrado vetorial π^*TM sobre TM_0 pois se b_i é um referencial local de TM e θ^i é o coreferencial dual local de T^*M então $e_i = (x,y,b^i)$ é um referencial local de π^*TM e $\omega^i := \pi^*\theta^i$ é o coreferencial local dual de

π^*T^*M. Uma fibra de π^*TM no ponto $(x,y) \in TM_0$ é definida por

$$\pi^*TM|_{(x,y)} := \{(x,y,v)|v \in T_xM\} \cong T_xM.$$

Em outras palavras , $\pi^*TM|_{(x,y)}$ é justamente uma cópia de T_xM. π^*TM é chamado de *fibrado tangente pull-back*. Similarmente, definimos o *fibrado cotangente pull-back* π^*T^*M, do qual a fibra em (x,y) é uma cópia de T_x^*M.

$$\pi^*T^*M|_{(x,y)} := \{(x,y,\theta)|v \in T_x^*M\} \cong T_x^*M.$$

Deste modo, π^*T^*M pode ser visto como o fibrado vetorial dual de π^*TM, no seguinte sentido

$$(x,y,\theta)(x,y,v) = \theta(v), \ (\theta,v) \in T_x^*M \times T_xM.$$

Em um sistema de coordenadas adaptado (x^i,y^i) em TM, onde (x^i) é um sistema de coordenadas local em M e os $(y^i)'s$ são os coeficientes de $y = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$. Seja $\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ e $\{dx^i,dy^i\}$ o referencial local e o coreferencial natural para $T(TM_0)$ e $T^*(TM_0)$, respectivamente. Então VTM que é o espaço gerado por $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$, isto é, $VTM = span\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$, é um bem definido subfibrado de $T(TM_0)$, o qual é chamado de *fibrado tangente vertical* de M. π^*T^*M pode ser identificado como o *fibrado cotangente horizontal*, $HT^*M := span\{dx^i\}$, de $T^*(TM_0)$. Assim HT^*M e π^*T^*M podem ser vistos como um fibrado vetorial dual de π^*TM. Seja

$$\partial_i := \left(x,y,\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\right).$$

Então $\{\partial_{x^i}\}$ é um referencial local de π^*TM.

O fibrado vetorial π^*TM tem uma secção canônica Y definida por

$$Y_{(x,y)} := (x,y,y).$$

Como $y = y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}|_x \in T_xM$, Y pode ser expresso por $Y = y^i\partial_{x^i}$.

Seja F uma métrica de Finsler em uma variedade M e seja

$$g_{ij}(x,y) := \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x,y),$$

e

$$C_{ijk}(x,y) := \frac{1}{4}[F^2]_{y^iy^jy^k}(x,y).$$

Defina

$$G := g_{ij}dx^i \wedge dx^j$$

e

$$C := C_{ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k,$$

onde $g_{ij} = g_{ij}(x,y)$ e $C_{ijk} = C_{ijk}(x,y)$, G e C são tensores em $TM_0 := TM \backslash \{0\}$. G e C são chamados *Tensor fundamental* e *Tensor de Cartan*, respectivamente.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Chern) *Seja (M,F) uma variedade de Finsler n-dimensional. Para um referencial local arbitrário $\{e_i\}$ de π^*TM e seu coreferencial dual $\{\omega^i\}$ de π^*T^*M, onde as 1-formas ω^i em T_xM são chamadas formas de Hilbert, há um único conjunto de 1-formas $\{\omega_j^i\}$, chamadas formas de conexão de Chern, em TM_0 que são caracterizadas pelas equações de estrutura*

1. *Torsão Nula:*
$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i; \tag{2-1}$$

2. *Quase g-compatível:*
$$dg_{ij} = g_{kj}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k + 2C_{ijk}\omega^{n+k}, \tag{2-2}$$

onde
$$\omega^{n+i} := dy^i + y^j\omega_j^i, \tag{2-3}$$

$Y := y^ie_i$, $g_{ij} = g_{ij}(x,y) := G(e_i,e_j)$ e $C_{ijk} = C_{ijk}(x,y) := C(e_i,e_j,e_k)$.

Prova. Provaremos o teorema para um sistema de coordenadas locais (x^i,y^i) em TM_0. Fazendo $e_i = \partial_i$ e $\omega^i := dx_i$. Localmente as 1-formas $\{\omega_j^i\}$ podem ser expressas por

$$\omega_j^i := \Gamma_{jk}^i dx^k + \Pi_{jk}^i dy^k, \tag{2-4}$$

onde $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x,y)$ e $\Pi_{jk}^i = \Pi_{jk}^i(x,y)$.

Pelas propriedades da diferenciação exterior (veja seção 1.3) temos que $d\omega^i = d^2x^i = 0$, com isto a equação (2-1) é equivalente a seguinte equação

$$\begin{aligned}
0 &= d^2x^i \\
&= dx^j \wedge (\Gamma_{jk}^i dx^k + \Pi_{jk}^i dy^k) \\
&= (\Gamma_{jk(j<k)}^i dx^j \wedge dx^k + \Gamma_{jk(j>k)}^i dx^j \wedge dx^k) + \Pi_{jk}^i dx^j \wedge dy^k \\
&= (\Gamma_{jk(j<k)}^i dx^j \wedge dx^k + \Gamma_{kj(j<k)}^i dx^k \wedge dx^j) + \Pi_{jk}^i dx^j \wedge dy^k \\
&= (\Gamma_{jk(j<k)}^i dx^j \wedge dx^k - \Gamma_{kj(j<k)}^i dx^j \wedge dx^k) + \Pi_{jk}^i dx^j \wedge dy^k \\
&= (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i)_{(j<k)} dx^j \wedge dx^k + \Pi_{jk}^i dx^j \wedge dy^k.
\end{aligned} \tag{2-5}$$

Deisde que $dx^j \wedge dx^k$ e $dx^j \wedge dy^k$ são linearmente independentes para todo i e j, segue que $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ e $\Pi^i_{jk} = 0$, deste modo (2-4) se reduz a

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k. \tag{2-6}$$

Seja $N^i_j = N^i_j(x,y)$ dado por

$$N^i_j := y^m \Gamma^i_{mj} \tag{2-7}$$

e $C_{ijk} = C_{ijk}(x,y)$ dado por

$$C_{ijk} := \frac{1}{4}[F^2]_{y^i y^j y^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}. \tag{2-8}$$

Substituindo (2-3), (2-6) e (2-7) em (2-2) temos que

$$dg_{ij} = g_{im}\Gamma^m_{jl} dx^l + g_{mj}\Gamma^m_{il} dx^l + 2C_{ijm}(dy^m + N^m_l dx^l). \tag{2-9}$$

Calculando a diferencial total de g_{ij} e usando (2-8) temos que

$$\begin{aligned} dg_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} dy^k \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} dx^l + 2C_{ijm} dy^m. \end{aligned} \tag{2-10}$$

Igualando a expressão acima com (2-9), obtemos

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} dx^l = (g_{im}\Gamma^m_{jl} + g_{mj}\Gamma^m_{il} + 2C_{ijm}N^m_l) dx^l. \tag{2-11}$$

Como $\{dx^l\}$ é uma base de T^*_pM temos que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = g_{im}\Gamma^m_{jl} + g_{mj}\Gamma^m_{il} + 2C_{ijm}N^m_l. \tag{2-12}$$

Permutando os índices em (2-12)

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = g_{jm}\Gamma^m_{il} + g_{ml}\Gamma^m_{ij} + 2C_{jml}N^m_i, \tag{2-13}$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = g_{ml}\Gamma^m_{ij} + g_{im}\Gamma^m_{jl} + 2C_{iml}N^m_j. \tag{2-14}$$

Somando (2-13) e (2-14) e subtraindo (2-12)

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}=2g_{ml}\Gamma^m_{ij}+2C_{jml}N^m_i+2C_{iml}N^m_j-2C_{ijm}N^m_l. \tag{2-15}$$

Da identidade (2-15) obtemos que

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)-g^{kl}(C_{jml}N^m_i+C_{iml}N^m_j-C_{ijm}N^m_l). \tag{2-16}$$

Agora contraindo (2-16) com y^i

$$\Gamma^k_{ij}y^i=N^k_j=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)y^i-2g^{kl}(C_{jml}G^m), \tag{2-17}$$

onde $G^i=G^i(x,y)$ e dado por

$$G^i:=\frac{1}{2}N^i_jy^j=\frac{1}{2}\Gamma^{\,i}_{jk}y^jy^k. \tag{2-18}$$

Contraindo (2-17) com $\frac{1}{2}y^j$ temos

$$G^i \;=\; \frac{g^{il}}{4}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)y^jy^k. \tag{2-19}$$

Substituindo (2-19) em (2-17) obtemos a fórmula para N^i_j em termos de g_{ij}. Substituindo (2-17) em (2-16) temos a fórmula para $\Gamma^{\,i}_{jk}$ em termos de g_{ij}. Assim definindo os $\Gamma^{\,i}_{jk}$ em termos de g_{ij} temos a existência das 1-formas de conexão $\omega^{\,i}_j$, isto é, de uma conexão linear ∇ cuja unicidade segue da métrica F. □

Observe que o G^i definido acima como $G^i:=\frac{1}{2}N^i_jy^j=\frac{1}{2}\Gamma^{\,i}_{jk}y^jy^k$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned}G^i &= \frac{g^{il}}{4}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)y^jy^k\\ &= \frac{g^{il}}{4}\left(2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}y^jy^k-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}y^jy^k\right)\\ &= \frac{g^{il}}{4}\left([F^2]_{x^ky^l}y^k-[F^2]_{x^l}\right),\end{aligned} \tag{2-20}$$

pois

$$[F^2]_{x^l}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}y^iy^j \text{ e } [F^2]_{x^ky^l}y^k=2\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}y^iy^k.$$

Observe também que com as formas de conexão de Chern $\{\omega_j^i\}$ com respeito ao referencial local $\{e^i\}$ de π^*TM, podemos definir uma conexão linear ∇ em π^*TM por

$$\nabla X = \{dX^i + X^j\omega_j^i\} \otimes e_i,$$

onde $X = X(x,y) = X^i(x,y)e_i \in C^\infty(\pi^*TM)$. Claramente, ∇ é uma conexão bem-definida e também livre de torsão no seguinte sentido

$$\nabla_{\overline{X}}\rho(\overline{Y}) - \nabla_{\overline{Y}}\rho(\overline{X}) = \rho[\overline{X},\overline{Y}],$$

$\overline{X},\overline{Y} \in C^\infty(T(TM_0))$, onde $\rho : T(TM_0) \longrightarrow \pi^*TM$ é um fibrado vetorial definido por

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{(x,y)}\right) = \partial_i|_x, \ \ \rho\left(\frac{\partial}{\partial y^i}|_{(x,y)}\right) = 0.$$

∇ é chamada *Conexão de Chern*.

Proposição 2.2.1 *Se uma forma de conexão é g-compatível, isto é,*

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k,$$

onde $g_{ij} = g_{ij}(x,y)$ e $\{\omega_i^k\}$ são as formas de conexão de Chern, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *Existe um único conjunto de formas de conexão com torsão nula e g-compatível no fibrado pull-back π^*TM;*
2. *A estrutura de Finsler é Riemanniana.*

Prova. Pelo Teorema de Chern, dada uma estrutura de Finsler F, existe um único conjunto de formas de conexão no fibrado pull-back π^*TM, as *formas de conexão de Chern*, que tem torsão nula, isto é, $\omega^j \wedge \omega_j^i = 0$ e quase g-compatibilidade com a métrica, isto é, $dg_{ij} = g_{kj}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k + 2C_{ijk}\omega^{n+k}$, onde $C_{ijk} = C_{ijk}(x,y)$. Se a estrutura de Finsler é Riemanniana, então temos que o *Tensor fundamental* g_{ij} não depende de y e consequentemente o *Tensor de Cartan* C_{ijk} é identicamente nulo. Logo, pelo critério de quase g-compatibilidade do Teorema de Chern, temos que $dg_{ij} = g_{kj}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k$, donde segue a equivalência entre (1) e (2). $\square$

Proposição 2.2.2 *Se $G^i = G^i(x,y)$ é dado por $G^i = \dfrac{g^{il}}{4}\left(\dfrac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \dfrac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)y^jy^k$, onde $g_{ij} = g_{ij}(x,y)$ então $N_j^i = N_j^i(x,y)$ é tal que $N_j^i = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$.*

Prova. Primeiramente observemos que $g_{si}g^{ij} = \delta_{js}$, neste caso

$$\frac{\partial(g_{si}g^{ij})}{\partial y^k} = \frac{\partial g_{si}}{\partial y^k}g^{ij} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k}g_{si} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial g_{si}}{\partial y^k}g^{ij} = -\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k}g_{si}.$$

Contraindo a expressão acima com g^{sl} segue que

$$\frac{\partial g_{si}}{\partial y^k}g^{ij}g^{sl} = -\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k}g_{si}g^{sl} = -\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k}\delta_{il} = -\frac{\partial g^{lj}}{\partial y^k}.$$

Usando a expressão acima e que $G^i := g^{is}G_s$, onde $G_s = G_s(x,y)$ é dado por

$$G_s = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)y^jy^k,$$

juntamente com o fato que g_{ij} é homogênea de grau zero temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^i}{\partial y^j} &= \frac{\partial(g^{is}G_s)}{\partial y^j} \\
&= \frac{\partial g^{is}}{\partial y^j}G_s + g^{is}\frac{\partial G_s}{\partial y^j} \\
&= -2g^{ia}g^{bs}C_{abj}G_s + g^{is}\frac{\partial}{\partial y^j}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)y^jy^k\right] \\
&= -2g^{ia}g^{bs}C_{abj}G_s + g^{ia}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ak}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^a}\right)y^k \\
&= N^i_j.
\end{aligned} \tag{2-21}$$

□

Agora vamos definir uma expressão para $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x,y)$ em termos de $g_{ls} = g_{ls}(x,y)$. Primeiramente façamos

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i\frac{\partial}{\partial y^j},$$

onde $N^j_i = N^j_i(x,y)$. Então de (2-16) e do fato que $C_{ijk} = C_{ijk}(x,y)$ permanece inalterado quando permutamos os índices i, j e k, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{k} &= \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{jm}}{\partial y^l}N_i^m-\frac{\partial g_{im}}{\partial y^l}N_j^m+\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m}N_l^m\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{kl}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)g_{jl}+\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)g_{li}-\left(\frac{\partial}{\partial x^l}-N_l^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)g_{ij}\right]\\
&= \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\delta g_{jl}}{\delta x^i}+\frac{\delta g_{li}}{\delta x^j}-\frac{\delta g_{ij}}{\delta x^l}\right). \qquad (2\text{-}22)
\end{aligned}$$

Os símbolos Γ_{ij}^{k} assim definidos são chamados os *Símbolos de Christoffel de segunda espécie*.

2.3 Spray

Seja M uma variedade n-dimensional e $\pi : TM_0 := TM\backslash\{0\} \longrightarrow M$ uma projeção natural. O *spray* $G = G(x,y)$ em uma variedade M é um campo vetorial especial em TM_0 da seguinte forma $G = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i\frac{\partial}{\partial y^i}$, onde $G^i = G^i(x,y)$ são funções locais homogêneas de grau 2.

$$G^i(x,\lambda y) = \lambda^2 G^i(x,y),\ \lambda > 0.$$

A curva $\gamma = \gamma(t)$ em TM_0 é chamada uma curva integral de G se satisfaz

$$\dot{\gamma} = G_\gamma. \qquad (2\text{-}23)$$

Seja $\gamma(t)$ uma curva integral de G. Então as coordenadas $(x^i(t), y^i(t))$ de $\gamma(t)$ satisfazem

$$\dot{x}^i(t) = y^i(t),\ \dot{y}^i(t) + 2G^i(x(t), y(t)) = 0.$$

Seja $\sigma(t) := \pi(\gamma(t))$ um projeção de $\gamma(t)$ sobre M. Então as coordenadas $(x^i(t))$ de $\sigma(t)$ satisfazem

$$\ddot{\sigma}^i(t) + 2G^i(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) = 0, \qquad (2\text{-}24)$$

onde identificamos $\sigma(t)$ e $\dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\sigma(t)}$ com suas coordenadas $(x^i(t))$ e $(\dot{x}^i(t))$.

Inversamente, dada uma curva $\sigma = \sigma(t)$ em M o levantamento canônico é definido como a curva formada por seus campos de vetores tangentes

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\sigma(t)}.$$

As coordenadas de $\dot{\sigma}(t)$ em TM são $(\sigma^i(t), \dot{\sigma}^i(t))$. E fácil mostrar que se $\sigma(t)$ satisfaz (2-24), então $(x^i(t), y^i(t)) = (\sigma^i(t), \dot{\sigma}^i(t))$ satisfaz (2-23), portanto o levantamento canônico de σ é uma curva integral de G.

A transformação $\sigma = \sigma(t)$ em M é chamada geodésica de G se é uma curva de classe C^∞ e seu levantamento canônico $\gamma(t) := \dot{\sigma}(t)$ é uma curva integral de G em TM_0, i.e., se satisfaz (2-23). Em um sistema de coordenadas locais, as coordenadas $(\dot{\sigma}^i(t))$ de $(\dot{\sigma}(t))$ satisfazem (2-24).

Toda métrica de Finsler $F = F(x,y)$ em uma variedade M induz um spray

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

dado por (2-20), isto é,

$$G^i = \frac{g^{il}}{4}\left\{ \left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k - \left[F^2\right]_{x^l} \right\}.$$

Por (2-18)

$$G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk} y^j y^k,$$

onde $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x,y)$ são os *Símbolos de Christoffel de segunda espécie* definidos em (2-22), assim temos que a equação das geódesicas é dada por

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

ou, equivalentemente por

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

CAPÍTULO 3

Curvatura na Geometria de Finsler

3.1 Introdução

A restrição da métrica a uma forma diferenciável quadrática levou Riemann a introduzir o tensor curvatura e a noção de curvatura seccional. O tensor curvatura de Riemann representou um papel muito importante na solução do problema fundamental de decidir quando duas estruturas Riemannianas diferem apenas por uma mudança de coordenadas. Um teorema, demonstrado por Cartan, afirma que a métrica é, em um certo sentido, determinada localmente pela curvatura. Uma afirmação equivalente foi feita por Riemann. Uma versão global deste teorema foi feita por Ambrose, em 1956, veja [15].

Na geometria de Finsler, obtemos a conexão de Chern pela diferenciação exterior da forma de Hilbert. A conexão de Chern foi usada para resolver o problema fundamental de equivalência de geometrias de Finsler. A equação de estrutura descrita pela propriedade de torsão nula da conexão de Chern, produz, através da diferenciação exterior, uma matriz de 2-formas, chamada *forma de curvatura da conexão de Chern*, cujo primeiro tensor de curvatura será usado para definir a curvatura flag, um invariante geométrico que generaliza a curvatura seccional da geometria Riemanniana. Além disso, a curvatura flag é indiferente, quer usemos a conexão de Chern, Cartan, Berwald ou Hashiguchi, veja [7].

Apresentaremos neste capítulo o estudo das Equações de Estrutura e das Identidades de Bianchi, eles serão úteis para demostrar propriedades da curvatura Riemanniana, apresentaremos ainda o cálculo da curvatura flag para métricas de Finsler localmente projetivamente flat.

3.2 Equações de Estrutura

Seja (M,F) uma variedade de Finsler n-dimensional e seja $\{e_i\}$ um referencial local arbitrário para π^*TM e $\{\omega^i\}$ o coreferencial dual para π^*T^*M. De acordo com o Teorema de Chern temos que as formas de conexão $\{\omega_j^i\}$ com respeito a $\{e_i\}$ são unicamente determinadas por

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i; \tag{3-1}$$

$$dg_{ij} = g_{ij}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k + 2C_{ijk}\omega^{n+k}, \tag{3-2}$$

onde

$$\omega^{n+i} := dy^i + y^j\omega_j^i, \tag{3-3}$$

$g_{ij} = g_{ij}(x,y)$ e $C_{ijk} = C_{ijk}(x,y)$. Claramente, $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ formam um coreferencial local para $T^*(TM_0)$. As *formas de curvatura* $\Omega_j^{\,i}$ são definidas por

$$\Omega_j^{\,i} := d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i. \tag{3-4}$$

Diferenciando (3-1) obtemos que

$$\begin{aligned} d^2\omega^i &= d\omega^j \wedge \omega_j^i - \omega^j \wedge d\omega_j^i \\ &= (\omega^m \wedge \omega_m^j) \wedge \omega_j^i - \omega^j \wedge (\Omega_j^{\,i} + \omega_j^m \wedge \omega_m^i) \\ &= -\omega^j \wedge \Omega_j^{\,i}. \end{aligned} \tag{3-5}$$

Pelas propriedades da diferenciação exterior (veja seção 1.3) $d^2\omega^i = 0$, assim obtemos a seguinte identidade

$$\omega^j \wedge \Omega_j^{\,i} = 0, \tag{3-6}$$

a qual é chamada de *Primeira identidade de Bianchi*.

Como ω_j^i é uma 1-forma definida na variedade TM_0, ela pode ser expressa como

$$\omega_j^i(x,y) = A_{j\,k}^{\,i}(x,y)\omega^k + B_{j\,k}^{\,i}(x,y)\omega^{n+k},$$

novamente pelas propriedade da diferenciação exterior temos que

$$\begin{aligned} d\omega_j^i(x,y) &= dA_{j\,k}^{\,i}(x,y) \wedge (\omega^k + \omega^{n+k}) + dB_{j\,k}^{\,i}(x,y) \wedge (\omega^k + \omega^{n+k}) \\ &= (dA_{j\,k}^{\,i}(x,y) + dB_{j\,k}^{\,i}(x,y)) \wedge (\omega^k + \omega^{n+k}) \\ &= \left(\frac{\partial A_{j\,k}^{\,i}}{\partial x^l}(x,y)\omega^l + \frac{\partial B_{j\,k}^{\,i}}{\partial x^l}(x,y)\omega^l \right) \wedge (\omega^k + \omega^{n+k}) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_{j\,k}^{\,i}}{\partial y^l}(x,y)\omega^{n+l} + \frac{\partial B_{j\,k}^{\,i}}{\partial y^l}(x,y)\omega^{n+l} \right) \wedge (\omega^k + \omega^{n+k}). \end{aligned} \tag{3-7}$$

Assim por (3-4) $\Omega_j^{\,i}$ é uma 2-forma definida na variedade TM_0 expressa como

$$\Omega_j^{\,i} := \frac{1}{2}R_{j\,kl}^{\,i}\omega^k \wedge \omega^l + P_{j\,kl}^{\,i}\omega^k \wedge \omega^{n+l} + \frac{1}{2}Q_{j\,kl}^{\,i}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l}, \tag{3-8}$$

onde $R^{\;i}_{j\,kl} = R^{\;i}_{j\,kl}(x,y)$, $P^{\;i}_{j\,kl} = P^{\;i}_{j\,kl}(x,y)$ e $Q^{\;i}_{j\,kl} = Q^{\;i}_{j\,kl}(x,y)$.

Observe que

$$R^{\;i}_{j\,kl}\omega^k \wedge \omega^l = R^{\;i}_{j\,lk}\omega^l \wedge \omega^k = -R^{\;i}_{j\,lk}\omega^k \wedge \omega^l,$$

onde a primeira igualdade foi obtida trocando-se os índices k e l, e a segunda segue da anti-simetria do produto exterior (veja seção 1.3). De maneira análoga temos que

$$Q^{\;i}_{j\,kl}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l} = Q^{\;i}_{j\,lk}\omega^{n+l} \wedge \omega^{n+k} = -Q^{\;i}_{j\,lk}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l}.$$

Assim, R e Q são anti-simétricos nos índices k e l, isto significa que

$$R^{\;i}_{j\,kl} = -R^{\;i}_{j\,lk} \tag{3-9}$$

e

$$Q^{\;i}_{j\,kl} = -Q^{\;i}_{j\,lk}. \tag{3-10}$$

Substituindo (3-8) em (3-6), obtemos

$$\omega^j \wedge \left(\frac{1}{2}R^{\;i}_{j\,kl}\omega^k \wedge \omega^l + P^{\;i}_{j\,kl}\omega^k \wedge \omega^{n+l} + \frac{1}{2}Q^{\;i}_{j\,kl}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l}\right) = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}\omega^j \wedge R^{\;i}_{j\,kl}\omega^k \wedge \omega^l + P^{\;i}_{j\,kl}\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^{n+l} + \frac{1}{2}\omega^j \wedge Q^{\;i}_{j\,kl}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l} = 0,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{1}{2}\omega^j \wedge (R^{\;i}_{j\,kl(k<l)}\omega^k \wedge \omega^l + R^{\;i}_{j\,kl(k>l)}\omega^k \wedge \omega^l) + (P^{\;i}_{j\,kl(j<k)}\omega^j \wedge \omega^k + \\ & + P^{\;i}_{j\,kl(j>k)}\omega^j \wedge \omega^k) \wedge \omega^{n+l} + \frac{1}{2}\omega^j \wedge (Q^{\;i}_{j\,kl(k<l)}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l} + Q^{\;i}_{j\,kl(k>l)}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l}). \end{aligned} \tag{3-11}$$

Trocando os índices k e l na segunda e sextas parcelas, assim como j e k na quarta parcela e usando a anti-simetria do produto exterior obtemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\omega^j \wedge (R^{\;i}_{j\,kl} - R^{\;i}_{j\,lk})_{(k<l)}\omega^k \wedge \omega^l + (P^{\;i}_{j\,kl} - P^{\;i}_{j\,lk})_{(j<k)}\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^{n+l} + \\ & + \frac{1}{2}\omega^j \wedge (Q^{\;i}_{j\,kl} - Q^{\;i}_{j\,lk})_{(k<l)}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l} = 0. \end{aligned} \tag{3-12}$$

Agora usando as idéias acima para os índices j, k e l, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(R^{\;i}_{j\,kl} - R^{\;i}_{j\,lk} + R^{\;i}_{k\,lj} - R^{\;i}_{k\,jl} + R^{\;i}_{l\,jk} - R^{\;i}_{l\,kj})_{(j<k<l)}\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l + \\ & + (P^{\;i}_{j\,kl} - P^{\;i}_{j\,lk})_{(j<k)}\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^{n+l} + \frac{1}{2}(Q^{\;i}_{j\,kl} - Q^{\;i}_{j\,lk})_{(k<l)}\omega^j \wedge \omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l} = 0. \end{aligned} \tag{3-13}$$

Logo da anti-simetria de R, temos que

$$\frac{1}{2}(R_{j\,kl}^{\,i}+R_{j\,kl}^{\,i}+R_{k\,lj}^{\,i}+R_{k\,lj}^{\,i}+R_{l\,jk}^{\,i}+R_{l\,jk}^{\,i})_{(j<k<l)}\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l+ \tag{3-14}$$
$$+(P_{j\,kl}^{\,i}-P_{j\,lk}^{\,i})_{(j<k)}\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^{n+l}+\frac{1}{2}(Q_{j\,kl}^{\,i}-Q_{j\,lk}^{\,i})_{(k<l)}\omega^j\wedge\omega^{n+k}\wedge\omega^{n+l}=0,$$

ou seja

$$(R_{j\,kl}^{\,i}+R_{k\,lj}^{\,i}+R_{l\,jk}^{\,i})_{(j<k<l)}\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l+(P_{j\,kl}^{\,i}-P_{j\,lk}^{\,i})_{(j<k)}\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^{n+l}+$$
$$+\frac{1}{2}(Q_{j\,kl}^{\,i}-Q_{j\,lk}^{\,i})_{(k<l)}\omega^j\wedge\omega^{n+k}\wedge\omega^{n+l}=0. \tag{3-15}$$

Pela independencia linear de $\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l$, $\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^{n+l}$ e $\omega^j\wedge\omega^{n+k}\wedge\omega^{n+l}$ para $j<k<l$, seus coeficientes se anulam separadamente e podemos tirar as seguintes conclusões:

1. $Q_{j\,kl}^{\,i}=Q_{j\,lk}^{\,i}$ isto é, Q é simétrico nos índices k e l. Como Q é anti-simétrico nos mesmos índices, seque que $Q_{j\,kl}^{\,i}=0$. Assim, as *formas de curvatura* em (3-8) se reduzem a
$$\Omega_j^i=\frac{1}{2}R_{j\,kl}^{\,i}\omega^k\wedge\omega^l+P_{j\,kl}^{\,i}\omega^k\wedge\omega^{n+l}; \tag{3-16}$$

2. $P_{j\,kl}^{\,i}=P_{k\,jl}^{\,i}$ isto é, P é simétrico nos índices k e l;

3. $$R_{j\,kl}^{\,i}+R_{k\,lj}^{\,i}+R_{l\,jk}^{\,i}=0. \tag{3-17}$$

Seja
$$\Omega^i:=d\omega^{n+i}-\omega^{n+j}\wedge\omega_j^i, \tag{3-18}$$

diferenciando (3-3), obtemos que $d\omega^{n+i}=d^2y^i+dy^j\wedge\omega_j^i+y^jd\omega_j^i$, neste caso usando (3-3) e (3-4) temos que

$$\begin{aligned}\Omega^i &= d\omega^{n+i}-\omega^{n+j}\wedge\omega_j^i\\ &= d^2y^i+dy^j\wedge\omega_j^i+y^jd\omega_j^i-\omega^{n+j}\wedge\omega_j^i\\ &= (\omega^{n+j}-y^m\omega_m^j)\wedge\omega_j^i+y^j(\Omega_j^i+\omega_j^m\wedge\omega_m^i)-\omega^{n+j}\wedge\omega_j^i\\ &= y^j\Omega_j^i.\end{aligned} \tag{3-19}$$

Substituindo (3-16) em (3-19) podemos expressar Ω^i da seguinte forma

$$\Omega^i=\frac{1}{2}R_{\,kl}^{i}\omega^k\wedge\omega^l-L_{\,kl}^{i}\omega^k\wedge\omega^{n+l}, \tag{3-20}$$

onde $R^i{}_{kl} = R^i{}_{kl}(x,y)$ e $L^i{}_{kl} = L^i{}_{kl}(x,y)$ são dados por

$$R^i{}_{kl} := y^j R_j{}^i{}_{kl}, \; L^i{}_{kl} := -y^j P_j{}^i{}_{kl}.$$

Observe que $R^i{}_{kl} + R^i{}_{lk} = 0$, já que por (3-9) temos que $R_j{}^i{}_{kl} y^j + R_j{}^i{}_{lk} y^j = 0$. Temos também que

$$y^l y^k R^i{}_{kl} = 0, \tag{3-21}$$

pois $R^i{}_{kl} y^l y^k + R^i{}_{lk} y^l y^k = R^i{}_{kl} y^l y^k + R^i{}_{kl} y^l y^k = 2R^i{}_{kl} y^l y^k = 0$.

Fazendo $R^i{}_k := R^i{}_{kl} y^l = y^j R_j{}^i{}_{kl} y^l$, onde $R^i{}_k = R^i{}_k(x,y)$ obtemos o tensor Riemanniano

$$R := R^i{}_k e_i \otimes e_j \tag{3-22}$$

que tem as seguinte propriedades

$$R^i{}_k y^k = 0 \text{ e } R_{ij} = R_{ji}, \tag{3-23}$$

onde $R_{ij} = R_{ij}(x,y)$ é dado por $R_{ij} := g_{im} R^m_j$. A primeira identidade segue de (3-21), já que

$$R^i{}_k y^k = R^i{}_{kl} y^l y^k = y^j R_j{}^i{}_{kl} y^l y^k = R^i{}_{kl} y^l y^k$$

e a segunda identidade será provada em (3-53) usando a *Segunda identidade de Bianchi*.

Em um sistema de coordenadas locais (x^i, y^i) em TM_0, o coreferencial local natural de TM_0 $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ é dada por $\omega^i = dx^i$ e $\omega^{n+i} := dy^i + N^i_j dx^j$ onde, $N^i_j = N^i_j(x,y)$ é dado por $N^i_j := y^m \Gamma^i_{mj}$, com $\Gamma^i_{mj} = \Gamma^i_{mj}(x,y)$. Substituindo $\omega^i_j = \Gamma^i_{jl} dx^l$ em (3-4) e usando $\dfrac{\delta}{\delta x^i} := \dfrac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i \dfrac{\partial}{\partial y^j}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega^i_j &= d(\Gamma^i_{jl} dx^l) - \Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} dx^l \wedge dx^k \\
&= \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y^k} dy^k \wedge dx^l + \Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} dx^k \wedge dx^l \\
&= \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^l + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y^k} (\omega^{n+k} - N^k_s dx^s) \wedge dx^l + \Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} dx^k \wedge dx^l \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y^s} N^s_k + \Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} \right) dx^k \wedge dx^l + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y^k} \omega^{n+k} \wedge dx^l \\
&= \left(\frac{\delta \Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} + \Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} \right) dx^k \wedge dx^l + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y^k} \omega^{n+k} \wedge dx^l.
\end{aligned} \tag{3-24}$$

Igualando a expressão anterior com (3-16) vem que

$$\left(\frac{\delta\Gamma^{\,i}_{jl}}{\delta x^k}+\Gamma^s_{jl}\Gamma^{\,i}_{sk}\right)dx^k\wedge dx^l+\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{jl}}{\partial y^k}\omega^{n+k}\wedge dx^l=\frac{1}{2}R_{j\,kl}^{\,i}dx^k\wedge dx^l-P_{j\,lk}^{\,i}\omega^{n+k}\wedge dx^l.$$

Como $dx^k\wedge dx^l$ e $\omega^{n+k}\wedge dx^l$ são linearmente independentes para todo k, l e $n+k$ obtemos que

$$\frac{1}{2}R_{j\,kl}^{\,i}=\frac{\delta\Gamma^{\,i}_{jl}}{\delta x^k}+\Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} \tag{3-25}$$

e

$$P_{j\,lk}^{\,i}=-\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{jl}}{\partial y^k}. \tag{3-26}$$

Usando a anti-simetria de R e (3-25) teremos

$$\begin{aligned} R_{j\,kl}^{\,i} &= \frac{1}{2}R_{j\,kl}^{\,i}+\frac{1}{2}R_{j\,kl}^{\,i} \\ &= \frac{1}{2}R_{j\,kl}^{\,i}-\frac{1}{2}R_{j\,lk}^{\,i} \\ &= \frac{\delta\Gamma^{\,i}_{jl}}{\delta x^k}+\Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk}-\left(\frac{\delta\Gamma^{\,i}_{jk}}{\delta x^l}+\Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl}\right) \\ &= \frac{\delta\Gamma^{\,i}_{jl}}{\delta x^k}-\frac{\delta\Gamma^{\,i}_{jk}}{\delta x^l}+(\Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk}-\Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl}). \end{aligned} \tag{3-27}$$

Observe que

$$\frac{\partial N^i_j}{\partial x^l}=y^m\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{mj}}{\partial x^l}\quad \text{e}\quad \frac{\partial N^i_j}{\partial y^s}=y^m\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{mj}}{\partial y^s}+\Gamma^{\,i}_{sj}.$$

Contraindo (3-27) e (3-26) com y^j e usando as identidades acima temos

$$\begin{aligned} R^i_{\,kl} &= R_{j\,kl}^{\,i}y^j \\ &= \left(\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{jl}}{\partial y^m}N^m_k\right)y^j-\left(\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{jk}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^{\,i}_{jk}}{\partial y^n}N^n_l\right)y^j+\Gamma^s_{jl}y^j\Gamma^i_{sk}-\Gamma^s_{jk}y^j\Gamma^i_{ls} \\ &= \frac{\partial N^i_l}{\partial x^k}-N^m_k\left(\frac{\partial N^i_l}{\partial y^m}-\Gamma^{\,i}_{ml}\right)-\frac{\partial N^i_k}{\partial x^l}+N^n_l\left(\frac{\partial N^i_k}{\partial y^n}-\Gamma^{\,i}_{nl}\right)+N^s_l\Gamma^{\,i}_{sk}-N^s_k\Gamma^{\,i}_{ls} \\ &= \frac{\partial N^i_l}{\partial x^k}-\frac{\partial N^i_k}{\partial x^l}+N^s_l\frac{\partial N^i_k}{\partial y^s}-N^s_k\frac{\partial N^i_l}{\partial y^s}, \end{aligned} \tag{3-28}$$

onde pela Proposição 2.2.2 temos que $N^i_j=\dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$.

Contraindo (3-28) com y^l e usando que

$$y^j \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^l} = \frac{\partial(\Gamma^i_{jk} y^j)}{\partial y^l} - \Gamma^i_{kl} = \frac{\partial N^i_k}{\partial y^l} - \Gamma^i_{kl} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^l} - \Gamma^i_{kl}, \tag{3-29}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} R^i{}_k = R^i{}_{kl} y^l &= \frac{\partial N^i_l}{\partial x^k} y^l - \frac{\partial N^i_k}{\partial x^l} y^l + N^s_l \frac{\partial N^i_k}{\partial y^s} y^l - N^s_k \frac{\partial N^i_l}{\partial y^s} y^l \\ &= \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^l} y^l - \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial x^l} y^l + \frac{\partial G^s}{\partial y^l} \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^s} y^l - \frac{\partial G^s}{\partial y^k} \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^l \partial y^s} y^l \\ &= 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^j} - \frac{\partial G^s}{\partial y^k} \frac{\partial G^i}{\partial y^s}. \end{aligned} \tag{3-30}$$

Onde a última igualdade decorre do Teorema de Euler e do fato que $G^i = G^i(x,y)$ é homogênea de grau 2.

Agora derivando (3-30) em relação a y^l

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^i{}_k}{\partial y^l} &= 2\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^l \partial x^k} - \delta_{jl} \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} - y^j \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^l \partial x^j \partial y^k} + \frac{\partial G^j}{\partial y^l} \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^j} + \\ &\quad + 2G^j \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l} - \frac{\partial G^j}{\partial y^k} \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^l \partial y^j} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial^2 G^j}{\partial y^k \partial y^l} \end{aligned} \tag{3-31}$$

e usando que $N^i_j = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$ obtemos que

$$R^i{}_{kl} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial R^i{}_k}{\partial y^l} - \frac{\partial R^i_l}{\partial y^k} \right). \tag{3-32}$$

As duas últimas igualdades nos dizem que o *tensor Riemanniano*, $R := R^i{}_k e_i \otimes e_j$, depende somente do spray da métrica de Finsler.

Definição 3.2.1 *Se $\{\omega^i\}$ e $\{\omega^i_j\}$ são respectivamente o coreferencial e as formas de conexão de Chern em TM_0 em $\{e^i\}$ então as seguintes equações:*

$$\begin{aligned} &d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \\ &dg_{ij} = g_{ij}\omega^k_j + g_{kj}\omega^k_i + 2C_{ijk}\omega^{n+k}, \\ &\Omega^i := d\omega^{n+i} - \omega^{n+j} \wedge \omega^i_j = \frac{1}{2} R^i{}_{kl} \omega^k \wedge \omega^l - L^i_{kl} \omega^k \wedge \omega^{n+l} \end{aligned}$$

são chamadas equações de estrutura do espaço de Finsler M.

3.3 Identidades de Bianchi

Seja (M,F) uma variedade de Finsler n-dimensional. Seja $\{e_i\}$ o referencial local de π^*TM, $\{\omega^i,\omega^{n+i}\}$ o correspondente coreferencial local de $T^*(TM_0)$ e $\{\omega_j^{\ i}\}$ o conjunto das *formas de conexão* com respeito a $\{e_i\}$. Para uma função escalar $f=f(x,y)$ em TM_0, defina $f_{|m}=f_{|m}(x,y)$ e $f_{.m}=f_{.m}(x,y)$ por

$$df = f_{|k}\omega^k + f_{.k}\omega^{n+k}.$$

Há uma maneira de definir derivada covariante de um tensor em TM_0 usando a conexão de Chern (veja [1]). Por exemplo se $T=T_{ij}\omega^i\otimes\omega^j$, $T_{ij|k}$ e $T_{ij.k}$ são definidas por

$$T_{ij|k}\omega^k + T_{ij.k}\omega^{n+k} := dT_{ij} - T_{kj}\omega_i^{\ k} - T_{ik}\omega_j^{\ k}.$$

Em um sistema de coordenadas adaptado (x^i,y^i), os coeficientes, $T_{ij}=T_{ij}(x,y)$, são funções locais de (x^i,y^i), onde $y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, $T_{ij|k}=T_{ij|k}(x,y)$ e $T_{ij.k}=T_{ij.k}(x,y)$ são dadas por

$$T_{ij|k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{sj}\Gamma^{\ s}_{ik} - T_{is}\Gamma^{\ s}_{jk} - T_{ij.s}N_k^s$$

e

$$T_{ij.s} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^k}.$$

Recorde que as *formas de curvatura*, $\Omega^i=\Omega^i(x,y)$ em (3-20) são

$$\Omega^i = d\omega^{n+i} - \omega^{n+j}\wedge\omega_j^{\ i} = \frac{1}{2}R^i_{\ kl}\omega^k\wedge\omega^l - L^i_{\ kl}\omega^k\wedge\omega^{n+l}, \tag{3-33}$$

onde $R^i_{\ kl}=R^i_{\ kl}(x,y)$ e $L^i_{\ kl}=L^i_{\ kl}(x,y)$.

Diferenciando (3-33) e usando (3-3), (3-4) e $d(d\omega^{n+i})=0$ obtemos a *Segunda identidade de Bianchi*,

$$\begin{aligned}
d\Omega^i &= d(d\omega^{n+i}) - d(\omega^{n+j}\wedge\omega_j^{\ i})\\
&= -[d\omega^{n+j}\wedge\omega_j^{\ i} - \omega^{n+j}\wedge d\omega_j^{\ i}]\\
&= -d(dy^j + y^k\omega_k^{\ j})\wedge\omega_j^{\ i} + \omega^{n+j}\wedge(\Omega_j^{\ i} + \omega_j^{\ k}\wedge\omega_k^{\ i})\\
&= [-dy^k\wedge\omega_k^{\ j} - y^k(\Omega_k^{\ j} + \omega_k^{\ s}\wedge\omega_s^{\ j})]\wedge\omega_j^{\ i} + \omega^{n+j}\wedge(\Omega_j^{\ i} + \omega_j^{\ k}\wedge\omega_k^{\ i})\\
&= (-dy^j - y^s\omega_s^{\ j})\wedge\omega_j^{\ k}\wedge\omega_k^{\ i} + \omega^{n+j}\wedge\omega_j^{\ k}\wedge\omega_k^{\ i} - \Omega^j\wedge\omega_j^{\ i} + \omega^{n+j}\wedge\Omega_j^{\ i}\\
&= -\Omega^j\wedge\omega_j^{\ i} + \omega^{n+j}\wedge\Omega_j^{\ i}.
\end{aligned} \tag{3-34}$$

A conexão de Chern é quase compatível com a métrica no sentido que

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k + 2C_{ijk}\omega^{n+k},$$

onde $g_{ij} = g_{ij}(x,y)$. Por diferenciação exterior, temos que

$$d(dg_{ij}) = d(g_{ik}\omega_j^k) + d(g_{kj}\omega_i^k) + d(2C_{ijk}\omega^{n+k}).$$

Na seção 1.3 temos como propriedades da diferenciação exterior que $d(dg_{ij}) = 0$ e $dg_{ik}\omega_j^k = dg_{ik}\wedge\omega_j^k + g_{ik}d\omega_j^k$, neste caso podemos escrever a expressão acima como

$$dg_{ik}\wedge\omega_j^k + g_{ik}d\omega_j^k + dg_{kj}\wedge\omega_i^k + g_{kj}d\omega_i^k + 2(dC_{ijk}\wedge\omega^{n+k} + C_{ijk}d\omega^{n+k}) = 0. \quad (3\text{-}35)$$

Isolando dg_{ik} e dg_{kj} no critério de quase g-compatibilidade e por (3-35)

$$\begin{aligned}&(g_{il}\omega_k^l + g_{lk}\omega_i^l + 2C_{ikl}\omega^{n+l})\wedge\omega_j^k + (g_{kl}\omega_j^l + g_{lj}\omega_k^l + 2C_{kjl}\omega^{n+k})\wedge\omega_i^k +\\ &+g_{ik}d\omega_j^k + g_{kj}d\omega_i^k + 2(dC_{ijk}\wedge\omega^{n+k} + C_{ijk}d\omega^{n+k}) = 0. \quad (3\text{-}36)\end{aligned}$$

Trocando os índices dos somatórios das duas primeiras parcelas da última linha por l

$$\begin{aligned}&g_{il}(d\omega_j^l + \omega_k^l\wedge\omega_j^k) + g_{jl}(d\omega_i^l + \omega_k^l\wedge\omega_i^k) + (g_{lk}\omega_i^l\wedge\omega_j^k + g_{kl}\omega_j^l\wedge\omega_i^k) +\\ &+2C_{ikl}\omega^{n+l}\wedge\omega_j^k + 2C_{kjl}\omega^{n+l}\wedge\omega_i^k + 2(dC_{ijk}\wedge\omega^{n+k} + C_{ijk}d\omega^{n+k}) = 0. \quad (3\text{-}37)\end{aligned}$$

Usando (3-4) e o fato que $(g_{lk}\omega_i^l\wedge\omega_j^k + g_{kl}\omega_j^l\wedge\omega_i^k) = 0$, a expressão acima se reduz a

$$\begin{aligned}&g_{il}\Omega_j^l + g_{jl}\Omega_i^l = 2C_{ikl}\omega_j^k\wedge\omega^{n+l} + 2C_{kjl}\omega_i^k\wedge\omega^{n+l} - 2(dC_{ijk}\wedge\omega^{n+k} +\\ &+C_{ijk}d\omega^{n+k}). \quad (3\text{-}38)\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $2C_{ijk}\omega_l^k\wedge\omega^{n+l}$, obtemos

$$\begin{aligned}&g_{il}\Omega_j^l + g_{jl}\Omega_i^l = -2(dC_{ijl} - 2C_{ikl}\omega_j^k - 2C_{kjl}\omega_i^k - 2C_{ijk}\omega_l^k)\wedge\omega^{n+l} - 2C_{ijk}d\omega^{n+k} -\\ &-2C_{ijk}\omega_l^k\wedge\omega^{n+l}. \quad (3\text{-}39)\end{aligned}$$

Isolando $d\omega^{n+k}$ em (3-18) e substituindo na expressão acima segue que

$$\begin{aligned}g_{il}\Omega_j^l + g_{jl}\Omega_i^l &= -2(C_{ijk|l}\omega^k + C_{ijl.k}\omega^{n+k})\wedge\omega^{n+l} - 2C_{ijk}(\Omega^k + \omega^{n+l}\wedge\omega_l^k -\\ &+\omega_l^k\wedge\omega^{n+l}). \quad (3\text{-}40)\end{aligned}$$

Utilizando o fato que $\omega^{n+l} \wedge \omega_l^k - \omega_l^k \wedge \omega^{n+l} = 0$, (3-20) e que $g_{ik}\Omega_j^k := \Omega_{ij}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} + \Omega_{ji} &= -2(C_{ijk|l}\omega^k + C_{ijl.k}\omega^{n+k}) \wedge \omega^{n+l} - 2C_{ijk}\Omega^k \\
&= -2C_{ijk|l}\omega^k \wedge \omega^{n+l} - C_{ijl.k}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l} - \\
&\quad -2C_{ijk}\left(\frac{1}{2}R^k_{ab}\omega^a \wedge \omega^b - L^k_{ab}\omega^a \wedge \omega^{n+b}\right) \\
&= -2(C_{ijk|l} - C_{ijs}L^s_{kl})\omega^k \wedge \omega^{n+l} - \\
&\quad -C_{ijl.k}\omega^{n+k} \wedge \omega^{n+l} - 2C_{ijs}(\frac{1}{2}R^s_{kl}\omega^k \wedge \omega^l).
\end{aligned} \tag{3-41}$$

Por outro lado, trocando i por m em (3-16) e contraindo com g_{im},

$$g_{im}\Omega_j^m = \frac{1}{2}g_{im}R_{j\ kl}^{\ m}\omega^k \wedge \omega^l + g_{im}P_{j\ kl}^{\ m}\omega^k \wedge \omega^{n+l}, \tag{3-42}$$

usando as igualdades

$$g_{ik}\Omega_j^k := \Omega_{ij}, \;\; R_{jikl} := g_{im}R_{j\ kl}^{\ m} \;\text{ e }\; P_{jikl} := g_{im}P_{j\ kl}^{\ m}$$

obtemos

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}R_{jikl}\omega^k \wedge \omega^l + P_{jikl}\omega^k \wedge \omega^{n+l}. \tag{3-43}$$

Usando (3-43) temos

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = \frac{1}{2}(R_{ijkl} + R_{jikl})\omega^k \wedge \omega^l + (P_{ijkl} + P_{jikl})\omega^k \wedge \omega^{n+l}. \tag{3-44}$$

Igualando (3-41) a (3-44) e usando que $\omega^k \wedge \omega^l$ e $\omega^k \wedge \omega^{n+l}$ são linearmente independentes temos que

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = -2C_{ijs}R^s_{kl}. \tag{3-45}$$

Introduzindo a abreviação

$$B_{ijkl} := -C_{ijs}R^s_{kl},$$

podemos escrever a expressão acima como

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 2B_{ijkl}. \tag{3-46}$$

A equação (3-46) juntamente com (3-17) e com a anti-simétria de R (3-9) podem ser usadas para deduzir que

$$R_{klji} - R_{jikl} = (B_{klji} - B_{jikl}) + (B_{kilj} + B_{ljki}) + (B_{iljk} + B_{jkil}). \qquad \text{(3-47)}$$

De fato, usando que $R_{jikl} := g_{im} R_{j\ kl}^{\ m}$ na igualdade (3-17) e fazendo uma permutação cíclica dos subíndices de R obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} &R_{jikl} + R_{lijk} + R_{kilj} = 0, \\ &R_{iklj} + R_{jkli} + R_{lkji} = 0, \\ &R_{klji} + R_{ilkj} + R_{jlik} = 0 \qquad \text{e} \\ &R_{ljik} + R_{kjli} + R_{ijkl} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(3-48)}$$

Do lado direito de (3-47), segue que

$$\begin{aligned} &2B_{klji} - 2B_{jikl} + 2B_{kilj} + 2B_{ljki} + 2B_{iljk} + 2B_{jkil} = R_{klji} + R_{lkji} - R_{jikl} - \\ &-R_{ijkl} + R_{kilj} + R_{iklj} + R_{ljki} + R_{jlki} + R_{iljk} + R_{lijk} + R_{jkil} + R_{kjil}. \end{aligned} \qquad \text{(3-49)}$$

Somando e subtraindo R_{klji} e R_{jikl} e usando a anti-simetria de R em algumas parcelas de (3-49), obtemos

$$\begin{aligned} &2B_{klji} - 2B_{jikl} + 2B_{kilj} + 2B_{ljki} + 2B_{iljk} + 2B_{jkil} = R_{klji} + R_{lkji} - R_{jikl} - \\ &-R_{ijkl} + R_{kilj} + R_{iklj} - R_{ljik} - R_{jlik} - R_{ilkj} + R_{lijk} + R_{jkil} - R_{kjli} + \\ &+R_{klji} - R_{klji} + R_{jikl} - R_{jikl}. \end{aligned} \qquad \text{(3-50)}$$

Reorganizarmos as parcelas, a expressão (3-50) torna-se

$$\begin{aligned} &2B_{klji} - 2B_{jikl} + 2B_{kilj} + 2B_{ljki} + 2B_{iljk} + 2B_{jkil} = R_{klji} + R_{klji} - R_{jikl} - \\ &-R_{jikl} + R_{lkji} + R_{iklj} + R_{jkil} + R_{kilj} + R_{lijk} + R_{jikl} - R_{ijkl} - R_{ljik} - \\ &-R_{kjli} - R_{jlik} + R_{ilkj} - R_{klji}, \end{aligned} \qquad \text{(3-51)}$$

daí, de (3-48) segue que

$$2B_{klji} - 2B_{jikl} + 2B_{kilj} + 2B_{ljki} + 2B_{iljk} + 2B_{jkil} = 2(R_{klji} - R_{jikl}),$$

ou

$$B_{klji} - B_{jikl} + B_{kilj} + B_{ljki} + B_{iljk} + B_{jkil} = R_{klji} - R_{jikl}.$$

o que nos dá (3-47).

Contraindo a expressão acima com $y^j y^k$ e usando o fato que $B_{ijkl} := -C_{ijs}R^s{}_{kl}$

$$R_{klji}y^j y^k - R_{jikl}y^j y^k = -C_{klm}R^m_{ji}y^j y^k + C_{jim}R^m_{kl}y^j y^k - C^m_{kim}R_{lj}y^j y^k - -C_{ljm}R^m_{ki}y^j y^k - C_{ilm}R^m_{jk}y^j y^k - C_{jkm}R^m_{il}y^j y^k \qquad (3\text{-}52)$$

Considerando $R_{ij} := g_{ik}R^k{}_j$, $R^i{}_k := R^i{}_{kl}y^l = y^j R_j{}^i{}_{kl}y^l$, e $R_{jikl} := g_{im}R_j{}^m{}_{kl}$ podemos mostrar que

$$R_{klji}y^j y^k = g_{lm}R_k{}^m{}_{ji}y^j y^k = -g_{lm}R_k{}^m{}_{ij}y^j y^k = -g_{lm}R^m_i = -R_{li}$$

e

$$R_{jikl}y^j y^k = g_{im}R_j{}^m{}_{kl}y^j y^k = -g_{im}R_j{}^m{}_{lk}y^j y^k = -g_{im}R^m_l = -R_{il}.$$

Recordando que $C_{jkl} := \frac{1}{4}[F^2]_{y^j y^k y^l} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l}$ e que g_{jk} é homogênea de grau zero, obtemos que todos os termos do lado direito de (3-52), no qual aparecem os subíndices j e k no *tensor de Cartan* são identicamente nulos.

Por (3-21) $R^m_{jk}y^j y^k = 0$, assim obtemos de (3-52) que

$$R_{ij} = R_{ji}. \qquad (3\text{-}53)$$

3.4 Curvatura Flag

Seja (M,F) uma variedade de Finsler n-dimensional. Seja $\{b_i\}$ uma referencial local para TM e $\{\theta_i\}$ o coreferencial local do espaço dual T^*M. Então $\{e_i := (x,y,b_i)\}$ é o referencial local para π^*TM e $\{\omega^i := \pi^*\theta^i\}$ é o coreferencial dual local de π^*T^*M. O *tensor Riemanniano* $R = R^i{}_k e_i \otimes \omega^k$, definido em (3-22), pode ser visto como uma família de transformações lineares

$$R = \{R_y | y \in T_xM \backslash \{0\}, x \in M\},$$

onde

$$R_y = R^i{}_k b_i \otimes \theta^k : T_xM \longrightarrow T_xM$$

é definido por

$$R_y(v) := R^i{}_k b_i \otimes \theta^k(v) = R^i{}_k(x,y)v^k b_i, \; v = v^i b_i \in T_xM$$

e $R^i{}_k = R^i{}_k(x,y)$ é dado por

$$R^i{}_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}, \qquad (3\text{-}54)$$

onde $G^i = G^i(x,y)$, R é chamado de *Curvatura Riemanniana*.

Para um vetor $y = y^i b_i \in T_pM$ obtemos o produto interno em T_pM

$$g_y(u,v) = g_{ij}(x,y)u^i v^j, \; u = u^i b_i, \; v = v^i b_i,$$

observe que

$$\begin{aligned} g_y(y,y) &= g_{ij}(x,y)y^i y^j = \frac{1}{2}\left[F^2(x,y)\right]_{y^i y^j} y^i y^j = \frac{1}{2}\left[F^2(x,y)\right]_{y^j} y^j \\ &= F^2(x,y). \end{aligned} \tag{3-55}$$

Seja

$$h_y(u,v) := g_y(u,v) - F^{-2}(x,y)g_y(u,y)g_y(v,y), \tag{3-56}$$

h_y é chamada a *forma angular* em T_pM associada com y.

A seguir algumas propriedades básicas da curvatura Riemanniana:

1. $R_y(y) = 0$, pois

$$R_y(y) = R^i{}_k(x,y)\theta^k\left(y^j b_j\right) b^i = R^i{}_k y^j \delta_{jk} b^i = R^i{}_k y^k b^i = 0$$

e usando o fato que G^i é homogênea de grau 2 obtemos que

$$\begin{aligned} R^i{}_k y^k &= 2\left[G^i\right]_{x^k} y^k - y^j\left[G^i\right]_{x^j y^k} y^k + 2G^j\left[G^i\right]_{y^j y^k} y^k - \left[G^i\right]_{y^j}\left[G^i\right]_{y^k} y^k \\ &= 2\left[G^i\right]_{x^k} y^k - 2\left[G^i\right]_{x^j} y^j + 2G^j\left[G^i\right]_{y^j} - 2\left[G^i\right]_{y^j} G^j \\ &= 0; \end{aligned}$$

2. $R_{\lambda y} = \lambda^2 R_y$. De fato,

$$\begin{aligned} R_{\lambda y}(v) &= R^i{}_k(x,\lambda y)\theta^k\left(v^j b_j\right) b^i = R^i{}_k(x,\lambda y)v^j \delta_{jk} b^i \\ &= R^i{}_k(x,\lambda y)v^k b^i = \lambda^2 R^i{}_k(x,y)v^k b^i \\ &= \lambda^2 R_y(v), \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que G^i é homogênea de grau 2, o que nos dá

$$R^i{}_k(x,\lambda y) = 2\left[G^i\right]_{x^k} - y^j\left[G^i\right]_{x^j y^k} + 2G^j\left[G^i\right]_{y^j y^k} - \left[G^i\right]_{y^j}\left[G^i\right]_{y^k}.$$

Logo $R^i{}_k(x,y)$ também é homogênea de grau 2;

3. $g_y(R_y(u),v) = g_y(u,R_y(v))$, pois usando que $R_{ki} = R_{ik}$ temos que

$$\begin{aligned} g_y(R_y(u),v) &= g_y\left(R^l_{\ k}u^k b_l, v^i b_i\right) = R^l_{\ k}u^k v^i g_{li} = R_{ik}u^k v^i \\ &= R_{ki}u^k v^i = R^l_{\ i}u^k v^i g_{lk} = g_y\left(u^k \frac{\partial}{\partial x^k}, R^l_{\ i}v^i \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= g_y(u,R_y(v)). \end{aligned}$$

Para um plano tangente $P \in T_xM$ contendo y defina

$$K(P,y) := \frac{g_y(R_y(u),u)}{F^2(x,y)h_y(u,u)}, \tag{3-57}$$

onde $u \in P$ e P é o plano gerado por $\{y,u\}$. $K = K(P,y)$ é chamada *curvatura flag*.

Em [20] vemos que através das propriedades básicas da curvatura Riemannina é fácil verificar que $K = K(P,y)$, independe da escolha particular de $u \in P$ onde P é o espaço gerado por $\{u,y\}$. Em dimensão dois, $P = T_xM$ é o plano tangente, assim a curvatura flag $K = K(P,y)$ é uma função escalar em TM_0, a qual é chamada *Curvatura de Gauss*.

Para instalar uma *flag* (bandeira, em inglês) na variedade diferenciável M, precisamos de um vetor, $y \in T_xM$, não nulo, que servirá de *flagpole*. Tal flag se descreve por um lado ao longo do *flagpole* e outro lado transverso, digamos $V := V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, como mostra a figura (3.1) . A curvatura flag que definimos não depende do comprimento do lado ao longo do flagpole.

Seja

$$Ric := \sum_{i=1}^{n} g^{ij} g_y(R_y(b_i),b_j),$$

onde $\{b_i\}$ é uma base para T_xM, $g_{ij} := g_y(b_i,b_j)$ e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. *Ric* é uma função escalar bem definida em TM_0. Chamamos *Ric* de *Curvatura de Ricci*. Em um sistema de coordenadas locais,

$$Ric := g^{ij}R_{ij} = R^m_{\ m},$$

onde $R_{ij} = R_{ij}(x,y)$.

Proposição 3.4.1 *Seja $F = F(x,y)$ uma métrica de Riemanniana em uma variedade M. Para qualquer plano tangente $P \subset T_xM$, a curvatura flag $K(P,y) = K(P)$ é independente de $y \in P\backslash\{0\}$.*

Prova. Desde que F é Riemanniana $g_{ij} = g_{ij}(x)$ e $R_{j\ kl}^{\ i} = R_{j\ kl}^{\ i}(x)$ são funções de $x \in M$. Assim $R_{ijk} := g_{im}R_{j\ kl}^{\ m}$ são funções de $x \in M$ e $C_{ijk} = 0$. Segue de (3-45) e da anti-simetria de R que

$$R_{jikl} = -R_{ijkl} = R_{ijlk},$$

pois

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = -2C_{ijs}R^s_{kl} = 0 \text{ e } R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0.$$

Isto implica que

$$R_{ik}(x,y)u^iu^k = R_{jikl}(x)y^jy^lu^iu^k = R_{ijlk}(x)u^iu^ky^jy^l = R_{jl}(x,u)y^jy^l.$$

Então para qualquer plano tangente P gerado por $\{u,y\} \subset T_xM$,

$$\begin{aligned} K(P,y) &= \frac{R_{ik}(x,y)u^iu^k}{\{g_{jl}(x)g_{ik}(x) - g_{ij}(x)g_{kl}(x)\}y^jy^lu^iu^k} \\ &= \frac{R_{jl}(x,u)y^jy^l}{\{g_{jl}(x)g_{ik}(x) - g_{ij}(x)g_{kl}(x)\}y^jy^lu^iu^k} \\ &= K(P,u) \end{aligned} \tag{3-58}$$

e a curvatura flag $K(P,y) = K(P)$ é independente de $y \in P\backslash\{0\}$. □

Para a métrica Riemanniana, a curvatura flag $K = K(P)$ é chamada de curvatura seccional de uma secção $P \in T_xM$. Em duas dimensões a curvatura de Gauss $K = K(x)$ é uma função escalar em M.

Definição 3.4.1 *Seja $F = F(x,y)$ uma métrica de Finsler em uma variedade M n-dimensional. F é dita ter curvatura flag escalar se $K(P,y) = K(x,y)$ é uma função escalar de $TM\backslash\{0\}$. F é dita ter curvatura flag isotrópica se $K(P,y) = K(x)$ é uma função escalar em M. F é dita ter curvatura flag escalar constante se $K(P,y) = constante$. F é chamada métrica de Einstein se há uma função escalar $K = K(x)$ em M tal que $Ric = (n-1)KF^2$.*

Da Definição 3.4.1 segue que uma métrica de Finsler em uma variedade M tem curvatura escalar flag $K = K(P,y) = K(x,y)$ se e somente se para todo y, $u \in T_xM\backslash\{0\}$

$$R_y(u) = K\{g_y(y,y)u - g_y(y,u)y\}.$$

Isto é equivalente à seguinte expressão $R^i{}_k = K[F^2\delta_{ik} - g_{ak}y^ay^i]$.

Por (3-55) temos que $F^2(x,y) = g_y(y,y)$, daí a expressão dada em (3-57) pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} K(P,y) &= \frac{g_y\left(R_y(u),u\right)}{F^2(x,y)h_y(u,u)} \\ &= \frac{g_y\left(R_y(u),u\right)}{F^2(x,y)[g_y(u,u)-F^{-2}(x,y)g_y(u,y)g_y(u,y)]} \\ &= \frac{g_y\left(R_y(u),u\right)}{F^2(x,y)g_y(u,u)-g_y(u,y)g_y(u,y)} \\ &= \frac{g_y\left(R_y(u),u\right)}{g_y(y,y)g_y(u,u)-g_y(u,y)g_y(u,y)}. \end{aligned} \tag{3-59}$$

Observe que

$$\begin{aligned} 0 &= g_y\left(R_y(u)-K[g_y(y,y)u-g_y(y,u)y],u\right) \\ &= g_y\left(R^i{}_k u^k b_i - K[g_{ab}y^a y^b u^i b_i - g_{ak}y^a u^k y^i b_i], u^l b_l\right) \\ &= g_y\left((R^i{}_k u^k - K[F^2 u^i - g_{ak}y^a u^k y^i])b_i, u^l b_l\right). \end{aligned} \tag{3-60}$$

Primeiramente vamos assumir que a curvatura flag é escalar, neste caso podemos assumir $u = b_j$ e usando a bilinearidade do produto interno $g_y(u,v)$ temos que (3-60) é nula, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= g_y\left((R^i{}_k\delta_{kj} - K[F^2\delta_{ij} - g_{ak}y^a\delta_{kj}y^i])b_i, \delta_{lj}b_l\right) \\ &= g_y\left((R^i{}_j - K[F^2\delta_{ij} - g_{aj}y^a y^i])b_i, b_j\right) \\ &= (R^i{}_j - K[F^2\delta_{ij} - g_{aj}y^a y^i])g_{ij}, \end{aligned} \tag{3-61}$$

contraindo a expressão acima com g^{jl}

$$\delta_{il}R^i{}_j - \delta_{il}KF^2[\delta_{ij} - F^{-1}F_{y^j}y^i] = 0$$

e portanto

$$R^l{}_j = KF^2[\delta_{jl} - F^{-1}F_{y^j}y^l]. \tag{3-62}$$

Agora se $R^i{}_k = KF^2[\delta_{ik} - F^{-1}F_{y^k}y^i]$, então $R^i{}_k u^k - K[F^2u^i - g_{ak}y^a u^k y^i] = 0$, para todo u. De (3-60) e da bilinearidade do produto interno temos que a curvatura flag dada por

$$K = \frac{g_y\left(R_y(u),u\right)}{g_y(y,y)g_y(u,u)-g_y(u,y)g_y(u,y)}$$

é escalar.

Proposição 3.4.2 *Toda métrica de Finsler localmente projetivamente flat tem curvatura escalar flag.*

Prova. Seja F uma métrica de Finsler localmente projetivamente flat em uma variedade M. Por definição em qualquer ponto $x \in M$, há um sistema de coordenadas locais (x^i, y^i) em TM tal que os coeficientes spray são da forma $G^i = y^i P$, onde $P = P(x,y)$ é uma função escalar. Substituindo esse valor em (3-54) obtemos,

$$\begin{aligned}
R^i{}_k &= 2\frac{\partial(Py^i)}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^2(Py^i)}{\partial x^j \partial y^k} + 2(Py^j)\frac{\partial^2(Py^i)}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial(Py^i)}{\partial y^j}\frac{\partial(Py^j)}{\partial y^k} \\
&= 2P_{x^k}y^i - y^j\left(P_{x^j y^k}y^i + P_{x^j}\frac{\partial y^i}{\partial y^k}\right) + 2Py^j\left(P_{y^k y^j}y^i + P_{y^k}\frac{\partial y^i}{\partial y^j} + P_{y^j}\frac{\partial y^i}{\partial y^k}\right) - \\
&\quad - P_{y^j}P_{y^k}y^i y^j + P_{y^j}Py^i\frac{\partial y^j}{\partial y^k} + PP_{y^k}y^j\frac{\partial y^i}{\partial y^j} + P^2\frac{\partial y^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial y^i} \\
&= 2P_{x^k}y^i - P_{x^j y^k}y^i y^j - P_{x^j}y^j\delta_{ik} + 2PP_{y^k y^j}y^i y^j + 2PP_{y^k}y^j\delta_{ij} + 2PP_{y^j}y^j\delta_{ik} - \\
&\quad - P_{y^k}y^i P_{y^j}y^j - PP_{y^j}y^i\delta_{jk} - PP_{y^k}y^j\delta_{ij} - P^2\delta_{ij}\delta_{jk}
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Euler

$$\begin{aligned}
R^i{}_k &= 2P_{x^k}y^i - P_{x^j y^k}y^i y^j - P_{x^j}y^j\delta_{ik} + 2PP_{y^k}y^i + 2P^2\delta_{ik} - \\
&\quad - P_{y^k}y^i P - PP_{y^k}y^i - PP_{y^k}y^i - P^2\delta_{ik} \\
&= \left(P^2 - y^j P_{x^j}\right)\delta_{ik} + \left(2P_{x^k} - y^j P_{x^j y^k} - PP_{y^k}\right)y^i.
\end{aligned}$$

Assim

$$R^i{}_k = A\delta_{ik} + By^i, \tag{3-63}$$

onde

$$A = P^2 - y^j P_{x^j} \tag{3-64}$$

e

$$B = \left(2P_{x^k} - y^j P_{x^j y^k} - PP_{y^k}\right) = 3\left(P_{x^k} - PP_{y^k}\right) + A_{y^k}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
By^k &= 2P_{x^k}y^k - y^j P_{x^j y^k}y^k - PP_{y^k}y^k \\
&= 2P_{x^j}y^j - P_{x^j}y^j - P^2 = P_{x^j}y^j - P^2 \\
&= -A
\end{aligned} \tag{3-65}$$

e que

$$\begin{aligned}
R_{jk} &= g_{ij}R^i{}_k = g_{ij}(A\delta_{ik} + By^i) = Ag_{ij}\delta_{ik} + Bg_{ij}y^i \\
&= Ag_{jk} + Bg_{ij}y^i.
\end{aligned} \tag{3-66}$$

Contraindo (3-63) com g_{ji}, usando (3-53), isto é que $R_{jk} = R_{kj}$ e $g_{kj} = g_{kj}$ e ainda o fato que $R_{im} := g_{ik}R^k_{\ m}$ temos

$$Ag_{jk} + Bg_{ij}y^i = Ag_{kj} + Bg_{ik}y^i \tag{3-67}$$

e portanto

$$Bg_{ij}y^i = Bg_{ik}y^i. \tag{3-68}$$

Contraindo (3-68) com y^j, usando (3-65), $g_{ij}y^iy^j = F^2$ e $g_{ij}y^j = FF_{y^i}$ obtemos que

$$Bg_{ij}y^iy^j = Bg_{ik}y^iy^j,$$

ou equivalentemente

$$BF^2 = -Ag_{ik}y^i = -AFF_{y^k}.$$

Isolando B temos

$$B = -\frac{AF_{y^k}}{F}.$$

Substituindo o valor de B em (3-63)

$$R^i_{\ k} = A\delta_{ik} + By^i = A(\delta_{ik} - F^{-1}F_{y^k}y^i). \tag{3-69}$$

Recordando que por (3-64) $A = P^2 - P_{x^m}y^m$ e comparando o resultado acima obtido com (3-62) temos que F tem curvatura flag escalar dada por $K = \frac{A}{F^2}$, ou equivalentemente,

$$K = \frac{P^2 - P_{x^m}y^m}{F^2}. \tag{3-70}$$

$\square$

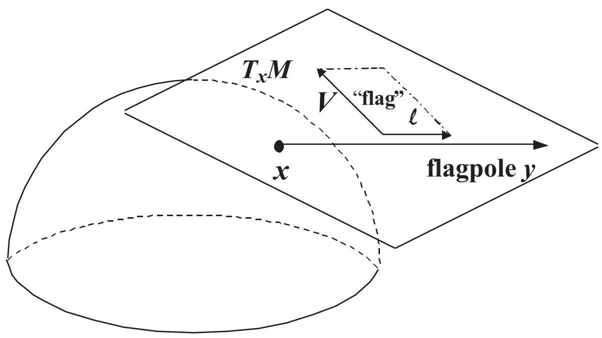

Figura 3.1: *Curvatura flag*

CAPÍTULO 4

Métricas de Randers Localmente Dualmente Flat

4.1 Introdução

Métricas de Randers foram primeiramente introduzidas pelo físico G. Randers em 1941 em estudos da relatividade, mais tarde em 1957, essas métricas foram aplicadas na teoria da eletrostática por R. S. Ingarden. Abaixo, veremos alguns dos motivos pelos quais as métricas de Randers são uma importante classe das métricas Finsler.

- Elas ocorrem naturalmente em aplicações físicas especialmente na eletrostática. Em [4] temos que o Lagrangiano da relatividade dos elétrons é dado por uma função do tipo Randers.

$$\sqrt{\varphi(x)+\frac{1}{4}\varphi^2(x)}\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2}+\Lambda_i(x)y^i,$$

  onde, $\varphi(x)$ e Λ são respectivamente versões normalizadas dos potenciais elétrico (escalar) e magnético (vector). A normalização envolve constantes físicas da teoria.

- As métricas de Randers são relevantes para o y-global espaço de Hilbert, em particular, para aqueles que não são nem Riemannianos nem localmente Minkowskianos (veja [7]).
- Graças ao Teorema de Yasuda-Shimada (veja [27]) as métricas de Randers fornecem exemplos interessantes de espaços de Finsler não Riemannianos com curvatura flag constante. Em [4] encontramos a construção e análise detalhada de um desses exemplos, o disco de Poincaré.
- Em um sentido mais geral, os espaços de Randers representam um meio no qual a geometria Riemanniana conecta-se à geometria de Finsler. Uma grande quantidade de espaços de Finsler pode ser construido fazendo com que a métrica Riemanniana satisfaça propriedades da curvatura de Ricci, juntamente com o significado geométrico e topológico das 1-formas (veja [7]).

- Muitos novos invariantes geométricos são primeiramente calculados para o espaço de Randers. Este é o caso por exemplo da S-Curvatura dada em [26].
- Finalmente, de um ponto de vista axiomático os espaços de Randers formam uma categoria independente, pois toda subvariedade de um espaço de Randers é um espaço de Randers e o produto cartesiano de dois espaços de Randers é também um espaço de Randers. Isso é possível graças ao bom comportamento das métricas Riemannianas e das 1-formas (veja [7]).

As métricas de Randers que são localmente dualmente flat são utilizadas em Geometria da Informação, elas surgem a partir da investigação da estrutura geométrica de uma distribuição de probabilidade e tem sido aplicada com sucesso em áreas como Inferência Estatística, Teoria dos Sitemas de Controle, Teoria Multiterminal da Informação, (veja [22]).

4.2 Caracterização das Métricas de Randers Localmente Dualmente Flat

Antes de demonstrar o teorema que caracteriza as métricas de Randers localmente dualmente flat vamos recordar que:

1. As métrica de Randers são da forma

$$F(x,y) = \alpha(x,y) + \beta(x,y),$$

onde $\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ é uma métrica Riemanniana e $\beta(x,\cdot) = b_i(x)dx^i(\cdot)$ é uma 1-forma em M com $\beta(x,y) = b_i(x)dx^i(y) = b_i(x)y^i$ e

$$b := ||\beta||_\alpha(x) = \sup_{\alpha(x,y)=1,\, y\in T_xM} \beta(x,y) =< 1.$$

2. Se $F = F(x,y)$ é uma métrica de Finsler do tipo Randers em uma variedade M então: (veja Observação 1.5.4)

   (a) $b_{i|j}(x)\theta^j := db_i(x) - b_j(x)\theta_i^j(x)$, onde $\theta^i = dx^i$ e $\theta_i^j(x) := \overline{\Gamma}_{ik}^j(x)dx^k$ denota a conexão de Levi-Civita de $\alpha(x,y)$;

   (b) $r_{ij}(x) := \dfrac{1}{2}(b_{i|j}(x) + b_{j|i}(x))$;

   (c) $s_{ij}(x) := \dfrac{1}{2}(b_{i|j}(x) - b_{j|i}(x))$;

   (d) $r_{00}(x,y) := r_{ij}(x)y^iy^j$;

(e) $s_{k0}(x,y) := s_{km}(x)y^m$;

(f) $b_{i|j}(x) = r_{ij}(x) + s_{ij}(x)$;

(g) $b_{i|j}(x) = \dfrac{\partial b_i}{\partial x^j}(x) - b_k(x)\overline{\Gamma}_{ij}^{k}(x)$.

Agora definindo $s = s(x,y)$ como $s := \dfrac{\beta}{\alpha}$, onde $\alpha = \alpha(x,y)$ e $\beta = \beta(x,y)$ vamos tomar $y_k := a_{jk}y^j$, onde $a_{jk} = a_{jk}(x,y)$ e provar as seguintes identidades:

$$\alpha_{x^k} = \frac{y_m}{\alpha}\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^k},\ \beta_{x^k} = b_{m|k}y^m + b_m\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^k},\ s_{y^k} = \frac{\alpha b_k - sy_k}{\alpha^2}. \tag{4-1}$$

1. Derivando o coeficiente do spray da métrica α, $G_\alpha^m = G_\alpha^m(x,y)$, dado por

$$G_\alpha^m = \frac{a^{ml}}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^l}y^r - \left[\alpha^2\right]_{x^l}\right\},$$

onde $a_{ij} = a_{ij}(x)$, em relação a y^k

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^k} &= \frac{a^{ml}}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^l y^k}y^r + \left[\alpha^2\right]_{x^r y^l}\delta_{rk} - \left[\alpha^2\right]_{x^l y^k}\right\}\\
&= \frac{a^{ml}}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^l y^k}y^r + \left[\alpha^2\right]_{x^k y^l} - \left[\alpha^2\right]_{x^l y^k}\right\}.
\end{aligned}$$

Contraíndo o resultado com y_m, onde $y_m := a_{pm}y^p$ e usando que a função α é positiva homogênea de grau um na variável y obtemos a primeira identidade.

$$\begin{aligned}
y_m\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^k} &= \frac{a_{pm}a^{ml}y^p}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^l y^k}y^r + \left[\alpha^2\right]_{x^k y^l} - \left[\alpha^2\right]_{x^l y^k}\right\}\\
&= \frac{\delta_{pl}y^p}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^l y^k}y^r + \left[\alpha^2\right]_{x^k y^l} - \left[\alpha^2\right]_{x^l y^k}\right\}\\
&= \frac{y^l}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^l y^k}y^r + \left[\alpha^2\right]_{x^k y^l} - \left[\alpha^2\right]_{x^l y^k}\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^l y^k}y^r y^l + \left[\alpha^2\right]_{x^k y^l}y^l - \left[\alpha^2\right]_{x^l y^k}y^l\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[\alpha^2\right]_{x^r y^k}y^r + 2\left[\alpha^2\right]_{x^k} - \left[\alpha^2\right]_{x^l y^k}y^l\right\}\\
&= \alpha\alpha_{x^k};
\end{aligned}$$

2. Em (1-9) verificamos que o coeficiente spray de α é dado por $G_\alpha^m = \dfrac{1}{2}\overline{\Gamma}_{ab}^{m}y^a y^b$, onde $\overline{\Gamma}_{ab}^{m} = \overline{\Gamma}_{ab}^{m}(x)$, substituindo $\dfrac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^k} = \overline{\Gamma}_{sk}^{m}y^s$ em $b_{m|k}y^m = \dfrac{\partial b_m}{\partial x^k}y^m - b_m\overline{\Gamma}_{sk}^{m}y^s$, onde $b_{m|k} = b_{m|k}(x)$ e $b_m = b_m(x)$, provamos a segunda identidade.

$$
\begin{aligned}
b_{m|k}y^m &= (b_m y^m)_{x^k} - b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} \\
&= \beta_{x^k} - b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k};
\end{aligned}
$$

3. Para provar a última identidade é suficiente calcular a derivada de

$$\alpha(x,y) = \sqrt{a_{rs}(x)y^r y^s}$$

em relação a y^k e substituir o valor encontrado na derivada de s com respeito a y^k.

$$\alpha_{y^k} = \frac{a_{rk}y^r + a_{sk}y^s}{2\alpha} = \frac{2y_k}{2\alpha} = \frac{y_k}{\alpha} \tag{4-2}$$

e

$$s_{y^k} = \frac{\beta_{y^k}\alpha - \beta\alpha_{y^k}}{\alpha^2} = \frac{b_k\alpha - \beta\frac{y_k}{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{b_k\alpha - sy_k}{\alpha^2}.$$

Como estamos trabalhando com uma métrica de Randers temos que $F^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ derivando esta igualdade em relação a x^k e usando as identidades provadas acima obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x^k} &= 2\alpha\alpha_{x^k} + 2\alpha_{x^k}\beta + 2\alpha\beta_{x^k} + 2\beta\beta_{x^k} \\
&= 2(\alpha+\beta)\alpha_{x^k} + 2(\alpha+\beta)\beta_{x^k} \\
&= 2(\alpha+\beta)(\alpha_{x^k} + \beta_{x^k}) \\
&= 2(\alpha+\beta)\left[\left(\frac{y_m}{\alpha}\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right) + \frac{\alpha}{\alpha}\left(b_{m|k}y^m + b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right)\right] \\
&= \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha}\left[\left(y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right) + \alpha\left(b_{m|k}y^m + b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right)\right] \\
&= 2(1+s)\left[\left(y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right) + \alpha\left(b_{m|k}y^m + b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right)\right] \\
&= 2(1+s)\left[\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m + \alpha b_m) + \alpha b_{m|k}y^m\right],
\end{aligned}
$$

ou equivalentemente

$$
\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x^l} &= 2(1+s)\left[\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^l}(y_m + \alpha b_m) + \alpha b_{m|l}y^m\right] \\
&= 2(1+s)\left[\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^l}(y_m + \alpha b_m) + \alpha\left(\beta_{x^l} - b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^l}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4-3}
$$

Agora derivando (4-3) em relação a y^k

$$
\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x^l y^k} &= 2s_{y^k}\left[\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^l}(y_m+\alpha b_m)+\alpha\left(\beta_{x^l}-b_m\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^l}\right)\right]+ \\
&+2(1+s)\left[\frac{\partial^2 G_\alpha^m}{\partial y^l\partial y^k}(y_m+\alpha b_m)+\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^l}\left(\frac{\partial y_m}{\partial y^k}+b_m\alpha_{y^k}\right)\right]+ \\
&+2(1+s)\left[\alpha_{y^k}\left(\beta_{x^l}-b_m\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^l}\right)+\alpha\left(\beta_{x^l y^k}-b_m\frac{\partial^2 G_\alpha^m}{\partial y^l\partial y^k}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Observe que:

1. G_α^m é homogênea de grau dois em relação a variável y;
2. $\dfrac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^k}$ é homogênea de grau um em relação a variável y;
3. $y_m = a_{jm}y^j$;
4. $\dfrac{\partial y_m}{\partial y^k}=\dfrac{\partial(a_{jm}y^j)}{\partial y^k}=a_{jm}\delta_{jk}=a_{km}$;
5. $\alpha_{y^k}=\dfrac{y_k}{\alpha}$, veja equação (4-2);
6. $r_{00}=\beta_{x^l}y^l-2b_mG_\alpha^m$, já que recordando as definições de r_{00} e s_{ij} dadas acima temos

$$
\begin{aligned}
\beta_{x^l}y^l-2b_mG_\alpha^m &= \left(\beta_{x^l}-b_m\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^l}\right)y^l=(b_{m|l}y^m)y^l=r_{ml}y^my^l+s_{ml}y^my^l \\
&= r_{00}+\left(\frac{1}{2}b_{m|l}y^my^l-\frac{1}{2}b_{l|m}y^my^l\right) \\
&= r_{00}+\left(\frac{1}{2}b_{m|l}y^my^l-\frac{1}{2}b_{m|l}y^my^l\right) \\
&= r_{00};
\end{aligned}
$$

7. $b_{k|0}=\beta_{x^l y^k}y^l-b_m\dfrac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^k}=\left(\beta_{x^l}-b_m\dfrac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^l}\right)_{y^k}y^l$ pois usando que $b_{i|j}(x)=r_{ij}(x)+s_{ij}(x)$ temos

$$
\begin{aligned}
\left(\beta_{x^l}-b_m\frac{\partial G_\alpha^m}{\partial y^l}\right)_{y^k}y^l &= \left(b_{m|l}y^m\right)_{y^k}y^l=\left(r_{ml}(x)y^m+s_{ml}(x)y^m\right)_{y^k}y^l \\
&= (r_{kl}+s_{kl})y^l=r_{k0}+s_{k0} \\
&= b_{k|0}.
\end{aligned}
$$

Usando os argumentos acima juntamente com as identidades provadas em (4-1) é possível mostrar que

$$\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x_l y_k} y^l &= 2\frac{\alpha b_k - s y_k}{\alpha^2}\left[(y_m+\alpha b_m)2G^m_\alpha + \alpha\left(\beta_{x^l}y^l - 2b_m G^m_\alpha\right)\right] + \\
&+2(1+s)\left[\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m+\alpha b_m) + 2G^m_\alpha\left(\frac{\partial y_m}{\partial y^k} + b_m \alpha_{y^k}\right)\right] + \\
&+2(1+s)\left[\alpha_{y^k}\left(\beta_{x^l}y^l - 2b_m G^m_\alpha\right) + \alpha\left(\beta_{x^l y^k}y^l - b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right)\right] \\
&= 2\frac{\alpha b_k - s y_k}{\alpha^2}\left[(y_m+\alpha b_m)2G^m_\alpha + \alpha r_{00}\right] + \\
&+2(1+s)\left[\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m+\alpha b_m) + 2G^m_\alpha\left(a_{mk} + \frac{y_k}{\alpha}b_m\right) + \frac{y_k}{\alpha}r_{00} + \alpha b_{k|0}\right].
\end{aligned} \tag{4-4}$$

Usando (4-3) e (4-4) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{x_l y_k} y^l - [F^2]_{x_k} &= \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha b_k - \frac{\beta}{\alpha}y_k\right)\left[(y_m+\alpha b_m)2G^m_\alpha + \alpha r_{00}\right] + \\
&+(1+s)\left[\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m+\alpha b_m) + 2G^m_\alpha\left(a_{mk} + \frac{y_k}{\alpha}b_m\right) + \right. \\
&\left. + \frac{y_k}{\alpha}r_{00} + \alpha(s_{k0} + r_{k0})\right] - \\
&-2(1+s)\left[\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m+\alpha b_m) + \alpha(r_{km} - s_{km})y^m\right] \\
&= \frac{\alpha^2 b_k - \beta y_k}{\alpha^3}\left[(y_m+\alpha b_m)2G^m_\alpha + \alpha r_{00}\right] + \\
&+(1+s)\left[2G^m_\alpha(a_{mk} + \frac{y_k}{\alpha}b_m) - \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m+\alpha b_m) + \right. \\
&\left. + \frac{y_k}{\alpha}r_{00} + \alpha(s_{k0} + r_{k0} - 2r_{k0} + 2s_{k0})\right].
\end{aligned} \tag{4-5}$$

Teorema 4.2.1 *Seja $F = \alpha + \beta$ uma métrica de Randers em uma variedade M. $F = F(x,y)$ é localmente dualmente flat se e somente em um sistema de coordenadas locais adaptado, $\alpha = \alpha(x,y)$ e $\beta = \beta(x,y)$ sastisfazem:*

$$r_{00} = \frac{2}{3}\theta\beta - \frac{5}{3}\tau\beta^2 + \left[\tau + \frac{2}{3}\left(\tau b^2 - b_m\theta^m\right)\right]\alpha^2. \tag{4-6}$$

$$s_{k0} = -\frac{(\theta b_k - \beta\theta_k)}{3}. \tag{4-7}$$

$$G^m_\alpha = \frac{1}{3}(2\theta + \tau\beta)y^m - \frac{1}{3}(\tau b^m - \theta^m)\alpha^2, \tag{4-8}$$

onde $\tau = \tau(x)$ é uma função escalar, $\theta = \theta(x,y)$ é uma 1-forma em M dada por $\theta = \theta_k y^k$, $\theta_k = \theta_k(x,y)$ e $\theta^m = \theta^m(x,y)$ é dado por $\theta^m := a^{im}\theta_i$, onde $a_{im} = a_{im}(x)$ e $(a^{im}) = (a_{im})^{-1}$.

Prova. Suponhamos primeiramente que $F = \alpha + \beta$ é dualmente flat, assim pelo Lema 1.5.1 nós obtemos que (4-5) é identicamente nula, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\left[F^2\right]_{x_l y_k} y^l - [F^2]_{x_k} \\ &= \frac{\alpha^2 b_k - \beta y_k}{\alpha^3}\left[(y_m + \alpha b_m)\, 2G^m_\alpha + \alpha r_{00}\right] + (1+s)\left[2G^m_\alpha\left(a_{mk} + \frac{y_k}{\alpha} b_m\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m + \alpha b_m) + \frac{y_k}{\alpha} r_{00} + \alpha(3s_{k0} - r_{k0})\right]. \end{aligned} \tag{4-9}$$

Multiplicando (4-9) por α^3

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha^2 b_k - \beta y_k)\left[(y_m + \alpha b_m)\, 2G^m_\alpha + \alpha r_{00}\right] + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha^3\left[2G^m_\alpha\left(a_{mk} + \frac{y_k}{\alpha} b_m\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_k}{\alpha} r_{00} - \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m + \alpha b_m) + \alpha(3s_{k0} - r_{k0})\right] \\ &= (\alpha^2 b_k - \beta y_k)\left[(y_m + \alpha b_m)\, 2G^m_\alpha + \alpha r_{00}\right] + \alpha(\alpha + \beta)\left[2G^m_\alpha(\alpha a_{mk} + y_k b_m) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(\alpha y_m + \alpha^2 b_m) + y_k r_{00} + \alpha^2(3s_{k0} - r_{k0})\right]. \end{aligned}$$

Reescrevendo (4-10) como um polinômio em α temos:

$$\begin{aligned} &\alpha^2(2b_k y_m G^m_\alpha) + 2\alpha^3(b_k b_m G^m_\alpha) + \alpha^3(b_k r_{00}) - 2\beta y_k y_m G^m_\alpha - 2\alpha(y_k \beta b_m G^m_\alpha) - \\ &-\alpha(\beta y_k r_{00}) + 2\alpha^3(a_{mk} G^m_\alpha) + 2\alpha^2(y_k b_m G^m_\alpha) - \alpha^3\left(y_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right) - \alpha^4\left(b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right) + \\ &+\alpha^2(r_{00} y_k) + \alpha^4(3s_{k0} - r_{k0}) + 2\alpha^2\beta(a_{mk} G^m_\alpha) + 2\alpha(\beta y_k b_m G^m_\alpha) - \alpha^2\left(\beta y_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right) - \\ &-\alpha^3\left(\beta b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right) + \alpha\beta r_{00} y^k + \alpha^3\beta(3s_{k0} - r_{k0}) = 0, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} &\alpha^4\left[-b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + (3s_{k0} - r_{k0})\right] + \alpha^3\left[2b_k b_m G^m_\alpha + b_k r_{00} + 2a_{mk} G^m_\alpha - y_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - \right. \\ &\left. -\beta b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \beta(3s_{k0} - r_{k0})\right] + \alpha^2\left[2b_k y_m G^m_\alpha + 2y_k b_m G^m_\alpha + r_{00} y_k + 2\beta a_{mk} G^m_\alpha - \right. \\ &\left. -\beta y_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right] + \alpha\left[-2y_k \beta b_m G^m_\alpha - \beta y_k r_{00} + 2\beta y_k b_m G^m_\alpha + \beta r_{00} y^k\right] - 2\beta y_k y_m G^m_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{4-10}$$

Em [17] temos que $\{\alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha, 1\}$ formam uma base para os polinômios de grau menor ou igual a quatro. Neste caso teremos que os coeficientes dos termos acima serão nulos, em particular

$$2b_k b_m G^m_\alpha + b_k r_{00} + 2a_{mk} G^m_\alpha - y_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - \beta b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \beta(3s_{k0} - r_{k0}) = 0 \quad (4\text{-}11)$$

e

$$\alpha^4 \left[-b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + (3s_{k0} - r_{k0}) \right] + \alpha^2 \left[2b_k y_m G^m_\alpha + 2y_k b_m G^m_\alpha + r_{00} y_k + 2\beta a_{mk} G^m_\alpha - \right.$$
$$\left. -\beta y_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} \right] - 2\beta y_k y_m G^m_\alpha = 0. \quad (4\text{-}12)$$

Note que como $b_m = b_m(x)$ e $y_k := a_{ik}(x) y^i$ temos

$$\frac{\partial (y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} = y_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + G^m_\alpha a_{mk}, \quad (4\text{-}13)$$
$$\frac{\partial (b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} = b_m \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}. \quad (4\text{-}14)$$

Contraindo (4-11) com b^k, somando e subtraindo $G^m_\alpha b^k a_{mk}$, usando (4-13), (4-14) e usando o fato que

1. $b^2 = b^k b_k$, pois $b := \sqrt{a^{ik} b_i b_k}$ (veja exemplo 1.5.5);
2. $b_m := a_{mk} b^k$; $b_m = b_m(x)$;
3. $s_0 := s_{k0} b^k$; $s_0 = s_0(x)$, $s_{k0} = s_{k0}(x)$ e $b^k = b^k(x)$;
4. $r_0 := r_{k0} b^k$; $r_0 = r_0(x)$, $r_{k0} = r_{k0}(x)$ e $b^k = b^k(x)$,

obtemos que

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & 2b_k b^k b_m G^m_\alpha - b_k b^k r_{00} + 2a_{mk} b^k G^m_\alpha - y_m b^k \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - \beta b_m b^k \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \\ & + \beta(3s_{k0} - r_{k0}) b^k - G^m_\alpha b^k a_{mk} + G^m_\alpha b^k a_{mk}, \end{aligned}$$

ou

$$2b^2 b_m G^m_\alpha + b^2 r_{00} + 3b_m G^m_\alpha - \frac{\partial (y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k - \beta b^k \frac{(\partial b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} + \beta(3s_0 - r_0) = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{\partial (y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k + \beta b^k \frac{\partial (b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} = (2b^2 + 3) b_m G^m_\alpha + b^2 r_{00} + \beta(3s_0 - r_0). \quad (4\text{-}15)$$

Contraindo (4-12) com b^k, usando (4-13) e (4-14) e usando o fato que

$$\beta = b_k y^k = b^j a_{jk} y^k = b^j y_j = b^k y_k,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & -\alpha^4 b_m b^k \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \alpha^4(3s_{k0}b^k - r_{k0}b^k) + 2\alpha^2 b_k b^k y_m G^m_\alpha + 2\alpha^2 y_k b_m b^k G^m_\alpha + \\
& +\alpha^2 r_{00} y_k b^k + 2\alpha^2\beta a_{mk} b^k G^m_\alpha - \alpha^2\beta y_m b^k \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - 2\beta y_k y_m b^k G^m_\alpha - \alpha^2\beta b^k a_{mk} G^m_\alpha +, \\
& +\alpha^2\beta b^k a_{mk} G^m_\alpha
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & -\alpha^4 b^k \frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} + \alpha^4(3s_0 - r_0) + 2\alpha^2 b^2 y_m G^m_\alpha + 2\alpha^2 y_k b_m b^k G^m_\alpha + \\
& +\alpha^2 r_{00} y_k b^k + 3\alpha^2\beta b^k a_{mk} G^m_\alpha - \alpha^2\beta b^k \frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} - 2\beta y_k y_m b^k G^m_\alpha,
\end{aligned}$$

com isso

$$\begin{aligned}
& \alpha^4 b^k \frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} + \alpha^2\beta \frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k = \alpha^4(3s_0 - r_0) + \alpha^2(2b^2 y_m G^m_\alpha + 5\beta b_m G^m_\alpha + \\
& +\beta r_{00}) - 2\beta^2 y_m G^m_\alpha. \qquad (4\text{-}16)
\end{aligned}$$

Multiplicando (4-15) por α^4 e (4-16) por β e subtraindo obtemos

$$\begin{aligned}
& \alpha^4 \frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k + \alpha^4\beta b^k \frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} - \alpha^4\beta b^k \frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} - \alpha^2\beta^2 \frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k = \\
& \alpha^4(2b^2+3) b_m G^m_\alpha + \alpha^4 b^2 r_{00} + \alpha^4\beta(3s_0 + r_0) - \beta\alpha^4(3s_0 - r_0) + 2\beta^3 y_m G^m_\alpha - \\
& -\alpha^2\beta(2b^2 y_m G^m_\alpha + 5\beta b_m G^m_\alpha + \beta r_{00}),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k (\alpha^4 - \alpha^2\beta^2) \quad = \quad & \alpha^2 b^2 (2\alpha^2 b_m G^m_\alpha) + \alpha^2(3\alpha^2 b_m G^m_\alpha) + \alpha^2 b^2(\alpha^2 r_{00}) - \\
& -\alpha^2 b^2 (2\beta y_m G^m_\alpha) - 5\alpha^2\beta^2 (b_m G^m_\alpha) - \alpha^2\beta^2 r_{00} + 2\beta^2\beta y_m G^m_\alpha,
\end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k \alpha^2(\alpha^2-\beta^2) &= \alpha^2 b^2(2\alpha^2 b_m G^m_\alpha + \alpha^2 r_{00} - 2\beta y_m G^m_\alpha) - \beta^2(2\alpha^2 b_m G^m_\alpha + \\ &\quad +\alpha^2 r_{00} - 2\beta y_m G^m_\alpha) + 3\alpha^2(\alpha^2 b_m G^m_\alpha) - 3\alpha^2\beta^2(b_m G^m_\alpha).\end{aligned}$$

Assim

$$\left(\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k - 3b_m G^m_\alpha\right)\alpha^2(\alpha^2-\beta^2) = (2\alpha^2 b_m G^m_\alpha + \alpha^2 r_{00} - 2\beta y_m G^m_\alpha)(\alpha^2 b^2 - \beta^2). \tag{4-17}$$

Pelas observações feitas no Apêndice temos que $(\alpha^2 b^2-\beta^2)\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)$ e $\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2 b^2-\beta^2)$ já que $(\alpha^2 b^2-\beta^2)$, $(\alpha^2-\beta^2)$ e α^2 são polinômios irredutíveis de y^i e $(\alpha^2-\beta^2)$ e α^2 são relativamentes primos.

Por (4-17)

$$(\alpha^2 b^2-\beta^2) \mid \left(\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k - 3b_m G^m_\alpha\right)\alpha^2(\alpha^2-\beta^2),$$

como $(\alpha^2 b^2-\beta^2)\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)$ temos que

$$(\alpha^2 b^2-\beta^2) \mid \left(\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k - 3b_m G^m_\alpha\right).$$

Neste caso

$$\left(\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} b^k - 3b_m G^m_\alpha\right) = (\alpha^2 b^2-\beta^2)\tau_1(x,y). \tag{4-18}$$

Analogamente

$$(2\alpha^2 b_m G^m_\alpha + \alpha^2 r_{00} - 2\beta y_m G^m_\alpha) = \alpha^2(\alpha^2-\beta^2)\tau_2(x,y). \tag{4-19}$$

Substituindo os resultados obtidos acima em (4-17)

$$\left(\frac{\partial y_m G^m_\alpha}{\partial y^k} b^k - 3b_m G^m_\alpha\right)\alpha^2(\alpha^2-\beta^2) = (\alpha^2 b^2-\beta^2)\tau_1(x,y)\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)$$

e

$$(2\alpha^2 b_m G^m_\alpha + \alpha^2 r_{00} - 2\beta y_m G^m_\alpha)(\alpha^2 b^2-\beta^2) = \alpha^2(\alpha^2-\beta^2)\tau_2(x,y)(\alpha^2 b^2-\beta^2).$$

Observe que o lado esquerdo de (4-18) têm uma equação quadrática e o de (4-19) uma equação quártica em y, para que os lados direito respectivos também tenham equações quadráticas e quárticas em y devemos ter que $\tau_1(x,y) = \tau_2(x,y) = \tau(x)$ e conseguimos as seguintes expressões

$$2\alpha^2 b_m G^m_\alpha + \alpha^2 r_{00} - 2\beta y_m G^m_\alpha = \tau(x)\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2) \tag{4-20}$$

e

$$\frac{\partial y_m G^m_\alpha}{\partial y^k} b^k - 3b_m G^m_\alpha = \tau(x)(\alpha^2 b^2 - \beta^2), \tag{4-21}$$

onde (4-20) pode ser reescrita como

$$2\beta y_m G^m_\alpha = (2b_m G^m_\alpha + r_{00} - \tau(x)\alpha^2 + \tau(x)\beta^2)\alpha^2. \tag{4-22}$$

Desde que α^2 não contém fator de β, raciocínio análogo ao anterior nos leva as seguintes expressões

$$y_m G^m_\alpha = \theta\alpha^2, \tag{4-23}$$

e

$$(2b_m G^m_\alpha + r_{00} - \tau(x)\alpha^2 + \tau(x)\beta^2) = 2\beta\theta, \tag{4-24}$$

onde (4-24) pode ser reescrita como

$$b_m G^m_\alpha = \beta\theta - \frac{1}{2} r_{00} + \frac{\tau}{2}\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\beta^2. \tag{4-25}$$

Observe novamente que o lado esquerdo de (4-23) têm uma equação cúbica e o de (4-24) uma equação quadrática em y, para que o lados direito respectivos também tenham equações cúbicas e quadráticas em y, devemos ter que $\theta = \theta(x,y)$ é uma 1-forma de M dada por $\theta := \theta_k y^k$, onde $\theta_k = \theta_k(x)$.

Derivando (4-23) e (4-25) em relação a y^k e usando que $\alpha\alpha_{y^k} = y_k$, $r_{00} := r_{ij}y^i y^j$ e $r_{k0} := r_{kj}y^j$, onde $y_k := a_{ik}y^i$, $r_{ij} = r_{ij}(x)$, $r_{00} = r_{00}(x,y)$ e $r_{k0} = r_{k0}(x,y)$, obtemos que

$$\frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} = \theta_k\alpha^2 + 2\theta\alpha\alpha_{y^k} = \theta_k\alpha^2 + 2\theta\alpha\frac{y_k}{\alpha} = \theta_k\alpha^2 + 2\theta y_k \tag{4-26}$$

e

$$\frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} = \theta_k\beta + b_k\theta - \frac{1}{2}(r_{k0} + r_{k0}) + \tau y_k - \tau\beta b_k. \tag{4-27}$$

Substituindo (4-23) até (4-27) em (4-11) e (4-12) e usando $\dfrac{\partial y_m}{\partial y^k} = a_{mk}$ obtemos respectivamente

$$
\begin{aligned}
0 &= 2b_k\left(\beta\theta - \frac{1}{2}r_{00} + \frac{\tau}{2}\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\beta^2\right) + b_k r_{00} + 2a_{mk}G^m_\alpha - \theta_k\alpha^2 - 2\theta y_k + \\
&\quad + a_{mk}G^m_\alpha - \beta(\theta_k\beta + b_k\theta - r_{k0} + \tau y_k - \tau\beta b_k) + \beta(3s_{k0} - r_{k0}) \\
&= 2b_k\beta\theta - b_k r_{00} + \tau\alpha^2 b_k - \tau\beta^2 b_k + b_k r_{00} + 2a_{mk}G^m_\alpha - \theta_k\alpha^2 - 2\theta y_k + \\
&\quad + a_{mk}G^m_\alpha - \beta^2\theta_k - \beta\theta b_k + \beta r_{k0} - \beta\tau y_k + \tau\beta^2 b_k + \beta(3s_{k0} - r_{k0}) \\
&= \beta(3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k) + (\tau b_k - \theta_k)\alpha^2 + 3a_{mk}G^m_\alpha - (2\theta + \tau\beta)y_k
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
0 &= -\alpha^4(\theta_k\beta + \theta b_k - r_{k0} + \tau y_k - \beta\tau b_k) + \alpha^4(3s_{k0} - r_{k0}) + 2b_k\alpha^2\alpha^2\theta + \\
&\quad + 2\alpha^2 y_k\left(\beta\theta - \frac{1}{2}r_{00} + \frac{\tau}{2}\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\beta^2\right) + \alpha^2 y_k r_{00} + 2\alpha^2\beta a_{mk}G^m_\alpha - \\
&\quad - \alpha^2\beta(\alpha^2\theta_k + 2\theta y_k) + \alpha^2\beta(a_{mk}G^m_\alpha) - 2\alpha^2\beta y_k\theta \\
&= [(3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta) + (\tau b_k - \theta_k)\beta]\alpha^2 - (2\theta + \tau\beta)\beta y_k + 3\beta a_{mk}G^m_\alpha,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\beta(3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k) + (\tau b_k - \theta_k)\alpha^2 + 3a_{mk}G^m_\alpha - (2\theta + \tau\beta)y_k = 0 \tag{4-28}
$$

e

$$
[(3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta) + (\tau b_k - \theta_k)\beta]\alpha^2 - (2\theta + \tau\beta)\beta y_k + 3\beta a_{mk}G^m_\alpha = 0. \tag{4-29}
$$

Multiplicando (4-28) por $-\beta$ e somando (4-29)

$$
\begin{aligned}
0 &= -\beta^2(3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta) - \beta\alpha^2(\tau b_k - \theta_k) - 3\beta a_{mk}G^m_\alpha + \beta(2\theta + \tau\beta)y_k + \\
&\quad + [(3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta) + (\tau b_k - \theta_k)\beta]\alpha^2 - (2\theta + \tau\beta)\beta y_k + 3\beta a_{mk}G^m_\alpha \\
&= (3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta)(\alpha^2 - \beta^2).
\end{aligned}
$$

Usando que $(\alpha^2 - \beta^2)$ é não nulo, obtemos

$$
3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta = 0. \tag{4-30}
$$

Isolando s_{k0} na expressão anterior provamos (4-7). Lembrando que (4-7) é uma das equações que caracterizam as métricas de Randers localmente dualmente flat.

$$
s_{k0} = -\frac{(\theta b_k - \beta\theta_k)}{3}.
$$

Para provar as outras duas dadas por (4-8) e (4-6), primeiramente vamos contrair (4-28) com a^{lk} e usar que

1. $s^l{}_0 := s_{k0}a^{lk}$; $s^l{}_0 = s^l{}_0(x,y)$ e $s_{k0} = s_{k0}(x,y)$;
2. $b^l := b_k a^{lk}$; $b_k = b_k(x)$.;
3. $\theta^l := \theta_k a^{lk}$; $\theta_k = \theta_k(x)$;
4. $G^m_\alpha a_{mk}a^{lk} = G^m_\alpha \delta_{lm} := G^l_\alpha$; $G^m_\alpha = G^m_\alpha(x,y)$;
5. $y_k a^{lk} := y^l$.

Assim obtemos

$$\beta(3s^l{}_0 + \theta b^l - \beta\theta^l) + (\tau b^l - \theta^l)\alpha^2 + 3G^l_\alpha - (2\theta + \tau\beta)y^l = 0. \tag{4-31}$$

Agora contraindo (4-30) com a^{lk}

$$3s^l{}_0 + \theta b^l - \beta\theta^l = 0 \tag{4-32}$$

e substituindo (4-32) em (4-31) obtemos (4-8).

$$G^l_\alpha = \frac{1}{3}(2\theta + \tau\beta)y^l - \frac{1}{3}(\tau b^l - \theta^l)\alpha^2.$$

Para provar (4-6) vamos multiplicar (4-8) por b_m e igualar a (4-25), obtendo

$$b_m G^m_\alpha = \frac{1}{3}b_m(2\theta + \tau\beta)y^l - \frac{1}{3}b_m(\tau b^l - \theta^l)\alpha^2 = \beta\theta - \frac{1}{2}r_{00} + \frac{\tau}{2}(\alpha^2 - \beta^2).$$

Isolando r_{00} e usando o fato de que $b_m y^m = \beta$ e $b_m b^m = b^2$ obtemos (4-6), isto é

$$\begin{aligned} r_{00} &= -\frac{2}{3}b_m(2\theta + \tau\beta)y^m + \frac{2}{3}b_m(\tau b^m - \theta^m)\alpha^2 + 2\beta\theta + \tau(\alpha^2 - \beta^2) \\ &= -\frac{4}{3}b_m y^m\theta - \frac{2}{3}\tau\beta b_m y^m + \frac{2}{3}b_m\tau b^m\alpha^2 - \frac{2}{3}b_m\theta^m\alpha^2 + 2\theta\beta + \tau\alpha^2 - \tau\beta^2 \\ &= -\frac{4}{3}\beta\theta - \frac{2}{3}\tau\beta^2 + \frac{2}{3}\tau\alpha^2\beta^2 - \frac{2}{3}b_m\theta^m\alpha^2 + \frac{6}{3}\beta\theta + \frac{3}{3}\tau\alpha^2 - \frac{3}{3}\tau\beta^2 \\ &= \frac{2}{3}\beta\theta - \frac{5}{3}\tau\beta^2 + \alpha^2\left[\tau + \frac{2}{3}(\tau b^2 - b_m\theta^m)\right], \end{aligned}$$

e concluimos a caracterização das as métricas de Randers localmente dualmente flat.

Reciprocamente vamos supor agora que F satisfaz (4-6) até (4-8) e seguir os seguintes passos:

1. Contraimos (4-8) com y_m e usamos que $y^m y_m = a_{mk} y^k y^m = \alpha^2$ e $\theta_m y^m = a_{im}\theta^i y^m = \theta^i y_i$, assim

$$\begin{aligned} y_m G^m_\alpha &= \frac{1}{3}(2\theta+\tau\beta)y^m y_m - \frac{1}{3}(\tau b^m - \theta^m)\alpha^2 y_m \\ &= \frac{1}{3}(2\theta+\tau\beta)\alpha^2 - \frac{1}{3}(\tau\beta-\theta)\alpha^2 \\ &= \theta\alpha^2. \end{aligned} \tag{4-33}$$

2. Isolamos $\frac{1}{3}b_m\theta^m\alpha^2$ em (4-6) obtendo

$$\frac{1}{3}b_m\theta^m\alpha^2 = -\frac{r_{00}}{2} + \frac{1}{3}\theta\beta - \frac{5}{6}\tau\beta^2 + \frac{1}{2}\tau\alpha^2 + \frac{1}{3}\tau\alpha^2 b^2. \tag{4-34}$$

3. Substituimos (4-34) em (4-8) contraído com b_m. Isto nós leva a

$$\begin{aligned} b_m G^m_\alpha &= \frac{1}{3}(2\theta+\tau\beta)y^m b_m - \frac{1}{3}(\tau b^m - \theta^m)\alpha^2 b_m \\ &= \frac{1}{3}(2\theta\beta+\tau\beta^2) - \frac{1}{3}(\tau b^2 - b_m\theta^m)\alpha^2 \qquad (4\text{-}35) \\ &= \frac{2}{3}\theta\beta + \frac{1}{3}\tau\beta^2 - \frac{1}{3}\tau b^2\alpha^2 - \frac{1}{2}r_{00} + \frac{1}{3}\theta\beta - \frac{5}{6}\tau\beta^2 + \frac{1}{2}\tau\alpha^2 + \frac{1}{3}\tau\alpha^2 b^2 \\ &= \theta\beta - \frac{1}{2}r_{00} + \frac{1}{2}\tau\alpha^2 - \frac{1}{2}\tau\beta^2; \end{aligned}$$

4. Derivamos (4-33) e (4-35) em relação a y^k e usamos que $\alpha\alpha_{y^k} = y_k$ e $r_{00} := r_{ij}y^i y^j$, desta forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} &= \theta_k\alpha^2 + 2\theta y_k \quad \text{e} \\ \frac{\partial(b_m G^m_\alpha)}{\partial y^k} &= \theta_k\beta + b_k\theta - \frac{1}{2}\left(r_{k0}+r_{k0}\right) + \tau y_k - \tau\beta b_k. \end{aligned} \tag{4-36}$$

5. Contraimos (4-7) com a^{lk} e obtemos

$$a^{lk}(3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta) = 3s^l{}_0 + \theta b^l - \beta\theta^l = 0. \tag{4-37}$$

6. Reescrevemos (4-8) e usamos (4-37), assim

$$3G^m_\alpha - (2\theta+\tau\beta)y^m + \beta(\tau b^m - \theta^m)\alpha^2 + \overbrace{\beta(3s^l{}_0 + \theta b^l - \beta\theta^l)}^{0} = 0. \tag{4-38}$$

7. Contraimos (4-38) com a_{mk} resultando em

$$3G^m_\alpha a_{mk} - (2\theta + \tau\beta)y_k + (\tau b_k - \theta_k)\alpha^2 + \beta(3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k) = 0. \tag{4-39}$$

8. Usamos (4-7) para obter

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha^2 - \beta^2)\overbrace{(3s_{k0} + \theta b_k - \theta_k\beta)}^{=0} - \\ &- \beta[3G^m_\alpha a_{mk} - (2\theta + \tau\beta)y_k + (\tau b_k - \theta_k)\alpha^2 + \beta(3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k)] + \\ &+ [3\beta G^m_\alpha a_{mk} - (2\theta + \tau\beta)\beta y_k + (\tau b_k - \theta_k)\alpha^2\beta + (3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k)\beta^2]. \end{aligned}$$

9. Substituimos (4-39) na expressão anterior e obtemos

$$[(3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k) + (\tau b_k - \theta_k)\beta]\alpha^2 - (2\theta + \tau\beta)\beta y_k + 3\beta G^m_\alpha a_{mk} = 0. \tag{4-40}$$

10. Usamos as equações (4-33) até (4-36) em (4-39) para reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned} 0 &= 3G^m_\alpha a_{mk} - (2\theta + \tau\beta)y_k + (\tau b_k - \theta_k)\alpha^2 + \beta(3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k) \\ &= 2b_k\beta\theta - b_k r_{00} + \tau\alpha^2 b_k - \tau\beta^2 b_k + b_k r_{00} + 2a_{mk}G^m_\alpha - \theta_k\alpha^2 - 2\theta y_k + \\ &\quad + a_{mk}G^m_\alpha - \beta^2\theta_k - \beta\theta b_k + \beta r_{k0} - \beta\tau y_k + \tau\beta^2 b_k + \beta(3s_{k0} - r_{k0}) \qquad (4\text{-}41) \\ &= 2b_k(\beta\theta - \frac{1}{2}r_{00} + \frac{\tau}{2}\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\beta^2) + b_k r_{00} + 2a_{mk}G^m_\alpha - \theta_k\alpha^2 - 2\theta y_k + \\ &\quad + a_{mk}G^m_\alpha - \beta(\theta_k\beta + b_k\theta - r_{k0} + \tau y_k - \tau\beta b_k) + \beta(3s_{k0} - r_{k0}) \\ &= 2b_k b_m G^m_\alpha + b_k r_{00} + 2a_{mk}G^m_\alpha - y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - \beta b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \beta(3s_{k0} - r_{k0}); \end{aligned}$$

11. Usar as equações (4-33) até (4-36) em (4-40) para reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{[(3s_{k0} + \theta b_k - \beta\theta_k) + (\tau b_k - \theta_k)\beta]\alpha^2 - (2\theta + \tau\beta)\beta y_k + 3\beta G^m_\alpha a_{mk}\right\}\alpha^2 \\ &= -\alpha^4(\theta_k\beta + \theta b_k - r_{k0} + \tau y_k - \beta\tau b_k) + \alpha^4(3s_{k0} - r_{k0}) + 2b_k\alpha^2\alpha^2\theta + \\ &\quad + 2\alpha^2 y_k\left(\beta\theta - \frac{1}{2}r_{00} + \frac{\tau}{2}\alpha^2 - \frac{\tau}{2}\beta^2\right) + \alpha^2 y_k r_{00} + 2\alpha^2\beta a_{mk}G^m_\alpha - \qquad (4\text{-}42) \\ &\quad - \alpha^2\beta(\alpha^2\theta_k + 2\theta y_k) + \alpha^2\beta(a_{mk}G^m_\alpha) - 2\alpha^2\beta y_k\theta \\ &= \alpha^4\left[-b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + (3s_{k0} - r_{k0})\right] - 2\beta y_k y_m G^m_\alpha + \\ &\quad + \alpha^2\left[2b_k y_m G^m_\alpha + 2y_k b_m G^m_\alpha + r_{00}y_k + 2\beta a_{mk}G^m_\alpha - \beta y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right]; \end{aligned}$$

12. Reescrevemos (4-5) da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{x_l y_k} y^l - [F^2]_{x_k} &= \left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}\right)\frac{\alpha^2 b_k - \beta y_k}{\alpha^3}\left[(y_m+\alpha b_m)2G^m_\alpha + \alpha r_{00}\right] + \\
&+\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}\right)(1+s)\left[2G^m_\alpha\left(a_{mk}+\frac{y_k}{\alpha}b_m\right) - \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}(y_m + \right.\\
&\left. +\alpha b_m) + \frac{y_k}{\alpha}r_{00} + \alpha(s_{k0}+r_{k0}-2r_{k0}+2s_{k0})\right]\\
&= \left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\alpha^3\left[2b_k b_m G^m_\alpha + b_k r_{00} + 2a_{mk}G^m_\alpha - y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} - \right.\\
&\left. -\beta b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \beta(3s_{k0}-r_{k0})\right] + \left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\left\{\alpha^4\left[-b_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k} + \right.\right.\\
&+(3s_{k0}-r_{k0})\big] + \alpha^2\big[2b_k y_m G^m_\alpha + 2y_k b_m G^m_\alpha + r_{00}y_k + \\
&\left.\left. + 2\beta a_{mk}G^m_\alpha - \beta y_m\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^k}\right]\right\} - 2\beta y_k y_m G^m_\alpha.
\end{aligned}
$$

Finalmente substituindo (4-41) e (4-42) na expressão anterior temos que

$$\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{x_l y_k} y^l - [F^2]_{x_k} = 0.$$

Portanto pelo Lema 1.5.1 temos que F é localmente dualmente flat em um sistema de coordenadas adptado. □

4.3 Randers Localmente Dualmente Flat com Curvatura Flag Quase-Isotrópica

Nesta seção vamos caracterizar as métricas de Randers que são localmente dualmente flat e têm curvatura flag quase isotrópica, começamos recordando que a curvatura flag é o análogo a curvatura seccional na geometria Riemanniana e que a métrica de Finsler F em uma variedade M tem curvatura flag escalar se a curvatura flag $K(P,y) = K(x,y)$ é uma função escalar em $TM\backslash\{0\}$.

Definição 4.3.1 *A curvatura flag é quase isotrópica se*

$$K(P,y) = \frac{3c_{x^m}y^m}{F} + \delta \tag{4-43}$$

onde $c = c(x)$ e $\delta = \delta(x)$ são funções escalares em M. Se $c = 0$ e $\delta \in \mathbb{R}$ é constante então F tem curvatura flag constante e se $K = \sigma(x)$ diremos que a métrica tem curvatura isotrópica.

Em [24] encontramos o seguinte teorema

Teorema 4.3.1 *Seja $F = \alpha + \beta$ uma métrica de Randers localmente projetivamente flat em uma variedade. Se F tem curvatura flag constante então vale uma das seguintes afirmações :*

1. *F é uma métrica de Randers localmente isométrica $F = |y| + by^1$ em $\mathbb{R}^n$, onde $0 \leq b < 1$ é constante.*
2. *Após uma normalização F é localmente isométrica a uma métrica de Randers na bola $B^n \subset \mathbb{R}^n$.*

$$F = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}}{(1-|x|^2)} \pm \frac{\langle x,y\rangle}{(1-|x|^2)} \pm \frac{\langle a,y\rangle}{1+\langle a,x\rangle}, \tag{4-44}$$

onde $a \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante com $|a| < 1$.

Este Teorema caracteriza as métrica de Randers localmente projetivamente flat que tem curvatura flag constante. A partir de agora vamos nos preparar para caracterizar as métricas de Randers localmente dualmente flat com curvatura flag quase isotrópica.

Teorema 4.3.2 *Seja $F = F(x,y)$ uma métrica de Finsler em um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ F é dualmente flat e projetivamente flat em U se e somente se*

$$F_{x^k} = CFF_{y^k} \tag{4-45}$$

onde C é uma constante.

*Prova.*Temos de (1-12) e (1-19) que se F é localmente dualmente flat e projetivamente flat ela satisfaz

$$\left[F^2\right]_{x^m y^k} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^k} = 0 \text{ e } F_{x^m y^k} y^m - F_{x^k} = 0$$

respectivamente.

Usando essas duas igualdades, o Teorema de Euler e o fato de que F é positiva homogênea de grau um na variável y obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[F^2\right]_{x^m y^k} y^m - 2\left[F^2\right]_{x^k} \\ &= [2FF_{x^m}]_{y^k} y^m - 2(2FF_{x^k}) \\ &= 2\left(F_{y^k}F_{x^m}y^m + FF_{x^m y^k}y^m\right) - 4FF_{x^k} \\ &= 2F_{y^k}F_{x^m}y^m + 2FF_{x^k} - 4FF_{x^k} \\ &= 2F_{y^k}F_{x^m}y^m - 2FF_{x^k}. \end{aligned} \tag{4-46}$$

Isolando F_{x^k} na igualdade anterior

$$F_{x^k} = \frac{2F_{y^k}F_{x^m}y^m}{2F} = 2F_{y^k}P, \tag{4-47}$$

onde $P = P(x,y)$ é dado por $P := \dfrac{F_{x^m}y^m}{2F}$, ou equivalentemente

$$2FP = F_{x^m}y^m. \tag{4-48}$$

Derivando (4-48) com respeito a y^l e usando que F é projetivamente flat

$$2(P_{y^l}F + PF_{y^l}) = F_{x^m y^l}y^m + F_{x^l} = 2F_{x^l}. \tag{4-49}$$

Por (4-47), $F_{x^l} = 2F_{y^l}P$, assim substituindo esse valor na expressão acima obtemos

$$P_{y^l}F + PF_{y^l} = F_{x^l} = 2F_{y^l}P,$$

ou equivalentemente

$$P_{y^l}F - PF_{y^l} = 0.$$

Notando que

$$\left[\frac{P}{F}\right]_{y^l} = \frac{P_{y^l}F - PF_{y^l}}{F^2} = 0,\ \forall\, y^l,$$

temos que $\dfrac{P}{F}$ não depende da variável y ou seja $P = \dfrac{1}{2}CF$ onde $C = C(x)$ é uma função escalar.

Substituindo $P = \dfrac{1}{2}CF$ em (4-47) obtemos

$$F_{x^k} = C(x)FF_{y^k}. \tag{4-50}$$

Diferenciando (4-50) com respeito a x^l e usando que $[C(x)]_{y^k} = 0$ temos

$$\begin{aligned} F_{x^k x^l} &= C_{x^l}FF_{y^k} + CF_{x^l}F_{y^k} + CFF_{y^k x^l} \\ &= C_{x^l}FF_{y^k} + CF_{x^l}F_{y^k} + CF(F_{x^l})_{y^k} \\ &= C_{x^l}FF_{y^k} + C(CFF_{y^l})F_{y^k} + CF(C(x)_{y^k}FF_{y^l} + CF_{y^k}F_{y^l} + CFF_{y^l y^k}), \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$F_{x^l x^k} = C_{x^k}FF_{y^l} + C(CFF_{y^k})F_{y^l} + CF(C(x)_{y^l}FF_{y^k} + CF_{y^l}F_{y^k} + CFF_{y^k y^l}).$$

F é uma função de classe C^∞ portanto pelo Teorema de Schwarz (veja [19]) $F_{x^k x^l} = F_{x^l x^k}$. Subtraindo as duas expressões

$$0 \;=\; F_{x^k x^l} - F_{x^l x^k} = F(C_{x^l}F_{y^k} - C_{x^k}F_{y^l}). \tag{4-51}$$

Como F é não nula $C_{x^l}F_{y^k} - C_{x^k}F_{y^l} = 0$. Se $y = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ é tal que $C_{x^l}(x)y^l = 0$, nós obtemos de (4-51) que caso $(C_{x^1}, ..., C_{x^n}) \neq 0$ então $F(x,y) = 0$, basta observar que $C_{x^k}F_{y^l}y^l = C_{x^l}F_{y^k}y^l$ faz com que

$$C_{x^k}F = F_{y^k}C_{x^l}y^l = 0 \,\forall\, k \in 1, ..., n$$

assim existe C tal que $C_{x^c} \neq 0$ e $C_{x^c}F = 0$ faz com que $F = 0$. De fato existe um vetor não nulo $(C_{x^1}, \cdots, C_{x^n})$ com essa propriedade, basta considerar que $C_{x^a}(x) = 0$ para $a = 2, ..., n$. Então para $y = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ com $y^1 = 0$, $C_{x^l}(x)y^l = 0$ e $F = 0$ assim

$$g_{ab}(x,y) = \frac{1}{2}\left[F^2(x,y)\right]_{y^a y^b} = 0 \; (2 \leq a, b \leq n),$$

para $y = (0, y^2, \cdots, y^n) \neq 0$, o que contradiz a regularidade de F, assim C é constante.

Reciprocamente, se F satisfaz a igualdade

$$F_{x^k} = CFF_{y^k},$$

então derivando ambos os lados em relação a y^l, contraindo com y^k e usando o lema 1.5.2, obtemos que F é localmente projetivamente flat pois

$$F_{x^k y^l}y^k = CF_{y^l}F_{y^k}y^k + CFF_{y^k y^l}y^k = CFF_{y^l} = F_{x^l}. \tag{4-52}$$

Agora fazendo

$$\begin{aligned}
\left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k &= 2\left[F_{y^l}\left(F_{x^k}y^k\right) + F\left(F_{x^k y^l}y^k\right)\right] \\
&= 2\left[F_{y^l}\left(CFF_{y^k}\right)y^k + F\left(F_{x^l}\right)\right] \\
&= 2\left[\left(CFF_{y^l}\right)F_{y^k}y^k + F\left(F_{x^l}\right)\right] \\
&= 2\left(F_{x^l}F + FF_{x^l}\right) = 2\left[F^2\right]_{x^l},
\end{aligned} \tag{4-53}$$

temos pelo Lema 1.5.1 que F é localmente dualmente flat. □

Proposição 4.3.1 *Seja $F = F(x,y)$ um métrica de Finsler em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se F é dualmente flat e projetivamente flat então a curvatura flag é constante.*

Prova. Segue da equação (3-70) calculada na Proposição (3.4.2) que a curvatura flag para o caso em que F é projetivamente flat, é dada por

$$K = \frac{P^2 - P_{x^k}y^k}{F^2},$$

onde $P = P(x,y)$ é uma função escalar.

Pelo Teorema anterior, $F_{x^k} = CFF_{y^k}$, neste caso

$$P = \frac{F_{x^k}y^k}{2F} = \frac{CFF_{y^k}y^k}{2F} = \frac{1}{2}CF,$$

$$P_{x^k}y^k = \frac{1}{2}CF_{x^k}y^k = \frac{C(CFF_{y^k})y^k}{2} = \frac{1}{2}C^2F^2$$

e

$$K = \left(\frac{P}{F}\right)^2 - \left(\frac{P_{x^k}y^k}{F^2}\right) = \frac{C^2}{4} - \frac{C^2}{2} = -\frac{C^2}{4}. \tag{4-54}$$

Assim a curvatura flag é constante. □

Exemplo 4.3.1 *A métrica de Funk, dada no exemplo 1.5.4, satisfaz* $F_{x^k} = CFF_{y^k}$ *com* $C = \pm 1$*, ela é localmente dualmente flat e localmente projetivamente flat com* $K = -\dfrac{1}{4}$.

Prova. Sem perda de generalidade vamos considerar a métrica de Funk, na bola $B^n \subset \mathbb{R}$ e faremos os cálculos para F dada por

$$F = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}}{(1-|x|^2)} + \frac{\langle x,y\rangle}{(1-|x|^2)}. \tag{4-55}$$

Para simplificar a notação considere

$$\Theta := \sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)},$$

Derivando F em relação a x^K obtemos que

$$\begin{aligned}
F_{x^k} &= \frac{\left(-x^k|y|^2+\langle x,y\rangle y^k+y^k\Theta\right)\left(1-|x|^2\right)-(\Theta+\langle x,y\rangle)(-2x^k)\Theta}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&= \frac{-x^k|y|^2+\langle x,y\rangle y^k+y^k\Theta+|x|^2x^k|y|^2}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&+ \frac{-|x|^2\langle x,y\rangle y^k-|x|^2y^k\Theta+2x^k\Theta^2+2x^k\Theta\langle x,y\rangle}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&= \frac{\left(y^k-y^k|x|^2\right)\left(\langle x,y\rangle+\Theta\right)-x^k\left(|y|^2-|x|^2|y|^2\right)}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&+ \frac{2x^k\Theta^2+2x^k\Theta\langle x,y\rangle-x^k\langle x,y\rangle^2+x^k\langle x,y\rangle^2}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&= \frac{\left(y^k-y^k|x|^2\right)\left(\langle x,y\rangle+\Theta\right)-x^k\left(|y|^2-|x|^2|y|^2+\langle x,y\rangle^2\right)}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&+ \frac{2x^k\Theta^2+x^k\Theta\langle x,y\rangle+x^k\langle x,y\rangle\left(\langle x,y\rangle+\Theta\right)}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&= \frac{\left(\langle x,y\rangle+\Theta\right)\left(y^k-y^k|x|^2+x^k\Theta+x^k\langle x,y\rangle\right)}{\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}\\
&= FF_{y^k}. \qquad (4\text{-}56)
\end{aligned}$$

Analogamente, para

$$F=\frac{\sqrt{|y|^2-\left(|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2\right)}}{\left(1-|x|^2\right)}-\frac{\langle x,y\rangle}{\left(1-|x|^2\right)}, \qquad (4\text{-}57)$$

obtemos que $F_{x^k}=-FFy^k$. Assim a métrica de Funk satisfaz $F_{x^k}=CFFy^k$ com $C=\pm1$ e usando a proposição anterior sua curvatura é dada por $K=-\frac{1}{4}$. □

Em [4] encontramos o seguinte lema que relaciona os coeficientes do spray G^i_α de α da métrica de Finsler $F=F(x,y)$, no caso em que F é do tipo Randers.

Lema 4.3.1 *Para um métrica de Randers $F=\alpha+\beta$ a relação entre os coeficientes spray $G^i=G^i(x,y)$ de $F=F(x,y)$ e $G^i_\alpha=G^i_\alpha(x,y)$ de α são dados por $G^i=G^i_\alpha+\overline{P}y^i+Q^i$, onde $\overline{P}=\overline{P}(x,y)$ é dado por $\overline{P}:=\dfrac{e_{00}}{2F}+s_0$, $Q^i=Q^i(x,y)$ é dado por $Q^i:=\alpha s^i{}_0$ e $e_{ij}(x)=e_{ij}:=r_{ij}+b_is_j+b_js_i$, $e_{00}(x,y)=e_{00}:=e_{ij}y^iy^j$, $s^i{}_j(x)=s^i{}_j:=a^{ih}s_{hj}$, $s^i{}_0(x,y)=s^i{}_0:=s^i{}_jy^j$, $s_j(x)=s_j:=b_is^i{}_j$, $s_j(x)=s_j:=b_is^i{}_j$ e $s_0(x)=s_0:=s_iy^i$.*

Este lema será importante para provar a seguinte proposição que pode ser encontrada em [6].

Proposição 4.3.2 *A métrica de Randers $F=\alpha+\beta$ é localmente projetivamente flat se e somente se $\alpha=\alpha(x,y)$ é localmente projetivamente flat e $\beta=\beta(x,y)$ é fechada.*

Prova. Suponha que $F=\alpha+\beta$ é localmente projetivamente flat então por definição $G^i=y^iP$, onde $P=P(x,y)$ é uma função escalar, temos pelo lema anterior que

$$G^i=G^i_\alpha+\overline{P}y^i+Q^i,$$

onde $\overline{P}:=\dfrac{e_{00}}{2F}+s_0$ e $Q^i:=\alpha s^i{}_0$.

Igualando as duas expressões para G^i temos que

$$G^m_\alpha+\overline{P}y^m+Q^m=Py^m. \tag{4-58}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q^m}{\partial y^m} &= \frac{\partial(\alpha s^m_0)}{\partial y^m}\\
&= \frac{\partial\alpha}{\partial y^m}s^m_0+\alpha\frac{s^m_0}{\partial y^m}\\
&= \frac{a_{mj}y^j+a_{mi}y^i}{2\alpha}s^m_0+\alpha\frac{\partial s^m_j y^j}{\partial y^m}\\
&= \alpha^{-1}y_m s^m_0+\alpha s^m_j\delta_{jm}\\
&= \alpha^{-1}a_{mk}y^k s^m_j y^j+\alpha s^m_m\\
&= \alpha^{-1}a_{mk}y^k a^{mh}s_{hj}y^j+\alpha a^{mh}s_{hm}\\
&= \alpha^{-1}\delta_{kh}y^k y^j s_{hj}+\alpha a^{mh}s_{hm},
\end{aligned} \tag{4-59}$$

Usando a equação (1-21) temos que $s_{ij}=\dfrac{\partial b_h}{\partial x^m}-\dfrac{\partial b_m}{\partial x^h}$ assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q^m}{\partial y^m} &= \alpha^{-1}y^h y^j\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_h}{\partial x^j}-\frac{\partial b_j}{\partial x^h}\right)+\alpha a^{mh}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_h}{\partial x^m}-\frac{\partial b_m}{\partial x^h}\right)\\
&= \alpha^{-1}y^h y^j\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_j}{\partial x^h}-\frac{\partial b_j}{\partial x^h}\right)+\alpha a^{mh}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_m}{\partial x^h}-\frac{\partial b_m}{\partial x^h}\right)\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4-60}$$

onde $s^m_j=s^m_j(x)=a^{mh}(x)s_{hm}(x)$.

Observe também que $P=P(x,y)$ é homogênea de grau um, fixado um i,

$$P(x,\lambda y)\lambda y^i=G^i(x,\lambda y)=\lambda^2G^i(x,y)=\lambda^2P(x,y)y^i,$$

com isso

$$P(x,\lambda y) = \lambda P(x,y)$$

e $\overline{P} = \overline{P}(x,y)$ é homogênea de grau já que

$$\begin{aligned}
\overline{P}(x,\lambda y) &= \frac{r_{ij}(x)\lambda y^i\lambda y^j + 2b_i(x)\lambda y^i s_j(x)\lambda y^j}{2F(x,\lambda y)}) - s_j(x)\lambda y^j \\
&= \frac{\lambda^2(r_{ij}(x)y^iy^j + 2b_i(x)y^is_j(x)y^j)}{2\lambda F(x,y)} - \lambda s_j(x)y^j \\
&= \lambda\overline{P}(x,y).
\end{aligned}$$

Derivando (4-58) em relação a y^m e usando (4-60) juntamente com o fato que P e $\overline{P}$ são homogêneas de grau 1 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^m} &= \frac{\partial(Py^m)}{\partial y^m} - \frac{\partial(\overline{P}y^m)}{\partial y^m} \\
&= \frac{\partial P}{\partial y^m}y^m + P\frac{\partial y^m}{\partial y^m} - \frac{\partial\overline{P}}{\partial y^m}y^m - \overline{P}\frac{\partial y^m}{\partial y^m} \\
&= (n+1)(P-\overline{P}).
\end{aligned} \tag{4-61}$$

Isolando Q^i em (4-58) temos que $Q^i = (P-\overline{P})y^i - G^i_\alpha$, onde $Q^i := \alpha s^i{}_0$ e $P-\overline{P}$ é dado em (4-61), assim

$$\alpha s^i{}_0 = \frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^m}y^i - G^i_\alpha, \tag{4-62}$$

onde $\alpha s^i{}_0 = \alpha s^i{}_j y^j = \sqrt{a_{ls}y^ly^s}(a^{ih}s_{hj}y^j)$.

Note que o lado direito de (4-62) é quadrático em y. Já que por (1-9) temos que $G^i_\alpha = \frac{1}{2}\overline{\Gamma}{}^{\,i}_{ns}y^ny^s$, onde $\overline{\Gamma}{}^{\,i}_{ns} = \frac{a^{il}}{2}\left(\frac{\partial a_{nl}}{\partial x^s} + \frac{\partial a_{sl}}{\partial x^n} - \frac{\partial a_{ns}}{\partial x^l}\right)$ então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}\left(\frac{1}{2}\overline{\Gamma}{}^{\,m}_{ns}y^ny^s\right)y^i - G^i_\alpha &= \frac{1}{2(n+1)}(\overline{\Gamma}{}^{\,m}_{ms}y^s + \overline{\Gamma}{}^{\,m}_{mn}y^n)y^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}{}^{\,i}_{ns}y^ny^s \\
&= \frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}{}^{\,m}_{mr}y^ry^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}{}^{\,i}_{ns}y^ny^s.
\end{aligned} \tag{4-63}$$

Desde que (4-62) é válida para todo y vamos supor que $y = \lambda w$ onde $\lambda < 0$ neste caso

$$\sqrt{a_{ls}\lambda y^l\lambda y^s}(a^{ih}s_{hj}\lambda y^j) = \frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}{}^{\,m}_{mr}\lambda y^r\lambda y^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}{}^{\,i}_{ns}\lambda y^n\lambda y^s,$$

equivalentemente

$$|\lambda|\lambda\sqrt{a_{ls}y^ly^s}(a^{ih}s_{hj}y^j) = \lambda^2\left[\frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}{}^{\,m}_{mr}y^ry^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}{}^{\,i}_{ns}y^ny^s\right],$$

ou

$$-\lambda^2\sqrt{a_{ls}y^ly^s}(a^{ih}s_{hj}y^j) = \lambda^2\left[\frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}_{mr}^{\ m}y^ry^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{ns}^{\ i}y^ny^s\right].$$

Multiplicando (4-62) por $-\lambda^2$ temos que

$$-\lambda^2\sqrt{a_{ls}y^ly^s}(a^{ih}s_{hj}y^j) = -\lambda^2\left[\frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}_{mr}^{\ m}y^ry^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{ns}^{\ i}y^ny^s\right]$$

e concluimos que

$$-\lambda^2\left[\frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}_{mr}^{\ m}y^ry^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{ns}^{\ i}y^ny^s\right] = \lambda^2\left[\frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}_{mr}^{\ m}y^ry^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{ns}^{\ i}y^ny^s\right].$$

Observe que isso só é possível se

$$\frac{1}{(n+1)}\overline{\Gamma}_{mr}^{\ m}y^ry^i - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{ns}^{\ i}y^ny^s = 0$$

e consequentemente

$$\alpha s^i_{\ 0} = 0.$$

Da primeira igualdade temos que α é projetivamente flat pois

$$G^i_\alpha = \frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^m}y^i$$

e da segunda temos que pois $s^i_{\ 0} = s^i_{\ j}y^j = a^{ih}s_{hj}y^j = 0$ e considerando y pertencente a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ que é uma base para T_pM temos que $a^{ih}s_{hj} = 0$ $\forall\, j$ fixado e portanto $0 = a_{il}a^{ih}s_{hj} = \delta_{hl}s_{hj} = s_{jl}$ e pela Proposição 1.5.3 temos que β é fechada.

A recíproca é imediata pois se α é projetivamente flat, $G^i_\alpha = y^iP$ e se β é fechada novamente pela Proposição 1.5.3 temos que $s_{ij} = 0$ e com isso $Q^i := \alpha s^i_{\ 0} = \alpha a^{ih}s_{hj}y^j = 0$, assim por (4-58) temos que $G^i = G^i_\alpha + \overline{P}y^i + Q^i = y^i(P+\overline{P})$ e portanto F é projetivamente flat.

Prova.

Lema 4.3.2 *Seja $F = \alpha + \beta$ uma métrica de Randers localmente dualmente flat em um variedade M. Suponha que $\alpha = \alpha(x,y)$ e $\beta = \beta(x,y)$ satisfazem a seguinte equação*

$$r_{00} = c(\alpha^2 - \beta^2) - 2\beta s_0, \tag{4-64}$$

onde $c = c(x)$ é uma função escalar em M. Então $F = F(x,y)$ é localmente projetivamente flat em um sistema de coordenadas adptado com coeficiente do spray $G^i = G^i(x,y)$ dado por $G^i = \frac{1}{2}cFy^i$.

Prova. Ultilizando as hipóteses do Lema 4.3.1 podemos reescrever $\overline{P}$ e G^i da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{e_{00}}{2F} - s_0 = \frac{e_{ij}y^iy^j}{2F} - s_0 \\
&= \frac{\left(r_{ij} + b_is_j + b_js_i\right)y^iy^j}{2F} - s_0 \\
&= \frac{r_{ij}y^iy^j + b_is_jy^iy^j + b_js_iy^iy^j}{2F} - s_0 \\
&= \frac{r_{00} + \beta s_0 + \beta s_0}{2F} - s_0 \\
&= \frac{r_{00} + 2\beta s_0}{2F} - s_0, \qquad (4\text{-}65)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
G^i &= G^i_\alpha + \overline{P}y^i + Q^i \\
&= G^i_\alpha + \frac{r_{00} + 2\beta s_0}{2F}y^i - s_0y^i + \alpha s^i{}_0, \qquad (4\text{-}66)
\end{aligned}$$

onde $G^i_\alpha = G^i_\alpha(x,y)$ denota os coeficientes do spray de α.

Provaremos que α é projetivamente flat em um sistema de coordenadas, isto é, $G^i_\alpha = P_\alpha y^i$ e β é fechada, ou seja $s_{ij} = 0$. Pelo Teorema 4.2.1, α e β satisfazem (4-6) a (4-8). Igualando (4-6) e (4-64) obtemos

$$\frac{2}{3}\theta\beta - \frac{5}{3}\tau\beta^2 + \left[\tau + \frac{2}{3}\left(\tau b^2 - b_m\theta^m\right)\right]\alpha^2 = c(\alpha^2 - \beta^2) - 2\beta s_0,$$

ou equivalentemente

$$\left[2s_0 + \frac{2}{3}\theta + \left(c - \frac{5}{3}\tau\right)\beta\right]\beta = \left[c - \tau - \frac{2}{3}\left(\tau b^2 - b_m\theta^m\right)\right]\alpha^2.$$

Desde que α não contém nenhum fator de β temos que $\beta\alpha^2$ (β não divide α), neste caso,

$$\beta \mid \left[c - \tau - \frac{2}{3}\left(\tau b^2 - b_m\theta^m\right)\right]$$

Recordando que $c = c(x)$, $\tau = \tau(x)$, $b_m = b_m(x)$ e $\theta_m = \theta_m(x)$ a divisão acima só é possível se

$$c - \tau - \frac{2}{3}\left(\tau b^2 - b_m\theta^m\right) = 0 \qquad (4\text{-}67)$$

e consequentemente,

$$2s_0 + \frac{2}{3}\theta + \left(c - \frac{5}{3}\tau\right)\beta = 0. \qquad (4\text{-}68)$$

De (4-7) temos
$$s_{k0}b^k = -\frac{\theta b_k b^k - \beta\theta_k b^k}{3},$$
e usando o fato que $s_0 := s_{k0}b^k$, $b^k b_k = b^2$ e $\theta_k b^k = b_m\theta^m$ pois, $\theta^k b_k = a^{ik}\theta_i b^s a_{sk} = \delta_{is}\theta_i b^s = \theta_s b^s$, obtemos
$$s_0 = -\frac{\theta b^2 - \beta b_m\theta^m}{3}. \tag{4-69}$$
Isolando s_0 em (4-68) e igualando a (4-69), segue que
$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\tau - c\right)\beta - \frac{1}{3}\theta = -\frac{\theta b^2 - \beta b_m\theta^m}{3},$$
ou
$$\tau\beta + \frac{2}{3}\tau\beta - \frac{2}{3}\tau\beta b^2 + \frac{2}{3}\tau\beta b^2 - c\beta - \frac{2}{3}\beta b_m\theta^m = -\frac{2}{3}\theta b^2 + \frac{2}{3}\theta,.$$
Equivalentemente
$$\frac{2}{3}(1-b^2)\theta = \frac{2}{3}(1-b^2)\tau\beta + [\tau - c + \frac{2}{3}(\tau b^2 - b_m\theta^m]\beta. \tag{4-70}$$

Substituindo (4-67) em (4-70) obtemos que $\theta = \tau\beta$. Como θ e β são 1-formas
$$\theta_k(x)dx^k(y) = \tau(x)b_k(x)dx^k(y),$$
ou equivalentemente
$$\theta_k(x)dx^k - \tau(x)b_k(x)dx^k = 0.$$
Considerando $\{dx^k\}$ é uma base de T_p^*M, temos $\theta_k = \tau b_k$.

Usando que $\theta_k = \tau b_k$ e $\theta_m b^m = \theta^l a_{lm} b^m = \theta^l b_l = b_m\theta^m = 0$ podemos mostrar que
$$\tau b^2 - b_m\theta^m = \tau b_m b^m - b_m\theta^m = \theta_m b^m - b_m\theta^m = 0.$$

Substituindo a igualdade acima em (4-67) obtemos que $c = \tau$.

Substituindo $\theta = \tau\beta$ e $\theta_k = \tau b_k$ em (4-7), temos
$$s_{k0} = -\frac{\theta b_k - \beta\theta_k}{3} = -\frac{\theta b_k - \beta\tau b_k}{3} = -\frac{b_k(\theta - \tau\beta)}{3} = 0.$$

Usando que $s_{k0} = 0$ temos que $s_0 = s_{k0}b^k = 0$ e podemos reduzir (4-64) à seguinte expressão $r_{00} = c(\alpha^2 - \beta^2)$. Usando ainda que $s_{k0} = 0$ provamos que $s^i{}_0 = s_{k0}a^{lk} = 0$ e que $s_{km}y^m = 0$, como a expressão acima vale para todo y vale em particular para um y pertecente a uma base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ de T_pM, neste caso, teremos $s_{km} = 0$ e pela Proposição 1.5.3 temos que β é fechada.

Substituíndo $\theta = \tau\beta$, $\tau = c$ e $\theta^k = \tau b^k$ em (4-8) obtemos

$$G^i_\alpha = \frac{1}{3}(2\tau\beta + \tau\beta)y^i = \tau\beta y^i = c\beta y^i, \tag{4-71}$$

com isso α é projetivamente flat em um sistema de coordenadas adaptado.

Pela proposição (4.3.2) temos que F é projetivamente flat. Usando os resultados acima obtidos em (4-66) obtemos que o coeficiente do spray de $F = \alpha + \beta$ é dado por

$$\begin{aligned} G^i &= G^i_\alpha + \frac{r_{00}}{2F}y^i \\ &= \frac{2c\beta(\alpha+\beta) + c(\alpha^2-\beta^2)}{2F}y^i \\ &= \frac{c(2\alpha\beta + \alpha^2 - \beta^2)}{2F}y^i \\ &= \frac{cF^2}{2F}y^i \\ &= \frac{cF}{2}y^i. \end{aligned} \tag{4-72}$$

Assim pela definição F é projetivamente flat num sistema de coordenadas adaptadas. □

O seguinte teorema encontrado em [25], será útil para a prova do Lema 4.3.3 e Teorema 4.3.4 a seguir.

Teorema 4.3.3 $F = \alpha + \beta$ *uma métrica de Randers em uma variedade M com curvatura flag quase isotrópica*

$$K = \frac{3\theta}{F} + \sigma(x) \tag{4-73}$$

onde $\theta = \lambda_i(x)y^i$ *é uma 1-forma e* $\sigma = \sigma(x)$ *é uma função escalar em M se, e somente se, a curvatura Riemanniana* $\overline{R}^i_{\ k}$ *de* $\alpha = \alpha(x,y)$ *e a derivada covariante de* $\beta = \beta(x,y)$ *satisfazem as seguintes equações:*

$$\overline{R}^i_{\ k} = k(\alpha^2\delta_{ik} - y_k y^i) + \alpha^2 t^i_{\ k} + t_{00}\delta_{ik} - t_{k0}y^i - t^i_{\ 0}y^k - 3s^i_{\ 0}s_{k0}. \tag{4-74}$$

$$s_{ij|k} = a_{ik}[(\delta+\overline{c}^2)b_j + 2\overline{c}s_j + t_j + 2\overline{c}_{x^j}] - a_{jk}[(\delta+\overline{c}^2)b_i + 2\overline{c}s_i + t_i + 2\overline{c}_{x^i}] \tag{4-75}$$

$$r_{ij} = -b_i s_j - b_j s_i + 2\overline{c}(a_{ij} - b_i b_j). \tag{4-76}$$

onde $\overline{c} = \overline{c}(x)$ *é uma função escalar em M e*

$$k = \delta - 2\overline{c}^2 + (\delta+\overline{c}^2)b^2 + t_m b^m + 2\overline{c}_{x^m}b^m. \tag{4-77}$$

Neste caso

$$\theta = \overline{c}_{x^m}y^m$$

e temos que $s_j := b^i s_{ij}$, $q_{ij} := r_{im}s^m_j$, $t_{ij} = s_{im}s^m_j$, $t_j = b^i t_{ij}$, $y_i = a_{ij}y^j$, $s_{k0} = s_{kl}y^l$, $t_{k0} = t_{kl}y^l$, $t_{00} = t_{kl}y^k y^l$, $s_0 = s_i y^i$, $s_j = b_i s^i{}_j$, $s^i{}_j = a^{ih}s_{hj}$, $t^i{}_j = a^{ih}t_{hj}$, $\beta = b_i y^i$.

Lema 4.3.3 *Se* $F = \alpha + \beta$ *é uma métrica de Randers localmente dualmente flat com curvatura flag quase isotrópica* $K = \dfrac{3c_{x^m}y^m}{F} + \sigma(x)$ *então ela é localmente projetivamente flat em um sistema de coordenadas adaptado, onde* $c = c(x)$ *é uma função escalar em* M.

Prova. Pelo teorema acima podemos escrever r_{00} como

$$\begin{aligned} r_{00} &= r_{ij}y^i y^j \\ &= [-b_i s_j - b_j s_i + 2\tilde{c}(a_{ij} - b_i b_j)]y^i y^j \\ &= -b_i y^i s_j y^j - b_j y^j s_i y^i + 2\tilde{c}(a_{ij}y^i y^j - b_i y^i b_j y^j) \\ &= -\beta s_0 - \beta s_0 + 2\tilde{c}(\alpha^2 - \beta^2) \\ &= 2\tilde{c}(\alpha^2 - \beta^2) - 2\beta s_0, \end{aligned}$$

assim usando o Lema 4.3.2 concluimos que F é projetivamente flat com coeficiente spray dado por $G^i = \tilde{c}y^i F$. □

Teorema 4.3.4 *Seja* $F = \alpha + \beta$ *uma métrica de Randers em uma variedade* M. F *é localmente dualmente flat com curvatura quase isotrópica se, e somente se, uma das seguintes afirmações é satisfeita*

1. F *é localmente Minkowskiana.*
2. $\alpha = \alpha(x,y)$ *localmente satisfaz a equação projetivamente flat de Hamel:* $\alpha_{x^m y^k}y^m = \alpha_{x^k}$ *com curvatura seccional constante* $K_\alpha = -C^2 < 0$ *e* $\beta = \beta(x,y)$ *e tal que* $\beta = \dfrac{\alpha_{x^m}y^m}{2C\alpha}$. *Neste caso* $F = \alpha + \beta$ *é localmente dualmente flat e localmente projetivamente flat com curvatura flag* $K = -\dfrac{1}{4}C^2$. *Para uma constante* $C \neq 0$.

Prova. Suponhamos primeiramente que $F = \alpha + \beta$ é uma métrica de Randers localmente dualmente flat com curvatura flag quase isotrópica. Então usando o Lema 4.3.3 temos que F é projetivamente flat e, portanto, pelo teorema 4.3.2 $F_{x^k} = CFF_{y^k}$, onde C é constante. Pela proposição 4.3.1 o coeficiente do spray de F é dado por $G^i = Py^i$, onde $P = \dfrac{1}{2}CF$ e F tem curvatura flag constante $K = -\dfrac{1}{4}C^2$.

Como F satisfaz $F_{x^k} = CFF_{y^k}$ satisfaz também $2FF_{x^k} = 2FCFF_{y^k} = 2FF_{y^k}C(\alpha+\beta)$, ou equivalentemente

$$2FF_{x^k} = 2FF_{y^k}C(\alpha+\beta). \tag{4-78}$$

Observando que $F^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ vamos derivar essa igualdade com respeito a x^k e depois com respeito a y^k:

$$\begin{aligned} 2FF_{x^k} &= \left[\alpha^2\right]_{x^k} + 2\alpha_{x^k}\beta + 2\alpha\beta_{x^k} + \left[\beta^2\right]_{x^k} \text{ e} \\ 2FF_{y^k} &= \left[\alpha^2\right]_{y^k} + 2\alpha_{y^k}\beta + 2\alpha\beta_{y^k} + \left[\beta^2\right]_{y^k}. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (4-78)

$$\begin{aligned} &\left[\alpha^2\right]_{x^k} + 2\alpha_{x^k}\beta + 2\alpha\beta_{x^k} + 2\beta\beta_{x^k} = C\alpha\left[\alpha^2\right]_{y^k} + C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k} + 2C\alpha\beta\alpha_{y^k} \\ &+2C\beta^2\alpha_{y^k} + 2C\alpha^2\beta_{y^k} + 2C\alpha\beta\beta_{y^k} + 2C\alpha\beta\beta_{y^k} + 2C\beta^2\beta_{y^k}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\left[\alpha^2\right]_{x^k} - 2C\alpha^2\beta_{y^k} - C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k} + \alpha(2\beta_{x^k} - C\left[\alpha^2\right]_{y^k} - 2C\beta b_k) \\ &+2\beta(\alpha_{x^k} + \beta_{x^k}) - 2\alpha\beta C(\alpha_{y^k} + \beta_{y^k}) - 2\beta^2 C(\alpha_{y^k} + \beta_{y^k}) = 0. \end{aligned} \tag{4-79}$$

Usando que $\beta = b_k(x)y^k$ e $F_{x^k} - CFF_{y^k} = 0$ temos que $2\beta(F_{x^k} - CFF_{y^k}) = 0$, com isso

$$\begin{aligned} 0 &= 2\beta(F_{x^k} - CFF_{y^k}) \\ &= 2\beta F_{x^k} - 2\beta CF_{y^k}(\alpha+\beta) \\ &= 2\beta F_{x^k} - 2\alpha\beta CF_{y^k} - 2\beta^2 CF_{y^k} \\ &= 2\beta(\alpha_{x^k} + \beta_{x^k}) - 2\alpha\beta C(\alpha_{y^k} + \beta_{y^k}) - 2\beta^2 C(\alpha_{y^k} + \beta_{y^k}). \end{aligned} \tag{4-80}$$

Usando (4-80) reduzimos (4-79) à seguinte expressão

$$\left[\alpha^2\right]_{x^k} - 2C\alpha^2\beta_{y^k} - C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k} + \alpha(2\beta_{x^k} - C\left[\alpha^2\right]_{y^k} - 2C\beta b_k) = 0, \tag{4-81}$$

Considerando $\{\alpha, 1\}$ uma base para os polinômios de grau menor ou igual a um, temos que isto é equivalente a duas equações:

$$\left[\alpha^2\right]_{x^k} = 2C\alpha^2\beta_{y^k} + C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k}, \tag{4-82}$$

$$2\beta_{x^k} = C\left[\alpha^2\right]_{y^k} + 2C\beta b_k. \tag{4-83}$$

De (4-82) $\alpha\alpha_{x^k} = \alpha(C\alpha b_k + C\beta\alpha_{y^k})$, ou

$$\alpha_{x^k} = C(\alpha\beta_{y^k} + \beta\alpha_{y^k}) = C(\alpha\beta)_{y^k}. \tag{4-84}$$

De (4-83) $2\beta_{x^k} = 2C\alpha\alpha_{y^k} + 2C\beta\beta_{y^k}$, ou

$$\beta_{x^k} = C(\alpha\alpha_{y^k} + \beta\beta_{y^k}). \tag{4-85}$$

Se $C = 0$ então $\alpha = \alpha(y)$ e $\beta = \beta(y)$ são independentes de x e $F = \alpha + \beta$ é uma Norma de Minkowski em uma vizinhança de um sistema de coordenadas.

Se $C \neq 0$ então de (4-84) temos que $\alpha_{x^m y^k} = C(\alpha_{y^k}\beta_{y^m} + \alpha\beta_{y^m y^k} + \beta_{y^k}\alpha_{y^m} + \beta\alpha_{y^m y^k})$. Utilizando o Teorema de Euler e o fato de que α e β são homôgeneas de grau 1 obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_{x^m y^k} y^m &= C(\alpha_{y^k}\beta_{y^m} y^m + \alpha\beta_{y^m y^k} y^m + \beta_{y^k}\alpha_{y^m} y^m + \beta\alpha_{y^m y^k} y^m) \\ &= C(\alpha_{y^k}\beta + \alpha\beta_{y^k}) \\ &= C(\alpha\beta)_{y^k} \\ &= \alpha_{x^k}. \end{aligned} \tag{4-86}$$

Como $\alpha_{x^k y^m} y^m = \alpha_{x^k}$, α é projetivamente flat com coeficientes spray $G^i_\alpha = y^i P_\alpha$, onde $P_\alpha = \dfrac{\alpha_{x^m} y^m}{2\alpha}$.

Por (4-85) β é fechada, isto é, $s_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial b_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial b_j}{\partial x^i}\right) = 0$, pois derivando (4-85) em relação a x^i obtemos

$$\beta_{x^k x^i} = C(\beta_{x^i}\beta_{y^k} + \beta\beta_{y^k x^i} + \alpha_{x^i}\alpha_{y^k} + \alpha\alpha_{y^k x^i}), \tag{4-87}$$

substituindo as expressões

$$\begin{aligned} \beta_{x^i}\beta_{y^k} &= C(\alpha\alpha_{y^i} + \beta\beta_{y^i})\beta_{y^k} \\ \beta\beta_{y^k x^i} &= \beta\frac{\partial b_k}{\partial x^i} \\ \alpha_{x^i}\alpha_{y^k} &= C(\alpha\beta_{y^i} + \beta\alpha_{y^i})\alpha_{y^k} \\ \alpha\alpha_{y^k x^i} &= \alpha C\left[\alpha\beta_{y^i} + \beta\alpha_{y^i}\right]_{y^k} \\ &= \alpha C(\alpha_{y^k}\beta_{y^i} + \alpha\beta_{y^i y^k} + \beta_{y^k}\alpha_{y^i} + \beta\alpha_{y^i y^k}) \end{aligned}$$

em (4-87), obtemos

$$\begin{aligned} \beta_{x^k x^i} = \; & C[C(\alpha\alpha_{y^i} + \beta\beta_{y^i})\beta_{y^k} + \beta\frac{\partial b_k}{\partial x^i} + C(\alpha\beta_{y^i} + \\ & + \beta\alpha_{y^i})\alpha_{y^k} + \alpha C(\alpha_{y^k}\beta_{y^i} + \alpha\beta_{y^i y^k} + \beta_{y^k}\alpha_{y^i} + \beta\alpha_{y^i y^k})], \end{aligned} \tag{4-88}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}\beta_{x^i x^k} &= C[C(\alpha\alpha_{y^k}+\beta\beta_{y^k})\beta_{y^i}+\beta\frac{\partial b_i}{\partial x^k}+C(\alpha\beta_{y^k}+ \\ &\quad +\beta\alpha_{y^k})\alpha_{y^i}+\alpha C(\alpha_{y^i}\beta_{y^k}+\alpha\beta_{y^k y^i}+\beta_{y^i}\alpha_{y^k}+\beta\alpha_{y^k y^i})].\end{aligned} \tag{4-89}$$

Subtraindo as expressões (4-88) e (4-89) temos que

$$0 = \beta_{x^k x^i}-\beta_{x^i x^k}=\beta\left(\frac{\partial b_k}{\partial x^i}-\frac{\partial b_i}{\partial x^k}\right)$$

e portanto β é fechada.

Segue diretamente da Proposição 4.3.2 o resultado de que α é localmente projetivamente flat e β é fechada.

Por (4-84) temos que $\beta = \dfrac{\alpha_{x^m}y^m}{2C\alpha}$ pois,

$$\begin{aligned}\alpha_{x^m} &= C(\alpha\beta_{y^m}+\beta\alpha_{y^m}) \\ \alpha_{x^m}y^m &= C(\alpha\beta_{y^m}y^m+\beta\alpha_{y^m}y^m)=C(\alpha\beta+\alpha\beta)=2C\alpha\beta.\end{aligned}$$

Assim

$$P_\alpha=\frac{\alpha_{x^m}y^m}{2\alpha}=\frac{2C\alpha\beta}{2\alpha}=C\beta$$

e de (4-85) temos que $\beta_{x^k}=C(\alpha\alpha_{y^k}+\beta\beta_{y^k})$. Neste caso

$$\begin{aligned}[P_\alpha]_{x^m}y^m &= C\beta_{x^m}y^m \\ &= C\left(\frac{C[\alpha^2]_{y^m}+2C\beta\beta_{y^m}}{2}\right) \\ &= C\left(\frac{C[\alpha^2]_{y^m}y^m+2C\beta\beta_{y^m}y^m}{2}\right) \\ &= C\left(\frac{2C\alpha^2+2C\beta^2}{2}\right) \\ &= C^2(\alpha^2+\beta^2).\end{aligned}$$

A curvatura seccional para métricas projetivamente flat foi obtida na Proposição 3.4.2 e é dada por (3-70),

$$\begin{aligned}K_\alpha &= \frac{(P_\alpha)^2-(P_\alpha)_{x^m}y^m}{\alpha^2} \\ &= \frac{C^2\beta^2-C^2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2} \\ &= -C^2.\end{aligned} \tag{4-90}$$

Reciprocamente, se $F=\alpha+\beta$ é localmente Minkowskiana então $\alpha=\alpha(y)$ e $\beta=\beta(y)$, assim $\alpha_{x^k}=0$, $\beta_{x^k}=0$ e portanto $\left[F^2\right]_{x^ky^l}y^k-2\left[F^2\right]_{x^l}=0$, pelo Lema 1.5.1 temos que F é localmente dualmente flat. Observe também que neste caso $F_{x^ky^l}y^k-F_{x^l}=0$, assim pelo Lema 1.5.2 temos que F é localmente projetivamente flat e pela Proposição 4.3.1 temos que $K=-\dfrac{C^2}{4}$, onde C é uma constante. Assim uma métrica de Minkowski é localmente dualmente flat com curvatura quase isotrópica.

Se α satisfaz a equação projetivamente flat de Hamel: $\alpha_{x^my^k}y^m=\alpha_{x^k}$, com $\beta=\dfrac{\alpha_{x^m}y^m}{2C\alpha}$ e $K_\alpha=-C^2<0$ então α tem curvatura quase isotrópica e valem as seguinte igualdades

1. $\alpha_{x^k}=C(\alpha\beta)_{y^k}=C(\alpha\beta_{y^k}+\beta\alpha_{y^k})$.
2. $\beta_{x^k}=C(\alpha\alpha_{y^k}+2\beta\beta_{y^k})$.

Para provar 1 basta isolar $\alpha_{x^m}y^m$ na expressão de β, deriva-la em relação a y^k e usar que $\alpha_{x^my^k}y^m=\alpha_{x^k}$, assim

$$2C(\alpha\beta)_{y^k}=\alpha_{x^my^k}y^m+\alpha_{x^k}=\alpha_{x^k}+\alpha_{x^k}=2\alpha_{x^k};$$

Para provar 2 basta verificar que se α satisfaz $\alpha_{x^my^k}y^m=\alpha_{x^k}$ então pela Proposição 3.4.2 sua curvatura seccional é dada por

$$K_\alpha=\frac{(P_\alpha)^2-(P_\alpha)_{x^k}y^k}{\alpha^2},$$

onde $P_\alpha=\dfrac{\alpha_{x^m}y^m}{2\alpha}$. Neste caso teremos que $P_\alpha=C\beta$ e

$$\frac{(C\beta)^2-(C\beta)_{x^k}y^k}{\alpha^2}=-C^2. \tag{4-91}$$

Isolando $(C\beta_{x^k})y^k$

$$(C\beta_{x^k})y^k=C\left(\frac{2C\alpha^2+2C\beta^2}{2}\right)=C\left(\frac{C[\alpha^2]_{y^k}y^k+C[\beta^2]_{y^k}y^k}{2}\right). \tag{4-92}$$

Considerando y pertencente a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ que é uma base para T_pM temos que para cada k fixado

$$2\beta_{x^k}=2C\left(\alpha\alpha_{y^k}+\beta\beta_{y^k}\right). \tag{4-93}$$

Agora vamos utilizar os itens anteriormente demostrados para obter que

$$\begin{aligned}\left[\alpha^2\right]_{x^k} &= 2\alpha\alpha_{x^k}\\ &= 2\alpha C(\alpha\beta_{y^k}+\beta\alpha_{y^k})\\ &= 2C\alpha^2\beta_k - C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k},\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\left[\alpha^2\right]_{x^k} - 2C\alpha^2\beta_{y^k} - C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k} = 0. \tag{4-94}$$

Temos também que

$$2\beta_{x^k} = 2C(\alpha\alpha_{y^k}+\beta\beta_{y^k}) = C\left[\alpha^2\right]_{y^k} + 2C\beta b_k,$$

ou equivalentemente

$$\alpha(2\beta_{x^k} - C\left[\alpha^2\right]_{y^k} - 2C\beta b_k) = 0. \tag{4-95}$$

Note que

$$\begin{aligned}2F(F_{x^k}-CFF_{y^k}) &= 2FF_{x^k} - 2F(CFF_{y^k})\\ &= [F^2]_{x^k} - CF[F^2]_{y^k}\\ &= [(\alpha+\beta)^2]_{x^k} - CF[(\alpha+\beta)^2]_{y^k}\\ &= \left[\alpha^2\right]_{x^k} + 2\alpha_{x^k}\beta + 2\alpha\beta_{x^k} + 2\beta\beta_{x^k} -\\ &\quad -C(\alpha+\beta)(\left[\alpha^2\right]_{y^k} + 2\alpha_{y^k}\beta + 2\alpha\beta_{y^k} + 2\beta\beta_{y^k}) \qquad (4\text{-}96)\\ &= \left[\alpha^2\right]_{x^k} + 2\alpha_{x^k}\beta + 2\alpha\beta_{x^k} + 2\beta\beta_{x^k} - C\alpha\left[\alpha^2\right]_{y^k} -\\ &\quad -2C\alpha\beta\alpha_{y^k} - 2C\alpha^2\beta_{y^k} - 2C\alpha\beta\beta_{y^k}) - C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k} -\\ &\quad -2C\beta^2\alpha_{y^k} - 2C\alpha\beta\beta_{y^k} - 2C\beta^2\beta_{y^k})\\ &= \left[\alpha^2\right]_{x^k} - 2C\alpha^2\beta_{y^k} - C\beta\left[\alpha^2\right]_{y^k} + \alpha(2\beta_{x^k} - C\left[\alpha^2\right]_{y^k} - 2C\beta b_k) +\\ &\quad +2\beta(\alpha_{x^k}+\beta_{x^k}) - 2C\alpha\beta(\alpha_{y^k}+\beta_{y^k}) - 2C\beta^2(\alpha_{y^k}+\beta_{y^k})\end{aligned}$$

Substituindo (4-94) e (4-95) em (4-96) obtemos

$$\begin{aligned}2F(F_{x^k}-CFF_{y^k}) &= 2\beta F_{x^k} - 2C\beta(\alpha F_{y^k} + \beta F_{y^k})\\ &= 2\beta F_{x^k} - 2C\beta F_{y^k}(\alpha+\beta)\\ &= 2\beta(F_{x^k} - CFF_{y^k}).\end{aligned}$$

Assim

$$2F(F_{x^k}-CFF_{y^k}) - 2\beta(F_{x^k}-CFF_{y^k}) = 2\alpha(F_{x^k}-CFF_{y^k}) = 0.$$

Como α é não nulo, $F_{x^k} = CFF_{y^k}$ e pelo Teorema 4.3.2 temos que F é localmente dualmente flat e projetivamente flat em U. Portanto a métrica considerada é localmente dualmente flat com curvatura quase isotrópica. $\square$

Há muitas métricas α que satisfazem a equação de Hamel com curvatura seccional constante, $K_\alpha = -C^2$ e $\beta = \dfrac{\alpha_{x^m} y^m}{2C\alpha}$.

Exemplo 4.3.2 *Se $C = \pm 1$ e*

$$\alpha = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}}{(1-|x|^2)}$$

então

$$\beta = \frac{\alpha_{x^m} y^m}{2C\alpha} = \overset{+}{-}\frac{\langle x,y\rangle}{(1-|x|^2)}$$

e $F = \alpha + \beta$ é a métrica de Funk na bola unitária $B^n \subset R$.

Prova. Vamos tomar

$$\Theta := \sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}.$$

Neste caso

$$\begin{aligned}
\alpha_{x^m} &= \frac{\left(-2x^m|y|^2 + 2\langle x,y\rangle y^m\right)\left(1-|x|^2\right) - (2\Theta)(-2x^m)\Theta}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2} \\
&= \frac{-2x^m|y|^2 + 2\langle x,y\rangle y^m + 2|x|^2x^m|y|^2 - 2|x|^2\langle x,y\rangle y^m + 2x^m\Theta^2}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2} \\
&= \frac{-2x^m|y|^2 + 2\langle x,y\rangle y^m + 2|x|^2x^m|y|^2 - 2|x|^2\langle x,y\rangle y^m}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2} \\
&+ \frac{2x^m|y|^2 - 2|x|^2x^m|y|^2 + 2\langle x,y\rangle x^m}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2} \\
&= \frac{2\langle x,y\rangle y^m - 2|x|^2\langle x,y\rangle y^m + 2\langle x,y\rangle x^m}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha_{x^m} y^m &= \frac{2\langle x,y\rangle y^m y^m - 2|x|^2\langle x,y\rangle y^m y^m + 2\langle x,y\rangle x^m y^m}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2} \\
&= \frac{2\langle x,y\rangle |y|^2 - 2|x|^2\langle x,y\rangle |y|^2 + 2(\langle x,y\rangle)^2\langle x,y\rangle}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2} \\
&= \frac{2\langle x,y\rangle\left(|y|^2 - 2|x|^2|y|^2 + (\langle x,y\rangle)^2\right)}{2\Theta\left(1-|x|^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Assim
$$\beta = \frac{\alpha_{x^m} y^m}{2C\alpha} = \left[\frac{2\langle x,y\rangle\,\Theta^2}{2\Theta\,(1-|x|^2)^2}\right]\left[\frac{(1-|x|^2)}{2(\pm)\Theta}\right] = (\pm)\left[\frac{\langle x,y\rangle}{(1-|x|^2)^2}\right].$$

□

A Geometria de Finsler e a Teoria dos Sprays são aplicadas em Geometria da informação. Quando impomos que o spray tenha a forma $G^i = -\frac{1}{2}g^{ij}H_{y^j}$, onde $H = H(x,y)$ é uma função escalar, obtemos as métricas localmente dualmente flat. Quando exigimos ainda que a curvatura flag seja quase-isotrópica obtemos as métricas localmente dualmente flat com curvatura flag quase-isotrópica. Tais métricas tem propriedades geométricas especiais e um importante papel na Geometria de Finsler. Nesta dissertação o estudo das estruturas de Finler, das formas diferenciais, da conexão de Chern, da curvatura flag e das métricas de Randers localmente projetivamente flat auxiliaram na compreensão da caracterização das métricas de Randers localmente dualmente flat e daquelas com curvatura flag quase-isotrópica.

Referências Bibliográficas

[1] Alkmim, C.; *Curvatura na Geometria de Finsler*. Dissertaçao, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2003.

[2] Amari, A. S.; *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Springer Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, 1985.

[3] Amari, A. S.; Nagaoka, H.; *Methods of Information Geometry*, AMS Translation of Math. Monografs, Oxford University Press, 2000.

[4] Antonelli, P.L.; Ingarden, R.S.; Matsumoto, M.; *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, FTPH 58, Kluwer Academic Publisher, 1993.

[5] Bàcsó, S.; Shen, Z.; Cheng, X.; *Curvature properties of* (α, β)*-metrics.*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Math. Soc. of Japan, 48, 2007.

[6] Bàcsó, S.; Matsumoto, M.; *On Finsler Spaces of Douglas type 2. Projectively flat spaces*, Publ. Math. Debrecen, 1998, 423-438.

[7] Bao, D.; Chern, S.S.; Shen, Z.; *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 200, Springer-Verlag, New York, Inc., 2000.

[8] Bao, D.; Robles, C.; *On Randers spaces of constant flag curvature*, Rep. on Math. Phys, 762-780.

[9] Boyer, C. B.; *História da Matemática*, Tradução: Elza Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.

[10] Cheng, X.; Shen, Z.; Zhou, Y.; *On a Class of Locally Dually Flat Finsler Metrics* , submitted to IJM.

[11] Cheng, X. Mo e Shen, Z.; *On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvature*, J. London Math., 2003, 9-42.

[12] do Carmo, M.P.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[13] do Carmo, M. P.; *Formas diferenciáveis e Aplicações*, Monografias de Matemática $n^{\underline{o}}$ 37, 8° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[14] do Carmo, M.P.; *Geometria Riemannina*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988, $2^{\underline{a}}$ edição.

[15] do Carmo, M.P.; *O Método do Referencial Móvel*, Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[16] Tenenblat, K.; *Introdução à Geometria Diferencial*, Editora da Unb, Brasília, 1998.

[17] I.N. Herstein, John wiley & Sons,; *Topics in Álgebra*, 2nd edition, June 1975.

[18] Lima, E. L.; *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2000, $4^{\underline{a}}$ edição.

[19] Lima, E. L.; *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$, Editora da Unb, Brasília, 1970.

[20] Shen, Z.; Chern, S. S.; *Riemann Finsler Geometry*, Word Scientific, Nankai Tracts in Mathematics, Volume 6.

[21] Shen, Z.; Cheng, X.; *Randers metrics with special curvature properties*, Osaka J. Math., 2003, 87-101.

[22] Shen, Z.; *Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry*, Chin. Ann. Math., 2006, 73-84.

[23] Shen, Z.; *Differential Geometry of Spray and Finsler Space*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[24] Shen, Z.; *Projectively flat Randers metrics of constant flag curvature*, Math. Ann., 2003, 19-30.

[25] Shen, Z.; Yildirim, G. C.; *A characterization of Randers metrics of scalar flag curvature*, preprint. submitted to the Journal of London Mathematical Society.

[26] Shen, Z.; *Curvature, distance and volume in Finsler geometry*, unpublished.

[27] Yasuda, H. Shimada, H.; *On Randers spaces of scalar curvature*, Rep. on Math. Phys. 11(1977), 347-360.

Apêndice

Aneis de Polinômios em n variáveis

Vamos recordar alguns fatos de álgebra abstrata, uma análise mais detalhada pode ser encontrada em [17].

1. Seja R um anel comutativo com elemento unidade, $R[y] = R[y^1, \cdots, y^n]$ conhecido como anel de polinômios nas n variáveis $y^1, \cdots, y^n$ sobre R é também um anel comutativo com elemento unidade. Quando R é um corpo F, obtemos o anel de polinômios em n variáveis sobre um corpo. Neste trabalho consideraremos os polinômios nas variáveis $y^1, \cdots, y^n$ sobre o corpo dos números reais;

2. R é um anel de integridade se é um anel comutativo e não possui divisores de zero, neste caso $R[y]$ também será um anel de integridade. Particularmente quando F é um corpo $F[y]$ é um anel de integridade, assim podemos construir seu corpo de frações; que é denominado o corpo das funções racionais em $y^1, \cdots, y^n$ sobre F;

3. Um elemento $f(y)$ que não é uma unidade em $R[y]$ é denominado irredutível (ou elemento primo) se sempre que $f(y) = g(y)h(y)$ com $g(y)$ e $h(y) \in R[y]$, então $g(y)$ ou $h(y)$ é uma unidade em $R[y]$.

   (a) $(\alpha^2 - \beta^2)$ é um polinômio irredutível de y^i. Para provar isso vamos considerar dimensão dois, proceder como na Proposição 1.5.1 e considerar a forma normal de $(\alpha^2 - \beta^2)$ como

   $$(\alpha^2 - \beta^2) = (y^1)^2 + (y^2)^2 - b^2(y^2)^2 \;\; \forall y = y^i e_i \; \in \; T_xM,$$

   onde $0 \leq b = \sqrt{a^{ij}b_ib_j} < 1$ é a norma (1-4) da 1-forma β. Como $(\alpha^2 - \beta^2)$ é quadrático, se ele não é irredutível, pode ser escrito como $(\alpha^2 - \beta^2) = A.B$, onde $A = A_iy^i$ e $B = B_iy^i$ mais essa igualdade so é possível se $A_1B_1 = 1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = 0$ e $A_2B_2 = 1$. Entretanto as igualdadades acima geram uma inconsistência, pois se $A_1B_1 = 1$ e $A_2B_2 = 1$ então A_1, A_2, B_1 e B_2 são não nulos e não podemos ter $A_2B_1 = A_1B_2 = 0$. Portanto $(\alpha^2 - \beta^2)$ é irredutível;

(b) Analogamente $(\alpha^2 b^2 - \beta^2)$ e α^2 são polinômios irredutíveis de y^i;

4. Dois elementos $f(y)$ e $g(y)$ em $R[y]$ são primos entre si (ou relativamente primos) se seu máximo divisor comum é uma unidade em $R[y]$.

   (a) Como α^2 e $\alpha^2 - \beta^2$ são irredutíveis então seu máximo divisor não pode ser da forma $D = D_i y^i$ e nem pode ser quadrático porque $\alpha^2 \neq \alpha^2 - \beta^2$, neste caso seu máximo divisor comum será uma unidade e eles serão primos entre si;

5. Um anel de integridade R, com elemento unidade, é um anel fatorial se todo elemento não nulo de R pode ser escrito como produto de um número finito de elementos irredutíveis de R e se essa decomposição é única a menos da ordem e de associados dos elementos irredutíveis;

6. Seja $R[y]$ é um anel fatorial, se $f(y)$, $g(y)$ e $h(y) \in R[y]$ e se $f(y)$ é um elemento irredutível que divide $g(y)h(y)$ então $f(y)$ divide $g(y)$ ou $f(y)$ divide $h(y)$.

Distorção e S-curvatura

Em [11], [21], [20] e [23], encontramos estudos sobre uma quantidade não Riemanniana na Geometria de Finsler, a S-Curvatura. Para defini-la vamos fazer algumas considerações. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $\overline{F} = \overline{F}(y)$ a norma de Minkowski em V. Fixe uma base (b_i) para V e seja

$$\sigma_F := \frac{Vol(B^n)}{Vol\{(y^i) \in \mathbb{R}^n \mid F(y^i b_i) < 1\}}, \tag{4-97}$$

usando σ_F defina uma n-forma em V por

$$dV_{\overline{F}} := \sigma_F \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n \tag{4-98}$$

onde (θ^i) é uma base de V^*, dual de V. Se $\overline{F}$ é uma norma de Minkowski,

$$g_{ij}(y) := \frac{1}{2}\left[F^2(y)\right]_{y^i y^j} \tag{4-99}$$

depende de y e $\sigma_F \neq \sqrt{\det g_{ij}(y)}$, em geral.

Defina

$$\tau := \ln \frac{\sqrt{\det g_{ij}(y)}}{\sigma_F}, \tag{4-100}$$

$\tau = \tau(y)$ é chamada *distorção* de $\overline{F}$.

Seja agora F uma métrica de Finsler em uma variedade M. Desde que a distorção é definida para uma norma de Minkowski F_x em todo T_xM, obtemos a função escalar $\tau = \tau(x,y)$ em $TM\backslash\{0\}$ a qual é chamada de distorção de F. É natural estudar a taxa de distorção ao longo de geodésicas. Para um vetor $y \in T_xM\backslash\{0\}$, seja $\sigma = \sigma(t)$ uma geodésica com $\sigma(0) = x$ e $\dot{\sigma}(0) = y$. Seja

$$S(x,y) := \frac{d}{dt}\left[\tau(\sigma(t),\dot{\sigma(t)})\right]|_{t=0}, \tag{4-101}$$

$S = S(x,y)$ é chamada de *S-curvatura*.

A S-curvatura é uma importante quantidade não Riemannina da geometria de Finsler, diremos que a métrica de Finsler tem S-curvatura isotrópica se $S = (n+1)cF$, onde $c = c(x)$ é uma função escalar. Em [21] encontramos o seguinte lema que caracteriza as métricas de Randers com S-curvatura isotrópica.

Lema 4.3.4 *A métrica de Randers $F = \alpha + \beta$ tem S-curvatura isotrópica, $S = (n+1)c(x)F$, se, e somente se, satisfaz $r_{00} = c(x)(\alpha^2 - \beta^2) - 2\beta s_0$, onde $\alpha = \alpha(x,y)$ e $\beta = \beta(x,y)$.*