Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Resolvendo os Cubos Prisioneiros

Robinson Borges

Goiânia

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Robinson Borges							
E-mail:	fisicacommatematica@gmail.com							
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[x]Sim	[ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Mstrando Bolsista e Professor de Matemática e Física							
Agência de fomento:	Coord. de Aperf.de Pessoal de Nível Superior Secretaria de Educação do Estado de Goiás	Sigla:	CAPES SEDUC					
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08 01409.705/0001-20			
Vínculo empregatício do autor	Professor de Matemática e Física							
Agência de fomento:	Secretaria de Educação do Estado de Goiás	Sigla:	SEDUC					
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	01409.705/0001-20			
Título:	Resolvendo os Cubos Prisioneiros							
Palavras-chave:	jogos, desafios, números primos, teorema fundamental da aritmética							
Título em outra língua:	Solving the Cubes Prisoners							
Palavras-chave em outra língua:	games, challenges , prime numbers , fundamental theorem of arithmetic							
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico							
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	27/03/2015							
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática- PROFMAT							
Orientador (a):	Dr. Mário José de Souza.							
E-mail:	mariojsouza@gmail.com							

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do autor

Data: 24 / 04 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Robinson Borges

Resolvendo os Cubos Prisioneiros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia

2015

Borges, Robinson
Resolvendo os Cubos Prisioneiros [manuscrito] / Robinson Borges. 2015.
lxxviii, 78 f.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2015.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Jogos Pedagógicos. 2. Teorema Fundamental da Aritmética. 3. Números Primos. 4. Planilha Eletrônica. 5. Desafios. I. Souza, Mário José de, orient. II. Título.

Robinson Borges

Resolvendo os Cubos Prisioneiros

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
UnB

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Robinson Borges graduou-se em Engenharia Civil pela UFG, em Física pela UFG, em Matemática pela UEG, especializou-se em Engenharia de Segurança do Trabalho pela UFG, em Física pela UFU.

Dedico este trabalho a minha esposa, aos meus dois filhos e a nossa funcionária doméstica. Luciana, Robinho, Thiago e Valdiná.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a minha esposa e aos meus filhos, aos poucos amigos, aos professores das aulas presenciais e das aulas virtuais.

Resumo

Este trabalho mostra como um brinquedo pedagógico (jogo) pode estimular o ensino de matemática.

Este jogo torna-se um ponto de partida para várias discussões e um instrumento pedagógico que relaciona de maneira concreta, direta e simples, várias partes da matemática. Trata se de um jogo de fácil utilização, de fácil confecção e que favorece a sistematização do raciocínio lógico.

Com a utilização deste instrumento pedagógico o aluno é levado a tomar decisões e ainda verifica que cada decisão tomada tem implicações nas próximas decisões.

A solução desejada será obtida com o auxílio de uma planilha eletrônica. Trabalhamos com um caso geral e para isso utilizamos vinte e quatro variáveis. Para chegar às soluções desejadas o brinquedo foi convertido em códigos, foram utilizados eixos como direções e neles sentidos de orientações, regra de contagem, aplicação do teorema fundamental da aritmética e fundamentos básicos de probabilidade.

Palavras-chave

Jogos pedagógicos, teorema fundamental da aritmética, planilha eletrônica, desafios, códigos.

Abstract

This work shows how an educational toy (game) can stimulate the teaching of mathematics. This game becomes a starting point for several discussions, is a pedagogical tool that relates to concrete, direct and simple way, various parts of mathematics. This is a game easy to use, easy to manufacture and which favors the systematization of logical reasoning.

By using this teaching tool the student is required to take decisions and also notes that every decision has implications in the upcoming decisions.

The desired solution is obtained with the aid of a spreadsheet. We work with a general case and for that we used twenty-four variables. To reach the desired solutions toy was converted into codes, axes were used as directions and guidelines senses them, counting rule, application of the fundamental theorem of arithmetic and foundations of probability.

Keywords

Educational games, fundamental theorem of arithmetic, spreadsheet, challenges, codes.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O ensino de Matemática pode ser bem sucedido e estimulado com a utilização de bons recursos didáticos. Os jogos e desafios tornam-se uma poderosa ferramenta para envolver alunos que rejeitam as maneiras tradicionais de ensino, também estimulam alunos considerados bem sucedidos que por muitas vezes ficam entediados por compreender rapidamente os conteúdos e ter de ficar aguardando que os colegas também consigam entender.

Neste trabalho, será apresentado um jogo que foi utilizado, no Ensino Fundamental e Médio de escolas estaduais e particulares, como recurso pedagógico para o ensino de matemática. Com ele foi possível estimular o ensino de probabilidade, análise combinatória, teoria dos números, utilização de planilha eletrônica, criação de códigos, raciocínio lógico, planificação de sólidos, orientações como direções e sentidos.

Com a utilização deste jogo os alunos foram desafiados, estimulados, despertaram sua criatividade e desenvolveram autonomia no manuseio do jogo e nas buscas de novas possibilidades. Durante a aula isso pode ser convertido em interesse para as explicações que permitiram solucionar o problema.

Na Seção 2 apresentamos de maneira resumida as definições e teoremas que compõe o referencial teórico deste trabalho. Os conteúdos apresentados são: Números Primos, Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum, Probabilidade e Análise Combinatória.

Na Seção 3 apresentamos as vantagens de ter Jogos Pedagógicos e Planilhas Eletrônicas como recursos didáticos para o ensino de matemática. Mostramos que esses recursos favorecem a estimulação de criatividade e o desenvolvimento de competências e habilidades.

Na Seção 4 apresentamos o jogo conhecido como Os Cubos Prisioneiros. Este jogo é envolvente e instigante. Com ele foi possível apresentar aos alunos vários conceitos da matemática.

Na Seção 5 discutimos as várias maneiras de adotar este jogo como recurso pedagógico, aliado com a utilização de planilha eletrônica e confecções de réplicas do jogo para discussão de um caso geral.

Na Seção 6 mostramos como foram criados os códigos e as sequências que possibilitam a manipulação dos casos e discussões de possíveis soluções na planilha eletrônica.

Na Seção 7 apresentamos algumas maneiras de apresentar um cubo, nelas buscamos perceber as faces que ficam escondidas.

Na Seção 8 discutimos a possibilidade de se manipular o jogo da maneira que o aluno desejar. Ele escolhe possibilidades que apresentem muitas, poucas ou nenhuma resposta, ou seja, o aluno com a utilização da planilha pode fazer o processo inverso, deixar de procurar soluções para criar situações controlando quantas soluções são desejadas.

Na Seção 9, utilizamos um exemplo, escolhemos quatro cubos com suas faces coloridas com quatro possibilidades de cores, utilizamos a planilha para encontrar em que posições devem ficar os cubos dentro do estojo para que nenhuma cor fique repetida na sequência de quatro cores que aparecem em cada uma das laterais do estojo onde os cubos serão colocados. Apresentamos ainda alguns exemplos com quantidades distintas de soluções e situações sem solução que consideramos como contra exemplo.

Na Seção 10 apresentamos algumas considerações relacionadas com a utilização do jogo nas aulas e como os alunos se envolveram.

2 Preliminares

Neste capítulo abordaremos conceitos e resultados que vão possibilitar uma fundamentação teórica deste trabalho na Matemática, o leitor pode ver mais detalhes na referência [1]. Nas aulas em que o jogo Cubos Prisioneiros foram utilizado, criamos uma relação direta entre as atitudes desenvolvidas para a busca de soluções dos desafios com os Teoremas e as Definições Matemáticas que vamos apresentar nesta seção. Depois de apresentadas as definições e teoremas na aulas, com algumas analogias e comparações os alunos apresentam mais convicção do que está sendo ensinado. Neste trabalho vamos mostrar como foi possível obter boas analogias e aproximar os alunos de alguns Teoremas e Definições da Matemática.

2.1 Números Primos, MDC e MMC

Definição 2.1.1. *Um inteiro $p > 1$ é chamado número primo se não possui um divisor d satisfazendo $1 < d < p$. Se um inteiro $a > 1$ não é primo, ele é chamado de número composto. Um inteiro m é chamado de composto se $|m|$ não é primo.*

Teorema 2.1.1. *Todo inteiro n, maior que 1, pode ser expresso como o produto de números primos.*

Demonstração. Se o inteiro n é um primo, então ele mesmo é o produto de um único fator primo. Se o inteiro n não é primo, existe uma decomposição do tipo: $n = n_1.n_2$ com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Repetindo o argumento para n_1 e n_2, podemos escrever n como o produto de primos ou podemos obter fatores menores escrevendo n como um produto de naturais. Como não existe uma sucessão infinita de naturais cada vez menores, após um número finito de operações desse tipo, poderemos escrever n como um produto de números primos. □

Teorema 2.1.2. (Euclides) *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exite apenas uma quantidade finita de primos: $P_1, P_2, ..., P_n$. Considere o número $X = P_1.P_2...P_n + 1$. Pelo Teorema 1, esse número deve ser o produto de alguns elementos do conjunto de todos os números primos. Entretanto, nenhum dos primos P_i divide X. □

Definição 2.1.2. *Dados dois números inteiros a e b com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, a cada um deles pode-se associar seu conjunto de divisores positivos, D_a e D_b respectivamente, e a intersecção de tais conjuntos $D_a \cap D_b$ é finita (pela limitação) e não vazia (já que 1 pertence à intersecção). Por ser finito, $D_a \cap D_b$ possui elemento máximo, que é chamado de máximo divisor comum (mdc) dos números a e b. Denotamos este número por $mdc(a, b)$. Para $a = b = 0$ convencionamos $mdc(0, 0) = 0$. Quando $mdc(a, b) = 1$ dizemos que a e b são primos entre si.*

Definição 2.1.3. *Dados dois números inteiros a e b com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, a cada um deles pode-se associar seu conjunto de múltiplos positivos, M_a e M_b respectivamente, e a intersecção de tais conjuntos $M_a \cap M_b$ é não vazia (já que $a.b$ está na intersecção). Como os naturais são bem ordenados, $M_a \cap M_b$ possui elemento mínimo. Tal número é chamado mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b e o denotaremos por $mmc(a, b)$.*

Alguns autores usam a notação (a, b) para o $mdc(a, b)$ e $[a, b]$ para $mmc(a, b)$ que são o máximo divisor comum entre a e b e o mínimo múltiplo comum de a e b. Neste trabalho utilizaremos uma simbologia bastante utilizada, ela serve para mostrar que um número divide outro, quando se escreve $a|b$, vamos entender que a divide b.

Teorema 2.1.3. (Bachet- Bèzout) *Se $d = mdc(a, b)$, então existem inteiros x e y tais que $ax + by = d$.*

Proposição 2.1.1. *Sejam a, b e c inteiros positivos com $a|bc$ e $mdc(a, b) = 1$. Então, $a|c$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1, existem x e y inteiros tais que $ax + by = 1$. Assim, $acx + bcy = c$. Como $a|acx$ e $a|bcy$, podemos concluir que $a|c$. $\square$

Em particular, se p é um número primo e p divide $a.b$, então p divide a ou p divide b. Podemos usar esse fato para garantir a unicidade em nosso primeiro teorema, obtendo o importante Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema 2.1.4. (Teorema Fundamental da Aritmética) *Todo número natural maior do que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como produto de números primos.*[2]
Maneira equivalente de enunciar o Teorema 4.[3]

i) Para todo $n \geq 2$, com $n \in \mathbb{N}$, temos que n pode ser escrito como: $n = p_1.p_2.p_3. \ldots .p_k$, onde os p_i, $1 \leq i \leq k$, são todos primos.

ii) Se $n = p_1.p_2.p_3. \ldots .p_k = q_1.q_2.q_3. \ldots .q_m$, com p_i, $1 \leq i \leq k$, e com q_j, $1 \leq j \leq m$ primos, e se $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \leq p_k$ e $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \ldots \leq q_m$, então $k = m$ e $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, ..., $p_k = q_k$.

Demonstração. [4]

i) Se $n = p$ é um número primo, a afirmação é claramente verdadeira. Suponhamos então que n seja composto e que a afirmação seja verdadeira para todo $m, 1 < m < n$. Tomando $D = \{d \in \mathbb{N} : 1 < d \mid n\}$, temos $D \neq \emptyset$, pois $n \mid n$. Pelo princípio da boa ordem existe $p_1 \in D$ *minimal*. Temos que, p_1 deve ser primo. Pois, caso contrário teríamos, $p_1 = a.b$ e como $p_1 \mid n$, $a \mid p$ e $b \mid p$, e $a \mid n$ e $b \mid n$, o que contraria a minimalidade de p_1. Sendo assim p_1 o menor divisor de n, temos $n = p_1.m$, com $1 < m < n$. Mas como a afirmação é verdadeira para todo m nessas condições, temos $m = p_2.p_3.p_4.\ldots.p_k$. Por fim, chegamos que $n = p_1.m = p_1.p_2.p_3.p_4.\ldots.p_k$.

ii) Suponha $p_1.p_2.p_3.p_4.\ldots.p_r = q_1.q_2.q_3.\ldots.q_s$ com p_i e q_j primos para $1 \leq i \leq j$ e $1 \leq j \leq s$. Suponha que $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_r$ e $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_s$. Como $p_1 \mid n$, temos $p_1 \mid q_1.q_2.q_3.q_4.\ldots.q_s$, e se aplicarmos a Proposição anterior várias vezes, concluímos que p_1 deve dividir algum dos fatores de $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_s$. Ou seja, existe m, com $1 \leq m < s$ tal que $p_1 \mid q_m$. Como p_1 e q_m são primos. Temos $p_1 = q_m \geq q_1$. Da mesma forma, $q_1 \mid p_l$ para algum $l, 1 \leq l \leq r$ e $q_1 = p_l \geq p_1$. Podemos renomear os primos de forma a obter $p_1 = q_1$, e assim teremos: $p_2.p_3.\ldots.p_r = q_2.q_3.\ldots.q_s$. Por indução, podemos concluir que: $r-1=s-1 \rightarrow r=s$ e $p_i=q_i, \forall\ 1 \leq i \leq r$, o que confirma a afirmação.

$\square$

Proposição 2.1.2. *Se as fatorações em primos de n e m são $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$,e $m = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$, respectivamente. Então, $mdc(m,n) = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}...p_k^{\gamma_k}$ e o $mmc(m,n) = p_1^{\theta_1}p_2^{\theta_2}...p_k^{\theta_k}$, onde γ_i é o menor dentre $\{\alpha_i,\beta_i\}$ e θ_i é o maior dentre $\{\alpha_i,\beta_i\}$.*

Proposição 2.1.3. *Se a e b são inteiros positivos, então:*
$mmc(a,b).mdc(a,b) = ab$.

Demonstração. Basta usar a proposição anterior e observar que:
$max\{x,y\} + min\{x,y\} = x+y$. $\square$

2.2 Probabilidade

Os princípios da probabilidade são importantes por fazerem uma ponte entre a estatística descritiva e a inferência estatística, que é aplicada as mais variadas áreas do conhecimento, e em todas as situações em que se deseja tirar conclusões sobre dados numéricos.

Definição 2.2.1. *Um experimento aleatório é aquele cujo resultado não pode ser previsto.*

Definição 2.2.2. *Espaço amostral de um evento aleatório é o conjunto de todos os reultados possíveis desse experimento, representado por Ω. Cada elemento desse conjunto é chamado de ponto amostral ou evento elementar ou evento simples.*

Definição 2.2.3. *Seja Ω o espaço amostral de um evento aleatório. Evento é qualquer subconjunto de Ω.*

Dois casos relevantes de eventos são o próprio espaço amostral Ω, chamado de evento certo, e o conjunto vazio $\emptyset$, chamado evento impossível. Eventos que contêm um único ponto amostral são chamados eventos simples e eventos que possuem pelo menos dois pontos amostrais são chamados eventos compostos ou combinados. Dizemos que um evento ocorre se acontecer pelo menos um de seus pontos amostrais.

Definição 2.2.4. *Um evento ao qual atribui-se uma probabilidade, é chamado de evento aleatório. Define-se a classe de eventos aleatórios para um experimento com espaço amostral* Ω*. Representa-se essa classe por* $\mathcal{F}$*. Exige-se dessa classe as seguintes propriedades:*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

ii) Se $A \in \mathcal{F}$*, então* $A^c \in \mathcal{F}$,

iii) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$*, então* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

No caso discreto, podemos tomar $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Seja Ω um espaço amostral finito. Se $|\Omega| =$ n, então $|\mathcal{F}| = 2^n$.

Como eventos são conjuntos, podemos aplicar aos mesmos as operações usuais de conjuntos, ou seja:

- O evento $A \cup B$ ocorre se pelo menos um dos eventos A ou B ocorrer:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$$

- O evento $A \cap B$ ocorre se ambos os eventos A e B ocorrerem:

$$A \cap B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}$$

- O evento A^C ocorre se A não ocorrer:

$$A^C = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

- O evento $A - B$ ocorre se A ocorrer e B não ocorrer:

$$A - B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ } e \text{ } x \notin B\}$$

Podemos generalizar a união e a interscção para n eventos:

- O evento $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ocorre se pelo menos um dos $A_i s$ ocorrerem.
- O evento $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ocorre se todos os $A_i s$ ocorrerem.

Definição 2.2.5. *Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 2.2.6. *Se tivermos n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mutuamente excludentes, isto é, se $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$ e se $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, dizemos que esses eventos formam uma partição de Ω.*

Segundo Meyer [5], para os eventos A, B, C de um espaço amostral Ω, são válidas ainda as seguintes propriedades:

i) $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

iii) $A \cap B = B \cap A$

iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

vii) $A - B = A \cap B^C$

viii) $A \cup \emptyset = A$

ix) $A \cup \Omega = \Omega$

x) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

xi) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Para experimentos aleatórios, existe sempre uma incerteza sobre a ocorrência ou não de um determinado evento. Para medir esta *chance* ou *probabilidade* com a qual se pode esperar que um evento ocorra, é conveniente atribuir um número entre 0 e 1 (0% e 100%). Quando existe uma certeza de que o evento acontecerá, é dado que a probabilidade é 1 (100%). Quando existe uma certeza de que o evento não acontecerá, é dado que a probabilidade é 0 (0%)

Segundo Spiegel [6] existem dois procedimentos importantes por meio dos quais podemos estimar a probabilidade de um evento: a abordagem clássica e a abordagem frequentista.Para alguns exemplos [8].

- **Abordagem Clássica**: Se um evento pode ocorrer de h maneiras diferentes em um número total de n maneiras possíveis, todas elas igualmente prováveis, então a probabilidade do evento é $\frac{h}{n}$

- **Abordagem Frequentista**: Se após n repetições de um experimento, onde n é um número muito grande, é observado que um evento ocorre eventos em n destas repetições, então a probabilidade do evento é próxima a $\frac{h}{n}$ (Probabilidade Empírica do Evento)

Definição 2.2.7. *Dado um experimento aleatório, sendo Ω o seu espaço amostral, vamos admitir que todos os elementos de Ω tenham a mesma chance de acontecer, ou seja, que Ω é um conjunto equiprovável. Definimos probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ ao número real $P(A)$, tal que:*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Definição 2.2.8. *Uma probabilidade é uma função $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0; 1]$ que satisfaz:*

A1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \forall\ A \in \mathcal{F}$;

A2) $P(\Omega) = 1$;

A3) Aditividade enumerável: para qualquer sequência $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ de eventos dois a dois mutuamente exclusivos,isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definição 2.2.9. *Sejam A e B dois eventos tais que $P(A) > 0$. Denota-se por $P(B|A)$ a probabilidade de B dado que ocorreu A. Como é conhecido que A ocorreu, este se torna um novo espaço amostral, substituindo o original espaço Ω . Daí*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Teorema 2.2.1. *Para quaisquer três eventos A_1, A_2, A_3, tem-se*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

O resultado é facilmente generalizado para n eventos:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

$$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Definição 2.2.10. *Se $P(B|A) = P(B)$, isto é, a probabilidade de B ocorrer não é afetada pela ocorrência ou não de A, então diz-se que A e B são eventos independentes. Isto é:*

$$P(A\cap B) = P(A).P(B).$$

De forma recíproca, se $P(A\cap B) = P(A).P(B)$ vale, então A e B são independentes. Dizemos que três eventos A_1, A_2, A_3 são independentes se eles são independentes aos pares, ou seja: $P(A_i\cap A_k) = P(A_i).P(A_j)$ $j \neq k$,com $j, k = 1, 2, 3$ e:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3).$$

O teorema a seguir é bastante útil em situações em que o experimento possa ser repartido em etapas:

Teorema 2.2.2. (Teorema da Probabilidade Total) *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição de Ω, com $P(A_i) > 0$, para todo i, isto é, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma família de eventos mutuamente exclusivos, cuja reunião completa todo o espaço amostral e dos quais, em cada experiência, um e somente um deles ocorre. Então, para cada evento B de Ω, tem-se*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i).$$

Demonstração.

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \ldots + P(B\cap A_n)$$

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)\cdot P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)$$

□

Em alguns casos, a probabilidade procurada não é *a posteriori*, ou seja, o que interessa não é $P(B|A)$, mas sim a probabilidade *a priori* $P(A|B)$. Sendo $P(B) > 0$, podemos inverter a probabilidade condicional, na seguinte forma:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}, i = 1, 2, 3, ..., n.$$

Desta forma, enuncia-se o Teorema de Bayes:

Teorema 2.2.3. (Teorema de Bayes)*: Sendo* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *partições de* Ω*, com* $P(A_i) > 0$ *para todo* i*, e* B *um evento de* Ω *com* $P(B) > 0$*, então*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}, i = 1, 2, 3, ..., n.$$

2.3 Análise Combinatória

A Análise Combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos. Muitas vezes, o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo a certas propriedades. Uma ferramenta simples para resolver estes problemas é o princípio das gavetas de Dirichlet. Peter Gustav Lejenne Dirichlet (1805-1859) matemático alemão, para saber mais e ver alguns exemplos [9].

Princípio 2.3.1. (Princípio das gavetas de Dirichlet) *Se n objetos forem colocados, em no máximo, n-1 gavetas pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.*

Demonstração. (Prova por absurdo) Se cada uma das gavetas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos nelas colocados será, no máximo n - 1, o que é uma contradição. □

Em muitos experimentos, o número de eventos do espaço amostral em questão não é muito grande, o que permite a contagem direta dos pontos necessários para o cálculo de probabilidades, porém, em certos experimentos, a contagem direta se torna impraticável. Nestes casos, aprende-se desde o ensino fundamental, algumas noções de Análise Combinatória, também chamado de Método Sofisticado de Contagem, por alguns autores como Spiegel [6].

Definição 2.3.1. (Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo)*: Suponha uma sequência formada por i elementos* $(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_i)$*, em que*

- *a_1 pode ser escolhido de n_1 maneiras distintas ;*
- *a_2 pode ser escolhido de n_2 maneiras distintas;*
- *a_3 pode ser escolhido de n_3 maneiras distintas;*
- *assim sucessivamente.*
- *a_i pode ser escolhido de n_i maneiras distintas;*
- *e que o número de escolhas numa etapa não pode ser influenciada por escolhas anteriores.*

Então, o número de possibilidades para construir a sequência $(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_i)$ é: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_i$. Segundo Iezzi [7], este resultado serve de base para vários problemas de contagem.

Na resolução de problemas de contagem utilizando o PFC, frequentemente aparecem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos, como por exemplo, $5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1$. Nestes casos é possível representar estas multiplicações de uma forma mais resumida, através do Fatorial de um número natural, definição apresentada a seguir.

Definição 2.3.2. (Fatorial) *Dado um número natural n, define-se o fatorial de n, denotando-se por $n!$, a relação $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geq 2$. Caso $n = 1$, tem-se $1! = 1$ e se $n = 0$, tem-se $0! = 1$.*

Proposição 2.3.1. (Princípio Aditivo das Partes Disjuntas) *Se $A_1, A_2, \ldots, A_i$ são conjuntos 2 a 2 disjuntos, então:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

O princípio fundamental da contagem (PFC) é a técnica mais utilizada nos problemas de contagem, porém, em alguns casos, este, sozinho, não se torna suficiente. No ensino médio, estuda-se três diferentes maneiras de agrupamentos simples, ou seja, agrupamentos de k elementos distintos escolhidos em conjuntos de n elementos: permutações, arranjos e combinações. [10]

Definição 2.3.3. (Permutação) *Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se permutação desses n elementos todo agrupamento ordenado (sequência) formado por n elementos.*

Proposição 2.3.2. *Denota-se Permutação por P_n, que calcula-se através da fórmula $P_n = n!$.*

Demonstração. Sejam n elementos distintos e P_n o número de permutações possíveis desses n elementos. Para encontrar o número de sequências formadas por esses n elementos, procede-se da seguinte forma:

- Escolhe o primeiro termo da sequência dentre os n elementos, ou seja, tem-se n possibilidades de escolha para o primeiro termo da sequência.
- Escolhe o segundo termo da sequência dentre os $n-1$ elementos que sobraram, ou seja, tem-se $n-1$ possibilidades de escolha para o segundo termo da sequência, já que não se pode escolher o primeiro novamente.
- Definidos os dois primeiros termos da sequência, escolhe o terceiro termo da sequência dentre os $n-2$ elementos que sobraram, ou seja, tem-se $n-2$ possibilidades de escolha para o segundo termo da sequência, já que não se pode escolher o primeiro e o segundo novamente.
- Definidos os $n-1$ primeiros termos da sequência, o termo que ocupa a última posição da sequência, só pode ser o único que sobrou, ou seja, fica determinado de maneira única, assim, uma possibilidade de escolha.

Assim, pelo PFC, tem-se: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ □

Proposição 2.3.3. (Arranjo) *Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo desses n elementos, tomados k a k (com $k \leq n$) qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes. Denota-se por $A_{n;k}$, e calcula-se através da fórmula*

$$A_{n;k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

.

Demonstração. Sejam n elementos distintos e $A_{n;k}$ o número de arranjos desses elementos tomados k a k. Usando novamente o PFC, tem-se:

- Escolhe o primeiro termo da sequência dentre os n elementos, ou seja, tem-se n possibilidades de escolha para o primeiro termo da sequência.

- Escolhe o segundo termo da sequência dentre os $n-1$ elementos que sobraram, ou seja, tem-se $n-1$ possibilidades de escolha para o segundo termo da sequência, já que não se pode escolher o primeiro novamente.

- Definidos os dois primeiros termos da sequência, escolhe o terceiro termo da sequência dentre os $n-2$ elementos que sobraram, ou seja, tem-se n_2 possibilidades de escolha para o segundo termo da sequência, já que não se pode escolher o primeiro e o segundo novamente.

- Assim sucessivamente.

- Para escolher o K-ésimo termo, a partir das $k-1$ escolhas anteriores, tem-se que sobraram $n-(k-1)$ elementos, ou seja, $n-k+1$ elementos.

  Assim, pelo P.F.C., tem-se:

$$A_{n;k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1) \tag{1}$$

Mas, multiplicando (1) por $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ tem-se:

$$A_{n;k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$A_{n;k} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

□

Problemas que envolvem contagem de arranjos podem ser resolvidos pela fórmula (2). Para mais informações [10].

Proposição 2.3.4. (Combinação)*Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se combinação dos n elementos, tomados k a k (com $k \leq n$) qualquer subconjunto de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes. Denota-se por $C_{n;k}$ ou $\binom{n}{k}$, e calcula-se através da fórmula $C_{n;k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. .*

Demonstração. Sejam n elementos distintos de um conjunto e $C_{n;k}$ o número de combinações possíveis desses n elementos.

- Com o PFC, conta-se o número de arranjos formados por k elementos distintos, escolhidos dentre os n elementos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = A_{n;k}.$$

- Com o PFC, conta-se o número de sequências distintas que podem ser formadas com os k elementos escolhidos:

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

- Como toda e qualquer permutação dos elementos de uma sequência, dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos n elementos tomados k a k é

$$C_{n;k} = \frac{A_{n;k}}{P_k} = \frac{A_{n;k}}{k!}$$

Aplicando a fórmula para arranjo, tem-se que

$$C_{n;k} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

□

Propriedade 2.3.1. (Igualdade de combinações complementares) $C_{n;k} = C_{n;n-k}$.

Demonstração.

$$C_{n;k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$C_{n;k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_{n;k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!}$$

$$C_{n;k} = C_{n;n-k}$$

□

Segundo Dante [11], existem também, alguns agrupamentos que não são simples, ou seja, agrupamentos formados por elementos repetidos.

Proposição 2.3.5. (Permutações com Repetição) *Dado um conjunto com n elementos dos quais x_1 são de um tipo, x_2 de outro, x_3 de outro, e assim por diante até x_k de outro tipo com $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k = n$, chama-se permutação com repeticão desses n elementos todo agrupamento ordenado (sequência), formado por estes n elementos. Denota-se por $P_n^{x_1;x_2;\ldots x_k}$, que calcula-se através da fórmula $P_n^{x_1;x_2;\ldots;x_k} = \dfrac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k!}$.*

Justificativa: Se temos x_1 elementos iguais, as permutações entre estes não produzem um novo anagrama. Se temos x_2 elementos iguais, as permutações entre estes também não produzem um novo anagrama, e assim por diante até x_k elementos iguais. Por isso divide-se $n!$ por $x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k!$

Proposição 2.3.6. (Permutações circulares) *O número de maneiras de colocar n elementos em círculo, de maneira que disposições adquiridas por rotações sejam consideradas iguais são permutações circulares. Segundo Lima [12], denota-se por $(PC)_n$, que calcula-se através da fórmula $(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.*

3 Instrumentos Pedagógicos

3.1 Planilha Eletrônica

A planilha eletrônica é uma poderosa ferramenta pedagógica. Ela desperta a criatividade dos alunos e promove a autonomia, características que possibilitam um avanço no estudo e aprendizagem de matemática. Com a interatividade e as respostas dinâmicas, os alunos conseguem comparar resultados e manipular situações que fortalecem as cognições necessárias para seu desenvolvimento.

Os recursos disponíveis nas planilhas eletrônicas possibilitam diversas aplicações no ensino de Matemática, dentre eles destacam-se, a manipulação e operações com grandes quantidades de dados numéricos; a articulação entre diversas formas de representação; as ferramentas lógicas e as ferramentas estatísticas.

A planilha eletrônica como recurso didático favorece o ensino de Matemática principalmente relacionados com : simbologia algébrica, equações, funções e tratamento da informação.

A utilização das planilhas eletrônicas possibilita que os alunos pensem criticamente e de maneira heurística permite que eles desenvolvam e testem suas próprias hipóteses. Nas atividades que envolvem a modelagem matemática, com a planilha eletrônica o professor pode organizar atividades experimentais que envolvam a coleta e manipulação de dados. As atividades de modelagem promovem a exploração interativa dinâmica e aberta de conceitos matemáticos.

A planilha eletrônica permite ir além do que pode ser feito usando lápis e papel, dando aos professores e alunos uma oportunidade para descobrir conceitos matemáticos em um ambiente de laboratório. Neste contexto, a modelagem matemática feita com a ajuda de planilhas leva o aluno a fazer conexões entre números, álgebra e representações gráficas de fenômenos do mundo real. [13] e [14].

> As planilhas constroem uma ponte ideal entre a Aritmética e a Álgebra e permitem que os estudantes transitem livremente entre os dois mundos. Os alunos procuram padrões, constroem expressões algébricas, generalizam conceitos, justificam conjecturas e estabelecem a equivalência entre dois modelos como uma necessidade intrínseca e significativa, em vez de uma exigência arbitrária colocada pelo professor. [15].

Neste trabalho, com poucos recursos da planilha eletrônica, foi possível determinar e manipular todo o espaço amostral, as informações empregadas na planilha foram extraídas de situações concretas, coletadas pelos próprios alunos. Sem a utilização da planilha eletrônica essa tarefa seria completamente inviável, com criatividade e teimosia foi possível chegar aos resultados desejados, algumas etapas do tratamento dos dados foram apresentadas em tabelas para deixar a planilha com aspecto amigável e didático.

3.2 Jogos e desafios

Os pré-requisitos para o ensino de um novo conteúdo podem criar uma barreira entre os alunos e o completo aprendizado, em alguns casos o professor de Matemática tenta ensinar como se não houvesse pré-requisitos, isso pode limitar o conteúdo a ser assimilado e esse fica percebido pelo aluno de maneira desconexa e sem utilidade. Com a utilização de um recurso pedagógico como o jogo, é possível fazer uma abordagem mais envolvente e os pré-requisitos são mostrados nas entrelinhas, cria-se um melhor envolvimento que fica convertido em tolerância para mais explicações. Muitos alunos necessitam de um motivo concreto para aceitar o envolvimento com novos conteúdos, os jogos podem fazer essa ponte de maneira eficiente.

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. O

> trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações. (BRASIL, 2000, p.41).

Os jovens e crianças envolvidos ampliam seus horizontes e percebem, nos jogos matemáticos, novas perspectivas de aprendizagem, promovendo a permanência e o bom desempenho na escola, contribuindo para a melhoria da qualidade de vida. Além disso, estimula o respeito às diferenças e a tolerância para a diversidade, visando que no futuro os envolvidos se tornem adultos flexíveis, tanto com os outros quanto consigo mesmos. A escola é uma instituição capaz de favorecer a inclusão social. O desenvolvimento do projeto neste ambiente contribui neste sentido, funcionando como um motor de transformação social e de desenvolvimento pessoal. Ademais, outro aspecto importante do projeto é o de inserir os envolvidos em um processo de formação de cidadãos conscientes a respeito do meio ambiente. Vários jogos são confeccionados a partir de materiais recicláveis e sementes. Esta abordagem possibilita o acesso de todos aos jogos e dissemina a importância da reciclagem para a preservação da natureza.[16].

> "A ação gera conhecimento, que é a capacidade de explicar, de lidar, de manejar, de entender a realidade [...]."[17].

A Matemática sempre apresenta grandes desafios ao professor em sua realidade de sala de aula. Os processos de ensino e de aprendizagem são bastante dinâmicos e pedem uma postura sempre investigadora, ou inovadora do docente e do estudante. Um tema largamente discutido é como deixar as aulas de Matemática mais atraentes e interessantes por parte dos estudantes. Outro é o conhecimento de diferentes estratégias e metodologias para abordagem dos conteúdos propostos. A utilização de jogos no contexto do ensino e da aprendizagem da Matemática pode representar uma interessante e eficiente ferramenta lúdica, onde os espaços em que atuam docentes e estudantes contam com interatividade, parcerias, trabalhos em grupos ou individuais, com o desenvolvimento de estratégias, com o uso de definições e de raciocínios lógicos, dentre outros componentes da formação desses estudantes. Neste espaço é possível ver o aluno em ação, observá-lo como agente ativo de sua aprendizagem, onde pode manipular objetos concretos, explicar seus métodos e construir conhecimento.

Com as realizações de Oficinas de jogos Matemáticos, Jhoene[18] e Rosângela[19] relatam suas experiências com resultados positivos em relação ao uso de jogos como um recurso didático. Nas aulas realizadas com o jogo Cubos Prisioneiros vivenciamos as mesmas satisfações. Com isso defendemos o uso dos jogos como recurso didático valioso em sala de aula, no entanto salientamos que é necessário ao professor entender que um bom planejamento e objetivos bem definidos são essenciais para o uso deste recurso com bom aproveitamento. Além do mais, o ambiente de realização das atividades deve favorecer as discussões e a interatividade, estando munido de condições necessárias para que as atividades sejam aplicadas de forma estimulante. Outra observação é não entender as atividades envolvendo os jogos como simples momentos de brincadeiras. Claramente, as brincadeiras e a aprendizagem se misturam em algumas atividades lúdicas, sobretudo aquelas envolvendo jogos, e sabemos que é possível construir conhecimento brincando, mas o equilíbrio entre brincadeira e aprendizado é importante, neste caso devem estar associados. O jogo vai além da brincadeira, que na maioria das vezes é feita de forma despretensiosa, sem objetivos específicos.

4 O Jogo Cubos Prisioneiros

Neste capítulo o jogo Cubos Prisioneiros será apresentado, sua versão comercial é confeccionada em madeira, trata-se de um objeto bonito, envolvente, curioso e gostoso de manusear. Durantes as aula os alunos ficam pedindo para ficar segurando o jogo durante as explicações e manifestam admiração pelo objeto. Na Figura 1 tem-se a foto de um kit do jogo Cubos Prisioneiros feito em madeira.

O jogo Cubos prisioneiros consiste em um estojo todo furado, onde são colocados quatro cubos um ao lado do outro. Na Figura 2 temos dois estojos de dois jogos.

Os cubos têm suas faces coloridas. Os quatro cubos somam 24 faces que podem

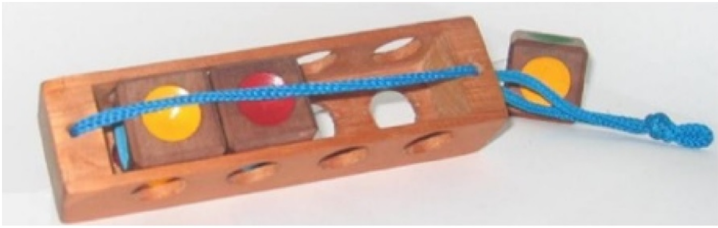


Figura 1: Cubos no estojo

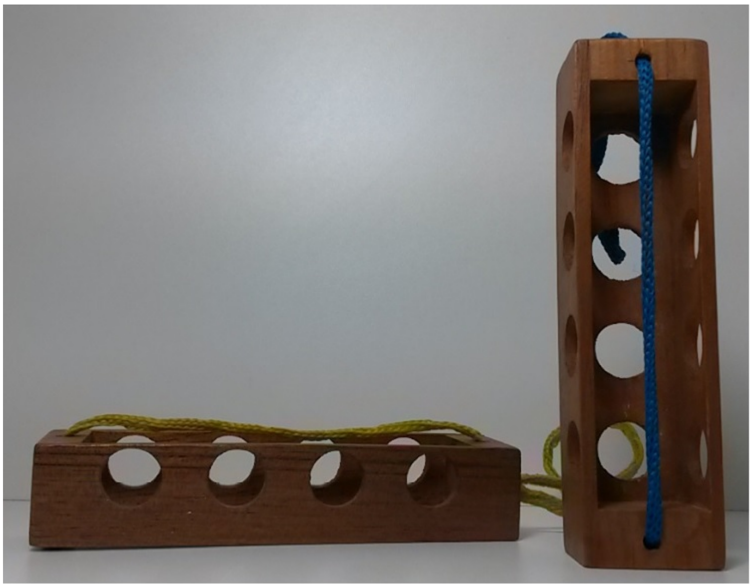


Figura 2: Estojos de dois jogos

apresentar uma das quatro possibilidades de cores. Na Figura 3 temos dois kits de quatro cubos.

Figura 3: Cubos de dois Kits de jogo

Colocando os cubos lado a lado, observam-se sequências de quatro faces adjacentes, uma de cada cubo. Fixadas as posições dos cubos no estojo, ficam determinadas quatro sequências de quatro cores. O sucesso do jogo consiste em obter quatro cores diferentes em cada uma das sequências. Ou seja não pode ficar cores repetidas em nenhuma das quatro laterais do estojo, em cada lateral ficam visíveis quatro cores, sendo uma de cada cubo. Duas faces de cada cubo ficam escondidas, não participando das soluções. Na Figura 4 são mostradas duas das laterais do estojo com cores que não se repetem, isso deve ocorrer nas quatro laterais.

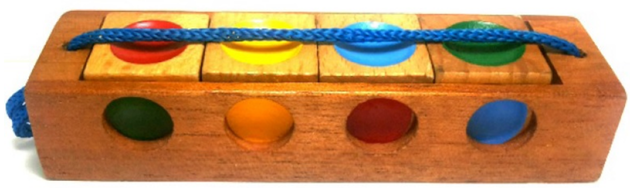


Figura 4: Sequência desejada vista em duas das laterais do estojo

Este jogo é simples de se jogar e relativamente difícil de se obter sucesso na sua solução. É um jogo envolvente, instigante e pode ser utilizado para exercitar o raciocínio lógico. Pode ser manipulado para não ser possível obter o sucesso ou ainda para ser de fácil solução.

5 Proposta da aula

5.1 Apresentação do jogo e da solução do desafio

No primeiro momento o jogo é apresentado aos alunos e também qual é o objetivo. Durante as aulas. Neste momento alguns alunos pediram para tentar solucionar o desafio. O envolvimento começa e todos querem jogar, muitos ficam procurando a soluções por tentativas e percebem que será difícil conseguir sem uma estratégia. Em algumas aulas foram entregues aos alunos alguns exemplares sem soluções, isso possibilitou muito envolvimento dos alunos ao ser levantado a suspeita de que poderia não existir a possibilidade de uma resposta. Neste trabalho essas possibilidades serão discutidas na Seção 9.

5.2 Proposta de construção de uma réplica do jogo

Na tentativa de solucionar o problema de não ter um exemplar do jogo para cada aluno, um segundo momento é a apresentação de uma réplica do jogo feita de materiais reaproveitados. Uma proposta simples e bem acessível é a confecção de cubos de isopor e no lugar do estojo a utilização de um espetinho de madeira. Na Figura 5 temos a imagem de um jogo feito desta maneira. Durante as aulas esta confecção dos objetos tornou-se envolvente e proveitosa, possibilitou aos alunos desenvolverem habilidades manuais, senso de coletividade e socialização.Assim a tentativa de levantar recursos para providenciar jogos de madeiras para todos alunos foi substituída pela realizações de momentos de construções dos jogos.

Figura 5: Replica do jogo feito com isopor e espetinho de madeira

A vontade de jogar captura a atenção da maioria dos alunos e a possibilidade de construir um jogo e levar ele para sua casa torna a aula bem envolvente e produtiva.

5.3 Primeiros questionamentos

São levantadas questões sobre o jogo. Algumas questões relevantes são:

- Será que tem como provar que a solução procurada existe?

- Quantas são as possibilidades?
- Só tentativa e erro são as únicas maneiras para resolver este jogo.
- Será possível o aluno escolher as cores das faces e uma planilha eletrônica mostrar quais são as soluções caso existam?

5.4 Proposta de um método que resolve o jogo com qualquer cores nas faces

Neste terceiro momento é apresentado aos alunos que é possível criar um código para as cores. O problema passa a ser abordado de maneira sistematizada. Para isso, durante as aulas, demonstramos como utilizar algumas ferramentas matemáticas para converter as possibilidades em códigos. Eles são manipulados e convertidos em números primos. Com o mapeamento dos códigos,ficamos diante de um grande espaço amostral que será filtrado de maneira que a solução seja reconhecida ou tenha sua inexistência assegurada. Neste momento é importante criar uma sequência gradual de explicações, assim algumas informações devem ficar bem entendidas para que os alunos possam compreender o jogo através de números e códigos. Neste trabalho isso será feito nas seções seguintes.

5.5 Detalhamento dos quatro cubos

São muitas as possibilidades de utilização deste jogo associado ao ensino de matemática. É uma grande oportunidade de discutir planificação dos cubos, suas possibilidades de rotação e as sequências que eles criam em cada posição. Ainda é possível propor uma variação do jogo trocando as cores por outras características.

Uma exploração simplista do jogo em uma aula de matemática, poderia ser, a contagem das possibilidades de tentativas que camuflam as soluções. O número máximo de possibilidade é

$$24 \text{ x } 24 \text{ x } 24 \text{ x } 24 \text{ x } 24 = 7.962.624.$$

Fixando cada cubo em uma mesma posição do estojo, vamos reduzir a quantidade de possibilidades para

$$24 \text{ x } 24 \text{ x } 24 \text{ x } 24 = 331.776.$$

Na Figura 6 está ilustrado um cubo girando de seis maneiras distintas. Estas figuras podem auxiliar os alunos na compreensão da necessidade de avaliar as possibilidades para cada eixo escolhido.

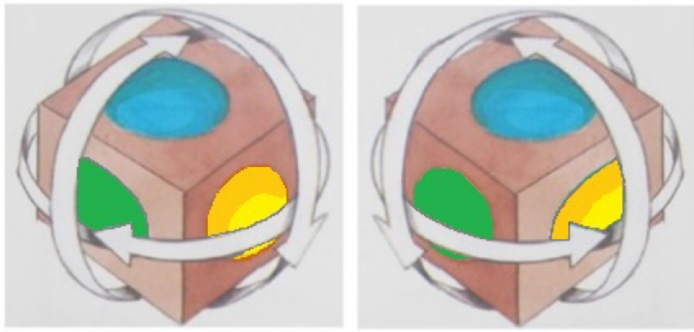


Figura 6: Cubo com possibilidades de giros em todos os possíveis sentidos

5.6 Filtrar possibilidades e resolver um dos muitos desafios

Uma exploração mais elaborada do jogo, em uma aula de matemática, poderia ser a filtragem das possibilidades não desejadas, reduzindo o espaço amostral, possibilitando a descoberta das posições dos cubos que evidenciam o sucesso. Isso é possível com a utilização de códigos para as cores e avaliação dos dados gerados pelos códigos, estes vão ser selecionados de forma que seja possível excluir repetidas vezes os casos indesejados até ficar com um espaço amostral reduzido que permita perceber facilmente a ocorrência do sucesso desejado.

5.7 Apresentação de um método que resolve o jogo com quaisquer cores nas faces

Uma exploração sofisticada para este jogo em uma aula de matemática seria a discussão de um caso geral. O aluno poderia, por exemplo, escolher as cores de cada face e o professor dizer se há possibilidades de sucesso, quantas e quais são elas e ainda quais são as posições que cada cubo deveria ocupar para o sucesso.

Na busca de uma boa utilização do jogo na sala de aula, vamos obter muitos níveis de percepções. Isso depende diretamente da capacidade individual do aluno e ainda do interesse que este vai manifestar diante do desafio.

Escolhida uma abordagem ela não exclui outra por completo, elas se complementam. A abordagem mais geral abriga as demais e dá liberdade para o aluno ousar em propor situações, isso possibilita ao professor mostrar respostas e dar segurança ao aluno. Este jogo proporciona um grande envolvimento. Ao ser utilizado, estimula muitas atitudes necessárias e desejadas para o ensino de ciências e neste trabalho especificamente a matemática.

Um fator determinante para uma boa utilização desse recurso didático é a estratégia de apresentação das atitudes que serão tomadas para se chegar à resposta procurada.

6 Criação de um código e mapeamentos

Neste trabalho vamos buscar a solução de um caso geral no qual o aluno poderá escolher as cores das faces dos cubos, e nós, com a utilização de uma planilha eletrônica vamos mapear todas as possibilidades de sequências de cores nas quatro laterais do estojo e vamos encontrar nesse conjunto de possibilidades quais são as desejadas.

Para inserir na planilha essas cores e mapear as possíveis soluções, criamos alguns códigos que possibilitaram uma fácil identificação das sequências de cores e ainda encontrar as quatro sequências desejadas nas laterais do estojo.

Os alunos demonstram muito interesse nesses códigos, ficam surpresos e satisfeitos. Rapidamente eles compreendem a ideia central e começam a ficar envolvidos com a proposta da aula.

6.1 Código das Cores

Vamos associar a cada uma das quatro cores um dos valores: 1, 10, 100, 1000.

- vermelho = 1.
- amarelo = 10.
- verde = 100.
- azul = 1000.

Vamos somar os valores das cores que ficam nas laterais do estojo. Os números obtidos vão evidenciar quais quatro cores existem na sequência avaliada em cada lateral. Esses números não diferenciam em que ordem as cores se encontram na lateral do estojo, eles vão evidenciar quantas e quais cores estão em cada lateral do estojo.

Na Figura 7 temos exemplos de números que evidenciam facilmente as cores da suposta lateral do estojo.

	azul	verde	amarelo	vermelho	valor
1	4	0	0	0	4000
2	3	1	0	0	3100
3	3	0	1	0	3010
4	2	2	0	0	2200
5	2	1	1	0	2110
6	2	1	0	1	2101
7	2	0	2	0	2020
8	2	0	1	1	2011
9	2	0	0	2	2002
10	1	3	0	0	1300
11	1	2	1	0	1210
12	1	2	0	1	1201
13	1	1	2	0	1120
14	1	1	1	1	1111
15	1	1	0	2	1102
16	1	0	3	0	1030
17	1	0	2	1	1021
18	1	0	1	2	1012
19	1	0	0	3	1003
20	0	4	0	0	400
21	0	3	1	0	310
22	0	3	0	1	301
23	0	2	2	0	220
24	0	2	1	1	211
25	0	2	0	2	202
26	0	1	3	0	130
27	0	1	2	1	121
28	0	1	1	2	112
29	0	1	0	3	103
30	0	0	4	0	40
31	0	0	3	1	31
32	0	0	2	2	22
33	0	0	1	3	13
34	0	0	0	4	4

Figura 7: 34 valores (números) possíveis com os códigos das cores, cada número evidencia quais e quantas são as cores que estão presentes na lateral do estojo

Esses números são bastante particulares, o menor deles é 4 e o maior é 4000. A soma de seus dígitos sempre dá como resultado o valor 4. O número 1111 é o que indica que na lateral não tem repetição de cor. Buscamos na planilha a ocorrência do número 1111 nas quatro laterais do estojo. A maneira como isso será feito, motiva os alunos a estudar matemática, o momento que o Teorema Fundamental da Aritmética aparece como auxílio na solução do desafio.

Teorema Fundamental da Aritmética:

Na seção 2.1, Teorema 1, vimos que todo número natural maior do que 1, ou é primo, ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Como estamos procurando o número 1111, quatro vezes, em um primeiro momento os alunos podem ser levados a acreditar que o valor 4444, seria um bom candidato para representar esta façanha. Isso pode ser facilmente descartado, observe um exemplo:

Os valores 1111, 1111, 1201 e 1021 somados vão dar como resultado o valor 4444, e fica evidente que não ocorrerá o desejado 1111 em todas as quatro faces.

Como 1111 pode ser escrito como: 101 x 11, o Teorema Fundamental da Aritmética nos garante a unicidade.

Na planilha vamos dividir nossos números especiais por 101 e no lugar de procurar 1111, vamos procurar o número 11. Este só vai aparecer quando aparecer o 1111 evitando a compensação que ocorreu no exemplo dos quatro valores (1111, 1111, 1201 e 1021). Agora temos quatro números 11 para serem encontrados, isso será conseguido pelo número 14641, ele é 11 x 11 x 11 x 11. Por se tratar do produto de quatro números primos, mais uma vez o Teorema Fundamental da Aritmética nos garante a unicidade.

6.2 Código dos eixos e seus sentidos de rotação

Tomando os quatro cubos, vamos escolher um cubo para ser o primeiro, um cubo para ser o segundo, um cubo para ser o terceiro e o último para ser o quarto. Eles ficaram identificados por: c_1, c_2, c_3 e c_4, conforme Figura 8. Essa apresenta um cubo, de um kit de um jogo confeccionado pelos alunos. Para representar os eixos foram utilizados três espetinhos de madeiras.

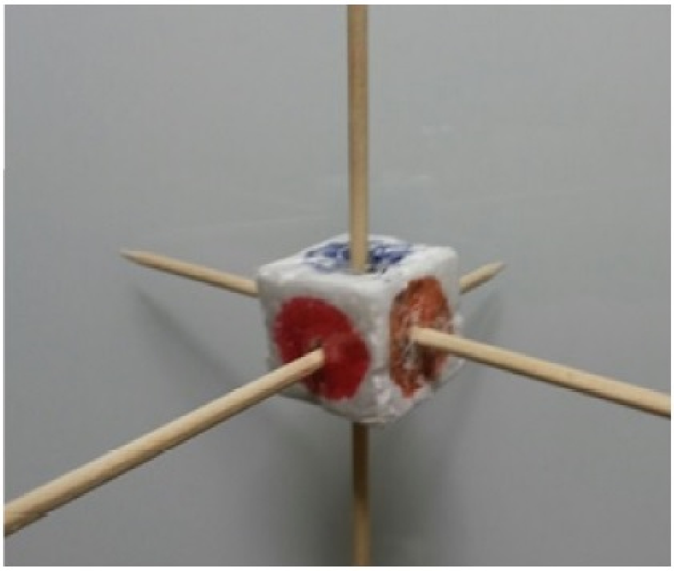


Figura 8: Três eixos (dois sentidos para cada eixo)

Estes eixos serão identificados por: e_1, e_2 e e_3. Cada eixo perfura as faces que ficam escondidas quando o cubo é colocado no estojo, desta forma cada eixo determina as quatro faces que vão aparecer em cada uma das laterais do estojo para cada cubo. Na Figura 9 temos um eixo escolhido e as quatro faces que vão aparecer no estojo estão representadas em um papel que será planificado.

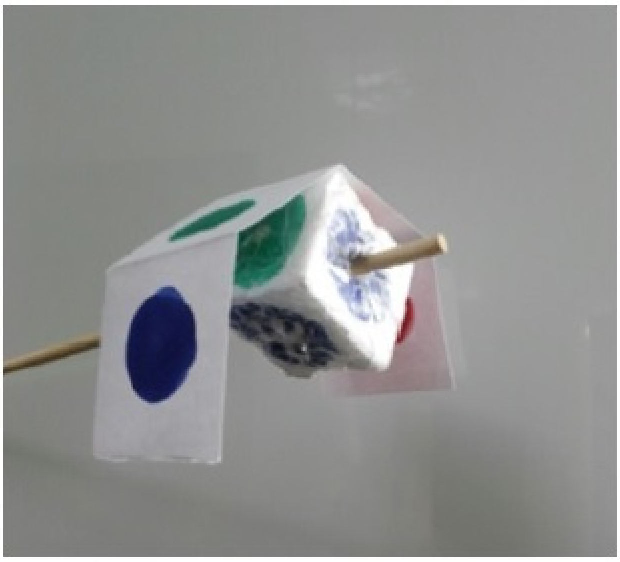


Figura 9: Planificação da lateral do cubo

Essa sequência de 4 cores, vai ficar na planilha na direção vertical. Como vamos fazer o mesmo para os quatro cubos, teremos quatro colunas de quatro cores na horizontal o que permite observar quatro cores em cada linha Essas cores representam a lateral do estojo. Na na Figura 10 está representado as quatro faces de um cubo ao ser escolhido um eixo (ao ser escolhidas as duas faces que não ficam nas laterais do estojo).

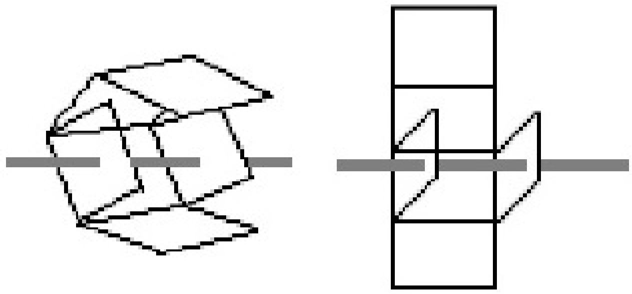


Figura 10: Eixo com cubo abrindo

Ao escolher um eixo que passa por duas faces opostas estaremos disponibilizando quatro cores que vão aparecer no estojo, a Figura 11 representa essa situação com um cubo planificado, onde está escrito códigos para diferenciar as faces.

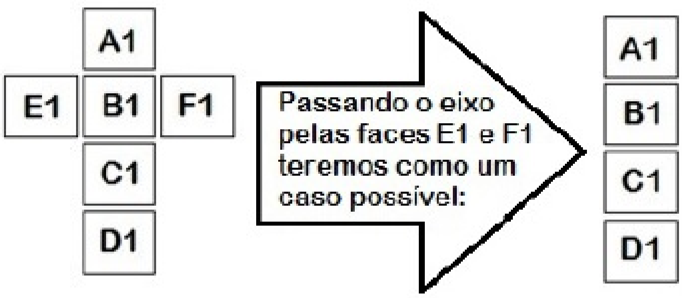


Figura 11: Quatro cores que aparecem para cada cubo

Para ficar registrado o endereço de qual eixo está sendo utilizado e em qual sentido o cubo está sendo girado, vamos adortar alguns códigos que na planilha ficarão sobre a coluna das quatro cores de cada cubo. Na Figura 12 temos o primeiro caso da planilha, depois de digitar as cores das faces na planilha, as letras são automaticamente substituídas pelos códigos das cores das faces.

c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1a
A1	A2	A3	A4
B1	B2	B3	B4
C1	C2	C3	C4
D1	D2	D3	D4

Figura 12: Tabela que mostra um dos vários casos, na vertical 4 cores de um cubo escolhido um eixo que passa por duas faces que ficaram escondidas, na horizontal a lateral do estojo onde aparece quatro faces, uma de cada cubo. Na parte superior os códigos dos eixos

A seguir temos os códigos que serão utilizados para a identificação do cubo , do eixo e do sentido de rotação.

6.3 Códigos dos seis casos, para os três eixos com dois sentidos cada, para o cubo 1

- c1e1 = cubo 1 girando em torno do eixo 1 no primeiro sentido.
- c1e1* = cubo 1 girando em torno do eixo 1 no segundo sentido.
- c1e2 = cubo 1 girando em torno do eixo 2 no primeiro sentido.
- c1e2* = cubo 1 girando em torno do eixo 2 no segundo sentido.
- c1e3 = cubo 1 girando em torno do eixo 3 no primeiro sentido..
- c1e3* = cubo 1 girando em torno do eixo 3 no segundo sentido.

Na Figura 13 serão evidenciadas as seis possibilidades de leitura das quatro faces para um cubo ao ser selecionado um dos três eixo. Para cada eixo selecionado existem dois sentidos para a leitura das cores das faces. Em cada sentido escolhido as quatro faces podem ser anotadas partindo de cada uma delas, isso vai gerar quatro possibilidades para cada sentido. Teremos assim oito possibilidades para cada eixo. Para cada cubo teremos um total de 24 possibilidades, resultantes dos 3 eixos com 8 possibilidades cada.

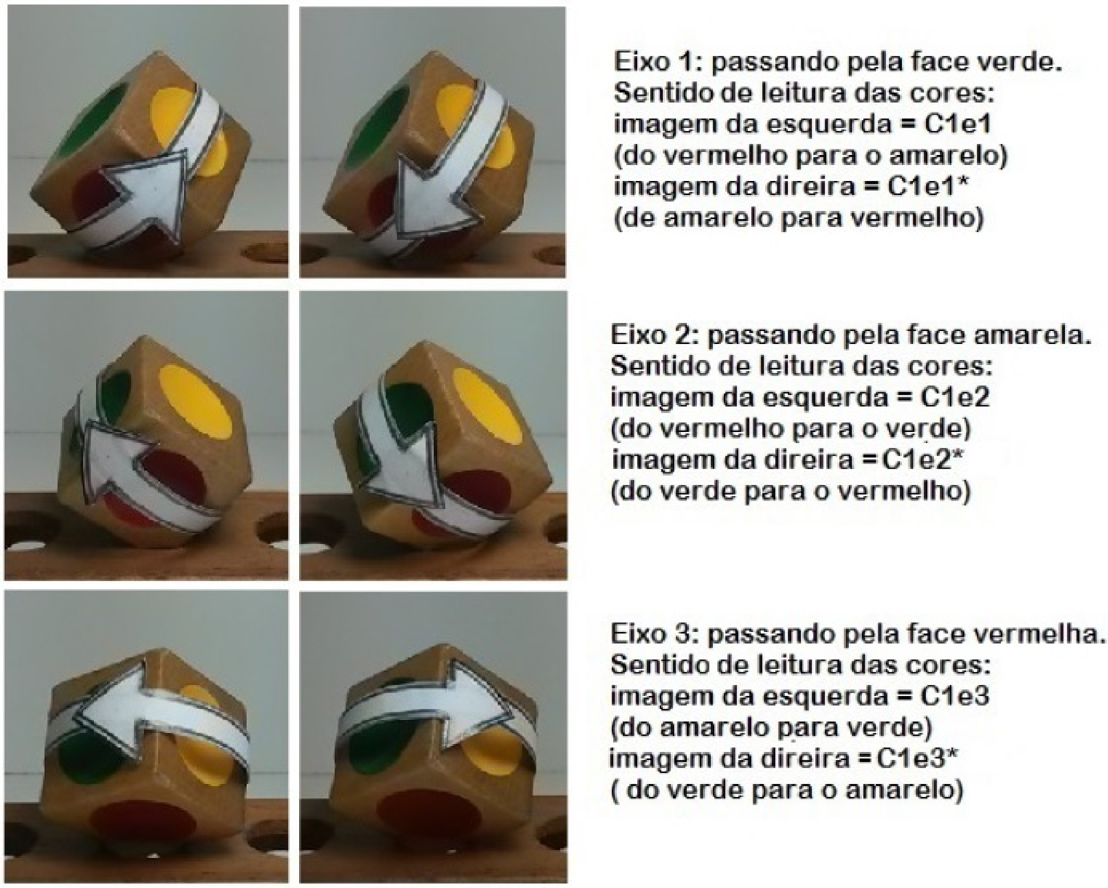


Figura 13: Três possibilidades de eixos para cada cubo, dois sentidos para casa eixo, quatro sequências de cores para cada sentido, 24 possibilidades para cada cubo

6.4 Códigos dos seis casos, para os três eixos com dois sentidos cada, para o cubo 2

- c2e1 = cubo 2 girando em torno do eixo 1 no primeiro sentido.
- c2e1* = cubo 2 girando em torno do eixo 1 no segundo sentido.
- c2e2 = cubo 2 girando em torno do eixo 2 no primeiro sentido.

- c2e2* = cubo 2 girando em torno do eixo 2 no segundo sentido.
- c2e3 = cubo 2 girando em torno do eixo 3 no primeiro sentido.
- c2e3* = cubo 2 girando em torno do eixo 3 no segundo sentido.

6.5 Códigos dos seis casos, para os três eixos com dois sentidos cada, para o cubo 3

- c3e1 = cubo 3 girando em torno do eixo 1 no primeiro sentido.
- c3e1* = cubo 3 girando em torno do eixo 1 no segundo sentido.
- c3e2 = cubo 3 girando em torno do eixo 2 no primeiro sentido.
- c3e2* = cubo 3 girando em torno do eixo 2 no segundo sentido.
- c3e3 = cubo 3 girando em torno do eixo 3 no primeiro sentido.
- c3e3* = cubo 3 girando em torno do eixo 3 no segundo sentido.

6.6 Códigos dos seis casos, para os três eixos com dois sentidos cada, para o cubo 4

- c4e1 = cubo 4 girando em torno do eixo 1 no primeiro sentido.
- c4e1* = cubo 4 girando em torno do eixo 1 no segundo sentido.
- c4e2 = cubo 4 girando em torno do eixo 2 no primeiro sentido.
- c4e2* = cubo 4 girando em torno do eixo 2 no segundo sentido.
- c4e3 = cubo 4 girando em torno do eixo 3 no primeiro sentido.
- c4e3* = cubo 4 girando em torno do eixo 3 no segundo sentido.

6.7 Sequências para cada Cubo

Escolhido um cubo e um eixo em torno do qual ele vai girar, vamos mapear 8 sequências de 4 cores que se apresentará em nosso espaço amostral. Como cada cubo tem três possíveis eixos e cada eixo nos leva a 8 possíveis sequências, teremos para cada cubo 24 possíveis sequências. Isso está ilustrado nas Figuras 22 e 23 da Seção 8.

Ao planificar o cubo, vamos mapear as cores que ficam visíveis no estojo do jogo para cada posição que o cubo venha a ser colocado. Como recurso didático, utilizaremos um cubo de isopor com as faces coloridas e um espeto de madeira (espetinho de churrasco) como o eixo. Na Figura 14 está representada uma maneira que ajuda os alunos a compreender em como ficam as representações dos eixos nas planificações dos cubos. Espetando o cubo em duas faces opostas estaremos definindo um dos tês possíveis eixos. Para cada eixo escolhido terremos 8 possibilidades de cores visíveis no estojo, quatro possibilidades são obtidas girando o cubo em um sentido e as outras quatro são obtidas ao girar o cubo no outro sentido.

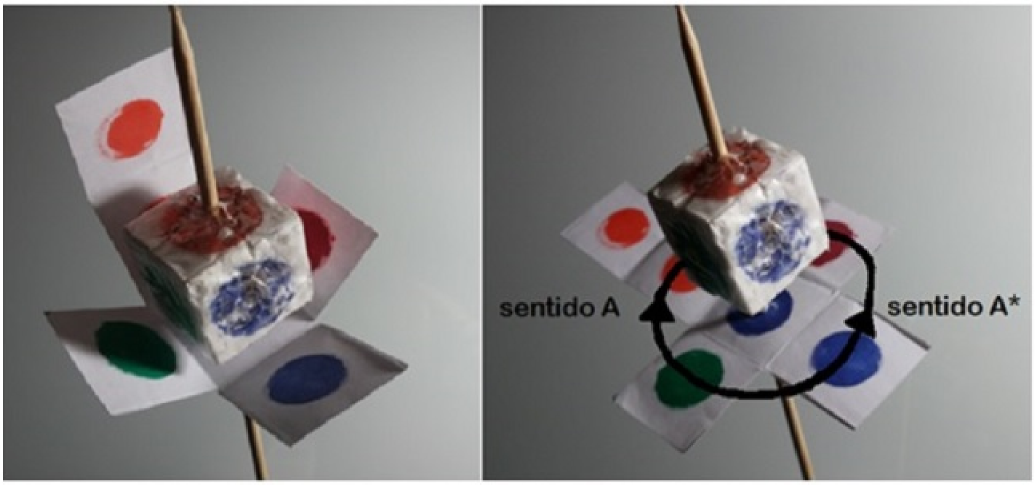


Figura 14: Eixo-planificado

Na Figura 15 temos um cubo planificado e ao lado as 24 sequências de cores que ele pode apresentar no estojo dependendo da maneira como ele é colocado. Esses casos são catalogados em oito sequências de cores para cada eixo. Em cada eixo pode se observar quatro sequências para cada sentido de rotação e cada sentido fica diferenciado por ter ou não um "*"escrito no final do código

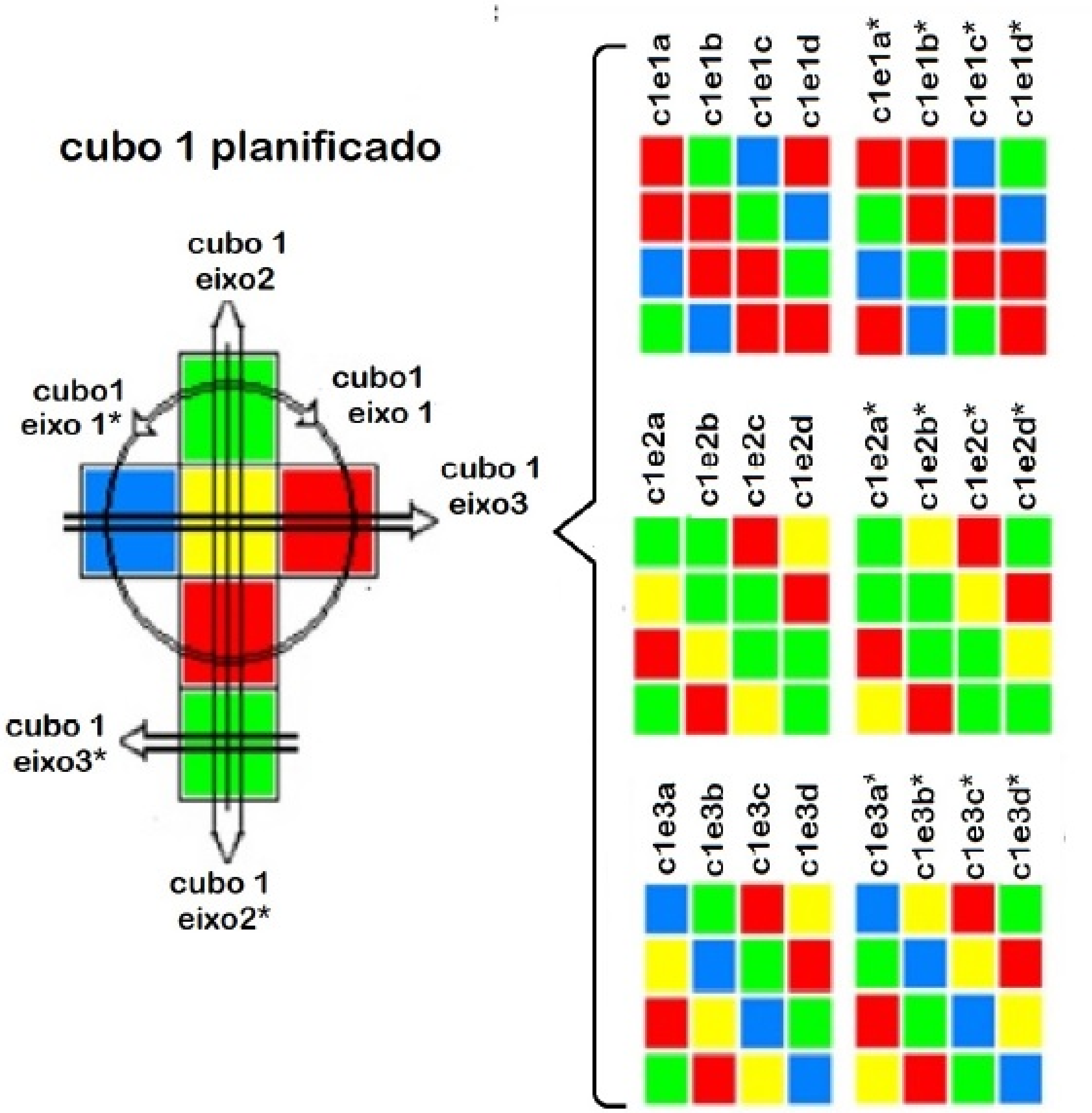


Figura 15: Exemplo de um cubo 1 planificado com as faces coloridas, três eixos com dois sentidos representados no plano, ao lado os códigos que representam as 24 possibilidades de cores para este exemplo

6.8 Variáveis Observadas nos Cubos Planificados

A planificação de cada cubo ficará reconhecida por seis valores que serão correspondentes às seis cores de cada uma de suas seis faces. Os 4 cubos ficam definidos por 24 valores que são as variáveis na Figura 16.

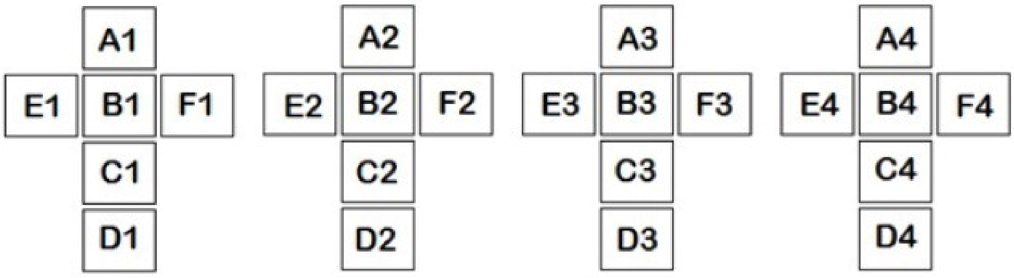


Figura 16: Representação das 24 variáveis, nos cubos planificados

Cada face terá sua cor relacionada a um dos quatro números (1,10,100,1000) que determinam as quatro cores do jogo. Identificada (ou escolhida) qual é a cor de cada face, seus códigos serão digitados na planilha. Na Figura 17 está representada a tabela da planilha onde serão inseridos os códigos das cores.

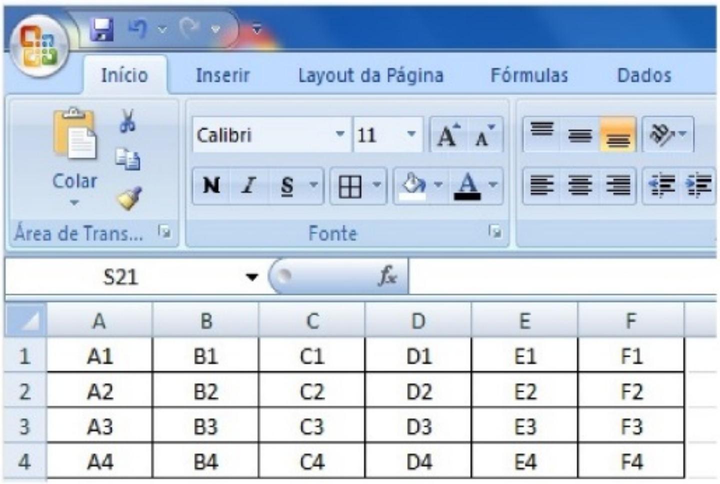


Figura 17: Tabela da planilha onde as variáveis serão digitadas, em cada célula o usuário digitará o código correspondente à cor da face do cubo que está identificada

6.9 As Variáveis do Caso Geral na Planilha

Resolver um caso geral dá ao aluno a possibilidade de escolher as cores das faces dos cubos. Depois de escolhidas as cores, com o auxílio da planilha, podemos verificar se as escolhas conduzem a uma ou mais situações favoráveis. Isso será exemplificado na Seção 9.6.

Cada cubo vai gerar 24 sequências de quatro cores. As orientações utilizadas são as que foram detalhadas na Seção 6.7, definição de três eixos com dois sentidos de giro. Para cada cubo teremos oito sequências, para cada eixo. Na planilha as sequências são montadas com as variáveis: A1, B1, C1, D1, E1, F1, A2, B2, C2, D2, E2, F2, A3, B3, C3, D3, E3, F3, A4, B4, C4, D4, E4 e F4. Para os cubos 1 e 2, elas estão apresentadas nas tabelas que se encontram nas Figuras 18 e 19. As tabelas preenchidas com as variáveis (sem os códigos) podem ser utilizadas para discutir com os alunos a lógica utilizada para filtrar as soluções.

c1e1a	c1e1b	c1e1c	c1e1d
A1	D1	C1	B1
B1	A1	D1	C1
C1	B1	A1	D1
D1	C1	B1	A1

c1e1a*	c1e1b*	c1e1c*	c1e1d*
D1	C1	B1	A1
C1	B1	A1	D1
B1	A1	D1	C1
A1	D1	C1	B1

c1e2a	c1e2b	c1e2c	c1e2d
A1	E1	C1	F1
F1	A1	E1	C1
C1	F1	A1	E1
E1	C1	F1	A1

c1e2a*	c1e2b*	c1e2c*	c1e2d*
E1	C1	F1	A1
C1	F1	A1	E1
F1	A1	E1	C1
A1	E1	C1	F1

c1e3a	c1e3b	c1e3c	c1e3d
E1	D1	F1	B1
B1	E1	D1	F1
F1	B1	E1	D1
D1	F1	B1	E1

c1e3a*	c1e3b*	c1e3c*	c1e3d*
D1	F1	B1	E1
F1	B1	E1	D1
B1	E1	D1	F1
E1	D1	F1	B1

Figura 18: Tabela com as 24 combinações possíveis das 6 faces tomadas 4 á 4 para o Cubo 1. As 24 possibilidades estão escritas de maneira literal, elas serão trocas pelos códigos: 1, 10, 100 e 1000, de acordo com a respectiva cor de cada face

c2e1a	c2e1b	c2e1c	c2e1d
A2	D2	C2	B2
B2	A2	D2	C2
C2	B2	A2	D2
D2	C2	B2	A2

c2e1a*	c2e1b*	c2e1c*	c2e1d*
D2	C2	B2	A2
C2	B2	A2	D2
B2	A2	D2	C2
A2	D2	C2	B2

c2e2a	c2e2b	c2e2c	c2e2d
A2	E2	C2	F2
F2	A2	E2	C2
C2	F2	A2	E2
E2	C2	F2	A2

c2e2a*	c2e2b*	c2e2c*	c2e2d*
E2	C2	F2	A2
C2	F2	A2	E2
F2	A2	E2	C2
A2	E2	C2	F2

c2e3a	c2e3b	c2e3c	c2e3d
E2	D2	F2	B2
B2	E2	D2	F2
F2	B2	E2	D2
D2	F2	B2	E2

c2e3a*	c2e3b*	c2e3c*	c2e3d*
D2	F2	B2	E2
F2	B2	E2	D2
B2	E2	D2	F2
E2	D2	F2	B2

Figura 19: Tabela com as 24 combinações possíveis das 6 faces tomadas 4 á 4 para o Cubo 2. As 24 possibilidades estão escritas de maneira literal, elas serão trocas pelos códigos: 1, 10, 100 e 1000, de acordo com a respectiva cor de cada face

Analogamente isso ocorrerá para os cubos 3 e 4.

7 Outras maneiras de ver o cubo

7.1 Projeções das faces escondidas

Na representação deste jogo em um papel, os alunos são colocados diante de uma pequena dificuldade. Eles precisam representar as faces que ficam escondidas em um desenho tridimensional. Uma maneira tradicional seria a projeção destas faces como representado na Figura 20.

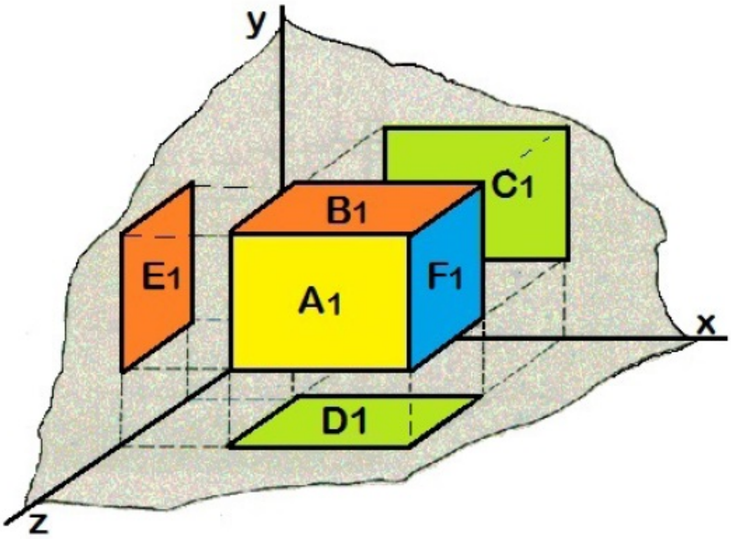


Figura 20: Projeções das faces escondidas

Uma parte muito proveitosa deste trabalho em sala de aula é a busca de maneiras para representar as faces escondidas dos cubos. Na Figura 21 temos algumas ideias que foram apresentadas aos alunos e tiveram boa aceitação.

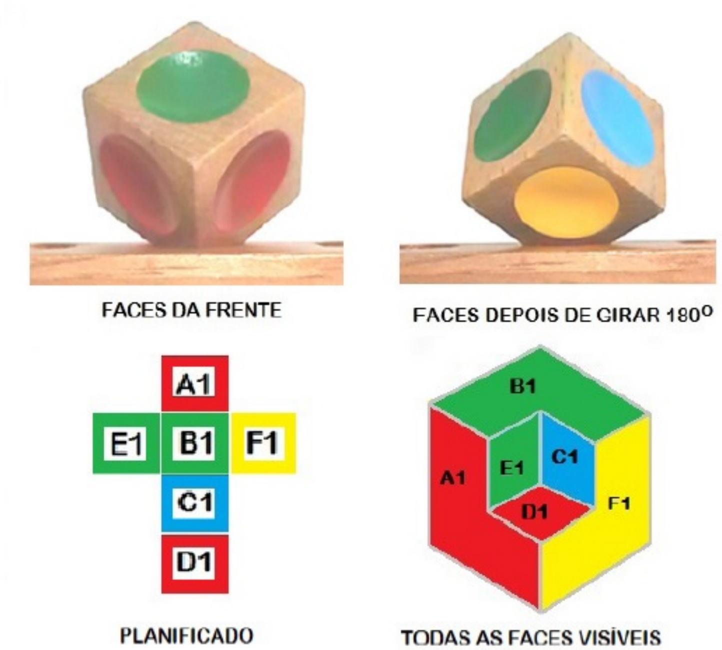


Figura 21: Maneiras de mostrar as faces escondidas

8 Lógica do Caso Geral na Planilha

8.1 Possibilidades

Cada um dos quatro cubos passam a ser representados por 24 sequências de quatro cores, estas sequências são retiradas das cores que estão em cada face de cada cubo, coincidentemente são 24 cores para os quatro cubos.

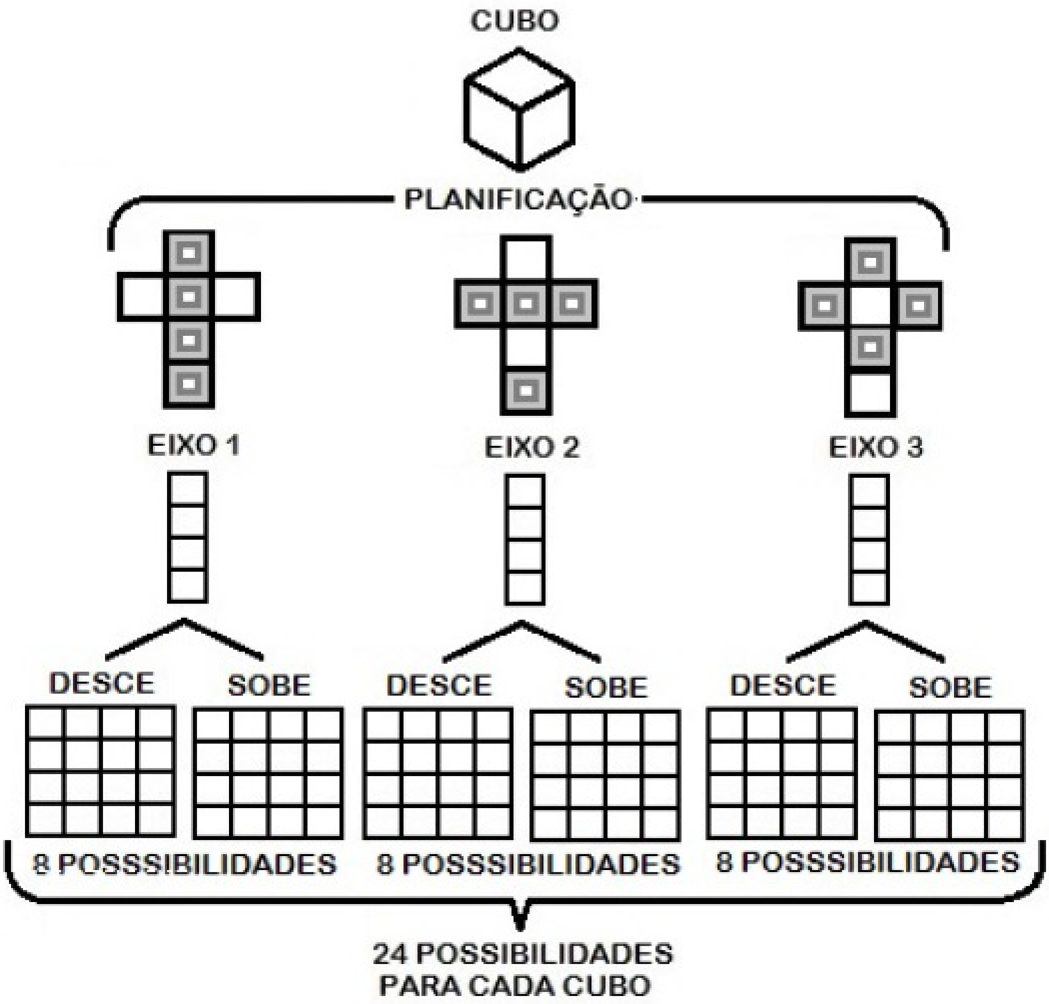


Figura 22: Partindo de cada cubo podemos chegar em 24 possibilidades

Denominando os cubos por cubo 1, cubo 2 , cubo 3 e cubo 4, reduziremos nosso espaço amostral em 24 vezes. Cada uma das 24 sequências do primeiro cubo será combinada com cada uma das 24 sequências do segundo cubo, com as 24 do terceiro e com as 24 do quarto cubo, Figura 23. Isso totalizará: 24 x 24 x 24 x 24 = 331.776 possibilidades. Algumas possibilidades podem repetir.

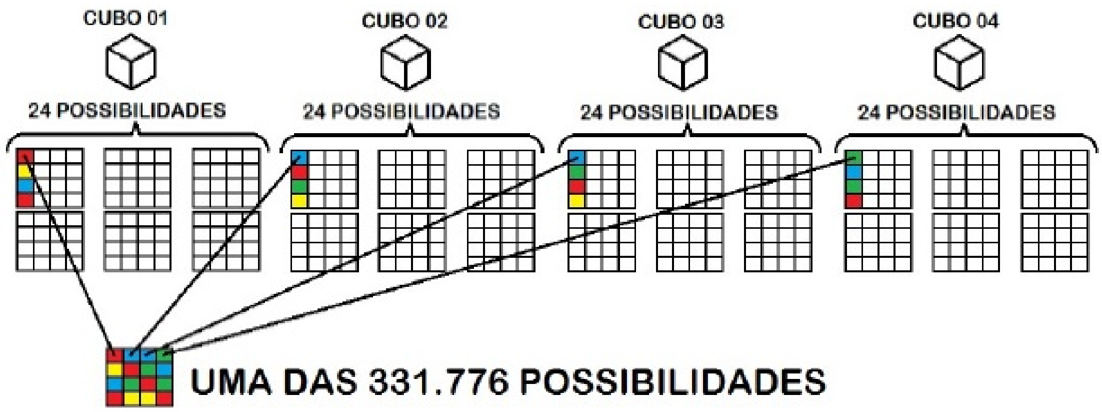


Figura 23: Fixando cada cubo em uma das quatro posições e combinando as 24 possibilidades de cada um deles, podemos chegar em 331.776 casos

8.2 Como Encontrar Respostas

De posse dos cubos coloridos (o aluno pode escolher as cores) são conhecidas as 24 cores das faces dos quatro cubos. Elas serão associadas aos quatro números que representam cada um, uma das quatro cores do desafio.

Na planilha teremos que digitar os valores das 24 variáveis. A planilha realiza as 331.776 possibilidades e com um comando de busca vamos encontrar a situação desejada. Isso será possível porque conseguimos associar uma "álgebra"aos códigos das cores na situação desejada.

A planilha evidencia em quantas situações ocorrerão a não repetição das cores nas 4 laterais do estojo. Os casos encontrados serão sempre múltiplos de 4. Isso se deve ao fato de que a planilha não diferencia de qual lateral o estojo é observado.

Na Figura 24 seguinte temos os cubos no estojo em posição que corresponde a uma solução do desafio. Ao girar o estojo a mesma solução pode ser contada por quatro vezes, assim para cada posição dos cubos que corresponda a uma solução a planilha acusa quatro resultados.

Figura 24: Estojo-rodando

Através desse recurso os alunos podem criar situações com várias soluções possíveis, ou mesmo, sem solução. Os testes que a planilha possibilita proporcionam aos alunos segurança para a criação de desafios. Caso algum aluno resolva abandonar o desafio alegando não existir solução, com a utilização da planilha, é possível dizer quantas soluções existem, e ainda apresentá-las.

8.3 Planilha que Mostra os Resultados

Com a digitação destas 24 variáveis na planilha, ficam definidas as cores das faces dos cubos. Assim ocorrerá o preenchimento de toda planilha. Na tentativa de deixar a planilha didática, a próxima tabela de dados que é apresentada é uma que contém todas as combinações de quatro cores que cada cubo pode apresentar, ficando em cada posição possível, em seu lugar dentro do estojo.

8.4 Como os Códigos Podem Evidenciar que não Repetiram Cores em Nenhuma Sequência das Quatro Faces Vizinhas?

Na planilha serão combinadas todas as 331.776 possibilidades. Cada possibilidade é composta de quatro linhas, onde ficam quatro variáveis. Elas equivalem às quatro laterais do estojo onde as cores não devem repetir. Estas 16 variáveis distribuídas em quatro linhas serão somadas em cada linha. A planilha coloca o resultado da soma na frente das quatro variáveis em cada linha. Na Figura 25 temos a imagem de uma parte da planilha onde é possível observar na caixa de comando a função que executa a soma descrita anteriormente.

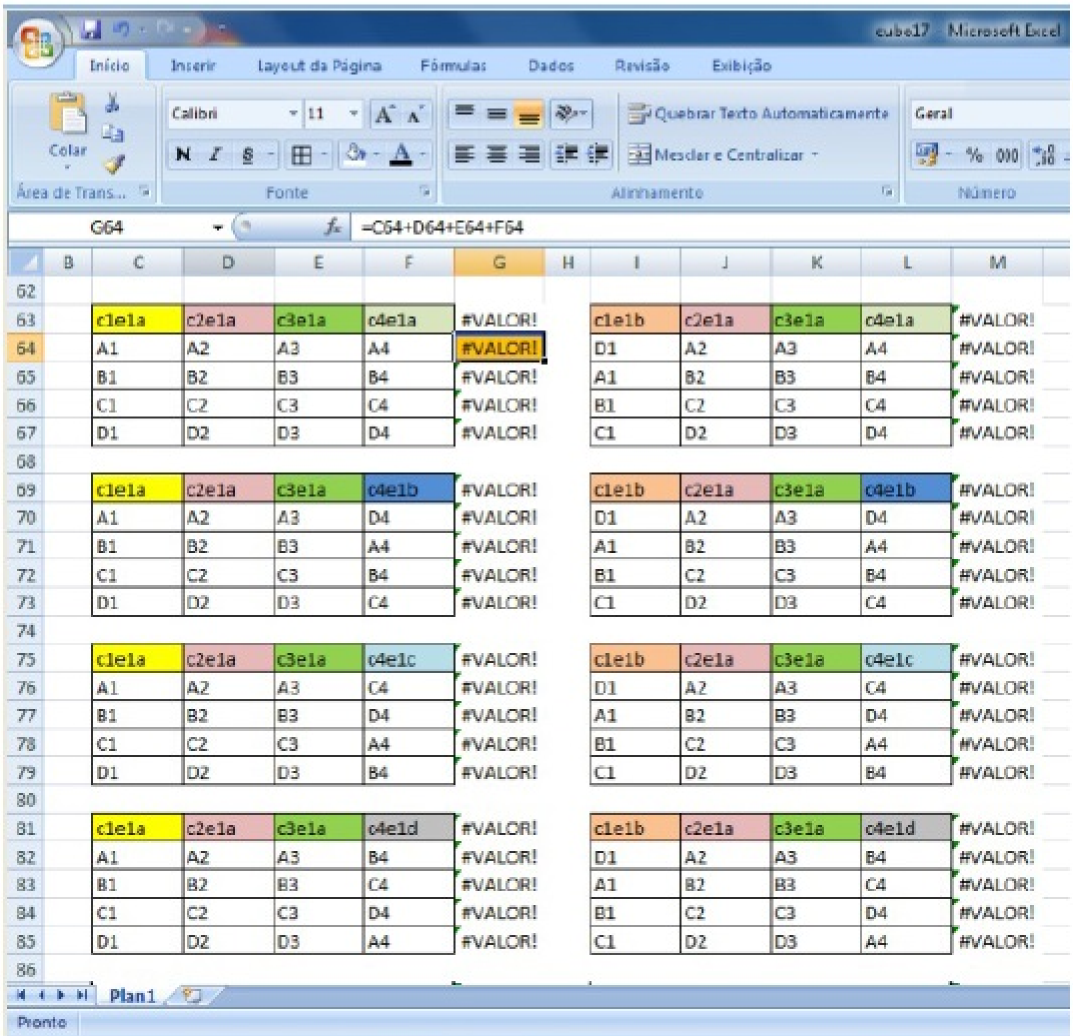


Figura 25: Parte da planilha em que aparecem as variáveis de algumas combinações e na linha de comando a função que soma as linha de cada caso

Quando a planilha é utilizada, cada uma das 24 varáveis recebe um dos quatro números que são os quatro códigos das quatro cores do jogo. A soma desejada é o valor 1111 e o sucesso é encontrar 1111 em cada uma das quatro linhas da possibilidade avaliada.

Uma tentativa frustrada foi adicinar as somas das quatro linhas e buscar o valor 4444. Nestas tentativas ocorriam somas de valores que não eram 1111, mas cujo resultado era 4444. A busca foi bem sucedida quando utilizamos a busca do número 14641.

O número 14641 passou a evidenciar que estava ocorrendo 1111 na soma de cada linha.

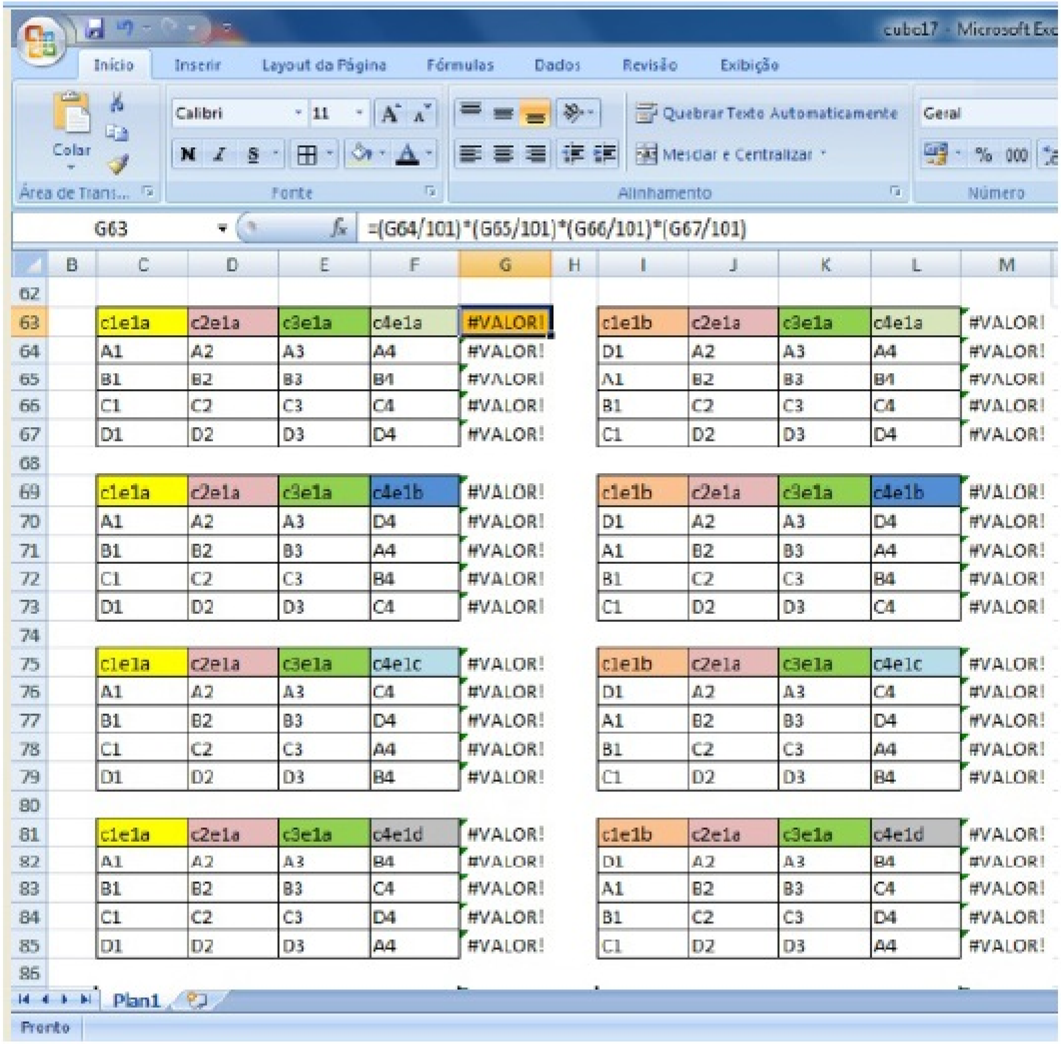
8.5 Como o Número 14641 Mostra a Solução do Desafio

Como o valor 1111 = 11 x 101, e estes dois fatores são primos, onde era procurado o valor 1111, passaremos a buscar o valor 11, a soma de cada linha fica dividida por 101 e quando o resultado for 11 está garantido pelo Teorema Fundamental da Aritmética a unicidade da ocorrência do valor 11 vinculada ao desejado valor 1111.

Como o valor 1111 deve ocorrer nas quatro linhas da possibilidade avaliada, vamos trabalhar com a ideia de encontrar quatro números 11. O número 14641 = 11 x 11 x 11 x 11 , como o capicua [1] 14641 é obtido pelo produto de quatro números primos, mais uma vez com a utilização do Teorema Fundamental da Aritmética fica assegurado a unicidade da ocorrência do valor 14641 vinculado ao surgimento na planilha de quatro fatores primos iguais a 11.

A Figura 26 mostra parte da planilha onde é possível observar na linha de comando a função matemática que divide cada soma por 101 e multiplica os quatro fatores associados um a cada linha.

[1] Capicua é o nome que se dá quando um número tem a mesma ordem quando lido na maneira inversa.



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
62												
63		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1a	#VALOR!		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1a	#VALOR!
64		A1	A2	A3	A4	#VALOR!		D1	A2	A3	A4	#VALOR!
65		B1	B2	B3	B4	#VALOR!		A1	B2	B3	B4	#VALOR!
66		C1	C2	C3	C4	#VALOR!		B1	C2	C3	C4	#VALOR!
67		D1	D2	D3	D4	#VALOR!		C1	D2	D3	D4	#VALOR!
68												
69		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1b	#VALOR!		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1b	#VALOR!
70		A1	A2	A3	D4	#VALOR!		D1	A2	A3	D4	#VALOR!
71		B1	B2	B3	A4	#VALOR!		A1	B2	B3	A4	#VALOR!
72		C1	C2	C3	B4	#VALOR!		B1	C2	C3	B4	#VALOR!
73		D1	D2	D3	C4	#VALOR!		C1	D2	D3	C4	#VALOR!
74												
75		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1c	#VALOR!		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1c	#VALOR!
76		A1	A2	A3	C4	#VALOR!		D1	A2	A3	C4	#VALOR!
77		B1	B2	B3	D4	#VALOR!		A1	B2	B3	D4	#VALOR!
78		C1	C2	C3	A4	#VALOR!		B1	C2	C3	A4	#VALOR!
79		D1	D2	D3	B4	#VALOR!		C1	D2	D3	B4	#VALOR!
80												
81		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1d	#VALOR!		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1d	#VALOR!
82		A1	A2	A3	B4	#VALOR!		D1	A2	A3	B4	#VALOR!
83		B1	B2	B3	C4	#VALOR!		A1	B2	B3	C4	#VALOR!
84		C1	C2	C3	D4	#VALOR!		B1	C2	C3	D4	#VALOR!
85		D1	D2	D3	A4	#VALOR!		C1	D2	D3	A4	#VALOR!
86												

Figura 26: Parte da planilha que mostram as variáveis de algumas combinações, também, na linha de comando, a função que divide a soma de cada linha por 101, e faz o produto dos quatro resultados

8.6 Como Posicionar os Cubos ao Ocorrer o Número 14641

O sucesso do desafio na planilha é buscado ou encontrado através de um comando de busca do número 14641. Quando o encontramos, encontramos também qual eixo e em qual sentido cada cubo deve ser colocado no estojo e isso possibilita manipular os cubos e apresentar a resposta do desafio em pouco tempo. Isso está demostrado em um exemplo na Seção 9.5.

9 Resolução de um Exemplo com a Planilha

Na Figura 27 os cubos estão desenhados de uma maneira que é sugerida aos alunos, desta maneira é possível perceber as cores das faces que ficam escondidas quando o desenho é feito de maneira tradicional. Outra maneia de observar todas as faces seria a planificação. Os cubos estão com as faces coloridas das seguintes maneiras:

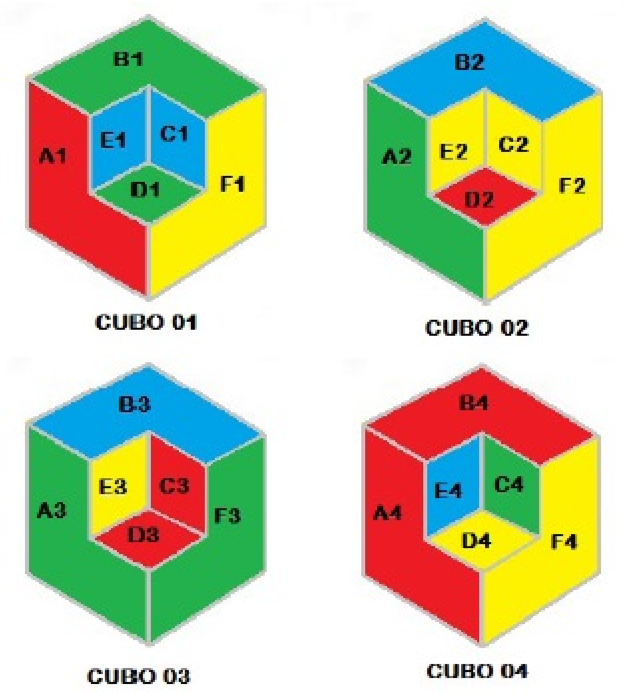


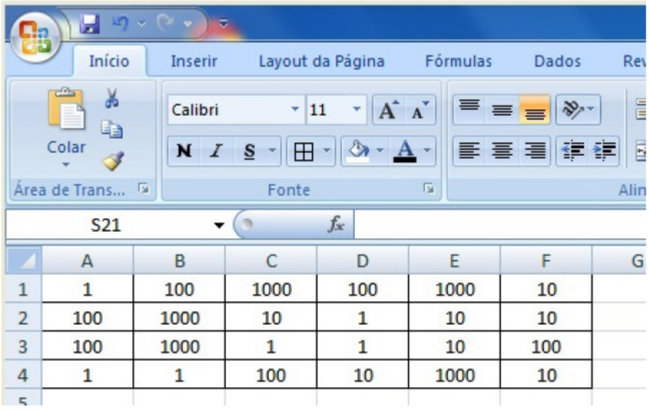
Figura 27: Cubos apresentando as cores nas seis faces

9.1 Introdução do Exemplo na Planilha

Neste exemplo a planilha fica preenchida com os seguintes valores para as 24 vaiáveis (seis variáveis para cada cubo). Isso pode ser observado na Figura 28.

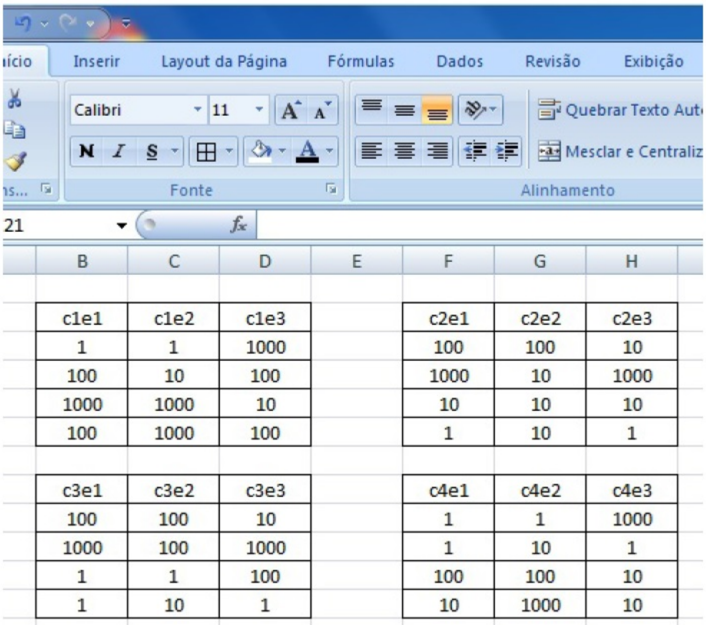
9.2 A Planilha Define os Três Eixos dos Cubos do Exemplo

Com a entrada destes dados, a planilha preenche uma tabela com os códigos das cores que cada cubo apresentaria, ao ser definido cada um dos três eixos. Na Figura 29 temos a tabela preenchida para este exemplo.



	A	B	C	D	E	F
1	1	100	1000	100	1000	10
2	100	1000	10	1	10	10
3	100	1000	1	1	10	100
4	1	1	100	10	1000	10

Figura 28: Planilha preenchida com os códigos das cores das faces do exemplo



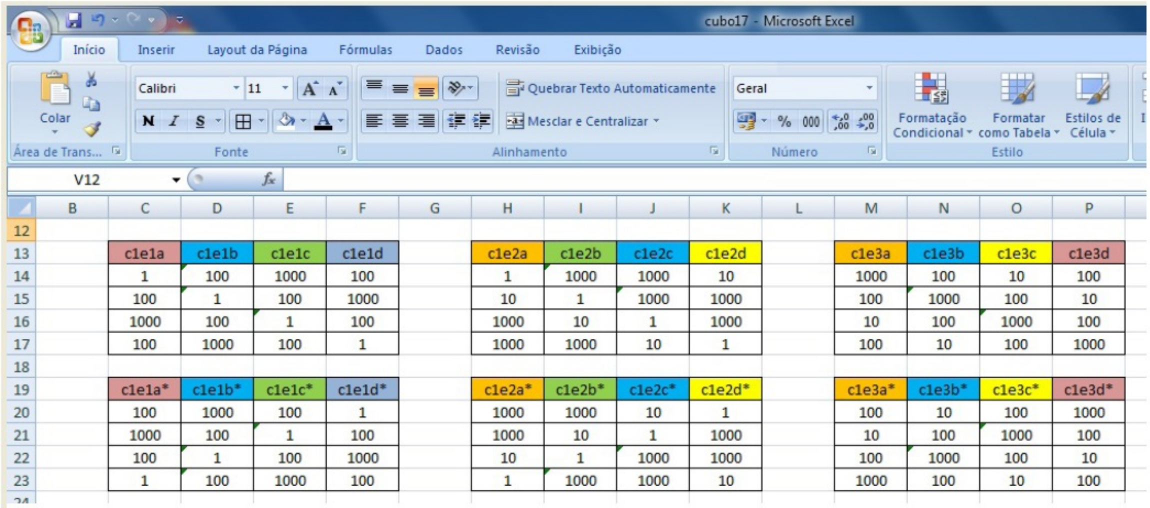
c1e1	c1e2	c1e3		c2e1	c2e2	c2e3
1	1	1000		100	100	10
100	10	100		1000	10	1000
1000	1000	10		10	10	10
100	1000	100		1	10	1

c3e1	c3e2	c3e3		c4e1	c4e2	c4e3
100	100	10		1	1	1000
1000	100	1000		1	10	1
1	1	100		100	100	10
1	10	1		10	1000	10

Figura 29: Tabela com os códigos das cores que cada cubo do exemplo apresentou para cada um de seus três possíveis eixos

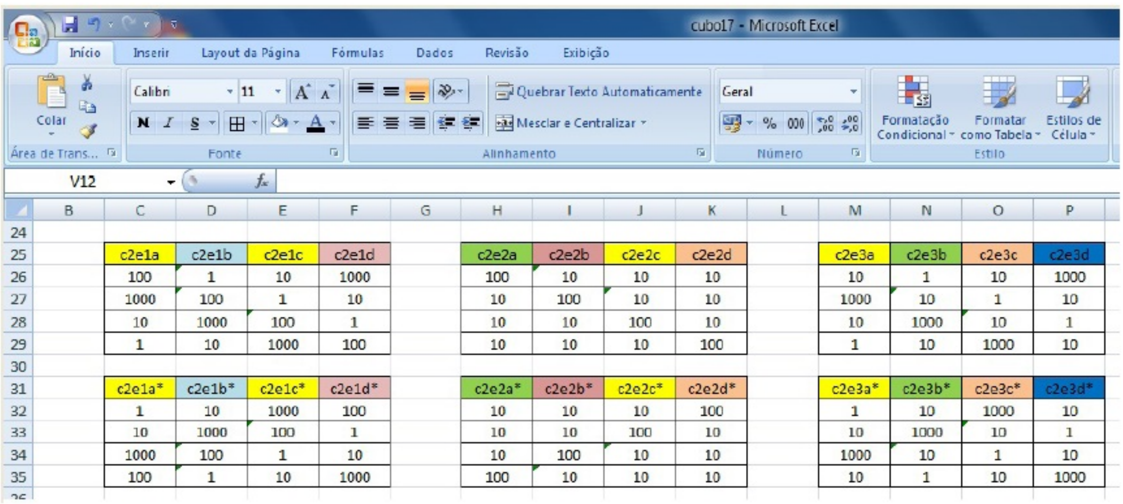
9.3 A Planilha Define as 24 Possibilidades Para Cada Cubo do Exemplo

Para cada cubo podemos observar três colunas, cada uma representa um eixo, neles ficam evidentes quatro códigos para quatro cores. Destes eixos, a planilha gera uma nova tabela com 8 variações para cada eixo. Teremos três eixos, gerando 8 variações cada, perfazendo um total de 24 combinações para cada cubo. Nas Figuras: 30, 31, 32 e 33, teremos as 24 possibilidades de cores (em códigos) para cada cubo. Estas tabelas foram geradas, na planilha, depois das 24 variáveis, deste exemplo, terem sido digitadas.



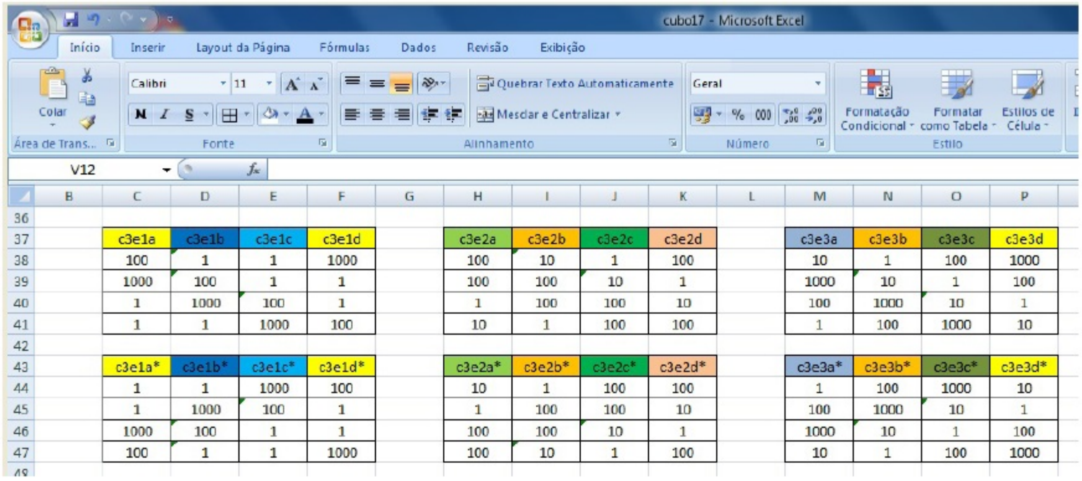
	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
12														
13	c1e1a	c1e1b	c1e1c	c1e1d		c1e2a	c1e2b	c1e2c	c1e2d		c1e3a	c1e3b	c1e3c	c1e3d
14	1	100	1000	100		1	1000	1000	10		1000	100	10	100
15	100	1	100	1000		10	1	1000	1000		100	1000	100	10
16	1000	100	1	100		1000	10	1	1000		10	100	1000	100
17	100	1000	100	1		1000	1000	10	1		100	10	100	1000
18														
19	c1e1a*	c1e1b*	c1e1c*	c1e1d*		c1e2a*	c1e2b*	c1e2c*	c1e2d*		c1e3a*	c1e3b*	c1e3c*	c1e3d*
20	100	1000	100	1		1000	1000	10	1		100	10	100	1000
21	1000	100	1	100		1000	10	1	1000		10	100	1000	100
22	100	1	100	1000		10	1	1000	1000		100	1000	100	10
23	1	100	1000	100		1	1000	1000	10		1000	100	10	100

Figura 30: Tabela das combinações de 4 cores para o cubo 1, preenchida pela planilha depois de digitada os 24 códigos das cores de um exemplo



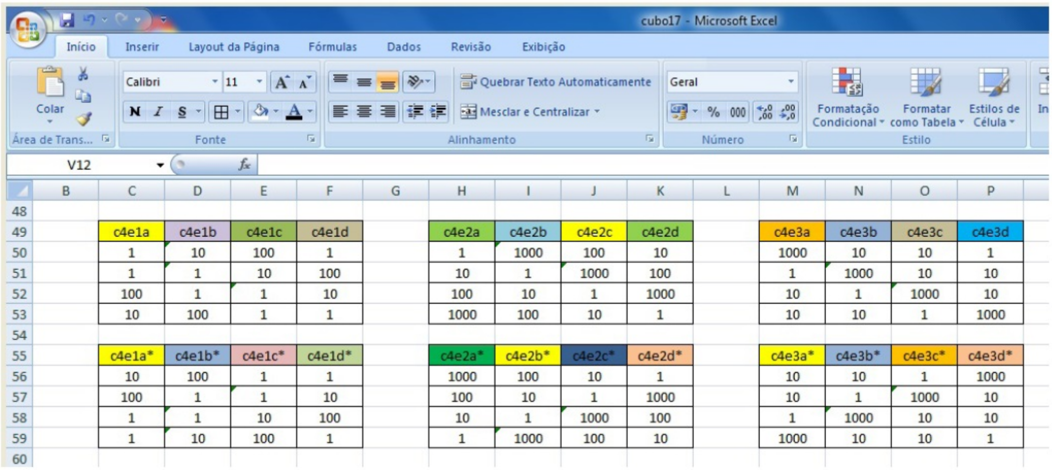
	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
24														
25	c2e1a	c2e1b	c2e1c	c2e1d		c2e2a	c2e2b	c2e2c	c2e2d		c2e3a	c2e3b	c2e3c	c2e3d
26	100	1	10	1000		100	10	10	10		10	1	10	1000
27	1000	100	1	10		10	100	10	10		1000	10	1	10
28	10	1000	100	1		10	10	100	10		10	1000	10	1
29	1	10	1000	100		10	10	10	100		1	10	1000	10
30														
31	c2e1a*	c2e1b*	c2e1c*	c2e1d*		c2e2a*	c2e2b*	c2e2c*	c2e2d*		c2e3a*	c2e3b*	c2e3c*	c2e3d*
32	1	10	1000	100		10	10	10	100		1	10	1000	10
33	10	1000	100	1		10	10	100	10		10	1000	10	1
34	1000	100	1	10		10	100	10	10		1000	10	1	10
35	100	1	10	1000		100	10	10	10		10	1	10	1000

Figura 31: Tabela das combinações de 4 cores para o cubo 2, preenchida pela planilha depois de digitada os 24 códigos das cores de um exemplo



	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
37	c3e1a	c3e1b	c3e1c	c3e1d		c3e2a	c3e2b	c3e2c	c3e2d		c3e3a	c3e3b	c3e3c	c3e3d
38	100	1	1	1000		100	10	1	100		10	1	100	1000
39	1000	100	1	1		100	100	10	1		1000	10	1	100
40	1	1000	100	1		1	100	100	10		100	1000	10	1
41	1	1	1000	100		10	1	100	100		1	100	1000	10
42														
43	c3e1a*	c3e1b*	c3e1c*	c3e1d*		c3e2a*	c3e2b*	c3e2c*	c3e2d*		c3e3a*	c3e3b*	c3e3c*	c3e3d*
44	1	1	1000	100		10	1	100	100		1	100	1000	10
45	1	1000	100	1		1	100	100	10		100	1000	10	1
46	1000	100	1	1		100	100	10	1		1000	10	1	100
47	100	1	1	1000		100	10	1	100		10	1	100	1000

Figura 32: Tabela das combinações de 4 cores para o cubo 3, preenchida pela planilha depois de digitada os 24 códigos das cores de um exemplo

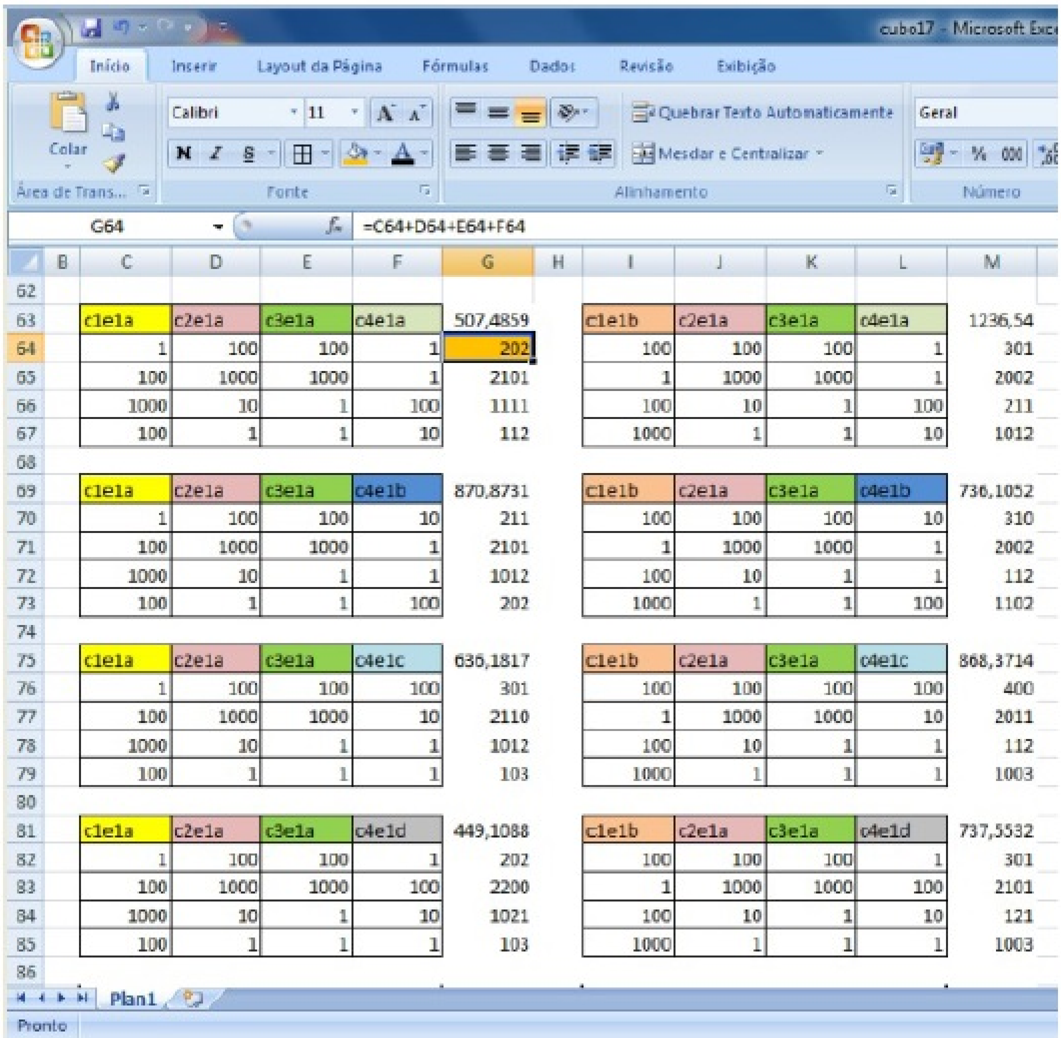


	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
49	c4e1a	c4e1b	c4e1c	c4e1d		c4e2a	c4e2b	c4e2c	c4e2d		c4e3a	c4e3b	c4e3c	c4e3d
50	1	10	100	1		1	1000	100	10		1000	10	10	1
51	1	1	10	100		10	1	1000	100		1	1000	10	10
52	100	1	1	10		100	10	1	1000		10	1	1000	10
53	10	100	1	1		1000	100	10	1		10	10	1	1000
54														
55	c4e1a*	c4e1b*	c4e1c*	c4e1d*		c4e2a*	c4e2b*	c4e2c*	c4e2d*		c4e3a*	c4e3b*	c4e3c*	c4e3d*
56	10	100	1	1		1000	100	10	1		10	10	1	1000
57	100	1	1	10		100	10	1	1000		10	1	1000	10
58	1	1	10	100		10	1	1000	100		1	1000	10	10
59	1	10	100	1		1	1000	100	10		1000	10	10	1

Figura 33: Tabela das combinações de 4 cores para o cubo 4, preenchida pela planilha depois de digitada os 24 códigos das cores de um exemplo

9.4 A Planilha Combina 331.776 Possibilidades do Exemplo

Nas Figuras 34 e 35 são apresentadas partes da planilha. Nelas estão representadas as funções matemáticas nas caixas de comandos, como as apresentadas com as variáveis na Seção 8.4 e representadas nas Figuras 25 e 26, agora estão preenchidas com os códigos das cores das faces do exemplo.



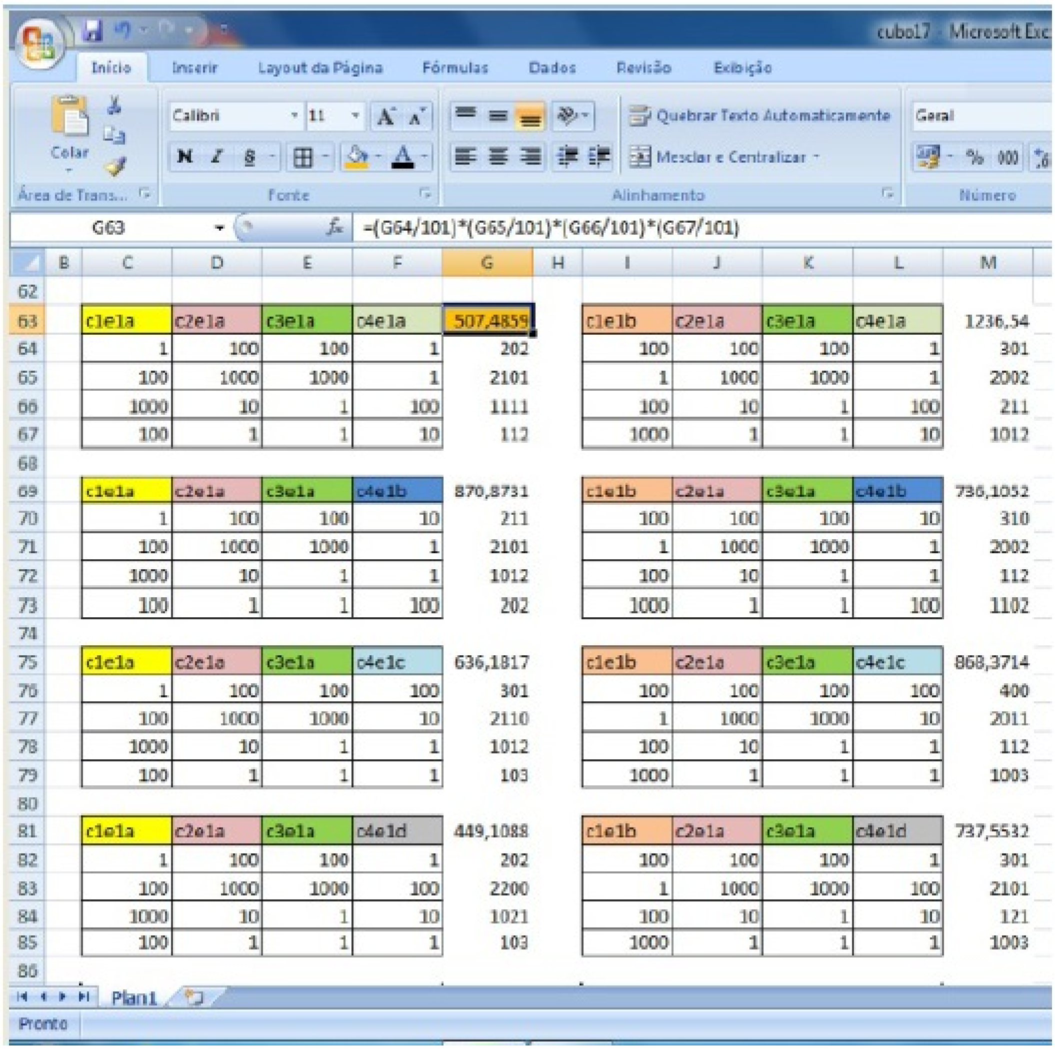
G64 =C64+D64+E64+F64

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
62												
63		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1a	507,4859		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1a	1236,54
64		1	100	100	1	202		100	100	100	1	301
65		100	1000	1000	1	2101		1	1000	1000	1	2002
66		1000	10	1	100	1111		100	10	1	100	211
67		100	1	1	10	112		1000	1	1	10	1012
68												
69		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1b	870,8731		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1b	736,1052
70		1	100	100	10	211		100	100	100	10	310
71		100	1000	1000	1	2101		1	1000	1000	1	2002
72		1000	10	1	1	1012		100	10	1	1	112
73		100	1	1	100	202		1000	1	1	100	1102
74												
75		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1c	636,1817		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1c	868,3714
76		1	100	100	100	301		100	100	100	100	400
77		100	1000	1000	10	2110		1	1000	1000	10	2011
78		1000	10	1	1	1012		100	10	1	1	112
79		100	1	1	1	103		1000	1	1	1	1003
80												
81		c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1d	449,1088		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1d	737,5532
82		1	100	100	1	202		100	100	100	1	301
83		100	1000	1000	100	2200		1	1000	1000	100	2101
84		1000	10	1	10	1021		100	10	1	10	121
85		100	1	1	1	103		1000	1	1	1	1003
86												

Plan1

Pronto

Figura 34: Parte da planilha em que aparecem os códigos das cores de algumas combinações e na linha de comando o resultado da operação da função que soma a linha, caso a soma der o valor 1111, teremos uma linha favorável, uma linha que não apresenta cores repetidas



	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
62											
63	c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1a	507,4859		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1a	1236,54
64	1	100	100	1	202		100	100	100	1	301
65	100	1000	1000	1	2101		1	1000	1000	1	2002
66	1000	10	1	100	1111		100	10	1	100	211
67	100	1	1	10	112		1000	1	1	10	1012
68											
69	c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1b	870,8731		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1b	736,1052
70	1	100	100	10	211		100	100	100	10	310
71	100	1000	1000	1	2101		1	1000	1000	1	2002
72	1000	10	1	1	1012		100	10	1	1	112
73	100	1	1	100	202		1000	1	1	100	1102
74											
75	c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1c	636,1817		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1c	868,3714
76	1	100	100	100	301		100	100	100	100	400
77	100	1000	1000	10	2110		1	1000	1000	10	2011
78	1000	10	1	1	1012		100	10	1	1	112
79	100	1	1	1	103		1000	1	1	1	1003
80											
81	c1e1a	c2e1a	c3e1a	c4e1d	449,1088		c1e1b	c2e1a	c3e1a	c4e1d	737,5532
82	1	100	100	1	202		100	100	100	1	301
83	100	1000	1000	100	2200		1	1000	1000	100	2101
84	1000	10	1	10	1021		100	10	1	10	121
85	100	1	1	1	103		1000	1	1	1	1003

Figura 35: Parte da planilha em que aparecem os códigos de algumas combinações do exemplo e na linha de comando a função que divide a soma de cada linha por 101 e multiplica os quatro resultados, caso o resultado devolvido pela planilha seja 14614, teremos um valor favorável, isso indicará que não há repetição de cores em nenhuma das linhas

9.5 Como Buscar as Soluções do Exemplo na Planilha

As cores das faces dos quatro cubos são inseridas na planilha. Isso é feito através de 24 variáveis, 24 códigos, sendo eles: 1, 10, 100 ou 1000. Depois que as variáveis são digitadas, a planilha preenche automaticamente todas as possibilidades de combinações, soma os códigos das cores nas linhas de cada caso e multiplica os resultados das divisões de cada linha por 101. Para encontrar a solução do jogo, o sucesso, vamos utilizar uma ferramenta de busca da planilha.

Vamos buscar o número 14641. Quando este número aparece teremos a certeza que existe uma solução para o jogo. Na planilha, as soluções são apresentadas em quantidades múltiplas de 4, como discutido na Seção 8.2. Caso existam 2 soluções, a planilha apresentará por 8 vezes o número 14641. Isso ocorreu em nosso exemplo. Nas Figuras 36, 37, 38, 39, 40, 41 ,42 e 43, temos o comando de busca evidenciando 8 resultados. Esses resultados são referentes ao exemplo discutido na Seção 9.

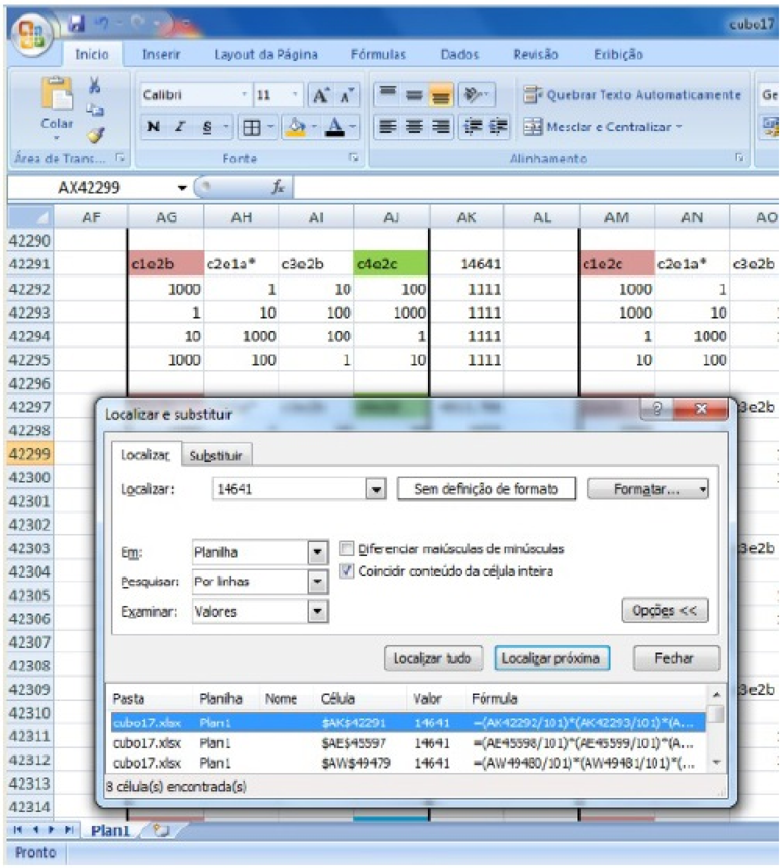


Figura 36: Primeira resposta encontrada pelo comando de busca

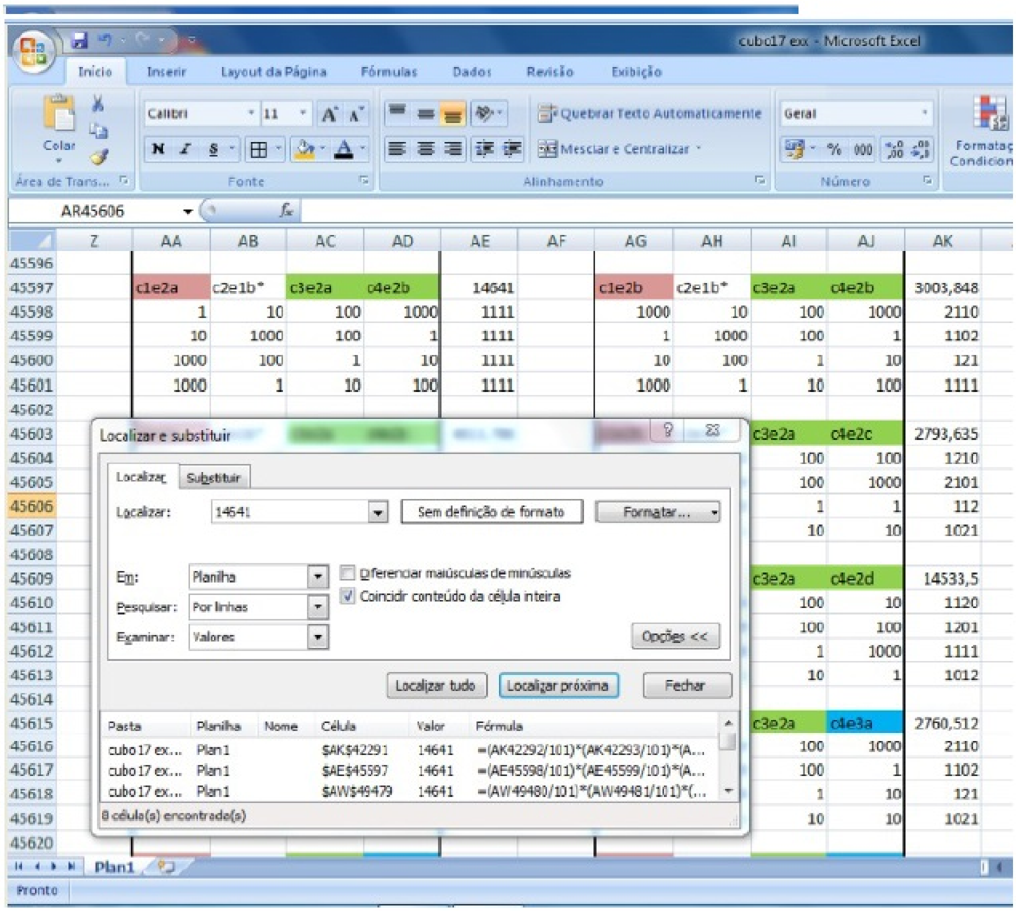


Figura 37: Segunda resposta encontrada pelo comando de busca

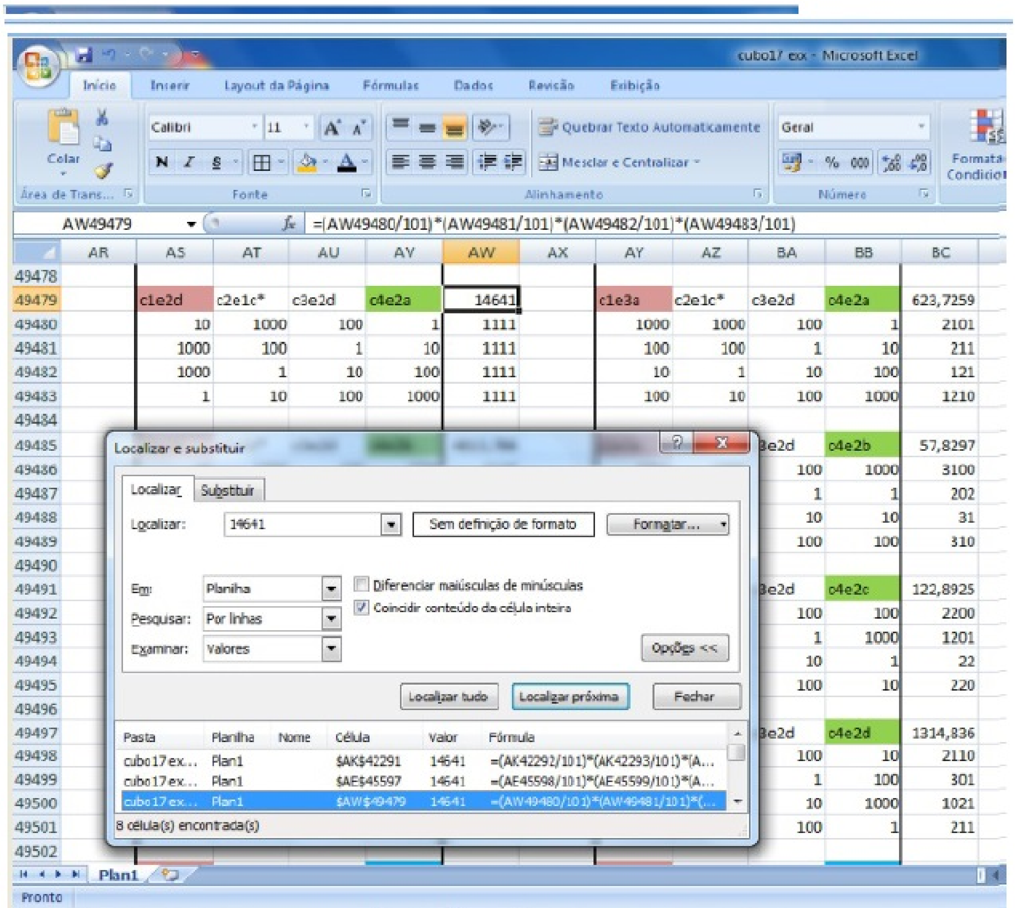


Figura 38: Terceira resposta encontrada pelo comando de busca

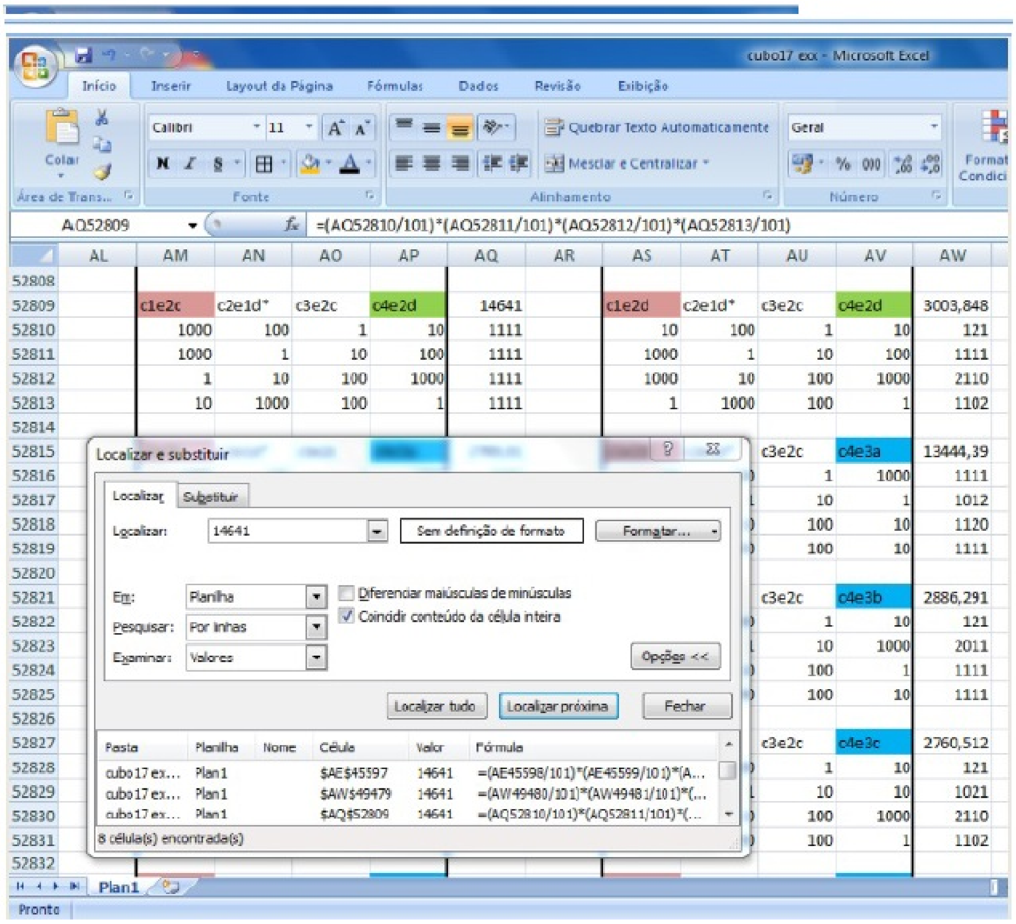


Figura 39: Quarta resposta encontrada pelo comando de busca

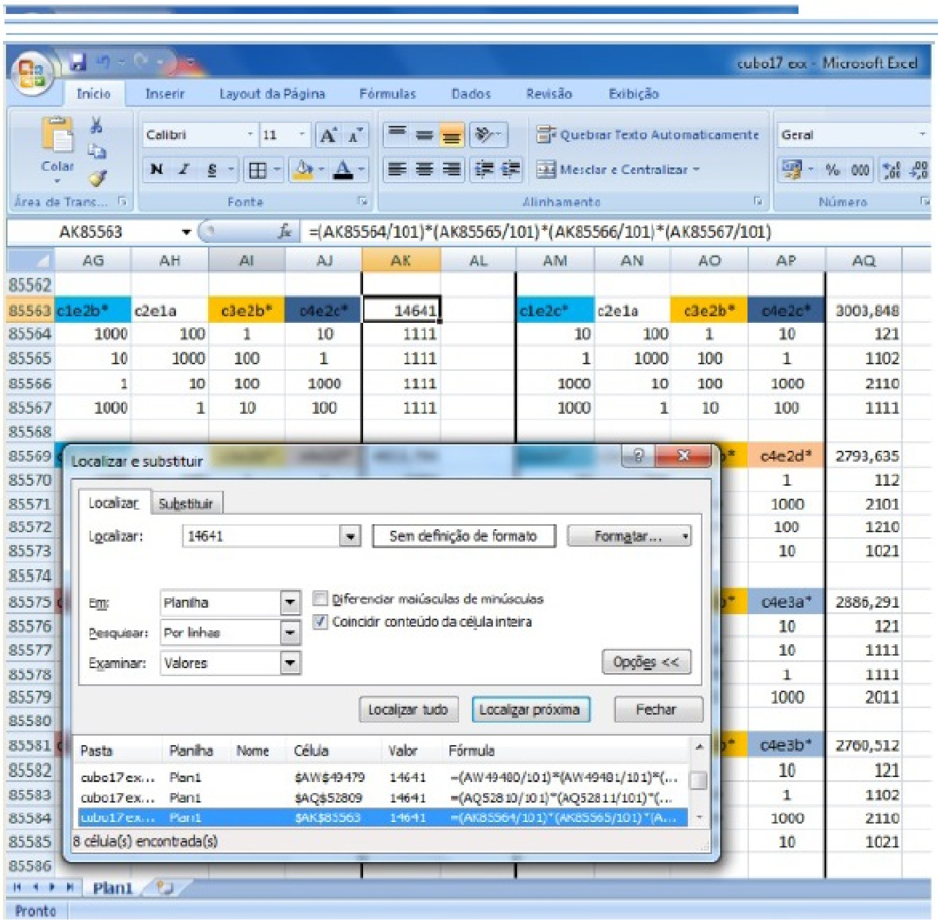


Figura 40: Quinta resposta encontrada pelo comando de busca

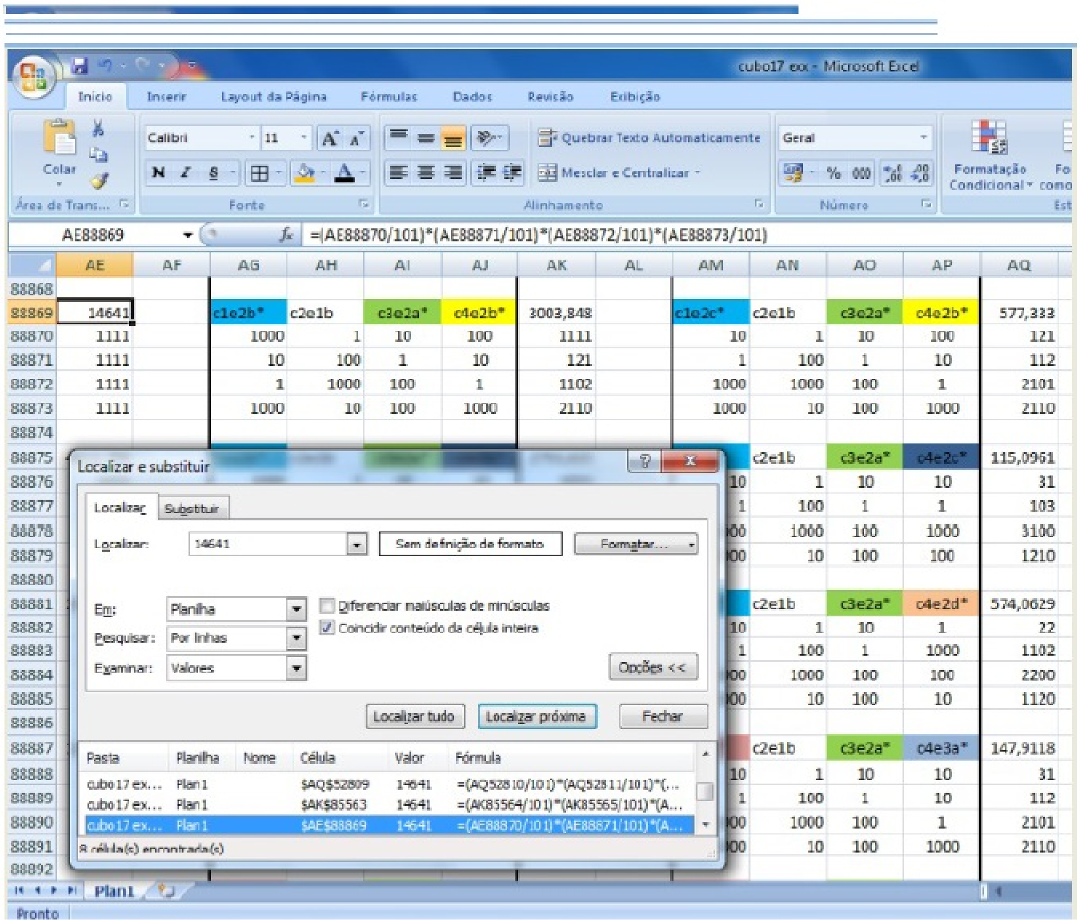


Figura 41: Sexta resposta encontrada pelo comando de busca

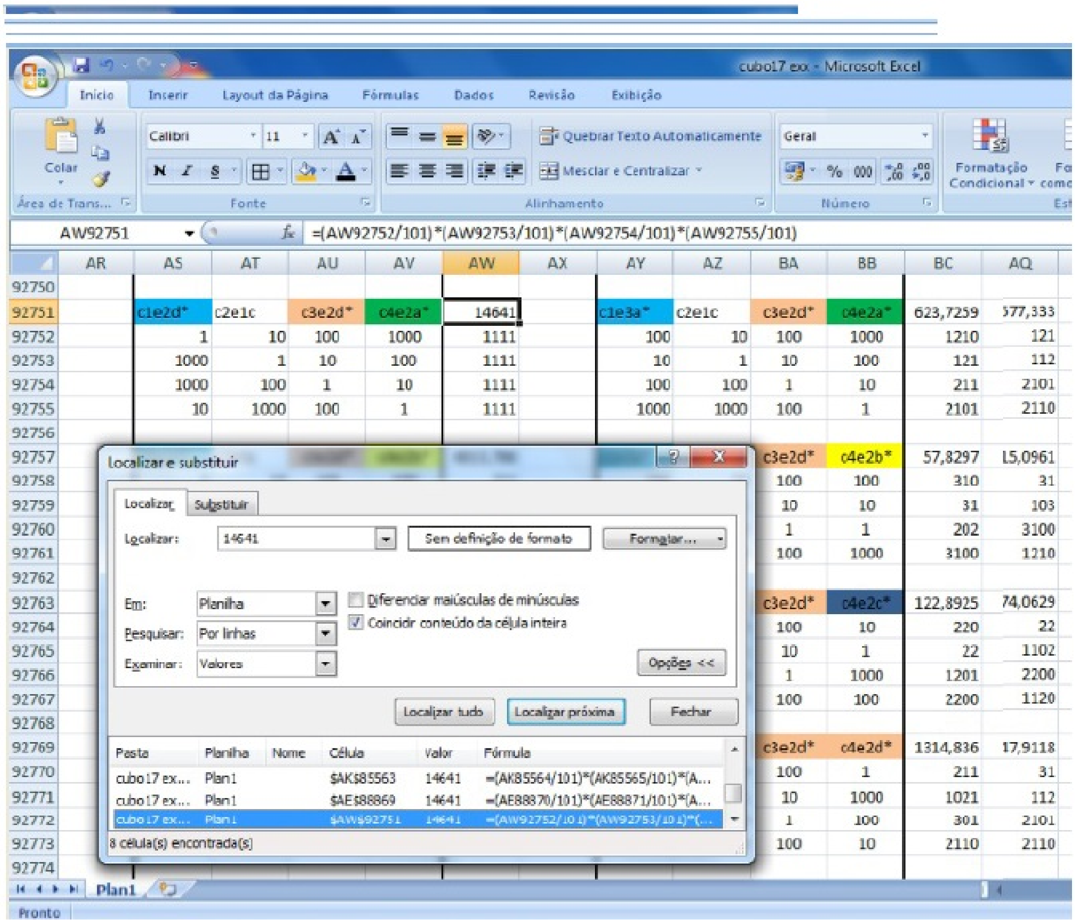


Figura 42: Sétima resposta encontrada pelo comando de busca

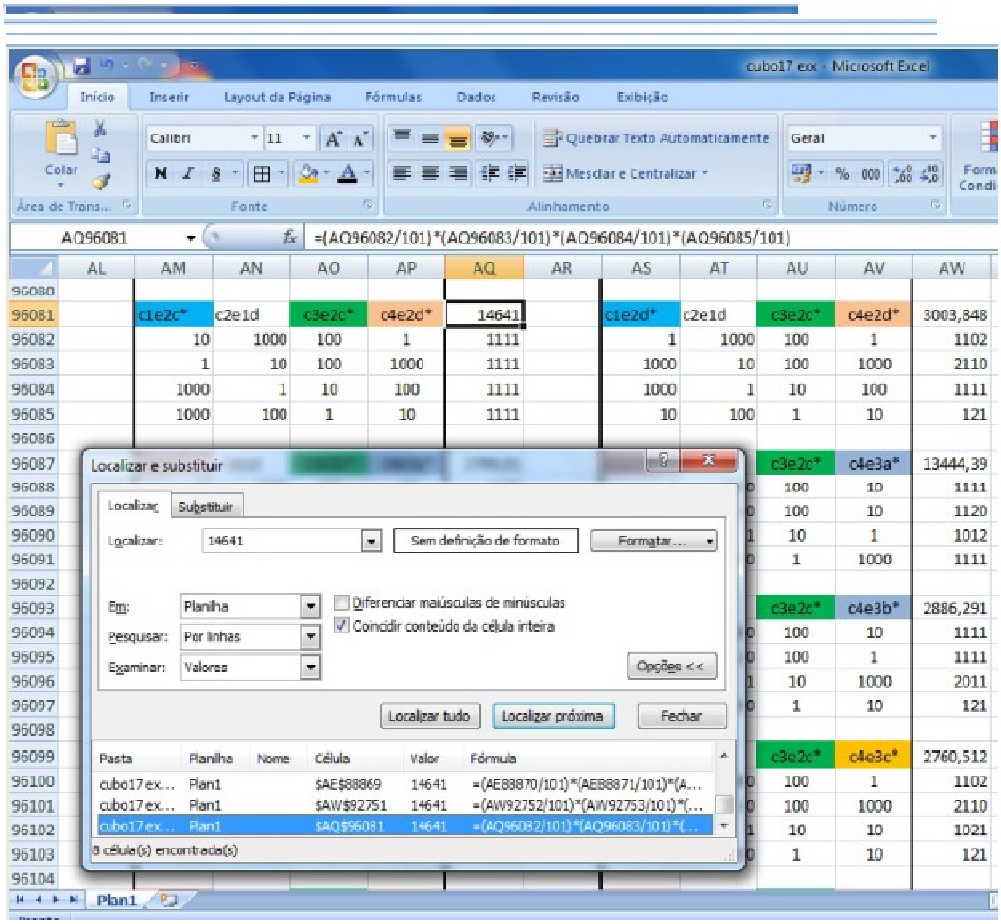


Figura 43: Oitava resposta encontrada pelo comando de busca

9.6 Exemplos de Contra Exemplos

Uma proposta tentadora seria modificar na planilha as cores das faces dos cubos e para cada nova situação verificar quantas seriam as possíveis soluções. Fica interessante manter um certo equilíbrio entre as quatro opções de cores. Caso seja encontrada uma situação em que não ocorre a solução do desafio, podemos materializar esta situação pintando as cores do teste, nas faces dos cubos. Assim montaremos um kit do jogo que ninguém vai encontrar a solução.

Nas Figuras: 44, 45 e 46 são apresentados três exemplos de situações testadas pela planilha, neles não foram encontradas soluções. Nestes casos, as cores das faces dos cubos foram definidas para terem quantidades iguais de cada cor, considerando as 24 faces dos quatro cubos, teremos 6 vermelhas, 6 amarelas, 6 verdes e 6 azuis. Desta maneira vamos tentar evitar que seja levantada a suspeita de que não há solução, é uma tentativa de camuflar a impossibilidade de solução do desafio. Durante as aulas uma atitude comum dos alunos foi a de contar quantas as cores das faces.

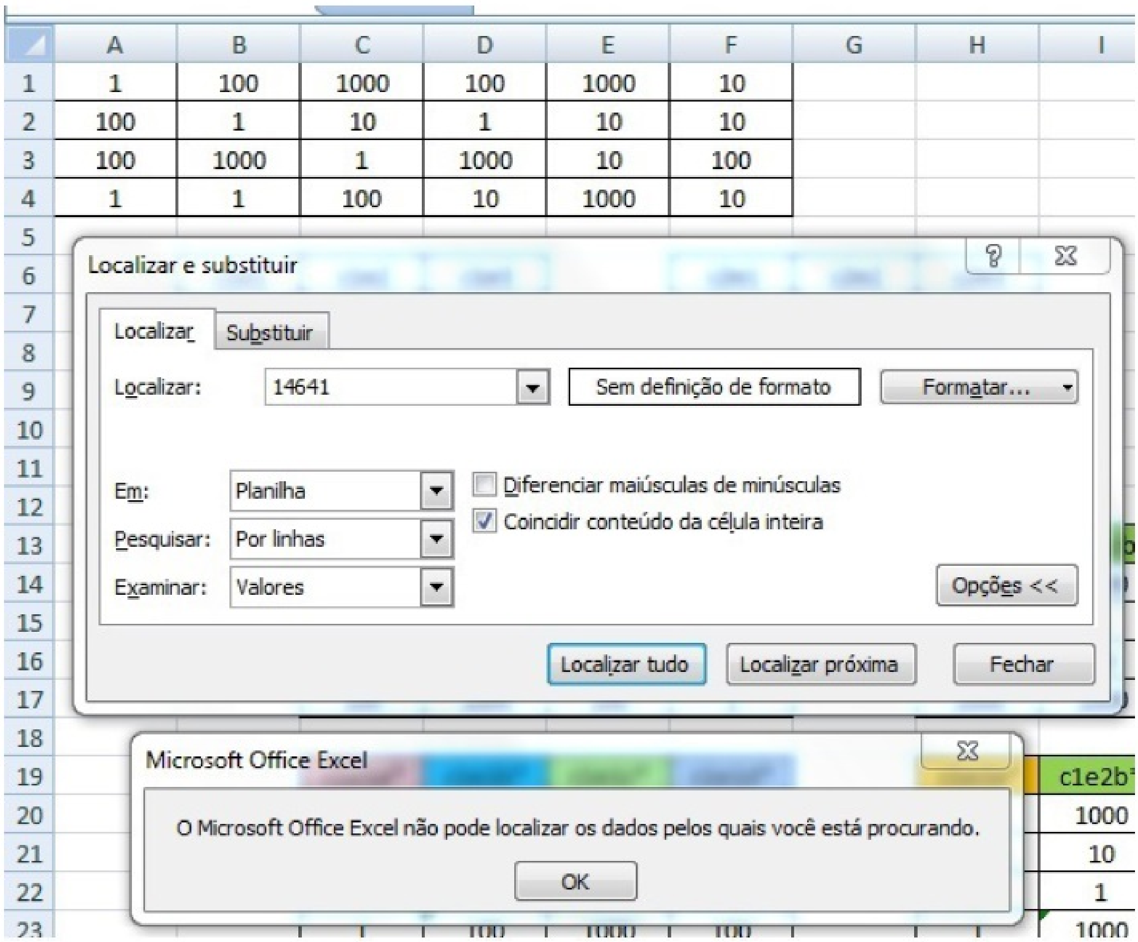


Figura 44: Contra exemplo 01: o comando de busca não localiza sucessos

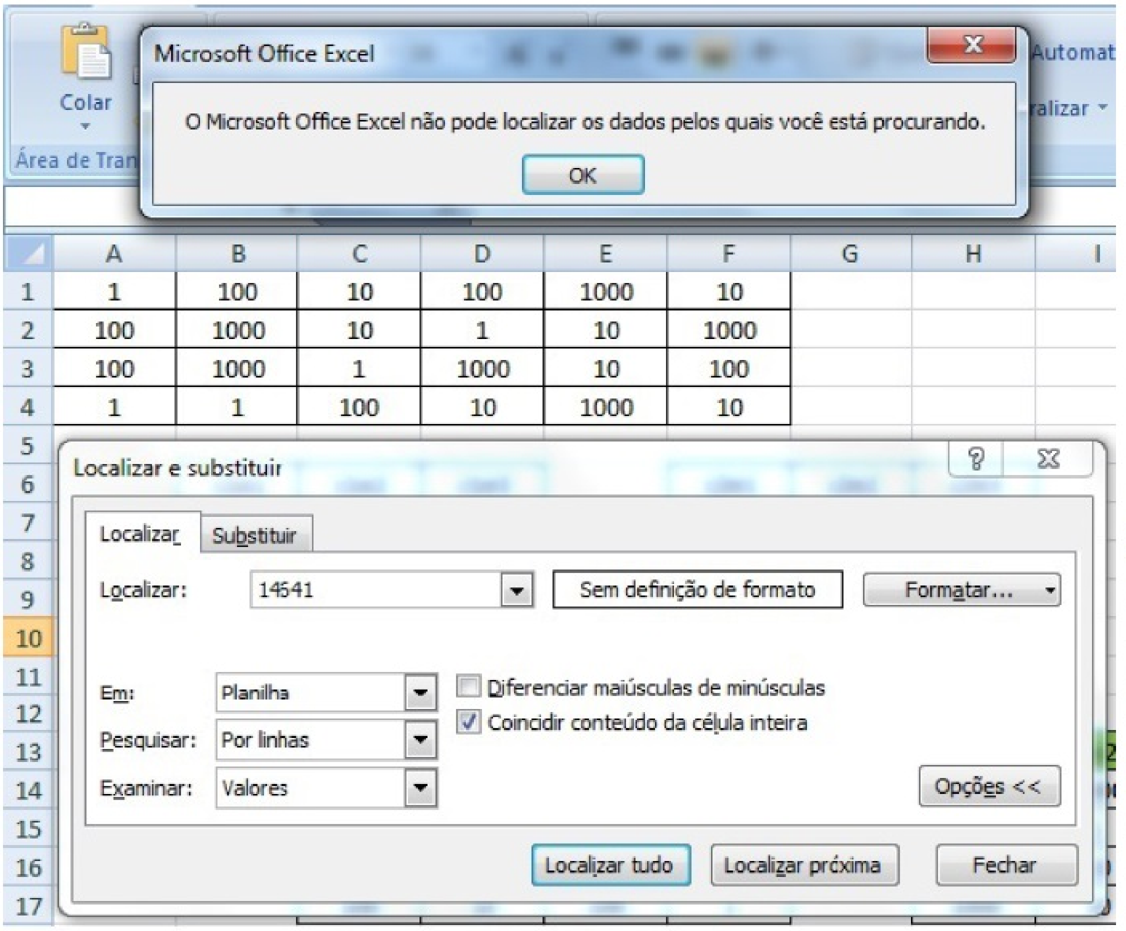


Figura 45: Contra exemplo 02: o comando de busca não localiza sucessos

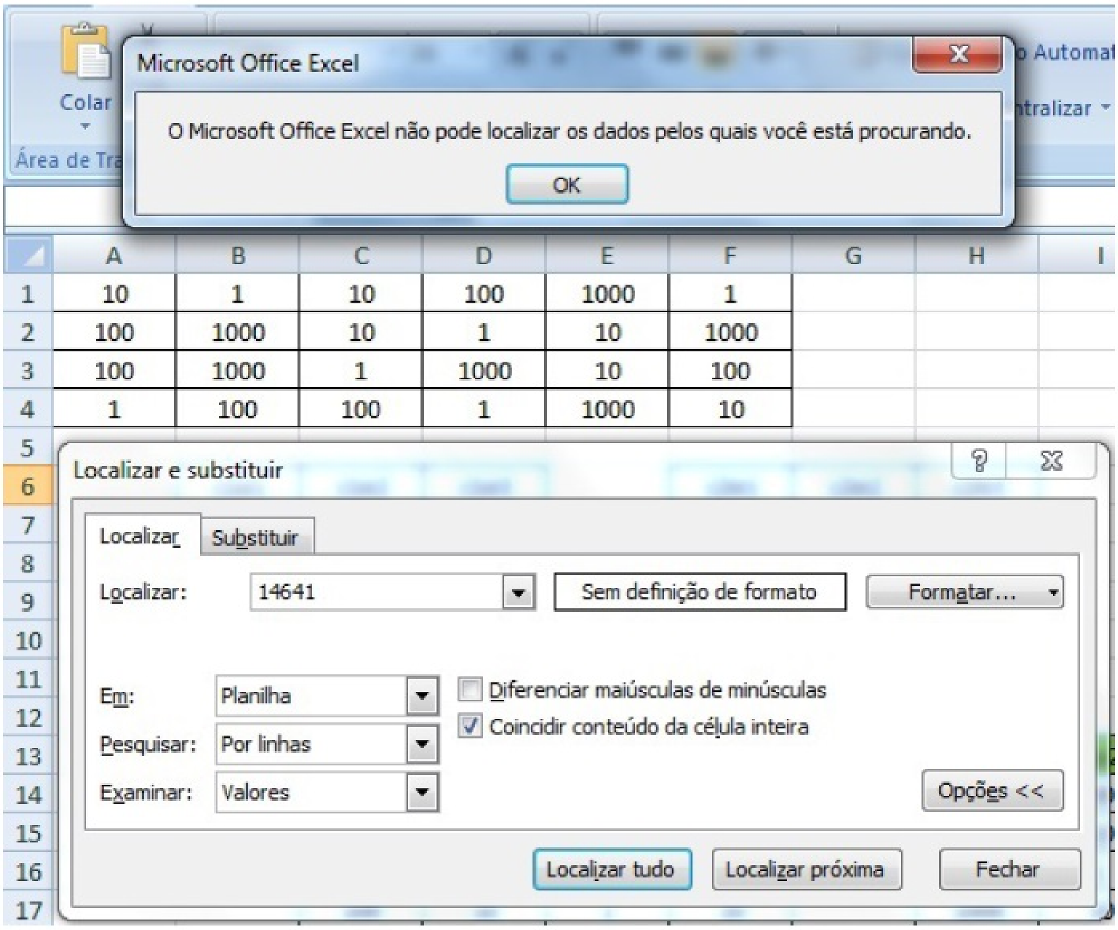


Figura 46: Contra exemplo 03: o comando de busca não localiza sucessos

Antes de apresentar como o desafio será solucionado, é possível envolver os alunos deixando eles brincarem com alguns casos que são sem soluções. Quando eles cansarem de tentar sem sucesso, torna-se atraente a ideia de que existe uma planilha que mostra se existem soluções e como poderemos encontrá-las.

10 Considerações finais

A escolha de um recurso pedagógico associado a uma estratégia adequada pode tornar a aula muito especial, os alunos guardam a experiência de uma boa aula e ela torna-se uma inspiração para novas buscas. Os alunos ficam estimulados e passam a valorizar mais a vida acadêmica. Neste trabalho aconteceu a aula desejada, conseguimos com a utilização do jogo, a criação de códigos, a busca de equivalências, o controle do espaço amostral, a utilização da planilha eletrônica e de teoremas da matemática, estimular atitudes, criatividade e raciocínio lógico.

Com a conclusão das aulas que utilizaram o jogo (Cubos Prisioneiros) foi possível constatar um alto grau de satisfação por parte dos alunos. Isso se deve ao fato do trabalho tratar de um caso geral e possibilitar ao aluno escolher quais seriam as cores das faces dos cubos. O total controle das possibilidades associada a verificação de suas existências transmitiram aos alunos segurança, confiabilidade de maneira concreta. Este sentimento nem sempre é conseguido em aulas tradicionais por alunos que tem dificuldade de abstração.

Este trabalho atinge seu objetivo de discutir um recurso paradidático, aplicá-lo e promover um grande envolvimento dos alunos com a matemática.

Referências

[1] Feitosa, Samuel.; *Curso de Teoria dos Números*- Polos Olímpicos de Treinamento- http://poti.impa.br/upload/Aula ,RJ; 10 de março de 2013.

[2] Abramo Hefez.,*Elementos de Aritmética.*, SBM, Rio de Janeiro, segunda edição, 2011.

[3] Burton , D. M.,*Elementary number theory. Revised Printing.*, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1980.

[4] Morimoto, Ricardo Minoru; *Números Primos: Propriedades, Aplicações e Avanços* - http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1066 - Rio Claro: [s.n.], 2014

[5] Meyer, P.L.; *Probabilidade - Aplicações à Estatística* - 2.ed. - [Reimp.] - Rio de Janeiro; LTC; 2011.

[6] Spiegel,M.R.;Shiller,J.;Srinivasan,A.,*Probabilidade e Estatística* - 2.ed. - Porto Alegre; Bookman; 2004.

[7] Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périglo, R.; *Matemática (Ensino Médio)* - 5.ed. - São Paulo; Atual; 2011.

[8] Júnior,Valdivino Vargas.,*Minicurso - Modelos de Urnas.* Anais da XXVI Semana do IME/UFG - ISSN 23175591, Goiânia-GO, 20 à 23 de Outubro de 2014, pp 3-15.

[9] Morgado, a.c.,*Análise Combinatória e Probabilidade.*SBM, 9.ed. Rio de Janeiro: 1991, pp 87-88.

[10] Rios,Evandro de Moura.,*Estatística Descritiva, Probabilidade e Estimação: Noções para o Ensino Básico.*, Dissertação do PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, 2014.

[11] Dante, L.R.; *Matemática(Contexto e Aplicações)* - 1.ed. - São Paulo; Ática; 2003.

[12] LIMA, E.L.; Carvalho, P.C.; Wagner, E.; Morgado, A.C.; *Temas e Problemas* - 1.ed. - Rio de Janeiro; SBM; 2001.

[13] BENACKA, JAN; CERETKOVA, SONA.,*Excel Modelling In Upper Secondary Mathematics.*, - A FEW TIPS FOR LEARNING FUNCTIONS AND 2013 (FEVEREIRO).

[14] ROCHA, JOSIMAR MOREIRA.,*A Planilha Eletrônica Como Recurso Didático: Um Exemplo Com Multiplicação de Matrizes.*,DISSERTAÇÃO DO PROFMAT, UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, 2014.

[15] FRIEDLANDER, ALEX.,*An EXCELlent bridge to algebra.*, MATHEMATICS TEACHER, V. 91, N. 5, P. 382-383, 1998 (MAIO).

[16] SILVIA, ELIDA ALVES DA.,*Projeto de Extensão sobre Torneio de Jogos Matemáticos,*,PUBLICAÇÃO DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CAC/UFG, N° 5, (MAIO) 2012

[17] AMBROSIO,U.D, UBIRATAM.,*Etnomatemática.*2. ED. BELO HORIZONTE: AUTÊNTICA, 2005.P.56

[18] SILVA, JHONE CALDEIRA.,*Oficina de Jogos Matemáticos.* ANAIS DA XXVI SEMANA DO IME/UFG - ISSN 23175591, GOIÂNIA-GO, 20 À 23 DE OUTUBRO DE 2014, P.189.

[19] SILVA,ROSÂNGELA MARIA DA.,*Oficina de Jogos Matemáticos.* ANAIS DA XXVI SEMANA DO IME/UFG - ISSN 23175591, GOIÂNIA-GO, 20 À 23 DE OUTUBRO DE 2014, P.190.

[20] BRASIL; CIÊNCIAS DA NATUREZA, MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS / SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA; *Orientações Curriculares para o Ensino Médio; Volume 2* - BRASÍLIA; MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO; SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA; 2006; 135P.

[21] BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A.; *Estatística Básica* - 7.ED. - SÃO PAULO; SARAIVA; 2012.