



UFG

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rafael Marlon de Novais

Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfícies Tipo- T -Einstein

Goiânia
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Rafael Marlon de Novais

3. Título do trabalho

Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfícies Tipo-T-Einstein

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 16/05/2023, às 09:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Marlon De Novais, Discente**, em 16/05/2023, às 10:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3751597** e o código CRC **21927991**.

Rafael Marlon de Novais

Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfícies Tipo- T -Einstein

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de DOUTOR EM MATEMÁTICA.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro

Goiânia
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Novais, Rafael Marlon de
Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfícies Tipo-T-Einstein
[manuscrito] / Rafael Marlon de Novais. - 2023.
105 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Benedito Leandro Neto.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2023.

Bibliografia.

Inclui siglas, símbolos, gráfico, tabelas.

1. Fluxo de Curvatura Média. 2. Fluxo Redutor de Curvas. 3. Auto
similar. 4. Tipo-Einstein. 5. Hipersuperfícies de Rotação. I. Neto,
Benedito Leandro, orient. II. Título.

CDU 514.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº **05** da sessão de Defesa de Tese de **Rafael Marlon de Novais**, que confere o título de Doutor em Matemática, na área de concentração de Geometria.

Ao décimo segundo dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte e três, a partir das dez horas, via Web videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada "**Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfícies Tipo-T-Einstein.**" Os trabalhos foram instalados pelo Orientador e Presidente da banca, Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Hiuri Fellipe Santos dos Reis - IME/UFG** - membro titular interno, Professor Doutor **João Paulo dos Santos - MAT/UnB** - membro titular externo, Professor Doutor **Fernando Manfio ICMC/USP-São Carlos** membro titular externo e o Professor Doutor **Valter Borges Sampaio Júnior ICEN/FACMAT/UFPA**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido o candidato **APROVADO** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, Ao décimo segundo dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfícies Tipo-T-Einstein



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 15/05/2023, às 14:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Hiuri Fellipe Santos Dos Reis, Professor do Magistério Superior**, em 15/05/2023, às 14:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valter Borges Sampaio Junior, Usuário Externo**, em 15/05/2023, às 15:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Manfio, Usuário Externo**, em 15/05/2023, às 23:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Paulo dos Santos, Usuário Externo**, em 16/05/2023, às 19:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3681049** e o código CRC **77850554**.

Referência: Processo nº 23070.021525/2023-55

SEI nº 3681049

Aos meus pais, Baiano e Fia, e ao meu irmão Heitor.

"Memento mori."

Fluxo de Curvatura Média e Hipersuperfícies Tipo- T -Einstein

Rafael Marlon de Novais

Resumo

Fazemos uma análise das soluções auto-similares do Fluxo de Curvatura Média (FCM) por superfícies regradadas e de revolução em \mathbb{R}^3 . Provamos que as soluções por movimento homotético helicoidal cuja condição inicial é uma superfície regradada não cilíndrica devem ser triviais. No caso em que a condição inicial é uma superfícies de revolução, caracterizamos as soluções em termos da curvatura da curva geratriz.

Caracterizamos as soluções soliton do Fluxo Redutor de Curvas (FRC) no toro de revolução $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mostramos que as soluções devem ser assintóticas aos equadores do toro. Além disso, generalizamos este resultado para as superfícies de revolução em \mathbb{R}^3 .

Por fim, provamos que uma classe de hipersuperfícies tipo-Einstein em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ são hipersuperfícies de rotação ou totalmente umbílicas.

Palavras-chave: Fluxo de Curvatura Média; Fluxo Redutor de Curvas; auto-similar; soliton; tipo-Einstein; hipersuperfícies de rotação.

Mean Curvature Flow and T -Einstein-type hypersurfaces

Rafael Marlon de Novais

Abstract

We present an analysis of the self-similar solutions of Mean Curvature Flow (MCF) by ruled and revolution surfaces in \mathbb{R}^3 . We prove that homothetic helicoidal motion solutions whose initial condition is a non-cylindrical ruled surface must be trivial. When the initial condition is a surface of revolution, we characterize the solutions in terms of the curvature of the generatrix curve.

We characterize the curve shortening flow (CSF) soliton solutions on the torus of revolution $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$. We show that the solutions must be asymptotic to the equators of the torus. Furthermore, we generalize this result to surfaces of revolution in \mathbb{R}^3 .

Finally, we prove that a class of Einstein-type hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ are rotational or totally umbilical hypersurfaces.

Keywords: Mean curvature flow; curve shortening flow; self-similar; soliton; Einstein-type; rotation hypersurface.

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	16
1.1 Geometria diferencial de superfícies	16
1.1.1 Produto vetorial em \mathbb{R}^3	17
1.1.2 Superfícies de revolução em \mathbb{R}^3	18
1.1.3 Toro \mathbb{T}^2	19
1.1.4 Superfícies regradas em \mathbb{R}^3	24
1.2 Fluxo de Curvatura Média	26
1.3 Imersões Isométricas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	27
1.3.1 Hipersuperfícies de Rotação	29
1.4 Hipersuperfícies Isoparamétricas	31
1.5 Variedades Tipo-Einstein	32
2 Soluções Auto-similares para o FCM em \mathbb{R}^3	33
2.1 Soluções auto-similares para o FCM em superfícies regradas	33
2.1.1 Soluções auto-similares para o FCM em superfícies cilíndricas	45
2.2 Soluções auto-similares para o FCM em superfícies de revolução	48
2.3 Exemplos	50
2.3.1 FCM por superfícies de revolução	50
2.3.2 FCM por superfícies cilíndricas	53
3 Soluções Soliton para o FRC em algumas superfícies de \mathbb{R}^3	57
3.1 Fluxo Redutor de Curvas em \mathbb{T}^2	57
3.1.1 Soluções soliton para o FRC no toro \mathbb{T}^2	59
3.1.2 Exemplos	69
3.2 Fluxo Redutor de Curvas em superfícies de revolução	72
3.2.1 Soluções soliton para o FRC nas superfícies de revolução	74
3.2.2 Soluções soliton para o FRC no catenoide	82
3.2.3 Soluções soliton para o FRC no cilindro	83

4	Hipersuperfícies Tipo-T-Einstein	89
4.1	Hipersuperfícies tipo-Einstein em $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	90
4.2	Exemplos	100

Introdução

Neste trabalho, estudaremos soluções auto-similares e solitons do Fluxo de Curvatura Média (FCM) e hipersuperfícies tipo-Einstein nos espaços produtos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Primeiramente, discutiremos o FCM e, em seguida, trataremos sobre as variedades tipo-Einstein.

O FCM é uma equação de evolução geométrica para hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma família de hipersuperfícies evolui pela curvatura média se a cada instante um ponto qualquer dessa família está se deformando com velocidade, na direção normal, igual a uma função da curvatura média nesse ponto. O Fluxo Redutor de Curvas (FRC), é uma versão do FCM, onde trocamos as hipersuperfícies por curvas, pois esse fluxo é estudado em variedades Riemannianas de dimensão dois. Para o FRC é considerada a curvatura geodésica.

Naturalmente, hipersuperfícies mínimas são soluções triviais para o FCM pois elas não se movem (velocidade normal igual a zero). No caso do FRC as soluções triviais são as curvas geodésicas.

As soluções do fluxo podem ser classificadas como auto-similares quando estas evoluem por movimentos dados por isometrias e homotetias. As soluções auto-similares do FCM estão intimamente relacionadas com as singularidades do fluxo. Em [10] podemos encontrar vários resultados a respeito das singularidades, assim como nas referências citadas no mesmo. À medida em que se aumenta a dimensão, a classificação assim como a exibição de soluções exatas fica cada vez mais difícil. Podemos ver um pouco nos trabalhos [9, 10, 27, 28].

Em [9], as soluções do FCM por superfícies regradas no grupo de Heisenberg foram caracterizadas, além disso alguns exemplos explícitos foram apresentados.

Para o caso particular do FRC, em [19, 21], Halldorsson forneceu uma classificação completa para todas as soluções auto-similares do fluxo no plano Euclidiano e no plano de Minkowski, respectivamente.

Dentre as soluções auto-similares existem os solitons, que são soluções sob a ação de grupos de isometrias. Essas soluções aparecem como explosões das singularidades do fluxo (para mais detalhes veja [22, Seção 1]). Em [28], Tenenblat e dos Reis classificaram as soluções soliton do FRC na esfera. Em Tenenblat e da Silva [11] classificaram as soluções soliton do FRC no espaço hiperbólico. Algumas soluções explícitas para o FRC no cone de luz foram apresentadas em [11]. Um exemplo bem conhecido de solução soliton do FRC é a curva *Grim Reaper*, que é dada pelo gráfico da função $f(x) = -\ln \cos(x)$ para $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

O estudo desse tipo de fluxo aparece na modelagem de fenômenos físicos tais como propagação de chamas e crescimento de cristais. Outras áreas interessantes em que o fluxo vem sendo utilizado são no processo de criação de modelos digitais em $3D$ e no processamento de imagens.

Em [3], os autores abordam alguns tópicos da disciplina de processamento de geometria digital, que se trata de um ramo da ciência da computação que aborda modelos matemáticos e algoritmos para análise e manipulação de dados geométricos. Em [3, Capítulo 4] são discutidos técnicas e algoritmos para suavização de ruídos em superfícies digitalizadas, que é onde o FCM aparece como uma alternativa. Em [13], os autores propõem um algoritmo para remoção de ruído usando fluxo de curvatura. Além disso, os autores discutem as vantagens de usar o FCM em vez de usar a difusão. Basicamente, essa vantagem se dá pela não dependência da parametrização e por utilizar apenas propriedades intrínsecas da superfície.

No processamento de imagens o FRC é utilizado com a finalidade de suavizar e filtrar curvas que representam os contornos dos objetos de modo que sejam eliminadas pequenas oscilações sem que a forma global dos contornos sejam alteradas. Em [2], é feita uma revisão dos algoritmos mais comumente utilizados no processo de suavização e filtragem de imagens, além de apresentar uma solução numérica para movimentos por curvatura com essa finalidade.

O estudo da estrutura de uma hipersuperfície imersa em um espaço ambiente diferente do Euclidiano é bastante explorada dentro da geometria. Tentativas de aprofundar o conhecimento sobre as características geométricas como curvaturas principais e curvatura média de hipersuperfícies em espaços diferentes do Euclidiano é recorrente (como em [15] e as referências ali mencionadas). Recentemente, passou-se a considerar também espaços mais abstratos, como as variedades de produto torcido (e em particular as variedades de produto).

Nos produtos $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, Daniel apresentou, em [12], condições necessárias e suficientes a fim de que um variedade Riemanniana possa ser imersa isometricamente. E uma classificação completa de suas hipersuperfícies, com curvatura seccional constante e $n \geq 3$ foi apresentada em [25] por Manfio e Tojeiro. Mais ainda, os autores mostraram que essas hipersuperfícies devem ser de rotação, se $n > 3$. Quando $n = 3$ são de rotação ou são construídas sobre superfícies planas, ou sobre S^3 , ou sobre \mathbb{H}^3 .

A definição de hipersuperfícies de rotação nos espaços produto $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ foi apresentada em [14] por Dillen, Fastenakels e Veken onde os autores fazem uma adaptação para esses espaços do trabalho [15], no qual do Carmo e Dajczer estendem a noção clássica de superfícies de rotação no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 para os espaços \mathbb{R}^{n+1} , S^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1} em dimensões maiores.

Segundo o que foi apresentado em [24], Leandro, Pina e Dos Santos mostraram que hipersuperfícies de Einstein em $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, com $n > 3$, possuem curvatura seccional constante. Com base nisso e nos resultados apresentados em [25], pode-se concluir que essas hipersuperfícies também são superfícies de rotação quando $n > 3$ e em alguns casos quando $n = 3$. O presente trabalho busca estender essas descobertas a outras estruturas geométricas

mais gerais, as variedades *tipo-Einstein*.

O conceito de variedade tipo-Einstein foi apresentado em [6] por Catino et al. com o propósito de unificar várias outras estruturas geométricas que vem sendo amplamente estudadas na literatura tais como solitons de Ricci, solitons de Yamabe e variedades quasi-Einstein. Uma variedade (M^n, g) , com dimensão $n \geq 3$, é *tipo-Einstein* se existe um campo V sobre M^n de modo que

$$\alpha \text{Ric} + \frac{\beta}{2} \mathcal{L}_V g + \gamma V^b \otimes V^b = \sigma g,$$

para constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ e σ uma aplicação diferenciável sobre M^n . Aqui, $V^b(\cdot) = g(V, \cdot)$ representa a 1-forma metricamente dual de V , \mathcal{L}_V é a derivada de Lie da métrica g com respeito a V e Ric representa o tensor de Ricci com respeito a métrica g .

Tomando os parâmetros $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ e considerando a função σ constante, recuperamos a equação de estrutura de uma variedade de Einstein, isto é,

$$\text{Ric} = \sigma g.$$

A métrica de Einstein aparece na literatura como ponto crítico do funcional de Einstein-Hilbert (para mais detalhes veja [1]).

Os solitons de Ricci são uma generalização natural para as variedades de Einstein. Basta considerarmos na definição de tipo-Einstein os parâmetros $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0$ e a função $\sigma \in \mathbb{R}$ para obtermos

$$\text{Ric} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_V g = \sigma g.$$

Os solitons de Ricci são soluções do fluxo de Ricci, o qual exerce um papel relevante na demonstração da conjectura de Poincaré (para mais detalhes consultar [4] e as fontes ali mencionadas).

Voltando na definição de tipo-Einstein e tomando os parâmetros $\alpha = \gamma = 0, \beta = 1$ e a função $\sigma = \mathcal{R} - c$, onde \mathcal{R} representa a curvatura escalar e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, obtemos a equação de estrutura dos solitons de Yamabe:

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_V g = (\mathcal{R} - c)g.$$

Os solitons de Yamabe são soluções do fluxo de Yamabe, que por sua vez foi introduzido com a finalidade de resolver o problema de Yamabe, que trata da existência de métricas Riemannianas de curvatura escalar constante.

No Capítulo 2, faremos uma análise das soluções auto-similares para o FCM em \mathbb{R}^3 . Para tal, propomos o conceito de movimento homotético helicoidal, que é em particular uma solução auto-similar. Em [20], Halldorsson faz uma análise das soluções auto-similares do fluxo tomando como condição inicial superfícies helicoidais. Aqui, iremos considerar como condição inicial superfícies regradas e superfícies de rotação. Vamos provar que as soluções do FCM por movimento homotético helicoidal em que a condição inicial é uma superfície regradada devem

ser triviais. No caso em que a condição inicial é uma superfícies de rotação apresentamos uma caracterização para a curvatura da curva geratriz. Além disso, soluções numéricas para este caso serão apresentadas.

O FRC será abordado no Capítulo 3. Na Seção 3.1 apresentamos uma caracterização das soluções soliton no toro de revolução de \mathbb{R}^3 . Mostraremos que as soluções devem ser assintóticas aos equadores do toro. Além disso, vamos mostrar que as soluções que são curvas simples e fechadas não podem separar o toro em duas regiões simplesmente conexas. Também fornecemos um sistema de equações diferenciais das soluções soliton do fluxo no toro. Utilizamos esse sistema para plotar algumas soluções numéricas.

Na Seção 3.2 generalizamos o que foi feito na Seção 3.1 para superfícies de revolução. Mostraremos que as soluções soliton do FRC nas superfícies de rotação devem ser assintóticas aos paralelos que são geodésicas. Além de fornecer um um sistema de equações diferenciais das soluções soliton do fluxo nas superfícies de revolução.

E por fim, o Capítulo 4 está reservado para o estudo das variedades tipo-Einstein. Mostraremos que uma classe de hipersuperfícies tipo-Einstein em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ são hipersuperfícies de rotação ou são totalmente umbílicas. Ao longo do capítulo veremos como os valores dos parâmetros α , β e γ afetam a classificação dessas hipersuperfícies. Terminamos mostrando um exemplo de hipersuperfície tipo-Einstein que é de rotação.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo apresentar conceitos básicos que são fundamentais para o desenvolvimento do texto. No que se segue, serão apresentadas definições, resultados gerais e iremos fixar a notação que será utilizada ao longo do trabalho.

1.1 Geometria diferencial de superfícies

Nos capítulos 2 e 3, serão estudados o Fluxo de Curvatura Média, tendo como espaço ambiente o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Para isso, utilizaremos conceitos da geometria de \mathbb{R}^3 e de algumas de suas superfícies.

Os conceitos apresentados nessa seção, assim como as demonstrações omitidas podem ser consultados em [17].

Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em M . Considere N o campo normal unitário de M , $T = \alpha'$ e $V = N \wedge T$. O referencial ortonormal $\{N, T, V\}$ é denotado *Triedro de Darboux* e satisfaz as seguintes equações:

$$T' = \kappa_g V + \kappa_n N; \quad V' = -\kappa_g T + \tau_g N; \quad N' = -\kappa_n T - \tau_g V. \quad (1.1)$$

Aqui, κ_g , κ_n e τ_g são, respectivamente, a curvatura geodésica, curvatura normal e torção geodésica de α . Tais equações são denominadas *Equações de Darboux*.

Seja $X(u, v)$ uma superfície de \mathbb{R}^3 . Uma curva regular $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é uma geodésica de X se, e somente, se satisfaz o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}; & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}; & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}; \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}; & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}; & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

Onde usamos a notação E, F, G para representar os coeficientes da primeira forma fundamental.

1.1.1 Produto vetorial em \mathbb{R}^3

Em \mathbb{R}^3 , considere a base canônica

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$, definimos o produto vetorial de u e v como sendo o único vetor $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $w \in \mathbb{R}^3$, tem-se que

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w),$$

onde

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

com $u = \sum u_i e_i, v = \sum v_i e_i$ e $w = \sum w_i e_i$.

Algumas propriedades do produto vetorial:

- $u \wedge v = -v \wedge u$.
- $u \wedge v = 0$ se, somente, se u e v são linearmente dependentes.
- $\langle u \wedge v, u \rangle = \langle u \wedge v, v \rangle = 0$.
- $(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \wedge w = \lambda_1 u \wedge w + \lambda_2 v \wedge w$, para quaisquer λ_1 e λ_2 reais.
- $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.

Se $u(s) = (u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ e $v(s) = (v_1(s), v_2(s), v_3(s))$ são aplicações diferenciáveis em \mathbb{R}^3 , então $u(s) \wedge v(s)$ também é diferenciável. Além disso, vale

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = \frac{d}{dt}(u(t)) \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{d}{dt}(v(t)).$$

1.1.2 Superfícies de revolução em \mathbb{R}^3

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 em torno do eixo z com curva geratriz $\alpha(v) = (\phi(v), 0, \psi(v))$ tal que $\phi(v) > 0$. Então, X pode ser parametrizada por

$$X(u, v) = (\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v)), \quad (1.3)$$

onde ϕ e ψ são funções diferenciáveis, com v em algum intervalo de \mathbb{R} e $0 < u < 2\pi$.

Observação. Existem casos em que a curva geratriz de certas superfícies intercepta o eixo de rotação, como ocorre nas esferas e nos paraboloides, por exemplo. Nessas circunstâncias, para os pontos tais que $\phi(v_0) = 0$ devemos ter $\phi'(v_0) = 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} X_u &= (-\phi(v) \sin(u), \phi(v) \cos(u), 0); \\ X_v &= (\phi'(v) \cos(u), \phi'(v) \sin(u), \psi'(v)); \\ |\alpha'(v)| &= \sqrt{(\phi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}. \end{aligned}$$

Um campo normal unitário em X é dado por

$$N(u, v) = \frac{1}{|\alpha'(v)|} (\psi'(v) \cos u, \psi'(v) \sin u, -\phi'(v)). \quad (1.4)$$

A partir de um cálculo direto, obtemos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais.

$$\begin{aligned} E &= \phi^2; & F &= 0; & G &= |\alpha'|^2; \\ e &= -\frac{\phi\psi'}{|\alpha'|}; & f &= 0; & g &= \frac{\phi''\psi' - \phi'\psi''}{|\alpha'|}. \end{aligned}$$

Sendo assim, as curvaturas gaussianas e média são dadas, respectivamente, por:

$$K = -\frac{\psi'(\phi''\psi' - \phi'\psi'')}{\phi|\alpha'|^4}$$

e

$$H = \frac{\phi(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \psi'|\alpha'|^2}{2\phi|\alpha'|^3}. \quad (1.5)$$

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0; & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\phi'}{\phi}; & \Gamma_{22}^1 &= 0; \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{\phi\phi'}{|\alpha'|^2}; & \Gamma_{12}^2 &= 0; & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^2}. \end{aligned}$$

Substituindo os símbolos de Christoffel no sistema (1.2) temos que o sistema de equações diferenciais das geodésicas de uma superfície de revolução é dado por

$$\begin{cases} u'' + \frac{2\phi\phi'}{\phi^2}u'v' = 0; \\ v'' - \frac{\phi\phi'}{|\alpha'|^2}(u')^2 + \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^2}(v')^2 = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

1.1.3 Toro \mathbb{T}^2

O toro \mathbb{T}^2 é uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 obtida quando a curva geratriz é um círculo $\alpha(u) = (R+r \cos u, 0, r \sin u)$ de raio r , centrado em $(R, 0, 0)$ com $R > r$. Uma parametrização para o toro \mathbb{T}^2 em \mathbb{R}^3 é dada por

$$X(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad (1.7)$$

onde $0 < u, v < 2\pi$. Logo,

$$X_u(u, v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u); \quad (1.8)$$

$$X_v(u, v) = (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0). \quad (1.9)$$

Um campo normal unitário é dado por

$$N(u, v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u).$$

Os coeficientes da primeira e segunda forma são dados por

$$E = r^2; \quad F = 0; \quad G = (R + r \cos u)^2;$$

$$e = r; \quad f = 0; \quad g = \cos u(R + r \cos u).$$

O tensor métrico é dado por

$$g = r^2 du^2 + (R + r \cos u)^2 dv^2. \quad (1.10)$$

As curvaturas Gaussiana e média são, respectivamente

$$K = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}$$

e

$$H = \frac{R + 2r \cos u}{r(R + r \cos u)}.$$

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = 0; \quad \Gamma_{12}^1 = 0; \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{\sin u(R + r \cos u)}{r};$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0; \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{r \sin u}{R + r \cos u}; \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Substituindo os símbolos de Christoffel no sistema (1.2) temos que o sistema de equações diferenciais das geodésicas do toro \mathbb{T}^2 é dado por

$$\begin{cases} u'' + \frac{\sin u(R + r \cos u)}{r}(v')^2 = 0; \\ v'' - \frac{2r \sin u}{R + r \cos u}u'v' = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

A seguir iremos investigar as isometrias de \mathbb{T}^2 . Considere ζ um campo tangente sobre \mathbb{T}^2 que está parametrizado por (1.7). Então,

$$\zeta = \zeta^1(u, v)X_u + \zeta^2(u, v)X_v,$$

onde ζ^i são funções diferenciáveis. Suponha que ζ seja um campo de Killing. Isto é, um campo para o qual a derivada de Lie da métrica g se anula, $\mathcal{L}_\zeta g \equiv 0$. A equação anterior é chamada de equação de Killing [16, Capítulo 3]. Em coordenadas a equação de Killing é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\zeta g(X_u, X_v); \\ &= g(\nabla_{X_u} \zeta, X_v) + g(X_u, \nabla_{X_u} \zeta); \\ &= \zeta g(X_u, X_v) - g([\zeta, X_u], X_v) - g([\zeta, X_v], X_u); \end{aligned}$$

Que pode ser reescrita como,

$$\sum_{k=1}^2 (\zeta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \zeta^k g_{jk} + \partial_j \zeta^k g_{ik}) = 0,$$

com $\partial_1 = X_u$ e $\partial_2 = X_v$. Usando a notação $\partial_i(\cdot) = (\cdot)_{;i}$, segue-se que

$$\sum_{k=1}^2 (\zeta^k g_{ij;k} + \zeta_{;i}^k g_{jk} + \zeta_{;j}^k g_{ik}) = 0, \quad (1.12)$$

onde

$$g_{11} = g(X_u, X_u); \quad g_{12} = g(X_u, X_v); \quad g_{22} = g(X_v, X_v).$$

A partir de (1.10), temos que

$$g_{11} = r^2; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = (R + r \cos u)^2.$$

Tomando a equação de Killing (1.12) para $i = 1$ e $j = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^2 (\zeta_{;1}^k g_{2k} + \zeta_{;2}^k g_{1k}); \\ &= \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{21} + \frac{\partial \zeta^1}{\partial v} g_{11} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} g_{22} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} g_{12}; \\ &= \frac{\partial \zeta^1}{\partial v} g_{11} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} g_{22}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial v} r^2 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} (R + r \cos u)^2 = 0 \quad (1.13)$$

Fazendo $i = j = 1$ na equação (1.12), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^2 (\zeta^k g_{11;k} + \zeta_{;1}^k g_{1k} + \zeta_{;1}^k g_{1k}); \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\zeta^k \frac{\partial g_{11}}{\partial k} + \frac{\partial \zeta^k}{\partial u} g_{1k} + \frac{\partial \zeta^k}{\partial u} g_{1k} \right); \\ &= \zeta^k \frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{11} + \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{11} + \zeta^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} g_{12} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} g_{12}; \\ &= 2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} r^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial u} = 0 \quad (1.14)$$

Considerando $i = j = 2$ na equação (1.10), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^2 (\zeta^k g_{22;k} + \zeta^k_{;2} g_{2k} + \zeta^k_{;2} g_{2k}); \\ &= \zeta^1 g_{22;1} + \zeta^2 g_{22;2} + \zeta^2_{;2} g_{22} + \zeta^2_{;2} g_{22}; \\ &= \zeta^1 \frac{\partial}{\partial u} [(R + r \cos u)^2] + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial v} [(R + r \cos u)^2] + 2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} (R + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\zeta^1 r \sin u = \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} (R + r \cos u). \quad (1.15)$$

Da equação (1.14) podemos afirmar que ζ^1 não depende da variável u , ou seja, é uma função apenas de v . Sendo assim podemos escrever $\zeta^1 = \omega(v)$. Agora, podemos usar esse fato para reescrever as equações (1.13) e (1.15), respectivamente, como

$$\omega' r^2 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} (R + r \cos u)^2 = 0 \quad (1.16)$$

e

$$\frac{\partial \zeta^2}{\partial v} = \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} \omega. \quad (1.17)$$

Integrando ambos os membros de (1.17) em relação a v obtemos

$$\zeta^2 = \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} (\Omega(v) + \sigma(u)), \quad (1.18)$$

onde $\Omega(v) + \sigma(u)$ é uma primitiva de $\omega(v)$. Isto é,

$$\frac{d}{dv} (\Omega(v) + \sigma(u)) = \omega(v).$$

Substituindo (1.18) na equação (1.16), temos que

$$\omega' r^2 + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} (\Omega(v) + \sigma(u)) \right) (R + r \cos u)^2 = 0.$$

Logo,

$$\omega' r^2 + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} \right) \Omega(v) + \sigma'(u) \right] (R + r \cos u)^2 = 0.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} \right) = \frac{r \cos u (R + r \cos u) + r^2 \sin^2 u}{(R + r \cos u)^2},$$

temos que

$$\omega' r^2 + [r \cos u (R + r \cos u) + r^2 \sin^2 u] \Omega(v) + \sigma'(u) (R + r \cos u)^2 = 0.$$

Derivando ambos os membros em relação a v obtemos

$$\omega''r^2 + [r \cos u(R + r \cos u) + r^2 \sin^2 u]\omega = 0.$$

Derivando ambos os membros em relação a u ,

$$[r \sin u(R + 2r \cos u) + 2r^2 \sin u \cos u]\omega = 0.$$

Em particular, tomando $u = \frac{\pi}{2}$, temos

$$(rR)\omega = 0.$$

Ou seja, $w \equiv 0$. Utilizando este fato em (1.18), concluímos que $\frac{\partial \zeta^2}{\partial v} = 0$, mas isso quer dizer que ζ^2 não depende da variável v , sendo assim $\zeta^2 = \varpi(u)$ é uma função apenas de u .

Voltando à equação (1.16) podemos afirmar que $\frac{\partial \zeta^2}{\partial u} = 0$. Ou seja, $\zeta^2 = \varpi(u) = A$, onde $A \in \mathbb{R}$ é uma constante. Portanto,

$$\zeta = 0X_u + AX_v.$$

Denotando por $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 e

$$X(u, v) = \left(\underbrace{(R + r \cos u) \cos v}_x, \underbrace{(R + r \cos u) \sin v}_y, \underbrace{r \sin u}_z \right),$$

podemos escrever [18, Capítulo 4, Seção 4.6.12]

$$\zeta = A(-y\partial_1 + x\partial_2).$$

Deste modo, se Ψ^t é uma família a 1-parâmetro de isometrias de \mathbb{T}^2 então

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Psi^t(p) = \zeta(\Psi^t(p)); \\ \Psi^0(p) = p; \quad p \in \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

Um cálculo direto nos dá

$$\Psi^t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z),$$

onde

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + z^2 = r^2.$$

Portanto, dada uma curva parametrizada pelo comprimento Φ em \mathbb{T}^2 , escrevendo $\Phi(s) = (x(s), y(s), z(s))$, temos

$$\Phi^t(s) = \Psi^t(\Phi(s)) = \begin{pmatrix} \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) & 0 \\ \sin \xi(t) & \cos \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

onde ξ é uma função diferenciável tal que $\xi(0) = 0$. Com isso, concluimos que as isometrias de \mathbb{T}^2 geradas por campos de Killing podem ser escritas na forma

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) & 0 \\ \sin \xi(t) & \cos \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

1.1.4 Superfícies regradas em \mathbb{R}^3

Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada (ver [17]). Então, M^2 é dada por

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s), \quad (1.21)$$

onde β é uma curva em \mathbb{R}^3 e $w(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{R}^3$, $|w| = 1$, é um campo tal que $\langle \beta', w' \rangle = 0$. Dizemos que $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é não-cilíndrica quando $w'(s) \neq 0$ para todo s . Caso contrário dizemos que ela é cilíndrica.

Considere $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ não-cilíndrica. Neste caso, podemos supor $\langle w', w' \rangle = 1$. Então,

$$X_s = \beta'(s) + u \cdot w'(s), \quad X_u = w(s), \quad X_s \wedge X_u = \beta' \wedge w + u \cdot w' \wedge w.$$

Assim, $\langle w', w \rangle = \langle w', \beta' \rangle = 0$, daí

$$\beta' \wedge w = \lambda w' \quad (1.22)$$

para alguma função $\lambda = \lambda(s)$. A função λ é chamada de *parâmetro de distribuição*. Podemos reescrever

$$X_s \wedge X_u = \lambda w' + u \cdot w' \wedge w,$$

portanto,

$$EG - F^2 = |X_s \wedge X_u|^2 = \lambda^2 + u^2.$$

O campo normal unitário sobre $X(s, u)$ é dado por

$$N = \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} = \frac{\lambda w' + u \cdot w' \wedge w}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}. \quad (1.23)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle X_s, X_s \rangle = |\beta'|^2 + u^2; \quad F = \langle X_s, X_u \rangle = \langle \beta', w \rangle; \quad G = \langle X_u, X_u \rangle = 1.$$

Além disso,

$$X_{ss} = \beta'' + u \cdot w'', \quad X_{su} = w', \quad X_{uu} = 0.$$

Então, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$g = \langle N, X_{uu} \rangle = 0; \quad f = \langle N, X_{su} \rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}};$$

$$e = \langle N, X_{ss} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} (\lambda \langle w', \beta'' \rangle + \lambda \cdot u \langle w', w'' \rangle - u \langle w \wedge w', \beta'' \rangle - u^2 \langle w \wedge w', w'' \rangle).$$

Considerando o referencial ortonormal $\{w, w', w \wedge w'\}$ em \mathbb{R}^3 temos

$$\beta' = \langle \beta', w \rangle w + \langle \beta', w' \rangle w' + \langle \beta', w \wedge w' \rangle w \wedge w' = Fw + \lambda w \wedge w'. \quad (1.24)$$

Desde que $\langle \beta', w' \rangle = 0$ e do fato de que w é unitário, obtemos

$$\langle \beta'', w' \rangle = -\langle \beta', w'' \rangle = F - \lambda J,$$

onde $J := \langle w \wedge w', w'' \rangle$. Tomando a derivada de

$$\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle \quad (1.25)$$

obtemos

$$\beta'' \wedge w + \beta' \wedge w' = \lambda' w' + \lambda w''.$$

Portanto, como $|w'| = 1$ teremos

$$\langle \beta'' \wedge w, w' \rangle = \lambda'.$$

Podemos concluir que

$$e = \frac{\lambda(F - \lambda J) - u\lambda' - u^2 J}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}.$$

Finalmente, obtemos as curvaturas gaussiana e média respectivamente,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2} \quad (1.26)$$

e

$$H = \frac{Eg - 2fF + Ge}{2(EG - F^2)} = -\frac{\lambda F + \lambda^2 J + u\lambda' + u^2 J}{2(\lambda^2 + u^2)^{3/2}}. \quad (1.27)$$

1.2 Fluxo de Curvatura Média

Nesta seção, definimos o Fluxo de Curvatura Média, bem como apresentar as soluções auto-similares e soliton. Sobre as soluções auto-similares, em [10] foram estudadas as singularidades do fluxo e conseqüentemente as soluções auto-similares. Em [22] são discutidos uma série de exemplos de soluções soliton.

Seja $X : M^n \rightarrow \Omega^{n+1}$ uma hipersuperfície n -dimensional, em uma variedade Riemanniana Ω^{n+1} , com campo normal unitário N . Uma família a um parâmetro de imersões $\widehat{X}^t(M) = \widehat{X}(M, t)$ com $M_t = \widehat{X}^t(M)$ é uma solução para o Fluxo de Curvatura Média (FCM) com condição inicial M se

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(p, t) = H(p, t)N(p, t), & p \in M; \\ \widehat{X}(\cdot, 0) = X(\cdot); \end{cases}$$

onde $H^t = H(\cdot, t)$ representa a curvatura média e $N^t = N(\cdot, t)$ o normal unitário de M_t . Por simplicidade de notação estamos identificando $X(M)$ por M . Nessas condições dizemos que M evolui pelo Fluxo de Curvatura Média.

Observe que a curvatura média de uma solução do FCM é dada por

$$\left\langle \frac{\partial \widehat{X}}{\partial t}(\cdot, t), N(\cdot, t) \right\rangle = H(\cdot, t). \quad (1.28)$$

Dizemos que uma família de imersões $\widehat{X}^t(\cdot) = \widehat{X}(\cdot, t)$ se move de maneira auto-similar (ver [20]), quando é da forma

$$\widehat{X}(\cdot, t) = \sigma(t)\Gamma(t)\widehat{X}(\cdot, 0) + \Theta(t); \quad t \in \mathfrak{J}.$$

Aqui temos, $\mathfrak{J} \subset \mathbb{R}$ um intervalo contendo 0 e $\sigma : \mathfrak{J} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma : \mathfrak{J} \rightarrow SO(\Omega)$ e $\Theta : \mathfrak{J} \rightarrow \Omega$ funções suaves tais que $\sigma(0) = 1$, $\Gamma(0) = Id$ e $\Theta(0) = 0$.

Note que, M se move de maneira auto-similar pelo fluxo de curvatura média se, e somente, se

$$H = \sigma'(0)\langle X, N \rangle + \langle \Gamma'(0)X, N \rangle + \langle \Theta'(0), N \rangle. \quad (1.29)$$

Isso é uma consequência de se tomar $t = 0$ em (1.28) e denotar $H = H(\cdot, 0)$ e $N = N(\cdot, 0)$. Para um estudo mais aprofundado veja [20].

Dentre as soluções auto-similares para o FCM existem aquelas que denotamos por solitons. Um soliton M do FCM quando a família de imersões $\widehat{X}^t(M) = \widehat{X}(M, t)$ puder ser escrita como

$$\widehat{X}(M, t) = \Psi^t(X(M)),$$

onde $\Psi^t(\cdot) = \Psi(\cdot, t)$ é uma família a um parâmetro de isometrias de Ω tal que $\Psi^0(\cdot) = Id$ é a aplicação identidade (ver [22]).

O Fluxo Redutor de Curvas (FRC) pode ser visto como a versão do FCM quando $n = 1$. Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega^2$ uma curva em uma variedade Riemanniana bidimensional Ω . Uma família a um parâmetro de curvas $\widehat{\Phi}^t(\cdot) = \widehat{\Phi}(\cdot, t)$ é uma solução para o Fluxo Redutor de Curvas com condição inicial Φ se

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}(s) = \kappa_g^t(s) \eta^t(s); \\ \widehat{\Phi}^0(s) = \Phi(s); \end{cases}$$

onde, κ_g^t e η^t representam a curvatura geodésica e o campo normal unitário de $\widehat{\Phi}^t$.

Em particular, note que

$$\left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle = \kappa_g^t. \quad (1.30)$$

A curva Φ é um soliton do FRC quando a família de curvas $\widehat{\Phi}^t(\cdot) = \widehat{\Phi}(\cdot, t)$ puder ser escrita como

$$\widehat{\Phi}^t(s) = \Psi^t(\Phi(s)).$$

onde $\Psi^t(\cdot) = \Psi(\cdot, t)$ é uma família a um parâmetro de isometrias de Ω tal que $\Psi^0(\cdot) = Id$ é a aplicação identidade.

1.3 Imersões Isométricas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

No capítulo 4, serão estudadas hipersuperfícies tipo-Einstein imersas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. A seguir, apresentaremos alguns conceitos básicos sobre as imersões nesses espaços. Para mais detalhes sobre imersões isométricas consulte [16, Capítulo 6]. A respeito das imersões nos produtos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, veja [12], onde condições necessárias e suficientes para que uma variedade Riemanniana possa ser imersa isometricamente foram apresentadas.

Denote por $Q^n(\varepsilon)$ a esfera unitária \mathbb{S}^n ou espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , onde $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$ são

as respectivas curvaturas. Em relação aos modelos, estamos considerando

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^n &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}, \\ \mathbb{H}^n &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1} \mid -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1, x_1 > 0\},\end{aligned}$$

com métrica induzida pelo respectivo espaço ambiente, onde \mathbb{E}^{n+1} é o espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional e \mathbb{L}^{n+1} é o espaço Lorentziano $(n+1)$ -dimensional com métrica canônica $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+2}^2$. A base canônica do espaço ambiente será denotada por $\partial_1, \dots, \partial_{n+2}$.

Seja M^n uma hipersuperfície em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e N seu normal unitário. Denote por T a projeção ortogonal de $\partial_{x_{n+2}}$ sobre o espaço tangente de M^n . Assim, temos a seguinte decomposição

$$\partial_{x_{n+2}} = T + \nu N, \quad (1.31)$$

onde ν é uma função diferenciável de M^n , chamada *função ângulo*.

A conexão Riemanniana, o tensor curvatura e o operador forma de M^n em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, serão denotados respectivamente por ∇ , R e S . Em relação ao tensor curvatura estamos considerando a seguinte convenção:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Nesse contexto, a equação de Gauss é dada por

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \varepsilon(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad + \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle + \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle \\ &\quad - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle \\ &\quad + \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle - \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle).\end{aligned} \quad (1.32)$$

Uma vez que $\partial_{x_{n+2}}$ é um campo de vetores paralelo em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tem-se que

$$\begin{aligned}\nabla_X T &= \nu SX, \\ X(\nu) &= -\langle X, ST \rangle.\end{aligned} \quad (1.33)$$

Seja II segunda forma fundamental de M^n , isto é, $\text{II}(X, Y) = \langle SX, Y \rangle$. Dizemos que M é *totalmente geodésica* se $\text{II} \equiv 0$. Se $\text{II}(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle$ para alguma função λ de M^n , dizemos que M^n é *totalmente umbílica*.

Estamos considerando o tensor de Ricci definido por

$$\text{Ric}(Y, Z) = \text{traço} \{X \mapsto R(X, Y)Z\}.$$

A equação do tensor de Ricci para uma hipersuperfície em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ é dada pelo Lema a

seguir e sua demonstração pode ser encontrada em [24].

Lema 1.3.1. *Seja M^n uma hipersuperfície em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, então o tensor de Ricci de M^n é dado por*

$$\begin{aligned} \text{Ric}(Y, Z) = & \varepsilon(n-1 - |T|^2)\langle Y, Z \rangle + \varepsilon(2-n)\langle Y, T \rangle\langle Z, T \rangle \\ & + nH\langle SY, Z \rangle - \langle SY, SZ \rangle, \end{aligned} \quad (1.34)$$

onde Y, Z campos quaisquer sobre M^n e H é a curvatura média.

Tomando a equação 1.34 em um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ sobre M^n obtemos

$$\text{Ric}(e_i, e_j) = [\varepsilon(n-1 - |T|^2) + nH\lambda_i - \lambda_i\lambda_j] \delta_{ij} + \varepsilon(2-n)t_it_j, \quad (1.35)$$

onde $T = \sum t_i e_i$.

1.3.1 Hipersuperfícies de Rotação

A noção clássica de superfícies de rotação no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 foi estendida em [15] por do Carmo e Dajczer para dimensões maiores, mais especificamente para hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} , \mathbb{S}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1} . Em [14], Dillen, Fastenakels e Veken fazem uma adaptação dessa extensão para os espaços produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

A fim de simplificar a escrita, para representar o espaço ambiente de $Q(\varepsilon)^n \times \mathbb{R}$ vamos utilizar a notação $\mathbb{R}_\varepsilon^n = \mathbb{E}^n$ se $\varepsilon = 1$ e $\mathbb{R}_\varepsilon^n = \mathbb{L}^n$ se $\varepsilon = -1$.

Definição 1.3.1. Considere um subespaço 3-dimensional P^3 de $\mathbb{R}_\varepsilon^{n+2}$, contendo o eixo x_{n+2} . Então, $(Q(\varepsilon)^n \times \mathbb{R}) \cap P^3 = Q^1(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Seja P^2 um subespaço 2-dimensional de P^3 , também contendo o eixo x_{n+2} . Denote por \mathcal{I} o grupo das isometrias de $\mathbb{R}_\varepsilon^{n+2}$, que mantém $Q(\varepsilon)^n \times \mathbb{R}$ globalmente invariante e P^2 pontualmente fixado. Finalmente, seja α uma curva em $Q(\varepsilon)^1 \times \mathbb{R}$ que não intercepta P^2 . A hipersuperfície de rotação M^n em $Q(\varepsilon)^n \times \mathbb{R}$ com curva geratriz α e eixo de rotação P^2 é definida como a \mathcal{I} -órbita de α .

Ainda em [14], os autores apresentaram parametrizações para essas hipersuperfícies de rotação e suas respectivas curvaturas principais. Ademais, foi provado um critério para verificar quando uma hipersuperfície em $Q(\varepsilon)^n \times \mathbb{R}$ é de rotação.

As hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ são parametrizadas por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cos(s), \sin(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \sin(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), a(s)),$$

para alguma função a , onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$. Suas curvaturas principais são dadas por

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{(1 + (a'(s))^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \cot(s),$$

com multiplicidades 1 e $n - 1$ respectivamente.

Em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ temos uma particularidade com relação ao plano de rotação P^2 , ele pode ser Riemanniano, Lorentziano ou degenerado. Se o plano P^2 é Lorentziano, a parametrização é dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(s), \sinh(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \sin(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), a(s)),$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$. As curvaturas principais são dados por

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{(1 + (a'(s))^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \coth(s),$$

com multiplicidades 1 e $n - 1$ respectivamente.

No caso Riemanniano a parametrização é dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \cosh(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \sinh(s), a(s)),$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n-1} \subset \mathbb{L}^n$. As curvaturas principais são dados por

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{(1 + (a'(s))^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{-a'(s)}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} \tanh(s),$$

com multiplicidades 1 e $n - 1$ respectivamente.

Se o plano de rotação P^2 é degenerado, a parametrização é dada por

$$f(s, t_2, \dots, t_n) = \left(s, st_2, \dots, st_n, -\frac{1}{2s} - \frac{s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a(s) \right).$$

As curvaturas principais são dadas por

$$\lambda = -\frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{sa'(s)}{\sqrt{1 + s^2a'(s)^2}},$$

com multiplicidades 1 e $n - 1$ respectivamente.

A seguir, temos o critério para verificar quando uma hipersuperfície de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ é de rotação.

Teorema 1.3.2 ([14]). *Seja M^n uma hipersuperfície em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ com $n \geq 3$ e operador*

forma

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix}.$$

Suponha que $\lambda \neq \mu$ e $ST = \lambda T$. Então, M^n é localmente uma hipersuperfície de rotação.

1.4 Hipersuperfícies Isoparamétricas

Uma hipersuperfície M^{n-1} de $Q^n(\varepsilon)$ é *isoparamétrica* quando suas curvaturas principais são constantes.

A seguir, temos uma construção que será fundamental na demonstração de alguns resultados do capítulo 4. Seja $\phi : M^{n-1} \rightarrow Q^n(\varepsilon)$ uma hipersuperfície com campo normal unitário η . Considere sua família de hipersuperfícies paralelas $\phi_s : M^{n-1} \rightarrow Q^n(\varepsilon)$ dada por

$$\phi_s(x) = C_\varepsilon(s)\phi(x) + S_\varepsilon(s)\eta(x), \quad (1.36)$$

onde

$$C_\varepsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se } \varepsilon = 1, \\ \cosh(s), & \text{se } \varepsilon = -1, \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\varepsilon(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{se } \varepsilon = 1, \\ \sinh(s), & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Seja $f : M^n := M^{n-1} \times I \rightarrow Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície definida por

$$f(x, s) = \phi_s(x) + a(s)\partial_{n+2}, \quad (1.37)$$

para alguma função diferenciável $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, com derivada positiva em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. A função a será chamada de *função altura*.

Foi provado por Cartan em [5], que uma hipersuperfície $\phi : M^{n-1} \rightarrow Q^n(\varepsilon)$ é isoparamétrica se, e somente se, cada hipersuperfície paralela da família ϕ_s definida em (1.36) possui curvatura média constante, isto é, a curvatura média de ϕ_s depende apenas de s (veja [7] e [8, Teorema 3.6]).

Além disso, Cartan apresentou uma relação entre as curvaturas principais de uma hipersuperfície isoparamétrica, conhecida como *identidade de Cartan*.

Teorema 1.4.1 (Identidade de Cartan). *Seja $M^{n-1} \subset Q^n(\varepsilon)$ uma hipersuperfície isoparamétrica com curvaturas principais distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ com multiplicidades m_1, \dots, m_d , respectivamente. Se $d > 1$, para cada i , $1 \leq i \leq d$, então*

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{\varepsilon + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0. \quad (1.38)$$

A partir da identidade (1.38), Cartan foi capaz de classificar as hipersuperfícies isoparamétricas para o caso $\varepsilon = -1$. Se $d = 1$, então M^{n-1} é totalmente umbílica. Para $d \geq 2$, pela Identidade de Cartan, verifica-se que existem no máximo duas curvaturas principais distintas, ou seja $d = 2$, e neste elas são recíprocas. Além disso M^{n-1} é um subconjunto aberto do produto $\mathbb{S}^k \times \mathbb{H}^{n-k-1}$ em \mathbb{H}^n .

O caso $\varepsilon = 1$ não sofre tantas restrições sobre o número d de curvaturas principais distintas impostas pela Identidade de Cartan. Existem exemplos, dados por Cartan, para $1 \leq d \leq 4$. Entretanto, para $d \leq 3$ as hipersuperfícies foram classificadas. Se $d = 1$, então M^{n-1} é totalmente umbílica. Se $d = 2$, então a hipersuperfície é um produto de duas esferas $\mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2)$ em \mathbb{S}^n , com $p + q = n - 1$ e $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Para $d = 3$, as curvaturas principais devem possuir mesma multiplicidade $m \in \{1, 2, 4, 8\}$, e M^{n-1} é um tubo de raio constante sobre um plano projetivo imerso em \mathbb{S}^{3m+1} .

Para mais detalhes a respeito destas classificações consulte [7] e suas referências.

1.5 Variedades Tipo-Einstein

Em [6], foi apresentado o conceito de estrutura que generaliza várias outras estruturas relevantes que são estudados na literatura, como solitons de Ricci, solitons de Yamabe e variedades quase-Einstein. Essa estrutura mais geral é chamada de variedade tipo-Einstein.

Definição 1.5.1. Considere $n \geq 3$. Dizemos que (M^n, g) é uma variedade tipo-Einstein se existem $V \in \mathfrak{X}(M^n)$, chamado vetor potencial, e $\sigma \in C^\infty(M^n)$ de modo que

$$\alpha \text{Ric} + \frac{\beta}{2} \mathcal{L}_V g + \gamma V^b \otimes V^b = \sigma g, \tag{1.39}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são constantes tais que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Aqui, $V^b(\cdot) = g(V, \cdot)$ representa a 1-forma metricamente dual do campo V com respeito a métrica g .

A seguir, apresentamos um quadro que ilustra como uma estrutura tipo-Einstein é capaz de unificar outros tipos de estruturas.

Tabela 1.1: Estruturas consideradas pela Definição 1.5.1

Estrutura	α	β	γ	σ
Variedades de Einstein	1	0	0	$\sigma \in \mathbb{R}$
Ricci solitons	1	1	0	$\sigma \in \mathbb{R}$
Yamabe solitons	0	1	0	$\mathcal{R} - c$
Variedades quasi-Einstein	1	1	$-1/k$	$\sigma \in \mathbb{R}$
Quase Ricci solitons	1	1	0	$\sigma \in C^\infty(M)$
Quase Yamabe solitons	0	1	$-1/k$	$\mathcal{R} - c$
Gradiente conforme solitons	0	1	0	$\sigma \in C^\infty(M)$

Capítulo 2

Soluções Auto-similares para o FCM em \mathbb{R}^3

Este capítulo é baseado no trabalho [23]. Nosso objetivo é estudar uma classe de soluções auto-similares para o FCM em \mathbb{R}^3 . Para tal, considere como condições iniciais superfícies regradas e superfícies de rotação, evoluindo por meio de um movimento homotético helicoidal, que será definido a seguir.

É importante ressaltar que, para compreender bem este capítulo, é fundamental ler a Seção 1.1. Nessa seção, encontram-se as notações utilizadas, as parametrizações empregadas ao longo do capítulo e detalhes importantes sobre a geometria de superfícies do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Isso contribuirá significativamente para uma melhor compreensão do conteúdo apresentado.

Definição 2.0.1. Seja $X : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Um movimento homotético helicoidal de M é uma família de imersões $\widehat{X}(M, t) = L^t(X(M))$ tal que L^t é da forma

$$L^t(\cdot) = \sigma(t)\Gamma(t)(\cdot) + \Theta(t).$$

As funções Γ , Θ e σ representam rotação, translação e dilatação em \mathbb{R}^3 , respectivamente, para cada t . A translação $\Theta(t)$ ocorre apenas na direção do eixo de rotação de $\Gamma(t)$. Além disso, $\sigma(0) = 1$, $\Gamma(0) = Id$ é a aplicação identidade e $\Theta(0) = 0$.

Observe que um movimento homotético helicoidal é em particular um movimento auto-similar.

2.1 Soluções auto-similares para o FCM em superfícies regradas

O Lema a seguir é uma caracterização das soluções auto-similares para o FCM em \mathbb{R}^3 . Tal caracterização será bastante útil para demonstração de nosso resultado principal.

Lema 2.1.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada não-cilíndrica em \mathbb{R}^3 . Então, $\widehat{X}^t(s, u)$ é uma solução auto-similar para o FCM em \mathbb{R}^3 se, e somente, se*

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle = 0; \\ \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle + \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle + \sigma'(0)\langle \beta, w' \wedge w \rangle = 0; \\ \lambda(\langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle + \langle \Theta'(0), w' \rangle + \sigma'(0)\langle \beta, w' \rangle) + \frac{1}{2}\langle w \wedge w', w'' \rangle = 0; \\ \lambda \langle \beta', w \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Além disso, $\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle$ deve ser constante.

Prova do Lema 2.1.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada não-cilíndrica como em (1.21). Considere $\widehat{X}^t(s, u) = \sigma(t)\Gamma(t)X(s, u) + \Theta(t)$ uma solução auto-similar para o FCM em \mathbb{R}^3 . Então, por (1.29), temos que

$$\langle \sigma'(0)\Gamma(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle = H.$$

Utilizando a equação (1.23), do campo normal unitário N , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \Gamma'(0)X, N \rangle &= \left\langle \Gamma'(0)(\beta + uw), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\ &= (EG - F^2)^{-1/2} \langle \Gamma'(0)(\beta + uw), \lambda w' + uw' \wedge w \rangle \\ &= (EG - F^2)^{-1/2} (\lambda \langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle + u \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle \\ &\quad + u \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle + u^2 \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma'(0)\langle \Gamma(0)X, N \rangle &= \sigma'(0) \left\langle \Gamma(0)(\beta + uw), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\ &= \sigma'(0)(EG - F^2)^{-1/2} \langle \Gamma(0)(\beta + uw), \lambda w' + uw' \wedge w \rangle \\ &= \sigma'(0)(EG - F^2)^{-1/2} (\lambda \langle \Gamma(0)\beta, w' \rangle + u \lambda \langle \Gamma(0)w, w' \rangle \\ &\quad + u \langle \Gamma(0)\beta, w' \wedge w \rangle + u^2 \langle \Gamma(0)w, w' \wedge w \rangle) \\ &= \sigma'(0)(EG - F^2)^{-1/2} (\lambda \langle \beta, w' \rangle + u \langle \beta, w' \wedge w \rangle), \end{aligned}$$

onde $\beta := \beta(s)$ e $w := w(s)$ são dados por (1.21).

Lembrando que $|w| = 1$, vamos definir as seguintes funções de s :

$$\begin{aligned} V &:= \langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle; \\ W &:= \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle; \\ Y &:= \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle; \\ Z &:= \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle; \\ C &:= \langle \Theta'(0), w' \rangle; \\ D &:= \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle; \\ A &:= \sigma'(0)\langle \beta, w' \wedge w \rangle; \\ B &:= \sigma'(0)\langle \beta, w' \rangle. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever

$$\langle \Gamma'(0)X, N \rangle = \frac{\lambda V + u\lambda W + uY + u^2 Z}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} \quad (2.2)$$

e

$$\langle \Gamma(0)X, N \rangle = \frac{\lambda B + uA}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}. \quad (2.3)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle \Theta'(0), N \rangle &= \left\langle \Theta'(0), \frac{X_s \wedge X_u}{|X_s \wedge X_u|} \right\rangle \\ &= (EG - F^2)^{-1/2} \langle \Theta'(0), \lambda w' + u \cdot w' \wedge w \rangle \\ &= (EG - F^2)^{-1/2} (\lambda \langle \Theta'(0), w' \rangle + u \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle \Theta'(0), N \rangle = \frac{\lambda C + uD}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}}. \quad (2.4)$$

Combinando as equações (1.27), (1.29), (2.2), (2.3) e (2.4) obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\lambda V + u\lambda W + uY + u^2 Z}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} + \frac{\lambda C + uD}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} + \frac{\lambda B + uA}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} = -\frac{\lambda F + \lambda^2 J + u\lambda' + u^2 J}{2(\lambda^2 + u^2)^{3/2}},$$

Um cálculo direto mostra que a equação acima é um polinômio de quarta ordem na variável

u. Ou seja,

$$2u^4Z + 2u^3(\lambda W + Y + D + A) + 2u^2(\lambda^2Z + \lambda(V + C + B) + \frac{1}{2}J) \\ + u(2\lambda^3W + 2\lambda^2(Y + D + A) + \lambda') + 2\lambda^3(V + C + B) + \lambda F + \lambda^2J = 0.$$

A partir da equação acima, utilizando a igualdade entre polinômios, podemos deduzir que

$$\begin{cases} Z = 0; \\ \lambda W = -(Y + D + A); \\ \lambda(V + C + B) = -\frac{1}{2}J; \\ \lambda' = 0; \\ \lambda F = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle = 0; \\ \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle \Gamma'(0)\beta, w' \wedge w \rangle + \langle \Theta'(0), w' \wedge w \rangle + \sigma'(0) \langle \beta, w' \wedge w \rangle = 0; \\ \lambda \langle \Gamma'(0)\beta, w' \rangle + \langle \Theta'(0), w' \rangle + \sigma'(0) \langle \beta, w' \rangle + \frac{1}{2} \langle w \wedge w', w'' \rangle = 0; \\ \lambda' = 0; \\ \lambda \langle \beta', w \rangle = 0. \end{cases}$$

Reciprocamente, suponha que (2.5) seja satisfeito. Então,

$$\begin{aligned} \langle L'(0)X, N \rangle - H &= \langle \sigma'(0)\Gamma(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle - H \\ &= \frac{\lambda B + uA + \lambda V + u\lambda W + uY + u^2Z + \lambda C + uD}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} \\ &\quad + \frac{\lambda F + \lambda^2J + u\lambda' + u^2J}{2(\lambda^2 + u^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda(V + C + B) + u(Y + D + A) + \lambda uW}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} + \frac{\lambda^2J + u^2J}{2(\lambda^2 + u^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}J - \lambda uW + u\lambda W}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}} + \frac{\lambda^2J + u^2J}{2(\lambda^2 + u^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-2(\lambda^2 + u^2)\frac{1}{2}J + (\lambda^2 + u^2)J}{2(\lambda^2 + u^2)^{3/2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Como visto na Seção 1.1.4, as superfícies regradas de \mathbb{R}^3 são parametrizadas por $X(s, u) = \beta(s) + uw(s)$, onde β é uma curva em \mathbb{R}^3 e $w(s)$ é um campo unitário tangente a β . Um fato interessante e útil é que, a partir do campo $w(s)$, podemos formar um triedro de Darboux. Veja no lema a seguir.

Lema 2.1.2. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada não-cilíndrica em \mathbb{R}^3 parametrizada por (1.21). Então, os campos $\{w, w', w' \wedge w\}$ satisfazem as equações de Darboux, isto é,*

$$\begin{cases} w'' = \kappa_g w' \wedge w - w; \\ (w' \wedge w)' = -\kappa_g w', \end{cases}$$

onde $\kappa_g = \langle w \wedge w', w'' \rangle$ é a curvatura geodésica.

Prova do Lema 2.1.2. Em \mathbb{R}^3 , considere o referencial ortonormal $\{w, w', w \wedge w'\}$. Note que, $w \subset \mathbb{S}^2$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Portanto, em $p = w(s)$ podemos afirmar que $\{w'(s), -w(s), w(s) \wedge w'(s)\}$ é um triedro de Darboux.

Nesse referencial podemos escrever a expressão de w'' como sendo

$$w'' = \rho_1 w + \rho_2 w' + \rho_3 w \wedge w'. \quad (2.6)$$

Os coeficientes de w'' são dados por

$$\rho_1 = \langle w'', w \rangle = -1; \quad \rho_2 = \langle w'', w' \rangle = 0; \quad \rho_3 = \langle w'', w \wedge w' \rangle = \kappa_g.$$

Utilizando os coeficientes de (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} (w \wedge w')' &= w' \wedge w' + w \wedge w''; \\ &= w \wedge (\kappa_g w' \wedge w - w); \\ &= \kappa_g w \wedge (w \wedge w') - w \wedge w; \\ &= \kappa_g w \langle w, w' \rangle - \kappa_g w' \langle w, w \rangle; \\ &= -\kappa_g w'. \end{aligned}$$

□

O plano e o helicóide são superfícies regradas não-cilíndricas, também são superfícies mínimas, logo são soluções triviais do FCM em \mathbb{R}^3 . Queremos fornecer uma classificação para as soluções auto similares do FCM quando a condição inicial é uma superfície regrada não-cilíndrica em \mathbb{R}^3 . Mostraremos que a condição inicial deve ser trivial. Mas antes de mostrar tal resultado, que será exibido no Teorema 2.1.4, vamos exigir uma condição adicional (de que $w \subset \mathbb{S}^2$ seja uma geodésica), o que vai facilitar nosso trabalho na sequência quando formos demonstrar o Teorema 2.1.4.

Teorema 2.1.3. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada não-cilíndrica em \mathbb{R}^3 ,*

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s),$$

onde $\beta(s)$ é uma curva em \mathbb{R}^3 e $w(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{R}^3$, $|w| = 1$. Sejam $\widehat{X}^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ uma solução auto-similar para o FCM e $L^t(\cdot) = \sigma(t)\Gamma(t)(\cdot) + \Theta(t)$ um movimento homotético helicoidal em \mathbb{R}^3 . Se $w \subset \mathbb{S}^2$ é uma geodésica, então X deve ser trivial.

Prova do Teorema 2.1.3. Seja X é uma superfície regrada não-cilíndrica satisfazendo (1.21). Nestas condições, w é uma curva em \mathbb{S}^2 parametrizada pelo comprimento de arco.

Note que, se $\lambda = 0$, da equação (1.26) concluímos que a curvatura Gaussiana de X é identicamente nula, logo X é um plano.

A partir daqui iremos assumir $\lambda \neq 0$. Observe que $J = \langle w \wedge w', w'' \rangle$ é a curvatura geodésica de w vista como uma curva da esfera \mathbb{S}^2 . Se $J = 0$, então w é uma geodésica de \mathbb{S}^2 . Portanto, w'' é uma combinação linear de w e w' . Desde que $\langle w'', w \rangle = -1$ e $\langle w'', w' \rangle = 0$, temos $w'' = -w$. Por outro lado, combinando (1.24) com a última equação de (2.1) obtemos

$$\beta' = \lambda w \wedge w'.$$

Tomando a derivada da equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \beta'' &= \lambda(w' \wedge w' + w \wedge w'') \\ &= \lambda(w' \wedge w' - w \wedge w) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isso concluímos que β' é constante, e conseqüentemente, β deve ser uma reta ortogonal a w . Portanto, X é o helicóide. \square

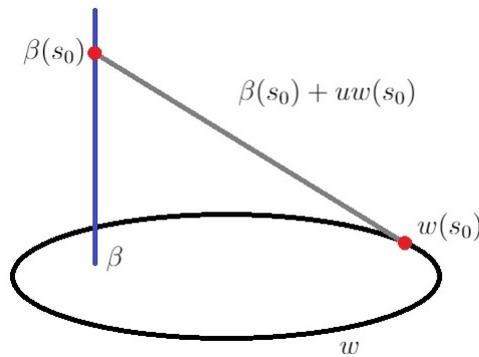


Figura 2.1: β perpendicular a w

A seguir temos a classificação mencionada. A ideia inicial por trás do resultado que será apresentado era mostrar soluções explícitas para o fluxo. Por esse motivo, toda a demonstração

foi realizada em coordenadas.

Teorema 2.1.4. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada não-cilíndrica em \mathbb{R}^3 ,*

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s),$$

onde $\beta(s)$ é uma curva em \mathbb{R}^3 e $w(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{R}^3$, $|w| = 1$. Suponha que $\widehat{X}^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ é uma solução auto-similar para o FCM e que $L^t(\cdot) = \sigma(t)\Gamma(t)(\cdot) + \Theta(t)$. é um movimento homotético helicoidal em \mathbb{R}^3 . Então, X é trivial.

Prova do Teorema 2.1.4. Nossa estratégia será escrever β e w em coordenadas e com o auxílio do Lema 2.1.1, vamos explicitar suas expressões.

Pelo que acabamos de ver na demonstração do Teorema 2.1.3, se $\lambda = 0$ então X é trivial e não há mais nada a mostrar. Sendo assim, a partir daqui vamos assumir $\lambda \neq 0$. Do Lema 2.1.1 temos que

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle = 0; \\ \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = 0; \\ \kappa_g = -2\lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle; \\ \langle \beta', w \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Onde, $\kappa_g = \langle w \wedge w', w'' \rangle$ é a curvatura geodésica de $w \subset \mathbb{S}^2$ e λ é constante.

Sabendo que $L = \sigma\Gamma + \Theta$ é uma movimento homotético helicoidal em \mathbb{R}^3 podemos descrevê-lo, sem perda de generalidade, por

$$\Gamma(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \xi(\tau) & -\sin \xi(\tau) & 0 \\ \sin \xi(\tau) & \cos \xi(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta(\tau) = (0, 0, \zeta(\tau)),$$

tal que

$$\Gamma'(0) = a \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Theta'(0) = b(0, 0, 1), \quad (2.8)$$

com $a = \xi'(0)$, $b = \zeta'(0)$, $c = \sigma'(0)$ e $\xi(0) = 0$.

Seja $\widehat{X}^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ uma solução para o FCM em \mathbb{R}^3 com condição inicial $X(s, u) = \beta(s) + uw(s)$, onde $\beta(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ e $w(s) = (y_1(s), y_2(s), y_3(s))$.

Usando o fato de que $|w| = 1$, da primeira equação do sistema (2.7) temos

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \Gamma'(0)w, w' \wedge w \rangle \\
 &= a\{-y_2(y_2'y_3 - y_2y_3') + y_1(-y_1'y_3 + y_1y_3')\} \\
 &= a\{y_3(-y_2y_2' - y_1y_1') + y_3'(y_1^2 + y_2^2)\} \\
 &= a\{y_3^2y_3' + y_3'(1 - y_3^2)\} \\
 &= ay_3'.
 \end{aligned}$$

Logo, ou $a = 0$ ou $y_3' = 0$.

Agora temos três possibilidades a considerar:

$$\text{(I)} \quad a \neq 0 \quad \text{e} \quad y_3' = 0; \quad \text{(II)} \quad a = 0 \quad \text{e} \quad y_3' = 0; \quad \text{(III)} \quad a = 0 \quad \text{e} \quad y_3' \neq 0.$$

Caso (I): $a \neq 0$ e $y_3' = 0$.

Nestas condições temos que

$$\langle w', e_3 \rangle = 0.$$

Entretanto, y_3 é constante, daí w deve ser uma curva plana em \mathbb{R}^3 , ortogonal ao eixo de rotação e_3 .

Como $|w| = 1$, localmente w é um círculo de raio $r \leq 1$ em \mathbb{S}^2 , dado por

$$w(s) = \left(r \cos(s/r), r \sin(s/r), \sqrt{1 - r^2} \right). \tag{2.9}$$

Um cálculo direto nos mostra que

$$\begin{aligned}
 w' &= (-\sin(s/r), \cos(s/r), 0); \\
 w' \wedge w &= \left(\sqrt{1 - r^2} \cos(s/r), \sqrt{1 - r^2} \sin(s/r), -r \right); \\
 w'' &= \left(-\frac{1}{r} \cos(s/r), -\frac{1}{r} \sin(s/r), 0 \right); \\
 \langle w \wedge w', w'' \rangle &= \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}.
 \end{aligned}$$

Se $r = 1$, então X é uma solução trivial para o FCM. De fato, quando $r = 1$ temos $\kappa_g = \langle w \wedge w', w'' \rangle = 0$ e pelo Teorema 2.1.3, X é um helicóide.

Considere $r < 1$. A partir de (2.8) temos

$$\Gamma'(0)w = (-ar \sin(s/r), ar \cos(s/r), 0)$$

e

$$L'(0)\beta = \sigma'(0)\Gamma(0)\beta + \Gamma'(0)\beta + \Theta'(0) = (cx_1 - ax_2, cx_2 + ax_1, cx_3 + b).$$

Da segunda e terceira equações do sistema (2.7) temos, respectivamente,

$$0 = \lambda \langle \Gamma'(0)w, w' \rangle + \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = (\lambda a - cx_3 - b)r + \sqrt{1-r^2}[(c \cos(s/r) + a \sin(s/r))x_1 + (c \sin(s/r) - a \cos(s/r))x_2] \quad (2.10)$$

e

$$0 = \lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{1}{2} \langle w \wedge w', w'' \rangle = \lambda [(a \cos(s/r) - c \sin(s/r))x_1 + (a \sin(s/r) + c \cos(s/r))x_2] + \frac{\sqrt{1-r^2}}{2r}. \quad (2.11)$$

Além disso, a última equação do sistema (2.7) nos fornece

$$0 = \langle \beta', w \rangle = rx'_1 \cos(s/r) + rx'_2 \sin(s/r) + x'_3 \sqrt{1-r^2}. \quad (2.12)$$

Reescrevendo as equações (2.10), (2.11) e (2.12) obtemos

$$(c \cos(s/r) + a \sin(s/r))x_1 + (c \sin(s/r) - a \cos(s/r))x_2 = \frac{r(cx_3 + b - \lambda a)}{\sqrt{1-r^2}}; \quad (2.13)$$

$$-(c \sin(s/r) - a \cos(s/r))x_1 + (c \cos(s/r) + a \sin(s/r))x_2 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{2r\lambda}; \quad (2.14)$$

$$x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sin(s/r) = -\frac{x'_3 \sqrt{1-r^2}}{r}. \quad (2.15)$$

Tomando a derivada de (2.14) e combinando com (2.13) obtemos

$$x'_1 [a \cos(s/r) - c \sin(s/r)] + x'_2 [a \sin(s/r) + c \cos(s/r)] = \frac{(cx_3 + b - \lambda a)}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Uma vez que estamos considerando uma superfície regradada não-cilíndrica parametrizada por linhas de estrição, temos $\langle \beta', w' \rangle = 0$, combinando esse fato com (2.15) e a equação acima, obtemos

$$\frac{(cx_3 + b - \lambda a)}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{ax'_3 \sqrt{1-r^2}}{r} = 0.$$

Então,

$$x'_3 = -\frac{r(cx_3 + b - \lambda a)}{a(1 - r^2)}. \quad (2.16)$$

Da equação (1.22), temos $\beta' \wedge w = \lambda w'$. Daí,

$$\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle = x'_3 r - \left(\sqrt{1 - r^2} \right) [x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sin(s/r)].$$

Combinando as equações (2.15) e (2.16) com a expressão de λ dada acima obtemos

$$\begin{aligned} \lambda &= x'_3 r - \left(\sqrt{1 - r^2} \right) \left[-\frac{x'_3 \sqrt{1 - r^2}}{r} \right] \\ &= \frac{x'_3}{r}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Então,

$$\lambda = \frac{cx_3 + b}{ar^2}. \quad (2.18)$$

Como λ é constante, devemos ter $c = 0$ ou $c \neq 0$ com $x_3(s)$ constante.

Se $c \neq 0$, teremos $x_3(s)$ constante. Logo, de (2.16) segue-se que

$$x_3(s) = \frac{-b + \lambda a}{c}.$$

Substituindo na equação (2.18) obtemos

$$(1 - r^2)\lambda = 0,$$

que é uma contradição, pois sabemos que $r < 1$ e $\lambda \neq 0$.

Se $c = 0$, da equação (2.18) temos

$$\lambda = \frac{b}{ar^2}$$

e em conjunto com a equação (2.16) obtemos

$$x'_3 = \frac{b}{ar^2}.$$

Por outro lado, da equação (2.17) temos

$$(1 - r)b = 0.$$

Como $r < 1$ devemos ter $b = 0$, mas isso implica em $\lambda = 0$ que é uma contradição.

Portanto, podemos concluir que o Caso (I) não ocorre.

Caso (II): $a = 0$ e $y'_3 = 0$.

De maneira análoga ao caso anterior, quando $y'_3 = 0$, a curva w será dada por (2.9). Além disso, como o caso $r = 1$ é trivial, podemos considerar $r < 1$. Tomando $a = 0$ na equação (2.8), temos $\Gamma'(0) = 0$. Assim, podemos reescrever (2.7) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle = 0; \\ \lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{1}{2} \langle w \wedge w', w'' \rangle = 0; \\ \langle \beta', w \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Da primeira e segunda equações do sistema (2.19) obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle \\ &= c\sqrt{1-r^2}(x_1 \cos(s/r) + x_2 \sin(s/r)) - r(cx_3 + b) \end{aligned} \quad (2.20)$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{1}{2} \langle w \wedge w', w'' \rangle \\ &= 2c\lambda(-x_1 \sin(s/r) + x_2 \cos(s/r)) + \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Além disso, a última equação do sistema (2.19) nos dá

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \beta', w \rangle \\ &= x'_1 r \cos(s/r) + x'_2 r \sin(s/r) + x'_3 \sqrt{1-r^2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Podemos assumir que $c \neq 0$. Caso contrário, de (2.21) teríamos $\sqrt{1-r^2} = 0$, acarretando em $r = 1$.

Agora, tomando a derivada de (2.21) e combinando com $\langle \beta', w' \rangle = 0$ obtemos

$$x_1 \cos(s/r) + x_2 \sin(s/r) = 0.$$

Então, da equação anterior em conjunto com (2.20) vê-se que

$$x_3 = -\frac{b}{rc}$$

Desse modo, da equação (2.22) segue-se que

$$x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sin(s/r) = 0.$$

Por outro lado,

$$\lambda = \langle \beta' \wedge w, w' \rangle = -\left(\sqrt{1-r^2}\right) [x'_1 \cos(s/r) + x'_2 \sin(s/r)] = 0.$$

O que é uma contradição, uma vez que $\lambda \neq 0$.

Caso (III): $a = 0$ e $y'_3 \neq 0$.

Considerando $a = 0$ no Lema 2.1.1 obtemos o sistema (2.19). Então, tomando a derivada da primeira equação do sistema (2.19) e utilizando o Lema 2.1.2 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle \\ &= \langle (\sigma'(0)\Gamma(0)\beta + \Gamma'(0)\beta + \Theta'(0))', w' \wedge w \rangle + \langle L'(0)\beta, (w' \wedge w)' \rangle \\ &= \langle c\beta', w' \wedge w \rangle + \langle L'(0)\beta, \kappa_g w' \rangle \\ &= c\langle \beta', w' \wedge w \rangle + \kappa_g \langle L'(0)\beta, w' \rangle. \end{aligned}$$

Combinando a equação anterior com (1.25) temos

$$c\lambda = \kappa_g \langle L'(0)\beta, w' \rangle. \quad (2.23)$$

Da segunda equação de (2.19) temos

$$2c\lambda^2 = -\kappa_g^2.$$

Se $c = 0$, então $\kappa_g = 0$ e do Teorema 2.1.3, X é trivial. A partir de agora vamos assumir $c < 0$.

Note que w é uma curva em \mathbb{S}^2 de curvatura geodésica constante $\kappa_g = \sqrt{-2c\lambda^2}$. Tomando a derivada da segunda equação do sistema (2.19), teremos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \left(\langle L'(0)\beta, w' \rangle + \frac{1}{2\lambda} \kappa_g \right) \\ &= \langle (L'(0)\beta)', w' \rangle + \langle L'(0)\beta, w'' \rangle \\ &= \langle c\beta', w' \rangle + \langle L'(0)\beta, \kappa_g(w' \wedge w) - w \rangle \\ &= c\langle \beta', w' \rangle + \kappa_g \langle L'(0)\beta, w' \wedge w \rangle - \langle L'(0)\beta, w \rangle. \end{aligned}$$

Então, de (1.21) e da primeira equação do sistema (2.19), temos

$$\langle L'(0)\beta, w \rangle = 0.$$

Sendo $\{w, w', w \wedge w'\}$ um referencial ortonormal em \mathbb{R}^3 , da equação anterior, da primeira equação de (2.19) e por (2.23) obtemos

$$L'(0)\beta = \frac{c\lambda}{\kappa_g} w',$$

o que acarreta em

$$c\beta + \Theta'(0) = \frac{c\lambda}{\kappa_g} w'.$$

Da equação (2.6), um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{\lambda}{\kappa_g} w'' \\ &= \frac{\lambda}{\kappa_g} (\kappa_g w' \wedge w - w) \\ &= \lambda w' \wedge w - \frac{\lambda}{\kappa_g} w. \end{aligned}$$

Combinando a terceira equação de (2.19) e a equação anterior temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \beta', w \rangle \\ &= \langle \lambda w' \wedge w - \frac{\lambda}{\kappa_g} w, w \rangle \\ &= \lambda \langle w' \wedge w, w \rangle - \frac{\lambda}{\kappa_g} \langle w, w \rangle \\ &= -\frac{\lambda}{\sqrt{-2c\lambda^2}} \end{aligned}$$

Logo $\frac{1}{\sqrt{-2c}} = 0$, o que é uma contradição.

Com isso concluímos que não há outras soluções além das triviais.

□

2.1.1 Soluções auto-similares para o FCM em superfícies cilíndricas

Outro exemplo de superfícies regradadas no espaço Euclidiano são as superfícies cilíndricas. No próximo resultado, usaremos esse tipo de superfície como condição inicial para as soluções auto-similares do FCM em \mathbb{R}^3 .

Lema 2.1.5. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regradada cilíndrica em \mathbb{R}^3 ,*

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s),$$

onde $\beta(s)$ é uma curva em \mathbb{R}^3 e $w(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{R}^3$, $|w| = 1$. Então, $\widehat{X}^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ é

uma solução auto-similar para o FCM com condição inicial X se, somente, se

$$\begin{cases} \langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle = 0 \\ \langle L'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle = \frac{1}{2(|\beta'|^2 - \langle \beta', w \rangle^2)} \langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle, \end{cases} \quad (2.24)$$

onde $L^t(\cdot) = \sigma(t)\Gamma(t)(\cdot) + \Theta(t)$ é um movimento auto-similar em \mathbb{R}^3 .

Proof of Lemma 2.1.5. Considere uma família a um parâmetro de superfícies $X^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ em \mathbb{R}^3 , onde $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície regradada cilíndrica e L^t é um movimento auto-similar.

Podemos reescrever \widehat{X} da seguinte maneira

$$\widehat{X}^t(s, u) = \sigma(t)\Gamma(t)X(s, u) + \Theta(t),$$

onde Γ , Θ e σ representam rotação, translação e dilatação, respectivamente. Sabemos que \widehat{X}^t é uma solução para o FCM em \mathbb{R}^3 se, somente, se

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{X}^t}{\partial t} = H^t(s, u)N^t(s, u); \\ \widehat{X}^0(s, u) = X(s, u), \end{cases}$$

para todo $t \in \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$.

Suponha \widehat{X} uma solução para o FCM. Em $t = 0$, podemos ver que

$$\langle \sigma'(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle = H.$$

Além disso, os coeficientes da primeira e segunda forma e o campo normal unitário são dados, respectivamente, por

$$E = |\beta'|^2; \quad F = \langle \beta', w \rangle; \quad G = 1.$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - F^2}} \langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle; \quad f = g = 0; \quad N = \frac{\beta' \wedge w}{\sqrt{|\beta'|^2 - F^2}}.$$

Portanto,

$$H = \frac{Eg - 2fF + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2(|\beta'|^2 - F^2)^{3/2}} \langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle \sigma'(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle = \frac{1}{\sqrt{|\beta'|^2 - F^2}} (\langle L'(0)\beta, \beta' \wedge w \rangle + u \langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle).$$

Combinando as duas equações anteriores obtemos o sistema de equações (2.24). \square

Teorema 2.1.6. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada cilíndrica em \mathbb{R}^3 . Se $\widehat{X}^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ é uma solução auto-similar para o FCM com condição inicial*

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s),$$

onde $L^t(\cdot) = \sigma(t)\Gamma(t)(\cdot) + \Theta(t)$ é um movimento homotético helicoidal, β uma curva plana, $w(s) = (x_0, y_0, z_0)$ e $|w| = 1$, então X é dado por uma das seguintes superfícies:

(I) $\beta(s) = (0, h(s), q(s));$

$$\begin{aligned} ax_0\langle w, \tau \rangle &= 0; \\ 2cx_0\langle \beta, \eta \rangle + 2b\langle w, \eta \rangle - 2ax_0\langle \beta, \tau \rangle &= \frac{x_0|\tau|^3\kappa}{|\tau|^2 - \langle w, \tau \rangle^2}. \end{aligned}$$

(II) $\beta(s) = (h(s), q(s), 0);$

$$\begin{aligned} a[h' - x_0\langle w, \tau \rangle] &= 0; \\ 2cz_0\langle \beta, \eta \rangle + 2bz_0\langle e_1, \eta \rangle + 2aq(y_0h' - z_0q') &= \frac{z_0|\tau|^3\kappa}{|\tau|^2 - \langle w, \tau \rangle^2}. \end{aligned}$$

Aqui, a, b e c são constantes relacionadas com rotação, translação e dilatação da superfície X no espaço Euclidiano. Além disso, τ, η e κ são, respectivamente, o tangente, o normal e a curvatura de β .

Prova do Teorema 2.1.6. Seja $L^t(\cdot) = \sigma(t)\Gamma(t)(\cdot) + \Theta(t)$ um movimento homotético helicoidal de \mathbb{R}^3 dado por

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) \\ 0 & \sin \xi(t) & \cos \xi(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta(t) = (\zeta(t), 0, 0)$$

tal que

$$\Gamma'(0) = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta'(0) = b(1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \sigma'(0) = c,$$

onde $a = \xi'(0), b = \zeta'(0)$ e $\sigma'(0) = c$ com $\xi(0) = 0$.

Item (I) Suponha que a família $\widehat{X}^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ seja uma solução para o FCM em \mathbb{R}^3 com condição inicial $X(s, u) = \beta(s) + uw(s)$, onde $\beta(s) = (0, h(s), q(s))$ e $w(s) = (x_0, y_0, z_0)$. Daí, $\beta' = (0, h', q')$, $\beta' \wedge w = (z_0h' - y_0q', x_0q', -x_0h')$ e $L'(0)\beta = (b, ch - aq, cq + ah)$.

Logo, da primeira equação do sistema (2.24) temos

$$\langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle = -ax_0(z_0q' + y_0h') = 0. \quad (2.25)$$

Então, da segunda equação do sistema (2.24) temos

$$\begin{aligned} & 2cx_0(hq' - qh') + 2b(z_0h' - y_0q') - 2ax_0(qq' + hh') \\ &= \frac{x_0(q'h'' - q''h')}{(h')^2 + (q')^2 - (y_0h' + z_0q')^2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Item (II) Agora, vamos considerar o caso onde $\beta(s) = (h(s), q(s), 0)$ e $w(s) = (x_0, y_0, z_0)$. Assim, $\beta' = (h', q', 0)$, $\beta' \wedge w = (z_0q', -z_0h', y_0h' - x_0q')$ e $L'(0)\beta = (ch + b, cq, aq)$. Uma vez que $|w| = 1$, da primeira equação do sistema (2.24) temos

$$\langle \Gamma'(0)w, \beta' \wedge w \rangle = a[(z_0^2 + y_0^2)h' - x_0y_0q'] = a[(1 - x_0^2)h' - x_0y_0q'] = 0.$$

Portanto, da segunda equação do sistema (2.24) temos

$$\begin{aligned} & 2cz_0(hq' - qh') + 2bz_0q' + 2aq(y_0h' - x_0q') \\ &= \frac{z_0(q'h'' - q''h')}{(h')^2 + (q')^2 - (x_0h' + y_0q')^2}. \end{aligned}$$

Agora, considerando que τ , η e κ_g são o vetor tangente, o vetor normal e a curvatura de β , respectivamente, concluímos a prova. \square

2.2 Soluções auto-similares para o FCM em superfícies de revolução

Em [20] o autor apresentou uma análise das soluções auto-similares para o FCM por superfícies helicoidais. Aqui vamos estender essa ideia para as superfícies de revolução. No Teorema a seguir iremos caracterizar soluções por superfícies de revolução que se movem por movimento homotético helicoidal em \mathbb{R}^3 . Veremos que a fim de conhecer as soluções do FCM por superfícies de revolução, devemos verificar a condição (2.27) para a curvatura κ de curvas em \mathbb{R}^2 .

No teorema a seguir, vemos que as soluções para o FCM em \mathbb{R}^3 através de superfícies de revolução são caracterizadas pela curvatura da sua curva geratriz. Essa abordagem de caracterizar soluções do fluxo pela curvatura foi inspirada no trabalho [28]. Os autores apresentaram uma caracterização por meio da curvatura geodésica para as soluções do FRC na esfera e, a partir daí, foram capazes de classificar o comportamento de tais soluções.

Teorema 2.2.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície de revolução em \mathbb{R}^3 satisfazendo*

$$X(u, s) = (\phi(s) \cos(u), \phi(s) \sin(u), \psi(s)),$$

onde ϕ, ψ são funções reais diferenciáveis. Suponha que $\widehat{X}^t(s, u) = L^t(X(s, u))$ seja uma solução auto-similar para o FCM com condição inicial X tal que L^t é um movimento homotético helicoidal em \mathbb{R}^3 . Então, X é uma condição inicial para o FCM se, e somente, se a curvatura κ de $\alpha(s) = (0, \phi(s), \psi(s))$ é dada por

$$\kappa = \frac{1}{|\tau|} \left(2c \langle \alpha, \eta \rangle + 2b \langle e_3, \eta \rangle + \frac{1}{\phi} \langle e_3, \tau \rangle \right), \quad (2.27)$$

onde $\tau = \alpha', \eta = (0, \psi', -\phi')$ e $e_3 = (0, 0, 1)$.

Prova do Teorema 2.2.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução de \mathbb{R}^3 como em (1.3). Considere uma família a um parâmetro de superfícies $\widehat{X}^t(s, u) = L^t X(s, u)$ onde L^t é um movimento homotético helicoidal de \mathbb{R}^3 . Então,

$$\widehat{X}^t(s, u) = \sigma(t)\Gamma(t)X(s, u) + \Theta(t),$$

onde Γ, Θ e σ representam rotação, translação e dilatação em \mathbb{R}^3 , respectivamente. Logo, \widehat{X}^t é uma solução para o FCM em \mathbb{R}^3 se, somente, se

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{X}^t}{\partial t} = H^t(s, u)N^t(s, u); \\ \widehat{X}^0(s, u) = X(s, u), \end{cases}$$

para todo t .

Suponha que \widehat{X} seja uma solução para o FCM. Sendo assim, em $t = 0$ temos

$$\langle \sigma'(0)\Gamma(0)X + \Gamma'(0)X + \Theta'(0), N \rangle = H. \quad (2.28)$$

Como L^t é um movimento homotético helicoidal, podemos supor Γ e Θ dados por

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) & 0 \\ \sin \xi(t) & \cos \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta(t) = (0, 0, \zeta(t)).$$

Então,

$$\Gamma'(0) = a \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta'(0) = b(0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \sigma'(0) = c, \quad (2.29)$$

onde $a = \xi'(0)$ e $b = \zeta'(0)$ com $\xi(0) = 0$.

Um cálculo direto a partir da equação (2.28) (e utilizando as equações (1.4), (1.5) e (2.29)) implica em

$$\phi(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \psi'(\phi'^2 + \psi'^2) = 2\phi(\phi'^2 + \psi'^2)[c(\psi'\phi - \psi\phi') - b\phi']. \quad (2.30)$$

Considere $\alpha(s) = (0, \phi(s), \psi(s))$ uma curva plana. Logo sua curvatura κ é dada por

$$\kappa = \frac{-\psi''\phi' + \phi''\psi'}{(\phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}.$$

Substituindo a curvatura de α na equação (2.30) obtemos

$$\kappa = \frac{1}{|\tau|} \left(2c\langle \alpha, \eta \rangle + 2b\langle e_3, \eta \rangle + \frac{\langle e_3, \tau \rangle}{\phi} \right),$$

onde $\tau = \alpha'(s)$, $\eta = (0, \psi', -\phi')$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. □

Ao representar graficamente as soluções de (2.27) percebemos que alguns gráficos são semelhantes aos gráficos apresentados em [19]. Veja a próxima seção de exemplos.

2.3 Exemplos

2.3.1 FCM por superfícies de revolução

Considere uma curva $\alpha(s) = (0, \phi(s), \psi(s))$, plana parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que α satisfaça o Teorema 2.2.1. Então, combinando $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$ com a equação da curvatura de α dada pela equação (2.27) obtemos

$$\phi'' = \psi' \left(2c(\phi\psi' - \phi'\psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi} \right); \quad (2.31)$$

$$\psi'' = -\phi' \left(2c(\phi\psi' - \phi'\psi) - 2b\phi' + \frac{\psi'}{\phi} \right). \quad (2.32)$$

As constantes c e b estão associadas, respectivamente, com a dilatação e a translação exercidas sobre a superfície de revolução gerada por α . Quanto ao sinal das constantes temos que, para

c negativo ocorre um movimento de encolhimento, para c positivo ocorre um movimento de expansão e para $c = 0$ a dilatação não ocorre. Quando $b = 0$ não ocorre translação.

Nem sempre conseguimos solucionar sistemas de equações como em (2.31) e (2.32), nesses casos uma boa alternativa é fazer uma análise qualitativa das soluções para uma melhor compreensão de sua geometria (ver [19, 20, 22, 28]). A seguir, vamos plotar algumas soluções, soluções numéricas, observando que algumas delas possuem comportamento semelhante ao de soluções para o fluxo redutor de curvas em \mathbb{R}^2 dado por [19].

Dadas condições iniciais a respeito das funções ϕ e ψ obtemos a curva geratriz e o tipo de movimento pelo qual a solução do FCM irá evoluir:

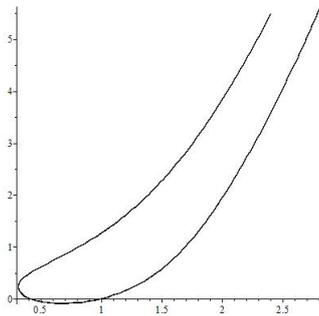


Figura 2.2: $b = 1$; $c = 0$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= \sqrt{0,75}, & \psi'(0) &= \sqrt{0,25},\end{aligned}$$

temos uma solução se movimentando por translação.

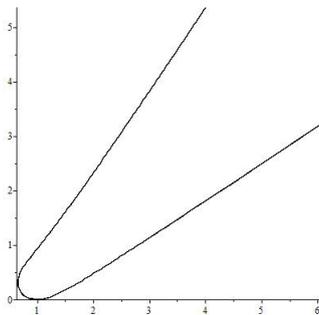


Figura 2.3: $b = 1$; $c = 1$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 1, & \psi'(0) &= 0,\end{aligned}$$

temos uma solução se movimentando por translação combinada com expansão.

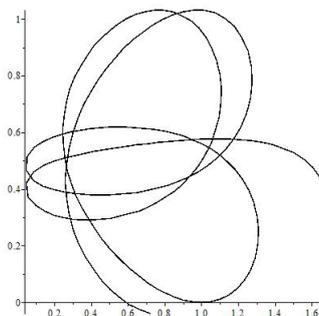
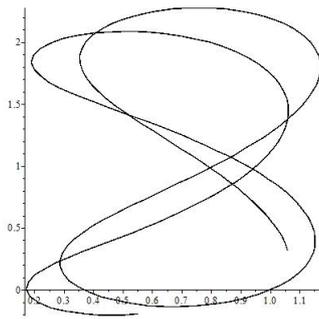


Figura 2.4: $b = 1$; $c = -2$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 1, & \psi'(0) &= 0,\end{aligned}$$

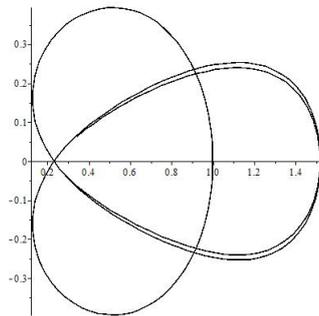
temos uma solução se transladando e encolhendo.

Figura 2.5: $b = 1$; $c = -2$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 1, & \psi'(0) &= 1,\end{aligned}$$

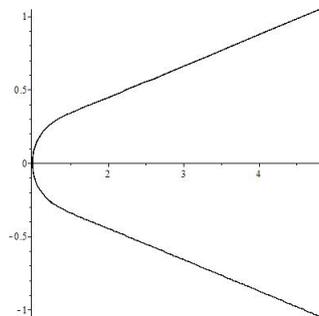
temos uma solução se transladando e encolhendo.

Figura 2.6: $b = 0$; $c = -2$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 0, & \psi'(0) &= 1,\end{aligned}$$

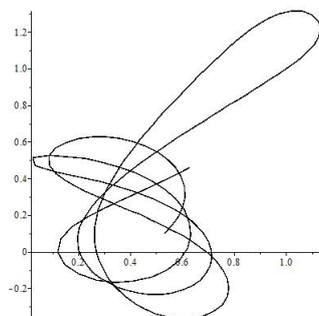
temos uma solução se encolhendo.

Figura 2.7: $b = 0$; $c = 2$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 0, & \psi'(0) &= 1,\end{aligned}$$

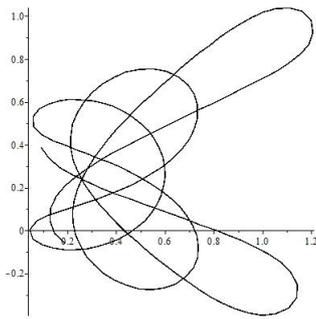
temos uma solução expandindo.

Figura 2.8: $b = 1$; $c = -4$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 1, \\ \phi'(0) &= 1, & \psi'(0) &= 1,\end{aligned}$$

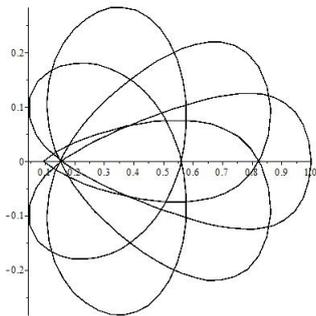
temos uma solução se movimentando por translação combinada com encolhimento.

Figura 2.9: $b = 1$; $c = -4$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 0,5, & \psi(0) &= 0,5, \\ \phi'(0) &= -1, & \psi'(0) &= 1,\end{aligned}$$

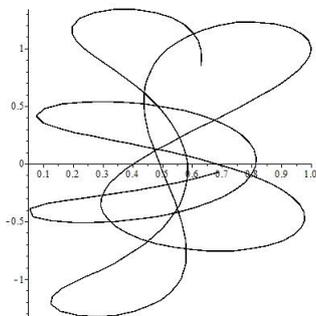
temos uma solução se movimentando por translação combinada com encolhimento.

Figura 2.10: $b = 0$; $c = -6$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 0, \\ \phi'(0) &= 0, & \psi'(0) &= 1,\end{aligned}$$

temos uma solução se encolhendo.

Figura 2.11: $b = 0$; $c = -2$.

Se a curva α possui condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 1, & \psi(0) &= 1, \\ \phi'(0) &= 0, & \psi'(0) &= 1,\end{aligned}$$

temos uma solução se movimentando por encolhimento.

2.3.2 FCM por superfícies cilíndricas

Exemplo 1. A ideia aqui é explorar o Teorema 2.1.6 como uma fonte para se buscar exemplos de soluções para o FCM por superfícies cilíndricas.

Vamos começar analisando o Item (I). Para tal, considere uma solução cilíndrica dada por

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s),$$

onde $\beta(s) = (0, h(s), q(s))$ e $w(s) = (x_0, y_0, z_0)$. Note que, para soluções com $x_0 = 0$ e $b = 0$ o Item (I) é trivialmente satisfeito.

Por outro lado, se $x_0 \neq 0$ e $y_0 = 0$ (ou $z_0 = 0$), da equação (2.25) temos $q' = 0$ (ou $h' = 0$). Então, de (2.26) temos $(bz_0 - cq - ax_0h)h' = 0$. Uma vez que q é constante, a única possibilidade é h constante. Portanto, a solução deveria ser da forma $X(s, u) = (ux_0, h_0, q_0 + uz_0)$.

Para analisar o Item (II), vamos considerar uma solução cilíndrica dada por

$$X(s, u) = \beta(s) + uw(s),$$

onde $\beta(s) = (h(s), q(s), 0)$ e $w(s) = (x_0, y_0, z_0)$. De maneira análoga, note que soluções com $z_0 = 0$ e $a = 0$ satisfazem o Item (II) trivialmente. Assim como para soluções tais que $x_0 = 0$ e $h(s) = -\frac{b}{c}$.

Exemplo 2. Agora, iremos analisar o Teorema 2.1.6 em busca de soluções de translação exatas para o FCM por superfícies cilíndricas.

Vamos considerar uma solução que satisfaça o Item (I) e assumir $a = c = 0$, isto é, apenas soluções por translação.

A análise qualitativa para soluções auto-similares é considerada por vários autores. E o Grim Reaper é uma dessas soluções exatas.

Em (2.26) tomando $\beta(s) = (0, s, q(s))$, obtemos

$$2b(z_0 - y_0q') = \frac{-x_0q''}{1 + q'^2 - (y_0 + z_0q')^2}.$$

Vamos fornecer agora a primeira família de soluções considerando $b = 1/2$, $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ e $z_0 = 0$. Daí temos

$$y_0q' = \frac{x_0q''}{1 + q'^2 - y_0^2}. \quad (2.33)$$

Assumindo, por exemplo, $y_0 = 1/2$ e $x_0 = -1$,

$$q(s) = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{1}{2} \sqrt{e^{3s/2} - 4} \right).$$

Portanto,

$$X(s, u) = \left(-u, s + \frac{u}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{1}{2} \sqrt{e^{3s/4} - 4} \right) \right). \quad (2.34)$$

Outro caso para considerar é $x_0 = -1$ e $y_0 = 1$. Então, para (2.33) temos

$$q(s) = \pm \sqrt{2s + 2}.$$

Portanto,

$$X(s, u) = (-u, u + s, \sqrt{2s + 2}). \quad (2.35)$$

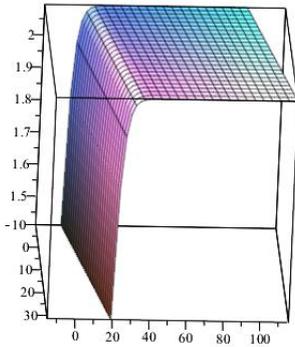


Figura 2.12: Gráfico de (2.34)

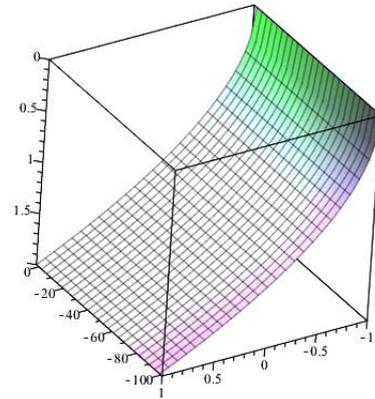


Figura 2.13: Gráfico de (2.35)

A solução Grim Reaper também pode ser obtida considerando $x_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$ e $y_0 = 0$. Daí,

$$2bz_0 = \frac{-x_0 q''}{1 + q'^2 - (z_0 q')^2}.$$

Com efeito, assumamos $b = x_0 = 1$ e $z_0 = 1/2$. Dessa forma, temos

$$-q'' = 1 + \frac{3}{4}(q')^2.$$

Então,

$$q(s) = \frac{2}{3} \log \left(\frac{3}{4} \left(\sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} s \right) - \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} s \right) \right)^2 \right)$$

é uma solução para a equação diferencial acima. E com isso, obtemos a solução Grim Reaper

$$X(s, u) = \left(u, s, \frac{u}{2} + \frac{2}{3} \log \left(\frac{3}{4} \left(\sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} s \right) - \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} s \right) \right)^2 \right) \right).$$

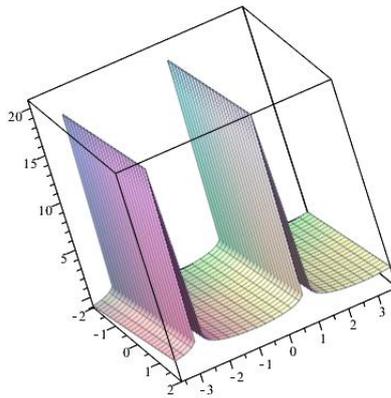


Figura 2.14: Grim reaper

Capítulo 3

Soluções Soliton para o FRC em algumas superfícies de \mathbb{R}^3

O Fluxo Redutor de Curvas (FRC) é a versão do Fluxo de Curvatura Média (FCM) para dimensão dois. Neste capítulo, estudaremos as soluções do FRC no toro de revolução $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mostraremos que as soluções soliton do fluxo são assintóticas ao equador do toro \mathbb{T}^2 . Na sequência, vamos estender esses resultados para superfícies de revolução.

3.1 Fluxo Redutor de Curvas em \mathbb{T}^2

No que se segue, considere o Toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ parametrizado por (1.7), isto é,

$$X(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Baseado nas equações (1.8) e (1.9) vamos considerar o seguinte referencial ortonormal adaptado ao Toro \mathbb{T}^2 :

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u); \\ e_2 &= (-\sin v, \cos v, 0); \\ N &= e_1 \wedge e_2 = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u). \end{aligned} \quad (3.1)$$

A partir do referencial acima podemos escrever

$$X_{uu} = rN, \quad X_{vv} = (R + r \cos u)[(\sin u)e_1 + (\cos u)N], \quad X_{uv} = -(r \sin u)e_2.$$

Seja $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{T}^2 . Denotando por $T = \Phi'$ o campo tangente e por η o campo normal normal unitário de Φ , temos

$$T = u'X_u + v'X_v = (u'r)e_1 + [v'(R + r \cos(u))]e_2 \quad (3.2)$$

e

$$\eta = N \wedge \Phi' = -[v'(R + r \cos(u))]e_1 + (u'r)e_2, \quad (3.3)$$

Os campos T , N , e η formam um Triedro de Darboux (ver Seção 1.1), e conseqüentemente, valem as Equações de Darboux (1.1), ou seja,

$$T' = \kappa_g \eta + \kappa_n N, \quad \eta' = -\kappa_g T + \tau_g N \quad \text{e} \quad N' = -\kappa_n T - \tau_g \eta, \quad (3.4)$$

onde κ_g , κ_n e τ_g são, respectivamente, a curvatura geodésica, a curvatura normal e a torção geodésica de Φ . Derivando a equação de T (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} T' &= u''X_u + v''X_v + 2u'v'X_{uv} + (u')^2X_{uu} + (v')^2X_{vv} \\ &= [u''r + (v')^2(R + r \cos(u)) \sin(u)]e_1 + [v''(R + r \cos(u)) - 2ru'v' \sin(u)]e_2 \\ &\quad + [(u')^2r + \cos(u)(R + r \cos(u))(v')^2]N. \end{aligned}$$

Então, da primeira equação de (3.4), obtemos

$$\kappa_n = \langle T', N \rangle = (u')^2r + (v')^2(R + r \cos u) \cos u \quad (3.5)$$

e

$$\kappa_g = \langle T', \eta \rangle = r[R + r \cos u](v''u' - u''v') - v' \sin(u)(1 + r^2(u')^2). \quad (3.6)$$

Sendo que nesta segunda utilizamos o fato de que $|T| = 1$, isto é,

$$r^2(u')^2 + (v')^2(R + r \cos u)^2 = 1. \quad (3.7)$$

Derivando a equação (3.7),

$$u'u''r^2 + v'v''(R + r \cos(u))^2 - ru'(v')^2 \sin(u)(R + r \cos(u)) = 0. \quad (3.8)$$

Tal equação nos será útil mais adiante.

Devemos destacar que, quando a função u é constante a curva $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ será uma geodésica de \mathbb{T}^2 , mais precisamente, um equador. Fato análogo ocorre quando a função v é constante. Pois, daí, tem-se que $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um meridiano de \mathbb{T}^2 , ou seja, uma geodésica. Uma vez que geodésicas são soluções triviais para o FRC, nos resultados que vamos estudar neste capítulo não iremos considerar esse tipo de curva. Por esse motivo, daqui por diante vamos considerar $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ em um intervalo tal que u e v não são constantes.

3.1.1 Soluções soliton para o FRC no toro \mathbb{T}^2

No lema a seguir, iremos fornecer uma caracterização para a curvatura geodésica das soluções soliton do FRC em \mathbb{T}^2 .

Lema 3.1.1. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{T}^2 . Então, $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é uma condição inicial para o FRC no toro se, e somente, se*

$$\kappa_g = ar(R + r \cos u)u', \quad (3.9)$$

onde κ_g representa a curvatura geodésica de Φ e a é uma constante. Se $a = 0$ temos uma geodésica.

Demonstração. Seja Φ uma solução soliton para o FRC no Toro \mathbb{T}^2 . Então, de (1.30), devemos ter

$$\left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^0}{\partial t}, \eta \right\rangle = \kappa_g,$$

onde κ_g é a curvatura geodésica e η é o campo normal unitário de Φ . Por se tratar de um soliton em \mathbb{T}^2 , podemos expressar a família de curvas $\widehat{\Phi}^t$ por (1.19).

Derivando (1.19) em $t = 0$, e utilizando (3.1), teremos

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}^0}{\partial t} = \Gamma'(0)\Phi = \xi'(0)(R + r \cos u)e_2.$$

Denotando $a = \xi'(0)$, substituindo a identidade anterior e a equação (3.3) na equação de κ_g concluímos a primeira parte da prova.

Reciprocamente, seja $\Phi(s) = (x(s), y(s), z(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{T}^2 com normal unitário $\eta(s) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. As funções $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$ são dadas por (1.7), e as funções $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$ e $\eta_3(s)$ são dadas por (3.3).

Suponha que

$$\kappa_g = ar(R + r \cos u)u'.$$

Considere uma família a um parâmetro de curvas $\Phi^t(s) = \Gamma(t)\Phi(s)$ tal que

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $\Gamma(t)$ é uma isometria de \mathbb{T}^2 (verificamos isso em (1.20)), temos

$$\kappa_g^t(s) = \kappa_g(s)$$

para todo t . Note que

$$\eta^t = \Gamma(t)\eta = (\eta_1 \cos at - \eta_2 \sin at, \eta_1 \sin at + \eta_2 \cos at, \eta_3).$$

Além disso,

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}(s) = \Gamma'(t)\Phi(s) = a(-x \sin at - y \cos at, x \cos at - y \sin at, 0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle &= a(-x \sin at - y \cos at)(\eta_1 \cos at - \eta_2 \sin at) \\ &\quad + a(x \cos at - y \sin at)(\eta_1 \sin at + \eta_2 \cos at) \\ &= a[-x\eta_1 \sin at \cos at - y\eta_1 \cos^2 at + x\eta_2 \sin^2 at + y\eta_2 \cos at \sin at] \\ &\quad + a[x\eta_1 \cos at \sin at - y\eta_1 \sin^2 at + x\eta_2 \cos^2 at - y\eta_2 \sin at \cos at] \\ &= a[-y\eta_1 + x\eta_2] \\ &= a\{-(R + r \cos u) \sin v[v'(R + r \cos u) \sin u \cos v - u'r \sin v] \\ &\quad + (R + r \cos u) \cos v[v'(R + r \cos u) \sin u \sin v + u'r \cos v]\} \\ &= ar(R + r \cos u)u' \\ &= \kappa_g^t. \end{aligned}$$

□

No teorema a seguir iremos fornecer um sistema de equações diferenciais das soluções soliton para o FRC no toro \mathbb{T}^2 . Um fato interessante a respeito deste sistema é que a partir dele podemos recuperar o sistemas de equações diferenciais das geodésicas do toro \mathbb{T}^2 (1.11), uma vez que geodésicas são soluções triviais do fluxo.

Teorema 3.1.2. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{T}^2 . Então, $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é uma solução soliton para o fluxo redutor de curvas em \mathbb{T}^2 se, somente, se*

$$\begin{cases} u'' + \frac{\sin u(R + r \cos u)}{r}(v')^2 = -a(R + r \cos u)^2 u'v'; \\ v'' - \frac{2r \sin u}{R + r \cos u}u'v' = ar^2(u')^2. \end{cases}$$

Além disso, se $a = 0$ obtemos o sistema de equações diferenciais das geodésicas de \mathbb{T}^2 .

Demonstração. Comparando as expressões para a curvatura geodésica dadas pelo Lema 3.1.1

e pela equação (3.6), obtemos

$$ra[R + r \cos(u)]u' = r[R + r \cos(u)](v''u' - u''v') - v' \sin(u)(1 + r^2(u')^2).$$

Dáí,

$$\frac{au'}{(1 + r^2(u')^2)} = \frac{(v''u' - u''v')}{(1 + r^2(u')^2)} - \frac{v' \sin(u)}{r[R + r \cos(u)]}. \quad (3.10)$$

Multiplicando a equação (3.10) por $u'r^2$ e a equação (3.8) por v' resulta em

$$a(u')^2r^2 + \frac{v'u'r \sin(u)(1 + r^2(u')^2)}{[R + r \cos(u)]} = (v''(u')^2r^2 - u''v'u'r^2)$$

e

$$u'v'u''r^2 + (v')^2v''(R + r \cos(u))^2 = ru'(v')^3 \sin(u)(R + r \cos(u)).$$

Combinando as duas últimas equações e utilizando o fato de Φ ser parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, a equação (3.7), obtemos

$$v'' = ar^2(u')^2 + \frac{2u'v'r \sin u}{R + r \cos u}. \quad (3.11)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.10) por $(R + r \cos u)^2v'$ e a equação (3.8) por u' , temos que

$$\begin{aligned} (-v''v'u' + u''(v')^2)(R + r \cos u)^2 &= -\frac{1}{r}(v')^2(R + r \cos u) \sin(u)(1 + r^2(u')^2) \\ &\quad - au'v'(R + r \cos u)^2 \end{aligned}$$

e

$$u''(u')^2r^2 + u'v'v''(R + r \cos(u))^2 = r(u')^2(v')^2 \sin(u)(R + r \cos(u)).$$

Pelas duas últimas equações, e novamente usando o fato de que Φ é parametrizada pelo comprimento de arco (3.7), tem-se que

$$u'' = -v'(R + r \cos u) \left[\frac{v' \sin(u)}{r} + a(R + r \cos u)u' \right].$$

□

Na Seção 3.1.2 vamos plotar algumas soluções numéricas (aproximadas) do sistema obtido no Teorema 3.1.2.

A fim de provar os próximos resultados vamos definir a seguinte função auxiliar:

$$\Lambda(s) = \frac{u'(s)}{\sqrt{1 - r^2 u'(s)^2}}.$$

Observe que, quando a curva Φ está parametrizada pelo comprimento de arco, Λ está bem definida. De fato, por (3.7),

$$1 - r^2(u')^2 = (v')^2(R + r \cos u)^2 \geq 0$$

Como $R > r$ não teremos $(R + r \cos u) = 0$, assim $1 - r^2(u')^2 = 0$ se, e somente, se $v' = 0$. Ao longo do deste capítulo vamos supor que o conjunto dos parâmetros para os quais $v' = 0$ não é denso. Note que, em um aberto no qual $v' = 0$, Φ é um meridiano de \mathbb{T}^2 , que por sua vez é uma geodésica. Como geodésicas são soluções triviais para o FRC não estamos interessados nesse caso. Não iremos tratar dos casos de pontos isolados. Dito isso, podemos assumir que $1 - r^2(u')^2 > 0$.

Observação. Sendo Φ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, e uma vez que não temos interesse em soluções triviais, acabamos de ver que $1 - r^2(u')^2 > 0$, logo $|u'| < \frac{1}{r}$, isto é, u' é limitada.

O resultado a seguir tem um caráter técnico, sua finalidade é auxiliar a demonstração do nosso resultado principal, o Teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.3. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em \mathbb{T}^2 . Se $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do FRC em \mathbb{T}^2 , então*

$$\kappa_g(s) = \pm \Lambda(s) \left(c + r \int \kappa_g^2 \right), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Demonstração. Combinando as equações (3.7) e (3.8) temos que

$$\frac{u'(v')^2}{r} (R + r \cos u) \sin u = u' u'' + \frac{v''(1 - r^2(u')^2)}{v' r^2}.$$

Da equação anterior combinada com (3.11) e novamente utilizando (3.7), obtemos

$$v'' = -ar^2(u')^2 - \frac{2u'u''v'r^2}{1 - r^2(u')^2}.$$

Reescrevendo a equação diferencial acima tem-se que:

$$[v'' + ar^2(u')^2][1 - r^2(u')^2] + r^2v'[(u')^2]' = 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v'}{1 - r^2(u')^2} \right) = \frac{-ar^2(u')^2}{1 - r^2(u')^2}. \quad (3.13)$$

Isolando v' em (3.7) temos

$$v' = \frac{\pm \sqrt{1 - r^2(u')^2}}{R + r \cos u}. \quad (3.14)$$

Utilizando a equação da curvatura geodésica dada pelo Lema 3.1.1 em conjunto com a equação (3.14), obtemos

$$\kappa_g v' = \pm ar u' \sqrt{1 - r^2(u')^2}.$$

Que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{v'}{1 - r^2(u')^2} \right) = \pm \frac{ar u'}{\kappa_g \sqrt{1 - r^2(u')^2}}.$$

Derivando ambos os membros e utilizando (3.13) temos

$$\begin{aligned} \pm ar \frac{d}{ds} \left(\frac{u'}{\kappa_g \sqrt{1 - r^2(u')^2}} \right) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{v'}{1 - r^2(u')^2} \right) \\ &= -\frac{ar^2(u')^2}{1 - r^2(u')^2} \\ &= -ar^2 \left(\frac{u'}{\sqrt{1 - r^2(u')^2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Considerando a função auxiliar Λ na equação anterior,

$$\mp \frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right) = r\Lambda^2. \quad (3.15)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mp \frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right) &= r\kappa_g^2 \frac{\Lambda^2}{\kappa_g^2}; \\ \mp \frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right) &= r\kappa_g^2; \\ \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right) & \\ \mp \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)^{-1} \right] &= r\kappa_g^2 \end{aligned}$$

e, integrando ambos os membros,

$$\kappa_g = \pm \Lambda \left(c + r \int \kappa_g^2 \right),$$

onde $c \in \mathbb{R}$. □

A seguir temos mais uma ferramenta que será crucial para a demonstração do Teorema 3.1.5, o Lema de Barbalat [29, Lema 4.2].

Lema 3.1.4 (Barbalat). *Se a função diferenciável $f(s)$ possui limite finito quando $s \rightarrow \infty$, e se $f'(s)$ é uniformemente contínua, então $f'(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$.*

Vale ressaltar que um soliton $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ do FRC no toro está definida para todo parâmetro real, uma vez que \mathbb{R}^2 é o um espaço de recobrimento para toro \mathbb{T}^2 .

Teorema 3.1.5. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Se $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do FRC em \mathbb{T}^2 com $\int_I \kappa_g^2 < \infty$, então Φ é assintótica aos equadores.*

Demonstração. Primeiramente vamos verificar que u'' é limitada. Tomando a derivada de (3.9) obtemos

$$\kappa'_g = ar(R + r \cos u)u'' - ar^2(u')^2 \sin u. \quad (3.16)$$

Daí, multiplicando a equação anterior por $\frac{\Lambda}{\kappa}$,

$$\frac{\kappa'_g}{\kappa_g} \Lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2(u')^2}} \left[u'' - \frac{r(u')^2 \sin u}{R + r \cos u} \right].$$

Note que

$$\Lambda' = \frac{u''}{\sqrt{(1 - r^2(u')^2)^3}}. \quad (3.17)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa'_g}{\kappa_g} \Lambda &= \frac{1}{\sqrt{1 - r^2(u')^2}} \left[u'' - \frac{r(u')^2 \sin u}{R + r \cos u} \right] \\ &= (1 - r^2(u')^2) \Lambda' - \frac{r(u')^2 \sin u}{(R + r \cos u) \sqrt{1 - r^2(u')^2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvendo a equação (3.15) tem-se que

$$\frac{\kappa'_g}{\kappa_g} \Lambda = \Lambda' \pm r \kappa_g \Lambda^2.$$

Com isso, podemos combinar as duas últimas equações, acarretando em

$$r^2(u')^2 \Lambda' = \mp r \kappa_g \Lambda^2 - \frac{r(u')^2 \sin u}{(R + r \cos u) \sqrt{1 - r^2(u')^2}}.$$

Usando a definição de Λ e isolando Λ' , segue-se que

$$\Lambda' = \mp \frac{a(R + r \cos u)u'}{1 - r^2(u')^2} - \frac{\sin u}{r(R + r \cos u) \sqrt{1 - r^2(u')^2}}.$$

Sendo assim, por (3.17),

$$\begin{aligned} \frac{|u''|}{1 - r^2(u')^2} &= \left| \mp \frac{a(R + r \cos u)u'}{\sqrt{1 - r^2(u')^2}} - \frac{\sin u}{r(R + r \cos u)} \right| \\ &\leq |a|(R + r \cos u) \frac{1}{r} + \frac{|\sin u|}{r|(R + r \cos u)|} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{|u''|}{1 - r^2(u')^2} \leq |a|(R + r) \frac{1}{r} + \frac{1}{r|(R + r \cos u)|}.$$

Usando o fato de que $R - r \leq R + r \cos u \leq |R + r \cos u|$ obtemos

$$|u''| \leq \frac{|a|(R^2 - r^2) + 1}{r(R - r)}. \quad (3.18)$$

A desigualdade anterior mostra que u'' é limitada como queríamos, mais que isso, mostra também que u' é uniformemente contínua.

Defina

$$f(s) = \int_{s_0}^s \kappa_g^2.$$

Observe que $f' = \kappa_g^2 \geq 0$, sendo assim f é não decrescente. Como $f < \infty$, o limite $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)$ existe.

Afirmamos que f' é uniformemente contínua. Para verificar tal afirmação mostraremos que f'' é limitada. Observe que $f'' = 2\kappa_g' \kappa_g$. Então, por um cálculo direto a partir de (3.9), (3.16), (3.18) e usando o fato de que $|u'| < \frac{1}{r}$, temos

$$\begin{aligned} |f''| &= 2|ar(R + r \cos u)u'' - ar^2(u')^2 \sin u| |ar[R + r \cos u]u'| \\ &\leq |ar(R + r \cos u)u'' - ar^2(u')^2 \sin u| ar(R + r) \frac{1}{r} \\ &\leq a(R + r)(|ar(R + r \cos u)u''| + |ar^2(u')^2 \sin u|) \\ &\leq a(R + r)(ar(R + r)|u''| + ar^2|u'|^2) \\ &\leq a^2(R + r)(r(R + r)|u''| + 1). \end{aligned}$$

Logo, $|f''|$ é de fato limitada e, conseqüentemente, f' é uniformemente contínua como afirmamos.

Nessas condições, podemos aplicar o Lema de Barbalat para obter

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f'(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \kappa_g^2 = 0. \quad (3.19)$$

E com isso provamos que as extremidades de Φ são assintóticas a geodésicas.

Agora vamos buscar essas geodésicas. Sabemos que o ângulo φ que a curva Φ forma com os meridianos de X é dado por

$$\cos \varphi = \frac{1}{|X_u|} \langle X_u, T \rangle.$$

Substituindo (1.8) e (3.2) na equação do ângulo obtemos

$$\cos \varphi = ru'.$$

Combinando a equação da curvatura geodésica (3.9) com o limite (3.19) podemos inferir que $\lim_{s \rightarrow \infty} u' = 0$. Logo,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \cos \varphi = r \lim_{s \rightarrow \infty} u' = 0.$$

Ou seja, as extremidades de Φ são perpendiculares aos meridianos (no infinito). Uma vez que os equadores são geodésicas perpendiculares aos meridianos, concluímos que as extremidades de Φ são assintóticas aos equadores.

Um fato interessante que vale destacar e de fácil verificação é que a identidade $\kappa_n = rK$ é trivial para qualquer equador do toro \mathbb{T}^2 . Basta substituir (3.7) em (3.5) considerando u constante. Agora, como $u'(s) \rightarrow 0$ (quando $s \rightarrow \infty$), temos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \kappa_n = r \lim_{s \rightarrow \infty} K,$$

onde $K = \frac{\cos u}{r(R+r \cos u)}$ é a curvatura Gaussiana. Ou seja, as extremidades de Φ possuem a mesma propriedade. \square

Lema 3.1.6. *Seja Φ uma curva simples e fechada em uma superfície M^2 . Seja $\widehat{\Phi}^t$ sua evolução pelo fluxo redutor de curvas. Denote por R_t a região delimitada por $\widehat{\Phi}^t$ e por $A(t)$ a área de R_t . Suponha que R_t seja uma região simples. Então,*

$$\frac{dA}{dt} = \int \int_{R_t} K dA - 2\pi. \quad (3.20)$$

Demonstração. Como pode ser visto em [31, Seção 2], a primeira variação da área é dada por

$$\frac{dA}{dt} = - \int_{R_t} \mathcal{V},$$

onde \mathcal{V} é a velocidade do fluxo na direção normal.

Uma vez que $\widehat{\Phi}^t$ é solução do FRC, temos

$$\mathcal{V} = \left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle = \kappa_g^t.$$

Sendo R_t é uma região simples, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, segue-se que

$$\frac{dA}{dt} = - \int_{R_t} \kappa_g^t ds = \int \int_{R_t} K dA - 2\pi.$$

□

Como consequência direta do Teorema 3.1.5 temos o resultado a seguir.

Teorema 3.1.7. *Se um soliton do FRC em \mathbb{T}^2 é uma curva fechada e simplesmente conexa que delimita uma região simples, então ele não separa o \mathbb{T}^2 em duas componentes conexas.*

Demonstração. Seja Φ um soliton do FRC em \mathbb{T}^2 . Suponha Φ uma curva fechada e simplesmente conexa, de modo que separe \mathbb{T}^2 em duas componentes conexas.

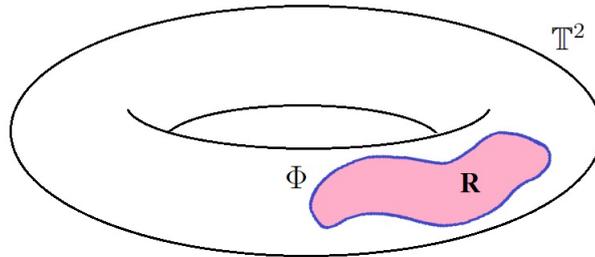


Figura 3.1: Ideia da demonstração.

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet podemos escrever

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int \int_R K dA = 2\pi.$$

Pela equação da primeira variação da área (3.20), temos

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \frac{dA}{dt} = 0.$$

Uma vez que a área é preservada por isometrias, devemos ter $A(t)$ constante, logo

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds = 0.$$

Utilizando a caracterização da curvatura geodésica dada pelo Lema 3.1.1 obtemos

$$0 = \int_{\partial R} \kappa_g ds = ar \int_{\partial R} (Ru' + ru' \cos u) ds = arRu + r^2 a \sin u + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$0 = rRu(s) + r^2 \sin u + \frac{c}{a},$$

Tomando a derivada em ambos os membros obtemos

$$0 = ru'(R + r \cos u).$$

Como $R > r$ e $-1 \leq \cos u \leq 1$ tem-se que $R + r \cos u > 0$. Sendo assim, devemos ter $u' = 0$. Ou seja, Φ deve ser um equador de \mathbb{T}^2 . Mas isso é uma contradição com a hipótese inicial de que Φ é uma curva que separa \mathbb{T}^2 em duas componentes conexas.

Portanto, um soliton do FRC em \mathbb{T}^2 não pode separar o toro \mathbb{T}^2 em duas componentes conexas. \square

Como já sabemos da geometria diferencial, curvas as quais possuem curvatura geodésica constante igual a $\kappa_g = 0$ são geodésicas. E as geodésicas são soluções triviais para o FRC. Inspirado por esses fatos podemos questionar se existem soluções para o FRC em \mathbb{T}^2 cuja curvatura geodésica é constante e não nula. No resultado a seguir procuramos responder esse questionamento.

Corolário 3.1.7.1. *Não existe solução soliton para o FRC em \mathbb{T}^2 com curvatura geodésica constante não nula.*

Demonstração. Seja Φ um soliton do FRC em \mathbb{T}^2 com curvatura geodésica constante não nula. Então, pelo que vimos no Teorema 3.1.3, da equação (3.15) temos

$$\frac{d}{ds} \left[\left(\frac{u'}{\sqrt{1 - r^2(u')^2}} \right)^{-1} \right] = \mp r\kappa.$$

Integrando ambos os membros,

$$\frac{1 - r^2(u')^2}{(u')^2} = (a_0 \mp r\kappa s)^2,$$

com $a_0 \in \mathbb{R}$.

Agora iremos resolver a equação anterior com a finalidade de encontrar a função u . Reescrevendo,

$$1 = [(a_0 \mp r\kappa s)^2 + r^2](u')^2.$$

Isolando u' ,

$$u'(s) = \frac{\pm 1}{\sqrt{(a_0 \mp r\kappa s)^2 + r^2}}. \quad (3.21)$$

Logo,

$$u(s) = \frac{-1}{r\kappa} \tanh^{-1} \left(\frac{a_0 \mp r\kappa s}{\sqrt{(a_0 \mp r\kappa s)^2 + r^2}} \right) + a_1,$$

com $a_1 \in \mathbb{R}$.

Além disso, combinando as equações (3.21) e (3.14) obtemos

$$v'(s) = \pm \left(\frac{ra}{\kappa} \right) u' \sqrt{1 - r^2(u')^2},$$

ou seja,

$$v'(s) = \pm \left(\frac{ra}{\kappa} \right) \frac{(a_0 \mp r\kappa s)}{(a_0 \mp r\kappa s)^2 + r^2}.$$

Finalmente, integrando ambos os membros, obtemos

$$v(s) = -\frac{a}{2\kappa^2} \log \left((\mp r\kappa s + a_0)^2 + r^2 \right) + a_2$$

where $a_2 \in \mathbb{R}$.

Desde modo, ao determinar u e v , acabamos de encontrar uma solução para o FRC.

Entretanto, ao se considerar a função u encontrada na equação da curvatura geodésica (3.9), podemos ver que a curvatura geodésica não é constante. Ou seja, uma contradição. \square

3.1.2 Exemplos

Nessa seção gostaríamos de apresentar soluções numéricas para o FRC em \mathbb{T}^2 . Para tal, plotamos em um software matemático as soluções do sistema dado pelo Teorema 3.1.2. Nas figuras abaixo podemos observar o que foi dito no Teorema 3.1.5, isto é, as extremidades das soluções são assintóticas aos equadores.

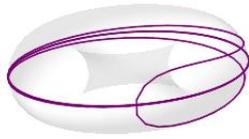


Figura 3.2: Condições iniciais: $u(0) = \frac{\pi}{4}$, $v(0) = \frac{\pi}{4}$, $u'(0) = 0$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = \frac{1}{2}$.

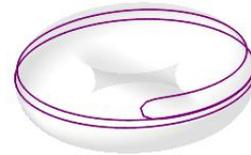


Figura 3.3: Condições iniciais: $u(0) = \frac{\pi}{4}$, $v(0) = \frac{\pi}{4}$, $u'(0) = 0$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = 2$.

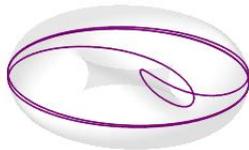


Figura 3.4: Condições iniciais: $u(0) = \pi$, $v(0) = \frac{\pi}{4}$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = \frac{1}{2}$.

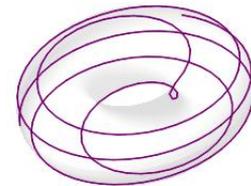


Figura 3.5: Condições iniciais: $u(0) = \pi$, $v(0) = \frac{\pi}{4}$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = 2$.

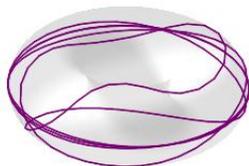


Figura 3.6: Condições iniciais: $u(0) = 0$, $v(0) = \pi$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = -0, 1$.

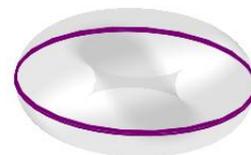


Figura 3.7: Condições iniciais: $u(0) = 0$, $v(0) = \pi$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = 10$.

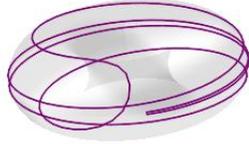


Figura 3.8: Condições iniciais: $u(0) = \pi$, $v(0) = \pi$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 0$, $\xi'(0) = 1$.

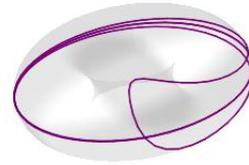


Figura 3.9: Condições iniciais: $u(0) = \pi$, $v(0) = \pi$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 0$, $\xi'(0) = -0,5$.

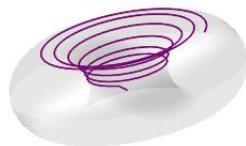


Figura 3.10: Condições iniciais: $u(0) = \pi$, $v(0) = \pi$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 0$, $\xi'(0) = 10$.

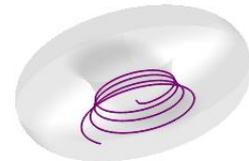


Figura 3.11: Condições iniciais: $u(0) = -\pi$, $v(0) = -\pi$, $u'(0) = -5$, $v'(0) = 0$, $\xi'(0) = -10$.

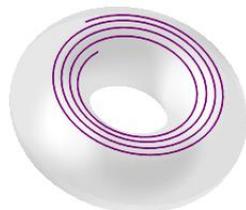


Figura 3.12: Condições iniciais: $u(0) = 4$, $v(0) = \pi$, $u'(0) = 1$, $v'(0) = 0$, $\xi'(0) = -15$.

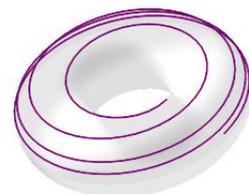


Figura 3.13: Condições iniciais: $u(0) = \pi$, $v(0) = \pi$, $u'(0) = \pi$, $v'(0) = \pi$, $\xi'(0) = \pi$.

3.2 Fluxo Redutor de Curvas em superfícies de revolução

Na seção anterior mostramos que as soluções soliton do FRC no toro de revolução são assintóticas aos equadores, que por sua vez são os únicos paralelos do toro que são geodésicas. Naturalmente surge o questionamento se é possível estender esses resultados para alguma família de superfícies. Nesta seção temos o objeto de responder esse questionamento, vamos generalizar para superfícies de revolução em \mathbb{R}^3 a análise que fizemos na Seção 3.1 no toro de revolução. Mostraremos que certas soluções soliton para o FRC em uma superfície de revolução são assintóticas aos paralelos que são geodésicas.

Seja M^2 uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 parametrizada por (1.3), ou seja

$$X(u, v) = (\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v)) \quad (3.22)$$

com curva geratriz $\alpha(v) = (\phi(v), 0, \psi(v))$ parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,

$$\left(\frac{d\phi}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dv}\right)^2 = 1.$$

Em M^2 vamos considerar o seguinte referencial ortonormal:

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin u, \cos u, 0); \\ e_2 &= (\dot{\phi} \cos u, \dot{\phi} \sin u, \dot{\psi}); \\ N &= e_1 \wedge e_2 = (\dot{\psi} \cos u, \dot{\psi} \sin u, -\dot{\phi}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

A fim de simplificar a notação, estamos denotando

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dv}, \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dv}, \quad \ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dv^2}, \quad \ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dv^2}.$$

A partir do referencial dado, temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (\phi) e_1, & X_v &= e_2, \\ X_{uu} &= -(\phi \dot{\phi}) e_2 - (\phi \dot{\psi}) N, & X_{vv} &= (\ddot{\phi} \dot{\psi} - \dot{\phi} \ddot{\psi}) N, & X_{uv} &= (\dot{\phi}) e_1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Seja $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em M^2 . Então,

$$T = u' X_u + v' X_v = (u' \phi) e_1 + (v') e_2 \quad (3.25)$$

e

$$\eta = N \wedge T = -(v') e_1 + (u' \phi) e_2, \quad (3.26)$$

onde $T = \Phi'$ é o campo tangente e η é o campo normal normal unitário de Φ .

Os campos T , N , e η formam um Triedro de Darboux, logo

$$T' = \kappa_g \eta + \kappa_n N, \quad \eta' = -\kappa_g T + \tau_g N \quad \text{e} \quad N' = -\kappa_n T - \tau_g \eta, \quad (3.27)$$

onde κ_g , κ_n e τ_g são, respectivamente, a curvatura geodésica, a curvatura normal e a torção geodésica de Φ . Derivando T , obtemos

$$\begin{aligned} T' &= u'' X_u + v'' X_v + 2u'v' X_{uv} + (u')^2 X_{uu} + (v')^2 X_{vv} \\ &= (u''\phi + 2u'v'\dot{\phi})e_1 + [v'' - (u')^2\phi\dot{\phi}]e_2 + [-(u')^2\phi\dot{\psi} + (v')^2(\ddot{\phi}\dot{\psi} - \dot{\phi}\ddot{\psi})]N. \end{aligned}$$

Da primeira equação de (3.27), vemos que

$$\kappa_n = \langle T', N \rangle = -(u')^2\phi\dot{\psi} + (v')^2(\ddot{\phi}\dot{\psi} - \dot{\phi}\ddot{\psi})$$

e

$$\kappa_g = \langle T', \eta \rangle = (u'v'' - u''v')\phi - u'\dot{\phi}(1 + (v')^2), \quad (3.28)$$

nesta segunda utilizamos o fato de que $|T| = 1$, isto é,

$$(u')^2\phi^2 + (v')^2 = 1. \quad (3.29)$$

Derivando a equação (3.29) em relação a s , temos

$$u'u''\phi^2 + (u')^2\phi\dot{\phi}v' + v'v'' = 0. \quad (3.30)$$

Nos resultados que estudaremos daqui por diante vamos considerar apenas os solitons de M^2 do tipo

$$\widehat{\Phi}^t(s) = \Psi^t(\Phi(s)), \quad (3.31)$$

onde a família de isometrias $\widehat{\Psi}^t(\cdot) = \Psi(\cdot, t)$ é da forma

$$\widehat{\Psi}^t = \begin{pmatrix} \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) & 0 \\ \sin \xi(t) & \cos \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, vamos considerar que a curva geratriz $\alpha(s) = (\phi(v), 0, \psi(v))$ de M^2 satisfaça

$$|\phi|, |\dot{\phi}| < \infty. \quad (3.32)$$

3.2.1 Soluções soliton para o FRC nas superfícies de revolução

No lema a seguir, vamos fornecer uma caracterização para a curvatura geodésica das soluções soliton do FRC em M^2 .

Lema 3.2.1. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do FRC em M^2 se, e somente, se*

$$\kappa_g = -a\phi v', \quad (3.33)$$

onde κ_g representa a curvatura geodésica de Φ e a é uma constante. Se $a = 0$ temos uma geodésica.

Demonstração. Seja Φ uma solução soliton para o FRC em M^2 . Então, de (1.30), devemos ter

$$\left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^0}{\partial t}, \eta \right\rangle = \kappa_g,$$

onde $\kappa_g \eta$ é o campo normal unitário de Φ . Por se tratar de um soliton em M^2 , podemos escrever

$$\widehat{\Phi}^t = \widehat{\Psi}^t(\Phi).$$

Derivando a equação anterior em $t = 0$ e utilizando (3.23) teremos

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}^0}{\partial t} = \frac{\partial \Psi^0}{\partial t} \Phi = [\xi'(0)\phi]e_1.$$

Denotando $a = \xi'(0)$, substituindo a identidade anterior e a equação (3.26) na equação de κ_g concluímos a primeira parte da prova.

Reciprocamente, seja $\Phi(s) = (x(s), y(s), z(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em M^2 com normal unitário $\eta(s) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. As funções $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$ são dadas por (3.22), e as funções $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$ e $\eta_3(s)$ são dadas por (3.26).

Suponha que

$$\kappa_g = -a\phi v'.$$

Considere uma família a um parâmetro de curvas $\Phi^t(s) = \widehat{\Psi}^t(\Phi(s))$ tal que

$$\widehat{\Psi}^t = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\widehat{\Psi}^t$ é uma isometria de M^2 , note que

$$\kappa_g^t(s) = \kappa_g(s)$$

para todo t , e

$$\eta^t = \widehat{\Psi}^t \eta = (\eta_1 \cos at - \eta_2 \sin at, \eta_1 \sin at + \eta_2 \cos at, \eta_3).$$

Além disso,

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}(s) = \frac{\partial \widehat{\Psi}^t}{\partial t} \Phi(s) = a(-x \sin at - y \cos at, x \cos at - y \sin at, 0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle &= a(-x \sin at - y \cos at)(\eta_1 \cos at - \eta_2 \sin at) \\ &\quad + a(x \cos at - y \sin at)(\eta_1 \sin at + \eta_2 \cos at) \\ &= a[-x\eta_1 \sin at \cos at - y\eta_1 \cos^2 at + x\eta_2 \sin^2 at + y\eta_2 \cos at \sin at] \\ &\quad + a[x\eta_1 \cos at \sin at - y\eta_1 \sin^2 at + x\eta_2 \cos^2 at - y\eta_2 \sin at \cos at] \\ &= a[-y\eta_1 + x\eta_2] \\ &= a[-\phi \sin u(v' \sin u + u' \dot{\phi} \cos u) \\ &\quad + \phi \cos u(-v' \cos u + u' \dot{\phi} \sin u)] \\ &= -a\phi v' \\ &= \kappa_g^t. \end{aligned}$$

□

No teorema a seguir, assim como fizemos no Seção 3.1, vamos fornecer um sistema de equações diferenciais das soluções soliton para o FRC em M^2 . Note que a partir deste sistema podemos recuperar o sistemas de equações diferenciais das geodésicas das superfícies de revolução (1.6).

Teorema 3.2.2. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do FRC em M^2 se, somente, se*

$$\begin{cases} u'' + \frac{2\dot{\phi}}{\phi} u'v' = a(v')^2; \\ v'' - \phi\dot{\phi}(u')^2 = -au'v'\phi^2. \end{cases} \quad (3.34)$$

Além disso, se $a = 0$ obtemos o sistema de equações diferenciais das geodésicas de M^2 .

Demonstração. Igualando as equações (3.28) e (3.33), referentes à curvatura geodésica, temos que

$$(u'v'' - u''v')\phi - u'\dot{\phi}(1 + (v')^2) = -av'\phi$$

Logo,

$$u'v'' - u''v' = -av' + \frac{u'\dot{\phi}(1+(v')^2)}{\phi}$$

Multiplicando a equação 3.30 por u' e a equação 3.2.1 por v' obtemos respectivamente

$$(u')^2\phi^2u'' = -(u')^3\phi\dot{\phi}v' - u'v'v''$$

e

$$u'v'v'' = -a(v')^2 + \frac{u'v'\dot{\phi}(1+(v')^2)}{\phi} + u''(v')^2.$$

Combinando as duas últimas equações, temos

$$[(u')^2\phi^2 + (v')^2]u'' = a(v')^2 - (u')^3\phi\dot{\phi}v' - \frac{u'v'\dot{\phi}(1+(v')^2)}{\phi}.$$

Utilizando a equação 3.29, podemos reescrever

$$u'' = a(v')^2 - \frac{u'v'\dot{\phi}(1-(v')^2)}{\phi} - \frac{u'v'\dot{\phi}(1+(v')^2)}{\phi}.$$

Logo,

$$u'' = a(v')^2 - \frac{2u'v'\dot{\phi}}{\phi}.$$

Por outro lado, multiplicando a equação 3.30 por v' e a equação 3.2.1 por $u'\phi^2$ obtemos respectivamente

$$(v')^2v'' = -u'v'u''\phi^2 - (u')^2(v')^2\phi\dot{\phi}$$

e

$$-u'u''v'\phi^2 = -au'v'\phi^2 + (u')^2\phi\dot{\phi}(1+(v')^2) - (u')^2\phi^2v''.$$

Combinando as duas últimas equações, temos

$$[(u')^2\phi^2 + (v')^2]v'' = -au'v'\phi^2 + (u')^2\phi\dot{\phi}(1+(v')^2) - (u')^2(v')^2\phi\dot{\phi}.$$

Utilizando a equação 3.29, concluímos que

$$v'' = -au'v'\phi^2 + (u')^2\phi\dot{\phi}.$$

□

Defina a seguinte função auxiliar:

$$\Lambda(s) = \frac{v'(s)}{\sqrt{1 - [v'(s)]^2}}.$$

Uma vez que $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ está parametrizada pelo comprimento de arco, Λ está bem definida. De fato, por (3.29),

$$1 - (v')^2 = (u')^2 \phi^2 \geq 0$$

Como $\phi > 0$, teremos $1 - (v')^2 = 0$ se, somente, se $u' = 0$. No que se segue, assumiremos que o conjunto de parâmetros para os quais $u' = 0$ não é denso. Em um conjunto aberto onde $u' = 0$, a curva Φ pode ser considerada como um meridiano de \mathbb{T}^2 , que é uma geodésica. No entanto, como geodésicas são soluções triviais para o FRC, não estamos interessados nesse caso. Não iremos abordar os casos de pontos isolados. Logo, $1 - (v')^2 > 0$.

Observação. Uma vez que não temos interesse em soluções triviais, teremos que $1 - (v')^2 > 0$, logo $|v'| < 1$. Isto é, v' é limitada.

Teorema 3.2.3. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Se $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do FRC em M^2 , então*

$$\kappa_g(s) = \pm \Lambda(s) \left(c + \int_I \kappa_g^2 \right); \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

Demonstração. Podemos reescrever a equação (3.30) isolando u'' , daí

$$u'' = -\frac{\dot{\phi}}{\phi} u' v' - \frac{u' v' v''}{(u')^2 \phi^2}.$$

Utilizando a equação (3.29) e a primeira equação de (3.34) na equação anterior temos

$$u'' = \frac{u'' - a(v')^2}{2} - \frac{u' v' v''}{1 - (v')^2}.$$

Logo,

$$u'' = -a(v')^2 - \frac{2u' v' v''}{1 - (v')^2}.$$

Note que, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{u''[1 - (v')^2] + u'[(v')^2]'}{[1 - (v')^2]^2} = \frac{-a(v')^2}{1 - (v')^2}.$$

Sendo assim,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{u'}{1 - (v')^2} \right) = \frac{-a(v')^2}{1 - (v')^2}. \quad (3.36)$$

Por outro lado, isolando u' na equação (3.29), temos

$$u' = \frac{\pm \sqrt{1 - (v')^2}}{\phi}.$$

Combinando a equação da curvatura geodésica (3.33) com a equação anterior obtemos

$$\kappa_g u' = \mp av' \sqrt{1 - (v')^2},$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{u'}{1 - (v')^2} = \mp \frac{av'}{\kappa_g \sqrt{1 - (v')^2}}.$$

Derivando ambos os membros e comparando com a equação (3.36), segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\mp \frac{av'}{\kappa_g \sqrt{1 - (v')^2}} \right) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{u'}{1 - (v')^2} \right) \\ &= \frac{-a(v')^2}{1 - (v')^2} \\ &= -a \left(\frac{v'}{\sqrt{1 - (v')^2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Considerando a função auxiliar Λ podemos escrever

$$\pm \frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right) = \Lambda^2. \quad (3.37)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Lambda^2 &= \pm \frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right); \\ \kappa_g^2 \frac{\Lambda^2}{\kappa_g^2} &= \pm \frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right); \\ \kappa_g^2 &= \pm \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)}{\left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)^2}; \\ \kappa_g^2 &= \mp \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

E integrando ambos os membros

$$\kappa_g = \pm \Lambda \left(c + \int_I \kappa_g^2 \right),$$

onde $c \in \mathbb{R}$. □

E finalmente temos o resultado principal deste capítulo, generalizando o Teorema 3.1.5.

Teorema 3.2.4. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Se $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do FRC em M^2 com $\int_I \kappa_g^2 < \infty$ e $|\phi|, |\dot{\phi}| < \infty$, então as duas extremidades da curva são assintóticas aos paralelos que são geodésicas.*

Demonstração. Derivando a equação da curvatura geodésica (3.33), temos

$$\kappa'_g = -a[\dot{\phi}(v')^2 + \phi v''].$$

Multiplicando a equação anterior por $\frac{\Lambda}{\kappa_g}$, e usando o fato de que

$$\Lambda' = \frac{v''}{[1 - (v')^2]^{3/2}},$$

temos

$$\begin{aligned} \kappa'_g \frac{\Lambda}{\kappa_g} &= \frac{-av'}{\kappa_g \sqrt{1 - (v')^2}} \left[\dot{\phi}(v')^2 + \phi v'' \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v')^2}} \left[\frac{\dot{\phi}}{\phi}(v')^2 + v'' \right] \\ &= \frac{\dot{\phi}(v')^2}{\phi \sqrt{1 - (v')^2}} + \frac{v''}{\sqrt{1 - (v')^2}} \\ &= \frac{\dot{\phi}(v')^2}{\phi \sqrt{1 - (v')^2}} + \Lambda' [1 - (v')^2] \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação (3.37) vemos que

$$\kappa'_g \frac{\Lambda}{\kappa_g} = \Lambda' \pm \kappa_g \Lambda^2.$$

Substituindo na equação anterior,

$$\begin{aligned}
 \Lambda' \pm \kappa_g \Lambda^2 &= \frac{\dot{\phi}(v')^2}{\phi\sqrt{1-(v')^2}} + \Lambda'[1-(v')^2] \\
 \Lambda'(v')^2 &= \mp \kappa_g \Lambda^2 + \frac{\dot{\phi}(v')^2}{\phi\sqrt{1-(v')^2}} \\
 \Lambda' &= \mp \frac{\kappa_g}{(v')^2} \left(\frac{v'}{\sqrt{1-(v')^2}} \right)^2 + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(v')^2}} \\
 \Lambda' &= \mp \frac{\kappa_g}{1-(v')^2} + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(v')^2}} \\
 \Lambda' &= \pm \frac{a\phi v'}{1-(v')^2} + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(v')^2}} \\
 \frac{v''}{[1-(v')^2]^{3/2}} &= \pm \frac{a\phi v'}{1-(v')^2} + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(v')^2}} \\
 \frac{v''}{1-(v')^2} &= \pm \frac{a\phi v'}{\sqrt{1-(v')^2}} + \frac{\dot{\phi}}{\phi}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$|v''| \leq |a|\phi + \frac{|\dot{\phi}|}{\phi}.$$

Defina

$$f(s) = \int_{s_0}^s \kappa_g^2.$$

Note que $f' = \kappa^2 \geq 0$, logo f é não decrescente. Uma vez que $f < \infty$, o limite $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)$ existe.

Além disso, f' é uniformemente contínua. De fato, veja que $f'' = 2\kappa_g' \kappa_g$, então

$$\begin{aligned}
 |f''| &= 2| -a(\dot{\phi}(v')^2 + \phi v'') | - a\phi v'| \\
 &= 2a^2\phi|v'|\dot{\phi}(v')^2 + \phi v''| \\
 &\leq 2a^2\phi|\dot{\phi}(v')^2 + \phi v''| \\
 &\leq 2a^2\phi(|\dot{\phi}||v'|^2 + \phi|v''|) \\
 &\leq 2a^2\phi(|\dot{\phi}| + \phi|v''|) \\
 &\leq 2a^2\phi(|\dot{\phi}| + |a|\phi^2 + |\dot{\phi}|) \\
 &\leq 2a^2\phi(2|\dot{\phi}| + |a|\phi^2).
 \end{aligned}$$

Com isso mostramos que $|f''|$ é limitada, e conseqüentemente f' é uniformemente contínua como afirmamos.

Nas condições em que a função f se encontra, é possível aplicar o Lema de Barbalat 3.1.4. Ao fazer isso, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f'(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \kappa_g^2 = 0. \quad (3.38)$$

Mostrando que as extremidades de Φ são assintóticas a geodésicas.

Denotando por θ ângulo que a curva Φ forma os meridianos de X , sabemos que

$$\cos \theta = \frac{1}{|X_v|} \langle X_v, T \rangle.$$

Substituindo (3.25) e (3.24) na equação acima, temos

$$\cos \theta = v'.$$

Utilizando a equação da curvatura geodésica (3.33) em conjunto com o limite (3.38), concluímos que $\lim_{s \rightarrow \infty} v' = 0$. Logo,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \cos \theta = \lim_{s \rightarrow \infty} v' = 0.$$

Isso mostra que as extremidades de Φ são perpendiculares aos meridianos. Portanto Φ deve ser assintótica aos paralelos que são geodésicas. \square

Teorema 3.2.5. *Seja Φ um soliton do FRC em M^2 e $\phi(v)$ integrável. Se Φ é uma curva fechada e simplesmente conexa que delimita uma região simples de M^2 , então Φ é um paralelo e geodésica de M^2 .*

Demonstração. Seja $h(v)$ uma função tal que $h'(v) = \phi(v)$. Suponha que a região R delimitada por Φ seja simples.

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet podemos escrever

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int \int_R K dA = 2\pi.$$

Da primeira variação da área (3.20), temos que

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \frac{dA}{dt} = 0.$$

Uma vez que a área é preservada por isometrias, devemos ter $A(t)$ constante, daí

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds = 0.$$

Pela caracterização da curvatura geodésica dada pelo Lema 3.2.1,

$$0 = \int_{\partial R} \kappa_g ds = -a \int_{\partial R} \phi v' ds = -ah(v) + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$0 = -ah(v) + \frac{c}{a},$$

Tomando a derivada em ambos os membros obtemos

$$0 = -a\phi v'.$$

Como $\phi > 0$, devemos ter $v' = 0$. Ou seja, Φ deve ser um paralelo de M^2 e pelo Teorema 3.2.4 concluímos que deve ser uma geodésica. \square

3.2.2 Soluções soliton para o FRC no catenoide

Seja C o catenoide parametrizada por

$$X(u, v) = \left(\lambda \cosh\left(\frac{s}{\lambda}\right) \cos(u), \lambda \cosh\left(\frac{s}{\lambda}\right) \sin(u), s \right).$$

onde $s = \lambda \ln\left(\frac{v + \sqrt{v^2 + \lambda^2}}{\lambda}\right)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A curva geratriz do catenoide é a catenária, dada por

$$\alpha(v) = \left(\lambda \cosh\left(\frac{s}{\lambda}\right), 0, s \right).$$

Apesar da catenária estar parametrizada pelo comprimento de arco, ela não satisfaz as condições de limitação (3.32). Ou seja, o Teorema 3.2.4 não se aplica ao catenoide. Isto quer dizer que não teremos, necessariamente, soluções assintóticas ao equador central, que por sua vez é o único paralelo do catenoide que é uma geodésica. A seguir temos algumas soluções numéricas nas quais podemos atestar esse fato.

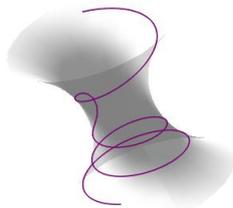


Figura 3.14: Condições iniciais: $u(0) = 1$, $v(0) = 1$, $u'(0) = 2$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = 1$.



Figura 3.15: Condições iniciais: $u(0) = 2$, $v(0) = 1$, $u'(0) = -1$, $v'(0) = 1$, $\xi'(0) = 1$.

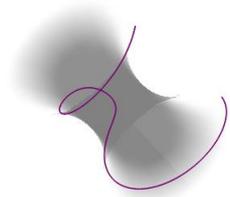


Figura 3.16: Condições iniciais: $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $u'(0) = \frac{1}{5}$, $v'(0) = \frac{9}{10}$, $\xi'(0) = \frac{1}{2}$.



Figura 3.17: Condições iniciais: $u(0) = 4$, $v(0) = 0$, $u'(0) = \frac{1}{4}$, $v'(0) = \frac{55}{100}$, $\xi'(0) = \frac{1}{5}$.

3.2.3 Soluções soliton para o FRC no cilindro

Seja C o cilindro reto parametrizada por

$$X(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v). \quad (3.39)$$

Note que a curva geratriz $\alpha(v) = (1, 0, v)$ está parametrizada pelo comprimento de arco e satisfaz a condição (3.32). Logo, vale o Teorema 3.2.4. Isto é, as soluções soliton do FRC no cilindro vão ser assintóticas aos paralelos, que são geodésicas do cilindro.

A seguir temos algumas soluções numéricas de soluções no cilindro.

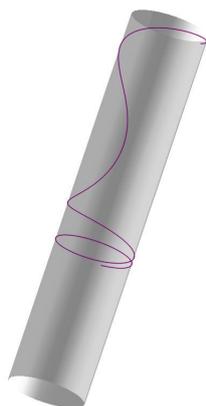


Figura 3.18: Condições iniciais: $u(0) = 1$, $v(0) = \frac{1}{2}$, $u'(0) = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = \frac{1}{2}$.



Figura 3.19: Condições iniciais: $u(0) = 1$, $v(0) = \frac{1}{2}$, $u'(0) = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = 1$.

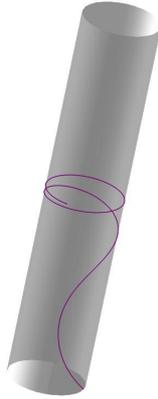


Figura 3.20: Condições iniciais: $u(0) = 1$, $v(0) = \frac{1}{2}$, $u'(0) = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = -\frac{1}{2}$.

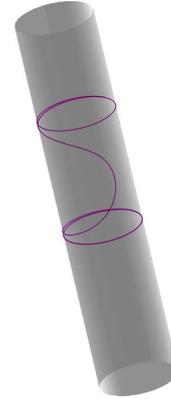


Figura 3.21: Condições iniciais: $u(0) = 1$, $v(0) = \frac{1}{2}$, $u'(0) = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = -1$.

Vale ressaltar que os solitons que estamos considerando são forma (3.31), onde as isometrias são rotações.

No que se segue iremos fazer uma análise das soluções soliton da forma

$$\widehat{\Phi}^t(s) = \Psi^t(\Phi(s)) = \Phi(s) + (0, 0, \xi(t)) \quad (3.40)$$

onde $\widehat{\Psi}^t(\cdot) = \Psi(\cdot, t)$ é uma família a 1-parâmetro de translações ao longo do eixo de rotação de C . Por outro lado, dado que o cilindro e o plano são isométricos, então não há muita novidade neste caso. E vamos ver que estas soluções são do tipo Grim Reaper.

De (3.23), temos que um referencial ortonormal em C é dado por

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin u, \cos u, 0); \\ e_2 &= (0, 0, 1); \\ N &= e_1 \wedge e_2 = (\cos u, \sin u, 0). \end{aligned}$$

A partir das equações (3.28), (3.29) e (3.30), obtemos

$$\kappa_g = u'v'' - u''v'; \quad (u')^2 + (v')^2 = 1; \quad u'u'' + v'v'' = 0. \quad (3.41)$$

Lema 3.2.6. *Considere o cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$. Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do FRC em C se, e somente, se*

$$\kappa_g = au', \quad (3.42)$$

onde κ_g representa a curvatura geodésica de Φ e a é uma constante. Se $a = 0$ temos uma

geodésica.

Demonstração. Seja Φ uma solução soliton do tipo (3.40). Então,

$$\left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^0}{\partial t}, \eta \right\rangle = \kappa_g,$$

onde κ_g é a curvatura geodésica e η é o campo normal unitário de Φ . Note que

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}^0}{\partial t} = (0, 0, \xi'(0)) = [\xi'(0)]e_2.$$

De (3.26), temos que

$$\eta = -(v')e_1 + (u')e_2,$$

escrevendo $a = \xi'(0)$, e utilizando equação de κ_g concluímos a primeira parte da prova.

Reciprocamente, seja $\Phi(s) = (x(s), y(s), z(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em C com normal unitário $\eta(s) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. As funções $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$ são dadas por (3.39) e as funções $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$ e $\eta_3(s)$ são dadas por (3.26).

Suponha que

$$\kappa_g = au'.$$

Considere uma família a um parâmetro de curvas dada por

$$\widehat{\Phi}^t(s) = \Psi^t(\Phi(s)) = \Phi(s) + (0, 0, at).$$

Note que $\widehat{\Psi}^t$ é uma isometria por translação do cilindro C . Logo preserva a primeira forma. E deste modo a curvatura geodésica também é preservada, isto é,

$$\kappa_g^t(s) = \kappa_g(s)$$

para todo t . O normal unitário da família não é alterado por translação, logo é dado por

$$\eta^t = \widehat{\Psi}^t \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta.$$

Além disso,

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}(s) = \frac{\partial \widehat{\Psi}^t}{\partial t} \Phi(s) = (0, 0, a) = ae_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle &= \langle ae_2, \eta \rangle \\ &= \langle ae_2, \eta \rangle \\ &= au' \end{aligned}$$

□

As soluções por translação, dadas a seguir, não serão exploradas tão a fundo devido ao trabalho [19].

Teorema 3.2.7. *Seja $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no cilindro C . Então, $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$ é um soliton do fluxo redutor de curvas em C se, somente, se*

$$\begin{cases} u'' = -au'v'; \\ v'' = a(u')^2. \end{cases} \quad (3.43)$$

Além disso, se $a = 0$ obtemos o sistema de equações diferenciais das geodésicas de C .

Demonstração. Comparando as equações da curvatura geodésica dadas em (3.41) e (3.42), podemos observar que

$$u'v'' - u''v' = au'.$$

Considerando a equação anterior e a terceira equação de (3.41) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u'v'' - u''v' = au'; \\ u'u'' + v'v'' = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Multiplicando a primeira equação de (3.44) por u' e a segunda por v' obtemos respectivamente

$$(u')^2v'' - u'u''v' = a(u')^2$$

e

$$u'u''v' + (v')^2v'' = 0.$$

Combinando as duas últimas equações e utilizando o fato de que $(u')^2 + (v')^2 = 1$, obtemos

$$v'' = a(u')^2.$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação de (3.44) por v' e a segunda por u' obtemos respectivamente

$$u'v'v'' - u''(v')^2 = au'v'$$

e

$$(u')^2u'' + u'v'v'' = 0.$$

Combinando as duas últimas equações e novamente utilizando $(u')^2 + (v')^2 = 1$, segue-se que

$$u'' = -au'v'.$$

□

A seguir algumas soluções numéricas no cilindro a partir de (3.43).



Figura 3.22: Condições iniciais: $u(0) = -1$, $v(0) = 6$, $u'(0) = \frac{4}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = -\frac{1}{2}$.



Figura 3.23: Condições iniciais: $u(0) = -1$, $v(0) = 1$, $u'(0) = \frac{4}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = 1$.



Figura 3.24: Condições iniciais: $u(0) = -1$, $v(0) = 1$, $u'(0) = \frac{4}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = 3$.

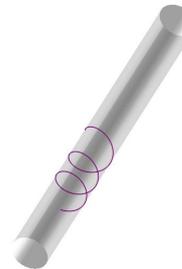


Figura 3.25: Condições iniciais: $u(0) = -1$, $v(0) = -3$, $u'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $v'(0) = \frac{1}{4}$, $\xi'(0) = \frac{1}{100}$.



Figura 3.26: Condições iniciais: $u(0) = -1$, $v(0) = -3$, $u'(0) = \frac{1}{2}$, $v'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\xi'(0) = \frac{1}{100}$.



Figura 3.27: Condições iniciais: $u(0) = -1$, $v(0) = -3$, $u'(0) = \frac{4}{3}$, $v'(0) = \frac{1}{3}$, $\xi'(0) = \frac{1}{100}$.

Capítulo 4

Hipersuperfícies Tipo- T -Einstein

No que se segue trabalharemos com hipersuperfícies Tipo-Einstein em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ que possuem T como vetor potencial. Essas hipersuperfícies serão denotadas por *Tipo- T -Einstein*.

Veremos aqui que uma classe de hipersuperfícies Tipo- T -Einstein são hipersuperfícies de rotação. As hipersuperfícies de rotação possuem a característica de ter o campo T como direção principal, para mais detalhes veja [14]. Em [30], Tojeiro apresentou uma classificação para hipersuperfícies que possuem essa característica.

Teorema 4.0.1. [30, Teorema 1] *Seja f a aplicação definida em (1.37), onde ϕ_s é definida por (1.36). Então f define, em seus pontos regulares, uma hipersuperfície que possui T como direção principal. Reciprocamente, qualquer hipersuperfície M^n em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, $n \geq 2$, com função ângulo $\nu \neq 0$, que possui T como direção principal é localmente dada por f .*

Além disso, foi mostrado que

$$T = \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2} \partial_s \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + a'(s)^2}}. \quad (4.1)$$

Logo,

$$|T| = \frac{a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}}. \quad (4.2)$$

As curvaturas principais também são conhecidas:

$$\lambda_i = -\frac{a'(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} \lambda_i^s \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{a''(s)}{(\sqrt{1 + a'(s)^2})^3}, \quad (4.3)$$

para $1 \leq i \leq n - 1$, de modo que $ST = \lambda_n T$ e λ_i^s são as curvaturas principais de ϕ_s que, por sua vez, são dadas por

$$\lambda_i^s = \frac{\varepsilon S_\varepsilon(s) + \lambda_i^\phi C_\varepsilon(s)}{C_\varepsilon(s) - \lambda_i^\phi S_\varepsilon(s)}. \quad (4.4)$$

Estamos denotando por λ_i^ϕ as curvaturas principais de ϕ . Note que ao derivar a equação (4.2)

obtemos a equação (4.3), isto é

$$\lambda_n = \frac{d}{ds}|T|. \quad (4.5)$$

Essa caracterização apresentada por Tojeiro será de extrema importância nas demonstrações dos teoremas deste capítulo. Em linhas gerais nossa estratégia será verificar que em certas condições T é uma direção principal para hipersuperfícies Tipo- T -Einstein, dessa forma temos um arsenal de equações fornecidas por tal caracterização. Num segundo momento iremos estudar a multiplicidade das curvaturas principais e atestar que o operador forma é do tipo dado pela Equação 1.3.2. Desse modo, pelo Teorema 1.3.2 concluí-se que as hipersuperfícies Tipo- T -Einstein são de rotação.

4.1 Hipersuperfícies tipo-Einstein em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

A seguir temos um condição com o propósito de garantir que T é uma direção principal de uma hipersuperfícies Tipo- T -Einstein. Um fato interessante sobre tal condição é que as hipersuperfícies que a satisfazem não podem ser totalmente umbílicas.

Lema 4.1.1. *Seja M^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfícies Tipo- T -Einstein tal que $\gamma \neq \alpha\varepsilon(n-2)$. Considere $p \in M^n$ de modo que $T(p) \neq 0$. Então, $T(p)$ é um autovetor do operador forma e p é não umbílico.*

Demonstração. Utilizando a equação (1.33) na derivada de Lie temos

$$\mathcal{L}_T g(X, Y) = g(\nabla_X T, Y) + g(X, \nabla_Y T) = 2\nu(g(SX, Y)),$$

Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal de direções principais sobre M^n . Considere $T = \sum t_i e_i$. Aplicando a equação

$$\alpha \text{Ric} + \frac{\beta}{2} \mathcal{L}_V g + \gamma T^b \otimes T^b = \sigma g$$

no referencial e considerando as equações 1.34 e 4.1 obtemos

$$\begin{aligned} & [\alpha\varepsilon(n-1-|T|^2) + \alpha n H \lambda_i - \alpha \lambda_i \lambda_j + \beta \nu \lambda_i - \sigma] \delta_{ij} \\ & + [\alpha\varepsilon(2-n) + \gamma] t_i t_j = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considerando $i \neq j$ na equação (4.6) notamos que $t_i t_j = 0$. Uma vez que estamos considerando $T \neq 0$, para algum k devemos ter $t_k \neq 0$ e, conseqüentemente $T = t_k e_k$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $T = t_n e_n$ com $ST = \lambda_n T$. Por contradição, suponha que $p \in M^n$ seja umbílico. Em p , temos que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$. Considerando

$1 \leq i = j \leq n - 1$ e $i = j = n$ na equação (4.6) obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned}\alpha\varepsilon(n - 1 - |T|^2) + (\alpha nH + \beta\nu)\lambda - \alpha\lambda^2 - \sigma &= 0, \\ \alpha\varepsilon(n - 1)(1 - |T|^2) + \gamma|T|^2 + (\alpha nH + \beta\nu)\lambda - \alpha\lambda^2 - \sigma &= 0.\end{aligned}$$

Fazendo a subtração das duas equações anteriores obtemos

$$(\gamma - \alpha\varepsilon(n - 2))|T|^2 = 0.$$

Sendo assim, devemos ter $T(p) = 0$ ou $\gamma = \alpha\varepsilon(n - 2)$ que é uma contradição.

Com isso concluímos que M^n não possui pontos umbílicos. \square

Sabe-se que o conjunto de pontos para os quais o vetor potencial de um gradiente Ricci soliton se anula, é um conjunto de medida nula. No caso de uma variedade tipo-Einstein, isto é, equações de estrutura na sua forma mais geral, desconhecemos a natureza desse conjunto. Sendo assim, nos resultados que se seguem, vamos considerar que o vetor potencial T não se anula. Vale ressaltar que para o caso $T \equiv 0$, a equação de estrutura (1.39) se transforma na equação de estrutura de uma hipersuperfície de Einstein, e estas já foram classificadas em [24].

A seguir, veremos como os valores das constantes α , β e γ apresentados na Definição 1.5.1 influenciam na classificação das hipersuperfícies Tipo- T -Einstein.

Teorema 4.1.2. *Seja M^n , $n > 3$, uma hipersuperfície Tipo- T -Einstein, com $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq \alpha\varepsilon(n - 2)$ e $\nu \neq 0$. Se σ é constante, então M^n possui exatamente duas curvaturas principais distintas e é localmente uma hipersuperfície de rotação.*

Demonstração. Por hipótese,

$$\alpha \neq 0, \quad \nu \neq 0 \quad \text{e} \quad \gamma \neq \alpha\varepsilon(n - 2).$$

Pelo Lema 4.1.1, sabemos que T é uma direção principal. Sendo assim, podemos considerar $T = t_n e_n$ com $ST = \lambda_n T$.

Considerando $1 \leq i = j \leq n - 1$ e $i = j = n$ na equação (4.6) temos, respectivamente,

$$\alpha\varepsilon(n - 1 - |T|^2) + (\alpha nH + \beta\nu)\lambda_i - \alpha\lambda_i^2 - \sigma = 0; \quad (4.7)$$

$$\alpha\varepsilon(n - 1)(1 - |T|^2) + \gamma|T|^2 + (\alpha nH + \beta\nu)\lambda_n - \alpha\lambda_n^2 - \sigma = 0. \quad (4.8)$$

A partir da equação (4.7) podemos escrever

$$(\lambda_i - \lambda_j)[(\alpha nH + \beta\nu) - \alpha(\lambda_i + \lambda_j)] = 0. \quad (4.9)$$

Agora, mostraremos que a equação (4.9) implica que entre as $(n - 1)$ primeiras curvaturas existem no máximo duas distintas. Suponha que existam pelo menos três distintas, digamos λ_{i_1} ,

λ_{i_2} e λ_{i_3} . Por 4.9, devemos ter

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = nH + \frac{\beta\nu}{n}, \quad \lambda_{i_2} + \lambda_{i_3} = nH + \frac{\beta\nu}{n}, \quad \lambda_{i_3} + \lambda_{i_1} = nH + \frac{\beta\nu}{n}.$$

Mas as equações anteriores acarretam em $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$, o que é uma contradição. Logo, existem no máximo duas curvaturas principais distintas entre as $(n - 1)$ primeiras. A seguir, mostraremos que na verdade não existem duas curvaturas principais distintas, ou seja, devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1}$.

Suponha que existam duas curvaturas principais distintas entre as $(n - 1)$ primeiras, λ_1 e λ_2 de multiplicidades p e q , respectivamente. Por (4.9), obtemos

$$n\alpha H + \beta\nu = \alpha(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (4.10)$$

Usando a definição da curvatura média H podemos escrever

$$n\alpha \left(\frac{p\lambda_1 + q\lambda_2 + \lambda_n}{n} \right) + \beta\nu = \alpha(\lambda_1 + \lambda_2),$$

daí

$$\alpha\lambda_n + \beta\nu = \alpha(1 - p)\lambda_1 + \alpha(1 - q)\lambda_2.$$

Combinando as equações (4.7) e (4.10), vê-se que

$$\alpha\varepsilon(n - 1 - |T|^2) + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1 - \alpha\lambda_1^2 - \sigma = 0,$$

logo

$$\alpha\lambda_1\lambda_2 = \sigma - \alpha\varepsilon(n - 1 - |T|^2).$$

Em resumo, temos

$$\alpha\lambda_n + \beta\nu = \alpha(1 - p)\lambda_1 + \alpha(1 - q)\lambda_2 \quad (4.11)$$

e

$$\alpha\lambda_1\lambda_2 = \sigma - \alpha\varepsilon(n - 1 - |T|^2). \quad (4.12)$$

Por hipótese, a função ângulo ν é não nula, logo podemos aplicar o Teorema 4.0.1. Deste modo, sabemos que M^n é localmente dada por (1.37). Daí, (4.8) implica em

$$\alpha\varepsilon(n - 1)(1 - |T|^2) + \gamma|T|^2 + [\alpha(p\lambda_1 + q\lambda_2 + \lambda_n) + \beta\nu]\lambda_n - \alpha\lambda_n^2 - \sigma = 0.$$

Aplicando as caracterizações (4.2) e (4.3) na equação anterior obtemos

$$\alpha\varepsilon(n-1)(1-|T|^2) + \gamma|T|^2 + \alpha\lambda_n(-p|T|\lambda_1^s - q|T|\lambda_2^s) + \beta\nu\lambda_n - \sigma = 0.$$

Então,

$$\alpha\varepsilon(n-1)(1-|T|^2) + \gamma|T|^2 - \alpha\lambda_n|T|(p\lambda_1^s + q\lambda_2^s) + \beta\nu\lambda_n - \sigma = 0.$$

Denote por H_{ϕ_s} a curvatura média da família de hipersuperfícies paralelas ϕ_s . Usando a definição de H_{ϕ_s} podemos escrever

$$\alpha\varepsilon(n-1)(1-|T|^2) + \gamma|T|^2 - \alpha(n-1)\lambda_n|T|H_{\phi_s} + \beta\nu\lambda_n - \sigma = 0. \quad (4.13)$$

Suponha $\lambda_n \neq 0$. Como $\alpha \neq 0$ segue da equação (4.13) que H_{ϕ_s} depende apenas de s . De fato, note que β, γ e σ são constantes, além disso as equações (4.1) e (4.3) mostram que $|T|, \nu$ e λ_n dependem apenas de s .

Como vimos na Seção 1.4, o fato da curvatura média da família ϕ_s depender apenas de s implica em ϕ ser isoparamétrica, e pelo que vimos até aqui, com duas curvaturas principais distintas. Pela identidade de Cartan (1.38) temos que

$$\lambda_1^\phi \lambda_2^\phi + \varepsilon = 0.$$

Pelas caracterizações (4.2) e (4.3) temos

$$\left(\frac{\lambda_1}{-|T|} \right) \left(\frac{\lambda_2}{-|T|} \right) + \varepsilon = 0.$$

Então,

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\varepsilon |T|^2. \quad (4.14)$$

Combinando as equações (4.12) e (4.14) obtemos

$$|T|^2 = \frac{\alpha\varepsilon(n-1) - \sigma}{2\alpha\varepsilon},$$

implicando que $|T|^2$ é constante. Da equação (4.5), temos $\lambda_n = 0$, o que é uma contradição. Portanto devemos ter obrigatoriamente $\lambda_n \equiv 0$.

Sabendo que $\lambda_n \equiv 0$, vamos dividir a demonstração em dois casos: $\alpha\varepsilon(n-1) - \gamma \neq 0$ e $\alpha\varepsilon(n-1) - \gamma = 0$.

Primeiro vamos considerar

$$\lambda_n \equiv 0 \quad \text{e} \quad \alpha\varepsilon(n-1) - \gamma \neq 0.$$

Da equação (4.8) temos que

$$|T|^2 = \frac{\alpha\varepsilon(n-1) - \sigma}{\alpha\varepsilon(n-1) - \gamma}. \quad (4.15)$$

Pela decomposição (1.31) podemos escrever

$$\langle \partial_{x_{n+2}}, \partial_{x_{n+2}} \rangle = \langle T + \nu N, T + \nu N \rangle \Rightarrow 1 - |T|^2 = \nu^2.$$

Daí,

$$\nu^2 = \frac{\sigma - \gamma}{\alpha\varepsilon(n-1) - \gamma}.$$

Usando as caracterizações (4.2) e (4.3) em conjunto com (4.15), podemos reescrever as equações (4.11) e (4.12). Da equação (4.11), temos

$$\frac{-\beta\nu}{|T|} = \alpha(1-p)\lambda_1^s + \alpha(1-q)\lambda_2^s, \quad (4.16)$$

E, pela equação (4.12),

$$\alpha(-|T|\lambda_1^s)(-|T|\lambda_2^s) = \sigma - \alpha\varepsilon(n-1 - |T|^2).$$

Combinando a equação anterior com (4.15) obtemos

$$\begin{aligned} \alpha\lambda_1^s\lambda_2^s &= -\frac{\alpha\varepsilon(n-1) - \sigma}{|T|^2} + \alpha\varepsilon \\ &= -[\alpha\varepsilon(n-1) - \gamma] + \alpha\varepsilon \\ &= \gamma - \alpha\varepsilon(n-2) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Observe que, a partir da equação (4.17), podemos afirmar que $\lambda_1^s \neq 0$ e $\lambda_2^s \neq 0$. Uma vez que $p + q = n - 1 \geq 3$, devemos ter $p \neq q \neq 1$. Sem perda de generalidade, suponha $p \neq 1$. Combinando as equações (4.16) e (4.17) obtemos

$$\alpha \frac{(1-q)}{(1-p)} (\lambda_2^s)^2 + \frac{\beta\nu}{(1-p)|T|} \lambda_2^s + [\gamma - \alpha\varepsilon(n-2)] = 0.$$

Como α , γ , $|T|$ e ν são constantes, temos que λ_2^s é raiz de um polinômio do segundo grau, ou seja, λ_2^s é constante. Consequentemente, da equação (4.17) também temos λ_1^s constante.

Em particular, λ_1^s e λ_2^s não dependem de s , pois independentemente do valor de s tem se que λ_i^s é raiz do mesmo polinômio. Sendo assim, como $\lambda_i^0 = \lambda_i^\phi$, logo $\lambda_i^s = \lambda_i^\phi$ para cada valor de s . Deste modo, a equação (4.17) pode ser reescrita como

$$\alpha\lambda_1^\phi\lambda_2^\phi = \gamma - \alpha\varepsilon(n-2).$$

Por outro lado, da caracterização (4.4) temos

$$\lambda_i^\phi = \frac{\varepsilon S_\varepsilon(s) + \lambda_i^\phi C_\varepsilon(s)}{C_\varepsilon(s) - \lambda_i^\phi S_\varepsilon(s)}.$$

Logo,

$$\lambda_i^\phi (C_\varepsilon(s) - \lambda_i^\phi S_\varepsilon(s)) = \varepsilon S_\varepsilon(s) + \lambda_i^\phi C_\varepsilon(s),$$

desenvolvendo mais um pouco obtemos

$$(\lambda_i^\phi)^2 S_\varepsilon(s) = -\varepsilon S_\varepsilon(s),$$

daí concluímos que

$$(\lambda_i^\phi)^2 = -\varepsilon. \tag{4.18}$$

Isso nos mostra que ϕ é uma hipersuperfície isoparamétrica, logo pela identidade de Cartan temos que

$$\lambda_1^\phi \lambda_2^\phi = -\varepsilon,$$

que, em conjunto com (4.3) e (4.18), implica em

$$\lambda_1^\phi = \lambda_2^\phi \Rightarrow \lambda_1^s = \lambda_2^s \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Entretanto, estamos supondo a existência de duas curvaturas principais distintas. Logo, temos uma contradição. Sendo assim, devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \mu$ e $\lambda_n = \lambda$. Pelo Teorema 1.3.2, concluímos que M^n é localmente uma hipersuperfície de rotação. Pelo Lema 4.1.1 é também não umbílica.

Para finalizar, vamos considerar o caso

$$\lambda_n \equiv 0 \quad \text{e} \quad \alpha\varepsilon(n-1) = \gamma.$$

Da equação (4.8) temos

$$\gamma(1 - |T|^2) + \gamma|T|^2 - \sigma = 0.$$

Desenvolvendo a equação acima obtemos

$$\sigma = \gamma.$$

Além disso, as equações (4.11) e (4.12) nos fornecem

$$\alpha(1-p)\lambda_1^s + \alpha(1-q)\lambda_2^s = -\frac{\beta\nu}{|T|}, \quad (4.19)$$

$$\lambda_1^s \lambda_2^s = \varepsilon. \quad (4.20)$$

Combinando (4.19) e (4.20) podemos escrever

$$\alpha \frac{(1-q)}{(1-p)} (\lambda_2^s)^2 + \frac{\beta\nu}{(1-p)|T|} \lambda_2^s + \alpha\varepsilon = 0.$$

Uma vez que $\lambda_n = 0$, da equação (4.5), temos $|T|$ constante e, conseqüentemente, da decomposição (1.31), também teremos ν constante. Por uma argumentação análoga a que fizemos anteriormente, a partir da equação acima podemos concluir que λ_1^s e λ_2^s são constantes e independem de s .

Usando a independência de s da mesma forma que fizemos em (4.18), obtemos

$$(\lambda_i^\phi)^2 = -\varepsilon.$$

Logo ϕ é isoparamétrica, com duas curvaturas principais distintas. Pela identidade de Cartan

$$\lambda_1^\phi \lambda_2^\phi = -\varepsilon.$$

Por outro lado, da equação(4.20) para $s = 0$ tem-se que

$$\lambda_1^\phi \lambda_2^\phi = \varepsilon,$$

o que é uma contradição.

Portanto, concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \mu$ e $\lambda_n = \lambda$, ou seja, M^n é localmente uma hipersuperfície de rotação. E pelo Lema 4.1.1 é não umbílica. \square

No Teorema 4.1.2 mostramos que M^n é localmente uma hipersuperfície de rotação. Na verdade podemos afirmar um pouco mais, M^n é conformemente plana (para mais detalhes veja [26], Teorema 1). A seguir, vamos considerar $\alpha = 0$. Note que, as hipóteses σ constante e $\gamma \neq \alpha\varepsilon(n-2)$ não serão mais necessárias. Esta segunda, no teorema anterior, tinha o objetivo de garantir que T fosse uma direção principal.

Teorema 4.1.3. *Seja M^n , $n > 3$, uma hipersuperfície Tipo-T-Einstein, com $\alpha = 0$. Então, M^n possui no máximo duas curvaturas principais distintas. Em particular, se $\gamma = 0$ e $\nu \neq 0$, M^n é totalmente umbílica.*

Demonstração. A demonstração será dividida em dois casos: $\gamma \neq 0$ e $\gamma = 0$. Vamos começar pelo caso $\gamma \neq 0$. Note que pelo Lema 4.1.1, T é uma direção principal, isto é, $T = t_n e_n$

com $ST = \lambda_n T$. Considerando $1 \leq i = j \leq n - 1$ e $i = j = n$ na equação (4.6), temos, respectivamente

$$\begin{aligned}\beta\nu\lambda_i - \sigma &= 0, \\ \beta\nu\lambda_n - \sigma + \gamma|T|^2 &= 0.\end{aligned}$$

Se $\beta = 0$, devemos ter $\sigma = 0$. Logo,

$$\gamma|T|^2 = 0.$$

Como estamos supondo $\gamma \neq 0$, isso implicaria em $T = 0$, o que é uma contradição. Sendo assim, devemos ter $\beta \neq 0$. Logo,

$$(\lambda_i - \lambda_j)\beta\nu = 0; \quad \forall \quad i \neq j. \quad (4.21)$$

Da equação (4.21) segue-se que $\lambda_i = \lambda_j$, para $1 \leq i, j \leq n - 1$, ou seja,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \mu.$$

Agora o caso $\gamma = 0$. Da equação (4.6), temos que

$$\beta\nu\lambda_i = \sigma, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Observe que pela Definição 1.5.1, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, logo devemos ter $\beta \neq 0$. Sendo assim,

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{\sigma}{\beta\nu}.$$

Portanto, M^n é totalmente umbílica. □

Até o momento não consideramos o caso $\alpha \neq 0$ e $\nu \equiv 0$, no próximo teorema abordaremos esse caso.

Teorema 4.1.4. *Seja M^n , $n > 3$, uma hipersuperfície Tipo-T-Einstein tal que $\alpha \neq 0$, $\nu \equiv 0$ e $\gamma \neq \alpha\varepsilon(n - 2)$. Então, $\sigma \equiv \gamma$. Além disso,*

- a) *ou M^n é uma hipersuperfície de rotação, em particular é um cilindro sobre uma hipersuperfície totalmente umbílica de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$;*
- b) *ou $\varepsilon = 1$, $n = \frac{\gamma}{\alpha} + 3$ e M^n é um aberto de $\mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2) \times \mathbb{R}$, com $p + q = n - 1$ e $r_1^2 + r_2^2 = 1$.*

Demonstração. Vale ressaltar que não existe a necessidade de se considerar o caso $\alpha = 0$, pois com $\alpha = 0$ e $\nu \equiv 0$, a equação de estrutura (1.39) se tornaria trivial e não haveria nada a se

verificar. Nessas condições, da equação (1.33), temos que $ST = \lambda_n T$ com $\lambda_n = 0$, isto é, T é uma direção principal. E, da equação (1.31), segue-se que $|T| = 1$.

Considerando $1 \leq i = j \leq n - 1$ e $i = j = n$ na equação (4.6), temos, respectivamente,

$$\alpha\varepsilon(n - 2) + \alpha n H \lambda_i - \alpha \lambda_i^2 - \sigma = 0, \quad (4.22)$$

$$\gamma = \sigma. \quad (4.23)$$

Note que σ é obrigatoriamente constante.

Logo, da equação (4.22) temos que

$$(\lambda_i - \lambda_j)[\alpha n H - \alpha(\lambda_i + \lambda_j)] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n - 1. \quad (4.24)$$

Argumentando de maneira completamente análoga ao que fizemos em (4.9), da equação (4.24), podemos concluir que existem no máximo duas curvaturas principais distintas entre as $(n - 1)$ primeiras.

Considere o caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1}$. Podemos afirmar que essas curvaturas são não nulas, caso contrário, das equações (4.22) e (4.23), teríamos $\gamma = \alpha\varepsilon(n - 2)$, o que é uma contradição.

Então, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \mu$ e $\lambda_n = \lambda$, ou seja, M^n é localmente uma hipersuperfície de rotação e, pelo Lema 4.1.1, não umbílica. Em particular, é um cilindro sobre uma hipersuperfície totalmente umbílica de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$

Agora, considere o caso em que existem duas curvaturas principais distintas entre as $(n - 1)$ primeiras. Digamos λ_1 e λ_2 de multiplicidades p e q , respectivamente. Da equação (4.24) podemos escrever

$$nH = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (4.25)$$

Usando a definição da curvatura média H de M^n podemos reescrever as equações (4.25) e (4.22), respectivamente, como

$$0 = (1 - p)\lambda_1 + (1 - q)\lambda_2, \quad (4.26)$$

$$\alpha\lambda_1\lambda_2 = \gamma - \alpha\varepsilon(n - 2). \quad (4.27)$$

Note que, por hipótese $\gamma \neq \alpha\varepsilon(n - 2)$, daí $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Uma vez que $\partial_{x_{n+2}} = T$, sabemos que M^n é localmente um cilindro vertical sobre a hipersuperfície $\phi : M^{n-1} \rightarrow Q^n(\varepsilon)$. Sendo assim, as curvaturas principais λ_1 e λ_2 coincidem com as curvaturas principais λ_1^ϕ e λ_2^ϕ de ϕ (esse mesmo argumento foi utilizado em [24] na prova do Teorema 1). Então, da equação (4.26) temos

$$0 = (1 - p)\lambda_1^\phi + (1 - q)\lambda_2^\phi.$$

Como $p+q = n-1 > 2$, não podemos ter $p = q = 1$. Sem perda de generalidade, considere $p \neq 1$. Então,

$$\lambda_1^\phi = -\frac{(1-q)}{(1-p)}\lambda_2^\phi. \quad (4.28)$$

Observe que também temos $q \neq 1$, pois $\lambda_1^\phi \neq 0$.

Se $\frac{\gamma - \alpha\varepsilon(n-2)}{\alpha} > 0$, da equação (4.27) podemos afirmar que λ_1^ϕ e λ_2^ϕ possuem mesmo sinal. Note que $-\frac{(1-q)}{(1-p)} < 0$, pois $p, q > 1$. Mas isso é uma contradição, pois ambos os membros de (4.28) devem possuir o mesmo sinal.

Logo $\frac{\gamma - \alpha\varepsilon(n-2)}{\alpha} < 0$, e da equação (4.27) segue-se que λ_1^ϕ e λ_2^ϕ possuem sinais opostos.

Multiplicando ambos os membros de (4.28) por $\alpha\lambda_2^\phi$ e utilizando a equação (4.27) obtemos

$$\alpha\frac{(1-q)}{(1-p)}(\lambda_2^\phi)^2 + [\gamma - \alpha\varepsilon(n-2)] = 0.$$

Sendo assim, λ_2^ϕ é raiz de um polinômio de grau dois, logo é constante. Portanto, λ_1^ϕ e λ_2^ϕ são constantes. Com isso, podemos afirmar que ϕ é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas. Pela identidade de Cartan (1.38), devemos ter $\lambda_1^\phi\lambda_2^\phi = -\varepsilon$. Utilizando este fato em (4.27), obtemos

$$\alpha\varepsilon(n-3) - \gamma = 0. \quad (4.29)$$

Da equação 4.1 temos que

$$(\lambda_2^\phi)^2 = -\frac{(1-p)}{(1-q)}\frac{[\gamma - \alpha\varepsilon(n-2)]}{\alpha}.$$

Utilizando (4.29) podemos reescrever a equação anterior como

$$(\lambda_2^\phi)^2 = \frac{(1-p)}{(1-q)}\varepsilon.$$

Observe que, pela equação anterior, devemos ter $\varepsilon = 1$. E da equação, (4.29) segue-se que $n = \frac{\gamma}{\alpha} + 3$.

Sendo assim, temos uma hipersuperfície isoparamétrica de $\overline{M}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$, com duas curvaturas principais distintas. Segundo a classificação para hipersuperfícies isoparamétricas $\overline{M}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ apresentada em [7, página 4], concluímos que $\overline{M}^{n-1} = \mathbb{S}^p(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2)$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$. □

No Teorema 4.1.5 iremos abordar um caso particular de hipersuperfície tipo T -Einstein em que $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ e $\sigma = \mathcal{R} - c$, onde \mathcal{R} é curvatura escalar e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Essas hipersuperfícies são conhecidas como solitons de Yamabe.

Teorema 4.1.5. *Seja M^n , $n \geq 3$, um soliton de Yamabe em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, com vetor potencial T . Então, M^n possui curvatura escalar constante ou é totalmente umbílico.*

Demonstração. Contraindo a equação do tensor de Ricci (1.35) obtemos

$$\mathcal{R} = \varepsilon(n - 2|T|^2) + (nH)^2 - |\text{II}|^2. \quad (4.30)$$

Considere a equação de estrutura do soliton de Yamabe

$$(\mathcal{R} - c)g = \frac{1}{2}\mathcal{L}_T g. \quad (4.31)$$

Note que, pela equação (1.33) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T g(X, Y) &= g(\nabla_X T, Y) + g(X, \nabla_Y T) \\ &= g(\nu SX, Y) + g(X, \nu SY) \\ &= 2\nu(g(SX, Y)). \end{aligned}$$

Sendo assim, se $\nu \equiv 0$, da equação (4.31) concluímos que a curvatura escalar é constante, isto é, $\mathcal{R} = c$.

Por outro lado, se $\nu \not\equiv 0$, substituindo (4.30) na equação (4.31) obtemos

$$\nu\lambda_i = \varepsilon(n - 2|T|^2) + (nH)^2 - |\text{II}|^2 - c, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Mostrando que M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica.

Note que quando a função ângulo ν é não nula, os solitons de Yamabe satisfazem o Teorema 4.1.3, ou seja, são totalmente umbílicos. \square

4.2 Exemplos

Nesta seção, vamos construir um exemplo de hipersuperfície que satisfaça o Teorema 4.1.2. Considere uma hipersuperfície M^n em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ nas hipóteses do Teorema 4.1.2. Uma vez que M^n é de rotação, vamos supor que seu plano de rotação é degenerado e dessa forma podemos utilizar os resultados obtidos em [14] para obter uma parametrização de M^n e suas curvaturas principais.

Exemplo 3. Seja M^n , $n > 3$, uma hipersuperfície Tipo- T -Einstein em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, com $\gamma \neq \alpha\varepsilon(n - 2)$ e σ constante. Suponha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\nu \not\equiv 0$. Então, M^n é uma hipersuperfície de rotação não umbílica. Se M^n possui plano de rotação degenerado, sua parametrização é dada por

$$f(s, t_2, \dots, t_n) = \left(s, st_2, \dots, st_n, -\frac{1}{2s} - \frac{s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, c_1 \ln |s| + c_2 \right),$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. E as curvaturas principais são

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{c_1}{\sqrt{1 + (c_1)^2}}.$$

De fato, como estamos nas condições do Teorema 4.1.2, M^n é de rotação. Supondo que seu plano de rotação é degenerado, pelo que foi estudado em [14, Seção 3], temos

$$\lambda = -\frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{(1 + (sa'(s))^2)^{3/2}}; \quad \mu = -\frac{sa'(s)}{\sqrt{1 + (sa'(s))^2}}; \quad (4.32)$$

$$|T|^2 = \frac{(sa'(s))^2}{1 + (sa'(s))^2}; \quad \nu^2 = \frac{1}{1 + (sa'(s))^2}. \quad (4.33)$$

Vamos denotar as curvaturas principais por $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \mu$ e $\lambda_n = \lambda$. Sendo assim, tomando $1 \leq i = j \leq n - 1$ e $i = j = n$ na equação (4.6), obtemos, respectivamente

$$\alpha\varepsilon(n - 1 - |T|^2) + (\alpha nH + \beta\nu)\mu - \alpha\mu^2 - \sigma = 0,$$

e

$$\alpha\varepsilon(n - 1)(1 - |T|^2) + \gamma|T|^2 + (\alpha nH + \beta\nu)\lambda - \alpha\lambda^2 - \sigma = 0.$$

Aplicando a definição da curvatura média H nas equações anteriores podemos reescrever, respectivamente,

$$\alpha\varepsilon(n - 2) - \sigma + \alpha\varepsilon\nu^2 + [\alpha(n - 2)\mu + \beta\nu]\mu + \alpha\lambda\mu = 0, \quad (4.34)$$

e

$$\alpha\varepsilon(n - 1)\nu^2 - \gamma\nu^2 + \gamma - \sigma + [\alpha(n - 1)\mu + \beta\nu]\lambda = 0. \quad (4.35)$$

Se $\alpha(n - 1)\mu + \beta\nu = 0$, utilizando (4.32) e (4.33) obtemos

$$-\alpha(n - 1)(sa'(s)) + \beta = 0.$$

Daí,

$$a(s) = \frac{\beta}{\alpha(n - 1)} \frac{1}{s}.$$

Integrando ambos os membros,

$$a(s) = \frac{\beta}{\alpha(n - 1)} \ln |s| + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Caso contrário, se $\alpha(n-1)\mu + \beta\nu \neq 0$ da equação (4.35) temos que

$$\lambda = \frac{\sigma - \gamma - [\alpha\varepsilon(n-1) - \gamma]\nu^2}{\alpha(n-1)\mu + \beta\nu}.$$

Substituindo a expressão de λ na equação (4.34) obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha^2(n-1)(n-2)\mu^3 + \alpha\beta(2n-3)\nu\mu^2 \\ & + [\alpha(n-2)\delta - \alpha\gamma|T|^2 + \beta^2\nu^2]\mu \\ & + \alpha\beta\varepsilon\nu^3 + \beta(\delta - \alpha\varepsilon)\nu = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde $\delta = \alpha\varepsilon(n-1) - \sigma$.

Substituindo (4.32) e (4.33) em (4.36) obtemos

$$\begin{aligned} & [\alpha^2(n-2)(n-1) + \alpha(n-2)\delta - \alpha\gamma]a'(s)^3 \\ & + s^{-1}[\alpha\beta(2n-3) + \beta(\delta - \alpha\varepsilon)]a'(s)^2 \\ & + s^{-2}[\alpha(n-2)\delta + \beta^2]a'(s) + \beta\delta s^{-3} = 0, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & [\alpha^2(n-2)(n-1) + \alpha(n-2)\delta - \alpha\gamma](sa'(s))^3 \\ & + [\alpha\beta(2n-3) + \beta(\delta - \alpha\varepsilon)](sa'(s))^2 \\ & + [\alpha(n-2)\delta + \beta^2](sa'(s)) + \beta\delta = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $sa'(s)$ é raiz de um polinômio de grau três, podemos afirmar que

$$sa'(s) = c_1,$$

onde c_1 é uma constante. Logo,

$$a(s) = c_1 \ln |s| + c_2,$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes.

De toda forma, substituindo $a(s)$ nas equações das curvaturas principais (4.32), obtemos

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{c_1}{\sqrt{1 + (c_1)^2}}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] BESSE, A. L. *Einstein manifolds*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.
- [2] BOTSCH, M., KOBBELT, L., PAULY, M., ALLIEZ, P., AND LÉVY, B. *Polygon mesh processing*. CRC press, 2010.
- [3] CAO, F. *Geometric curve evolution and image processing*, vol. 1805 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR1976551.
- [4] CAO, H.-D. Recent progress on Ricci solitons. In *Recent advances in geometric analysis*, vol. 11 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*. Int. Press, Somerville, MA, 2010, pp. 1–38. MR2648937.
- [5] CARTAN, E. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante. *Ann. Mat. Pura Appl.* 17, 1 (1938), 177–191. MR1553310.
- [6] CATINO, G., MASTROLIA, P., MONTICELLI, D. D., AND RIGOLI, M. On the geometry of gradient Einstein-type manifolds. *Pacific J. Math.* 286, 1 (2017), 39–67. MR3582400.
- [7] CECIL, T. E. Isoparametric and Dupin hypersurfaces. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 4 (2008), Paper 062, 28. MR2434936.
- [8] CECIL, T. E., AND RYAN, P. J. *Geometry of hypersurfaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2015. MR3408101.
- [9] CINTRA, A. A., LEANDRO, B., AND DOS SANTOS REIS, H. F. A family of MCF solutions for the Heisenberg group. *Differential Geom. Appl.* 71 (2020), 101633, 12. MR4091907.
- [10] COLDING, T. H., MINICOZZI, II, W. P., AND PEDERSEN, E. K. R. Mean curvature flow. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 52, 2 (2015), 297–333. MR3312634.
- [11] DA SILVA, F. N., AND TENENBLAT, K. Self-similar solutions to the curvature flow and its inverse on the 2-dimensional light cone. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)* (2022), 1–33.

- [12] DANIEL, B. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361, 12 (2009), 6255–6282. MR2538594.
- [13] DESBRUN, M., MEYER, M., SCHRÖDER, P., AND BARR, A. H. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1999), pp. 317–324.
- [14] DILLEN, F., FASTENAKELS, J., AND VAN DER VEKEN, J. Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Note Mat.* 29, 1 (2009), 41–54. MR2779904.
- [15] DO CARMO, M., AND DAJCZER, M. Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.* 277, 2 (1983), 685–709. MR694383.
- [16] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, 5 ed. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2015. ISBN 978-85-244-0036-0, MR3791495.
- [17] DO CARMO, M. P. *Differential geometry of curves & surfaces*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].
- [18] FECKO, M. *Differential geometry and Lie groups for physicists*. Cambridge university press, 2006.
- [19] HALLDORSSON, H. P. Self-similar solutions to the curve shortening flow. *Trans. Amer. Math. Soc.* 364, 10 (2012), 5285–5309. MR2931330.
- [20] HALLDORSSON, H. P. Helicoidal surfaces rotating/translating under the mean curvature flow. *Geom. Dedicata* 162 (2013), 45–65. MR3009534.
- [21] HALLDORSSON, H. P. Self-similar solutions to the mean curvature flow in the Minkowski plane $\mathbb{R}^{1,1}$. *J. Reine Angew. Math.* 704 (2015), 209–243. MR3365779.
- [22] HUNGERBÜHLER, N., AND SMOCZYK, K. Soliton solutions for the mean curvature flow. *Differential Integral Equations* 13, 10-12 (2000), 1321–1345. MR1787070.
- [23] LEANDRO, B., NOVAIS, R., AND DOS REIS, H. Self-similar solutions to the mcf in \mathbb{R}^3 . *Differential Geometry and its Applications* 87 (2023), 101985.
- [24] LEANDRO, B., PINA, R., AND DOS SANTOS, J. A. P. Einstein hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 52, 3 (2021), 537–546. MR4290359.
- [25] MANFIO, F., AND TOJEIRO, R. Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math.* 55, 1 (2011), 397–415 (2012). MR3006694.
- [26] NOVAIS, R., AND DOS SANTOS, J. A. P. Intrinsic and extrinsic geometry of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *J. Geom.* 108, 3 (2017), 1115–1127. MR3721591.

- [27] SANTOS DOS REIS, H. F., AND TENENBLAT, K. The mean curvature flow by parallel hypersurfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 146, 11 (2018), 4867–4878. MR3856153.
- [28] SANTOS DOS REIS, H. F., AND TENENBLAT, K. Soliton solutions to the curve shortening flow on the sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.* 147, 11 (2019), 4955–4967. MR4011527.
- [29] SLOTINE, J.-J. E., LI, W., ET AL. *Applied nonlinear control*. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [30] TOJEIRO, R. On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 41, 2 (2010), 199–209. MR2738910.
- [31] TOPPING, P. Mean curvature flow and geometric inequalities. *J. Reine Angew. Math.* 503 (1998), 47–61. MR1650335.