Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Gabriel Neves Cunha

Problemas variacionais com norma L^2 prescrita

Goiânia
2021

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

GABRIEL NEVES CUNHA

3. Título do trabalho

Problemas variacionais com norma L2 prescrita

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **GABRIEL NEVES CUNHA**, **Discente**, em 04/03/2021, às 11:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Kaye Oliveira Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 04/03/2021, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1918862** e o código CRC **14496114**.

Referência: Processo nº 23070.006236/2021-64 SEI nº 1918862

GABRIEL NEVES CUNHA

Problemas variacionais com norma L^2 prescrita

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Kaye Oliveira da Silva

Goiânia
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Cunha, Gabriel Neves
Problemas variacionais com norma L2 prescrita [manuscrito] / Gabriel Neves Cunha. - 2021.
67 f.

Orientador: Prof. Dr. Kaye Oliveira da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2021.
Bibliografia. Apêndice.

1. Métodos Variacionais. 2. Minimização na Esfera. 3. Concentração Compacidade. 4. Geometria do Passo da Montanha. I. Silva, Kaye Oliveira da, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 01 da sessão de Defesa de Dissertação de **Gabriel Neves Cunha**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de Análise.

Ao primeiro dia do mês de março do ano de dois mil e vinte um, a partir das quatorze horas, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "Problemas variacionais com norma L2 prescrita". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Kaye Oliveira da Silva - IME/UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Gaetano Siciliano MAT/USP membro titular externo, Olímpio Hiroshi Miyagaki - MAT/UFSCAR membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato aprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Kaye Oliveira da Silva, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao primeiro dia do mês de março do ano de dois mil e vinte um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Problemas variacionais com norma L2 prescrita

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Gaetano Siciliano**, **Usuário Externo**, em 01/03/2021, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Kaye Oliveira Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 01/03/2021, às 19:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Olimpio Hiroshi Miyagaki**, **Usuário Externo**, em

01/03/2021, às 19:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1909602** e o código CRC **7BCA1D08**.

Referência: Processo nº 23070.006236/2021-64 SEI nº 1909602

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof.Kaye Oliveira da Silva pela paciência com que esteve me acompanhando durante este estudo, permitindo-me usufruir de sua imensa experiência. Agradeço aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, onde tenho estudado desde a graduação, pela contribuição que deram ao meu desenvolvimento matemático e estudantil, especialmente aos(às) professores(as) Kaye Oliveira da Silva, Romildo da Silva Pina, Jhone Caldeira Silva, Edcarlos Domingos da Silva, Marcos Leandro Mendes Carvalho e Kélem Gomes Lourenço. Dedico especial agradecimento ao colega Daniel Chu, pela amizade e parceria. Agradeço aos(às) professores(as) de Matemática de meu Ensino Médio, Maria Divina e Eurípedes Estulano; à primeira por despertar em mim o interesse pela Matemática; ao segundo por me incentivar sempre. Por fim, agradeço aos amigos Guilherme Augusto Costa e Silva e Divino Deonir pela amizade de longa data e à minha família, especialmente às minhas tias Nilza Maria da Cunha, Nilma Helena da Cunha e Nelza Aparecida da Cunha pelo apoio, mas principalmente aos meus pais Letícia Maria de Jesus e Neves Roberto da Cunha, meus maiores incentivadores, aos quais devo minha vida e os quais amo imensamente.

In mathematics you don’t understand things. You just get used to them.

John von Neumann,
Atribuída.

Resumo

Nesta dissertação pretendemos estudar a seguinte Equação Diferencial

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial t} & = -\Delta_x\psi + V(x,t)\psi(x,t) - C|\psi(x,t)|^{p-2}\psi(x,t) \\ -\Delta_x V & = \varepsilon 4\pi|\psi|^2. \end{cases}$$

Aqui, x está em $\mathbb{R}^3$, t é um número real não-negativo e ε pode ser -1 or 1. Neste estudo vamos procurar por soluções do tipo **Standing Waves**, a saber aquelas da forma

$$\psi(x,t) = e^{i(\ell_R)t}u(x).$$

Provaremos que fazê-lo é o mesmo que tentar encontrar soluções fracas em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para

$$-\Delta u + (|u|^2 * |x|^{-1})u - C|u|^{p-2}u = -\ell_R u$$

que, no caso $p \in [2, \frac{10}{3}]$ mostrará ser as chamadas soluções **Ground States**. De fato, isto será feito por meio da minimização do **funcional energia**

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2 dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p$$

restrito ao conjunto

$$\Sigma_R := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \Big| \int_{\mathbb{R}^3}|u|^2 = R \right\}.$$

A pré-compacidade fraca das sequências minimizantes será demonstrada graças ao famoso **Principio de Concentração-Compacidade**, que provaremos neste trabalho.
A fim de tratar o caso $p \in (\frac{10}{3}, 6)$, quando o funcional energia não se faz limitado inferiormente na restrição, construiremos uma geometria do tipo **Passo da Montanha** sobre Σ_R.

Palavras–chave

Métodos Variacionais, Minimização na Esfera, Concentração-Compacidade, Geometria do Passo da Montanha

Abstract

In this dissertation we intend to study the following Partial Differential Equation

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial t} & = -\Delta_x\psi + V(x,t)\psi(x,t) - C|\psi(x,t)|^{p-2}\psi(x,t) \\ -\Delta_x V & = \varepsilon 4\pi|\psi|^2. \end{cases}$$

Here, x is in $\mathbb{R}^3$, t is a non-negative real number and ε can be -1 or 1. In this study we will look for the so called **Standing Waves**, namely solutions of the form

$$\psi(x,t) = e^{i(\ell_R)t}u(x).$$

We shall prove that doing so will be the same as trying to find weak solutions in $H^1(\mathbb{R}^3)$ for

$$-\Delta u + (|u|^2 * |x|^{-1})u - C|u|^{p-2}u = -\ell_R u$$

which, in the case $p \in [2, \frac{10}{3}]$ will turn out to be the so called **Ground States**. As a matter of fact, this will be accomplished by minimizing the **Energy Functional**

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2 dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p$$

constrained to the set

$$\Sigma_R := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \middle| \int_{\mathbb{R}^3}|u|^2 = R \right\}.$$

The weak pre-campactness of the minimizing sequences will be proven to hold true thanks to the famous **Concentration-Compactness Principle**, which we shall prove in this work.
In order to treat the case $p \in (\frac{10}{3}, 6)$, where the Energy Functional is not bounded from below on the constraint, we will construct a **Mountain-Pass** type geometry on Σ_R.

Keywords

Variational Problems, Minimization on the Sphere, Concentration-Compactness, Mountain-Pass Geometry.

Sumário

Introdução

Considere a seguinte Equação Diferencial Parcial

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\psi dt} = & -\Delta_x\psi + V(x,t)\psi - C|u(x,t)|^{p-2}\psi \\ -\Delta_x V = & \varepsilon 4\pi|\psi|^2 \end{cases} \quad (I)$$

Neste caso, $x \in \mathbb{R}^3$, t é um real não-negativo e ε pode ser -1 ou 1, dependendo do contexto físico associado: trataremos neste texto o caso $\varepsilon = 1$, que por sua vez surge em diversas linhas de pesquisa em Matemática Aplicada, como na Teoria uni-dimensional de Redução de Densidade de Elétrons em Física dos Plásmas, bem como na Teoria do Semi-Condutor. No que se refere as abordagens variacionais, resultados parciais podem ser encontrados em [6], [5], [16] e [4]. Estudos sobre existência de soluções envolvendo o Multiplicador de Lagrange como um parâmetro foram realizados em [11], [13], [19] e [21]. A estratégia aqui utilizada para a demonstração da condição de subaditividade foi originalmente utilizada em [10], de mesma autoria de [9], artigo base desta dissertação para os casos $p \in [2, \frac{10}{3})$. Para os casos $p \in [\frac{10}{3}, 6)$ nos baseamos em [4]. Se substituirmos ψ em (I) por

$$\psi(x,t) = e^{i(\ell_R)t}u(x) \tag{0-1}$$

e efetuarmos as operações indicadas, obteremos a seguinte versão para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - C|u|^{p-2}u + \ell_R u & = 0 \\ -\Delta V - 4\pi|u|^2 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Soluções da forma dada em 0-1 são conhecidas como **standing-waves** pois não dependem do tempo. No começo do Capítulo 1, enunciaremos e demonstraremos o Teorema

Teorema 1.1 O sistema II possui uma solução u em $H^1(\mathbb{R}^3)$ se o Potencial de Poisson V for da forma

$$\varphi_u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|}dy \tag{0-2}$$

e, para algum $\ell_R \in \mathbb{R}$, u for solução da equação

$$-\Delta u + (|u|^2 * |x|^{-1})u - C|u|^{p-2}u = -\ell_R u. \tag{0-3}$$

Este nos dará um primeiro passo na busca por soluções para o sistema (II), dizendo-nos que o problema 0-3 é aquele no qual devemos de fato nos concentrar.

Tendo em mente estudar existência de soluções para 0-3 por **métodos variacionais**, definimos o chamado **funcional energia** associado à 0-3 por

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \varphi_u u^2 dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p, \tag{0-4}$$

com domínio em $H^1(\mathbb{R}^3)$, onde φ_u será dada no Lema 1.1. Intentamos encontrar pontos críticos para tal funcional restrito ao conjunto

$$\Sigma_R := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \middle| \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 = R \right\}.$$

Isto será feito por meio da minimização do funcional energia restrito ao conjunto Σ_R, ou seja, procurando funções $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ que resolvam o problema de minimização:

$$I_R = \inf_{u \in \Sigma_R} E(u) \tag{0-5}$$

Nesse sentido, convém que determinemos à priori, os parâmetros p e C para os quais o ínfimo I_R se faz finito. Isto será feito no Capítulo 2, onde a amplamente utilizada técnica de **reescalamento** é empregada com o fito de estudar o sinal, a limitação inferior e monotonicidade de I_R, como função do raio R, respectivamente. A tabela abaixo resume os resultados desta dissertação.

p	Ínfimo da Energia	Existência de Ground States
2	$I_R < 0$	Não
$(2,3)$	$I_R < 0$	Sim, para R pequeno
3	$I_R = 0$, se $C < \frac{3}{\sqrt{2}C_{\frac{10}{3}}}$	Não
	$I_R = 0$, se $C = \frac{3}{\sqrt{2}C_{\frac{10}{3}}}$	Problema aberto
	$I_R < 0$, se $C > \frac{3}{\sqrt{2}C_{\frac{10}{3}}}$	Sim
$(3, \frac{10}{3})$	$I_R = 0$, se $CR^{\frac{1}{2p-6}} < V_c$	Não
	$I_R = 0$, se $CR^{\frac{1}{2p-6}} = V_c$	Sim
	$I_R < 0$, se $CR^{\frac{1}{2p-6}} > V_c$	Sim
$\frac{10}{3}$	$I_R = 0$, se $CR^{\frac{10}{3}} \leq \frac{5}{3C_{\frac{10}{3}}}$	Não
	$I_R = -\infty$, se $CR^{\frac{10}{3}} > \frac{5}{3C_{\frac{10}{3}}}$	Não
$(\frac{10}{3}, 6)$	$I_R = -\infty$	Não

Como bem indica a tabela acima, o funcional energia é limitado na esfera para $p \in [2, \frac{10}{3}]$, de modo que para estes casos, faz sentido discutir sobre a existência de soluções do tipo **Ground States** para o problema 0-3, ou seja, **soluções que minimizam energia**. Sabe-se existir, nessas condições, as chamadas **Sequências Minimizantes** para I_R, ou seja, sequências $u_k \in \Sigma_R$ tais que $E(u_k)$ converge (em $\mathbb{R}$) para I_R. Surge, à vista disso, a questão da compacidade: para quais valores dos parâmetros p e C se pode garantir que u_k convirja, em algum sentido, para alguma $u_0 \in \Sigma_R$? A resposta para tal questão virá ao final do Capítulo 2, por meio do famoso Lema de **Concentração-Compacidade**, que enunciaremos e demonstraremos no Lema 1.2. Munidos de tal recurso, seremos capazes de estabelecer condições para provar o principal teorema do Capítulo 2, a saber:

Teorema 2.12 Seja $\{u_k\}_{k\geq 1}$ uma sequência minimizante para o problema I_R, com $p \in (2,3)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1) Existe uma sequência $\{y_k\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u_k(\cdot + y_k)\} \rightharpoonup u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$;

2) Para todo $\varepsilon > 0$, $R \geq \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^2 dx \geq R - \varepsilon$;

3) $E(u_0) = \lim E(u_k(\cdot + y_k)) = R$.

Por outro lado, veremos que tal abordagem não se aplica aos casos $p \in (\frac{10}{3}, 6)$, onde o ínfimo I_R perde sua finitude. Porém, tal empecílho de modo algum nos impossibilita a demonstração de existência de soluções fracas para 0-3. De fato, no Capítulo 3 mostramos que ao funcional E se pode atribuir uma geometria especial:

Definição Dizemos que o funcional E possui uma geometria do tipo **Passo da Montanha** no nível $\gamma(R) > 0$ em Σ_R se existir $K(R)$ tal que

$$\gamma(R) := \inf_{g\in\Gamma(R)} \sup_{t\in[0,1]} E(g(t)) > \sup_{g\in\Gamma(R)} \max\{E(g(0)), E(g(1))\}$$

onde

$$\Gamma_R := \{g \in C([0,1], S(c)) \mid g(0) \in A_{K(R)},\ E(g(1)) < 0\}$$

e

$$A_{K(R)} := \{u \in S(c) \mid \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K(R)\}.$$

Estabelecida tal estrutura, demonstramos a existência de uma sequência conveniente, conforme Teorema:

Teorema 3.5 Existe uma sequência de Palais-Smale para E no nível $\gamma(R)$, ou seja, uma $\{u_k\} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que:

1) $\{E(u_k)\} \longrightarrow \gamma(R)$ em $\mathbb{R}$;

2) A sequência $\{E^{'}(u_k)\}$ converge em $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ para zero.

Por fim, concluímos sobre existência de soluções no

Teorema 3.7 Seja u_k uma sequência de Palais-Smale para o funcional energia restrito à esfera no nível $\gamma(R)$ e limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Nessas condições, existe uma sequência numérica t_k tal que, a menos de subsequência:

1) $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$;

2) $t_k \longrightarrow t_0$ em $\mathbb{R}$;

3) $-\Delta u_k - t_k u_k + \left(|x|^{-1} \star |u_k|^2\right) u_k - |u_k|^{p-2} u_k \longrightarrow$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$;

4) $-\Delta u_k - t_0 u_k + \left(|x|^{-1} \star |u_k|^2\right) u_k - |u_k|^{p-2} u_k \longrightarrow$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$;

5) $-\Delta u_0 - t_0 u_0 + \left(|x|^{-1} \star |u_0|^2\right) u_0 - |u_0|^{p-2} u_0 = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Nesse contexto, a função u_0 será solução do problema 1-6.

Ao final do Capítulo 2, trataremos dos casos $p \in [3, \frac{10}{3})$, onde, ao contrário dos demais, a existência de solução já não mais depende unicamente de p: O valor de C relativamente à uma certa constante crítica determinará nossas conclusões à respeito, sendo utilizada abordagem semelhante para o caso $p = 3$. O casos $p = 2$ e $p = \frac{10}{3}$ se fazem bastante simples, sendo tratados em poucas linhas como observaões finais daquele capítulo.

CAPÍTULO 1

O Método Variacional

Quando nos deparamos com a expressão de uma equação diferencial, há sempre um conjunto de perguntas que precisam ser respondidas de antemão: Em qual espaço de funções desejamos procurar por alguma solução? Não nos parece haver uma maneira universal de pensar à esse respeito. Além disso, cada problema possui suas características peculiares. Naturalmente, gostaríamos de encontrar soluções clássicas. Porém, do ponto de vista matemático, procurar por tais soluções se mostra demasiadamente difícil, levando-nos a questionar sobre outras possibilidades. Talvez procurando, à priori, por soluções como funções munidas de propriedades semelhantes, em um certo sentido, às das funções suaves, porém sem o serem de fato. A fim de tornar tal ideia precisa, considere a seguinte equação:

$$-\Delta\varphi = 4\pi u^2 \tag{1-1}$$

Façamos o seguinte experimento: Suponha que exista uma $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, onde Ω é um aberto limitado e suave de $\mathbb{R}^3$, satisfazendo a expressão acima pontualmente. É fato bem conhecido que, nessas condições, $\forall v \in C_0^2(\overline{\Omega})$ vale a famosa **Fórmula de Green** (vide Apêndice, Teorema A.12), a saber

$$\int_\Omega \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle dx = 4\pi \int_\Omega u^2 v dx$$

Note, no entanto, que a fim de que faça sentido questionar sobre uma eventual igualdade entre tais integrais, basta que as mesmas sejam finitas. Neste caso, não se faz necessário supor qualquer tipo de suavidade por parte das funções envolvidas: tais finitudes estarão garantidas se, por exemplo, $u \in L^2(\Omega)$ e $u_0, v \in H^1(\Omega)$! (vide , por exemplo, [15] para uma introdução aos espaços de Sobolev e [3] para esclarecimentos acerca dos espaços de Lebesgue). Caso tal igualdade se verifique, dizemos que u_0 é uma **solução fraca** para o problema dado por 1-1. Evidentemente, demos este exemplo apenas à título de motivação. Além disso, tal definição se aplica naturalmente à uma ampla gama de problemas, sofrendo, no entanto, as devidas adaptações de acordo com o contexto.

Antes de passarmos aos métodos variacionais necessários para nosso estudo, damos aqui as definições dos espaços de Lebesgue e Sobolev que usaremos ao longo do texto: $L^p(\mathbb{R}^3)$ é o espaço usual de Lebesgue com norma

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \left(\int |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1-2}$$

$H^1(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Sobolev usual, com norma

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \left(\int |u|^2 + \int |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1-3}$$

enquanto $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, com respeito a norma

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \left(\int |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1-4}$$

O Teorema abaixo é de imensa importância, apesar de sua simplicidade, pois nos diz em qual problema realmente precisamos nos concentrar. Sua demonstração se baseia em uma famosa ferramenta da Análise funcional: O **Teorema de Lax-Milgran** (vide Apêndice, Teorema A.10).

Teorema 1.1 *O sistema II possui uma solução fraca u em $H^1(\mathbb{R}^3)$ se o Potencial de Poisson V for da forma*

$$\varphi_u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} dy \tag{1-5}$$

e u for solução fraca da equação

$$-\Delta u + (|u|^2 * |x|^{-1})u - C|u|^{p-2}u = -\ell_R u\ , \tag{1-6}$$

para algum $\ell_R \in \mathbb{R}$.

Prova. A prova consiste em mostrar que a segunda equação de (II) possui única solução fraca em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Para tal, precisamos provar os seguintes itens:

1) O operador bilinear $B : D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{R}$ dado por

$$B[w,v] = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \nabla w, \nabla v \rangle dx$$

é limitado e coercivo.

2) O funcional linear $f : D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{R}$ dado por

$$f(v) = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 v dx$$

é limitado, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ $fixado$.
De fato, dadas $w, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, por uma propriedade elementar de integrais e pela definição de produto interno

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \langle \nabla w, \nabla v \rangle \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|$$

o que, pela **desigualdade triangular** e duas propriedades elementares de integral, é menor que ou igual a

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|.$$

Isto, por sua vez, pela **desigualdade de Hölder** (vide Apêndice, Teorema A.11) se faz menor que ou igual a

$$\sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Obtemos, por fim, que isto é menor que ou igual a

$$3\|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}\|w\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}.$$

A coercividade de B provém imediatamente da norma de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.
Para ver por que f é limitada, note que para cada $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ com u fixada em $H^1(\mathbb{R}^3)$ obtemos;

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^2 v dx \leq \|u^2\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq$$

$$T\|u^2\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}.$$

A constante T provém da imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$(vide [8], Teoremas 9.9 e 9.10). Ademais, o fato de $u^2 \in L^q(\mathbb{R}^3)$, para $q \in [1,3]$ encerra a prova da limitação, como queríamos. $\square$

1.1 O Funcional Energia

À fim de estudar a equação 1-6 do ponto de vista de soluções fracas por meios variacionais, conforme indicamos na introdução deste trabalho, introduziremos o chamado funcional energia associado a este problema, cuja minimização restrita à um subconjunto conveniente de $H^1(\mathbb{R}^3)$ nos retornará as soluções desejadas.

Considere o **Funcional Energia** $E : H^1(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{R}$ definido por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla y|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \varphi_u u^2 dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p,$$

O funcional E é de classe C^1 e possui diferencial de Fréchet dada em $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ por

$$E^{'}(u) \cdot v = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_u uvdx - C\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2} uvdx,$$

para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$. O mesmo se pode afirmar do funcional $\phi : H^1(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 - R$$

onde R é positivo. Se provarmos que o problema de minimização

$$I_R = \inf_{u \in \Sigma_R} E(u),$$

onde

$$\Sigma_R := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 = R \right\}$$

possui solução, ou seja, que existe $u_0 \in \Sigma_R$ tal que $E(u_0) = I_R$, existirá, pelo **Teorema dos Multiplicadores de Lagrange** (vide Apêndice, Teorema A.6) uma constante λ tal que

$$(E - \lambda\phi)^{'}(u_0) \equiv 0.$$

Avaliando tal aplicação em uma $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ qualquer e abrindo a expressão resultante, chega-se exatamente à nossa definição de solução fraca.

1.2 O Problema de Compacidade

Dada uma sequência minimizante $\{u_k\}_{k\geq 1}$ para o problema de minimização I_R, ou seja, tal que $u_k \in \Sigma_R$ e $\lim_k E(u_k) = I_R$, se pudermos provar que tal sequência é limitada na norma de $H^1(\mathbb{R}^3)$, o Teorema de **Banach-Alaoglu** (vide Apêndice, Teorema A.7) nos possibilitará afirmar que u_k converge fracamente para alguma $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, à menos de subsequência. Caso consigamos garantir que tal convergência também se dê em $L^q(\mathbb{R}^3)$, para $q \in [2,6)$, no sentido forte e, de alguma forma, que tal limite pertence à restrição, concluiremos que u_0 atua como função minimizante para o problema variacional.

Evidentemente, esta é, de certa forma, uma questão de compacidade e os Lemas a seguir formam parte considerável daquilo que será a chave para superarmos esta dificuldade.

Lema 1.2 (Concentração-Compacidade) *Seja* (ρ_n) *uma sequência em* $L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, *com* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x)dx = \lambda$, $(\rho_n) \geq 0$. *Existe uma subsequência de* (ρ_n), *que denotaremos da mesma forma, tal que um, e apenas um dos itens abaixo se verifica:*

1)(Vanishing)

$$\lim_n \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \int_{y+B_t} \rho_n(x)dx = 0\,,\ \forall t > 0$$

2)(Compacidade) $\exists\{y_n\}_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists t(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } \int_{y_n+B_t} \rho_n(x)dx > \lambda - \varepsilon.$$

3)(Dicotomia) *Para algum* $\alpha \in (0,\lambda)$ *vale:*

$\forall \varepsilon > 0$ *existem funções* ρ_n^1 *e* ρ_n^2 *em* $L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, *com* $\lim_n dis(supp\rho_n^1, supp\rho_n^2) = +\infty$, *tais que :*

$$\|\rho_n - (\rho_n^1 + \rho_n^2)\|_{L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq \varepsilon\,,\ \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_n^1(x)dx - \alpha\right| \leq \varepsilon$$

e

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_n^2(x)dx - (\lambda - \alpha)\right| \leq \varepsilon$$

Antes de demonstrarmos o lema acima, enunciaremos o próximo resultado. Este desempenhará, assim como o anterior, papel fundamental no estudo em curso, pois nos permitirá demonstrar no Teorema 2.11 que, no Lema acima, o caso vanishing não ocorre. Isto, aliado ao Teorema 2.10, onde demonstramos que as desigualdades do tipo concentração-compacidade se verificam para determinados valores do parâmetro p, nos permitirá concluir, para tais casos, que o caso dicotomia também não pode ocorrer, restando, dessa forma, apenas o caso compacidade. Isto, conjuntamente com o fato do funcional energia ser invariante por translações, nos possibilitará demonstrar no Teorema 2.12 que u_0, à menos de subsequências e translações, pertence à restrição e, consequentemente, por meio de alguns resultados de Análise, que $\lim_k E(u_k) = E(u_0)$, encerrando, dessa forma, nossa discussão sobre existência de soluções fracas, pelo menos para parte dos casos. Note que, intuitivamente, o Lema de concentração-compacidade nos diz que a compacidade das sequências minimizantes para o problema I_R estará garantida se pudermos mostrar que a "massa"de seus elementos, neste caso R, não estará perdida após considerarmos seu limite fraco em $H^1(\mathbb{R}^3)$, ou seja, que sua massa será mantida **concentrada** (vide [17], pág.114, último parágrafo).

Lema 1.3 *Seja* $1 < p \leq \infty$ *com* $q \neq \frac{Np}{N-p}$ *if* $p < N$. *Suponha que* u_n *é limitada em* $L^q(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, ∇u_n *é limitada em* $L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *e*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} |u_n|^q dx \mapsto 0 \; for \; some \; R \; > \; 0$$

Então $u_n \mapsto 0$ *in* $L^{\alpha}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *para* α *entre* q *e* $\frac{Np}{N-p}$.

Prova. (vide [18], Lema. I.1) □

Passemos agora a demonstrção do Teorema 1.2:

Prova. Defina a sequência

$$Q_n(t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \int_{y+B_t} \rho_n(x)dx$$

Afirmo que cada Q_n é crescente.De fato, seja $t_2 \geq \; t_1$. Para cada $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\int_{y+B_{t_2}} \rho_n(x)dx \; \geq \; \int_{y+B_{t_1}} \rho_n(x)dx$$

Além disso, (Q_n) é uniformemente limitada por λ. De fato , $\forall y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *e* $t \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{y+B_t} \rho_n(x)dx \; \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x)dx = \lambda$$

Logo, o supremo do conjunto formado por integrais como as do primeiro membro da desigualdade acima não pode superar λ.

Seja $(T_m) \to \infty$ uma sequência de números reais. Pelo Lema acima, existe uma subsequência de (Q_n) , com índice n $\in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, tal que $Q_n\chi_{[0,T_1]}$ converge para uma função crescente $g_1 : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Pelo mesmo motivo, existe uma subsequência de $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, com índices em $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$, tal que $Q_n\chi_{[0,T_2]}$ converge para uma função crescente $g_2 : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Tal processo, define indutivamente uma sequência de funções (g_m), de modo que, $\forall m > 1$, g_m coincide com g_{m-1} *em* $[0,T_{m-1}]$. Seja $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}_0\subset\mathbb{N}}$, onde $\mathbb{N}_0$ é definido indutivamente de modo que seu primeiro elemento pertença a $\mathbb{N}_1 \setminus \mathbb{N}_2$, o segundo esteja em $\mathbb{N}_2 \setminus \mathbb{N}_3$ e, para $n > 1$, seu n-ésimo elemento pertença a $\mathbb{N}_{n-1} \setminus \mathbb{N}_n$. Evidentemente, esta subsequência converge para uma função crescente não-negativa $Q : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$.Sendo Q crescente e limitada superiormente, seu limite no infinito existe e é finito. A saber

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \alpha \in [0,\lambda]$$

Caso 1) $\alpha = \lambda$.

Dado $\frac{\lambda}{2} < \mu < \lambda$

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{n} \sup_{y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \int_{y+B_t} \rho_n(z)dz > \mu$$

Existe t_0 dependendo de μ e n_0 dependendo de t_0 tais que, por uma propriedade elementar de limites bem como pela definição de supremo, vale que, para $t > t_0$ e cada $n > n_0$ existe uma sequência y_n de $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{y_n+B_t(\mu)} \rho_n(z)dz > \mu$$

Procedimento análogo produz uma sequência $w_n = w_n(\frac{\lambda}{2})$ tal que

$$\int_{w_n+B_t(\frac{\lambda}{2})} \rho_n(z)dz > \frac{\lambda}{2}.$$

Afirmo que, neste contexto,

$$|y_n - w_n| \leq t(\mu) + t(\frac{\lambda}{2})$$

De fato, se esse não fosse o caso, teríamos

$$B[y_n, t(\mu)] \cap B[w_n, t(\frac{\lambda}{2})] = \emptyset$$

implicando que

$$\lambda \geq \int_{B[y_n,t(\mu)]\cup B[w_n,t(\frac{\lambda}{2})]} \rho_n(z)dx = \int_{y_n+B_t(\mu)} \rho_n(z)dz + \int_{w_n+B_t(\frac{\lambda}{2})} \rho_n(z)dz > \mu + \frac{\lambda}{2}$$

o que, por sua vez se faz maior que λ, levando-nos à uma contradição.Assim sendo, concluímos o primeiro caso simplesmente definindo $j(\mu) := t(\frac{\lambda}{2}) + 2t(\mu)$, tomando $x \in$

$B[y_n, t(\mu)]$. e observando que

$$|x - w_n| \leq |x - y_n| + |y_n - w_n| \leq$$

$$t(\mu) + t\left(\frac{\lambda}{2}\right) + t(\mu) = j(\mu)$$

Assim,

$$B[y_n, t(\mu)] \subset B[w_n, j(\mu)].$$

Logo,

$$\int_{w_n + B_j(\mu)} \rho_n dx > \int_{y_n + B_t(\mu)} \rho_n dx > \mu.$$

Caso 2) $\alpha \in (0, \lambda)$.

Dado $\varepsilon > 0$, semelhantemente ao feito acima, $\exists\ t_0 > 0$ *tal que* , *para* $t \geq t_0$, $\lim_n Q_n(t) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.Logo, para cada $t \geq t_0$ $\exists n_0 = n_0(t)$ tal que $Q_n(t) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, $\forall\ n > n_0(t)$. Seja $(t_k)_{k \in K}$ uma sequência maior que t_0 convergindo para infinito, indexada de modo que $k > n_0(t_k)$, onde k é o menor natural maior que $n_0(t_k)$.

Desse modo, sendo $n > n_0(t_n)$ (que, por sua vez, é sempre maior ou igual a $n_0(t_0)$, tanto $Q_n(t_n)$ como $Q_n(t_0)$, $n \in K$, pertencem ao intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Logo, pela definição de $Q_n(t_0)$, dada por um supremo, obtemos uma sequência $(y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $n \in K$, suficientemente grande , tal que $\int_{y_n + B_{t_0}} \rho_n(x) dx \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Sendo

$$\int_{y_n + B_{t_n}} \rho_n(x) dx \ \geq \int_{y_n + B_{t_0}} \rho_n(x) dx,$$

concluímos que

$$\int_{y_n + B_{t_n}} \rho_n(x) dx \ > \alpha - \varepsilon.$$

Logo, para $n \in K$, suficientemente grande

$$\int_{y_n + B_{t_n}} \rho_n(x) dx \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

Defina

$$\rho_n^1 = \rho_n \chi_{(y_n + B_{t_0})} \text{ e } \rho_n^2 = \rho_n \chi_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus (y_n + B_{t_n})}$$

Um cálculo simples nos mostra que

$$\| \rho_n - (\rho_n^1 + \rho_n^2) \|_{L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} = \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_n - \rho_n^1 - \rho_n^2) dx =$$

$$\int_{t_0\leq|x-y_n|\leq t_n}\rho_n(x)dx=\int_{y_n+B_{t_n}}\rho_n(x)dx-\int_{y_n+B_{t_0}}\rho_n(x)dx$$

sendo, assim, menor ou igual a

$$\leq \alpha+\varepsilon+(-\alpha+\varepsilon)=2\varepsilon.$$

Ademais,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\rho_n^1 dx-\alpha=\int_{y_n+B_{t_0}}\rho_n dx-\alpha\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

Logo,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\rho_n^1(x)dx-\alpha\right|\leq\varepsilon.$$

Similarmente,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus y_n+B_{t_n}}\rho_n(x)dx=\lambda-\int_{y_n+B_{t_n}}\rho_n(x)dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus y_n+B_{t_n}}\rho_n(x)dx-\lambda+\alpha=\alpha-\int_{y_n+B_{t_n}}\rho_n(x)dx\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

Ou seja,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\rho_n^2(x)dx-(\lambda-\alpha)\right|\leq\varepsilon.$$

Caso 1) $\alpha=0$.

Isto é exatamente a afirmação em (I). □

CAPÍTULO 2

Existência de Solução: p entre 2 e 10 \ 3

Neste capítulo nos basearemos em [9] no estudo sobre existência de solução fraca para o problema dado em 1-6 para os casos $p \in [2, \frac{10}{3}]$.

2.1 Propriedades Topológicas do Funcional Energia

Conforme já salientado, antes de procurarmos por funções minimizantes para I_R, faz-se bastante conveniente, senão necessário, estudarmos primeiramente o comportamento do ínfimo I_R à partir dos possíveis valores para os parâmetros p e C do problema 1-6. Com esse fito em mente, iniciamos os estudos deste capítulo com o Lema a seguir, que será essencial pra concluirmos sobre limitação, sinal e monotonicidade da menor energia I_R.

Lema 2.1 (Scaling) *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Defina a função reescalada $u_\lambda^{A,B}(x) := \lambda^A u(\lambda^B x)$, onde A , B , $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostra-se que*

$$E(u_\lambda^{A,B}) = \frac{1}{2}\lambda^{2A-B}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4}\lambda^{4A-5B}D[u] - \frac{\lambda^{pA-3B}}{p}C\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p dx \qquad (2\text{-}1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_\lambda^{A,B}|^2 dx = \lambda^{2A-3B}\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^2 dx \qquad (2\text{-}2)$$

Prova. A demonstração consiste em mera aplicação do Teorema de Mudança de Variáveis em $\mathbb{R}^3$. □

Note que, em particular, $u_\lambda^{\frac{3}{2},1}(x)$ possui a mesma massa de u, sendo, portanto, pertencente à restrição sempre que u o for. De um modo geral, a técnica de reescalamento costuma ser bastante útil sempre que se deseja exibir funções em Σ_{λ_1} à partir de uma função dada em Σ_{λ_2}.

Nossa primeira conclusão concernente ao comportamento do funcional energia refere-se ao fato de tal função jamais ser limitada inferiormente por um número positivo.

Este fato, por si mesmo, não possui grandes aplicações à presente teoria: Sua aplicação se resumirá apenas ao Lema seguinte.

Lema 2.2 *Para todo raio R positivo e $p \in [2,6]$, o ínfimo I_R da energia restrita à espera nunca é positiva.*

Prova. Considerando o reescalamento acima, tome $u \in \Sigma_R$. Nota-se que $I_R \leq E(u_\lambda)$(pois $u_\lambda \in \Sigma_R$), $\forall\, \lambda \geq 0$. Fazendo $\lambda \longrightarrow 0$ em 2.1 , conclui-se o desejado. □

Um fato simples, porém interessante acerca do funcional energia está na **monotonicidade de I_R como função do raio** R, o que, à princípio, simplesmente não nos parece intuitivo. Note como o Lema anterior desempenha papel crucial em sua demonstração. Em sua curta prova, utilizaremos pela primeira as chamadas **desigualdades to tipo concentração-compacidade**, a serem provadas ao final deste capítulo. Este propriedade de monotonicidade nos será útil para provarmos mais adiante que a dicotomia das sequências minimizantes não ocorre.

Lema 2.3 *O ínfimo do funcional energia restrito à esfera é uma função não-crescente do raio, para valores deste último suficientemente pequenos.*

Prova. Provaremos em 2.10 que, para $p \in [2,3]$ e $R > 0$ suficientemente pequeno, $I_R < I_{R^*} + I_{R-R^*}$, $\forall R^* \in (0,R)$. Logo, se existisse $R^* < R$ com $I_{R^*} < I_R$, I_{R-R^*} seria forçosamente positivo, levando-nos à uma contradição. Isto mostra que, pelo menos para R suficientemente pequeno, a função $R \mapsto I_R$ é não-crescente. □

Havíamos, à pouco, discorrido brevemente sobre a necessidade de se estudar a eventual limitação inferior do funcional energia separadamente. A seguir, trataremos justamente disto. O leitor notará que tal propriedade depende apenas do parâmetro p, exceto para $p = \frac{10}{3}$, onde a constante G(vide Apêndice, Teorema A.16) de **Gagliardo-Nirenberg** passa a desempenhar certo papel.

Lema 2.4 *O funcional energia E é ilimitado inferiormente em Σ_R se $p > \frac{10}{3}$ e limitado caso $p \in [2, \frac{10}{3})$. Se for $p = \frac{10}{3}$, tal limitação está garantida se, e somente se, vale a desigualdade*

$$CG(\frac{2}{3})R^{\frac{2}{3}} \leq \frac{5}{3}.$$

Prova. **Caso 1)** $p \in [2, \frac{10}{3})$.

Suponha, visando redução ao absurdo, que exista uma sequência minimizante(u_k) tal que $I_R = -\infty$. Defina as sequências numéricas

$$t_k(p) = f(p)\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}(p-2)} - \frac{1}{2}\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \tag{2-3}$$

e

$$q_k(p) = f(p) - \frac{1}{2}\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{2-\frac{3}{2}(p-2)}, \tag{2-4}$$

onde

$$f(p) = \frac{R^{\frac{1}{4}(6-p)}CC_{GN}(p)}{p}$$

e consequentemente

$$t_k(p) = q_k(p)\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}(p-2)}. \tag{2-5}$$

Sendo $\lim_{k\to\infty} E(u_k) = -\infty$, o Lema A.18 nos diz que $\lim_{k\to\infty} t_k(p) = +\infty$. Isto significa que, se $\{(q_k(p)\}$ for limitada, 2-5 implica $\lim_{k\to\infty}\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = +\infty$. O que, por sua vez, pela definição de $\{q_k(p)\}$, implica que $\lim_{k\to\infty} q_k(p) = -\infty$, contrariando tal limitação. Por outro lado, se $(q_k(p))$ for ilimitada, deve-se ter, necessariamente, $\lim_{k\to\infty} q_k(p) = -\infty$. O que, tendo em vista a positividade de $\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, contradiz, por 2-5, a suposição de que $\lim_{k\to\infty} t_k(p) = +\infty$, pois, neste caso, $q_k(p)$ assumirá valores negativos para k suficientemente grande. Em todo caso, supor que $I_R = -\infty$ *para* $p \in [2, \frac{10}{3})$, nos leva à uma contradição.

Caso 2) $p \in [\frac{10}{3}, +\infty)$.

Fixada $u \in \Sigma_R$, coloque $\lambda^{\frac{3}{2}(p-2)}$ em evidência no segundo membro da expressão em (α) e tome $\lim_{\lambda\to\infty} E(u_\lambda)$. Tal limite resulta em $-\infty$, exibindo, dessa forma, uma sequência em Σ_R para a qual $I_R = -\infty$.

Caso 3) $p = \frac{10}{3}$.

Basta notar que, se houvesse alguma $u \in \Sigma_R$, tal que $E[u] < 0$, (β), implicaria em $\frac{3}{5}\frac{1}{2}R^{\frac{2}{3}}CC_{GN}(\frac{10}{3})\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 > \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$, ou ainda, $R^{\frac{2}{3}}CC_{GN}(\frac{2}{3}) > \frac{5}{3}$, contradizendo o Lema 2.4. Logo, para $p = \frac{10}{3}$, $I_R = 0$. □

A fim de demonstrarmos a não-ocorrência do vanishing para sequências minimizantes, visaremos em o Teorema 2.11 mostrar que tal ocorrência nos levaria à um ínfimo I_R nulo. Isto é exatamente o que o primeiro item do Lema à seguir diz que não pode ocorrer, onde a constante C_p provém da desigualdade no Lema A.18.

Lema 2.5 *Suponha que o raio R seja positivo e defina a constante*

$$V_C(p) = \frac{p}{2C_p}\left(\frac{2}{3p-8}\right)^{\frac{3p-8}{2}}\left(\frac{2}{10-3p}\right)^{\frac{10-3p}{2}}.$$

Valem as seguintes afirmações:

1) *O ínfimo do funcional energia restrito à esfera de raio R será negativo se* $p \in [2,3)$*;*

2) Caso $p \in [3, \frac{10}{3}]$, tal negatividade está garantida se, e somente se,

$$CR^{\frac{1}{2p-6}} > V_C(p)$$

Prova. A demonstração se dá por casos: **Caso 1)** $p \in [2, \frac{8}{3})$.

Sabemos pelo reescalamento 2.1 que

$$\lambda^{\frac{3}{2}(p-2)} E(u_\lambda) = \frac{\lambda^{(5-\frac{3}{2}p)}}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda^{(4-\frac{3}{2}p)}}{4} D[u] - \frac{C}{p} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx,$$

de modo que

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{\frac{3}{2}(2-p)} E(u_\lambda) = -\frac{C}{p} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx < 0,$$

mostrando-nos que E assume valores negativos em Σ_R, para alguma u_λ, com λ positivo suficientemente pequeno.

Para $p \in [\frac{8}{3}, 3)$, seja

$$\eta \in \Sigma_R, \text{ tal que } supp\eta \in B(0,1).$$

Defina

$$\eta_n(x) := \eta(n^{\frac{1}{3}} x), \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma simples mudança de variáveis nos mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\eta_n|^2 dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta(y)|^2 dy, \; \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \eta_n|^2 dx = n^{-\frac{1}{3}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \eta(y)|^2 dy$$

$$\|\eta_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{n} \|\eta\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \; e \; D[\eta_n] = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} D[\eta]$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $u(x) := \sum_{i=1}^n \eta_n(x - x_i), \; i = 1, ..., \; n, \; tal \; que$

$$|x_i - x_j| \geq \frac{R^2}{D[\eta]} n^{\frac{2}{3}} + 2 \, , \;\; \forall i \neq j. \tag{2-6}$$

É claro que

$$\eta_n(x - x_i) \eta_n(x - x_j) \equiv 0, \; para \; i \neq j.$$

De fato, se houvesse $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\eta_n(x - x_i)\eta_n(x - x_j) \neq 0$, com $i \neq j$, $2-6$ nos levaria a concluir que $\frac{R^2}{D[\eta]} n^{\frac{2}{3}} < 0$, visto que $|x_i - x_j| \leq |x - x_i| + |x - x_j| < 2$. Desse modo, vê-se que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{i=1}^n \eta_n(x - x_i) \right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^n |\eta_n(x - x_i)|^2 dx$$

de modo que, após permutar o símbolo de integral com o de somatório e realizar a mudança de variáveis $x - x_i = y$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx = n\left(\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^3} |\eta_n(y)|^2 dy\right)$$

levando-nos a concluir que φ, conforme construída, pertence à restrição. Raciocínio similar mostra que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \|\eta\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} = n^{\frac{2}{3}}\|\nabla\eta\|^2_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Além disso, vale

$$D[u] \leq 2n^{-\frac{2}{3}} D[\eta],$$

conforme o leitor pode verificar em [9], pág.1925, onde todos os passos principais para obtenção de tal estimativa estão bem descritos.

Sabemos, pelo Lema A.19 que E assume valores negativos em Σ_R se, e somente se, o operador

$$T(u) := \left(\frac{2}{3p-8}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\right)^{\frac{3p-8}{2}} \left(\frac{D[u]}{10-3p}\right)^{\frac{10-3p}{2}} - \frac{2C}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx$$

também o faz.

Logo, pelas relações e estimativas que acabamos de obter,

$$T(u) \leq n^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3p-8}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\eta|^2\right)^{\frac{3p-8}{2}} \left(\frac{2D[\eta]}{n^{\frac{2}{3}}(10-3p)}\right)^{\frac{10-3p}{2}} - \frac{2C}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^p dx.$$

Esta expressão se iguala a

$$(n^{\frac{2}{3}})^{(\frac{3p-8}{2} - \frac{10-3p}{2})} \left(\frac{2}{3p-8}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\eta|^2\right)^{\frac{3p-8}{2}} \left(\frac{D[\eta]}{10-3p}\right)^{\frac{10-3p}{2}} - \frac{2C}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^p dx.$$

Esta, por sua vez, tendo vista que $\frac{3p-8}{2} - \frac{10-3p}{2} < 0$ para $p \in [2,3)$, se faz negativa para n suficientemente grande. Isto conclui o primeiro caso.

Caso 2) $p \in [3, \frac{10}{3}]$.

Pelo Lema A.18 que as seguintes relações são sempre válidas:

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4(p-3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2\right)^{2(p-3)} = R^{2(p-3)} \ e$$

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{p} \leq C_p \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4(p-3)} D[u]^{\frac{10-3p}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3p-8} \tag{2-7}$$

Além disso, pelo Lema A.19, $I_R < \ 0$ se, e somente se

$$\|u\|L^p(\mathbb{R}^3)^p \ > C_{(p)}\frac{1}{C}V_C(p)\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3p-8} D[u]^{\frac{10-3p}{2}}.$$

Ou ainda, $I_R < 0$ se, e somente se,

$$C_p \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4(p-3)} D[u]^{\frac{10-3p}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3p-8} > C_{(p)}\frac{1}{C}V_C(p)\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3p-8} D[u]^{\frac{10-3p}{2}}$$

Efetuando-se os devidos cancelamentos, obtemos, por fim: $I_R \ < \ 0$ se, e somente se,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4(p-3)} \ > \ \frac{1}{C}V_C(p).$$

□

2.2 Análise de Compacidade: Caso p em (2,3)

Há pouco comentamos sobre a necessidade de se demonstrar a não ocorrência da dicotomia para uso do Lema de Lions 1.2. Conforme mencionamos brevemente há pouco, isto será feito primeiramente por meio do estabelecimento de uma família de desigualdades conhecidas(estritas ou não) como **Condições de Subaditividade** ou **Desigualdades do tipo Concentração-Compacidade**, a saber, para R positivo fixado:

$$I_R < I_{R^*} + I_{R-R^*}, \forall R^* \in (0,R).$$

É possível provar que a versão não-estrita de tais desigualdades sempre se verifica (vide [17], pág.113), o que será bastante útil para a demonstração da versão estrita, pois nos permitirá raciocinar por redução ao absurdo, supondo a igualdade.

A seguir, enunciaremos uma série de Lemas com o fito de demonstrar tal versão estrita da subaditividade.

Lema 2.6 *Defina o funcional energia auxiliar* $E_R : H^1(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{R}$ *por*

$$E_R(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^p dx + R^{\frac{2}{3}(2-A)}\frac{1}{4}D[u]. \tag{2-8}$$

Para este funcional, define-se, similarmente, um problema de minimização associado, a saber

$$J_\mu^R := \inf_{\varphi\in\Sigma_\mu} E_R(u). \tag{2-9}$$

Nessas condições, vale a relação

$$J_\mu^R = \mu^{\frac{4A+1}{3}} J_1^{\mu R}. \tag{2-10}$$

Prova. Seja $u \in \Sigma_1$. Pela definição acima, para cada $\mu \in (0,\lambda)$ temos

$$\mu^{\frac{4A+1}{3}} E_{\mu R}(\phi) = \frac{1}{2}\mu^{\frac{4A+1}{3}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi(x)|^2 dx - \frac{\mu^{(p-2)A+1}}{p} C \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(x)|^p dx + \frac{1}{4}\mu^{\frac{2A+5}{3}} R^{\frac{3}{2}(2-A)} D[\phi].$$

Se fizermos uso do reescalamento e tomarmos A na equação acima de maneira que

$$0 < \frac{4A+1}{3} = (p-2)A+1 < \frac{2A+5}{3}$$

veremos que $u_\mu^{\frac{3}{2},1} \in \Sigma_\mu$ e que o segundo membro na igualdade acima é maior que $E_R[u_\mu^{\frac{3}{2},1}]$. Isto mostra que

$$J_\mu^R \le \mu^{\frac{4A+1}{3}} J_1^{\mu R}.$$

Raciocínio análogo demonstra que

$$J_\mu^R \ge \mu^{\frac{4A+1}{3}} J_1^{\mu R},$$

e estamos feitos. □

Raciocínio bastante similar ao que acabamos de desenvolver nos permite provar que vale também, para R não-negativo:

$$I_R = R^{\frac{4A+1}{3}} J_1^R. \tag{2-11}$$

O Lema acima introduz o problema de minimização auxiliar 2-9, para o qual definiremos condições similares à subaditividade, para valores do raio nulo e positivos, dos quais nos valeremos à fim de demonstrar a condição de subaditividade para o problema principal. O Lema a seguir nos leva nessa direção.

Lema 2.7 *Para cada λ positivo fixado vale , para todo $\mu \in (0,\lambda)$, a desigualdade*

$$J_\lambda^0 \; < \; J_\mu^0 \; + \; J_{\lambda-\mu}^0 \; \forall \mu \in (0,\lambda). \tag{2-12}$$

Prova. Considere a função

$$\mu \longrightarrow \mu^{\frac{4A+1}{3}} + (\lambda - \mu)^{\frac{4A+1}{3}}.$$

Um cálculo simples nos diz que tal função é decrescente para $\mu \in [0, \frac{\lambda}{2})$ e crescente para $\mu \in [\frac{\lambda}{2}, \lambda)$. Logo,restrita ao intervalo $[0, \lambda]$ esta função possui 0 e λ como pontos de máximo global. Em outras palavras, seu máximo é $\lambda^{\frac{4A+1}{3}}$, mostrando-nos que, $\forall \mu \in (0, \lambda)$

$$\lambda^{\frac{4A+1}{3}} > \mu^{\frac{4A+1}{3}} + (\lambda - \mu)^{\frac{4A+1}{3}}$$

Como J_1^0 é negativo, isto é equivalente a

$$\lambda^{\frac{4A+1}{3}} J_1^0 < \mu^{\frac{4A+1}{3}} J_1^0 + (\lambda - \mu)^{\frac{4A+1}{3}} J_1^0$$

o que, por 2-10 é a desigualdade colimada. $\square$

Enquanto as desigualdades do lema acima são universais, valendo para todo λ positivo sempre que $\mu > 0$ for menor que λ, as desigualdades do lema a seguir eventualmente não se verificam, sendo, no entanto, condições suficientes para a condição de subaditividade. Eis o que provaremos agora.

Lema 2.8 *Seja $R > 0$. Se, para todo μ positivo menor que 1 a desigualdade*

$$J_1^R < J_\mu^R + J_{1-\mu}^R \tag{2-13}$$

for verificada, então, para todo R' positivo menor que R vale a desigualdade

$$I_R < I_{R'} + I_{R-R'}$$

Prova. De fato, dado $R' \in (0, R)$, vale a desigualdade

$$J_1^R < J_{\frac{R'}{R}}^R + J_{1-\frac{R'}{R}}^R.$$

Pelo 2-10 isto equivale à

$$J_1^R < \left(\frac{R'}{R}\right)^{\frac{4A+1}{3}} J_1^{\frac{R'}{R}\cdot R} + \left(\left(\frac{R-R'}{R}\right)^{\frac{4A+1}{3}} J_1^{\frac{R-R'}{R}\cdot R}\right).$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima pelo número positivo $R^{\frac{4A+1}{3}}$, obtemos

$$R^{\frac{4A+1}{3}} J_1^R < (R')^{\frac{4A+1}{3}} J_1^{\frac{R'}{R} \cdot R} + (R-R')^{\frac{4A+1}{3}} J_1^{\frac{R-R'}{R} \cdot R},$$

que, por sua vez, pelo 2-11 nos leva a

$$I_R < I_{R'} + I_{R-R'},$$

conforme desejávamos. □

Observação 2.9 *A função $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x,y) = J_x^y$$

é contínua, o que se vê facilmente tendo em vista que, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ a função de R dada por $E_R(u)$ é conhecidamente contínua, bem como a função ínfimo.

Feitas as devidas considerações, estamos finalmente prontos para enunciar e provar a condição da qual tanto temos falado. Nos parece realmente razoável tê-la dividido em Lemas, pois não obstante, sua demonstração ainda se mostrará bastante trabalhosa.

Teorema 2.10 (Subaditividade Estrita) *Seja $p \in (2,3)$. Para cada $R > 0$ suficientemente pequeno, as desigualdades estritas*

$$I_R \; < \; I_{R'} \; + \; I_{R-R'} \tag{2-14}$$

são válidas para $R' \in (0,R)$.

Prova. Visando redução ao absurdo, suponha que a condição 2-14 não ocorra para R suficientemente pequeno. Pelo Lema 2.8, isto significa que $\{R_k\}_{k\geq 1} \mapsto 0$ e $\{\lambda\}_{k\geq 1} \in (0,1)$ tais que

$$J_1^{R_k} \; = \; J_{\lambda_k}^{R_k} \; + \; J_{1-\lambda_k}^{R_K} \quad , \qquad \lambda_k \in (0,1). \tag{2-15}$$

Afirmo que, se a equação 2-15 for verdade, para k suficientemente grande, vale a desigualdade

$$J_{\lambda_k}^{R_k} < J_{\mu}^{R_k} + J_{\lambda_k-\mu}^{R_k} \qquad \forall \mu \in (0,\lambda_k). \tag{2-16}$$

De fato, se esse não fosse o caso, teríamos, para k arbitrariamente grande, a seguinte igualdade

$$J_{\lambda_k}^{R_k} = J_{\mu_k}^{R_k} + J_{\lambda_k-\mu_k}^{R_k} \quad , \qquad \mu_k \in (0,\lambda_k). \tag{2-17}$$

Sendo sequências de números reais limitadas, à menos de subsequências, pode-se assumir que

$$\lambda_k \longrightarrow \lambda \in [0,1] \text{ e } \mu_k \longrightarrow \mu \in [0,\lambda]$$

Nessas condições, a equação 2-15 nos diz que $\lambda \in \{1,0\}$, pois caso contrário, pela continuidade estabelecida na observação 2.9 chegaríamos à uma contradição, tendo em vista o Lema 2.7. Raciocínio análogo nos mostra à partir da equação 2-17 que $\mu \in \{1,0\}$. Sendo possível tomar $\{\mu_k\}$ de maneira que seus termos não se aproximem de 0 nem de 1, chegamos à contradição desejada. Logo, enfatizo, ao assumirmos que vale 2-15, provamos que 2-16 ocorre. Portanto, o problema $J_{\lambda_k}^{R_k}$ possui um minimizante u_k , para k suficientemente grande. Sabemos pelo reescalamento que $u_k^{-\frac{1}{2},0} \in \Sigma_1$. Substituindo $u_k^{-\frac{1}{2},0}$ no argumento do funcional energia auxiliar em 2-8 para R igual a zero e realizando as operações indicadas na fórmula de reescalamento obtemos

$$E_0(u_k^{-\frac{1}{2},0}] = \frac{1}{2\lambda_k}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_k|^2 dx - \frac{C}{\lambda_k^{\frac{p}{2}p}}\int_{\mathbb{R}^3} |u_k|^p dx.$$

Logo, se supormos sem perda de generalidade que $\lambda_k \longrightarrow 1$, concluímos passando o limite quando k vai a infinito, que $\{u_{\lambda_k}^{-\frac{1}{2},0}\}_{k\geq 1}$ é uma sequência minimizante para J_1^0. À partir de 2.7 obtemos que, à menos de translações e subsequências, $u_{\lambda_k}^{-\frac{1}{2},0}$ converge fracamente em $H_0^1(\mathbb{R}^3)$ para algum minimizante u_∞. Isto significa que u_∞ satisfaz

$$-\Delta\varphi_\infty - C\varphi_\infty^{p-1} + \theta\varphi_\infty = 0 \tag{2-18}$$

no sentido fraco, para algum θ positivo. Como estamos assumindo 2-15, temos que

$$\frac{J_1^{R_k} - J_{\lambda_k}^{R_k}}{1-\lambda_k} = \frac{J_{1-\lambda_k}^{R_k}}{1-\lambda_k}.$$

É fácil ver, à partir de 2-18 que o primeiro membro da igualdade acima é dominado por $\frac{1}{2}(-\theta)$ enquanto o segundo membro vai a zero. Esta contradição mostra que não devíamos ter negado 2-14 e estamos feitos. $\square$

A seguir inciaremos o estudo propriamente dito acerca da compacidade das sequências minimizantes para o problema de minimização I_R para alguns casos. Os demais precisam ser tratados separadamente pois ou o funcional energia se faz ilimitado na esfera, ou alguns dos cálculos que temos realizado simplesmente não se aplicam. Primeiramente apresentaremos uma demonstração para o fato de que vanishing não pode ocorrer:o leitor não a encontrará no artigo [9], referência principal para esta dissertação, muito embora seus autores nos deem uma dica na introdução, página 1919, a qual prontamente seguimos. A fim de demonstrar que a dicotomia não ocorre, nos inspiramos na correspondente parte da demonstração do Teorema II.1, em [17].

Teorema 2.11 *Seja $p \in (2,3)$. Se $\{u_k\}$ for uma sequência minimizante para I_R, necessariamente o caso compacidade deve ocorrer.*

Prova. **Caso I: Vanishing não ocorre.**

Suponha que ocorra. Pelo Lema A.18, para toda sequência minimizante (u_k) de I_R, vale a desigualdade

$$E(u_k) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left(1 - \frac{2CC_G N(p)}{p}R^{\frac{6-p}{4}}\|\nabla u_k\|^{\frac{3p-10}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Isto nos permite concluir que $\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma sequência numérica limitada.

Logo, pelo Lema 1.3, $\lim_k \|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = 0$, para $q \in (2,6)$ e portanto, $I_R \geq 0$. Contradição!

Caso II: Dicotomia não ocorre.

Suponha, visando redução ao absurdo, que este não seja o caso. Pelo Lema 1.2, podemos separar u_k em três funções tais que

$$(u_k)^2 = (u_k^1)^2 + (u_k^2)^2 + (v_k)^2 \tag{2-19}$$

$$(u_k) = (u_k^1) + (u_k^2) + (u_k) \tag{2-20}$$

Sendo os suportes de tais funções dois-a-dois disjuntos, 2-20 nos diz que, calculado o produto interno de ∇u_k por ele mesmo, obtemos

$$|\nabla u_k|^2 = |\nabla u_k^1|^2 + |\nabla u_k^2|^2 + |\nabla v_K|^2 \tag{2-21}$$

Além disso, relendo a demonstração do Lema 1.2 vemos que

$$-\frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_k|^p dx$$

pode ser escrita como

$$-\frac{C}{p}\int_{B[y_k,t_0]}|u_k|^p dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3\backslash B[y_k,t_k]}|u_k|^p dx - \frac{C}{p}\int_{B[y_k,t_k]\backslash B[y_k,t_0]}|u_k|^p dx \tag{2-22}$$

o que, por sua vez, é maior que ou igual a

$$-\frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_k^1|^p dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_k^2|^p dx - \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|v_k|^p dx$$

A igualdade 2-19, por outro lado, nos diz que

$$\frac{1}{4}D[u_k] = \frac{1}{4}D[u_k^1] + \frac{1}{4}D[u_k^2] + \frac{1}{4}D[v_k] \tag{2-23}$$

As relações em 2-23, 2-22 e 2-21 nos dizem que

$$I_R = \lim_k \{E(u_k) \, | u_k \in \Sigma_R\} \geq \lim_k E(u_k^1) + \lim_k E(u_k^2) + \lim_k E(u_k)$$

o que se iguala a

$$\lim_k E(u_k^1) + \lim_k E(u_k^2) \tag{2-24}$$

tendo em vista que

$$\lim_k E(v_k) = 0.$$

Sejam α_k e β_k, respectivamente, as massas de u_k^1 e u_k^2. Sabemos pelo Lema 1.2 que $\alpha_k \longrightarrow \alpha \in (0,R)$ e $\beta_k \longrightarrow \beta \in (0, R-\alpha)$. Logo, reescalando u_k^1 e u_k^2 para A e B em Lema 2.1 de maneira que

$$\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_k^1)^2\right]^{A,B} = \lambda_k^{2A-3B} \alpha_k$$

e

$$\beta = \int_{\mathbb{R}^3} \left[(u_k^2)^2\right]^{A,B} = \lambda_k^{2A-3B} \beta_k$$

para todo k, 2-24 será igual a

$$\lim_k \left\{ E((u_k^1)_{\lambda_k}^{A,B}) \right\} + \lim_k \left\{ E((\varphi_k^1)_{\lambda_k}^{A,B}) \right\}$$

conforme se observa pela fórmula de reescalamento, tendo em vista que λ_k converge para 1. Isto, por sua vez, pelo Lema 2.3, é maior que ou igual a

$$I_\alpha \; + \; I_{R-\alpha}.$$

Esta contradição com 2-14 mostra que Dicotomia não pode ocorrer.

2.3 Existência de Solução: Caso p em (2,3)

Trataremos agora o principal resultado deste texto, concluindo, conforme esperado, que o limite fraco u_0 das sequências minimizantes para o problema I_R de fato é tal que $E(u_0) = I_R$. Ademais, convém salientar que, assim como no teorema anterior, os autores de [9] não apresentaram uma demonstração específica para o caso $p \in (2,3)$, de modo que a fim de demonstrá-lo, fizemos uso de algumas das ideias centrais adotadas pelos autores para demonstração da proposição 3.3 em [9].

Teorema 2.12 (Existência de Minimizante) *Para $p \in (2,3)$, o ínfimo do funcional energia restrito à esfera é atingido para alguma $u_0 \in \Sigma_R$.*

*Prova.*Como

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x+y_k)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(z)|^2 dz$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x+y_k)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u(z)|^2 dz = R,$$

a sequência numérica

$$\{u_k(\cdot + y_k)\}$$

é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. A menos de subsequência, obtemos, por **Banach-Alaoglu** (vide Apêndice, Teorema A.7) que

$$u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3),$$

ou ainda, pelas imersões compactas de Sobolev

$$u_k(\cdot + y_k) \to u_0 \in L^q_{Loc}(\mathbb{R}^3),\ q \in [2,6).$$

Tal convergência forte implica, em particular, que a sequência das normas converge para a norma do limite. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^2 dx \geq \int_{B_t} |u_0(x)|^2 dx = \lim_k \int_{B_t} |u_k(x+y_k)|^2 dx \geq R - \varepsilon.$$

O Teorema A.5 nos diz que tal convergência forte local também implica que

$$u_k(\cdot + y_k) \to u_0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3.$$

Logo, pelo **Lema de Fatou** (vide Apêndice, Teorema A.14), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \liminf_k |u_k(x+y_k)|^2 dx \leq \liminf_k \int_{\mathbb{R}^3} |u_k(x+y_k)|^2 dx = R,$$

nos levando a concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^2 dx = R,$$

ou seja,

$$u_0 \in \Sigma_R.$$

Sabemos, pelo Teorema A.4 que $\int_{\mathbb{R}^3} |u_k - u_0|^2 dx$ converge para zero. Logo, pelo Lema 1.3 aplicado à $u_k - u_0$, obtemos que $u_k - u_0$ converge para zero em $L^p(\mathbb{R}^3)$, para todo $p \in [2,6)$. Portanto, a desigualdade de **Hardy-Littlewood-Sobolev** (vide Apêndice, Teorema A.3) nos diz que

$$0 \leq ||D[u_k]| - |D[u_0]|| \leq |D[u_k - u_0]| \leq 2A\|(u_k - u_0)^2\|_{\frac{6}{5}}^2.$$

Isto significa que $D[u_k]$ converge para $D[u_0]$. Portanto, tendo em mente que, à menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u_0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, cuja norma é semi-contínua inferiormente no sentido fraco, obtemos que

$$I_R \leq E[u_0] \leq \liminf E[u_k(\cdot + y_k)] = I_R.$$

Em outras palavras, acabamos de demonstrar que $E[u_0] = I_R$ e assim, u_0 é, conforme as considerações já realizadas, uma solução fraca para a equação 1-6, □

2.4 Caso p em [3,10 \ 3]

Até o momento temos, de certa forma nos concentrado nos casos para os quais o problema de compacidade necessariamente se contorna garantindo que, ao aplicarmos o Lema de Lions 1.2 às sequências minimizantes, os casos vanishing ou dicotomia não possam de fato ocorrer: Veremos nesta seção que isto nem sempre é necessário.

Antes de proceder com tais casos, enunciaremos o Lema

Lema 2.13 *Para $p \in (2, \frac{10}{3})$, se houver um minimizante u_0 para I_R, as seguintes relações serão válidas:*

1)$\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + D[u_0] - C\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^p + \ell_R R = 0;$

2)$\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4}D[u_0] - \frac{C}{p}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^p = -|I_R|;$

3)$\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{1}{4}D[u_0] - \frac{3}{2}\frac{p-2}{p}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^p = 0;$

4)O multiplicador de Lagrange da equação diferencial 1-6 é dado por

$$\ell_R = \frac{2}{R}\left(\frac{2(p-3)}{3p-8}\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{5p-11}{3p-8}|I_R|\right).$$

Prova. **1)** é evidente à partir da definição de solução fraca aplicada à equação 1-6; **2)**, por sua vez, é equivalente a $E(u_0) = I_R$. Para provar **3)**, basta notar que, para todo λ, $u_\lambda^{\frac{3}{2},1} \in \Sigma_R$, de modo que a função $\psi(\lambda) := E((u_0)_\lambda^{\frac{3}{2},1})$ atinge seu mínimo para $\lambda = 1$, pois

$\psi(1) = E(u_0)$.Logo, basta derivar ψ para chegar-se à igualdade desejada. Por fim, prova-se **4)** resolvendo o sistema linear acima nas variáveis $\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, $D[u_0]$ e $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$. □

O Lema a seguir possui algumas peculiaridades interessantes: A primeira reside no fato, conforme veremos, de que a existência de soluções dependerá não apenas do parâmetro p, mas também das constantes C e C_p no Lema A.18. Além disso, a existência de funções minimizantes não dependerá de R. O segundo item do Lema se prova demonstrando que as desigualdades do tipo concentração-compacidade se verificam para todo R positivo. O primeiro item, onde se trata de inexistência, é provado por redução ao absurdo, supondo que tal solução exista com $I_R = 0$, e utilizando o Lema 2.13 acima para chegar à uma contradição.

Lema 2.14 *Seja C_3 a constante no Lema A.18, item 2). Valem as afirmações:*

1) *Se $\frac{3}{\sqrt{2}C_3} > C$, então $I_R = 0$ e I_R é atingido para nenhum $R > 0$;*

2) *Se $\frac{3}{\sqrt{2}C_3} < C$, então $I_R < 0$ e I_R é atingido para todo $R > 0$.*

Prova. Já sabemos pelo Lema 2.5 que, para $p \in [3, \frac{10}{3})$, $I_R < 0 \iff CR^{2p-6} > V_C(p)$. Em particular, obtemos a primeira proposição de cada conjunção lógica acima simplesmente considerando que, em particular, para $p = 3$ vale que

$$\frac{3}{\sqrt{2}C_3} < C \iff I_R < 0.$$

2) Aplicando a fórmula de reescalamento para $A = 2$ e $B = 1$, obtemos que

$$I_R = R^3 I_1 \ \forall R > 0. \tag{2-25}$$

A desigualdade

$$I_R < I_{R'} + I_{R-R'}$$

é equivalente a

$$R^3 I_1 < I_1(R^{'})^3 + I_1(R-R^{'})^3$$

ou ainda

$$R^3 > (R^{'})^3 + (R-R^{'})^3.$$

Isto, por sua vez, após ter ambos os membros divididos por R^3 e o polinômio desenvolvido se mostra equivalente a

$$0 > 3\frac{R^{'}}{R}\left(\frac{R^{'}}{R} - 1\right),$$

provando, dessa forma, as desigualdades do tipo concentração-compacidade para $R^{'} \in (0,R)$, o que, por raciocínio análogo ao desenvolvido para a demonstração do Teorema 2.12 , mostra que I_1 é atingido para alguma $\varphi \in \Sigma_1$ e, consequentemente I_R, tendo em vista 2-25, para alguma $\varphi \in \Sigma_R$.

1) Como, por 2-25, nulidade e sinal de I_R dependem apenas de I_1, podemos restringir nossa análise a este ultimo. Pelo Lema 2.13, item IV), sabemos que $\ell_1 = 0$, tendo em vista que $p = 3$ e estamos supondo que $I_R = 0$. Desse modo, resolvendo o sistema formado pelas equações nos items 1),2) e 3) do mesmo Lema, agora para os valores atualizados de $|I_1|$ e ℓ_1, obtemos que

$$D[u_1]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\|\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \text{ e } \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \tfrac{C}{3}\|u_1\|^3_{L^3(\mathbb{R}^3)}$$

Sabemos, pelo item 3 do Lema A.18, que, sendo $p = 3$,

$$\|u_1\|^3_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C_3 D^{\frac{1}{2}}[u_1]\|\nabla\|_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{\|\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}$$

de onde se conclui que

$$\frac{1}{C_3} \leq \frac{C\sqrt{2}}{3}$$

ou equivalentemente

$$\frac{3}{C_3\sqrt{2}} \leq C.$$

contradizendo nossa hipótese de que

$$\frac{3}{C_3\sqrt{2}} > C.$$

Esta contradição mostra que não existe $R > 0$ para o qual I_R seja atingido.

O leitor atento deve ter notado que, tendo em vista que, para $p = 3$ e $\frac{3}{\sqrt{2}C_3} \geq C$ conclui-se que $I_\lambda = 0 \ \forall \lambda > 0$, as desigualdades do tipo concentração-compacidade se transformam em igualdades. Portanto, necessariamente existe alguma sequência minimizante para I_R que não possui subsequência fracamente convergente em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para algum ponto de Σ_R, à menos de translação. No entanto, se conseguirmos controlar a massa de pelo menos uma sequência minimizante, para que a perda não ultrapasse um certo valor, a compacidade estará ainda garantida.O sentido exato de tal afirmação se encontra, novamente, no Lema de Lions 1.2 e o próximo Teorema nos diz como. $\square$

Teorema 2.15 *Seja $p = 3$ e $C = \frac{3}{\sqrt{2}C_3}$. Se existir alguma sequência minimizante para I_1 tal que **Vanishing** não ocorra, então o ínfimo de I_1 restrito à esfera é atingido.*

Prova. Seja u_k uma sequência minimizante para I_1 tal que Vanishing não ocorra. O caso Compactness se trata de modo análogo ao feito na memonstração do Teorema 2.12 acima. Caso ocorra Dichotomy, mostra-se facilmente que u_k converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, quase todo ponto em $\mathbb{R}^3$, fracamente em $L^q(\mathbb{R}^3)$, para $q \in [2,6]$ e fortemente em $L^q_{Loc}(\mathbb{R}^3)$ para os mesmos valores de q(exceto 6), à menos de subsequência e translação, para alguma $u_0 \in \Sigma_1$, tal que $\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \mu \in (0,1)$.

Caso I: $\mu < 1$. Seja $r_k := \psi_k - u_0$, onde $\psi_k := u_k(\cdot + y_k)$.

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi_k|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla r_k|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \langle \nabla u_0, \nabla r_k \rangle dx$$

onde a última parcela vai a zero pois

$$\langle r_k, u_0 \rangle_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \nabla r_k, \nabla u_0 \rangle dx + \langle r_k, u_0 \rangle_{L^2}.$$

Como $|r_k + u_0|^3 \leq |r_k|^3 + |u_0|^3 + 3|r_k||u_0|(|r_k| + |u_0|)$, obtemos que

$$-\int_{\mathbb{R}^3} |r_k - u_0|^3 dx \geq -\int_{\mathbb{R}^3} |r_k|^3 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^3 dx - 3\int_{\mathbb{R}^3} |r_k u_0|(|r_k| + |u_0|) dx$$

Tendo em vista que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_0 r_k|^2 dx =$$

$$\int_{|x|\leq R} |u_0 r_k|^2 dx + \int_{|x|>R} |u_0 r_k|^2 dx \leq$$

$$\left(\int_{|x|\leq R} |u_0|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|\leq R} |r_k|^4\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|x|>R} |u_0|^4\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x|>R} |r_k|^4\right)^{\frac{1}{2}},$$

que vai a zero quando R tende a infinito, obtemos que

$$-\int_{\mathbb{R}^3} |u_k|^3 dx \geq -\int_{\mathbb{R}^3} |r_k|^3 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^3 dx + o(1)$$

Além disso, tendo em mente que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(u_k^2 \star \frac{1}{|x|}\right) u_k^2 dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0^2 \star \frac{1}{|x|} + 2(u_0 r_k) \star \frac{1}{|x|} + r_k^2 \star \frac{1}{|x|}\right) (u_0^2 + 2u_0 r_k + r_k^2) dx$$

que, após ignorados alguns termos não-negativos, se mostra maior que ou igual a

$$D[u_0]+D[r_k]+o(1)$$

onde $o(1)$ indica uma quantidade que converge para zero (em k). Isto se verifica facilmente, pois, por exemplo:

Se mostrar-mos que $u_0 \star \frac{1}{|x|} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, obteremos , pelo Teorema A.2, que

$$0 \leq \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_0^2 \star \frac{1}{|x|} \right) (u_0 r_k) dx \right| \leq \left| u_0^2 \star \frac{1}{|x|} \right|_{L^\infty} \|u_0 r_k\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

que sabemos convergir para zero.

De fato,

$$\left| u^2 \star \frac{1}{|x|} \right|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(y)}{|x-y|} u(y) dy$$

o que, pelo Teorema A.11 é menor que ou igual a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

que, por sua vez, pelo Teorema A.1 se mostra menor ou igual a

$$2\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Todas essas considerações nos levam a concluir que

$$0 = \liminf_k E(u_k) \geq \liminf_k E(u_0) + \liminf_k E(r_k) + \liminf_k o(1) \geq E(u_0) \geq I_\mu = 0,$$

pois $E(r_k) \geq 0\ \forall k \geq 1$. Logo, $E(u_0) = I_\mu = 0$ e $I_R = 0$ também é atingido $\forall R > 0$. □

Encontraremos agora uma aplicação do Lema 2.5 no estudo de existência de soluções fracas para o problema 1-6, por meio da análise do caso crítico R_c, definido à partir da constante V_C, definida naquele Lema. Note, novamente, como, muito embora não estejamos no caso principal $p \in (2,3)$, a condição de subaditividade ainda desempenhará papel fundamental em nosso estudo.

Teorema 2.16 *Defina* $R_c := \left(\frac{V_C}{C}\right)^{\frac{1}{2p-6}}$. *Se* $p \in (3, \frac{10}{3})$, *as seguintes afirmações são válidas:*

1) *Se* $R > R_c$, *então as desigualdades estritas do tipo concentração-compacidade se verificam. Em particular, existe um minimizante;*

2) *Se* $R = R_c$, *então o problema* I_R *possui minimizante;*

3) *Se* $R < R_c$, *então* I_R *não é atingido.*

Prova. **1)** Seja $R^{'} > R$ e $u \in \Sigma_R$. Pelo reescalamento com $A = 2$, $B = 1$ e $\lambda = \frac{R^{'}}{R}$, obtemos, tendo em vista que $u_\lambda^{2,1} \in \Sigma_{R'}$, que

$$I_{R'} \leq E(u_\lambda^{2,1}) =$$

$$\left(\frac{R^{'}}{R}\right)^3 \left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4}D[u] - \left(\frac{R^{'}}{R}\right)^{\frac{1}{2p-6}} \frac{C}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx\right]$$

que, por sua vez, se faz menor que ou igual a

$$\left(\frac{R^{'}}{R}\right)^3 E(u).$$

Dessa forma, tomando o ínfimo do segundo membro da desigualdade acima para $u \in \Sigma_R$, obtemos

$$I_{R'} \leq \left(\frac{R^{'}}{R}\right)^3 I_R.$$

Sabemos ser $I_{R'}, I_R < 0$. logo, se substituirmos $\left(\frac{R^{'}}{R}\right)$ por 1 na expressão acima, concluímos que a função $R \mapsto I_R$ é decrescente para $R \geq R_c$. Desejamos provar agora que

$$I_R < I_r + I_{R-r} \; \forall r \in (0,R).$$

De fato, seja $r \in (0,R)$. Se $I_r = I_{R-r}$, a desigualdade está verificada, tendo em vista que $I_R < 0$.

Se $I_r < 0$ e $I_{R-r} = 0$, estamos feitos, tendo em vista a monotonicidade da função $R \mapsto I_R$, dada no Lema 2.3, caso $r \geq R_c$ e o fato de $I_r = 0$ para $r < R_c$.

Caso $I_r, I_{r-R} < 0$, sabemos ser $r, R-r > R_c$. Logo, obtemos que

$$I_R \leq \left(\frac{R}{r}\right)^3 I_r < \frac{R}{r} I_r$$

e

$$I_R \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^3 I_{R-r} < \frac{R}{R-r} I_{R-r}.$$

Assim, $I_R = \frac{r}{R} I_R + \frac{R-r}{R} I_R < I_r + I_{R-r}$.

2)Considere a sequência definida por $R_K = R_c + \frac{1}{k}$, para cada $k \geq 1$. Sendo $R_k > R_c$, pelo item anterior, para cada $k \geq 1$ existe um minimizante $u_k \in \Sigma_{R_k}$ para I_{R_k}.Note que, pelo Lema 2.5, vale que $I_{R_k} < 0$ para cada k. Tendo em vista que $R_k \longrightarrow R_c$, conclui-se por meio do reescalamento com $A = 2$, $B = 1$ e $\lambda = \frac{R'}{R}$ que

$$\lim_{k \to \infty} E(u_k) = \lim_{k \to \infty} I_{R_k} = I_{R_c}.$$

Isto significa que pelo Lema A.20 $\eta_{R_k} \longrightarrow 0$. Combinando o Lema A.20 com o Lema A.18, obtemos

$$\frac{1}{4}\varepsilon_{R_k} - \frac{3}{2}\eta_{R_k} \leq$$

$$C(p)C_G(1)^{p-1}R^{\frac{p-1}{2}} \left[\left(\frac{3}{4}p-2\right)\varepsilon_{R_k} - (\frac{5}{2}p-6)\eta_{R_k}\right]^{2p-5} \cdot \left[(5-\frac{3}{2}p)\varepsilon_{R_k} + (p-6)\eta_{R_k}\right]^{\frac{4-p}{2}}.$$

Tomando o limite quando $k \longrightarrow +\infty$, obtemos

$$\frac{1}{4} \leq C(p)C_G(1)^{p-1}R^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{3}{4}p-2\right]^{2p-5} \left(5-\frac{3}{2}p\right)^{\frac{4-p}{2}} \liminf_k \varepsilon_{R_k}^{\frac{1}{2}(3p-8)}$$

mostrando-nos que $\liminf_k \varepsilon_{R_k} > 0$, o que, pelo Lema A.20 nos permite afirmar que

$$\liminf_k \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_k > 0$$

Sendo assim, pelo Lema 1.3, **Vanishing** não pode ocorrer.

3) Pelo Lema 2.5, $I_R = 0$. Defina

$$E_R(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4}D[u] - R^{\frac{1}{2p-6}} \frac{C}{p} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx.$$

Pelo reescalamento, pode-se facilmente estabelecer, para $A = 2$, $B = 1$ e $\lambda = R$ uma correspondência biunívoca ψ entre Σ_1 e Σ_R, dada por $\psi(u) = u^{2,1}$, de modo que as seguintes relações se verifiquem:

$$E(\psi(u)) = R^3 E_R[u],\ \forall\, u \in \Sigma_1$$

e

$$E(u) = R^{-3} E_R[\psi(u)],\ \forall u \in \Sigma_1.$$

Suponha visando redução ao absurdo que exista uma função minimizante para I_R. Então $R^{-3} I_R$ é atingido. Isto nos permite mostrar que $E_{R_c}(u_0) < E_R(u_0) = 0$ para $R_c > R$. Isto contradiz o fato de $I_{R_c} = 0$ e estamos feitos.

Observação 2.17 *Concluímos o capítulo ressaltando que o problema 1-6 não possui solução para $p = 2$, ou $p = \frac{10}{3}$. De fato, no primeiro caso mostra facilmente por meio de reescalamento que $I_R = -\frac{C}{2}R$, fazendo com que o ínfimo só possa ser atingido se, tendo em ista que $D[\cdot] \geq 0$, a norma L^2 do gradiente de u_0 se anule, contradizendo o fato da massa de u_0 ser positiva. No segundo caso, a fórmula de reescalamento nos mostra que, sendo*

$$E(u_\lambda^{\frac{2}{3},1}) = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 - \frac{3C}{10} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\frac{10}{3}} \right) + \lambda \frac{1}{4} D[u],$$

o funcional energia assume valores negativos se, e somente se, o coeficiente de λ^2 também o faz. Logo, sendo $I_R = 0$ a única possibilidade para este caso, a existência de minimizante implicaria $D[u_0] = 0$, o que é absurdo.

$\square$

CAPÍTULO 3

Existência de Solução: p entre 10 \ 3 e 6

Neste capítulo, baseado no artigo [4], iremos buscar soluções para a equação diferencial 1-6 para os valores de p tais que o problema de minimização I_R não possui solução, visto que $I_R = -\infty$ (vide Lema 2.4). A ideia principal consiste em demonstrar que o funcional energia E possui uma geometria do tipo **Passo da Montanha** em Σ_R, conforme definido na Introdução. Então localizamos uma sequência de Palais-Smale limitada no nível Σ_R e mostramos que esta sequência converge no sentido fraco em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para uma $u_0 \neq 0$ agindo como solução fraca para o problema 1-6. Os dois Lemas a seguir nos fornecerão as propriedades topológicas necessárias para tal, conforme veremos ao longo deste capítulo.

Lema 3.1 *Defina o funcional auxiliar $Q : H^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4}D[u] - \frac{3(p-2)}{2p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p.$$

Seja $p \in (\frac{10}{3}, 6)$ e $u \in \Sigma_R$, onde R é um real positivo arbitrariamente fixado. Nessas condições, as seguintes afirmações são verdadeiras:

1) *$\|\varphi_\lambda\| \longrightarrow +\infty$ e $E(u_\lambda) \longrightarrow -\infty$, quando λ, quando $\lambda \longrightarrow +\infty$;*

2) *Existe l tal que $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq l$ implica $Q(u) > 0$ e $\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \geq l$, se $Q(u) = 0$;*

3)*Se $E(u) < 0$, então $Q(u) < 0$.*

Prova.

A demonstração envolve basicamente o uso do reescalamento aliado às ferramentas de Cálculo I, recomendamos [4], Lema 2.1, para os detalhes. $\square$

Lema 3.2 *Para $p \in (\frac{10}{3}, 6)$ e $u \in \Sigma_R$ as seguintes afirmações se verificam:*

1) Existe uma única $\lambda^*(u)$ positiva tal $Q(u_{\lambda^*}) = 0$;

2) A função $\lambda \longrightarrow E(u_\lambda)$ é côncava em $[\lambda^*(u), +\infty)$;

3) $\lambda^*(u) < 1$ se, e somente se, $Q(u) < 0$;

4) $\lambda^*(u) = 1$ se, e somente se, $Q(u) = 0$;

5)

$$Q(u_\lambda) \begin{cases} > 0 & \forall \lambda \in (\ 0\ , \lambda^*) \\ < 0 & \forall \lambda \in (\lambda^*, +\infty) \end{cases}$$

6) $E(u_\lambda) < E(u_{\lambda^*}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\lambda^*\}$;

7) $\frac{\partial}{\partial \lambda} E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} Q(u_\lambda),\ \forall \lambda > 0.$

Prova.

Assim como no lema acima recomendamos [4], Lema 2.2 para a prova. □

Nosso próximo Lema, nos fornece uma percepção alternativa do nível do passo da montanha $\gamma(R)$, descrevendo-o à partir do comportamento do funcional energia restrito ao conjunto

$$V(R) := \{u \in \Sigma_R \mid Q(u) = 0\}.$$

Lema 3.3 *Quando $p \in (\frac{10}{3}, 6)$, vale a igualdade:*

$$\gamma(R) = \inf_{u \in V(R)} E(u).$$

Prova. Seja $u \in V(R)$. Sabemos que $\|\nabla u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \lambda^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, significando que, para algum $\lambda_1 \in (0,1)$ suficientemente pequeno, $u_{\lambda_1} \in A_{K(R)}$. Além disso, pelo Lema 3.1 existe $\lambda_2 > 1$ tal que $E(u_{\lambda_2}) < 0$. Logo, se definirmos

$$g(t) := u_{((1-t)\lambda_1 + t\lambda_2)}, \text{ para } t \in [0,1]$$

obteremos um caminho em $\Gamma(R)$. Sabemos por definição que

$$\gamma(R) \leq \max_{t \in [0,1]} E(g(t)).$$

Sabemos, no entanto, pelo Lema 3.2, que o máximo no segundo membro desta desigualdade ocorre apenas quando $(1-t)\lambda_1 + t\lambda_2 = 1$, mostrando-nos que $\gamma(R)$ é cota inferior de

$$\{E(u) \mid u \in V(R)\}$$

Seja m positivo tal que $m \leq E(u)\ \forall u \in V(R)$ e $g \in \Gamma(R)$ qualquer. Sabemos ser $E(g(1)) < 0$ e g contínua, logo o Lema 3.1 nos diz que $Q(g(1)) < 0$ e, além disso, caso $K(R)$ seja tomado menor que l(o que será feito no Teorema 3.6), que $Q(g(0)) > 0$. Logo, pelo Teorema do valor intermediário, $Q(g(t)) = 0$ para algum $t_0 \in (0,1)$.

Isto significa que, $\forall g \in \Gamma(R)$

$$\max_{t \in [0,1]} E(g(t)) \geq E(g(t_0)) \geq m.$$

Portanto, pela definição de $\Gamma(R)$ como ínfimo, $m \leq \Gamma(R)$ e o Lema está provado.

□

A fim de demonstrarmos a existência de uma sequência de Palais-Smale no nível γ, faremos uso do chamado fluxo gradiente, que definiremos agora.

$$T_{\overline{u}}\Sigma_R = \{v \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid (\overline{u}, v)_2 = 0.\}$$

Seja $\overline{\Sigma}_R := \{u \in \Sigma_R \mid dE|_{\Sigma_R}(u) \neq 0\}$. Sabemos por [7] que existe um campo vetorial pseudo-gradiente localmente Lipschitziano $Y \in C^1\left(\overline{\Sigma}_R, T(\Sigma_R)\right)$, onde $T(\Sigma_R)$ é o bundle tangente, tal que

$$\|Y(u)\| \leq 2\|dE|_{\Sigma_R}(u)\|$$

e

$$\langle E^{'}|_{\Sigma_R}(\overline{u}), Y(u)\rangle \geq \|dE|_{\Sigma_R}(u)\|^2,$$

para toda $u \in \overline{\Sigma}_R$.

Defina os conjuntos

$$\overline{N}_\mu := \{u \in \Sigma_R \,||E(u) - \Gamma(R)| \leq \mu, dis(u, V(R)) \leq 2\mu, \|Y(u)\| \geq 2\mu\},$$

$$N_\mu := \{u \in \Sigma_R \,||E(u) - \gamma(R)| < 2\mu\},$$

. Se $\overline{N}_\mu \neq \emptyset$, existe uma $g : \Sigma_R \longrightarrow [0,1]$ localmente lipschitziana tal que

$$g = \begin{cases} 1 & em\ \overline{N}_\mu, \\ 0 & em\ N_\mu^c \end{cases}$$

Define-se também em Σ_R o campo vetorial

$$W(u)=\begin{cases} -g(u)\frac{Y(u)}{\|Y(u)\|} & se\ u\in\overline{\Sigma}_R,\\ 0 & se\ u\in\Sigma_R\setminus\overline{\Sigma}_R\end{cases}$$

Definimos também o chamado fluxo pseudo-gradiente como solução de

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}(\eta(t,u))=W(\eta(t,u)),\\ \eta(0,u)=u\end{cases} \tag{3-1}$$

O leitor interessado pode encontrar a prova da existência de uma solução $\eta(t,\cdot)$ para a EDO acima , para cada $t\in\mathbb{R}$, em [7], Lema 5. No lema a seguir destacamos algumas das propriedades básicas de tais soluções.

Lema 3.4 *O fluxo pseudo-gradiente η satisfaz as seguintes propriedades:*

1) $\eta(t,u)=u$, *para todo* $t\in\mathbb{R}$ *se* $|E(u)-\gamma(R)|\geq 2\mu$*;*

2) $\frac{d}{dt}E(\eta(t,u))=\langle dE(\eta(t,u)),W(\eta(t,u))\rangle\leq 0$, *para todo* $t\in\mathbb{R}$ *e* $u\in\Sigma_R$.

Munidos das ferramentas básicas fornecidas pelos resultados acimas, estamos prontos para enunciar um dos resultados mais importantes deste capítulo, a saber, o Teorema a seguir, referente à existência de sequências de Palais-Smale limitadas no nível $\gamma(R)$ para o problema em estudo.

Teorema 3.5 *Tome* $p\in(\frac{10}{3},6)$ *e defina*

$$K_\mu:=\{u\in\Sigma_R\mid|E(u)-\gamma(R)|\leq\mu,\ dis(u,V(R))\leq 2\mu,\ \|E^{'}|_{\Sigma_R}(u)\|\leq 2\mu\}.$$

Para todo $\mu>0$*, o conjunto* $K_\mu\cap B_{H^1(\mathbb{R}^3)}(0,3M_0)\neq\emptyset$.

Prova. Defina para $\mu>0$

$$\Lambda_\mu:=\{u\in\Sigma_R\ \ ||E(u)-\Gamma(R)|\leq\mu\ ,\ \ dis(u,V(R))\leq 2\mu\}.$$

Uma forma de negar nossa tese seria dizer que existe $\overline{\mu}\in(0,\frac{\gamma(R)}{4})$ tal que

$$\mu\in\Lambda_{\overline{\mu}}\cap B(0,3M_0)\Rightarrow\|E^{'}|_{\Sigma_R}(u)\|>2\mu.$$

Segue que

$$\mu\in\Lambda_{\overline{\mu}}\cap B(0,3M_0)\Rightarrow\in\overline{N}_\mu.$$

É fácil ver à partir do Lema 3-1 que

$$\|\tfrac{d}{dt}\eta(t,\varphi)\| \leq 1, \forall t \geq 0 \text{ e } u \in \Sigma_R$$

$\forall s \in (0, M_0)$

$$\mu \in \Lambda_{\overline{\mu}} \cap B(0,2M_0) \Rightarrow \eta(s,u) \in B(0,3M_0) \ e \ dis(\eta(s,V(R))) \leq 2\overline{\mu} \tag{3-2}$$

De fato, pelo Teorema A.8

$$\|\eta(s,u)-\eta(0,u)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\| \frac{d}{dt}\eta(st,u)\cdot \right\| \leq 1\cdot s$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\eta(s,u)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} &= \|\eta(s,u)-u+u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \\ s+\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} &< s+2M_0 \end{aligned}$$

o que nos fornece a primeira afirmação.

Quanto a segunda afirmação, suponha que exista uma sequência $v_k \in V(R)$ tal que $\|\eta(s,u)-v_k\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow \bar{l} > 2\overline{\mu}$. Sabemos, no entanto, que

$$\begin{aligned} \Big| \|u-v_k\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} + \|\eta(s,u)-v_k\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \Big| &\leq \|u-v_k-(\eta(s,u)-v_k)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \\ &= \|u-\eta(s,u)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq s, \quad \forall s \in (0,M_0). \end{aligned}$$

o que nos leva à uma contradição, tendo em vista que

$$\|u-v_k\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow l \leq 2\overline{\mu}.$$

Afirmo que é possível construir, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, um caminho $g_\varepsilon(t) \in \Gamma_R$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} g_\varepsilon(t) \leq \gamma(R)+\varepsilon$$

e

$$E(g_\varepsilon) \geq g_\varepsilon(t) \Rightarrow g_\varepsilon(t) \in \Lambda_{\frac{\overline{\mu}}{2}} \cap B(0,2M_0) \tag{3-3}$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $u \in V(R)$ (dependendo de ε) tal que, pela definição de ínfimo,

$$\gamma(R)+\varepsilon > E(u_\varepsilon).$$

Sabemos, pelo Lema 3.3 que a função

$$g_\varepsilon(t) := \lambda_{(1-t)\lambda_1+t\lambda_2}, \text{ para } t \in [0,1]$$

é um caminho em $\Gamma(R)$. Pelo Lema 3.2, a função $E(g_\varepsilon(t))$ na variável t assume seu máximo para $(1-t^*_\varepsilon)\lambda_1 + t^*_\varepsilon\lambda_2 = 1$, onde $t^*_\varepsilon \in (0,1)$.

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} E(g_\varepsilon(t)) \leq \gamma(R)+\varepsilon.$$

De onde se obtém facilmente que

$$\{t\in[0,1]\ \ |E(g_\varepsilon(t))\geq\gamma(R)\}\subset[t_\varepsilon^*-\alpha_\varepsilon, t_\varepsilon^*-\alpha_\varepsilon]$$

onde α_ε vai a zero quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Tome $\varepsilon\in(0,\frac{1}{4}\overline{\mu}R_0)$. Afirmo que

$$\eta(s,g_\varepsilon(t))\in\Gamma(R)$$

para cada s positivo fixado. De fato, como

$$\sup_{u\in A_{K_0}} E(u) < \frac{\gamma(R)}{2},$$

sabemos que

$$E(g_\varepsilon(0)) < \frac{\gamma(R)}{2}.$$

Logo,

$$|E(g_\varepsilon(0))-\gamma(R)| = \gamma(R)-E(g_\varepsilon(0))$$

o que é maior que

$$\frac{1}{2}\gamma(R)$$

ou ainda, tendo em vista que

$$\overline{\mu} < \frac{\gamma(R)}{4}$$

maior que $2\overline{\mu}$. Isto, combinado ao fato de $\eta(s,\lambda)=\lambda$ sempre que $|E(u)-\gamma(R)|\geq 2\overline{\mu}$ nos dá a primeira condição para $\eta(s,g_\varepsilon(t))\in\Gamma(R)$.

Para ver o porquê de $\eta(s,g_\varepsilon(1))$ ser negativo, basta notar que, sendo $E(g_\varepsilon(1))$ negativo, é menor que $\frac{\gamma(R)}{2}$. Além disso,

$$|E(g_\varepsilon(1))-\gamma(R)| = \gamma(R)-E(g_\varepsilon(1)) \geq \gamma(R) \geq 2\overline{\mu}.$$

Tendo tudo isto em mente, concluímos notando que se ocorresse, para algum s em $[0,s^*]$ e todo t em $[0,1]$, onde $s^*:=\frac{4\varepsilon}{\overline{\mu}}<R_0$, a seguinte desigualdade

$$E(\eta(s,g_\varepsilon(t))) < \gamma(R),$$

teríamos evidentemente uma contradição com a definição de $\gamma(R)$. Sendo assim, assuma que para todo $s \in [0,s^*]$ e todo $t \in [0,1]$ $E(\eta(s,g_\varepsilon(t))) \geq \gamma(R)$.Pela monotonicidade de $E(\eta)$ como função de uma variável real e pelo fato de $\eta(0,u) = u$, $\forall u \in \Sigma(R)$, isto que significa que

$$E(g_\varepsilon(t)) \geq E(\eta(s,g_\varepsilon(t))) \geq \gamma(R), \tag{3-4}$$

Logo, por 3-3

$$g_\varepsilon(t) \in \Lambda_{\overline{\mu}} \cap B(0,2M_0).$$

Sabemos também por 3-2 que, neste caso, $\eta(s,g_\varepsilon(t)) \in B(0,3M_0)$ e $dis(\eta(s,g_\varepsilon(t)),V(R)) < 2\overline{\mu}$. Ainda, 3-4 logo acima nos diz que, sendo $|E(g_\varepsilon(t)) - \gamma(R)|$ menor ou igual a $\frac{\overline{\mu}}{2}$, $|E(\eta(s,g_\varepsilon)) - \gamma(R)|$ também o será. Desse modo, obtêm-se que

$$\eta(s,g_\varepsilon(t)) \in \Lambda_{\overline{\mu}} \cap B(0,3M_0).$$

Em particular, pelas propriedades de η, podemos afirmar que

$$\frac{d}{ds}E(\eta(s,g_\varepsilon(t))) = \left\langle dE(\eta(s,g_\varepsilon(t))), -\frac{Y(\eta(s,g_\varepsilon(t)))}{Y(\eta(s,g_\varepsilon(t)))} \right\rangle.$$

Integrando, obtemos a contradição desejada. □

Provemos agora existência da geometria do Passo da Montanha para o funcional energia.

Teorema 3.6 *Seja $p \in (\frac{10}{3},6)$ e R um real positivo. O funcional energia E restrito à esfera possui uma geometria do tipo Passo da Montanha no nível $\gamma(R)$.*

*Prova.*Defina

$$\alpha_k := \sup_{u \in C_k} E(u)$$

onde

$$C_k := \{u \in \Sigma_R \mid \ \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = k\}$$

Pelas desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev (vide Apêndice, Teorema A.3)e Gagliardo-Nirenberg (vide Apêndice, Teorema A.16), prova-se facilmente que

$$E(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C' \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{3}{2}} \ e$$

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - C'' \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{3(p-2)}{4}} \cdot \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{6-p}{4}},$$

o que implica que

$$\lim_{k\to 0} \alpha_k = 0.$$

Seja a_n um sequência de números reais positivos convergindo para zero. Pela definição de limite lateral(à direita), para cada n fixado, existe δ_n, menor que l no Teorema 3.6, tal que $\alpha_k < a_n\ \forall k \in (0, \delta_n]$. Seja $\Gamma(R)$ definido para $K(R)$ menor que δ_n.
Suponha que $\gamma(R) = 0$. Pela demonstração do Lema 3.1, sabemos que

$$E(u) - \frac{2}{3(p-2)} Q(u) = \frac{3p-10}{6(p-2)} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{3p-8}{12(p-2)} D[u]$$

Pelo Lema 3.3, existe uma sequência $\{u_n\} \in V(R)$ tal que $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = 0$.

Sendo $\frac{3p-10}{6(p-2)}, \frac{3p-8}{12(p-2)} > 0$, isto implica

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \lim_{n\to\infty} D[u_n] = 0$$

No entanto, pela definição do funcional energia E, isto implicaria $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^P = 0$, contradizendo o Lema 3.1 item II). Suponha que $\gamma(R) > 0$. Pelo Lema 3.1 , para tal escolha de $K(R)$, a definição de $\Gamma(R)$ nos diz que $E(g(0))$ nunca é negativo. Logo, apenas precisamos mostrar que $\gamma(R)$ é estritamente maior que $E(g(0))$, para toda $g \in \Gamma(R)$. Suponha que este não seja o caso. Isto significa que

$$\gamma(R) \leq \sup_{g\in\Gamma(R)} E(g(0)).$$

Para todo k, por definição $\alpha_k \geq E(u)$, sempre que $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = k$. Em particular, para $k \in (0, \delta_n]$, $a_n \geq E(g(0))$, $\forall g \in \Gamma(R)$. Ou ainda, $a_n \geq \sup_{g\in\Gamma(R)} E(g(0)) \geq \gamma(R)$. Tomando $n \longrightarrow +\infty$, obtemos uma contradição. $\square$

No Teorema a seguir, todos os itens se encadeiam culminando no item 5), onde se afirma que o limite fraco u_0 da sequência de Palais-Smale acima obtida, é, de fato, solução fraca para o problema1-6.

Teorema 3.7 *Seja u_k uma sequência de Palais-Smale para o funcional energia restrito à esfera no nível $\gamma(R)$ e limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Nessas condições, existe uma sequência numérica t_k tal que, a menos de subsequência:*

***1)** $u_k \longrightarrow u_0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^3)$;*

***2)** $t_k \longrightarrow t_0$ em $\mathbb{R}$;*

***3)** $-\Delta u_k - t_k u_k + \left(|x|^{-1} \star |u_k|^2\right) u_k - |u_k|^{p-2} u_k \longrightarrow$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$;*

4) $-\Delta u_k - t_0 u_k + \left(|x|^{-1} \star |u_k|^2\right) u_k - |u_k|^{p-2} u_k \longrightarrow$ *em* $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$*;*

5) $-\Delta u_0 - t_0 u_0 + \left(|x|^{-1} \star |u_0|^2\right) u_0 - |u_0|^{p-2} u_0 = 0$ *em* $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Prova. Para provar **3)** (vide [7], Lema 3), lembre-se que

$$\Sigma_R := \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid \ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = R\}$$

e que

$$T_{u_k}\Sigma_R = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \ |(u, u_k)_2 = 0\}$$

onde $(\cdot,\cdot)_2$ indica o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^3)$. Considere a projeção ortogonal $\pi_{u_k} : H^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow T_{u_k}\Sigma_R$ dada por

$$\pi_{u_k} \cdot w = w - (u_k, w)_2 u_k.$$

Defina o operador linear $\overline{E'} : H^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\overline{E'}(u_k) \cdot w = E'(u_k) \cdot w - (u_k, w)_2 E'(u_k) \cdot u_k.$$

Um cálculo imediato nos mostra que, fixada arbitrariamente uma $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$ decomposta como

$$w = (w, u_k)_2 u_k + \pi_{u_k} \cdot w,$$

vale que

$$\overline{E'} \cdot w = E'(u_K) \cdot \pi_{u_k} \cdot w.$$

Isto significa que

$$\left|\overline{E'}(u_k) \cdot w\right| = \left|E'_{\Sigma_R}(u_k) \cdot (\pi_{u_k} \cdot w)\right|,$$

o que é menor que, ou igual a

$$\|E'_{\Sigma_R}(u_k)\| \cdot \|\pi_{u_k} \cdot w\|,$$

ou ainda, menor que, ou igual a

$$\|E'_{\Sigma_R}(u_k)\| \cdot (1 + \|u_k\|) \, \|w\|, \tag{3-5}$$

onde esta última desigualdade provém da imersão contínua de $H^1(\mathbb{R}^3)$ em $L^2(\mathbb{R}^3)$(vide Apêndice, Teorema A.9) e da definição de projeção ortogonal. Por outro lado, um cálculo simples mostra que, em particular para nosso problema

$$\overline{E'}(u_k)\cdot w = \int_{\mathbb{R}^3}\langle\nabla u_k,\nabla w\rangle dx + \int_{\mathbb{R}^3}(\varphi_k)_u u_k w dx - \int_{\mathbb{R}^3}|u_k|^{p-2}u_k w dx - \lambda_k\int_{\mathbb{R}^3}u_k w dx,$$

onde a sequência $\{\lambda_k\}$ é dada por

$$\frac{1}{\|u_k\|^2}\left\{\|\nabla u_k\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}(\varphi_k)_u|u|^2dx - \|u_k\|^p\right\}.$$

Logo, a desigualdade 3-5 encerra a demonstração. Ademais, 1) é consequência imediata do Teorema de **Banach-Alaoglu** (vide Apêndice, Teorema A.7), 2) se mostra simplesmente garantindo a limitação de $\{\lambda_k\}$ pelas desigualdades de **Hardy-Littlewood-Sobolev** (vide Apêndice, Teorema A.3) e **Gagliardo-Nirenberg** (vide Apêndice, Teorema A.16). 4) segue imediatamente de 3). A parte delicada na demonstração de 5) está na parcela $D[u]$.(vide [22], Lema 2.2) □

Observação 3.8 *Evidentemente, não há interesse em obter-se soluções nulas para nossa equação diferencial; eis então o propósito do lema a seguir. Tal lema, dada a premissa segundo a qual a sequência de Palais-Smile obtida neste texto é tal que $Q(u_k)\to 0$, nos permitirá concluir que a solução por nós obtida no teorema acima não é trivial. Para justificar tal premissa, basta tomar uma sequência $\{w_l\}_{l\geq 1}\in V(R)$ tal que $\|w_l-u_k\|\to dis(u_k,V(R))$ e utilizar o Teorema do Valor Médio, aliado ao fato de que $Q(w_l)=0$ e que $\lim_k dis(u_k,V(R))=0$, limite dado pelo 3.5, para concluir.*

Lema 3.9 *Seja $u_k\subset\Sigma_R$ uma sequência de Palais-Smale no nível positivo $\gamma(R)$ limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e tal que $Q(u_k)\longrightarrow 0$ quando $k\longrightarrow 0$. Nessas condições, à menos de subsequência e translação u_0, o limite fraco de u_k acima, não é nulo em $H^1(\mathbb{R}^3)$.*

*Prova.*Suponha visando redução ao absurdo que $u_0=0$ q.t.p. Sabemos pelas imersões compactas de Sobolev que $\forall t>0$ e $y\in\mathbb{R}^3$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B_t}|\varphi_k(\cdot+y)|^2dx = \int_{B_t}|0|^2dx = 0.$$

Isto equivale à afirmação de que **Vanishing** ocorre. Logo, pelo Lema 1.3 $u_k\longrightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^3)$ para $p\in(2,6)$. Verifica-se por um cálculo direto que as seguintes igualdades são válidas.

$$Q(u)=\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\frac{1}{4}D[u]-\frac{3(p-2)}{2p}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

e

$$E(u)-\frac{2}{3(p-2)}Q(u)=\frac{3p-10}{6(p-2)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\frac{3p-8}{12(p-2)}D[u]$$

De onde concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} E[\varphi_k] = 0 \neq \gamma(R)$$

produzindo o absurdo desejado. Assim, estamos feitos. $\square$

APÊNDICE A

Resultados Úteis

Neste apêndice enunciamos os resultados de Teoria da Medida e Análise Funcional

Teorema A.1 (Desigualdade de Hardy) *Suponha que $N \geq 3$. Prove que existe uma constante positiva C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \ \ \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Prova. Seja $u \in C_0^\infty$. Defina, para cada $x \in \mathbb{R}^N$

$$f(\lambda) := u^2(\lambda x)$$

Pela regra da cadeia

$$f^{'}(\lambda) = 2u(\lambda x)\nabla u(\lambda x) \cdot x$$

e ainda

$$\int_1^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) d\lambda = \lim_{t \to +\infty} f(t) - f(1) = -u^2(x)$$

$$\frac{u^2(x)}{|x|^2} = -2\lambda \int_1^{+\infty} \frac{u(\lambda x)}{|\lambda x|} \nabla u(\lambda x) \cdot \frac{x}{|x|} d\lambda$$

Ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx = -2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \int_1^{+\infty} \frac{u(\lambda x)}{|\lambda x|} \nabla u(\lambda x) \cdot \frac{x}{|x|} d\lambda dx$$

Pelo Teorema de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx = -2\lambda \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(\lambda x)}{|\lambda x|} \nabla u(\lambda x) \cdot \frac{x}{|x|} dx d\lambda$$

Que é menor ou igual a

$$2\lambda \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u(\lambda x)}{|\lambda x|} \nabla u(\lambda x) \cdot \frac{x}{|x|} \right| dx d\lambda.$$

ou ainda, por Cauchy-Schwarz

$$2\lambda \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(\lambda x)|}{|\lambda x|} |\nabla u(\lambda x)| \, dx d\lambda.$$

Por mudança de variáveis, isto é igual a

$$2\lambda \int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda^N} d\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|}{|y|} |\nabla u(y)| \, dy. \tag{A-1}$$

Defina, agora,

$$g(\lambda) := u(\lambda y).$$

Está claro que

$$g^{'}(\lambda) = \nabla u(\lambda y) \cdot y$$

De modo que, analogamente ao feito acima

$$\frac{|u(y)|}{|y|} \leq \int_1^{+\infty} |\nabla u(\lambda y)| d\lambda. \tag{A-2}$$

A-2 nos diz que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|}{|y|} |\nabla u(y)| \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_1^{+\infty} |\nabla u(\lambda y)| d\lambda \right) |\nabla u(y)| \, dy$$

que, por sua vez, é igual a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda^N} d\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(z)| dz \tag{A-3}$$

o que se demonstra por raciocínio análogo ao realizado acima, por Fubini, seguido da mudança de variáveis $\lambda y = z$ e concluído por independência de variáveis.

A-1 e A-3 nos dizem que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

onde a última desigualdade se demonstra por **Holder** A.11, tendo em vista que *supp* u é compacto.

Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ a demonstração está concluída.

□

Teorema A.2 *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leq p \leq +\infty$. *Defina a convolução* $f \star g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \, .$$

Nessas condições, afirmamos que:

1) $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

2) $\|f \star g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Prova. (vide [8], teorema 4.15) □

Teorema A.3 (Hardy-Littlewood-Sobolev) *Seja $p, r > 1$ e $0 < \lambda < n$ com $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{r} = 2$. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma constante $A(n, \lambda, p)$, independente de f e h, tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|x-y|^{-\lambda} h(y) dxdy \right| \leq A(n, \lambda, p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema A.4 *Para $p \in [1, +\infty)$, suponha que $\{f_n\}$ seja uma sequência em $\in L^p(X)$, $f \in L^p(X)$ e que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. Se $\lim_n \|f_n\|_{L^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)}$, então $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(X)$.*

Prova. (vide [20] teorema 1.17) □

Teorema A.5 *Seja $\{f_n\}$ em $\in L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$.*

Nessas condições, existe uma $h \in L^p(\Omega)$ tal que, à menos de subsequência, vale que

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p em* Ω;

b) $|f_n(x)| \leq h(x)$ $\forall n$, *q.t.p em* Ω.

Prova. (vide [8], teorema 4.9) □

Teorema A.6 (Multiplicadores de Lagrange) *Sejam E e ϕ funções reais e $H^1(\mathbb{R}^3)$ o espaço de Sobolev. Suponha que E possua mínimo local com respeito à*

$$\Sigma_R = \{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3) | \phi(\varphi) = 0\}, \text{ para algum } \varphi_0 \in \Sigma.$$

*Seja U uma vizinhança de φ_0 em Σ tal que $E, \phi \in C^1(U)$ e seja $\phi'(\varphi_0)$ um funcional linear sobrejetivo. Então existe uma constante real λ, chamada **Multiplicador de Lagrange**, tal que*

$$(E - \lambda\phi)'(\varphi) \equiv 0$$

Prova. (vide [14], teorema 7.8.2) □

Teorema A.7 (Banach-Alaoglu) *Seja X uma espaço de Banach reflexivo. Se uma sequência $\{x_k\}$ é limitada em X, então x_k converge fracamente, à menos de subsequência, para algum $x_0 \in X$.*

Prova. (vide [8], teorema 3.16) $\square$

Teorema A.8 (Teorema do Valor Médio) *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $f : X \mapsto Y$. Se para $a, b \in X$ dados a derivada de Gâteaux $f_G^{'}(a+t(b-a))$ na direção de $(b-a)$ existe para todo $t \in [0,1]$, então*

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \|f_G^{'}(a+t(b-a); b-a)\|_Y.$$

Além disso, se a derivada de Fréchet $f^{'}(a+t(b-a))$ existe para todo $t \in [0,1]$, então

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq \sup_{t\in[0,1]} \|f^{'}(a+t(b-a))\|_{L(X,Y)} \|b-a\|_X$$

Prova. (vide [14], teorema 3.2.6) $\square$

Teorema A.9 (Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Nessas condições vale a imersão compacta*

$$H^1(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$$

para cada $p \in [1,6)$.

Prova. (vide [15], teorema 5.7.1) $\square$

Teorema A.10 (Lax-Milgram) *Sejam H um espaço de Hilbert, $f : H \mapsto \mathbb{R}$ uma transformação linear contínua e $B : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ um funcional bilinear tal que para algum par de constantes α e β valem*

1. *para quaisquer $u, v \in H$*
$$|B[u,v]| \leq \alpha\|u\|\|v\|,$$

2. *para toda $u \in H$*
$$\beta\|u\|^2 \leq B[u,u]$$

Nessas condições, existe uma única $u_0 \in H$ tal que, para toda $v \in H$

$$B[u,v] = f \cdot v$$

Prova. (vide [8], corolário 5.8) □

Teorema A.11 (desigualdade de Hölder) *Sejam $p, q \in [1, +\infty]$ satisfazendo a relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nessas circunstâncias, para todas $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^3)$, vale que $uv \in L^1(\mathbb{R}^3)$*

$$\|uv\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}.$$

Prova. (vide [3], teorema 6.9) □

Teorema A.12 (fórmula de Green) *Se u, v são de classe $C^2(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u dS$$

onde $\eta(x)$ é o campo unitário normal à superfície $\partial\Omega$ no ponto x e $\frac{\partial v}{\partial \eta} := \langle \nabla v, \eta \rangle$.

Prova. (vide [15], Apêndice C, teorema 3) □

Teorema A.13 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $\{f_k\}$ uma sequência de funções integráveis convergindo em quase todo ponto para uma função real mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_k| \leq g$, $\forall k$, então f é integrável e*

$$\int f dx = \lim_k \int f_k dx$$

Prova. (vide [3], teorema 5.6) □

Teorema A.14 (Lema de Fatou) *Seja f_k uma sequência de funções integráveis não-negativas. Nessas condições sempre vale a desigualdade*

$$\int \liminf_k f_k dx \leq \liminf_k \int f_k dx$$

Prova. () (vide [3], teorema 4.8) □

Lema A.15 (Lema de Helly) *Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência uniformemente limitada de funções reais crescentes definidas em $[a, b]$. Existe uma sua subsequência convergindo pontualmente para uma função crescente $f_0 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.*

A.1 Desigualdades

Lema A.16 (Gagliardo-Nirenberg) *$\forall p \in [2,6]$;*

$$\| u \|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq G(\alpha) \| \nabla u \|^{\frac{3}{2}(p-2)}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| u \|^{\frac{6-p}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \;\; \forall u \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Lema A.17 *A seguinte desigualdade se verifica $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$*

$$E(\varphi) \geq \frac{1}{2} \| \nabla\varphi \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \frac{R^{\frac{1}{4}(6-p)} C C_{GN}(p)}{p} \| \nabla\varphi \|^{\frac{3}{2}(p-2)}_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Prova. Consequência imediata do Lema A.19 **Gagliardo-Nirenberg** acima. □

Lema A.18 (desigualdades) *As seguintes desigualdades se mostram verdadeiras $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$*

1) *Para $p \in [2,3]$, existe uma constante positiva K_p tal que, para toda $u \in H_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, temos*
$$\| u \|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K_p \| u \|^{6-2p}_{L^2(\mathbb{R}^3)} D[u]^{\frac{p-2}{2}} \| \nabla u \|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

2) *Para $p \in [3, \frac{10}{3}]$, existe uma constante positiva C_p tal que, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos*
$$\| u \|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_p \| u \|^{4p-12}_{L^2(\mathbb{R}^3)} D[u]^{\frac{10-3p}{2}} \| \nabla u \|^{3p-8}_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

3) *Para $p \in (3, \frac{10}{3})$, vale que, $\forall \varphi \in \Sigma_R$*

$$\|\varphi\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(p) C_{GN}(1)^{P-1} R^{\frac{p-1}{2}} \|\nabla\varphi\|^{2p-5}_{L^2(\mathbb{R}^3)} D[\varphi]^{\frac{4-p}{2}}$$

Prova. Sabemos que

1)
$$E(\varphi) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi|^2 dx - \frac{C}{p} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^p dx$$

Tendo em vista o A.16 acima, isto é maior ou igual a

$$\frac{1}{2} \| \nabla\varphi \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \frac{C C_{GN}(p)}{p} \frac{1}{2} \| \nabla u \|^{\frac{3}{2}(p-2)}_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\| \varphi \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{4}(6-p)}.$$

Ou ainda, maior ou igual a

$$\frac{1}{2} \| \nabla\varphi \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \frac{R^{\frac{1}{4}(6-p)} C C_{GN}(p)}{p} \| \nabla\varphi \|^{\frac{3}{2}(p-2)}_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\beta).$$

2) De acordo com o Lema 1.1 , fixada uma $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ qualquer, existe uma única $\varphi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, tal que $-\int_{\mathbb{R}^3}\langle \Delta\varphi_u, v\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^3}\langle \nabla\varphi_u, \nabla v\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 v dx$, $\forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Em particular, para $v = u$ *ou* $v = \varphi_u$.

Assim, $\forall a > 0$,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u - a\nabla\varphi_u|^2 dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx - 2a\int_{\mathbb{R}^3}\langle \nabla u, \nabla\varphi_u\rangle dx + a^2\int_{\mathbb{R}^3}\langle \nabla\varphi_u, \nabla\varphi_u\rangle dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx - 2a\int_{\mathbb{R}^3} u^3 dx + a^2\int_{\mathbb{R}^3} u^2\varphi_u dx.$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^3 dx \leq \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}^3} u^2\varphi_u dx$$

Derivando o segundo membro da desigualdade acima em relação a a, obtemos o ponto de mínimo global $a = \frac{2\sqrt{\pi}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{\sqrt{D[u]}}$. Substituindo este valor para a acima, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^3 dx \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{D[u]} \parallel \nabla u \parallel_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{A-4}$$

Desse modo, para $p \in [0,3]$,

$$\parallel u \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} u^p dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^{6-2p}u^{3p-6} dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u^2)^{3-p}(u^3)^{p-2} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx\right)^{3-p}\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^3 dx\right)^{p-2} dx \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx\right)^{3-p}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{D[u]} \parallel \nabla u \parallel_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{p-2}.$$

Onde a penúltima desigualdade provém da Desigualdade De Holder. Desse modo, (II) fica provado para $K_p = (\frac{1}{2\sqrt{\pi}})^{p-2}$.

1. Pelo A.18,

$$\parallel u \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} u^p dx = \int_{\mathbb{R}^3} (u^3)^{10-3p}(u^{\frac{10}{3}})^{3(p-3)} dx \leq$$

$$(\int_{\mathbb{R}^3} u^3 dx)^{10-3p}(\int_{\mathbb{R}^3} u^{\frac{10}{3}} dx)^{3(p-3)}.$$

Nos levando a (II), com $C_p = (\frac{1}{4\pi})^{\frac{10-3p}{2}} C_{GN}(\frac{2}{3})$.

$\square$

Lema A.19 *Seja* $p \in [\frac{8}{3}, \frac{10}{3}]$. *O funcional energia assume valores negativos na esfera se, e somente se, o operador* $T : H^1(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{R}$ *dado por*

$$T(\varphi) := \left(\frac{2}{3p-8}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{3p-8}{2}}\left(\frac{D[\varphi]}{10-3p}\right)^{\frac{10-3p}{2}} - \frac{2C}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi|^p dx$$

também o faz.

Prova. (vide [9], Lema 2.4) □

Lema A.20 *Para* $p \in (2,3) \cup (3, \frac{10}{3})$ *todo minimizante* u_0 *de* I_R *é tal que as seguintes relações são satisfeitas.*

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_0|^2 = (\frac{3}{4}p-2)\varepsilon_R - (\frac{5}{2}p-6)\eta_R$$

$$D[\varphi_0] = (5-\frac{3}{2}p)\varepsilon_R + (p-6)\eta_R$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_0|^p = \frac{1}{4}\varepsilon_R - \frac{3}{2}\eta_R$$

onde

$$\varepsilon_R = \frac{R\ell_R}{p-3} \text{ e } \eta_R = \frac{I_R}{3-p}$$

Prova. (vide [9], corolário 2.2) □

Referências Bibliográficas

[1] AZZOLLINI, A.; POMPONIO, A. **Ground state solutions for the nonlinear schrödinger–maxwell equations**. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 345(1):90–108, 2008.

[2] BADIALE, M.; SERRA, E. **Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach**. Springer Science & Business Media, 2010.

[3] BARTLE, R. G.; BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**, volume 27. Wiley Online Library, 1995.

[4] BELLAZZINI, J.; JEANJEAN, L.; LUO, T. **Existence and instability of standing waves with prescribed norm for a class of schrödinger–poisson equations**. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 107(2):303–339, 2013.

[5] BELLAZZINI, J.; SICILIANO, G. **Scaling properties of functionals and existence of constrained minimizers**. *Journal of Functional Analysis*, 261(9):2486–2507, 2011.

[6] BELLAZZINI, J.; SICILIANO, G. **Stable standing waves for a class of nonlinear schrödinger-poisson equations**. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 62(2):267–280, 2011.

[7] BERESTYCKI, H.; LIONS, P.-L. **Nonlinear scalar field equations, ii existence of infinitely many solutions**. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82(4):347–375, 1983.

[8] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer Science & Business Media, 2010.

[9] CATTO, I.; DOLBEAULT, J.; SÁNCHEZ, O.; SOLER, J. **Existence of steady states for the maxwell–schrödinger–poisson system: exploring the applicability of the concentration–compactness principle**. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(10):1915–1938, 2013.

[10] CATTO, I.; LIONS, P.-L. **Binding of atoms and stability of molecules in hartree and thomas-fermi type theories. part i: A necessary and sufficient condition for**

the stability of general molecular systems. *Communications in partial differential equations*, 17(7-8):1051–1110, 1992.

[11] Cocilte, G. **A multiplicity result for the nonlinear schrodinger-maxwell equations**. *Communications in Applied Analysis*, 7(2-3):417–424, 2003.

[12] D'Aprile, T.; Mugnai, D. **Solitary waves for nonlinear klein-gordon-maxwell and schrodinger-maxwell equations**. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh-A-Mathematics*, volume 134, p. 893–906. Edinburgh: The Society, 1974-, 2004.

[13] DÂ€™Avenia, P. **Non-radially symmetric solutions of nonlinear schrödinger equation coupled with maxwell equations**. *Advanced Nonlinear Studies*, 2(2):177–192, 2002.

[14] Drábek, P.; Milota, J. **Methods of nonlinear analysis: applications to differential equations**. Springer Science & Business Media, 2007.

[15] Evans, L. C. **Partial differential equations**. *Graduate studies in mathematics*, 19(2), 1998.

[16] Jeanjean, L.; Luo, T. **Sharp nonexistence results of prescribed l 2-norm solutions for some class of schrödinger–poisson and quasi-linear equations**. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 64(4):937–954, 2013.

[17] Lions, P.-L. **The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1.** In: *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 1, p. 109–145. Elsevier, 1984.

[18] Lions, P.-L. **The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2**. In: *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 1, p. 223–283. Elsevier, 1984.

[19] Ruiz, D. **The schrödinger–poisson equation under the effect of a nonlinear local term**. *Journal of Functional Analysis*, 237(2):655–674, 2006.

[20] Shkoller, S. **Mat201c lecture notes:introduction to sobolev spaces**. unpublished, 2011.

[21] Wang, Z.; Zhou, H.-S. **Positive solution for a nonlinear stationary schrödinger-poisson system in $\mathbb{R}^3$**. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 18(4):809, 2007.

[22] ZHAO, L.; ZHAO, F. **On the existence of solutions for the schrödinger–poisson equations**. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 346(1):155–169, 2008.