

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE LAJES DE CONCRETO ARMADO
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Enga. Mirtes Silva Bandeira
Orientador: Prof. Dr. Ademir Aparecido do Prado

Goiânia
2006

MIRTES SILVA BANDEIRA

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE LAJES DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Estruturas de concreto

Orientador: Prof. Dr. Ademir Aparecido do Prado

Goiânia
2006

AGRADECIMENTOS

Ao professor Ademir Aparecido do Prado pela confiança, respeito e orientação;

Ao professor Maurício M. Sales pelo incentivo;

Ao professor Daniel de Lima Araújo pelas valiosas sugestões;

Aos pesquisadores Carlos de Oliveira Campos e Eliene Ferreira Pires pelo empenho na realização dos estudos experimentais e pela acolhida simpática;

Aos professores, colegas mestrandos e funcionários do Curso de Mestrado em Engenharia Civil da UFG;

À amiga Eufrosina T. Leão Carvalho pela amizade e solidariedade;

À minha família pela compreensão e estímulo nas horas difíceis;

À Deus, por tudo!

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE GRÁFICOS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	xv
RESUMO	xviii
ABSTRACT	xix
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 Justificativa	2
1.2 Objetivos	3
1.3 Estrutura do trabalho	3
CAPÍTULO 2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE LAJES	4
2.1 Cálculo e análise tradicionais de estrutura	6
2.2 Comportamento das lajes	13
2.3 Classificação das lajes	16
2.4 Métodos de análise de lajes	17
2.4.1 Soluções analíticas	17
2.4.2 Técnicas numéricas	19
2.4.3 Analogias	20
2.4.3.1 Método das grelhas ou de Grashof	20
2.4.3.2 Método das faixas de Hillerborg	21
2.4.3.3 Analogia de grelhas	21
2.5 Comparação entre os comportamentos de uma placa, de uma	

	viga e uma grelha de vigas	22
2.5.1	Comparação entre os comportamentos da placa e da viga isolada	22
2.5.2	Comportamento de uma grelha (Analogia de grelha, propriamente dita)	29
2.5.2.1	Deslocamentos	30
2.5.2.2	Esforços	31
2.5.2.3	Deformações	33
2.6	Não linearidade física do concreto armado	37
2.6.1	Comportamento mecânico do concreto	38
2.6.2	Concreto na compressão	38
2.6.3	Concreto na tração	40
2.6.4	Concreto no cisalhamento	41
2.6.5	Mecanismos de ruptura do concreto	42
	CAPÍTULO 3 - MODELOS DE MATERIAIS E DE FRATURA PARA ESTRUTURA	
	DE CONCRETO ARMADO	51
3.1	Modelos de fraturamento do concreto simples	51
3.2	Processos de formação de fissuras no concreto	52
3.3	Modos de fraturamento e modelo de fissura fictícia (FF)	55
3.4	Fraturamento do concreto simples	57
3.4.1	Modelos de fissuração distribuída	59
3.4.2	Definição do comportamento do concreto simples na tração e na Compressão	63
3.4.3	Definição do comportamento do concreto no cisalhamento	67
3.4.4	Energia do fraturamento no concreto	68
3.4.5	Resistência do concreto à tração	68
3.5	Definição do comportamento do aço e do concreto armado	70
	CAPÍTULO 4 - ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES EM CONCRETO ARMADO	72
4.1	Apresentação das lajes modeladas	73
4.2	Apresentação dos resultados experimentais	76
4.2.1	Lajes de Campos (2000)	77

4.2.1.1	Influência da armadura de canto na face inferior	79
4.2.2	Lajes de Pires (2003)	80
4.3	Apresentação do programa das modelagens numéricas	81
4.3.1	Apresentação dos modelos numéricos	84
4.3.1.1	Modelos numéricos para as lajes de Campos (2000)	86
4.3.1.2	Modelos numéricos para as lajes de Pires (2003)	88
4.4	Apresentação dos resultados	89
4.4.1	Resultados preliminares com elementos de casca e modelo de fissuração rotativa	89
4.4.1.1	Avaliação da curva de comportamento carga x deslocamento	89
4.4.1.2	Parâmetros que alteram a tendência de comportamento da laje	95
4.5	Resultados do programa experimental	108
4.5.1	Análise das lajes de Campos (2000)	108
4.5.1.1	Laje L1 (laje de referência – espessura 8,1 cm)	108
4.5.1.1.1	Modelos com elementos de casca	108
4.5.1.1.2	Modelos com elementos sólidos	112
4.5.1.2	Laje L2	115
4.5.1.3	Laje L3a	118
4.5.1.4	Laje L4	120
4.5.2	Análise das lajes de Pires (2003)	122
4.5.2.1	Laje L1A	123
4.5.2.2	Laje L3A	126
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES		129
5.1	Quanto à resistência à tração do concreto	129
5.2	Quanto aos valores da energia do fraturamento e dos diagramas pós-pico do concreto à tração	129
5.3	Quanto ao aparecimento das primeiras fissuras numéricas	130
5.4	Quanto ao fator de retenção ao cisalhamento (β)	130
5.5	Quanto à influência da resistência máxima à compressão e da energia da fratura na compressão	131

5.6	Quanto à influência do coeficiente de Poisson aplicado ao Concreto	131
5.7	Quanto aos elementos de casca e sólidos	131
5.8	Quanto à posição dos apoios nos modelos com elementos sólidos	132
5.9	Quanto aos modelos adotados	132
CAPÍTULO 6 - SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS		133
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		134

LISTA DE TABELAS**CAPÍTULO 4**

Tabela 4.1 - Características do concreto, do aço e das lajes de Campos (2000)	77
Tabela 4.2 - Características do aço utilizado nas lajes de Campos (2000)	77
Tabela 4.3 - Comparação entre os valores estimados para as propriedades do concreto das lajes de Campos (2000)	79
Tabela 4.4 - Características do concreto, do aço e das lajes de Pires (2003)	81
Tabela 4.5 - Comparação entre os valores estimados para as propriedades do concreto das lajes de Pires (2003)	81

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

Figura 2.1 –	Casos de condições de contorno mais usuais (PINHEIRO, 2003)	11
Figura 2.2 –	Fases do comportamento das lajes subarmadas (PINHEIRO, 1983)	15
Figura 2.3 –	Grandezas e relações que definem o comportamento das placas esbeltas	23
Figura 2.4 –	Grandezas e equações fundamentais da laje de Kirchhoff	27
Figura 2.5 –	Campos de deslocamentos na laje e na grelha	30
Figura 2.6 –	Campos de esforços na laje e na grelha	32
Figura 2.7 –	Deformações na laje segundo cortes A, B e C	34
Figura 2.8 –	Deformação por flexão nas vigas com eixo paralelo a x	35
Figura 2.9 –	Momento na direção transversal de uma <i>faixa</i> de laje	36
Figura 2.10 –	Diagrama tensão x deformação um ensaio de compressão Uniaxial	39
Figura 2.11 –	Recomendações sobre a armadura de canto	46

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 –	Comportamento tensão x deformação da pasta de cimento, do concreto e do agregado, com a representação esquemática do concreto sob compressão uniaxial	54
Figura 3.2 –	Modos de fraturamento	55
Figura 3.3 –	Identificação de mecanismos no modo I de fraturamento	56
Figura 3.4 –	Modelo de fissura fictícia (MFF)	56
Figura 3.5 –	Janela do DIANA para escolher o modelo de fissuração	59
Figura 3.6 –	Janela do DIANA para o modelo de fissuração fixa não-ortogonal	61
Figura 3.7 –	Janela do DIANA para o modelo de fissuração fixa multidirecionais	62
Figura 3.8 –	Exemplo de relação constitutiva para os modelos <i>total</i>	

	<i>strain</i> , na compressão e na tração	64
Figura 3.9 –	Relações constitutivas apresentadas no programa DIANA	67
Figura 3.10 –	Influência da resistência à tração no início da fissuração do concreto	70

CAPÍTULO 4

Figura 4.1 –	Dimensões, detalhamento das armaduras e apoios das lajes ensaiadas por Campos (2000)	75
Figura 4.2 –	Dimensões, detalhamento das armaduras e apoios das lajes ensaiadas por Pires (2003)	75
Figura 4.3 –	Esquema de carregamento das lajes dos ensaios experimentais de Pires (2003)	76
Figura 4.4 –	Elementos de Casca, sólido e de armadura	84
Figura 4.5 –	Apresentação da modelagem com elemento de casca e sólido	86
Figura 4.6–	Apresentação da geometria para a modelagem com elemento de sólido, com apoio no fundo(a) e no meio(b)	87
Figura 4.7–	Apresentação da geometria para a modelagem com elemento de casca e de sólido, com apoio no fundo e no meio	88
Figura 4.8 –	Comportamento do concreto na flexão pura – Estádio III	92
Figura 4.9 –	Panorama das tensões desenvolvidas nas camadas de concreto(a) e na camada da armadura(b) no centro da laje com a carga aplicada de 80% do carregamento total	115

LISTA DE GRÁFICOS

CAPÍTULO 4

Gráfico 4.1 – Exemplo de curva carga x deslocamento	90
Gráfico 4.2 – Exemplo de curva carga x tensão no aço no meio da laje	91
Gráfico 4.3 – Curvas obtidas variando-se a resistência do concreto à tração	93
Gráfico 4.4 – Curvas obtidas variando-se a energia do fraturamento do concreto à tração	93
Gráfico 4.5 – Curvas obtidas variando-se a resistência do concreto à tração e a energia do fraturamento do concreto à tração, dentro do intervalo das curvas de comportamento limites máximo (A) e mínimo (B)	94
Gráfico 4.6 – Comportamento do concreto variando-se a energia do fraturamento do concreto à tração	94
Gráfico 4.7 – Comportamento do aço variando-se a energia do fraturamento do concreto à tração	95
Gráfico 4.8 – Apresentação das curvas de deslocamentos para a laje L3a de Campos, 2000	96
Gráfico 4.9 – Influência da variação do coeficiente de Poisson no deslocamento ao longo da linha central da laje, obtidos na análise linear	97
Gráfico 4.10 – Influência da variação do coeficiente de Poisson nos momentos fletores ao longo da linha central da laje, obtidos na análise linear	97
Gráfico 4.11 – Influência da variação do coeficiente de Poisson nos deslocamentos no meio da laje, obtidos na análise não-linear	98
Gráfico 4.12 – Influência da variação do coeficiente de Poisson nos deslocamentos no meio da laje, obtidos nas análises linear e não-linear	99
Gráfico 4.13 – Influência da variação do coeficiente de Poisson nos momentos fletores, no meio da laje, obtidos nas análises não-linear	99
Gráfico 4.14 – Comparação dos momentos fletores, no meio da laje, obtidos nas análises linear e não-linear, variando-se o coeficiente de Poisson	100

Gráfico 4.15 – Influência da variação do coeficiente de Poisson nos deslocamentos no meio da laje, obtidos na análise não-linear	101
Gráfico 4.16 – Influência da variação do coeficiente de Poisson, na distribuição de tensões normais de compressão no concreto, avaliada no elemento no meio da laje	101
Gráfico 4.17 – Influência da variação do coeficiente de Poisson na deformação do concreto, avaliada no meio da laje	102
Gráfico 4.18 – Influência da variação do coeficiente de Poisson aplicada no concreto, nas tensões na armadura, avaliada no meio da laje	102
Gráfico 4.19 – Influência da variação do coeficiente de Poisson aplicada no concreto, nas deformações da armadura no meio da laje	103
Gráfico 4.20 – Influência da variação da espessura nos deslocamentos no meio da laje, obtidos na análise não-linear	103
Gráfico 4.21 – Influência da posição da armadura positiva nos deslocamentos no meio da laje	104
Gráfico 4.22 – Influência da variação do módulo de elasticidade e da resistência do concreto à compressão	105
Gráfico 4.23 – Comparação entre os deslocamentos centrais dos modelos com elemento de casca e sólido com apoio no meio	106
Gráfico 4.24 – Comparação entre os deslocamentos centrais dos modelos com elemento sólido com apoio no fundo	106
Gráfico 4.25 – Comparação entre os deslocamentos dos modelos com elemento sólido, com apoio no meio e no fundo da laje	107
Gráfico 4.26 – Comparação entre os deslocamentos centrais nos modelos com elemento de casca e sólido, com apoio no meio e no fundo	107
Gráfico 4.27 – Curvas carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para o modelo completo e para os modelos sem armadura de canto na face inferior, na face superior e sem nenhuma armadura de canto	110
Gráfico 4.28 – Carga aplicada x tensão nas superfícies de concreto no meio da Laje	111
Gráfico 4.29 – Carga aplicada x (deformação- tensão) no aço, no meio da laje	111

Gráfico 4.30 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para os modelos com casca	112
Gráfico 4.31 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para os modelos com sólidos	113
Gráfico 4.32 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para os modelos com elemento sólido com apoio no meio e no fundo, $\beta=0,9$	114
Gráfico 4.33 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão, obtidos dos ensaios experimentais das lajes L1 e L2	116
Gráfico 4.34 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos com elementos de casca das lajes L1 e L2, com as mesmas propriedades do concreto à tração	116
Gráfico 4.35 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos com elementos de casca que apresentaram os melhores resultados para a laje L2	117
Gráfico 4.36 – Carga aplicada x tensão na armadura no meio da laje para o modelo com elemento de casca	117
Gráfico 4.37 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos com elemento de casca que apresentaram os melhores resultados para a laje L3a, com e sem armadura de canto nas faces inferior e superior; e sem nenhuma armadura de canto	118
Gráfico 4.38 – Carga aplicada x tensão na armadura principal, avaliada no meio da laje, para os modelos sem as armaduras de canto nas faces inferior e superior; e sem nenhuma armadura de canto	119
Gráfico 4.39 – Tensão na armadura x carga aplicada, avaliada em um elemento no meio da laje para o modelo com elemento de casca que apresentou o comportamento mais aproximado	120
Gráfico 4.40 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos com elementos de casca e sólido que apresentaram os melhores resultados para a laje L4	121
Gráfico 4.41 – Carga aplicada x tensão na armadura, avaliadas em um elemento no meio da laje para o modelo com elemento de casca que	

apresentou o comportamento mais aproximado	121
Gráfico 4.42 – Verificação da influência do número de passos de carga nas respostas aos carregamentos aplicados x deslocamentos no meio da laje	123
Gráfico 4.43 – Curvas de carregamento x deslocamentos para os modelos com elemento de casca, variando-se o tipo de carregamento	124
Gráfico 4.44 – Curvas de carregamento x deslocamentos aplicados para os modelos com elemento de casca variando-se a resistência do concreto à tração (valores em MPa)	125
Gráfico 4.45 – Curvas cargas x tensão no concreto no meio da laje, nos modelos com elemento de casca	125
Gráfico 4.46 – Curvas de cargas obtidas x deslocamentos aplicados, para os modelos com elemento sólido com apoio no meio e no fundo	126
Gráfico 4.47 – Cargas obtidas com a aplicação de deslocamentos nos modelos com elementos de casca e sólido, apoio no meio e no fundo	127
Gráfico 4.48 – Cargas x tensão no concreto nos modelos com elementos sólidos (com a aplicação de deslocamentos)	128
Gráfico 4.49 – Cargas x tensão no aço nos modelos com elementos sólidos (com a aplicação de deslocamentos)	128

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

A_s	- área total da seção transversal da armadura principal
b	- largura de uma seção retangular
d_{max}	- diâmetro máximo do agregado graúdo
CA	- ruptura ocorrida no concreto antigo da laje
D_f	- rigidez à flexão da placa
D_t	- rigidez à torção da placa
E_{ci}	- módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial do concreto
E_{cs}	- módulo de elasticidade secante do concreto
E_s	- módulo de elasticidade axial do aço
f_c	- resistência média do concreto à compressão (uniaxial)
f_{cb}	- resistência do concreto à compressão biaxial
f_{cj}	- resistência do concreto à compressão aos j dias
f_{cm}	- resistência média do concreto à compressão
f_{ct}	- resistência do concreto à tração (uniaxial)
f_{ctb}	- resistência média do concreto à tração biaxial
$f_{ct,f}$	- resistência do concreto à tração na flexão
$f_{ct,sp}$	- resistência do concreto à tração indireta
$f_{ct,k}$	- resistência característica do concreto à tração
F_{exp}	- força de pico obtida experimentalmente
F_{max}	- força de pico obtida numericamente
f_y	- resistência de escoamento da barra de aço
f_u	- resistência de ruptura da barra de aço
G	- módulo de elasticidade transversal de um elemento de viga
G_f	- energia da fratura do concreto sob tração

Gf_0	- energia da fratura do concreto sob tração relacionada ao tamanho máximo do agregado graúdo
h	- espessura constante de uma laje
I	- momento de inércia de uma viga com seção retangular
IA	- imbricamento dos agregados
MDFC	- modelo de fissura multidirecional fixa (<i>multi-directional fixed cracking</i>)
MFF	- modelo de fissura fictícia
M_r	- momento de fissuração
m_x, m_y	- momentos fletores na direção x e y da placa
m_{xy}	- momentos torsores na placa
NLF	- não linearidade física
$q(x, y)$	- carga distribuída aplicada
$Q_{ruptura}$	- carga de ruptura
Q_{parada}	- carga de parada do ensaio
Q	- esforço cortante
l	- vão genérico na laje
l_x e l_y	- lados paralelos às direções x e y, na placa
k, k_x e k_y	- fator de distribuição da carga aplicada, total e nas direções x e y
w	- abertura de fissura
x, y, z	- coordenadas de um ponto
X_x, X_y e X_{xy}	- curvaturas de flexões nas direções x, y e xy
ZPF	- zona de processamento da fratura

- α - fator que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta
- β - parâmetro de retenção do cisalhamento
- ΔA - área sob a curva do diagrama carga x deslocamentos obtidos com dados numéricos
- ΔA_{exp} - área sob a curva do diagrama carga x deslocamentos obtido com dados experimentais
- ε - deformação específica de escoamento do aço
- \varnothing - diâmetro da barra de aço
- ρ - taxa geométrica de armadura principal
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - tensões normais nas direções x, y e z
- τ_{xz} e τ_{yz} - tensões cisalhantes perpendiculares ao plano médio da placa
- τ_{xy} - tensões cisalhantes paralelas ao plano médio da placa
- ω - deslocamento transversal de um ponto da placa
- ν - coeficiente de Poisson
- θ_x e θ_y - rotações nas direções x e y no nó de uma viga

CEB – Comité Euro-International du Béton

FIP – Federation International du Béton

MEF – Método dos Elementos Finitos

NBR – Norma Brasileira Registrada

RILEM – Réunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, Systèmes de Constructions et Ouvrages

RESUMO

Neste trabalho foram realizadas simulações em lajes maciças e comparados os resultados com os obtidos das pesquisas experimentais de Campos (2000) e Pires (2003), realizadas em lajes de concreto armado levadas à ruína por flexão, para a investigação de reforço pela face superior.

Para a modelagem foi usada a versão 8.1.2 do DIANA e a investigação do comportamento das lajes foi feita através de análise não-linear, adotando-se para os modelos elementos de casca e sólido.

O comportamento das lajes foi analisado através dos deslocamentos centrais e abordou a influência do posicionamento das armaduras, dos apoios e dos parâmetros que definem o comportamento do concreto na fase de amolecimento, destacando-se a máxima resistência do concreto à tração.

Os resultados obtidos são indicativos do bom desempenho dos modelos numéricos aplicados e que, os programas que utilizam os conceitos da mecânica da fratura nas suas formulações, constituem-se em poderosa ferramenta para reduzir a quantidade de experimentos para o estudo de alguns fenômenos específicos, desde que se tenham resultados confiáveis do comportamento dos materiais empregados.

ABSTRACT

In this work was carried simulations in the slabs and compared results with those obtained in the experimental research of Campos (2000) and Pires (2003), held on the slabs reinforced concrete brought to the failure by bending for inquiry of strengthening using uper the surface.

For the modeling version 8.1.2 of DIANA was used and the inquiry of the behavior of the slabs was made through nonlinear analysis, adopting for the models elements of shell and solid.

The behavior of the slabs was analyzed through the displacements central and approached the influence of the positioning of the reinforcement, the supports and the parameters that define the behavior of the concrete in the softening phase, being distinguished it maximum resistance of the concrete in the tension.

The results are indicative of the good performance of the applied numerical models and that, the programs that use the concepts of the Fracture Mechanics in its formularizations, consist in powerful tool to reduce the amount of tests for the study of some specific phenomena, since that if they have resulted trustworthy of the behavior of the employed materials.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Bandeira, Mirtes Silva.

B214a Análise não-linear de lajes de concreto armado pelo método dos elementos finitos [manuscrito] / Mirtes Silva Bandeira. – 2006.
xix,132 f. : il., figs., tabs., grfs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Escola de Engenharia Civil, 2006.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Aparecido do Prado.

Bibliografia: f. 134-.

Inclui listas de figuras, tabelas, gráficos e de símbolos e de abreviaturas.

1. Lages de concreto armado 2. Lajes de concreto armado – Análise não-linear 3. Método dos elementos finitos (Engenharia de estruturas) I. Prado, Ademir Aparecido do II. Universidade Federal de Goiás. **Escola de Engenharia Civil** III. Título.

CDU: 624.073



Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás–UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a):	Mirtes Silva Bandeira		
CPF:		E-mail:	mirtesbandeira@gmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo Empregatício do autor	Servidor da UFG		
Agência de fomento:		Sigla:	
País:		UF:	
		CNPJ:	
Título:	ANÁLISE NÃO-LINEAR DE LAJES DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS		
Palavras-chave:	Lajes de concreto armado; análise não-linear; elementos finitos		
Título em outra língua:			
Palavras-chave em outra língua:			
Área de concentração:	Engenharia de Estruturas		
Data defesa:	27/09/2006		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Engenharia Civil da UFG		
Orientador:	Prof. Dr. Ademir Aparecido do Prado		
CPF:		E-mail:	Aprado@eec.ufg.br
Co-orientador:			
CPF:		E-mail:	

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?¹ total parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____

Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 27 / 09 / 08

Assinatura do(a) autor(a)

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A definição da forma estrutural ou do sistema estrutural envolve uma atividade iterativa com a localização dos pilares, o posicionamento das vigas e das lajes, levando-se em conta a compatibilização com o projeto arquitetônico. Desta forma, pode-se alterar a dimensão, a forma e o posicionamento dos elementos. Esses elementos, por sua vez, compõem os subsistemas estruturais, sendo as lajes, partes elementares dos subsistemas horizontais e são consideradas como um dos elementos mais comuns utilizados em estruturas de concreto armado.

Dentre os elementos estruturais, os mais deformáveis são as lajes, e, em consequência, a deformação de pisos, flechas excessivas e fissuração de alvenaria, acompanhadas ou não por fissuração dos próprios elementos estruturais, são os danos mais freqüentes causados nas edificações.

Pela sua simplicidade, em termos de geometria, carregamento e até mesmo pela sua composição típica: placas apoiadas verticalmente em vigas, pilares e/ou paredes, recebendo as cargas verticais atuantes e transmitindo-as para os apoios; um sistema de lajes pode ser considerado uma classe especial de estrutura. Muitos programas comerciais podem ser usados para modelar as lajes, porém, ainda não são munidos com as características peculiares do sistema de lajes e apresentam dificuldades de manuseio ao usuário comum.

Neste trabalho serão avaliados os principais parâmetros dos materiais e as características inerentes à modelagem de lajes maciças que possam influenciar na resposta numérica final da estrutura, utilizando para a análise, o programa comercial DIANA.

1.1 Justificativa

Os métodos de análise procuram determinar o comportamento dos vários sistemas e subsistemas estruturais. Os comportamentos obtidos ainda são aproximações: tanto mais próximas serão do comportamento real, quanto melhores forem os modelos matemáticos e físicos utilizados pelos métodos.

A maioria dos programas de análise estrutural e tabelas auxiliares fornecem flechas imediatas, calculadas sob a hipótese de comportamento elástico para o concreto armado, sem o efeito de fissuração e de deformação lenta. Mesmo os processos mais refinados de avaliação de deformações, apresentam desvios na avaliação das flechas em pisos usuais. O controle das deformações das lajes é feito através da escolha adequada da rigidez à flexão, das lajes e das vigas de apoio, associada às medidas construtivas, tais como a utilização de contra-flecha.

O desenvolvimento dos métodos numéricos permite a análise computacional de estruturas de concreto armado com a consideração das não-linearidades, porém, dentre os modelos físicos, aqueles que contemplam o comportamento não-linear das estruturas são de difícil implementação computacional, no entanto, levam aos melhores resultados. Como existem programas computacionais comerciais que possuem em suas bibliotecas vários destes modelos, pode-se fazer análises e definir quais destes modelos são mais adequados para a determinação dos esforços e deslocamentos nas estruturas, incluindo-se a verificação das fissuras e flechas que ocorrem nas lajes, sob baixas cargas de serviço, exigida pela norma brasileira.

O programa DIANA[®] (8.1.2 - release 02) foi utilizado nas análises por ter sido desenvolvido para a engenharia civil e nas suas aplicações padrões incluir, dentre outras, o concreto armado. Utiliza uma proposta de código baseada no método de elementos finitos e no método dos deslocamentos para análises estática linear e não-linear.

1.2 Objetivos

Simulações numéricas de lajes maciças de concreto armado, através do Método de elementos finitos que utilizam formulações da mecânica da fratura para modelar o comportamento do concreto na tração e na compressão. Serão analisados os deslocamentos, as tensões e as deformações das lajes, comparando-os com os resultados obtidos experimentalmente.

Estudar os efeitos dos parâmetros do material concreto que influenciam o comportamento das lajes de concreto armado.

Verificar a influência das armaduras de canto, dispostas nas faces superior e inferior, no comportamento das lajes maciças simplesmente apoiadas.

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho foi dividido em seis capítulos.

O capítulo 1 apresenta a introdução, os objetivos e as justificativas para a elaboração desta pesquisa.

No capítulo 2 são apresentados breves históricos da evolução dos sistemas construtivos dos pisos de edificações e do cálculo de estrutura; as considerações tradicionais para o cálculo das lajes; o comportamento, a classificação e os métodos analíticos usuais das lajes, com destaque para as principais causas que conferem ao concreto armado um comportamento não-linear.

O capítulo 3 apresenta uma abordagem sobre os modelos de materiais e de fratura para o concreto armado, e os conceitos da mecânica da fratura, para modelar o comportamento do concreto, tanto na tração quanto na compressão.

No capítulo 4 são apresentadas as lajes para a modelagem e os modelos dos elementos finitos, de análise e de propagação de fissuras que serão aplicados; e a análise dos principais parâmetros que influenciam a resposta do programa e dos resultados numéricos obtidos.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões.

No capítulo 6, algumas sugestões para a continuidade desta pesquisa.

CAPÍTULO 2

CONSIDERAÇÕES SOBRE LAJES

Pode-se dizer que o concreto, vastamente empregado para os mais diversos tipos de estrutura, é o fruto do trabalho de inúmeros homens, que durante milhares de anos, observaram a natureza e aperfeiçoaram materiais, técnicas, teorias e formas estruturais.

Até o século XIX os pisos das edificações eram executados, quase que exclusivamente, com a madeira, pela prática comum da sua extração e pela sua facilidade em trabalhar à flexão-compressão. Eram construídos com a sobreposição das peças, dispostas mais ou menos juntas, que trabalhavam de forma praticamente independentes, sendo apoiadas em paredes espessas, por intuição e por regras empíricas. Com a necessidade de vãos livres cada vez maiores, recorreu-se à disposição ordenada dessas peças de madeira, criando-se um sistema de vigas e vigotas, que, formando uma trama de madeira resultava numa solução mais econômica e reduzia o número de vigas de grandes seções, além da dificuldade de serem obtidas eram de difícil manejo. A partir de então, desenvolveu-se, além da arte dos encaixes e entalhes, o uso de elementos de conexão com capacidade de transmitir os esforços para o trabalho conjunto entre as peças. As peças de madeira passaram a ser dispostas em intervalos regulares e com isso, os pisos passaram a ser explorados, também, como obras de artesanato. As dimensões das peças eram determinadas por regras práticas e o cálculo da capacidade portante era em função do seu vão livre.

Desde que o homem começou a construir, necessitava de informações que lhe permitisse dimensionar os elementos estruturais com segurança. O processo de tentativa e erro gerou uma série de regras empíricas para a construção.

A idéia de se juntar barras metálicas à pedra ou à argamassa para aumentar a resistência às solicitações de serviços e vencer grandes vãos, remonta ao tempo dos romanos (300 a.C a 476 d.C) (KAEFER, 1998). Porém, até surgir o ferro laminado, a madeira foi o recurso mais imediato para a execução de estruturas de piso. A partir dos resultados alcançados com a inclusão de barras de aço retorcidas no concreto, começou-se a construir estruturas mais arrojadas. Até então, o principal uso do concreto armado se dava em fundações e pisos arqueados, suportados por vigas “I” metálicas. Até o final do século XIX os avanços da teoria e da prática da construção de estruturas de concreto armado foram muito lentos.

Durante muitos anos a “função estrutura” se confundiu com a “função vedação” e a maior utilização do concreto era para as lajes e reforços estruturais localizados, visando aumentar a resistência dos blocos de alvenaria e conseqüentemente, reduzir a espessura das paredes.

Animado pela sua experiência com a fabricação de vasos para jardins, Monier conseguiu chegar ao concreto armado, em termos de materiais a serem empregados, tal como hoje o entendemos, executando peças estruturais sem ter qualquer base científica, aplicando métodos puramente empíricos. Em 1877 o norte americano Thaddeus Hyatt, obtém a patente para um sistema de execução de vigas de concreto e aço, sugerindo o uso de estribos e barras dobradas e, em 1880, Hannebique, na França, constrói a primeira laje armada com barras de aços de seção circular. As primeiras normas para o cálculo e construção em concreto armado foram baseadas na teoria, cientificamente consistente e comprovada experimentalmente, elaborada e publicada por E. Mörsch, em 1902 (SÜSSEKIND, 1979). Também em 1902, Ernest L. Ransome (Estados Unidos), patenteou um sistema no qual o piso, constituído por vigas “T”, combinado com colunas formando um pórtico de concreto armado, o que viria a dominar a construção de fábricas e depósitos. A partir da estrutura de concreto armado, executada com o sistema de Ransome, passou-se a utilizar lajes planas e a verticalização dos edifícios.

A independência do sistema estrutural da função de vedação modificou completamente a maneira de se construir, desde o projeto até a execução. Esta revolução na estrutura trouxe, como vantagens, a possibilidade de grandes vãos e de edifícios mais altos, além do que os modelos matemáticos são mais simples e com maior precisão, do que os modelos para a alvenaria. Em desvantagem, as partes horizontais ficaram mais pesadas e houve aumento progressivo das patologias nos edifícios (CEOTTO, 2005). Com a enorme expansão do uso do concreto armado aumentaram também os acidentes e falhas, cujas causas mais freqüentes eram divididas entre projeto inadequado, emprego de materiais de baixa qualidade e falhas de execução. Tendo em vista esta situação, organizações profissionais e agências governamentais movimentaram-se para organizar a extraordinária variedade de teorias, fórmulas e práticas empregadas.

Atualmente, o grande desafio da tecnologia de concreto parece ser aumentar a durabilidade das estruturas, recuperar estruturas danificadas e entender o complexo mecanismo químico e mecânico dos cimentos e concretos. Para isto, nova geração de concretos está sendo desenvolvida. Paralelamente, para adaptar-se aos novos e desafiadores usos, métodos tradicionais de execução e de cálculo de estruturas estão sendo revistos, e as teorias não-lineares e da mecânica do fratura estão sendo desenvolvidas.

2.1 Cálculo e análise tradicionais de estrutura

Tradicionalmente, ao se calcular uma estrutura de concreto armado, primeiramente são determinadas as cargas características, as reações e os esforços solicitantes. São feitos o estudo das ações que, segundo Pinheiro (2003), são as causas que provocam esforços ou deformações nas estruturas e, na prática, todos os esforços e deformações impostos pelas ações também são considerados como se fossem as próprias ações, incluindo as cargas e solicitações em função da sua

construção. Os esforços são chamados de ações diretas e as deformações, ações indiretas.

As cargas são usualmente divididas em dois grupos: cargas permanentes e cargas variáveis ou acidentais. As cargas permanentes são constituídas pelo peso próprio da estrutura e pelos pesos de todos os elementos fixos e instalações permanentes. Como exemplos, as cargas de materiais como o concreto simples ou armado, alvenaria de tijolos, argamassas, etc. As cargas variáveis são aquelas que podem atuar sobre as estruturas em função da sua utilização ou não, devidas às pessoas, aos móveis, equipamentos e veículos, etc; e dos seus efeitos (frenagem, impacto, empuxos de água, vento etc).

A determinação das reações e dos esforços solicitantes pode ser feita através da análise de cada peça, separada da estrutura. Assim, analisam-se, individualmente, lajes, vigas e pilares, supondo-se que as lajes estão apoiadas nas vigas (ou diretamente nos pilares); as vigas se apóiam nos pilares e os pilares são considerados indeformáveis na direção vertical. É procedimento habitual considerar as lajes como painéis isolados, independentes dos painéis adjacentes. O cálculo de um elemento ou de uma peça de concreto armado, seja uma viga, uma laje, etc, consiste em determinar os seus esforços internos (deslocamentos e deformações), atendendo-se à exigência dos estados limites último (ruína) e de serviço (verificação do seu deslocamento) e, dispor, convenientemente, a armadura. O dimensionamento do concreto armado, portanto, consiste em dimensionar uma seção de concreto que resista às tensões de compressão e uma seção de aço que resista às tensões de tração; e que ambos, concreto e aço, trabalhem solidariamente (CARVALHO, 2003).

Os esforços internos (também chamados de esforços solicitantes) que estão presentes, em cada ponto da estrutura são: esforço normal, esforço cortante ou esforço de cisalhamento, momento fletor e momento torsor.

As hipóteses simplificadoras empregadas para o cálculo e dimensionamento usuais são:

- O material é elástico, isotrópico, linear e tem pequenos deslocamentos;
- As lajes são apoiadas nas vigas (apoio simples);
- As vigas de apoio são indeslocáveis na direção vertical;
- As reações das lajes nas vigas são uniformemente distribuídas;
- As seções transversais, planas antes do carregamento, permanecem planas até a ruptura (há uma distribuição linear das deformações na seção);
- A deformação em cada barra de aço é a mesma do concreto em sua volta (há uma perfeita aderência entre o aço e o concreto não fissurado);
- O encurtamento máximo de ruptura do concreto, ou seja, a deformação limite, nas seção não inteiramente comprimidas, pode chegar até 0,35% (baseado nos trabalhos de Rüschi);
- O alongamento máximo permitido para a armadura de tração é de 1,0%;
- Aplicação de coeficientes de minoração nas características dos materiais envolvidos e majoração dos esforços.

Com estas hipóteses, as placas isoladas, vigas e pilares, têm soluções já conhecidas para os carregamentos usuais, através das teorias elásticas, mas, partindo-se do princípio de que: “se um corpo está em equilíbrio, qualquer parte desse corpo também está em equilíbrio”, usa-se um método direto de obtenção das solicitações, com a aplicação de equações de equilíbrio a segmentos da estrutura. Na prática, o dimensionamento acontece na situação em que, pelo menos um dos materiais – o aço ou o concreto – atinge o seu limite de deformação (domínios de deformação na ruína) e se baseia em formulações simplificadas para o cálculo manual, sendo: as equações de equilíbrio, entre as resultantes das tensões de compressão no concreto e das tensões de tração na armadura aplicadas nos seus centros de gravidade (considerando a

ausência de forças normais externas), e as equações de compatibilidade entre as deformações do concreto e do aço.

As distribuições possíveis de deformação na seção transversal de uma peça submetida à flexão, são usualmente apresentadas em forma de diagrama, denominado de diagrama de domínios de estado limite último de uma seção transversal (NBR 6118:2003) ou domínios de deformação na ruína (PINHEIRO, 2003) – nestas situações há a ruína por deformação plástica excessiva do aço ou a ruína por ruptura do concreto na flexão. O estado limite último é caracterizado quando a distribuição da deformação pertence a um dos domínios definidos no diagrama (NBR 6118:2003). Busca-se, com isto, que o concreto e o aço desenvolvam ao máximo suas capacidades resistentes, resultando em um dimensionamento seguro e econômico.

O cálculo tradicional das lajes é feito, também de maneira simplificada. Inicialmente, separam-se as lajes, admitindo-se, para cada uma delas, as seguintes condições de apoio:

- Apoio simples, quando não existir laje vizinha a este apoio;
- Apoio engastado, quando existir laje vizinha, no mesmo nível, permitindo, assim, a continuidade da armadura negativa de flexão de uma laje para a outra;
- Vigas rígidas de apoio da laje.

Para o esquema de cálculo, as lajes são subdivididas em faixas unitárias isoladas e cada uma dessas faixas tem, aparentemente, o comportamento de uma viga. Interessam, particularmente, os momentos fletores máximos nos vãos e sobre os apoios, quando engastadas. A solução para a continuidade entre as lajes vizinhas é dada adotando-se um momento fletor de compatibilização sobre os apoios comuns das lajes. Para que as faces, superior e inferior, mantenham-se paralelas, considera-se um momento fletor vM , na direção ortogonal à direção analisada (em geral $v=0,2$). Portanto, num mesmo ponto, tem-se dois momentos fletores, perpendiculares entre si. O dimensionamento é feito considerando como uma seção retangular de largura

unitária (usualmente $b = 100\text{cm}$) e com a altura igual à espessura (constante) da laje h . A armadura de flexão é distribuída na largura de 100 cm para cada um dos momentos fletores. Normalmente, a flexão conduz a um dimensionamento da laje como peça subarmada, ou seja, a seção tem grande área de concreto e pouco aço, e, com isto, o aço trabalha no limite de sua resistência, enquanto o concreto apresenta deformações abaixo de 0,35%, na fibra mais comprimida. Teoricamente, as lajes são dimensionadas no domínio 2 e entram em colapso através de deformações excessivas da armadura.

Em vez de empregar, diretamente, as equações de equilíbrio e de compatibilidade para o cálculo das peças, costuma-se trabalhar com as tabelas de dimensionamento, elaboradas a partir destas equações. Estas tabelas são montadas em função dos valores de ocorrência para as deformações máximas no concreto e no aço; e em função das resistências características do concreto adotado e do aço escolhido. Para as lajes, as tabelas fornecem os momentos máximos para alguns casos usuais de lajes maciças, em função dos seguintes parâmetros:

- Tipo de carga (por exemplo: uniformemente distribuída por unidade de área);
- Condições de apoio da laje;
- Relação entre os lados.

Considerando os tipos usuais de lajes dos edifícios, as tabelas combinam os tipos de apoio onde cada uma, das quatro bordas da laje, pode ser uma borda simplesmente apoiada ou perfeitamente engastada, apresentando os casos de condições de contorno mais usuais (figura 2.1).

Estas simplificações levam às incertezas quanto aos valores dos esforços solicitantes e a análise linear pode não indicar a posição correta dos esforços máximos, com dimensionamento exagerado das seções das peças ou chegando a resultados inferiores aos que ocorrem quando a estrutura está em serviço. O uso de processos de cálculo que permitem considerar a perda de resistência de um elemento estrutural depois de fissurado (análise não-linear) e ainda, a consideração do pavimento como um

todo, em princípio, permitem melhorar as simplificações usuais da seguinte forma (CARVALHO,1994):

- A resolução do pavimento de forma integrada permite considerar, na capacidade de rotação de uma laje, a rigidez das lajes vizinhas;
- As vigas podem ser consideradas como elementos deformáveis verticalmente;
- A consideração da interação entre as rigidezes da laje maciça e da viga, nos pontos de apoio;
- Consideração de cargas não uniformemente distribuídas, como cargas de parede.

Caso	Vinculação	Caso	Vinculação	Caso	Vinculação
1		2A		2B	
<i>Quatro bordas simplesmente apoiadas</i>		<i>Uma borda menor engastada</i>		<i>Uma borda maior engastada</i>	
3		4A		4B	
<i>Duas bordas adjacentes engastadas</i>		<i>Duas bordas menores engastadas</i>		<i>Duas bordas maiores engastadas</i>	
5A		5B		6	
<i>Uma borda maior apoiada</i>		<i>Uma borda menor apoiada</i>		<i>Quatro bordas engastadas</i>	

Figura 2.1 – Casos de condições de contorno mais usuais (PINHEIRO, 2003)

Estes melhoramentos conduzem à necessidade de criar modelos mais sofisticados, com cálculos mais precisos e que traduzam melhor o comportamento da estrutura. A definição da estrutura deve ser entendida, então, como um processo iterativo, onde os esforços e deslocamentos obtidos são analisados e re-introduzidos no procedimento de cálculo e dimensionamento.

A equação de Lagrange, considerada como a equação fundamental que governa o comportamento das placas elásticas delgadas, na sua forma diferencial, já era conhecida há muito tempo (CARVALHO, 1994):

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} - \frac{q(x, y)}{D_f} = 0 \quad (2.1)$$

sendo:

ω - deslocamento transversal de um ponto da placa;

x e y - coordenadas de um ponto da placa;

$q(x, y)$ - carga distribuída aplicada;

D_f - Rigidez à flexão da placa, dada pela expressão:

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.2)$$

Sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson

A solução analítica desta equação, para a maioria dos casos práticos, só foi conseguida a partir de procedimentos baseados em séries trigonométricas: solução de Navier ou solução de Levy. Pode-se, também, obter soluções numéricas com a sua implementação em programas computacionais.

Com uso do computador o cálculo estrutural foi se sofisticando, permitindo estudar, de uma só vez, trechos maiores da estrutura e fazer a análise matricial, com

resolução de treliças, grelhas, pórticos além de elementos bi e tridimensionais. A teoria clássica de placa passou a fornecer indicativos para o pré-dimensionamento e uma análise inicial do comportamento da estrutura (CARVALHO, 1994).

2.2 Comportamento das lajes

Na definição de uma estrutura são feitas algumas considerações para obter uma estrutura econômica, segura e de execução simples. Para confirmar se a opção é adequada, em termos de esforços e deslocamentos, emprega-se um modelo de cálculo para simular o comportamento que a estrutura terá depois de executada. Segundo a NBR 6118:2003, o modelo de cálculo deve permitir representar, de maneira clara, todos os caminhos percorridos pelas ações até os apoios da estrutura, permitindo também, representar a resposta não-linear dos materiais.

Com a análise estrutural espera-se obter uma expressão matemática mais realista do comportamento da estrutura, determinando os efeitos das ações, com a finalidade de efetuar as verificações de estados limites últimos e de serviço (NBR 6118:2003).

São adotados conceitos físicos para a criação dos modelos estruturais que farão a simulação. Esses conceitos possibilitam obter além desta aproximação para o comportamento real da estrutura, a utilização prática dos resultados obtidos, que poderão ser aceitáveis se estiverem sempre do lado da segurança e da economia. Por isso, é importante que as técnicas simplificadoras utilizadas nos modelos sejam de fácil aplicação e possam ser empregadas na maioria dos casos práticos existentes.

Para a criação desse modelo, é essencial a compreensão de como a estrutura funciona, com todos os seus elementos trabalhando em conjunto, mesmo que a análise de cada elemento seja feita isoladamente e ainda, as principais condições que influenciam cada resposta.

As lajes, quando submetidas à flexão, podem atingir a ruína ou por esmagamento do concreto na compressão ou pelo escoamento da armadura de tração. No caso da ruína ser provocada pelo escoamento da armadura de tração, as seções são denominadas sub-armadas, sendo as fissuras excessivas no concreto e os grandes deslocamentos são indicativos visíveis da possibilidade de ruína. No caso da ruína ser provocada somente pelo esmagamento do concreto, as seções são ditas super-armadas, e não apresentam sintomas visíveis de ruína iminente.

Nas lajes subarmadas e normalmente armadas calculadas e executadas de acordo com as normas vigentes, quando ensaiadas à flexão até a ruptura, verifica-se que rompem com escoamento e ruptura da armadura de tração, não sendo observado nenhum sinal de esmagamento do concreto. As primeiras fissuras surgem com carregamentos pouco superiores às cargas de projeto.

As lajes subarmadas, quando carregadas, comportam-se conforme demonstrado na figura 2.2. O diagrama esquemático representa o comportamento de uma seção de concreto armado, submetida à flexão simples, onde pode ser observado que o comportamento da laje é dependente do nível de carregamento. Sob a ação de pequenos carregamentos, no trecho inicial OA há uma relação linear entre a carga aplicada e o deslocamento, podendo-se afirmar que a laje encontra-se no regime elástico, onde o concreto resiste à tração e, para o seu comportamento, aplica-se a teoria das placas em regime elástico.

Na medida em que o carregamento é aumentado, a resistência do concreto à tração é ultrapassada e todo o esforço à tração passa a ser resistido pela armadura. Inicia-se a fase de fissuração e os momentos fletores, nas seções não fissuradas, crescem rapidamente, gerando novas fissuras. A armadura permanece em regime elástico-linear e o concreto ainda se comporta de acordo com a teoria das placas em regime elástico (trecho AB), porém deve ser considerada a variação do comportamento do material concreto, alterando (reduzindo) o valor da rigidez das seções fissuradas.

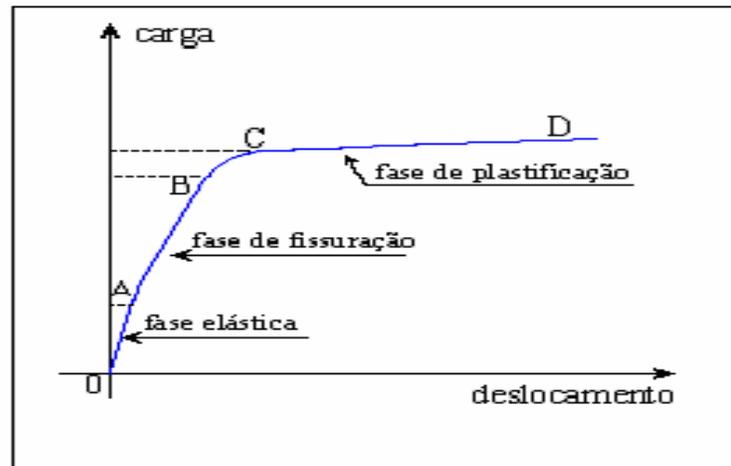


Figura 2.2 – Fases do comportamento das lajes Subarmadas (PINHEIRO, 1983)

Na região BC, já não há a proporcionalidade entre a carga aplicada e os deslocamentos. O acréscimo de deslocamentos é mais acentuado do que o de carregamento e pode-se dizer que a armadura ultrapassa o regime elástico linear, sendo considerada a fase elasto-plástica. Finalmente, após esta fase elasto-plástica (trecho CD), observa-se o escoamento do aço ou, menos usual, a plastificação do concreto e, havendo uma variação sensível de rigidez no trecho, as deformações crescem sob carga praticamente constante (fase plástica). Pode-se dizer que até o início da fase plástica as deformações são muito pequenas e a forma do elemento resulta muito próxima da inicial. A fase de plastificação é gerada pelo crescimento dos momentos fletores nas seções solicitadas e pelo início do escoamento da armadura. Nesta fase há uma redistribuição de esforços bem acentuada e nas seções plastificadas, os momentos fletores permanecem praticamente constantes. Na região próxima a estas seções, as deformações tornam-se maiores (CARVALHO, 1994).

A partir da plastificação das seções, as linhas de ruptura completam o seu desenvolvimento e o concreto rompe por compressão nas seções mais solicitadas. A carga máxima aplicada é chamada de carga de ruína e as linhas de plastificação formadas definem uma configuração denominada configuração de ruína.

2.3 Classificação das lajes

As lajes podem se classificar sob diversos pontos de vistas, como o tipo de apoio, o material constituinte, o processo de fabricação, o modo de flexão dominante, o comportamento estrutural, etc.

A NBR 6118:2003 refere-se a apenas quatro tipos de lajes:

- Lajes maciças – uma placa maciça de concreto armado
- Lajes nervuradas – moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, sendo que entre as nervuras deve ser preenchido com material inerte. As nervuras podem ser uni ou bidirecionais, sendo que estas últimas podem ser calculadas como lajes maciças;
- Lajes lisas e lajes cogumelo – são lajes apoiadas diretamente nos pilares, sem capitéis e com capitéis, respectivamente. Os capitéis, na verdade, são uns “espessamentos” da laje, junto aos pilares de apoio.

Sob o ponto de vista do comportamento estrutural, os fatores de influência mais importantes são: os tipos de apoios e de carregamento (as condições de fronteira); a relação entre os vãos, que condiciona a direção da flexão dominante; o comportamento do material do qual é constituída a laje; e a relação da espessura da laje com o menor dos seus vãos. A relação da espessura com o menor vão classifica as lajes quanto a sua espessura e condiciona o tipo de modelo de análise ou a teoria mais apropriada para a sua análise. As lajes também podem ser classificadas como:

- Placas espessas, definidas pela NBR 6118:2003, quando apresentam espessura maior que $1/3$ do menor vão;
- Placas moderadamente espessas são as que apresentam espessura menor do $1/5$ do menor vão e ainda, com os deslocamentos transversais máximos, menores do que $1/5$ da espessura da laje (BARES,1981 apud LEITÃO et al, 2001);
- Placas delgadas, quando os deslocamentos transversais são muito menores do que a espessura da placa.

- Placas muito delgadas, quando os deslocamentos transversais são grandes em relação à espessura, porém pequenos em relação às outras dimensões da laje. São estudadas pela teoria de Von Kármán (DUARTE, 2004).
- Membranas, segundo Duarte (2004) são “placas muito delgadas, sem rigidez à flexão, suportando o carregamento apenas com os esforços axiais, considerados distribuídos ao longo da espessura”.

2.4 Métodos de análise de lajes

2.4.1 Soluções analíticas

Placas moderadamente espessas são estudadas, analiticamente, pela Teoria das Placas de Reissner-Mindlin, enquanto que as placas delgadas (ou lajes finas) são estudadas pela Teoria de Kirchhoff-Love (ou Teoria elástica linear de lajes delgadas).

São raras as lajes das estruturas de concreto usuais que não verificam a relação espessura/menor vão para se classificarem como placas delgadas e, por isso, o comportamento da maioria das análises estruturais destes pavimentos de concreto pode ser definido por uma abordagem analítica. A abordagem analítica adota simplificações teóricas para tornar os problemas complexos tratáveis e, se possível, adota uma solução exata para o problema. Porém, esta solução é limitada para alguns formatos simples de geometria de lajes, de carregamentos e de condições de contorno. Quando estas condições se tornam mais complexas, a análise torna-se muito difícil, até mesmo impraticável (COELHO; LORIGGIO, 2000b). A precisão da solução analítica depende da precisão e eficácia das hipóteses simplificadoras aplicadas ao modelo matemático, que nem sempre ocorrem em condições reais.

A Teoria de Kirchhoff-Love, para as placas delgadas, é análoga à de Euler-Bernoulli para as vigas, enquanto a Teoria de Reissner-Mindlin, para as placas

moderadamente espessas, é análoga à teoria de Timosshenko para vigas. As teorias lineares de barras podem ser brevemente resumidas: a Teoria de Euler-Bernoulli é baseada na restrição cinemática de que as seções transversais, perpendiculares ao eixo da barra, antes da flexão, continuam planas, indeformadas e perpendiculares ao eixo, após a flexão. A Teoria da viga de Timosshenko é, na verdade, uma generalização da teoria de Euler-Bernoulli, com a consideração da deformação por esforço cortante. A inclusão da deformação por cisalhamento elimina a restrição de perpendicularidade da seção transversal ao eixo da viga: as seções permanecerão planas, porém não necessariamente perpendiculares ao eixo da viga fletida. Esta teoria é aplicável à análise de vigas consideradas curtas, cujo comprimento é menor do que 5 vezes a sua altura.

Ambas as teorias para as placas baseiam-se em simplificações da teoria da elasticidade, tendo em vista os seguintes pressupostos, considerados nas suas deduções, e também chamados de hipóteses simplificadoras:

- O material da placa é homogêneo e com comportamento linear elástico;
- A placa é inicialmente plana;
- A espessura da placa é constante e pequena, comparada às suas outras dimensões;
- Os deslocamentos transversais são pequenos em relação à espessura da placa;
- Não há deformações no plano médio da placa, ele é uma superfície neutra, onde as tensões normais (σ_x , σ_y , σ_z) são desprezíveis; os pontos nesta superfície só se movimentam na vertical e σ_z é desprezada na determinação das deformações nas direções x e y;
- A Teoria de Kirchhoff-Love despreza os efeitos das tensões cisalhantes perpendiculares às seções transversais (τ_{xz} e τ_{yz}), considerando apenas as tensões paralelas ao plano médio (τ_{xy}): esta simplificação leva as seções transversais a permanecerem planas e

perpendiculares à superfície neutra após as deformações (não há distorções (rotações)); enquanto a Teoria de Reissner-Mindlin os efeitos das tensões cisalhantes τ_{xz} e τ_{yz} não são desprezados, sendo estas tensões cisalhantes consideradas perpendiculares ao plano médio e uniformemente distribuídas ao longo da espessura (constantes); estas considerações levam as seções a permanecerem planas, mas não necessariamente perpendiculares à superfície neutra, após as deformações.

A partir destas simplificações, pode ser observado que não há nenhum impedimento quanto à utilização da teoria para as placas moderadamente espessas no estudo das placas esbeltas.

Segundo Leitão e Castro (2001), para os casos mais gerais, nos quais se incluem quase todos os casos em que se pretende analisar dois ou mais painéis de laje, simultaneamente, não é possível encontrar soluções analíticas, nem mesmo na forma de série. Quando as soluções analíticas não são possíveis, empregam-se métodos numéricos ou analogias para tais soluções.

2.4.2 Técnicas numéricas

As técnicas numéricas estão se destacando na solução de problemas de cálculo de lajes de piso de edifícios. Pela complexidade matemática ou a formulação iterativa, para simular algumas condições de maneira mais realista, esta técnicas estão sendo amparadas pelo avanço dos equipamentos computacionais e dos programas de análise estrutural.

Com a utilização crescente dos microcomputadores, segundo Carvalho (1994), as operações usadas no cálculo usual foram automatizadas, não necessariamente conferindo maior precisão ao cálculo, apenas maior precisão às contas; por outro lado, a sua popularização tem contribuído na tentativa de desenvolver

novos procedimentos ou incluir nas análises, considerações que melhoram as hipóteses simplistas até então utilizadas.

As técnicas numéricas mais utilizadas para a análise de lajes baseiam-se em métodos de domínio: Método dos elementos finitos, Método das diferenças finitas; e métodos de contorno: Método dos Elementos de Contorno.

2.4.3 Analogias

A idéia da analogia é uma simplificação do conceito físico da teoria da análise de placas, onde o equilíbrio das cargas aplicadas é obtido pela combinação dos momentos fletores e torsores nas duas direções da placa (m_x , m_y e m_{xy}). Os métodos baseiam-se no fato de que nada impede que o equilíbrio seja obtido apenas com a combinação dos momentos fletores. Com esta simplificação, nenhuma parcela de carga é absorvida pelo momento torsor e a laje é considerada composta por faixas de vigas independentes, dispostas nas duas direções x e y , que dividem entre si as cargas aplicadas. Esse procedimento é considerado válido porque as condições de equilíbrio estático são satisfeitas.

Dentre os métodos, citamos o Método de Grelhas de Grashof, o Método das Faixas de Hillerborg e a Analogia de Grelha.

2.4.3.1 Método das Grelhas ou de Grashof

Como descrito por Duarte (2003), este método considera na laje, duas faixas de largura unitária, paralelas aos lados l_x e l_y , se cruzando no centro da laje. A carga aplicada (uniformemente distribuída) será repartida entre as duas faixas, em parcelas k_x e k_y , sendo $k_x + k_y = 1$, e as flechas e esforços são encontrados para o centro da faixa. Os valores de k são tabelados em função dos apoios (condições de contorno) e da relação entre os lados da laje.

2.4.3.2 Método das Faixas de Hillerborg

Com este método, segundo Coelho e Loriggio (2002a), a laje pode ser calculada como se fossem faixas de vigas nas direções x e y . A carga aplicada é distribuída adequadamente entre as faixas, considerando-se as condições de contorno. O fator de distribuição k , também satisfazem a equação $k_x + k_y = 1$, sendo que, pode-se encontrar uma distribuição adotando-se os k 's de 0 a 1, dependendo da região da laje em que se encontra a faixa. “A escolha entre todas as soluções possíveis passa a ser, portanto um problema de otimização de detalhamento e custo das armaduras, que seriam dispostas de acordo com os diagramas de momentos”. Com isto, o calculista deve adotar fatores de distribuição próximos à distribuição de momentos obtidas pelas teorias elásticas, para evitar fissuras e flechas excessivas.

Este método, com algumas modificações de reforço nas faixas, tem sido muito utilizado para calcular, de modo aproximado, as lajes com formatos irregulares, aberturas, bordos livres e outras situações não encontradas nas soluções clássicas e nem tabeladas.

Estes métodos são válidos para o cálculo no estado limite último, no entanto, para o comportamento das lajes em serviço, os momentos de torção, calculados pelas teorias elásticas existirão e o método não representa, satisfatoriamente o comportamento da laje sob a ação de baixas cargas.

2.4.3.3 Analogia de grelhas

O método de analisar o comportamento estrutural de uma placa comparando-o com o de uma grelha ou malha de vigas individuais, interconectadas em seus nós é denominado Analogia de Grelha e, por muitos autores, também chamado de Grelha equivalente. Baseia-se na obtenção do equilíbrio da carga aplicada com a combinação dos momentos fletores e torsões. Esta analogia consegue simular, adequadamente, as lajes retangulares, com resultados próximos aos da teoria das

placas em regime elástico. Afirmam Leitão e Castro (2001): “A modelação através de elementos de grelha corresponde, na realidade, à definição do *caminho* ou *trajetória* que as cargas tomam até descarregarem nos apoios” (grifo dos autores).

2.5 Comportamento de uma placa x comportamento de uma viga x comportamento de uma grelha de vigas

Existem três situações que devem ser entendidas para a analogia de grelhas: o comportamento de uma placa, o comportamento de uma viga, analisada isoladamente, e o comportamento de uma grelha de vigas.

2.5.1 Comparação entre os comportamentos da placa e de uma viga isolada

A comparação é feita, simplistamente, entre as rigidezes à flexão e à torção dos elementos de placa e de vigas isoladas; e também, entre as deformações (curvaturas) por eles apresentadas. Porém, deve ser envolvida nesta analogia, a compreensão do significado físico dos seus comportamentos e das formulações, para ambas as estruturas.

Na formulação, pelas teorias elásticas, do comportamento das placas esbeltas (lajes finas), Kirchhoff, apresenta as grandezas *matemáticas* que definem este comportamento: carga aplicada, esforços internos, deslocamentos transversais e deformações. Os resultados obtidos (tridimensionais) são em forma de vetor de deslocamentos, tensores de tensões e de deformações, que, do ponto de vista matemático, necessitam de um tratamento para a aplicação prática. Assim, com a conveniência de se aproveitar o fato das lajes serem estruturas laminares, ou seja, com espessura bem menor do que o seu menor vão, o seu comportamento pode ser descrito no seu plano médio, onde todas as grandezas são definidas como grandezas generalizadas e surgem então, os deslocamentos no plano médio, as curvaturas (que substituem o tensor de deformações) e os campos de esforços (que substituem o tensor de tensões), que são conceitos mais práticos e fáceis de serem “manuseados”. Mas,

para que estas grandezas possam ser assim definidas, são necessárias as hipóteses simplificadoras, já apresentadas.

Essas *grandezas* do comportamento devem satisfazer algumas condições, que são: as condições de equilíbrio, as de compatibilidade e as relações constitutivas (relações elásticas), e estão mostradas na figura 2.3. Estas condições, na verdade, são equações que relacionam as grandezas matemáticas entre si:

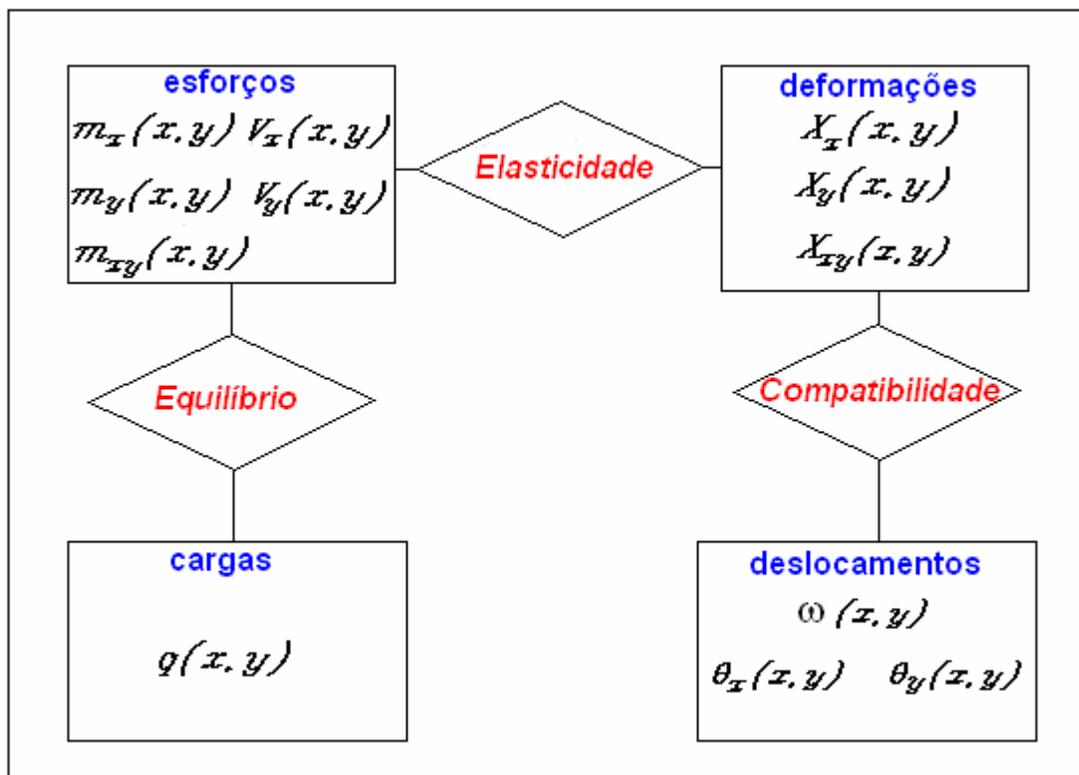


Figura 2.3 – Grandezas e relações que definem o comportamento das placas esbeltas

As condições ou equações de compatibilidade permitem determinar as relações entre as grandezas cinemáticas – deslocamentos transversais $\omega(x, y)$ com as curvaturas $X_x(x, y)$, $X_y(x, y)$ e $X_{xy}(x, y)$, em outras palavras, os deslocamentos com as deformações.

As condições de equilíbrio são impostas às grandezas estáticas relacionando-as – esforços solicitantes $m_x(x, y)$, $m_y(x, y)$ e $m_{xy}(x, y)$ com as cargas aplicadas.

As relações elásticas permitem obter um conjunto de equações que estabelecem a relação entre as grandezas cinemáticas e estáticas – esforços e curvaturas. Estas equações e a definição do seu significado físico são o que permitem algumas analogias com os elementos de viga: as equações de compatibilidade definem duas curvaturas de flexão e uma curvatura de torção e estas curvaturas podem ser comparadas nos dois tipos de elementos estruturais.

A relação entre os campos de momentos e os campos de curvaturas depende do comportamento mecânico do material constituinte da laje ou da viga. Assumindo-se que o material é isótropo, elástico e apresenta linearidades física e geométrica, as equações esforços-deformações são lineares e dependem do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de Poisson (ν) que caracterizam o comportamento elástico linear do material.

As relações de elasticidade são as que mais interessam na resolução dos problemas das lajes e elas em geral são escritas no formato de rigidez. Com elas é possível verificar que os comportamentos à flexão e à torção se encontram desacoplados. Isso significa que para surgirem curvaturas de flexão na laje, é necessário que só existam momentos fletores (momentos torsores nulos). Por outro lado, para que surja uma curvatura de torção na laje, deve existir um campo de momentos torsores não nulo.

A rigidez à flexão do elemento de laje (para curvaturas unitárias) é dada

pela equação 2.2:
$$Df = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} .$$

$$M_t = GJ\phi = \frac{E}{2(1+\nu)} J\phi \quad (2.9)$$

onde: G é o módulo de elasticidade transversal de um elemento de viga

$$J \text{ a inércia à torção, sendo } J = \frac{h^3}{3} \quad (2.10)$$

para seção retangular com $b \gg h$ (seção de parede delgada).

Nesta comparação, pode-se dizer que o momento de inércia à torção de uma viga com um metro de base é o dobro do momento de inércia à torção de uma faixa de laje com um metro de largura. E ainda, que os efeitos do coeficiente ν fazem-se sentir de forma diferente, na teoria de placas e no processo de analogia de grelha (CARVALHO, 1994).

Condições de equilíbrio
Cargas ↔ esforços

$$Q_x = \frac{\partial m_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}(x, y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0$$

Relações de elasticidade – Rigidez
Esforços ↔ deformações

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = Df \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{xx}(x, y) \\ X_{yy}(x, y) \\ X_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{xx}(x, y) \\ X_{yy}(x, y) \\ X_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Condições de compatibilidade
Deslocamentos ↔ curvaturas

$$X_{xx} = - \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2}$$

$$X_{yy} = - \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2}$$

$$X_{xy} = - \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Condições de equilíbrio

$$\frac{\partial^2 m_x(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$$

$$q(x, y)$$

$$\theta_x = - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x}$$

$$\theta_y = - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}$$

$$\omega(x, y)$$

Figura 2.4– Grandezas e equações fundamentais da laje de Kirchhoff

A equação que define o comportamento de uma laje é conhecida como *Equação de Lagrange* e é obtida com a junção das condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade:

$$\frac{\partial^4 \omega(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \omega(x,y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x,y)}{D_f} \quad (2.11)$$

(lembrando que ω é o deslocamento transversal de um ponto da placa; $q(x,y)$ e D_f são a carga distribuída e a rigidez à flexão).

Para determinar a solução de uma laje, a utilização da equação de Lagrange, por si só, não é suficiente. É indispensável que as condições de fronteira para o problema sejam estabelecidas. Estas condições podem ser cinemática ou estática. Nas condições de fronteira cinemática são especificados quais os valores de deslocamento num determinado bordo (ou apoio); e nas condições de fronteira estática impõe-se um valor para as cargas diretamente aplicadas neste bordo. Além das condições de fronteira para o problema, também é necessário que sejam definidos a dimensão da placa e sua espessura, o carregamento, o módulo de elasticidade (E) do material e o coeficiente de Poisson (ν). Portanto, os deslocamentos da laje calculados pela Teoria da Elasticidade dependem de muitos parâmetros.

No entanto, o equilíbrio em um elemento de placa, sob uma carga distribuída, $q(x,y)$, com os esforços internos atuantes: momentos fletores, $m_x(x,y)$ e $m_y(x,y)$, momentos torsores $m_{xy}(x,y)$ e $m_{yx}(x,y)$ e os esforços cortantes $Q(x)$ e $Q(y)$, também pode ser relacionado através da equação:

$$\frac{\partial^2 m_x(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}(x,y)}{\partial x \partial y} + q(x,y) = 0 \quad (2.12)$$

Esta equação também é conhecida como a *Equação de equilíbrio das placas*. Coelho e Banki (2002) comentam que esta equação é independente da laje estar em regime elástico ou plástico, independente do coeficiente de Poisson (ν) ou se

a placa é isotrópica ou ortotrópica. No entanto, tem pouca finalidade prática, porque é restrita a poucos casos.

2.5.2 Comportamento de uma grelha (Analogia de grelha, propriamente dita)

A obtenção do conjunto de equações da Teoria de Kirchhoff e a interpretação do significado físico destas equações e dos elementos da matriz de rigidez, permitem a consideração simplificada da placa, como um somatório de um conjunto de vigas com eixo paralelo a x e outro com eixo paralelo a y , interconectados. Ambas as estruturas admitem a hipótese simplificadora de Bernoulli, de que as seções, estando submetidas à mesma solicitação, sofrem as mesmas deformações: as seções planas permanecem planas e normais ao eixo do elemento após a sua flexão e este eixo, que era retilíneo, passa a ser um “arco de círculo” (DUARTE, 2004). Há de ser considerado também que, tanto a grelha de vigas quanto a laje, são estruturas que existem num determinado plano e se encontram sujeitas a um carregamento que atua perpendicularmente a este plano (CASTRO, 2000). Além disso, as grandezas que definem o comportamento das lajes (deslocamentos, deformações, carga aplicada e esforços) também permitem uma analogia com as grandezas dos elementos de grelha (os deslocamentos, os esforços internos e as deformações). Por isso, será apresentada a comparação entre estas grandezas e a influência dos diversos parâmetros, pois, em princípio, “a aplicação da Analogia de Grelha para o cálculo de lajes, parece tratar-se da simples aplicação do programa de análise de grelhas planas com o painel discretizado” (COELHO; LORIGGIO, 2002c). Os resultados dos esforços e deslocamentos obtidos seriam, então, usados para o dimensionamento.

2.5.2.1 Deslocamentos

Os deslocamentos existem em cada nó de uma grelha e em cada ponto de uma laje (placa). No nó de uma grelha de vigas os deslocamentos possíveis são

duas rotações (θ_x e θ_y) e um deslocamento transversal (ω), que correspondem ao campo de deslocamentos em um ponto de uma laje (placa) (figura 2.6).

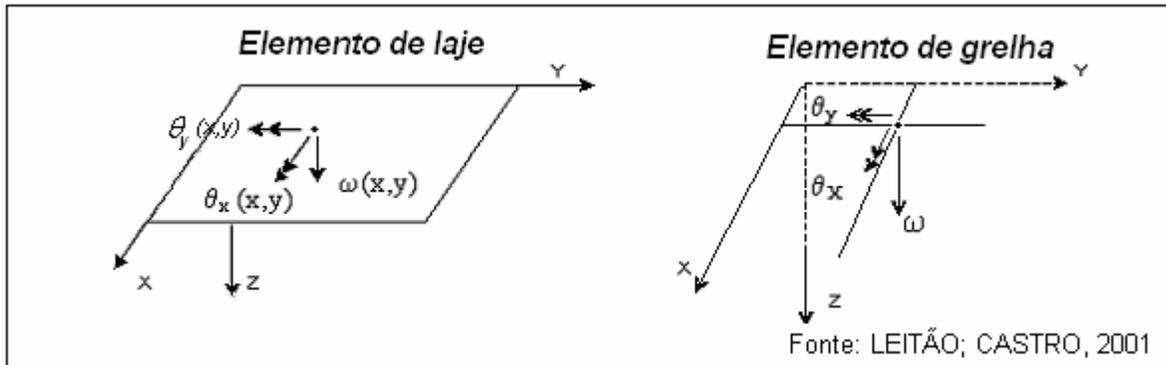


Figura 2.5 – Campos de deslocamentos na laje e na grelha

No entanto, pela formulação destes elementos, o coeficiente de Poisson (ν) influencia de maneira diferente a rigidez das placas e das vigas da grelha.

Na análise da viga isolada, o ν não altera a sua rigidez que é dada por:

$$D_{viga} = E \frac{bh^3}{12} \quad (2.13)$$

Como a rigidez é independente de ν , conseqüentemente, os seus esforços e deslocamentos também serão independentes:

$$M = E \frac{bh^3}{12} X \quad (2.14)$$

Apesar da grelha ser constituída por um conjunto de vigas interconectadas, na sua formulação de uma grelha é usado o valor de G (módulo de elasticidade transversal), que é dependente de ν , de acordo com a expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.15)$$

Desta forma, com o aumento de ν , os deslocamentos na placa diminuem, pois o termo $\frac{1}{1-\nu^2}$ será sempre ≥ 1 , aumentando a rigidez da placa; enquanto que na grelha, os deslocamentos aumentam, pois $\frac{E}{2(1+\nu)}$ será sempre ≤ 1 , o que diminui a rigidez da grelha (CARVALHO, 1994) .

Pode-se analisar a influência de G na grelha de vigas, observando-se a matriz de rigidez de um elemento de viga (D_{viga}): percebe-se que alguns coeficientes de rigidez do elemento de grelha variam diretamente com G . Com isto, os efeitos do coeficiente de Poisson (ν) influenciarão de forma diferente os deslocamentos, na teoria de placas e no processo de analogia de grelha.

$$D_{viga} = \begin{bmatrix} \frac{Gj}{l} & 0 & 0 & -\frac{Gj}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \\ -\frac{Gj}{l} & 0 & 0 & \frac{Gj}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.5.2.2 Esforços

Também é possível relacionar os esforços que caracterizam o comportamento das lajes, com os esforços que surgem nos elementos de grelha, nas duas direções ortogonais (figura 2.7). Observando os eixos dos elementos dos dois tipos de estrutura, na direção x , os m_x , m_{xy} e V_x que surgiram na laje, correspondem aos esforços que existem no elemento de grelha. Do mesmo modo, podem ser

observados os eixos destes elementos na direção y . Aparentemente, o sentido do momento torsor m_{xy} na laje e do momento torsor T na grelha (na direção x) é diferente. No entanto, esta contradição se justifica, ao verificar que a convenção adotada para os valores positivos dos momentos na grelha é contrária à da laje.

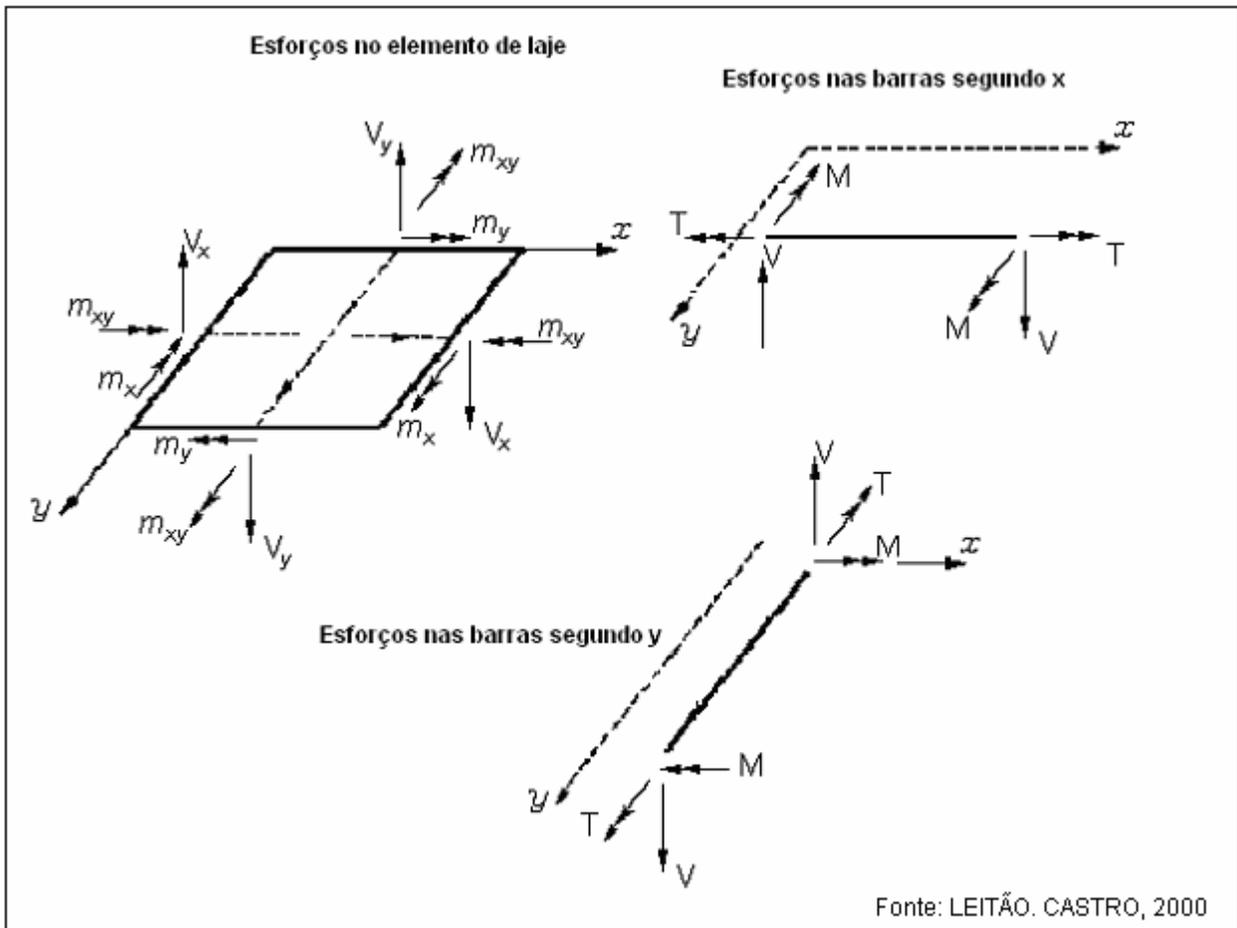


Figura 2.6 - Campos de esforços na laje e na grelha

Das relações de elasticidade, escritas no formato de flexibilidade, é possível verificar que os comportamentos flexão/torção encontram-se totalmente independentes.

$$\begin{bmatrix} X_{xx}(x, y) \\ X_{yy}(x, y) \\ X_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{12}{Eh^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.5.2.3 Deformações

Do significado físico da matriz de rigidez da laje, pode-se identificar que:

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{xx}(x, y) \\ X_{yy}(x, y) \\ X_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

- a primeira coluna da matriz de rigidez da laje corresponde aos esforços (m_x) que aparecem na direção x , quando se impõe uma curvatura unitária (deformada) nesta mesma direção x ($X_{xx} = 1$, $X_{yy} = 0$ e $X_{xy} = 0$)

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \nu & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{xx}(x, y) \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

O valor do parâmetro $D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, chamado de *rigidez à flexão* do elemento de laje, corresponde, então, ao valor do momento m_x que é necessário aplicar na laje para que surja uma deformação (curvatura) com valor unitário.

- Na observação da segunda coluna da matriz de rigidez, chega-se às mesmas conclusões, para os esforços que aparecem na direção y ;

- Em análise similar, na terceira coluna da matriz de rigidez, o parâmetro que se verifica é $D_t = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$, chamado de *rigidez à torção* do elemento de laje, correspondente ao valor do m_{xy} , um momento torsor que é necessário aplicar na laje para surja uma deformação (curvatura de torção) unitária.

A figura 2.7 ilustra a presença de curvaturas comparáveis segundo os cortes A, B e C, sugerindo a presença de momentos fletores também comparáveis (SILVEIRA, 2001).

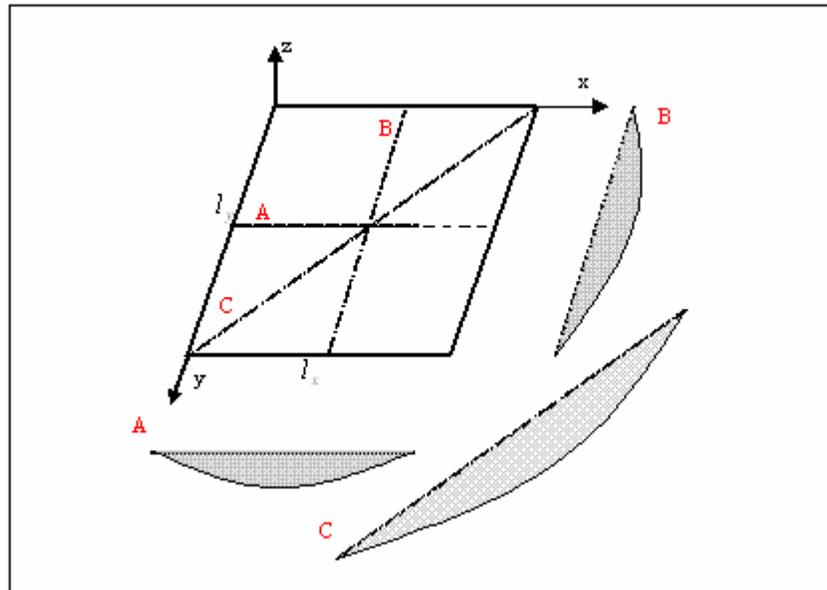


Figura 2.7 – Deformações na laje segundo cortes A, B e C

A grande diferença então, entre os elementos de laje e os elementos de grelha, está relacionada com o caráter bidimensional das lajes. As lajes são estruturas laminares e o comportamento em uma determinada direção influencia o comportamento na outra direção ortogonal. Enquanto que as grelhas, constituídas por peças lineares, apresentam comportamento numa única direção. Isto confirma-se quando o campo de momentos $m_{xx}(x, y)$ é diferente de zero, enquanto que o campo de momentos $m_{yy}(x, y)$ não se anula.

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = Df \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \nu & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} m_{xx} &= Df \\ m_{yy} &= \nu Df \\ m_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Só quando o coeficiente de Poisson (ν) se anula é que o campo de momento m_{yy} também se anula. A interpretação física para este fato é que, considerando a laje subdividida em *faixas* formando conjuntos de vigas, dispostos ortogonalmente (x, y), quando se impõe somente uma curvatura unitária na direção x ($X_{yy}(x, y) = 0$ e $X_{xy}(x, y) = 0$), estas vigas irão fletir e suas seções transversais também deformarão. Como as fibras inferiores estão tracionadas e as fibras superiores estão comprimidas, levando em conta o efeito do coeficiente de Poisson (ν), as seções transversais deformam-se, tal como é ilustrado na figura 2.8.

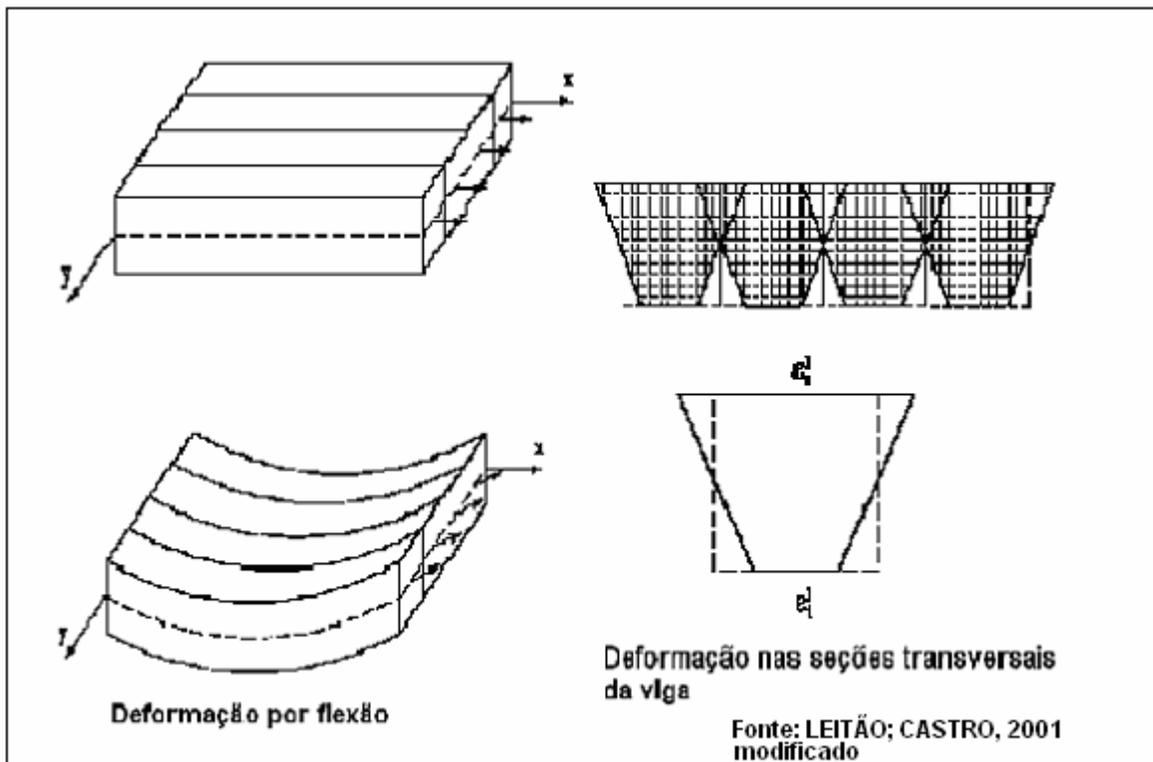


Figura 2.8 – Deformação por flexão nas vigas com eixo paralelo a x

Para que isto não aconteça, ou seja, para que a deformada global da laje permaneça compatível, é necessário que as seções transversais se mantenham sem deformações e para que isto ocorra, deve existir um momento fletor nas seções transversais que provoque deformações iguais e de sinal contrário àquelas induzidas pela deformação por flexão ao longo do eixo x (figura 2.9).

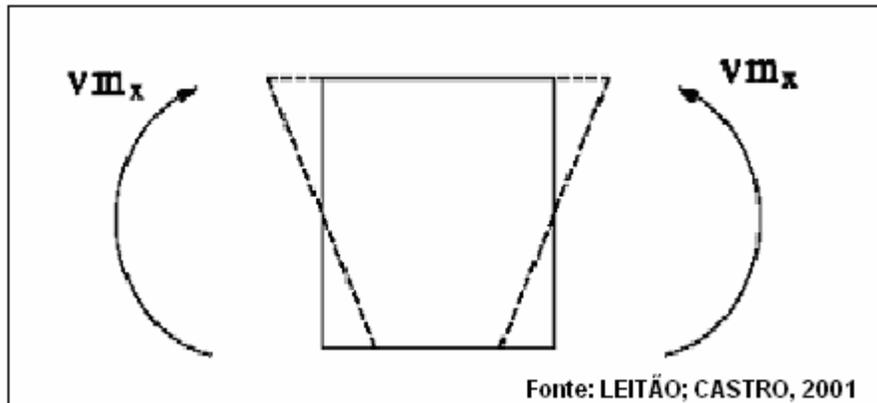


Figura 2.9 – Momento na direção transversal de uma *faixa* de laje.

A existência desse momento é justificada pelo *confinamento* lateral que os elementos de laje apresentam, o que não acontece com os elementos de viga. Esta informação é relevante para se definir a subdivisão da laje, num conjunto de vigas, ou seja, o número de faixas da laje que serão substituídas por elementos de vigas e da localização destes elementos que deverá ser adotado para se analisar a laje como uma grelha. Gamble (1978 apud MELO; FONTE; HOROWITZ, 2000) recomenda que a laje seja subdividida em maior número de vãos para que a estrutura se comporte como uma laje, em vez de uma série de vigas.

As dificuldades da análise pelo método da analogia de grelhas fazem-se, principalmente, devido às lajes serem uma estrutura bidimensional. Os momentos fletores em um elemento de placa dependem tanto da curvatura numa direção quanto da curvatura na direção ortogonal, enquanto que nas vigas, consideradas estruturas unidimensionais, os momentos fletores nas barras dependem apenas da curvatura na direção axial desta barra. Isto explica as dificuldades em conseguir reproduzir, de forma exata, o comportamento bidirecional dos elementos da laje, utilizando elementos com

comportamento unidimensional das vigas. Pode-se afirmar que a distribuição dos esforços existentes nos elementos de grelha equilibra o carregamento aplicado à laje, sendo que os resultados obtidos são relatados como bastante satisfatórios, encontrando-se do lado da segurança. Porém, devem ser adotadas propriedades geométricas adequadas para as rigidezes à flexão e à torção, de tal forma que representem bem o comportamento real.

2.6 Não linearidade física do concreto armado

O efeito da fissura, fluência, etc, conferem ao concreto armado um comportamento não-linear. A consideração da não linearidade física (NLF) nas estruturas de concreto armado implica na determinação da rigidez de cada elemento estrutural, a partir das relações constitutivas do concreto e aço, da quantidade e disposição das armaduras e do nível de solicitação a que estiver submetido. Portanto, a NLF é em consequência do comportamento do material e da sua constituição.

Emprega-se na análise da NLF um procedimento incremental e iterativo, onde, para cada nível de carregamento, a rigidez dos elementos é estabelecida a partir das relações constitutivas dos materiais. Isto significa que para cada seção de um elemento, corresponderá um valor de rigidez diferente, dependente do nível do carregamento, da quantidade e da disposição da armadura na seção.

MacGregor (1993) apud Pinto (1997) sugeriu dois conjuntos de valores para a rigidez: um para a análise global da estrutura e o outro para a análise de membros isolados. Sugeriu que se considere para as vigas um valor em torno de 0.4 do valor da rigidez da seção bruta de concreto e para os pilares 0.8, devido à presença da armadura. Outros autores, citados por Macgregor (1993) apud Pinto (1997) indicam um coeficiente de redução de 0.2 para as lajes armadas numa só direção. A NBR 6118:2003 sugere 0.3 do valor da rigidez da seção bruta de concreto armado para as lajes.

2.6.1 Comportamento mecânico do concreto

O material concreto pode ser definido, simplificadaamente, como uma mistura de cimento, areia, agregados e água, e às vezes algum aditivo, para formar um material sólido. É um material de múltipla escala, e características importantes podem ser observadas em três níveis estruturais diferentes: micro, meso e macro. Na micro-estrutura, a estrutura interna de cimento e a pasta de cimento endurecida são as características mais importantes; na macro-estrutura nenhuma estrutura interna do material pode ser reconhecida, exceto a armadura, no concreto armado. É na meso-estrutura que a importância da qualidade do concreto se faz notar: a natureza heterogênea do material provoca concentração de tensões e a existência de poros e impureza reduz a sua resistência. Com a observação dos três níveis assume-se que o comportamento num nível pode ser explicado pela estrutura observada no nível inferior.

2.6.1.1 Concreto na compressão

Num ensaio de compressão uniaxial de um corpo de prova de concreto, o diagrama tensão-deformação apresenta um ramo ascendente seguido por um pico que é conhecido como a resistência de compressão do concreto; e um ramo descendente, também conhecido como ramo de amolecimento. Embora a parte inicial da curva pareça reta, existe uma ligeira curvatura, desde o início do carregamento, que é atribuída às micro-fissuras já existentes entre o agregado e a pasta de cimento endurecida, antes da aplicação da carga. Estas micro-fissuras se propagam dentro da pasta e formam as fissuras e macro-fissuras, dependendo da retração, exudação e segregação do material, no lançamento, e do nível do carregamento a que estiver sujeita. Após o pico observa-se que a curva apresenta inclinação decrescente à medida que reduz a altura do corpo de prova. Este deslocamento não é pontual, ele se localiza numa pequena zona. Este fenômeno é utilizado como variável de estado nas leis constitutivas do concreto (KANG; BITTENCOURT, 1998).

O diagrama tensão x deformação (figura 2.10), obtido no ensaio de compressão uniaxial, pode ser interpretado pelos seus níveis de tensão:

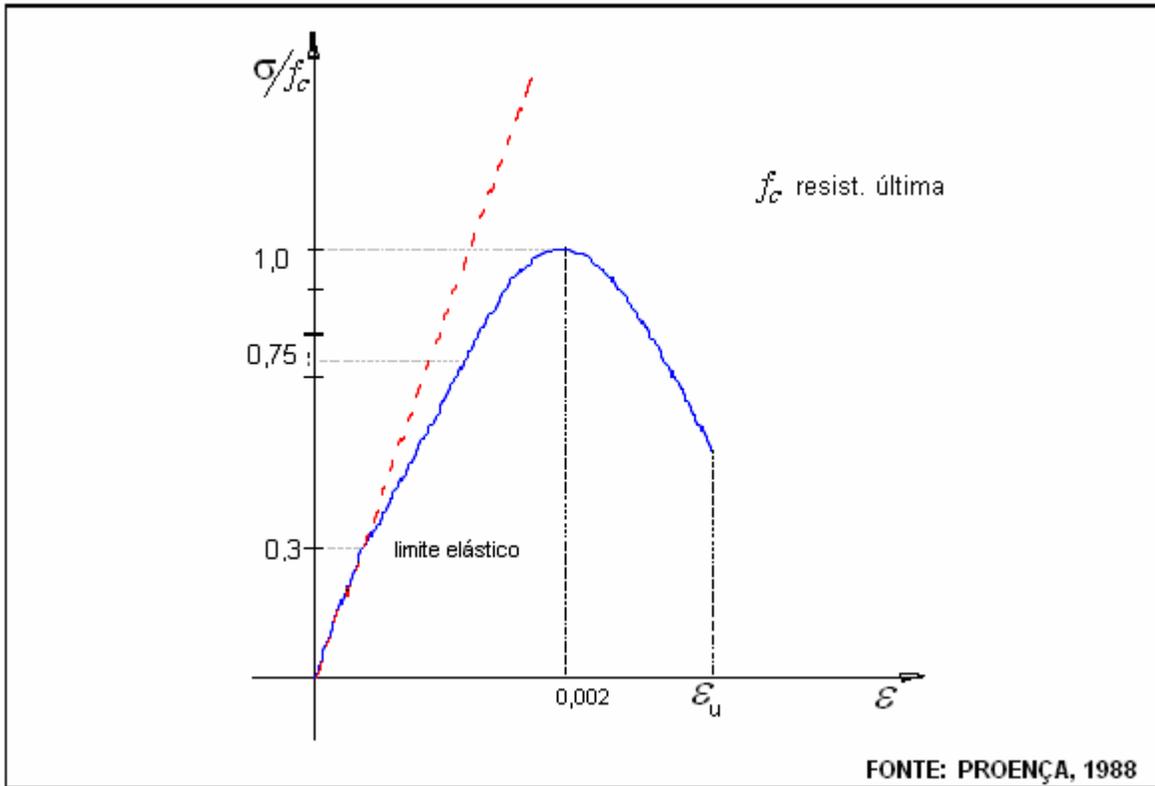


Figura 2.10 – Diagrama tensão x deformação em um ensaio de compressão uniaxial

- de 0 – 0,30 de f_c – fase elástica – as micro-fissuras existentes não sofrem alterações significativas com o carregamento;
- de 0,30 – 0,75 de f_c – fase intermediária ou principal – há escorregamentos na pasta de cimento, responsáveis pela maior parcela da plastificação. O comprimento das micro-fissuras fica praticamente inalterado, se a tensão for mantida constante;
- acima de 0,75 de f_c – há uma interação entre as micro-fissuras, resultando nas fissuras;
- acima de 1,0 de f_c – ramo descendente ou de amolecimento;

Proença (1988), ressalta que:

- até 0.75 de f_c ocorre uma diminuição do volume, proporcional ao acréscimo de tensão. A partir de 0.75 de f_c inverte-se o sentido da variação volumétrica, havendo uma expansão;
- o módulo de elasticidade inicial do concreto depende da resistência do concreto à compressão;
- o valor representativo do ν é 0.2. Além de 0.8 de f_c há um aumento deste coeficiente;

2.6.1.2 Concreto na tração

No início, quando o concreto foi usado como material estrutural, não era considerada a sua resistência à tração pelo fato dela ser muito baixa, quando comparada a sua resistência à compressão. Num ensaio de tração uniaxial a curva tensão-deformação também apresenta um ramo ascendente, um pico que corresponde à resistência de tração e um ramo descendente ou ramo de amolecimento. As fissuras que aparecem na tração são relatadas como não sendo contínuas e que existe superposição de fissuras, permitindo, dessa forma, a transferência de carregamentos entre as faces fissuradas e, permitindo também que o corpo de prova suporte um acréscimo de carregamento. A ruptura acontece quando uma das pontas da fissura propaga e se une com a segunda. Ao contrário da compressão, a ruptura se dá pela união de um pequeno número de fissuras.

Segundo Proença (1988), na tração, as micro-fissuras existentes antes do carregamento assumem muito mais importância do que na compressão. Até 0.60, da resistência máxima do concreto à tração (f_{ct}), a evolução de novas microfissuras é desprezível. A propagação das fissuras é na direção transversal à direção da tensão.

- a razão entre as resistências do concreto à tração e à compressão, f_{ct}/f_c , varia de 0.05 a 0.10;

- o módulo de elasticidade à tração é maior do que o módulo de elasticidade à compressão;
- o coeficiente de Poisson é menor do que na compressão uniaxial;

2.6.1.3 Concreto no cisalhamento

A força cortante, em princípio, pode ser considerada como um estado de tensão biaxial: tração-compressão. Considera-se três abordagens sobre a fratura no cisalhamento:

- a abordagem elástica linear clássica, onde a fissura inicia-se e propaga-se sob tensão de cisalhamento uniforme e na ruptura, as fissuras inclinadas se unem e formam um plano de cisalhamento;
- a abordagem não-linear de Hillerborg, onde há uma fissura fictícia ou região de micro-fissuras fictícias (denominada zona de processos inelásticos) à frente de uma macro-fissura, que é submetida ao cisalhamento no plano. Admite-se nesta abordagem que o material da região de micro-fissuras, embora danificado, ainda transmite tensões.
- a abordagem de não confinamento da zona de cisalhamento com a propagação de fissuras curvas.

As características mais importantes do comportamento do concreto em estados biaxiais são resumidas por Proença (1988):

Relação tensão-deformação:

- sob compressão-compressão, a resistência do concreto à compressão biaxial (f_{cb}) depende da intensidade da σ_2 :

$$\text{para } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0.5, \quad f_{cb} = 1.25f_c ;$$

para $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$, $f_{cb} = 1.16f_c$;

- sob compressão-tração, a resistência do concreto à compressão biaxial diminui linearmente com o acréscimo de tensão de tração;
- sob tração-tração, a resistência do concreto à tração biaxial f_{ctb} é praticamente a mesma da resistência do concreto à tração uniaxial f_{ct} ;

Ductilidade:

- em compressão-compressão as deformações correspondentes ao pico de resistência do concreto são maiores do que na compressão uniaxial, ou seja, a ductilidade aumenta, ocorrendo o contrário quando a combinação de tensões envolve tensões de tração;
- próximo ao pico de resistência limite há uma expansão de volume com o acréscimo das tensões de compressão, dilatância;

Nos estados triaxiais de tensão, de um modo geral, a resistência axial do concreto cresce com a pressão de confinamento.

2.6.2 Mecanismos de ruptura do concreto

As microfissuras iniciais e sua propagação durante o processo de carregamento são responsáveis pelo comportamento não-linear do concreto, mesmo em baixos níveis de carregamento. Dependendo do ponto analisado na estrutura ou peça de concreto, este pode se encontrar sob um estado de tensões uniaxial, biaxial ou triaxial. Por isso, o concreto pode apresentar características de fragilidade, plasticidade com amolecimento ou plasticidade com endurecimento. Quanto mais prevalecer as tensões de tração nas combinações de tensão, maior a fragilidade do concreto, anulando repentinamente a resistência do material. Em estados triaxiais de compressão, a ruptura se dá por esmagamento do concreto.

A consideração da aderência perfeita entre o aço e o concreto cria a possibilidade de que o concreto, mesmo fissurado, ainda continue com capacidade para absorver e/ou transferir para a armadura tensões de tração. Somente com o desenvolvimento do processo de fissuração há a tendência do aço comportar-se como uma barra isolada, e o concreto diminui, significativamente, a sua colaboração na resistência à tração. Segundo Proença (1988), o concreto, na presença da armadura, torna-se enrijecido e contribui na resistência à tração. As deformações, nos dois materiais, são iguais, na compressão e na tração, antes da fissuração.

A força cortante é transmitida ao concreto através do impedimento da separação das superfícies da fissura. Isto pode ser alcançado através da armadura que atravessa a fissura (pino) ou pelo engrenamento dos agregados, uma vez que a natureza heterogênea do concreto faz com que as superfícies da fissura sejam irregulares.

No processo de ruptura ou de fraturamento as micro-fissuras, que crescem gradualmente com o carregamento, começam a se localizar numa fissura principal. As fissuras principais não são contínuas, pois existem superposição entre as micro-fissuras que as formam. A fratura vai acontecer com o rompimento das ligações do material entre as micro-fissuras.

As fissuras no concreto podem ser dos seguintes tipos, de acordo com Leonhardt (1979, apud SOUZA, 2001):

- Microfissuras e fissuras na estrutura interna do concreto: são fissuras muito finas e curtas que, em sua maioria, são visíveis apenas ao microscópio. Desenvolvem-se parcialmente na argamassa e parcialmente entre os agregados e argamassa. Estas fissuras se formam devido às mudanças no fluxo das tensões internas, ocorridas devido ao fato dos grãos de agregado serem duros. Tais fissuras

diminuem a resistência à tração e contribuem para a grande dispersão dos valores de resistência encontrado nos ensaios;

- Fissuras de separação: estas fissuras atravessam toda a seção transversal da peça e surgem nos casos de tração centrada ou tração com pequena excentricidade;
- Fissuras de flexão: estas fissuras começam no bordo tracionado de uma peça fletida e terminam antes da linha ou superfície neutra;
- Fissuras de convergência: em geral, ficam limitadas à região com armadura. Algumas, no entanto (denominadas de fissuras de convergência) ultrapassam as zonas densamente armadas, avançando em direção à linha neutra ou para o interior da peça solicitada a tração;
- Fissuras intermediárias e fissuras de aderência: entre as fissuras que atravessam a zona armada, formam-se, ocasionalmente fissuras intermediárias finas, que na maioria dos casos atingem apenas a camada mais externa da armadura. Estas fissuras podem se originar de fissuras superficiais iniciais ou de pequenas fissuras de aderência internas;
- Fissuras de cisalhamento: são fissuras inclinadas, originadas por esforço cisalhante ou torsor, e se desenvolvem obliquamente em relação ao eixo do elemento. As fissuras de cisalhamento devidas ao esforço cortante podem se desenvolver a partir de fissuras de flexão;
- Fissuras longitudinais ao longo das barras da armadura: são causadas pela pega do concreto fresco ou pelo aumento do volume da barra da armadura devido à corrosão da armadura. Surgem também devido à ação de tensões de aderência elevadas e podem avançar até a

superfície da peça, dependendo do espaçamento entre as barras de armadura. Podem se desenvolver também, paralelamente à superfície, rompendo o cobrimento do concreto;

- Fissuras superficiais ou fissuras em rede: são fissuras superficiais que se originam de tensões intrínsecas, provocadas por retração, carbonatação ou temperaturas desiguais, que produzem tração na camada superficial do concreto. Quando o causador das tensões intrínsecas não tiver uma direção preferencial, as fissuras inerentes também serão sem direção definida (fissuras em rede).

As fissuras resultantes da atuação de sobrecargas nos elementos estruturais de concreto armado são avaliadas como um dos mecanismos mais importantes no seu comportamento. A atuação das sobrecargas, previstas ou não nos projetos, pode produzir fissuras em elementos de concreto armado, não implicando, necessariamente em ruína ou instabilidade da estrutura. A ocorrência destas fissuras, num determinado elemento estrutural, produz uma redistribuição de tensões ao longo do elemento fissurado e mesmo entre os elementos vizinhos, de maneira que a solicitação externa geralmente acaba sendo absorvida, de forma global, pela estrutura ou por parte dela (SOUZA, 2001).

As principais características que definem um quadro de fissuração em lajes são: o tipo de vinculação existente no contorno da estrutura; a relação entre os comprimentos dos vãos; o tipo e disposição da armadura; e as natureza e intensidade da solicitação atuante.

Nas lajes maciças apoiadas nas quatro bordas e submetidas a um carregamento distribuído, aparecem fissuras inclinadas a 45° , formando com estes cantos, triângulos isósceles. As fissuras são o resultado da curvatura da laje junto aos cantos, onde não foram colocadas as armaduras adequadas. Nestes cantos, formados

por duas bordas simplesmente apoiadas, há uma tendência ao levantamento provocado pela atuação dos momentos volventes (momentos torsores).

Existem diversos fatores que influenciam a relação entre as armaduras de canto e a armadura no vão da laje e que dificultam determinar, com exatidão, qual deve ser a razão entre elas. Dentre eles, o fato de que a relação entre os momentos volventes e os momentos fletores no vão da laje variam conforme a razão entre os lados desta laje; a dependência da resistência à compressão do concreto e da altura da laje, etc.

Parsekian e Correia (1998) modelaram lajes maciças apoiadas nos quatro lados e, avaliando algumas recomendações existentes na literatura sobre as armaduras de canto necessárias (figura 2.11), concluíram que, na falta de um cálculo mais rigoroso, a recomendação que melhor atende aos casos estudados é aquela que adota áreas de armadura de canto iguais a 75% da maior área de armadura do vão.

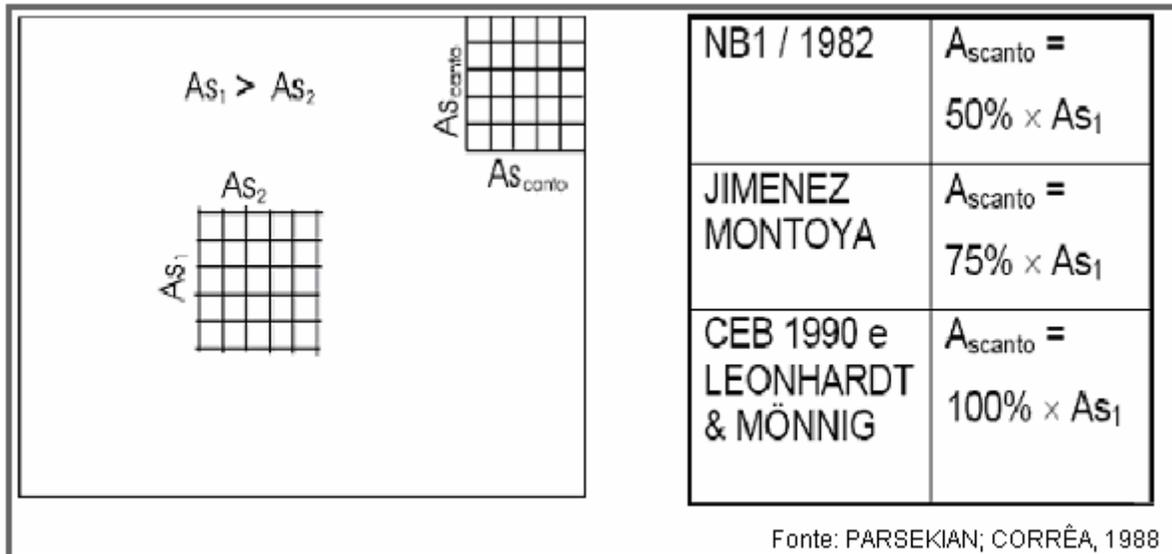


Figura 2.11 – Recomendações sobre a armadura de canto

Atenção especial deve ser dada à significativa influência da fissuração sobre a diminuição da rigidez do elemento de concreto. Relacionado à questão da durabilidade e utilização das construções, a norma brasileira para projetos de estruturas de concreto, NBR 6118:2003, é atenta à fissuração e às flechas nos elementos

estruturais. Este controle pode ser feito ou por meio de limitação de abertura de fissura, com valores estimados entre 0,3 para o concreto armado e 0,2 para o concreto protendido; simplificada, através do cálculo de tensão de serviço e verificação de diâmetros e espaçamentos máximos, dados pela tabela 17.2 da NBR 6118:2003; ou com a limitação dos deslocamentos (flecha).

A norma recomenda que esta verificação seja feita nos Estados Limites de Serviço (ELS), quando as estruturas trabalham sob baixo carregamento e parcialmente no Estádio I e parcialmente no Estádio II: nas seções mais solicitadas, apresenta comportamento no Estádio II e, em outras regiões, há seções não fissuradas trabalhando no Estádio II. A separação entre essas duas partes é definida pelo momento de fissuração (M_r), que pode ser calculado por uma expressão aproximada indicada no item 17.3.1 da norma brasileira.

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad (2.20)$$

onde: α é o fator que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta (aproximadamente):

$\alpha = 1,2$ para seções T ou duplo T e $\alpha = 1,5$ para seções retangulares;

I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

f_{ct} é a resistência à tração direta do concreto, conforme o item 8.2.5 da

norma;

Para a verificação dos limites estabelecidos na norma é recomendado que a deformação da estrutura seja realizada através de modelos que considerem a rigidez efetiva das seções do elemento estrutural, levando em consideração a presença da armadura, a existência de fissuras no concreto ao longo dessa armadura e as deformações diferidas no tempo.

A deformação real da estrutura também depende do processo construtivo empregado, bem como das propriedades dos seus materiais constitutivos da estrutura, destacando-se, dentre estas propriedades de materiais, o módulo de elasticidade e a resistência à tração, no momento de sua efetiva solicitação. Em virtude da grande variabilidade dos parâmetros dos materiais, existe também uma grande variabilidade das deformações reais.

Para uma estrutura ter um desempenho satisfatório, em serviço, as fissuras devem ser controladas e os deslocamentos não devem ser excessivos. O comportamento em serviço depende, primariamente, das propriedades do concreto e estas ainda não são bem compreendidas, neste estágio de carregamento. Ruínas de estrutura de concreto, em serviço, são relativamente comuns, envolvendo fissuração e/ou deslocamentos excessivos e os procedimentos normatizados não eliminam estas possibilidades.

Os deslocamentos limites são valores práticos utilizados para a verificação do estado limite de deformações excessivas da estrutura, em serviço, classificados em quatro grupos básicos, definidos no item 13.3 da NBR 6118:2003:

a) aceitabilidade sensorial: onde o limite é caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável;

b) efeitos específicos: quando os deslocamentos podem impedir a utilização adequada da construção;

c) efeitos em elementos não estruturais: quando os deslocamentos estruturais podem causar o mau funcionamento de elementos que, apesar de não fazerem parte da estrutura, estão a ela ligados;

d) efeitos em elementos estruturais: quando os deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, ou do conjunto de elementos que

compõe a estrutura, provocando um afastamento do comportamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas.

Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados e incorporados ao modelo estrutural adotado.

Os valores limites de deslocamentos e as razões da limitação estão definidos na tabela 13.2 da norma e supõem elementos de vão l suportados em ambas as extremidades por apoios indeslocáveis. Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o vão l é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve.

Dentre os elementos estruturais, os mais deformáveis são as lajes, e conseqüentemente, a deformação de pisos, as flechas excessivas, a fissuração de alvenarias, acompanhada ou não por fissuração dos próprios elementos estruturais, são os danos mais freqüentes causados nas edificações.

A maioria dos programas de análise estrutural e as tabelas auxiliares de cálculo fornecem as flechas imediatas, calculadas sob a hipótese de comportamento elástico para o concreto armado, sem as considerações, durante a análise, do efeito da perda de rigidez provocada pela fissuração e pela flecha adicional, em função do tempo, considerando a fluência do concreto. O controle das deformações das lajes, então, é feito através da escolha adequada da rigidez à flexão, tanto das lajes, quanto das vigas nas quais se apoiam, associada aos procedimentos construtivos, tais como a utilização de contraflecha, que apenas minimizam os efeitos sensoriais.

Pela norma brasileira não é possível determinar uma altura mínima para um elemento estrutural, de tal forma que permita dispensar a verificação da flecha e isto

passa a exigir um estudo criterioso para adaptação dos processos de cálculos. Mesmo os processos mais refinados de avaliação de deformações, apresentam desvios na avaliação das flechas em pisos usuais.

CAPÍTULO 3

MODELOS DE MATERIAIS E DE FRATURA PARA ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Para o emprego da maioria dos processos de cálculo é necessário que sejam definidas as condições dos apoios ou vinculações existentes e os vãos teóricos para cada painel individual de laje. Para a análise com os programas computacionais esta, também, é uma necessidade que precisa ser atendida na entrada de dados.

Qualquer análise de uma determinada estrutura ou elemento estrutural é um caso particular, com um modelo próprio, único. Por isso, quanto mais precisas forem as informações sobre a estrutura e sobre os materiais que a compõe, melhores serão os resultados de simulações do seu comportamento.

A qualidade de qualquer simulação numérica depende da precisão das leis constitutivas adotadas como modelo do comportamento dos materiais. Como, neste trabalho, se pretende simular o comportamento de elementos de concreto submetidos à flexão, é importante caracterizar bem o comportamento à compressão, à tração até a fissuração e, principalmente, após a fissuração.

3.1 Mecânica da fratura

A mecânica da fratura iniciou-se em 1920, com uma formulação elástica linear, com Griffith, onde ele sugeriu um modelo que considerasse um balanço de energia que levasse em conta além da energia potencial das cargas externas e da energia de deformação elástica acumulada, um outro termo energético denominado energia de superfície que está associada à criação de novas superfícies durante o

processo de fratura. A mecânica da fratura foi aplicada com sucesso para projetos com materiais metálicos e frágeis, mas foram pouco aplicadas para o concreto.

A primeira pesquisa experimental para o concreto foi desenvolvida por Kaplan em 1961, mas somente a partir dos anos setenta foram feitos avanços importantes, baseados na mecânica da fratura não-linear, onde era possível se considerar a estrutura e o comportamento do concreto. A partir da década de oitenta, as pesquisas foram intensificadas e as aplicações se tornaram mais comuns como, por exemplo, no projeto de vigas e barragens.

3.2 Processos de formação de fissuras no concreto

Mesmo antes das estruturas de concreto serem solicitadas elas já apresentam numerosas fissuras, causadas por vários fatores. Segundo tem-se os seguintes estágios de formação de fissuras:

- Lançamento e compactação: A compactação incompleta gera regiões de alta porosidade que agem como regiões pré-fissuradas;
- Concreto fresco: Antes do endurecimento, a sedimentação dos agregados dá origem a cavidades sobre suas superfícies, que podem ser preenchidas com água, dando origem a fissuras horizontais;
- Concreto em endurecimento: Fissuras térmicas, de retração química, de retração por capilaridade;
- Concreto secando: Fissuras de retração higroscópica;
- Concreto endurecido e solicitado: As ligações existentes entre a pasta de cimento endurecido e os agregados são imperfeitas e permanecem fracas

por um longo tempo de forma que se tem a possibilidade de formação de fissuras interfaciais para tensões abaixo de f_{ct} .

Portanto, o processo de formação de fissuras e conseqüentemente a resistência de uma estrutura de concreto depende não somente das solicitações, mas também da composição e das condições de produção do concreto.

A não-linearidade da relação tensão x deformação no concreto submetido à compressão uniaxial é explicada pelo processo de microfissuração progressiva do concreto sob carregamento. Na figura 3.1 são mostradas as formas dos diagramas $\sigma \times \epsilon$ para os agregados, para a pasta de cimento endurecida e para o concreto. Para o concreto, tem-se um comportamento linear para cargas próximas a 30% da carga última, pois neste nível de carregamento, as microfissuras existentes entre a matriz e o agregado graúdo, permanecem estáveis. Acima de 30% da carga, na medida em que a tensão aumenta, as microfissuras da zona de transição também aumentam em comprimento, abertura e em número e a curva tensão x deformação começa a desviar sensivelmente de uma linha reta. Porém, até cerca de 50% da tensão última, ainda admite-se que existe um sistema estável de microfissuras na zona de transição. Entre 50% e 70% começam a formar fissuras na matriz, como também a aumentar as fissuras na zona de transição, formando um sistema instável de fissuras e a curva torna-se menos inclinada em relação ao eixo das deformações. Acima de 75% da carga última desenvolvem-se grandes deformações, indicando que o sistema de fissuras tornou-se contínuo e que o colapso do material se aproxima.

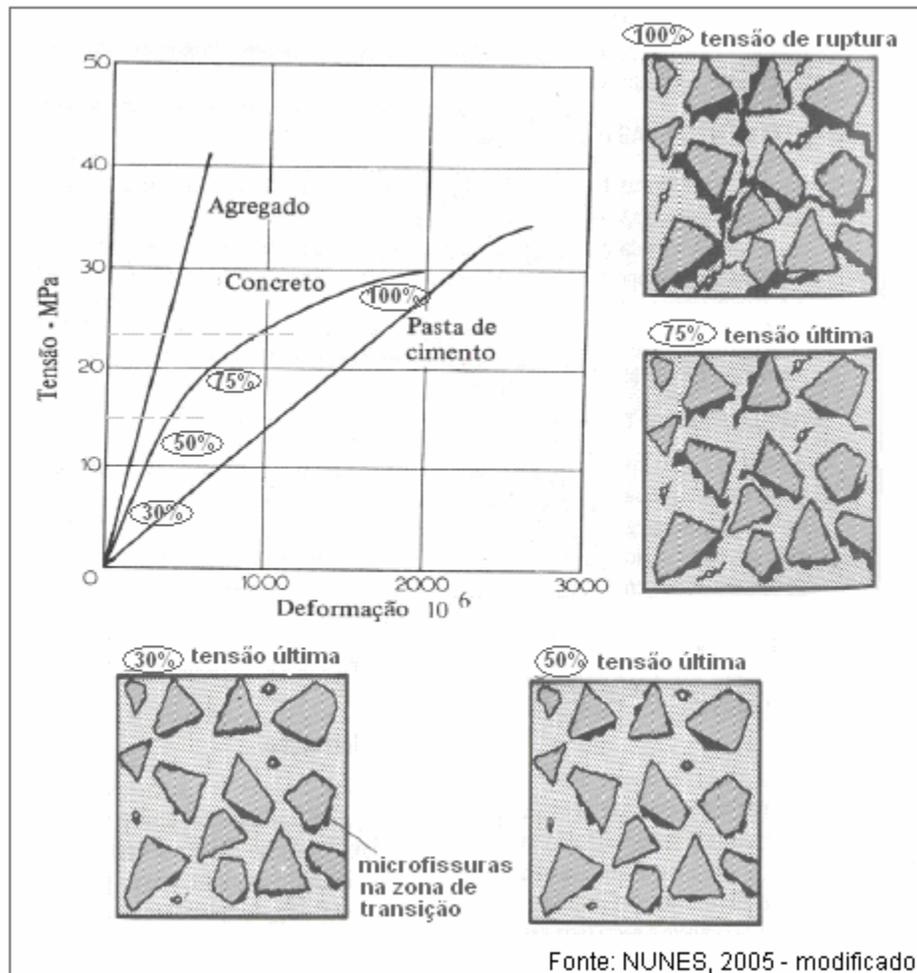


Figura 3.1 – Comportamento tensão x deformação da pasta de cimento, do concreto e do agregado, com a representação esquemática do concreto sob compressão uniaxial

Tem-se um comportamento linear:

- Até a ruptura para os agregados;
- Até 90-95% da ruptura para a pasta de cimento endurecida;
- Somente no início da sollicitação para o compósito.

3.3 Modos de fraturamento e modelo de fissura fictícia (FF)

Segundo Irwin, 1957 (apud RIBEIRO, 2004), num corpo fraturado é possível identificar três modos de fraturamento (figura 3.2):

- Modo I ou de abertura de fissura – refere-se à separação das faces da superfície da fissura, com abertura relativa (separação no plano) - desenvolvendo tensões normais;
- Modo II ou deslizamento – as faces deslizam uma sobre a outra no sentido longitudinal da fissura – desenvolvendo tensões tangenciais (cisalhamento no plano);
- Modo III ou deslizamento lateral – as faces deslizam uma sobre a outra no sentido transversal da fissura – desenvolvendo tensões tangenciais (cisalhamento fora do plano);

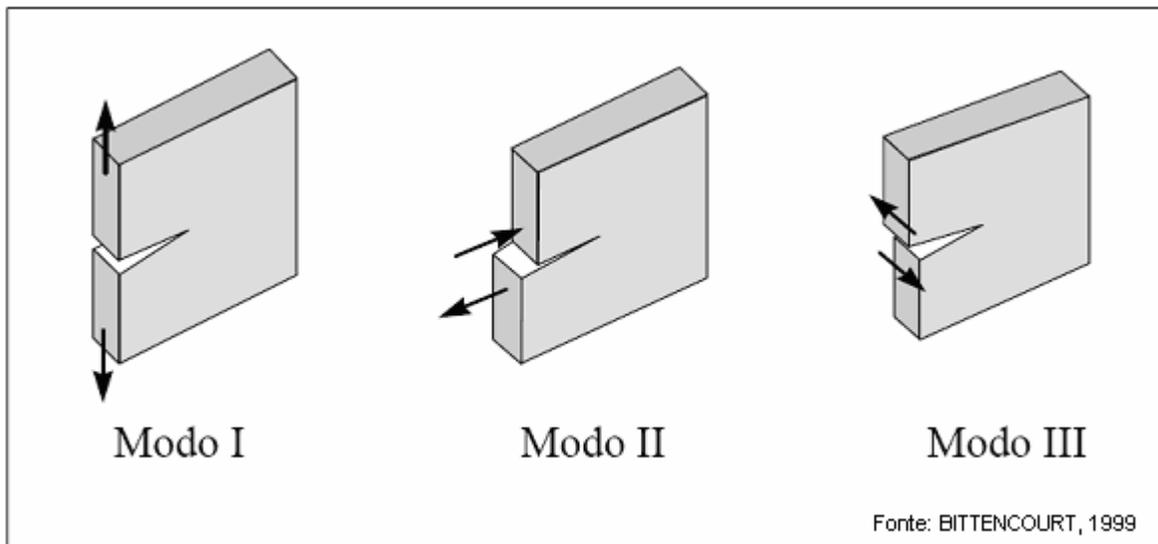


Figura 3.2 - Modos de fraturamento

No mecanismo de crescimento de fissuras no modo I no concreto aparecem as seguintes características: microfissuras distribuídas, zonas de superposição e ramificações e macrofissuras (figura 3.3). A definição da ponta da fissura é muito difícil.

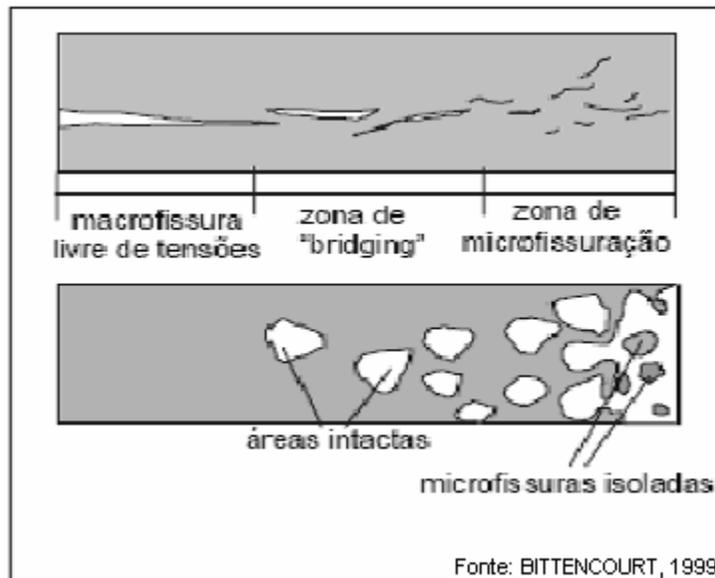


Figura 3.3 - Identificação de mecanismos no modo I de fraturamento.

A zona de processamento de fissuração (ZPF) ou zona de microfissuração, em conjunto com a abertura de fissura, sujeita ao engrenamento ou imbricamento dos agregados (IA) é referida como fenda fictícia (FF) (figura 3.4). Na fenda fictícia consideram-se, unicamente, as tensões normais ao plano da fissura e a fissura fictícia inicia-se quando a máxima tensão principal de tração atinge o valor da resistência à tração do material. Mesmo após atingir o valor máximo de resistência à tração, o material pode sofrer grandes deformações, e ainda consegue suportar tensões.

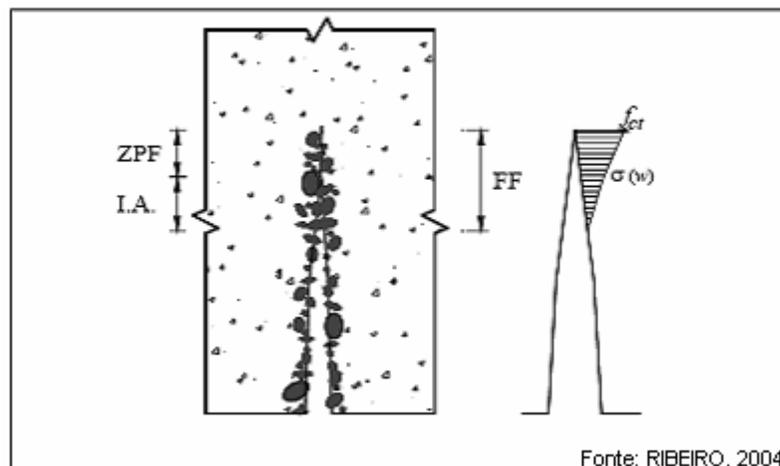


Figura 3.4 - Modelo de fissura fictícia (MFF)

3.4 Fraturamento do concreto simples

Durante uma solicitação de tração, pontos de um material frágil quando atinge uma certa tensão limite perde completamente a sua capacidade de se deformar (não há escoamento) aparecendo aí fissuras, o que leva a tensão a ser nula, e a máxima resistência à tração deste material é denominada “tensão de ruptura por tração”. Em materiais dúcteis, quando se atinge a tensão limite o material não fissa e ainda apresenta capacidade de suportar grandes tensões.

No concreto, ao se atingir a tensão limite de tração, muitas das microfissuras anteriormente existentes se ampliam e algumas se unem formando regiões de fissura. Em partes destas regiões, não ocorre uma desagregação do material e conseqüentemente uma separação total entre as superfícies da fissura. Alcançando a máxima resistência à tração, o material ainda apresenta uma capacidade de se deformar e a tensão entre as superfícies da fratura que está se formando diminui, mas não se anula bruscamente.

Segundo Bittencourt (1999), o fraturamento no concreto se processa de uma forma dita quasi-frágil. As microfissuras, na zona de fraturamento, não são contínuas e devido a essa descontinuidade, o carregamento não é reduzido a zero instantaneamente e sim gradualmente. Esse fenômeno é conhecido como amolecimento (*softening*) ou abrandamento das tensões com o aumento das deformações, e é apontado como a principal diferença entre o comportamento frágil e quasi-frágil das estruturas usuais de concreto. O reconhecimento de que o concreto simples não é um material perfeitamente frágil e que apresenta alguma capacidade de suportar carregamentos após atingir a sua máxima resistência à tração, levou aos modelos de amolecimento do concreto na tração (*tension softening*), onde foi introduzido um ramo descendente, no diagrama tensão-deformação do concreto, para modelar a progressiva queda da resistência de tração. Na sua forma mais simples, o comportamento do material é relacionado ao diagrama tensão x deformação, sendo que a inclinação do ramo ascendente é relacionada ao módulo de elasticidade do material

íntegro, enquanto o ramo descendente determina o módulo de amolecimento de deformações.

Os parâmetros de resistência à tração utilizados em modelagens são dois: a capacidade máxima de resistência à tração do concreto (f_{ct}) e a amplitude do ramo de rigidez à tração do diagrama tensão x deformação do concreto. A amplitude do ramo de amolecimento define a área do diagrama e, conseqüentemente, a energia do fraturamento do concreto sob tração. Com isto, o módulo de amolecimento de deformações é assumido ser função da energia do fraturamento do concreto, da resistência à tração do material e da abertura crítica da fissura.

Como o comportamento em uma região de fissura é diferente do comportamento nas regiões entre as fissuras, o domínio das deformações é descontínuo e, portanto a sua modelagem deve ser feita por modelos constitutivos que levem em conta estas diferenças ao longo do domínio. Os modelos de fissuração ou de fratura podem ser divididos em modelos de fissuras discretas, modelos de fissuras distribuídas ou modelos mistos.

Para modelar o comportamento do concreto sob tração, podem ser usados modelos de fissuras distribuídas (*smearred crack model*) e de fissuras discretas (*discrete crack model*). O modelo de fissuras discretas é apropriado para estruturas onde, na ruptura, têm-se poucas fissuras com os seus caminhos podendo ser previstos. Para a implementação é necessário que a malha seja atualizada, durante o processo de crescimento das fissuras, com o incremento da carga aplicada. Segundo Barros (1995) estes modelos fornecem melhores resultados quanto ao espaçamento e abertura de fissuras, assim como para o estado tensional, nas regiões próximas às fissuras.

No modelo de fissuras distribuídas cada fissura não é representada individualmente. Para a implementação, em vez da malha é a matriz de rigidez de cada elemento onde a resistência à tração é alcançada, que é atualizada. É considerado

como sendo um modelo apropriado para estruturas de concreto onde, na ruptura, tem-se a formação de várias fissuras e não se conhece, a priori, os seus caminhos.

3.4.1 Modelos de fissuração distribuída

Os modelos implementados no programa DIANA são de fissuras distribuídas e são organizados da seguinte forma (figura 3.5):

- Modelos de fissuração do tipo *total strain*:
 - Modelo de fissuras fixas ortogonais (*Total Strain Fixed Model*);
 - Modelo de fissuras rotativas (*Total Strain Rotating Model*);
 - Modelo de fissuras fixas não-ortogonais (*Total Strain Non-orthogonal Crack*);
- Modelo de fissuração com plasticidade.
 - Modelo de fissuras fixas multi-direcionais (*Multi-directional Fixed Crack*).

Estas denominações são utilizadas neste trabalho mantendo-se a nomenclatura empregada no programa utilizado para as análises.

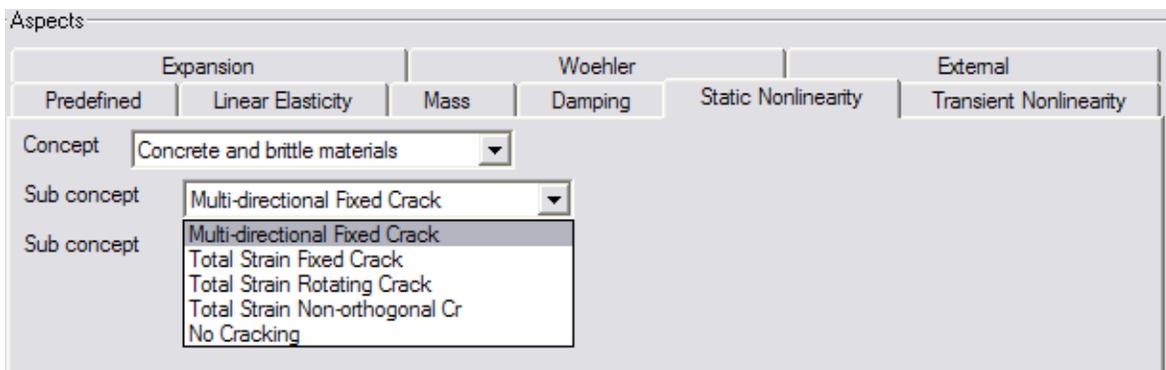


Figura 3.5 – Janela do DIANA para escolher o modelo de fissuração

Considerando-se as simulações de lajes maciças, cujas deformações são regidas, na sua grande maioria, pela flexão e onde várias fissuras podem ser formadas

em alguns elementos, julgou-se que os modelos de fissuração distribuída são os mais apropriados para este tipo de análise.

O modelo de fissuras fixas ortogonais (*Total Strain Fixed Crack*) foi o primeiro modelo desenvolvido, de fissuração distribuída, e considera que a direção de propagação da fissura é mantida fixa, além disso, só podem existir, no máximo, duas fissuras em cada ponto, que devem ser ortogonais.

Quando se tem intertravamento entre agregados e efeito de pino de armadura, tensões cisalhantes podem ser transferidas entre as superfícies de cada fratura, através de um fator de retenção ao cisalhamento ($0 < \beta \leq 1$). As tensões principais mudam de orientação, e a resistência à tração, agora em uma nova direção, pode ser novamente alcançada.

Como este modelo só prevê a abertura de uma nova fissura se ela for perpendicular à primeira, o comportamento estrutural obtido pode ser mais rígido do que na realidade. Para contornar este problema, foram desenvolvidos os modelos de fissuras rotativas e os modelos de fissuras fixas não-ortogonais.

O modelo de fissuras rotativas (*Rotating Crack Model*) não preserva, permanentemente, a orientação da fissura. Para este modelo, o sistema de coordenadas locais da fissura em cada ponto é determinado segundo os eixos das direções principais e, portanto, é continuamente alterado. O ângulo da propagação da fissura é atualizado para cada estágio do carregamento, e com isto, não há uma variação do modo de engrenamento dos agregados, acomodando uma única relação entre as tensões principais e as deformações. Esta é a principal diferença entre os dois modelos de propagação de fissuras.

No modelo de fissuras fixas não-ortogonais (*Total Strain Non-orthogonal Crack*) após a primeira fissura, uma próxima aparecerá desde que se tenha, simultaneamente, as duas condições seguintes:

- A máxima tensão principal alcança a resistência à tração do concreto f_{ct} ;
- O ângulo entre o atual sistema de coordenadas locais e o correspondente à fissura anterior seja maior que um ângulo limite θ , especificado pelo usuário (figura 3.6).

Este é um modelo intermediário que quando:

- $\theta=0$, tem-se o modelo de fissuras rotativas;
- $\theta=90$, tem-se o modelo de fissuras fixas ortogonais.

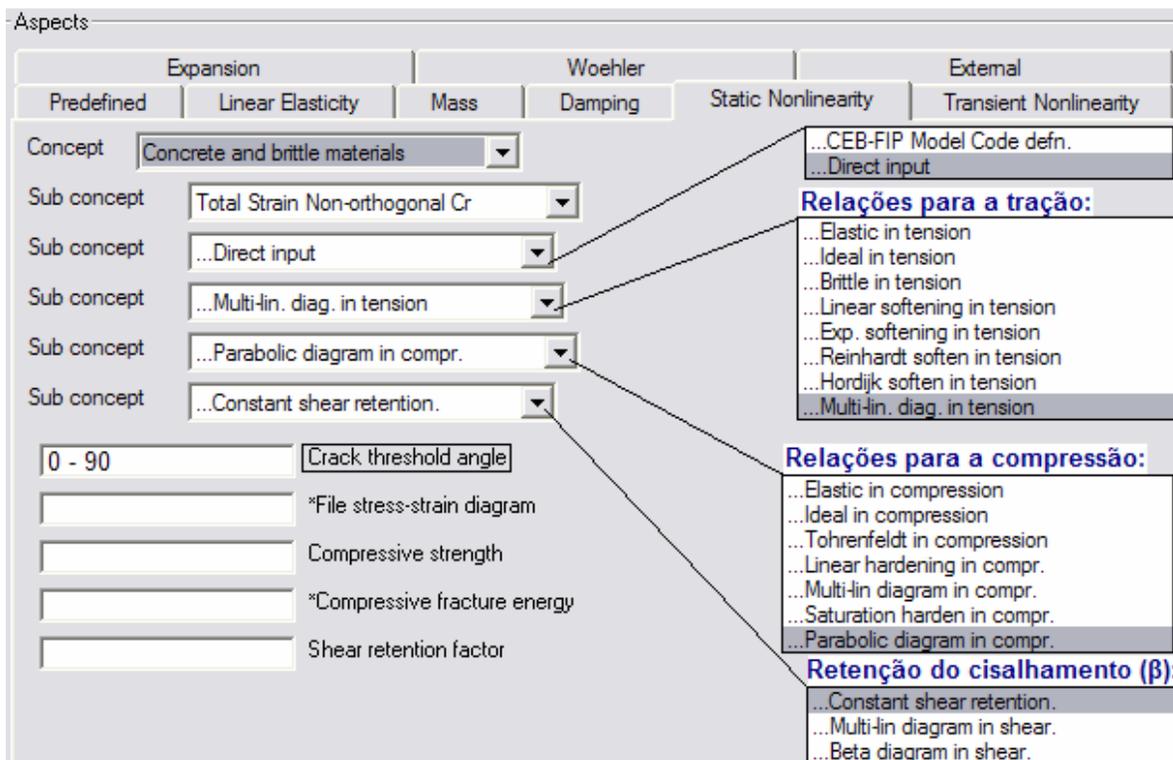


Figura 3.6 – Janela do DIANA para o modelo de fissuração fixa não-ortogonal

O modelo de fissuras fixas multidirecionais (*Multi Directional Fixed Crack Model*) é semelhante ao modelo de fissuras fixas não-ortogonais do tipo *total strain*, mas com o ângulo limite não podendo ser especificado pelo usuário (figura 3.7) e o comportamento na zona de tração é modelado por outros critérios, tais como os de plasticidade.

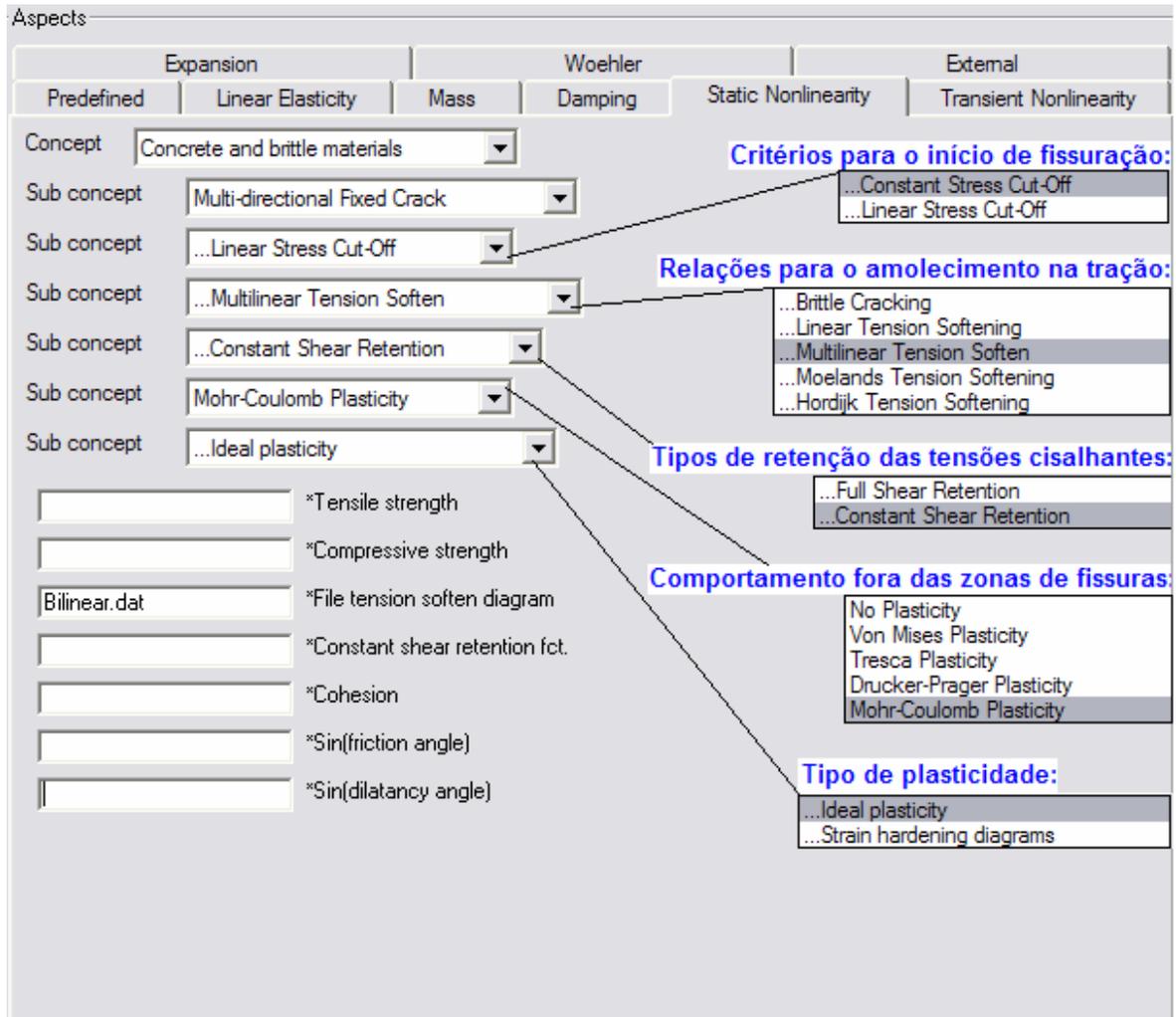


Figura 3.7 – Janela do DIANA para o modelo de fissuração fixa multidirecionais

Os pesquisadores relatam que o “*Rotating Crack Model*” tende a apresentar cargas de ruína inferiores àquelas obtidas com o “*Fixed Crack Model*”, mas apresenta maior estabilidade entre todos os modelos disponíveis no programa DIANA (SOUZA, 2004).

Estes modelos de propagação da fissuração oferecem uma entrada de dados simples, que compreende duas partes: inicialmente, as propriedades básicas, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, e em seguida, as resistências à tração e à compressão, a definição do comportamento do material na tração, na compressão e no cisalhamento.

3.4.2 Definição do comportamento do concreto simples na tração e na compressão

O comportamento à tração dos concretos fissurados, pode ser decomposto em duas parcelas: uma correspondente a deformação do material íntegro entre fissuras e outra correspondente às deformação das fissuras,

$$\tilde{\epsilon}^{tração} = \tilde{\epsilon}^{concreto} + \tilde{\epsilon}^{fissuras} \quad (3.1)$$

A deformação do concreto em cada ponto entre as fissuras é a soma da deformação elástica e da deformação plástica:

$$\tilde{\epsilon}^{concreto} = \tilde{\epsilon}_{\sim e}^{concreto} + \tilde{\epsilon}_{\sim p}^{concreto} \quad (3.2)$$

Segundo Hillerborg (apud RIBEIRO, 2004) o comportamento plástico do concreto entre as fissuras é desprezível, resultando,

$$\tilde{\epsilon}^{tração} = \tilde{\epsilon}_{\sim e}^{concreto} + \tilde{\epsilon}^{fissuras} \quad (3.3)$$

Ao se efetuar esta decomposição se está considerando de uma forma média o comportamento do material, podendo daí se determinar expressões que relacionam apenas as tensões e as deformações em cada ponto, tracionado, do material,

$$\tilde{\sigma}^{tração} = \tilde{D}^{tração} \tilde{\epsilon}^{tração} \quad (3.4)$$

Quando o comportamento à compressão é simulado por expressões que também, relacionam apenas as tensões e as deformações em cada ponto do material, os modelos constitutivos são denominados *total strain*. Um destes modelos é

representado na figura 3.8, onde G_f é energia do fraturamento do concreto à tração e G_c a energia do fraturamento do concreto à compressão.

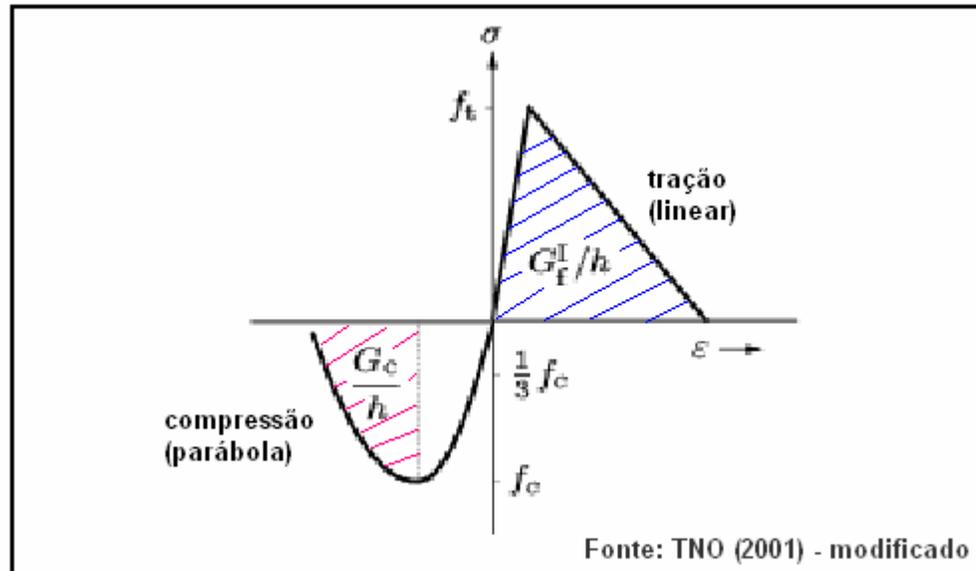


Figura 3.8 – Exemplo de relação constitutiva para os modelos *total strain*, na compressão e na tração

Esta denominação não se aplica quando se tem modelos híbridos, ou seja, modelos onde para a simulação do comportamento do material fora das zonas de fissuras se utiliza algum modelo caracterizado por expressões que não sejam do tipo $\tau = D \varepsilon$, dentre os quais: plasticidade, viscoelasticidade, fluência e variação de temperatura. No programa DIANA são modelos *Multi Directional Fixed Crack*.

Os parâmetros que definem o comportamento de um material em fase de amolecimento são designados como parâmetros de fratura, destacando-se a máxima resistência do concreto à tração, a energia despendida na formação de uma fissura e a forma da relação tensão x abertura da fissura (RIBEIRO, 2004).

As fissuras podem se manifestar numa região localizada da estrutura e os resultados obtidos podem ser dependentes da discretização da malha de elementos finitos adotada nesta região. As fissuras distribuídas são representadas por dois

parâmetros internos do material: um para o comportamento do material sob tração e o outro para o comportamento sob compressão, na situação de esmagamento. Esses parâmetros são relacionados com as energias do fraturamento do concreto na tração (G_f) e na compressão (G_c), e com o comprimento equivalente ou banda de fissuração (h). Desta forma, a energia do fraturamento do concreto (ou, usualmente, energia da fratura) é definida como a energia necessária para propagar a fissura por uma unidade de área, portanto é, na realidade, uma densidade de energia. Relacionar a energia ao comprimento equivalente faz com que as fissuras fiquem independentes da malha adotada, quando a banda de fissuração relaciona-se com o comprimento do elemento finito. A energia do fraturamento é assumida como sendo um parâmetro do material e está relacionada com a resistência à compressão e ao tamanho máximo do agregado. A energia do fraturamento na compressão (G_c) foi proposta por Feenstra e Borst (1995) para modelar o amolecimento na compressão. Nos ensaios experimentais, esta energia tem variado de 10 a 25 Nmm/mm², o que corresponde a mais ou menos 50 a 100 vezes a energia do fraturamento do concreto na tração, podendo ser obtida do diagrama tensão-deslocamento (SOUZA, 2004).

Segundo Feenstra e Borst (1995), a largura da banda de fissuração sob tração relaciona-se ao comprimento do elemento finito enquanto que, para o concreto sob compressão, o comportamento é mais relacionado ao seu volume.

Segundo Ribeiro (2004) o comportamento do concreto fissurado pode ser representado por diversos diagramas de amolecimento com vários níveis de complexidade, dependendo da resposta pretendida. Dentre eles, podem ser citados o diagrama retangular, captura a tendência do processo de fratura, mas usualmente superestima a resistência. O diagrama de amolecimento linear é a segunda forma mais simples de relacionar a tensão com a abertura da fissura ($\sigma \times \omega$) e é muito utilizado quando se desconhece as informações efetivas do material a ser modelado, mas também confere uma resistência superior ao concreto. Este diagrama foi utilizado inicialmente por Hillerborg em 1976. A curva bilinear foi proposta por Petersson em 1981 e desde então, diagramas com este formato têm sido introduzidos e aceitos para

a representação do comportamento do concreto simples fissurado. Na modelagem com este modelo é necessário identificar o ponto que define a abertura da fissura, definindo o primeiro ramo do diagrama. Este diagrama, segundo o código modelo CEB-FIP (1993), tem como variáveis, para a determinação dos parâmetros que definem o diagrama bilinear, a dimensão máxima do agregado e a resistência à compressão. Ainda segundo Ribeiro, o diagrama bilinear é suficiente para a generalidade das aplicações de concreto, mas cita diagramas com outros formatos, como o exponencial.

Cruz *et al* (2004) observaram nas simulações numéricas do ensaio à flexão de três-pontos para as vigas (RILEM 1985), que há influência do tipo de diagrama de amolecimento na tração: com o diagrama de amolecimento linear foram obtidas as máximas cargas de pico, enquanto que os diagramas de amolecimento trilinear ou exponencial levam a respostas idênticas no comportamento pós-pico e com melhor aproximação dos resultados experimentais.

Feenstra e Borst (1995) consideraram suficientemente precisos os resultados do comportamento pós-pico com o diagrama de amolecimento linear à tração, para as aplicações em placas e cascas de concreto armado.

Alguns autores defendem que na configuração trilinear, a existência de três ramos garante flexibilidade suficiente para simular o modo I de fratura para a maior parte dos materiais de matriz cimentícia e sugere a sua utilização na caracterização do concreto reforçado com fibras de aço.

Além destes modelos de comportamento na tração, o programa DIANA também oferece a possibilidade de entrada de dados de outros diagrama de tensão x deformação para o concreto, entre eles o diagrama bilinear. A figura 3.9 apresenta os principais modelos de comportamento de material oferecidos pelo Diana.

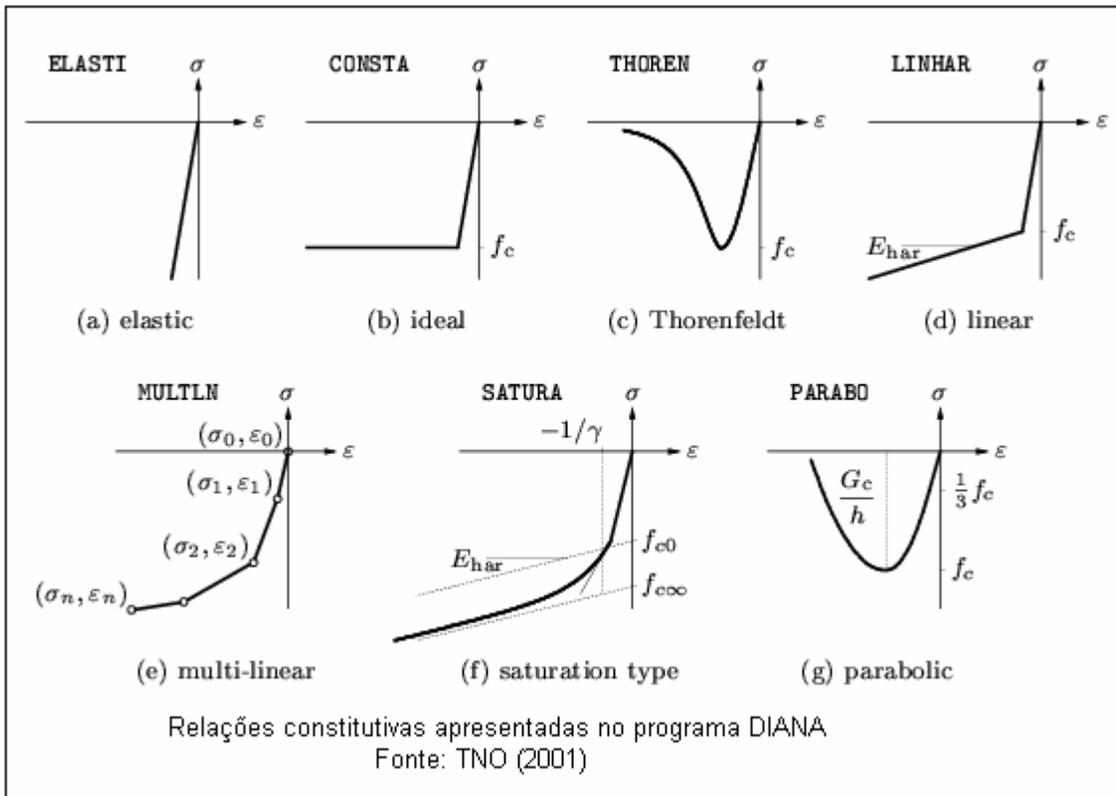


Figura 3.9 – Relações constitutivas apresentadas no programa DIANA

O comportamento do concreto na compressão é usualmente uma função não-linear entre a tensão e a deformação, numa certa direção e, Feenstra e Borst (1995) sugerem que esta função seja definida num diagrama parabólico para o amolecimento na compressão.

O cálculo da banda de fissuração (h), será uma função da área para elemento finito bidimensional e uma função do volume do elemento para o elemento sólido, como sugerido por Feenstra e Borst em 1993 e apresentado no DIANA.

3.4.3 Definição do comportamento do concreto no cisalhamento

A maioria dos modelos numéricos empregados para simulações de fraturamento de concreto são modelos baseados na hipótese de que, embora o material esteja danificado, ainda transmite tensões, ou seja, a fissura apresenta uma região

onde há dissipação de energia. Nesses modelos coesivos, a energia de fraturamento é utilizada como uma propriedade do material.

O comportamento ao cisalhamento do concreto é variável e, de acordo com o nível de fissuração do material, o concreto manifesta uma capacidade de transferência de forças cortantes através das superfícies da fissura. Esta transferência é atribuída, principalmente, ao atrito gerado pela rugosidade existente nas superfícies da fissura, devida às partículas dos agregados e a matriz de cimento, dando um efeito de coesão, o que permitirá ou não o escorregamento entre as superfícies das fissuras. Quando uma fissura abre, as tensões de cisalhamento existentes nela diminuem progressivamente, influenciando a rigidez do material, uma vez que há uma redução do contato entre as faces da fissura. Este comportamento, pode ser simulado através da redução do módulo de elasticidade transversal (G) por um parâmetro β denominado fator de retenção das tensões cisalhantes. Este fator é diminuído na medida em que a fissura se abre e, portanto, pode variar de 0 a 1. Apesar do programa DIANA oferecer opções para tratar o fenômeno de conservação do cisalhamento de maneira completa ou variável, adotou-se o parâmetro β constante.

3.4.4 Energia do fraturamento do concreto

A energia do fraturamento do concreto, nos programas computacionais, é determinada com base no diagrama de amolecimento tensão x abertura de fissura. Como estes diagramas são de difícil obtenção experimental, uma vez que requer equipamentos e procedimentos específicos, podem ser obtidos por análise inversa.

3.4.5 Resistência do concreto à tração

A resistência do concreto à tração corresponde à máxima resistência do concreto, imediatamente, antes do início da fissuração. Atribui-se o valor de resistência média à tração uniaxial que pode ser determinada experimentalmente através de

ensaios de resistência à tração direta ou segundo as expressões encontradas no RILEM (2003):

$$f_{ctk} = 0,7f_{ctm} \quad (N/mm^2) \quad (3.5)$$

onde $f_{ctm,f} = \frac{f_{ctm,ax}}{0,6}$ (3.6)

a norma brasileira faz a relação com os resultados dos ensaios de resistência à tração indireta (ou ensaio de compressão diametral, também conhecido como Ensaio Brasileiro, proposto pelo professor Fernando Lobo Carneiro) e à tração na flexão:

$$f_{ct} = 0,9f_{ct,sp} \quad (3.7)$$

$$f_{ct} = 0,7f_{ct,f} \quad (3.8)$$

ou ainda, a NBR 6118 (2003) avalia a resistência à tração direta pelo seu valor médio ou característico:

$$f_{ct,m} = 0,3f_{ck}^{2/3} \quad (N/mm^2) \quad (3.9)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7f_{ct,m} \quad (N/mm^2) \quad (3.10)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3f_{ct,m} \quad (N/mm^2) \quad (3.11)$$

No entanto, as investigações revelam que a resistência à tração, obtida segundo estas formulações conduzem a deficientes simulações numéricas, devendo-se adotar valores variando no seguinte intervalo (RIBEIRO, 2004):

$$0,3 \cdot f_{ctm,f} < f_{ct} < f_{ctm,f} \quad (3.12)$$

A figura 3.10 mostra a influência da resistência à tração no concreto, na resposta carga x deslocamentos. Pode-se observar que até 90% da sua resistência máxima à tração, o concreto comporta-se como um material elástico linear. A partir desta fase, com o aumento do carregamento, criam-se condições para a formação de microfissuras que se concentram num determinado ponto. As pesquisas têm revelado que este fenômeno de localização depende da estrutura interna do material e as

técnicas modernas têm permitido monitorar o desenvolvimento de fissuras internas nos corpos de prova. Com o aumento da resistência à tração, no início da fissuração, a capacidade de carga aumenta de forma significativa.

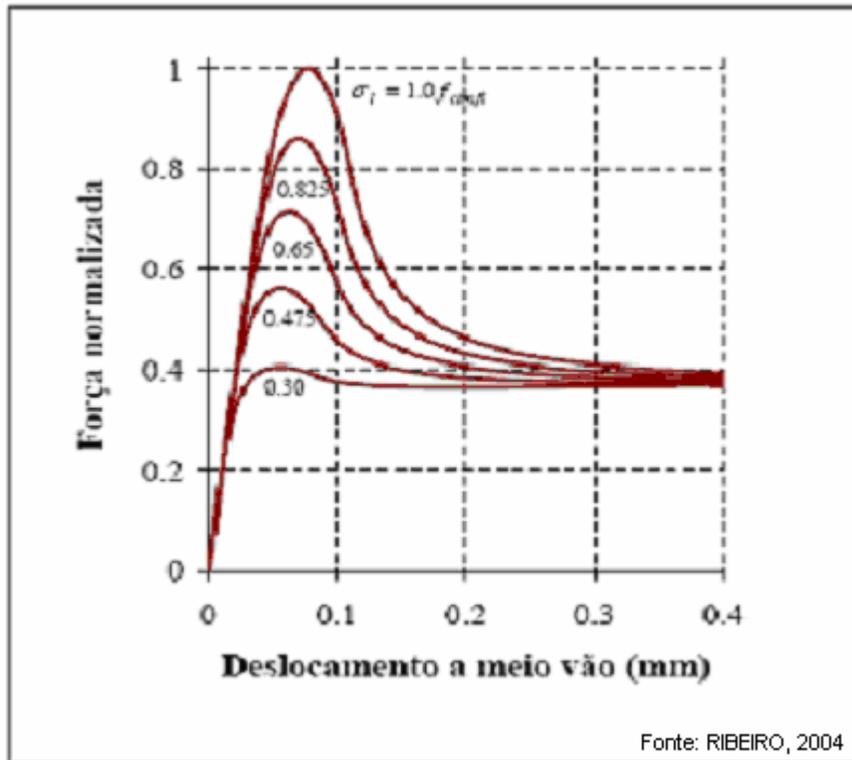


Figura 3.10 – Influência da resistência à tração no início da fissuração do concreto

3.5 Definição do comportamento do aço e do concreto armado

Na modelagem do aço na laje de concreto o software utiliza, no momento da descrição física do material, uma opção denominada *embedded reinforcement*. Com esta opção a armadura pode ser inserida no material como barras isoladas ou como armadura distribuída com uma direção definida, gerando a armadura para o concreto armado automaticamente, por meio de elementos de viga de Bernoulli-Euler de dois nós, cujos deslocamentos são os mesmos do elemento no qual está inserido. Desta maneira, elimina-se a possibilidade de ruptura por escorregamento das armaduras, considerando-se uma aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Para o aço, adotou-se o modelo de ruptura de Von Mises, com o modelo constitutivo elasto-plástico perfeito. Com o comando *reinforcement bonded* o programa considera, além da aderência perfeita, o trabalho conjunto das barras da armadura. Na modelagem numérica do DIANA, o efeito da não-linearidade física é considerado somente para o concreto.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE NUMÉRICA DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

No trabalho de Lourenço (1999) foi, novamente, colocada a questão: Como avaliar os resultados de um cálculo não-linear? A sugestão é de que deve ser feita a comparação com resultados experimentais ou com resultados medidos na própria estrutura construída, sendo, atualmente, a única forma de validar um cálculo numérico para problemas mais complexos, onde não existem soluções analíticas.

Neste capítulo serão apresentadas as simulações numéricas do comportamento de lajes maciças de concreto armado que foram submetidas, em laboratório, a carregamentos que as levaram à ruína por flexão. Serão simuladas as lajes de Campos (2000) e Pires (2003), ensaiadas para a investigação de reforços em lajes pela face superior.

Algumas das lajes foram executadas apresentando alguma deficiência estrutural, simulando situações, possíveis em obra, que provocam patologias freqüentes em peças de concreto armado: insuficiência na taxa de armadura, uso de concreto inadequado, espessura indevida da laje. As lajes foram ensaiadas em duas etapas, sendo que na primeira provocou-se manifestações de grandes flechas e aparecimento de fissuras. Os critérios de parada do ensaio e o conseqüente fim da primeira etapa, basearam-se em aspectos como: deformação da armadura principal atingindo o início do escoamento, abertura de fissuras e flechas com a ordem de grandeza da espessura da laje, podendo ultrapassar os limites estabelecidos na norma vigente.

É condição primordial, para ter uma modelagem numérica confiável, fornecer ao programa que está sendo utilizando as mesmas propriedades geométricas

e físicas das estruturas que serão simuladas. Nas modelagens apresentadas, a maioria dos valores destas propriedades foi obtida dos trabalhos apresentados pelos autores e as propriedades que não foram relatadas foram estimadas com base em normas como a NBR-6118(2003) e o CEB-FIP (1990) ou em dados fornecidos pela literatura.

4.1 Apresentação das lajes modeladas

As lajes simuladas apresentam as seguintes características:

- modelo em escala real e com espessuras diferentes ;
- apoio nas quatro bordas ou apoio em duas bordas;
- presença de armadura de canto, nas superfícies inferior e superior;
- lajes armadas em duas ou em uma direção;
- aplicação de carga uniformemente distribuída ou aplicação de carga em duas linhas de carregamento;

Campos (2000), em seu programa experimental, ensaiou à flexão cinco lajes maciças de concreto armado, quadradas e simplesmente apoiadas, com vãos de 400 cm. Uma das lajes rompeu com carregamento aquém do previsto e por isso, foram modeladas apenas as outras quatro lajes.

A laje de referência dos ensaios foi dimensionada de acordo com a NBR 6118/80 para sobrecarga de $1,5 \text{ KN/m}^2$ e foi executada com as dimensões de $415 \times 415 \times 8,10$ (cm), armada nas duas direções com 21 barras de aço de 5,0 mm de diâmetro. Adicionalmente, foi utilizada, em cada canto da laje, nas faces inferior e superior, uma armadura composta de quatro barras de aço de 5,0 mm de diâmetro dispostas a 45° , segundo a norma vigente à época e Parsekian (1996, citado pelo autor). A laje foi ensaiada uma única vez, com carga uniformemente distribuída chegando a $9,25 \text{ KN/m}^2$, rompendo por flexão, com escoamento e ruptura da armadura na região central, sem ter sido observado sinal de esmagamento do concreto, na face superior.

A segunda laje ensaiada diferia da laje de referência apenas na espessura que era de 7,2 cm, sendo ensaiada até um ponto pré-estabelecido de parada no ensaio. As outras duas lajes foram executadas apresentando patologias comuns, uma com deficiência na armadura e a outra com deficiência na resistência do concreto. Todas as lajes, exceto a de referência, na segunda etapa dos ensaios, foram descarregadas e reforçadas com camada de concreto na superfície superior em forma de lente. As lajes, depois de reforçadas, não foram modeladas neste trabalho.

Pires (2003) ensaiou lajes retangulares maciças de concreto armado, dentre elas, duas lajes de 60 x 170, com espessuras de 10 e 15 cm, simplesmente apoiadas e armadas na direção longitudinal com seis barras de aço de 10.0 mm de diâmetro e na direção transversal, com seis barras de aço de 6.3 mm de diâmetro. A carga foi aplicada em duas linhas de carregamento e foi relatado que a ruptura deu-se por flexão com esmagamento do concreto comprimido sob as linhas de aplicação de carga, para carregamentos de 66,7KN e 118,8KN respectivamente.

A figura 4.1 apresenta as dimensões, o detalhamento das armaduras e o esquema de apoio da laje de referência de Campos (2000). A espessura das lajes variou de 7,0 a 8,1 cm.

As figuras 4.2 e 4.3 apresentam as dimensões, detalhamento das armaduras e esquema de carregamentos das lajes de Pires (2003).

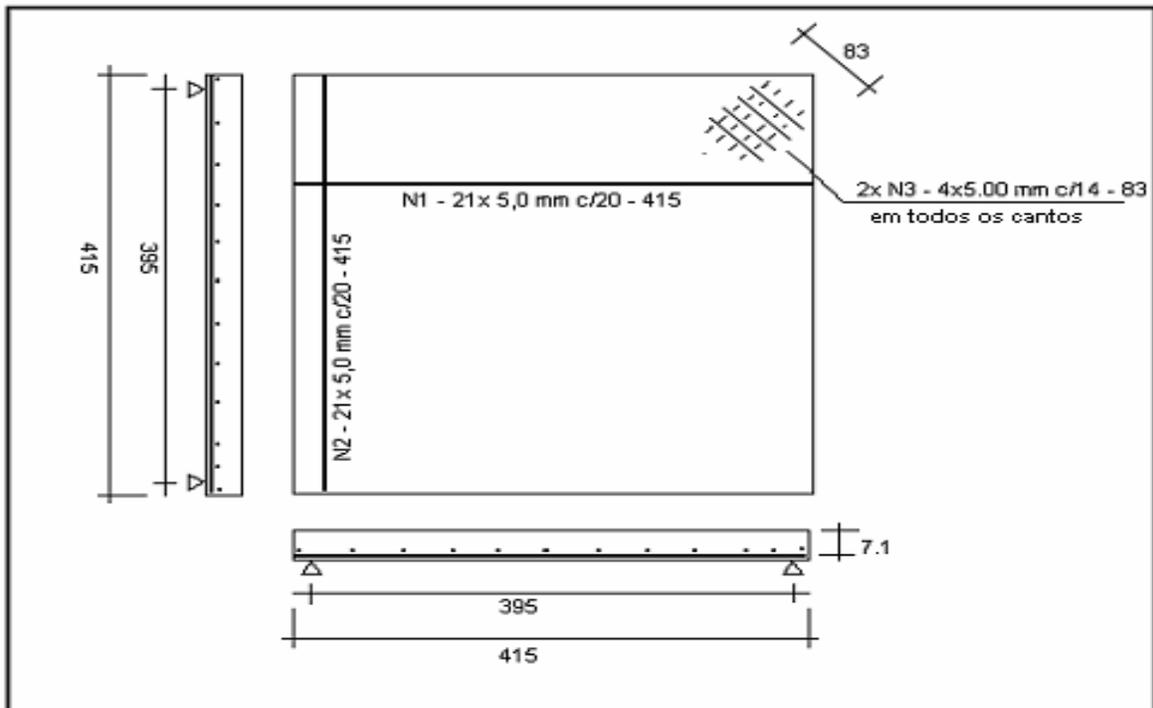


Figura 4.1 – Dimensões, detalhamento das armaduras e apoios das lajes ensaiadas por Campos (2000)

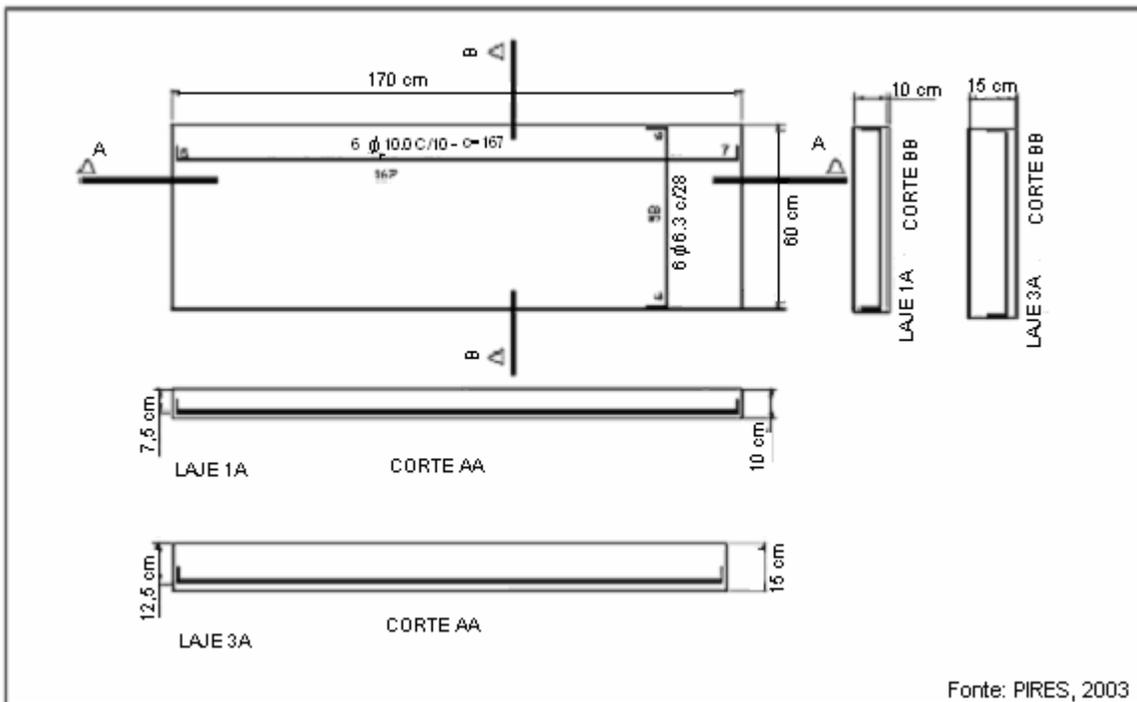


Figura 4.2 – Dimensões, detalhamento das armaduras e apoios das lajes ensaiadas por Pires (2003)

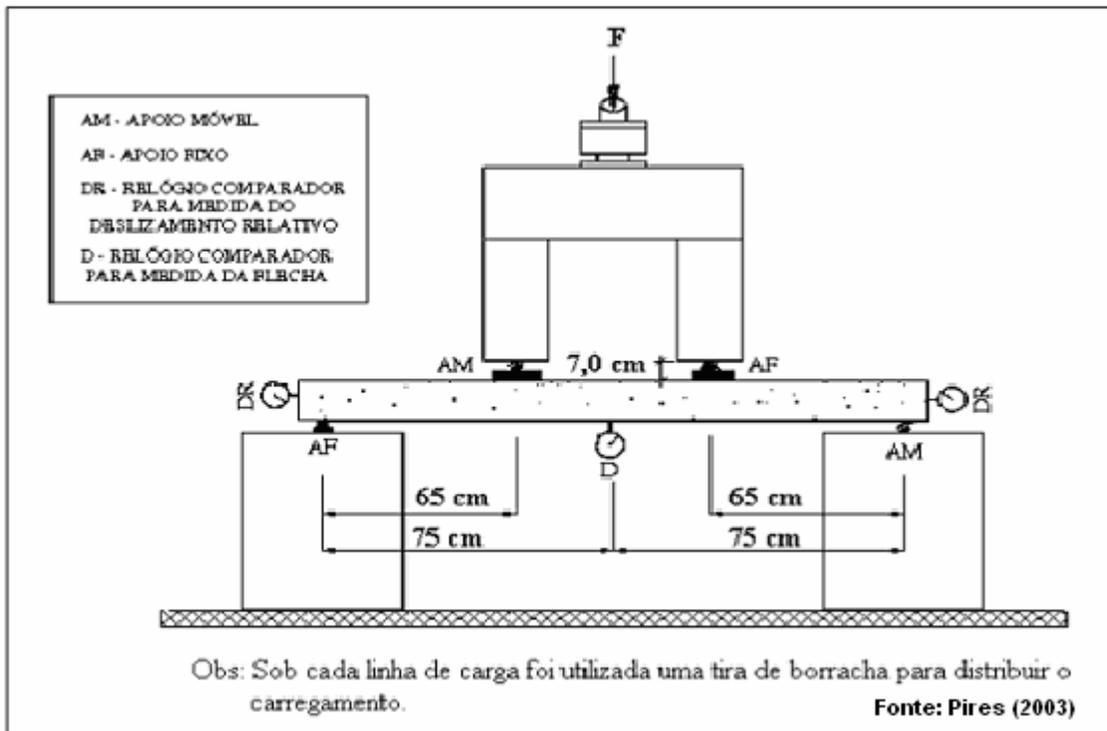


Figura 4.3 – Esquema de carregamento das lajes dos ensaios experimentais de Pires (2003)

4.2 Apresentação dos resultados experimentais

Os autores relatam que as propriedades mecânicas do concreto foram determinadas por ensaios de resistência à compressão simples, realizados seguindo as recomendações da NBR 5739 (1994). O módulo de elasticidade longitudinal foi determinado de conformidade com a NBR 8522/84. Amostras de aço também foram ensaiadas para a determinação das resistências de escoamento e de ruptura, do módulo de elasticidade e a deformação específica, de acordo com a NBR 6152 (1980). Ensaios de resistência à compressão diametral do concreto (também conhecido como Ensaio Brasileiro, proposto pelo professor Fernando Lobo Carneiro) foram realizados apenas por Pires (2003). Valores das energias de fraturamento do concreto na tração ou na compressão não foram relatados pelos autores.

4.2.1 Lajes de Campos (2000)

Na tabela 4.1 são apresentados os valores médios das propriedades do concreto nas idades do ensaio, juntamente com as principais características das lajes, e na tabela 4.2 são apresentadas as propriedades das barras de aço ensaiadas. Foi mantida a nomenclatura original do autor.

Tabela 4.1 - Características do concreto, do aço e das lajes de Campos (2000)

Laje	Ensaio da laje (dias)	f_c (MPa)	E_c (GPa)	f_y (MPa)	h (cm)	d (cm)	A_s (cm ²)	ρ (%)	q_{parada} (KN/m ²)	$q_{ruptura}$ (KN/m ²)
L1	18	20,8	16,1	761,7	8,1	7,1	0,97	0,14	-	9,25
L2	21	20,7	17,1	734,2	7,2	6,2	0,97	0,15	6,50	-
L3A	30	19,8	17,3	759,2	7,5	6,5	0,45	0,08	2,25	-
L4	17	12,4	15,7	777,2	7,0	6,0	0,97	0,16	4,75	-

Todas as cargas sem considerar o peso próprio da laje

Tabela 4.2 - Características do aço utilizado nas lajes de Campos (2000)

Laje	\emptyset (mm)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	ϵ (%)	E_s (GPa)
L1	5,0	761,7	829,2	0,57	204,7
L2	5,0	734,2	771,6	0,56	200,3
L3A	3,4	759,2	780,6	0,57	205,2
L4	5,0	777,2	841,2	0,58	201,4

Não foram realizados ensaios para a verificação das resistências à tração dos concretos, entretanto testes realizados para a verificação da resistência de aderência por tração direta, entre os concretos originais das lajes e das camadas de reforço mostraram que a resistência à tração direta do concreto não poderia ser menor

que a resistência de aderência. Foram realizados 87 testes de arrancamento e registrados os modos de ruptura. Para o desenvolvimento desta pesquisa interessou o modo de ruptura nominado pelo autor como CA, ou o ocorrido no concreto antigo da laje, ou seja, fora da camada de reforço ou da interface das camadas. Estes valores de tensões apresentaram diferenças de até três vezes entre si, e são resumidos na tabela 4.3. Apesar dos resultados indicarem limites amplos, o autor relatou que ocorreu uma concentração significativa de valores na faixa de 1,0 MPa a 1,1 MPa e, visualmente, não foi observado nenhum sinal de descolamento ou deslocamento da camada do concreto de reforço. Estes valores são próximos dos encontrados em ensaios de testemunhos extraídos em peças de referência com os concretos originais.

O autor apresentou a equação de correlação entre a resistência cilíndrica à compressão do concreto e o ensaio de tração simples (direta – “Dispositivo de Leroy”) utilizada por FURNAS (1997 apud CAMPOS, 2000):

$$f_{tp} = \frac{f_{cc}^2}{(0,504f_{cc}^2 + 0,466f_{cc} + 87,68)} \quad (4.1)$$

Segundo FURNAS para concreto com resistências à compressão entre 12,0 MPa e 20,0 MPa, a equação fornece uma resistência à tração direta entre 0,87 MPa a 1,34 MPa. No relato do autor, este intervalo contém os valores obtidos nos testes de arrancamento das lajes.

Utilizando as expressões encontradas na NBR 6118 (2003), para a determinação dos valores médios da resistência à tração direta (f_{ct}) e do módulo de elasticidade (E_c) a partir da resistência à compressão do concreto das lajes, é apresentada, na tabela 4.3, uma comparação entre os valores estimados.

Tabela 4.3 - Comparação entre os valores estimados para as propriedades dos concretos das lajes de Campos (2000)

Laje	Data Ensaio da laje (dias)	f_c ensaio (MPa)	f_{cj} 7dias (MPa)	E_{ci} (GPa)	f_{ct} ensaio arrancamento (modo ruptura CA) (MPa)	f_{ct} NBR 6118/03 (MPa)	f_{ct} FURNAS (MPa)	E_{cs} NBR 6118/03 (GPa)
L1	18	20,8	17,0	16,1	-	1,59 a 2,95	1,372	21,71
L2	21	20,7	17,6	17,1	0,50 a 1,08	1,59 a 2,94	1,368	21,66
L3A	30	19,8	16,0	16,5	0,36 a 1,05	1,54 a 2,85	1,331	21,18
L4	17	12,4	9,6	15,7	0,43 a 1,01	1,12 a 2,09	0,899	16,76

E_{ci} o módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial do concreto
 E_{cs} o módulo de elasticidade secante do concreto

Os valores da resistência à tração correlacionados com a expressão de FURNAS (1997) ficaram abaixo dos limites estimados pela NBR 6118 (2003); os valores determinados pelos dados dos ensaios para o módulo de elasticidade do concreto foram inferiores aos estimados pela norma brasileira. Ressalta-se que a expressão fornecida pela norma considera a resistência do concreto à compressão aos vinte e oito dias e os valores obtidos são aplicáveis para a obtenção do módulo de elasticidade em idades a partir de 7 dias.

4.2.1.1 Influência da armadura de canto na face inferior

Os modelos experimentais de Campos (2000) apresentam armadura disposta diagonalmente em todos os cantos, nas faces inferior e superior. Não são fornecidos os dados da monitoração do concreto especificamente nos cantos, porém o

autor apresenta, no seu trabalho, o desenho esquemático da evolução da fissuração na face inferior da laje L1, que indica o aparecimento das fissuras em função do carregamento, e informa que as demais lajes apresentaram esquema de fissuração similar.

4.2.2 Lajes de Pires (2003)

Pires (2003) relatou que nos seus experimentos foram empregados dois tipos de concreto: o das lajes originais e o concreto da camada de reforço. Na data do ensaio, o concreto das lajes originais tinha idade entre 8 e 10 anos.

Para a avaliação de características do concreto das lajes a autora apresenta os resultados dos ensaios para a determinação da resistência à compressão, do módulo de elasticidade secante e da resistência à tração (obtida no ensaio de compressão diametral). Os valores médios da resistência à compressão foi de 37,5 MPa, do módulo de elasticidade de 25,9 GPa e da resistência à tração indireta de 2,41 MPa.

O aço das armaduras de tração, com diâmetro de 10.0mm, foi caracterizado através de ensaio de tração e os valores médios das suas propriedades mecânicas são apresentados na tabela 4.4 juntamente com os valores das propriedades do concreto e das principais características das lajes, que são nominadas conforme nomenclatura original da autora. Foi relatada a ausência de patamar de escoamento para o aço. As propriedades mecânicas da armadura de distribuição, de diâmetro de 6.4 mm, não foram indicadas.

Na tabela 4.5 são apresentados os valores estimados das propriedades do concreto pela norma brasileira, a partir da resistência à compressão do concreto.

Tabela 4.4 - Características do concreto, do aço e das lajes de Pires (2003)

Laje	f_c (MPa)	E_c (GPa)	$f_{ct,sp}$ (MPa)	\emptyset (mm)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	E_s (GPa)	h (cm)	d (cm)	$q_{ruptura}$ (KN)
L1A	37,5	25,9	2,41	10,0	682,6	803,0	199,5	10	7,5	67,0
L3A	37,5	25,9	2,41	10,0	682,6	803,0	199,5	15	12,5	115,0

Tabela 4.5 - Comparação entre os valores estimados para as propriedades do concreto das lajes de Pires (2003)

Lajes	Data do Ensaio das lajes	f_c ensaio (MPa)	E_{ci} (GPa)	f_{ct} NBR 6118/03 (MPa)	E_{cs} NBR 6118/03 (GPa)
L1 e L3	10 anos	37,5	25,9	$2,35 < f_{ct} < 4,37$	29,15

E_{ci} o módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial do concreto
 E_{cs} o módulo de elasticidade secante do concreto

Segundo a norma brasileira, a resistência à tração direta f_{ct} pode ser considerada igual a 90% dos valores obtidos nos ensaios do concreto à tração indireta (ensaio de compressão diametral) ($0,9 f_{ct,sp}$) ou 70% dos valores obtidos nos ensaios do concreto à tração na flexão ($0,7 f_{ct,f}$).

4.3 Apresentação do programa das modelagens numéricas

Uma abordagem estrutural utilizando o MEF requer um número substancial de parâmetros, uma análise cuidadosa das condições de contorno e uma análise ainda mais cuidadosa dos resultados obtidos. Os procedimentos com o MEF não são exatos em prever os campos de tensão e de deformação nas estruturas de concreto, mas tem-se mostrado bastante eficaz nas simulações de desempenho de estruturas, fornecendo dados para uma conclusão mais efetiva do elemento estrutural projetado em relação aos estados limites. Ainda existem poucas recomendações quanto ao uso do MEF nos códigos vigentes de concreto estrutural.

Dentre as dificuldades de modelar o comportamento de estruturas em concreto está a de incorporar o correto comportamento do material que é um compósito com fissuras no seu interior e por isso apresenta um comportamento eminentemente não-linear a partir de um certo carregamento. Munir programas de análise estrutural com dados próximos à realidade propiciarão soluções mais próximas das obtidas experimentalmente; porém, a qualidade destes dados depende de vários fatores: as condições de ensaio, o número de corpos de prova, o tratamento estatístico dado aos resultados.

Para as modelagens numéricas das lajes foi utilizada a versão 8.1.2 do programa computacional DIANA, que foi implementado com base no Método dos Elementos Finitos, modelo de deslocamentos para análises linear e não-linear. Este programa foi idealizado por engenheiros civis com o objetivo de ser utilizado, principalmente, para a análise de estruturas de concreto (simples, armado ou protendido) e problemas de geotecnia.

Para cada uma das lajes, a sua geometria foi construída definindo-se pontos, linhas, superfícies e volumes. Para as armaduras é necessário apenas a definição de alguns pontos.

Para a representação do concreto, da variedade de elementos finitos oferecidas pelo programa DIANA, foram utilizados os elementos de casca e elementos de sólido. Para o aço, modelado como barras isoladas ou como *grid*, o programa gera, automaticamente, elementos lineares de dois nós. Os elementos utilizados estão representados na figura 4.4.

As barras de armadura podem ser embutidas em várias famílias de elementos: vigas, tensões ou deformações planas, cascas e sólidos. Na modelagem com elementos finitos, estas barras têm a forma de uma linha. O comprimento total da barra pode ser dividido em várias partes. Por definição do programa DIANA, estas partes devem ficar completamente inseridas no elemento estrutural. Os pontos de

localização definem a localização das barras dentro do elemento finito e os pontos intermediários definem a curvatura das barras (figura 4.4 c1). As tensões e deformações das barras de armadura estão orientadas na direção dos seus eixos x e são acoplados aos graus de liberdade do elemento finito que as envolve (figura 4.4 c2). As partes de armadura inseridas como *grid* nos elementos de casca ou sólido devem estar totalmente inseridas nestes elementos, inclusive na espessura da casca (figura 4.4 d).

O elemento de casca utilizado foi o CQ40S que é um elemento isoparamétrico de oito nós de casca curva, com cinco graus de liberdade em cada nó: três translações e duas rotações. As deformações nas seções transversais são causadas tanto pelas tensões normais quanto pelas tensões de cisalhamento, de acordo com a teoria de Reissner-Mindlin, porém com a simplificação de que, após a deformação, as seções permanecem planas mas não, necessariamente, perpendiculares à superfície neutra. O elemento sólido utilizado foi o CHX60 que é um elemento isoparamétrico de 20 nós e apresenta três translações em cada nó. Ambos os elementos possuem interpolação quadrática e integração pelo método da quadratura de Gauss.

Os valores de energia do modo I de fratura G_f e de energia da fratura na compressão G_c , foram calculados por equações fornecidas pelo CEB-FIP(1990). Como não se tinham as curvas que representavam o comportamento pós-pico do concreto tracionado, estas foram simuladas por funções bilineares obtidas por retroanálises.

Para a resolução das equações de equilíbrio não-lineares, utilizou-se o método iterativo de Newton-Raphson Regular que apresentou um desempenho diferenciado em relação aos outros métodos, quando se comparou o número de iterações necessárias para a convergência. Para controlar a precisão das análises foi empregada a norma de deslocamentos sem empregar a técnica de direção de busca "Line-Search" disponível no programa. Esta opção foi adotada, ao perceber-se que em algumas simulações, usando a norma de energia ou a de força, as análises eram

incapazes de avançar, ainda sob carregamentos relativamente baixos. Foram aplicados 25 passos de carga, com incrementos fixos, uma vez que se constatou que um número maior de passos de carga, para estes modelos de laje, não conduzia a melhores respostas.

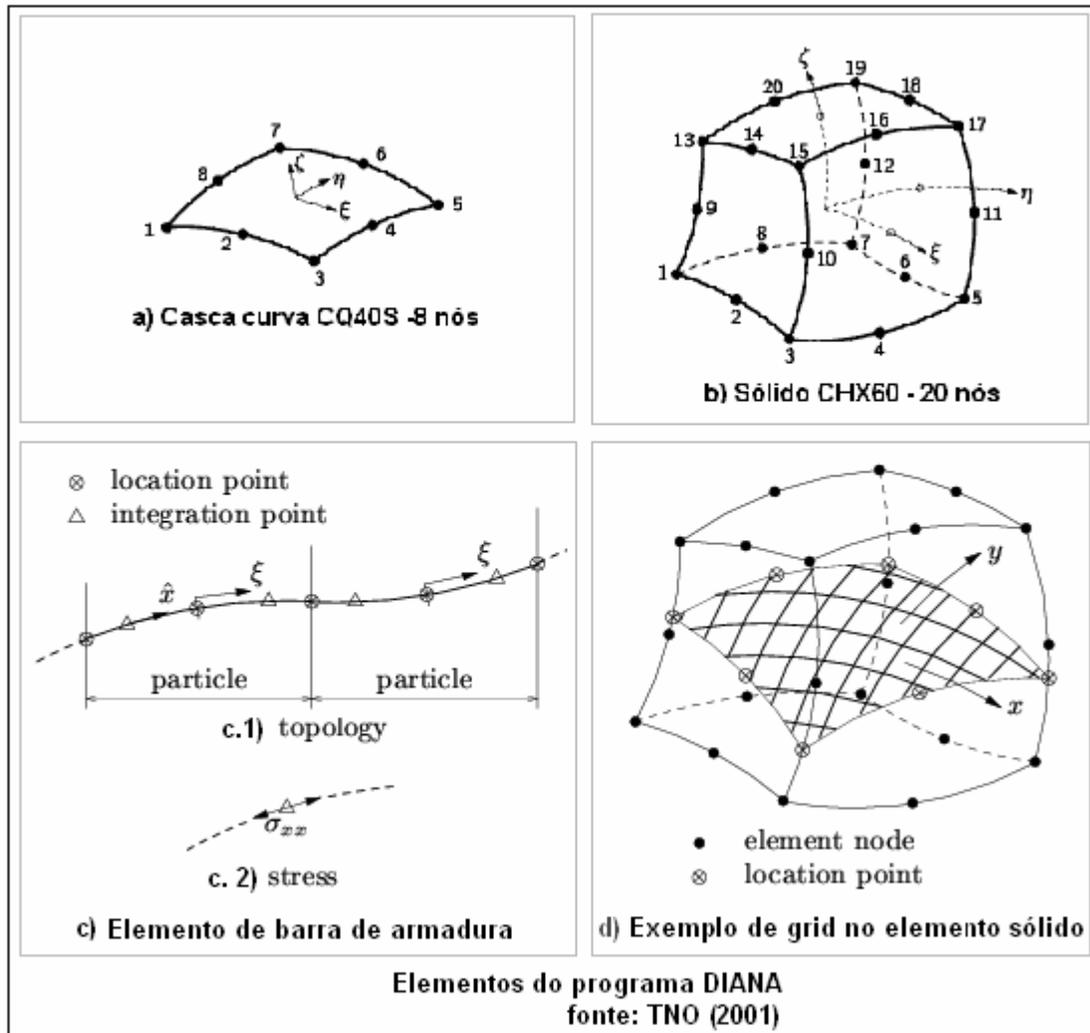


Figura 4.4– Elementos de casca, sólido e de armadura.

4.3.1 Apresentação dos modelos numéricos

Para a definição do programa de análises numéricas a serem efetuadas, várias análises preliminares foram realizadas, com a laje L1 de Campos (2000) e a laje L1A de Pires (2003).

Foram aplicados os modelos de fissuras oferecidos pelo programa:

- *Total Strain Rotating Crack*;
- *Total Strain Fixed Crack*;
- *Multi-directional Fixed Crack* (MDFC);

Estas denominações foram empregadas neste trabalho.

Inicialmente as análises foram realizadas utilizando modelagens com elementos de casca e o modelo de fissuração *Total Strain Rotating Crack*, por serem mais simples e pela facilidade de entrada de dados.

Para avaliar a sensibilidade dos resultados fornecidos pelo programa na análise não-linear destes tipos de lajes e verificar a influência de alguns dos dados de entrada que possam não estar totalmente de acordo com os fornecidos por análises experimentais, foram feitas análises variando-se os seguintes parâmetros: propriedades dos materiais, alterações de geometria (espessura da laje e posicionamento das armaduras). Estas análises foram feitas através dos gráficos carga x flechas no meio da laje.

O programa numérico, propriamente dito, foi constituído da modelagem de quatro lajes de Campos (2000), com a verificação do comportamento com e sem armadura nos cantos; e das lajes L1A e L3A de Pires (2003). Não foram analisadas as lajes com a camada de reforço de concreto simples relatada nos dois programas experimentais.

Foram construídos três modelos para a simulação de cada laje, o primeiro modelo com elementos de casca e os outros dois com elementos sólidos. Para comparar, de forma mais adequada, as modelagens com casca e as modelagens com sólidos, o primeiro modelo com elementos sólidos, foi construído com os apoios na superfície média da laje, uma vez que um elemento de casca é representado pela sua superfície média. Porém, esta proposta de modelagem com sólidos não representa as

condições de apoio dos ensaios experimentais, e, por isso, as lajes com elementos sólidos também foram modeladas com os apoios na face inferior, ou seja, no fundo.

4.3.1.1 Modelos numéricos para as lajes de Campos (2000)

Devida à dupla simetria das lajes, pôde-se modelar apenas um quarto da geometria com as seguintes condições de contorno aplicadas a cada um dos planos de simetria: impedimento das rotações em torno de um eixo passando pela superfície média e das translações perpendiculares.

Assim como nos resultados experimentais, foram considerados, nas modelagens numéricas, apenas os carregamentos externos, uniformemente distribuídos, aplicados na superfície superior de cada laje. As malhas e as condições de apoio, para os modelos, são mostradas nas figuras 4.5 e 4.6.

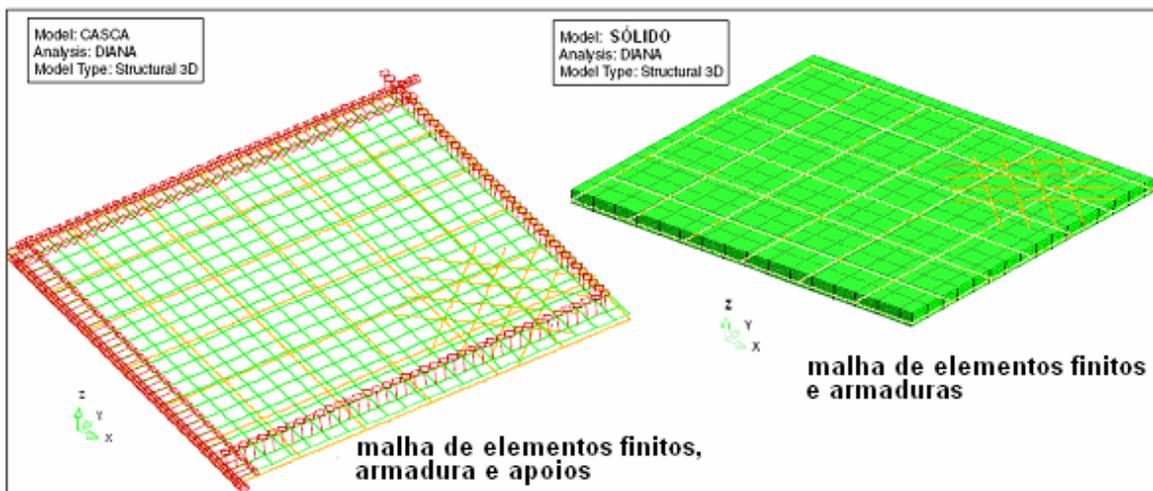


Figura 4.5– Apresentação da modelagem com elemento de casca e sólido.

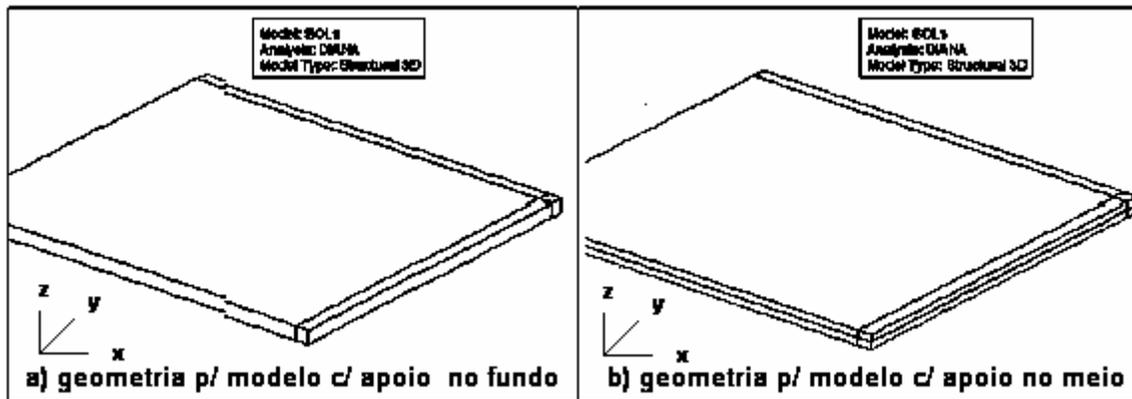


Figura 4.6– Apresentação da geometria para modelagem com elemento sólido, com apoio no fundo (a) e no meio (b).

Na modelagem da armadura, para os três modelos descritos, foi utilizada a opção *embedded reinforcement*. Com esta opção considera-se uma aderência perfeita entre o concreto e o aço. A armadura principal de tração foi inserida no material como *grid* e as armaduras dos cantos, tanto na superfície inferior quanto na superior foram inseridas como barras isoladas na direção definida.

Quanto ao comportamento não-linear dos materiais (não-linearidade física), considerou-se o amolecimento do concreto, tanto na tração quanto na compressão: o concreto na tração, através de um diagrama de tensão-deformação linear ou bilinear e, na compressão, um comportamento não-linear utilizando um diagrama tensão-deformação parabólico. Para o aço foi adotado o critério de ruptura de Von Mises, com plasticidade ideal.

Foi utilizado o método iterativo de Newton-Raphson Regular e empregada a norma de deslocamentos sem empregar a técnica de direção de busca “Line-Search” disponível no programa. Esta opção foi adotada, ao perceber-se que em algumas simulações, usando a norma de energia ou a de força, as análises eram incapazes de avançar, ainda sob carregamentos relativamente baixos. Foram aplicados 25 passos de carga, com incrementos fixos, uma vez que se constatou que um número maior de passos de carga, para estes modelos de laje, não conduzia a melhores respostas.

4.3.1.2 Modelos numéricos para as lajes de Pires (2003)

Para as lajes de Pires (2003) também foram construídos os três modelos tridimensionais para a simulação da geometria, utilizando elementos de casca e sólido, com apoio no fundo e no meio. As armaduras, principal e de distribuição, foram inseridas como barras isoladas.

O carregamento aplicado foi em forma de deslocamentos, equivalentes aos alcançados nos experimentos, com valores de 23 mm e 12 mm para as lajes L1A e L3A, respectivamente. O método iterativo utilizado foi o de Newton-Raphson Regular.

Os modelos com elementos de casca e sólido são ilustrados nas figuras 4.7.

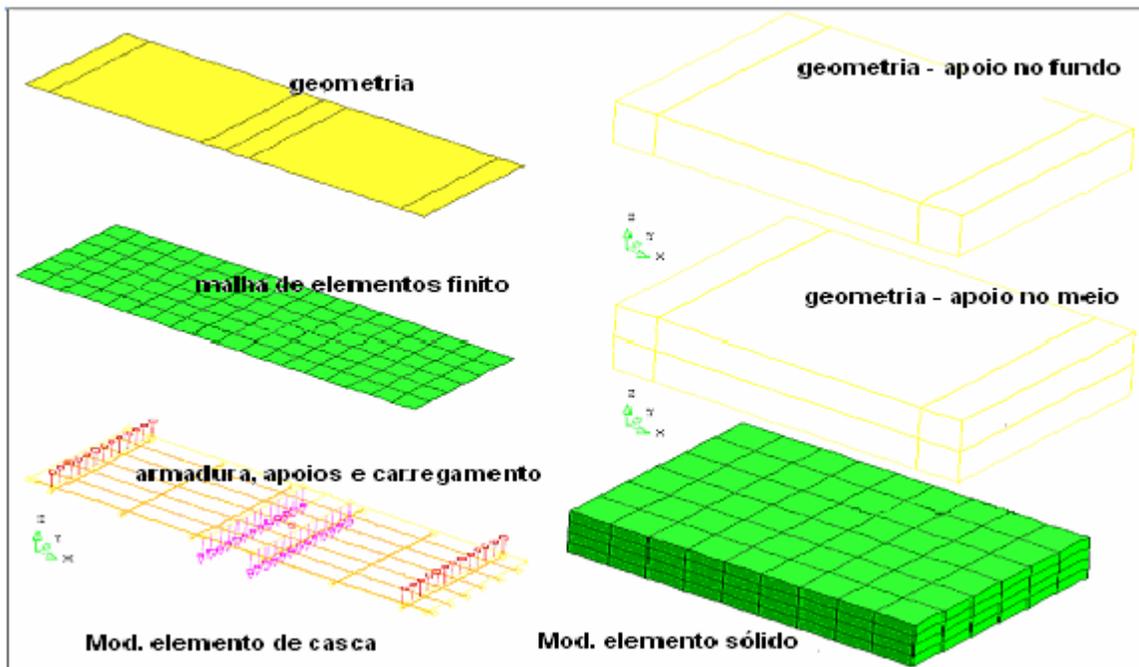


Figura 4.7– Apresentação da geometria para a modelagem com elemento de casca e de sólido, com apoio no fundo e no meio

4.4 Apresentação dos resultados

4.4.1 Resultados preliminares com elementos de casca e modelo de fissuração rotativa

4.4.1.1 Avaliação da curva de comportamento carga x deslocamento

A partir das primeiras curvas de carga x deslocamento no meio da laje, foi investigada a tendência do comportamento dos valores numéricos obtidos para as lajes. O aspecto geral destas curvas acompanha o aspecto das curvas obtidas com os dados experimentais e pode ser dividida em quatro trechos (gráfico 4.1):

A - O trecho inicial, onde o concreto não apresenta nenhuma fissura uma vez que a sua resistência à tração ainda não foi alcançada, apresenta um comportamento linear. Neste trecho:

- a inclinação é função dos módulos de elasticidade do concreto e do aço;
- o valor da carga máxima, de início de fissuração, é função da resistência do concreto à tração.

B - o segundo trecho inicia-se com o aparecimento das primeiras fissuras e termina quando, na região mais solicitada, o concreto não apresenta mais nenhuma resistência à tração. O processo de fissuração é função do diagrama $\sigma \times \omega$ (tensão com a abertura da fissura) que representa o amolecimento (abrandamento) das tensões pós-pico. A partir do final deste trecho, diz-se que o processo de fissuração se estabilizou.

C - no terceiro trecho, com a perda da contribuição da resistência à tração nas zonas de fratura, o comportamento do diagrama passa a ser praticamente linear, mas com uma rigidez (inclinação) menor que a do trecho inicial.

D - o quarto trecho inicia-se quando se alcançar um dos estados limites:

- o aço inicia o escoamento;
- começa a ter esmagamento do concreto comprimido ;

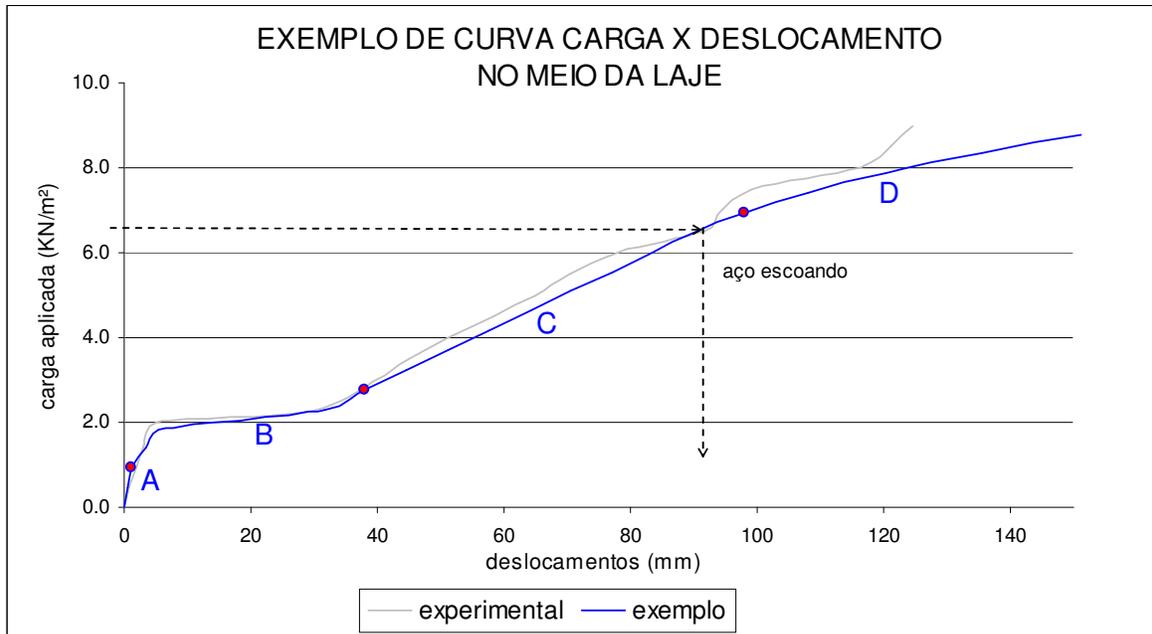


Gráfico 4.1 – Exemplo de curva carga x deslocamento

Foi observado que o aspecto da curva obtida para a laje é semelhante aos aspectos das curvas carga x tensão e carga x deformação, obtidas para a armadura no meio do vão, com os mesmos parâmetros de material (gráfico 4.2). Comparando-se estas curvas nota-se uma divergência apenas no trecho final, quando o aço atinge a sua resistência máxima de escoamento.

Alterando-se somente a resistência à tração do concreto, ou a energia de fraturamento, e fazendo-se estes parâmetros tenderem a zero, eliminou-se os dois primeiros trechos da curva. Porém, ela retoma a inclinação do terceiro trecho e não apresenta alteração para o último trecho.

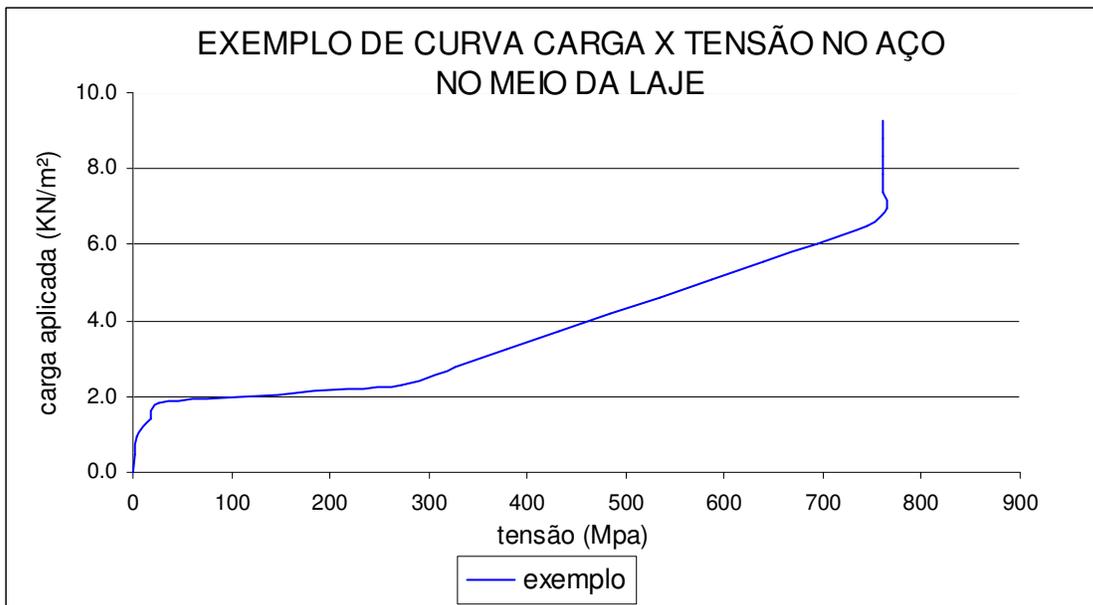


Gráfico 4.2 – Exemplo de curva carga x tensão no aço no meio da laje

Assim, a curva passa a apresentar-se com dois trechos principais: um trecho inicial linear limitado pela carga de fissuração da estrutura, e o último, o que apresenta grandes deslocamentos. Para esta curva de carga x deslocamento no meio da laje foi atribuído o comportamento limite mínimo da laje (gráfico 4.5 – curva B na pág. 94).

O comportamento limite mínimo da laje pode ser previsto eliminando-se a resistência do concreto à tração e o comportamento global passa a ser governado pelo comportamento da armadura e pelo concreto comprimido. Este procedimento é feito no dimensionamento atual, desprezando a resistência do concreto à tração (f_{ct}), apesar de que, mesmo fissurado, ainda existe a contribuição do concreto intacto entre as fissuras (figura 4.8). Na prática, as peças de concreto são dimensionadas no estágio III (para as maiores cargas), já que a baixa resistência do concreto à tração, comparada com a sua resistência à compressão, torna inviável, economicamente, um dimensionamento no estágio I ou II.

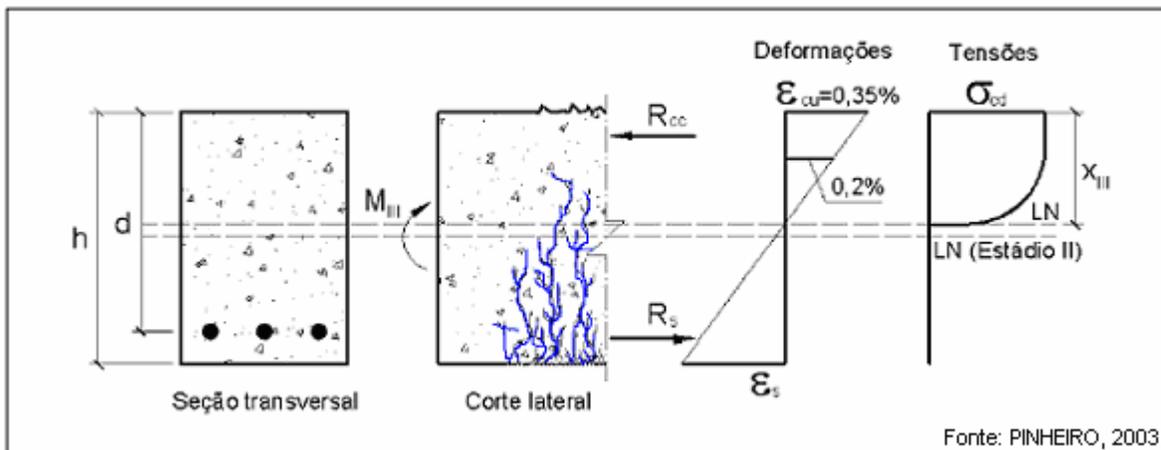


Figura 4.8 – Comportamento do concreto na flexão pura – Estádio III

O comportamento limite máximo da laje pode ser previsto, considerando um valor muito grande para a energia da fratura à tração do concreto, de modo que mesmo com o aumento do carregamento e o conseqüente aumento das tensões, o processo de fissuração se manterá estável e com capacidade de suportar acréscimos de carregamentos (gráfico 4.5 – curva A).

Quando foram alterados os parâmetros de rigidez do concreto à tração (energia do fraturamento e resistência do concreto), todas as curvas obtidas para a laje ficaram dentro do intervalo definido pelas duas curvas limites, máxima e mínima (gráfico 4.5);

Nas análises preliminares, não foi observada nenhuma influência da energia de fraturamento do concreto à compressão. Há de ser ressaltado que em nenhuma das análises numéricas o concreto atingiu o limite da resistência à compressão.

Os gráficos 4.3 e 4.4 exemplificam as curvas de carga x deslocamentos obtidas variando-se a resistência e a energia do fraturamento do concreto à tração, respectivamente.

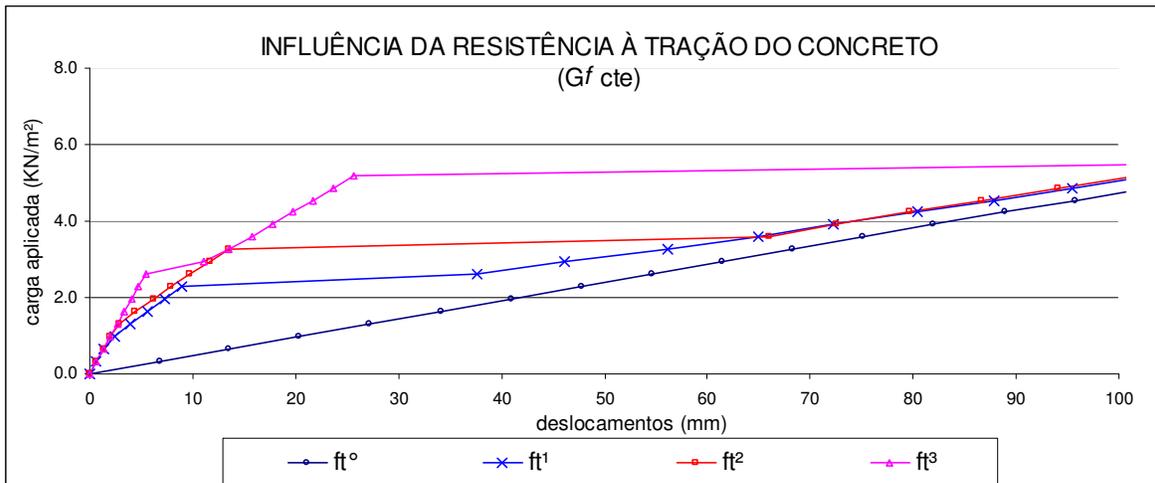


Gráfico 4.3 – Curvas obtidas variando-se a resistência do concreto à tração

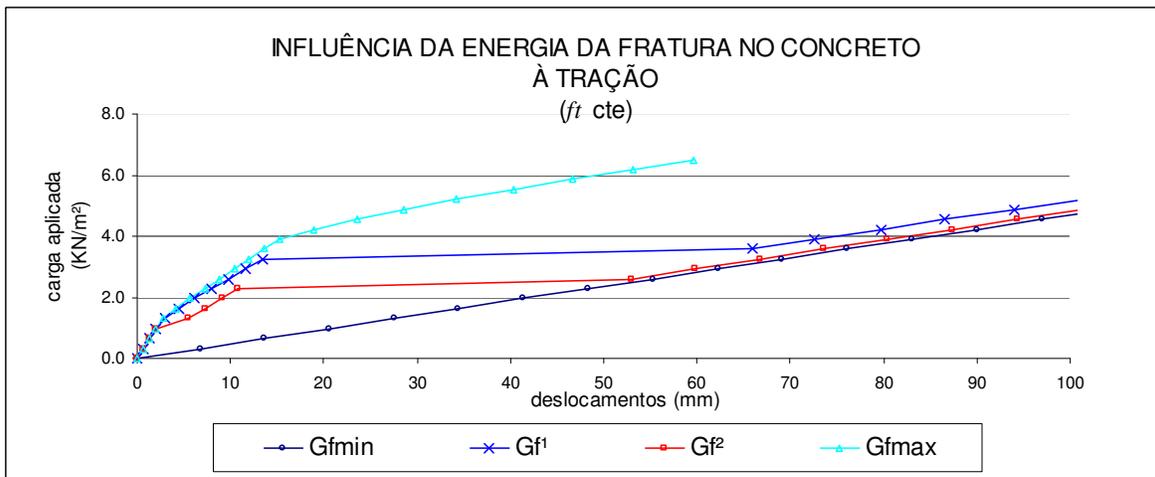


Gráfico 4.4 – Curvas obtidas variando-se a energia do fraturamento do concreto à tração

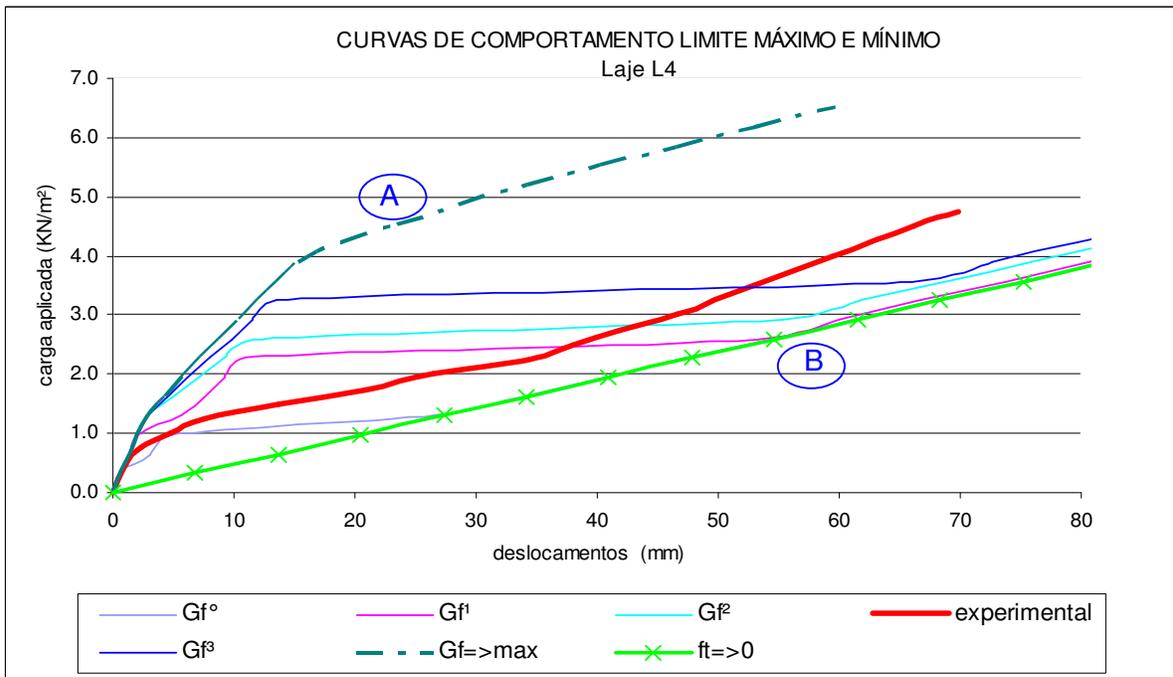


Gráfico 4.5 – Curvas obtidas variando-se a resistência do concreto à tração e a energia do fraturamento do concreto à tração, dentro do intervalo das curvas de comportamento limites máximo (A) e mínimo (B).

Os gráficos 4.6 e 4.7 apresentam as respostas do concreto e do aço no ponto central da laje, para o comportamento limite máximo e mínimo do concreto. Com a energia do fraturamento tendendo a zero, o concreto não apresenta resistência à tração. Em destaque, as cargas que mobilizam as máximas resistências à tração no concreto e as que levam ao escoamento do aço.

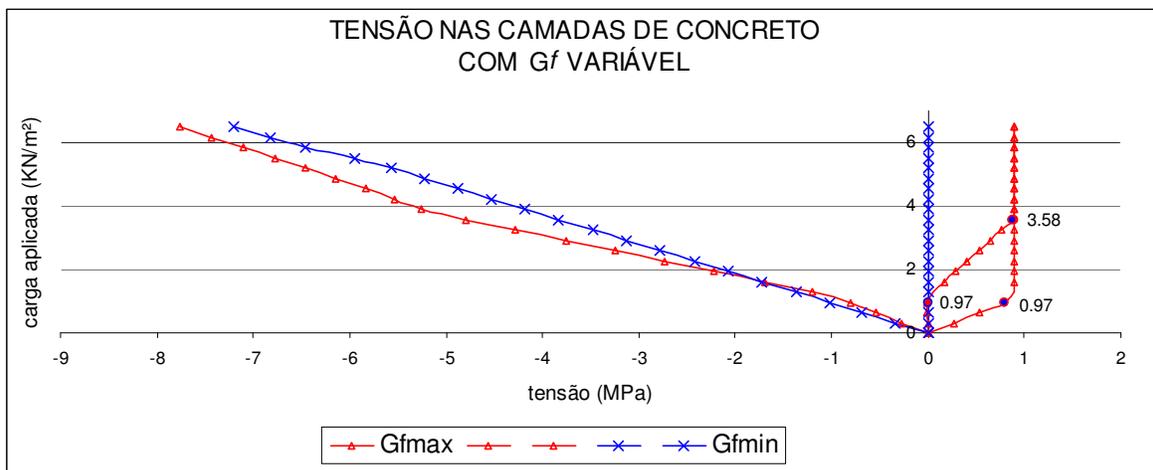


Gráfico 4.6 – Comportamento do concreto variando-se a energia do fraturamento do concreto à tração

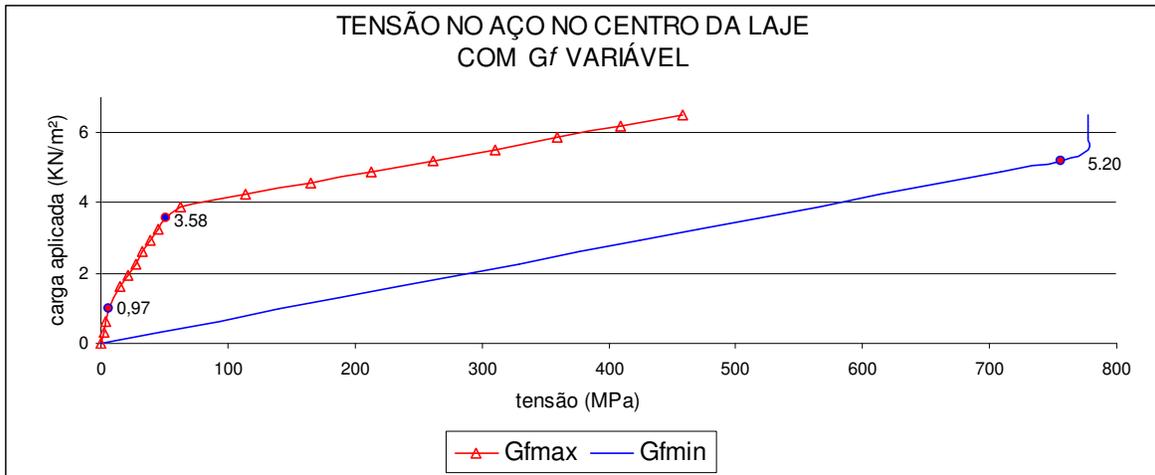


Gráfico 4.7 – Comportamento do aço variando-se a energia do fraturamento do concreto à tração

4.4.1.2 Parâmetros que alteram a tendência de comportamento da laje

Exemplo de aplicação do conhecimento da tendência de comportamento de uma laje maciça, simplesmente apoiada, é representado no gráfico 4.8, construído para os deslocamentos da laje 3a de Campos (2000), que foi projetada com deficiência de armadura. Observa-se que a curva experimental tangencia a curva de comportamento limite mínimo e quando são alterados os parâmetros de rigidez do concreto à tração (energia do fraturamento e resistência do concreto), mesmo quando estas alterações são mínimas, as curvas obtidas para a laje representam um comportamento mais rígido para as simulações, exceto quando a resistência à tração não foi considerada.

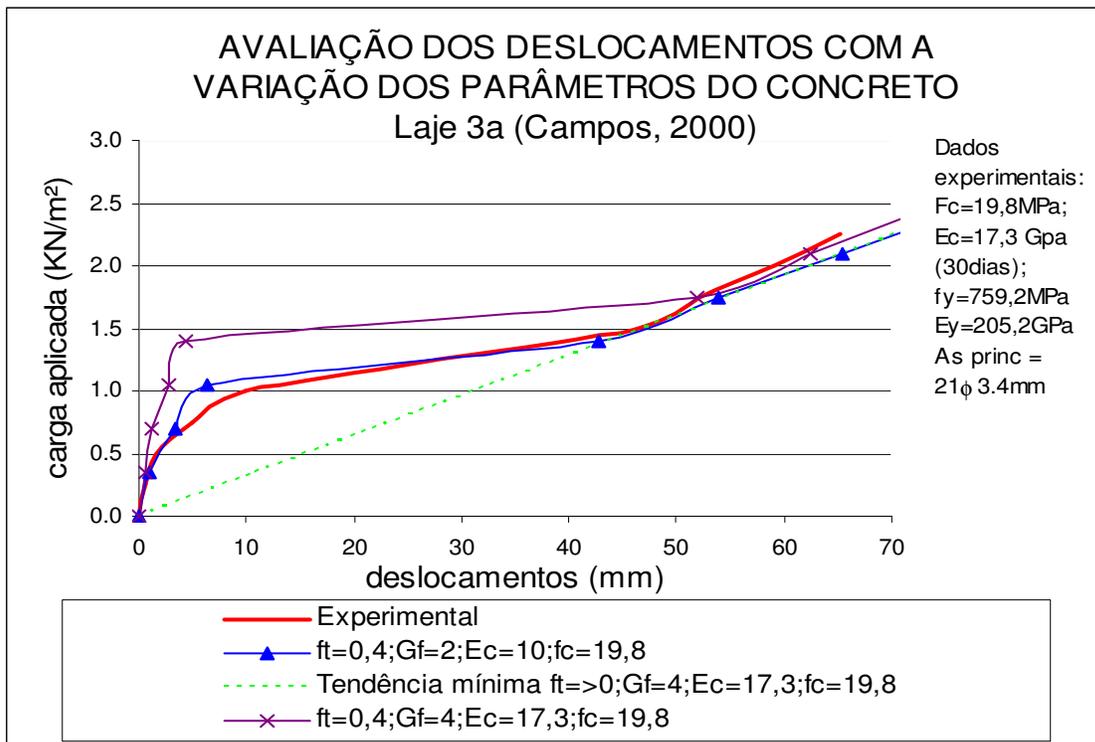


Gráfico 4.8 – Apresentação das curvas de deslocamentos para a laje L3a de Campos, 2000.

Buscando as respostas do programa para os parâmetros que alteram o comportamento do material concreto após o aparecimento das primeiras fissuras, verificou-se a sensibilidade da inclinação do terceiro trecho da curva padrão aos seguintes parâmetros:

- Coeficiente de Poisson - Coerente com os pesquisadores, a variação do coeficiente de Poisson teve efeito sobre os esforços e deslocamentos na laje, tanto na análise linear quanto na análise não-linear.

Na análise linear, nos gráficos 4.9 e 4.10 são apresentados os deslocamentos e momentos fletores obtidos ao longo da linha central da laje, variando-se o coeficiente de Poisson com valores de 0,0 e 0,20. Confirmou-se que os deslocamentos são maiores, cerca de 3%, quando o coeficiente é levado a zero e os momentos fletores não apresentaram este comportamento, sendo a diferença de aproximadamente 21%.

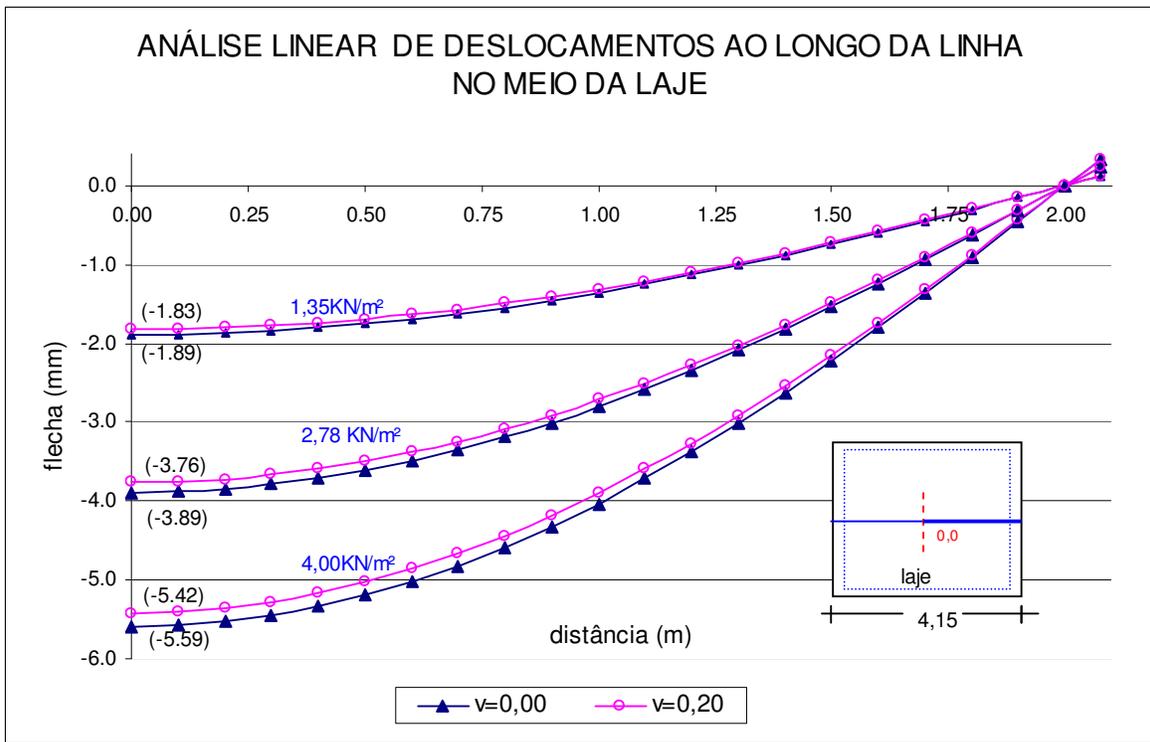


Gráfico 4.9 - Influência da variação do coeficiente de Poisson no deslocamento ao longo da linha central da laje, obtidos na análise linear

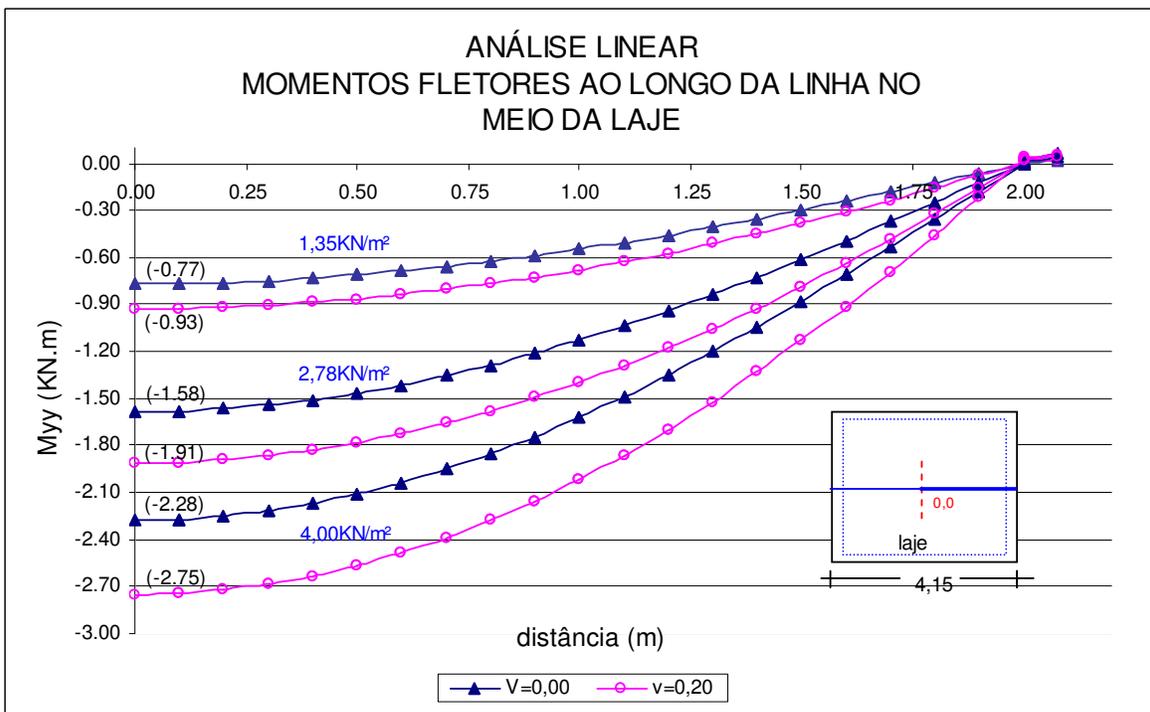


Gráfico 4.10 - Influência da variação do coeficiente de Poisson nos momentos fletores ao longo da linha central da laje, obtidos na análise linear

Na análise não-linear, o mesmo comportamento não foi observado para os deslocamentos obtidos no centro da laje. Verificou-se que quando o coeficiente de Poisson foi levado a zero, a laje ficou mais rígida (gráfico 4.11). Nos carregamentos iniciais, onde prevalecem as relações elásticas, a influência não foi significativa (gráfico 4.12). Quanto aos momentos fletores, igual ao ocorrido na análise linear, estes também diminuíram com o coeficiente de Poisson zero e estão representados no gráfico 4.13. Uma comparação com os momentos obtidos na análise linear encontra-se no gráfico 4.14.

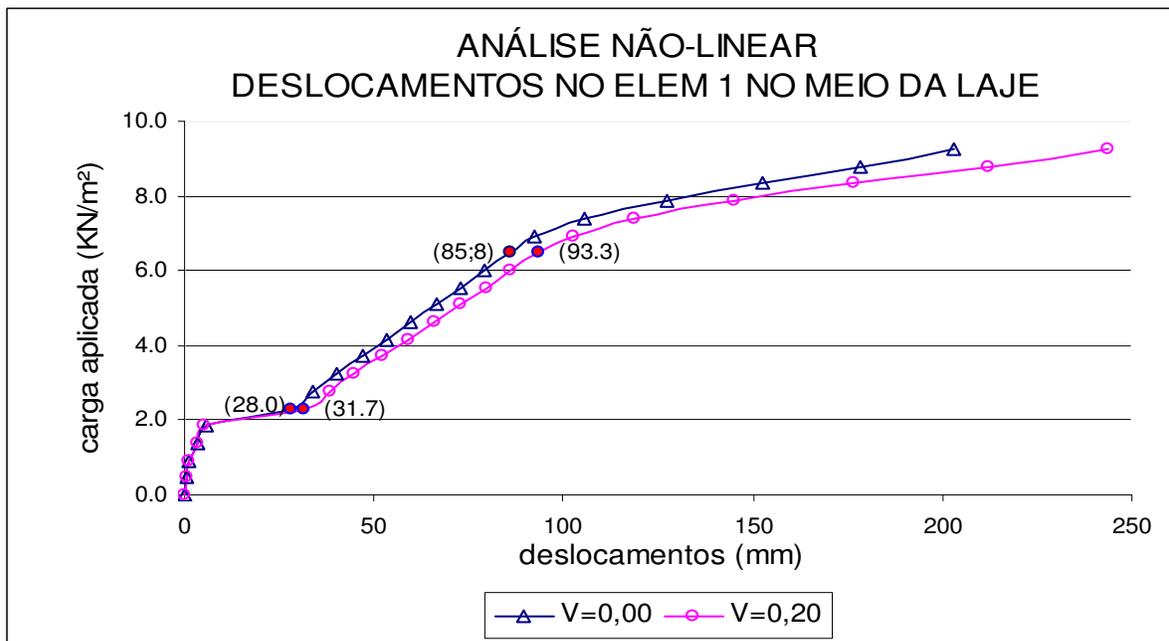


Gráfico 4.11 - Influência da variação do coeficiente de Poisson nos deslocamentos no meio da laje, obtidos na análise não-linear

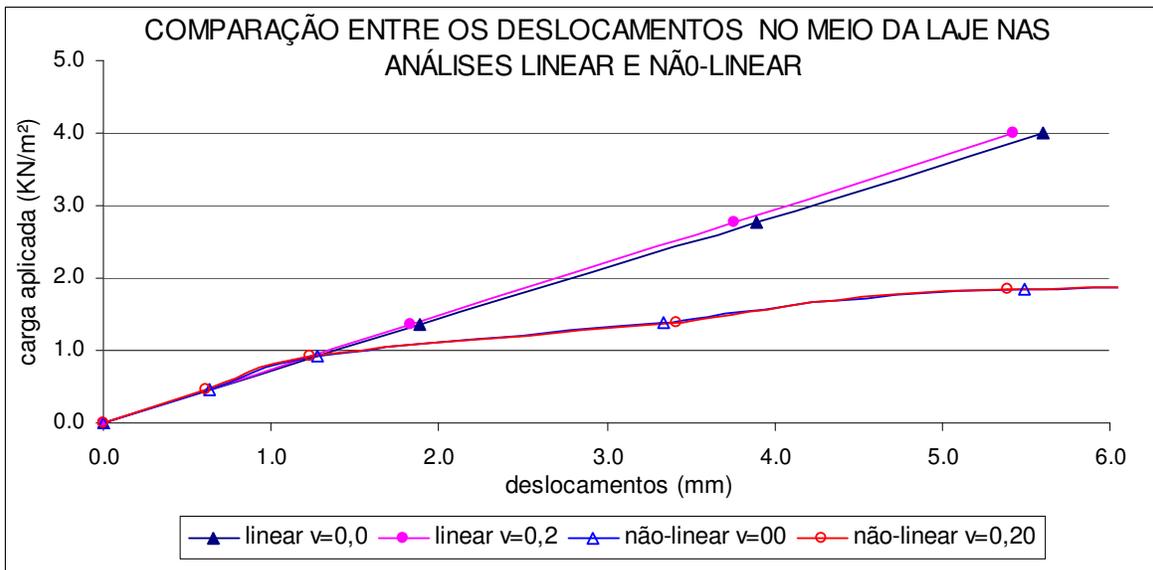


Gráfico 4.12 - Influência da variação do coeficiente de Poisson nos deslocamentos no meio da laje, obtidos nas análises linear e não-linear

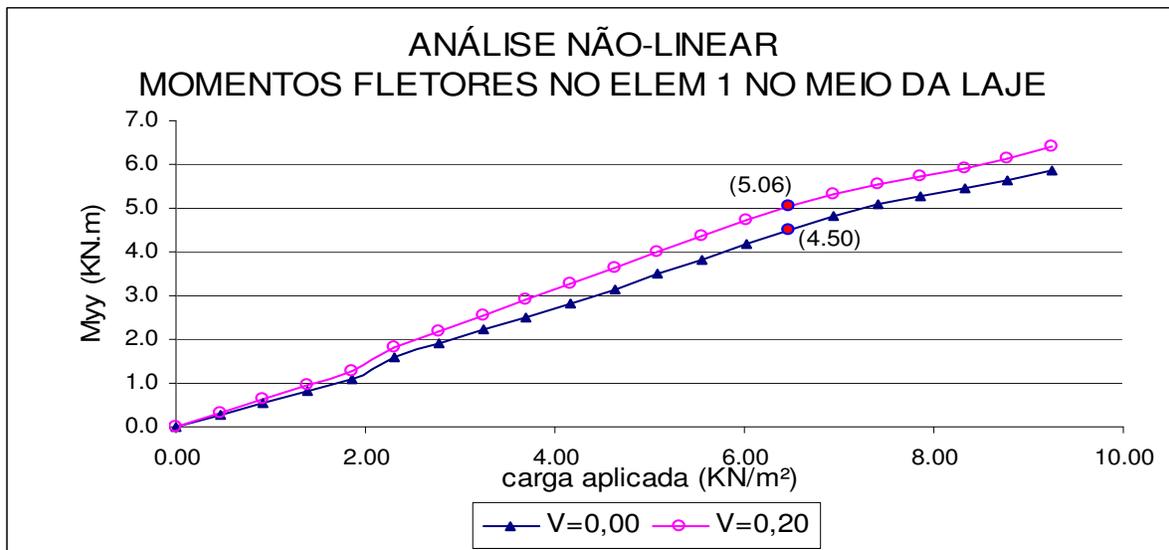


Gráfico 4.13 - Influência da variação do coeficiente de Poisson nos momentos fletores, no meio da laje, obtidos nas análises não-linear

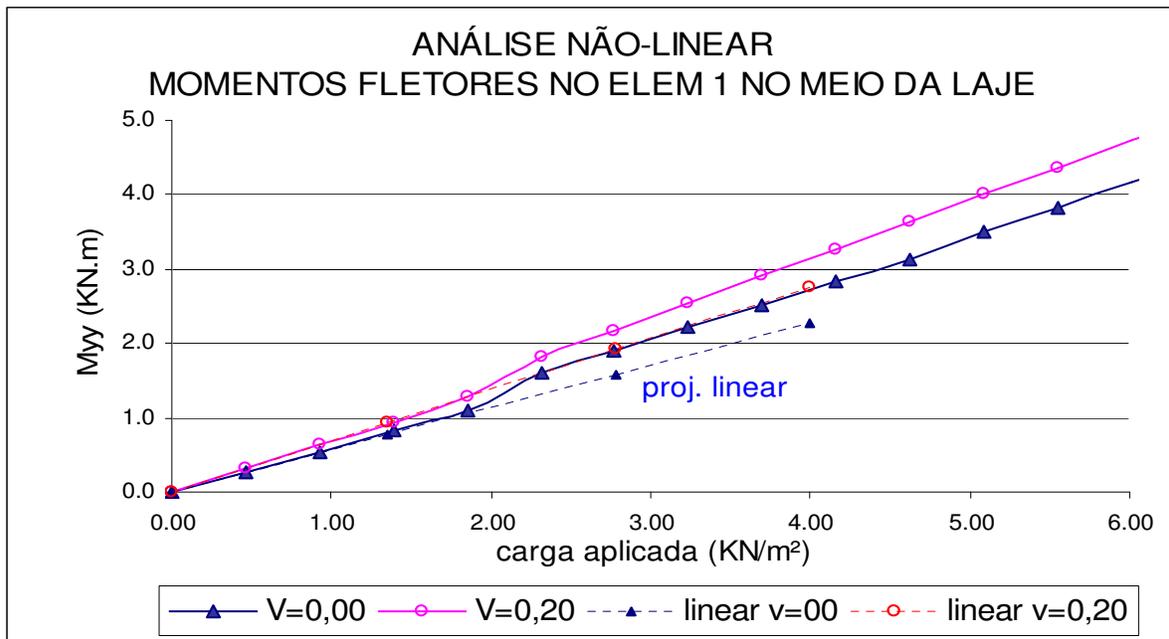


Gráfico 4.14 – Comparação dos momentos fletores, no meio da laje, obtidos nas análises linear e não-linear, variando-se o coeficiente de Poisson

Na análise não-linear, verificou-se que este coeficiente altera o comportamento da curva carga x deslocamentos a partir do aparecimento das primeiras fissuras e a sua influência foi mais significativa no trecho final, onde o material apresentou o seu máximo grau de fissuração (gráfico 4.15). Com a redução do coeficiente de Poisson as lajes tornaram-se mais rígidas para todos os modelos de fissuração empregados.

Na avaliação não-linear do comportamento do concreto na compressão, quanto menor o coeficiente de Poisson, e principalmente, quando ele foi levado a zero, o elemento localizado no meio da laje sofreu menores tensões de compressão e maiores deformações. Quanto ao aço, o contrário foi verificado, onde as menores deformações foram percebidas com os coeficientes zero e 0,15. Para os valores do coeficiente de Poisson de 0,20, 0,25 e 0,35 não houve variação significativa em nenhuma fase do carregamento tanto para concreto quanto para o aço: para a distribuição de tensões de compressão e deformação no concreto (gráficos 4.16 e 4.17); para a tensão e deformação nas armaduras de tração (gráficos 4.18 e 4.19).

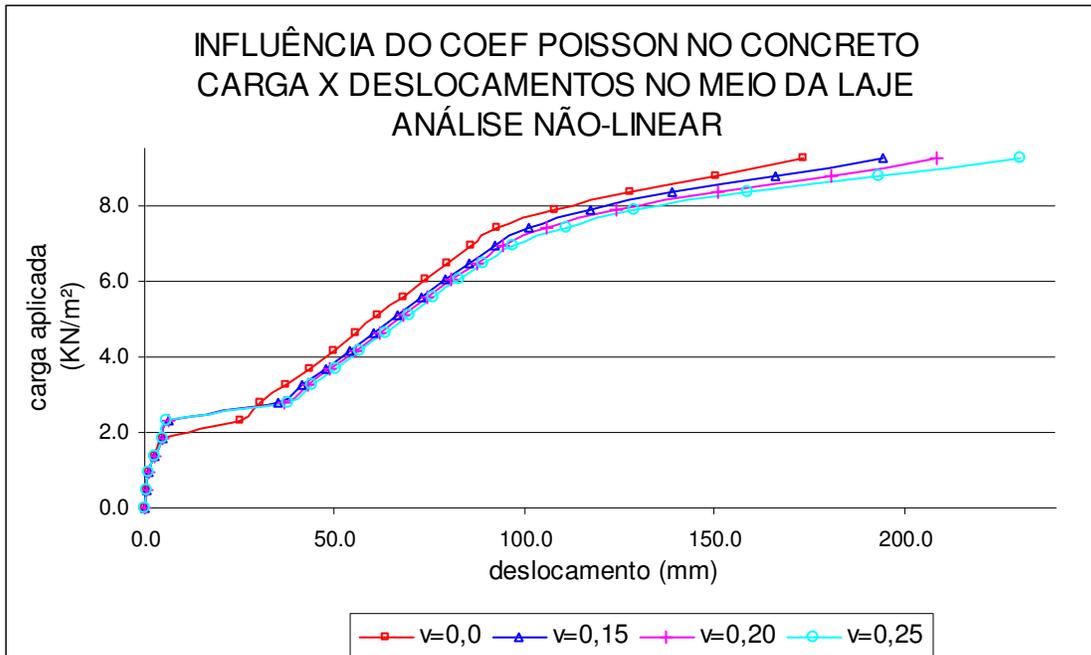


Gráfico 4.15 - Influência da variação do coeficiente de Poisson nos deslocamentos no meio da laje, obtidos na análise não-linear

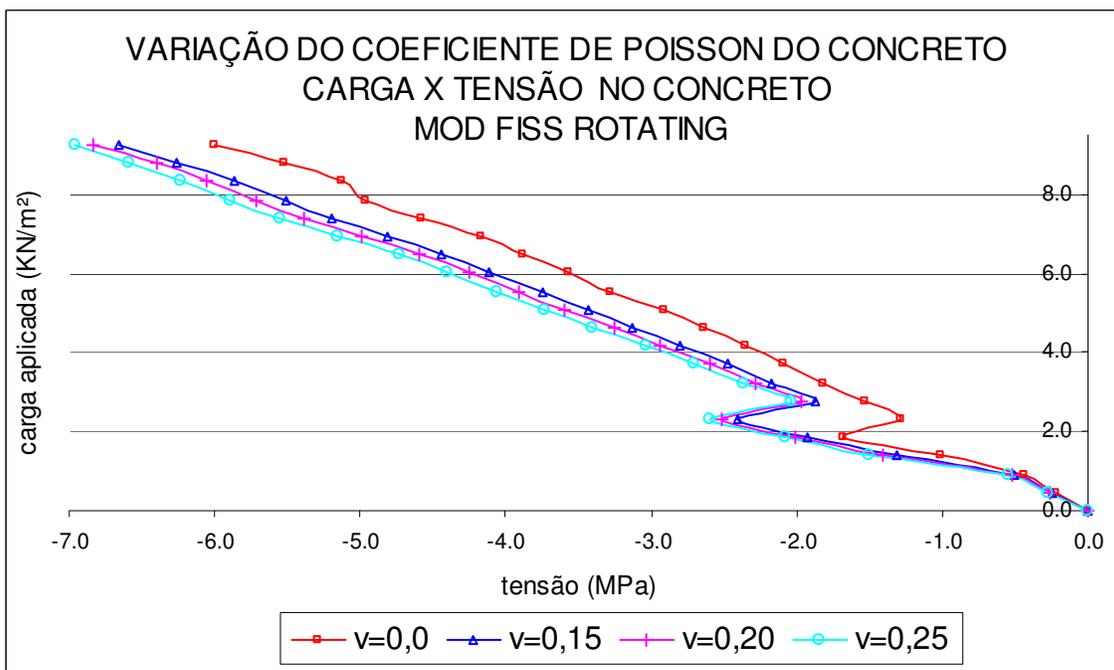


Gráfico 4.16 - Influência da variação do coeficiente de Poisson, na distribuição de tensões normais de compressão no concreto, avaliada no elemento no meio da laje

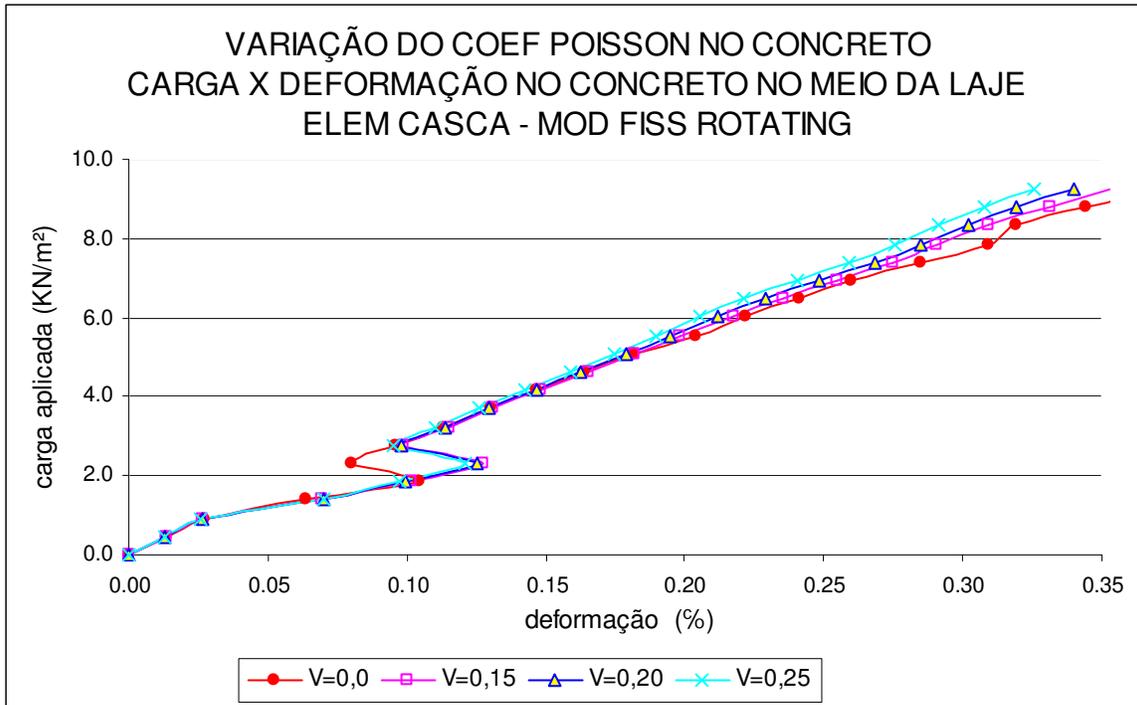


Gráfico 4.17 - Influência da variação do coeficiente de Poisson na deformação do concreto, avaliada no meio da laje

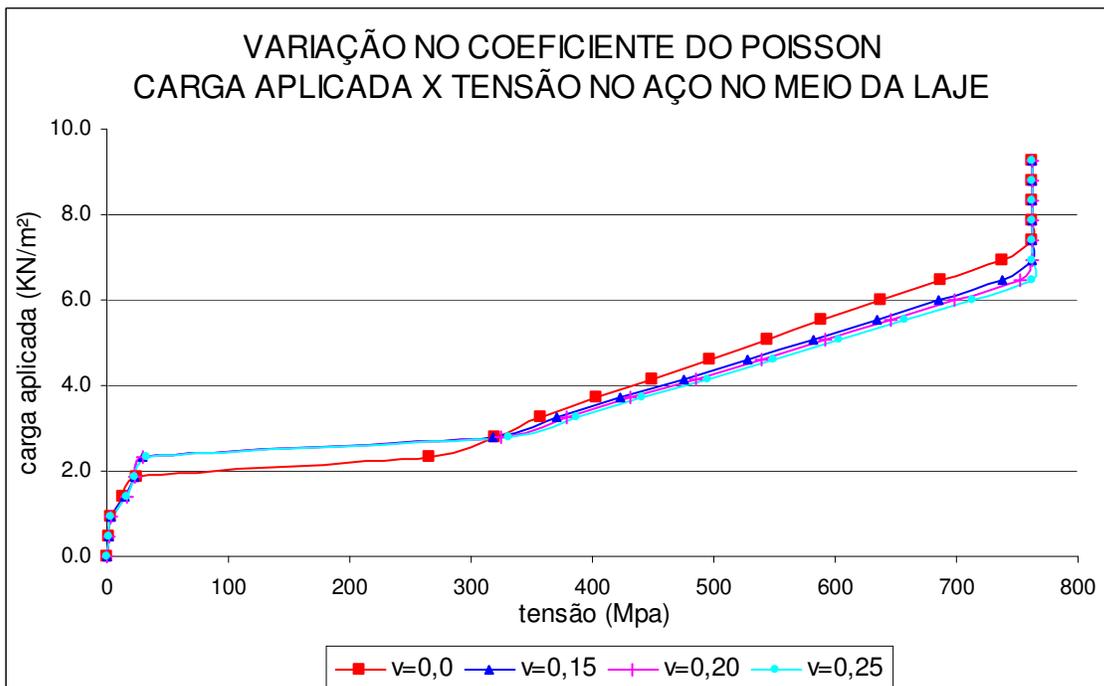


Gráfico 4.18 - Influência da variação do coeficiente de Poisson aplicada no concreto, nas tensões na armadura, avaliada no meio da laje

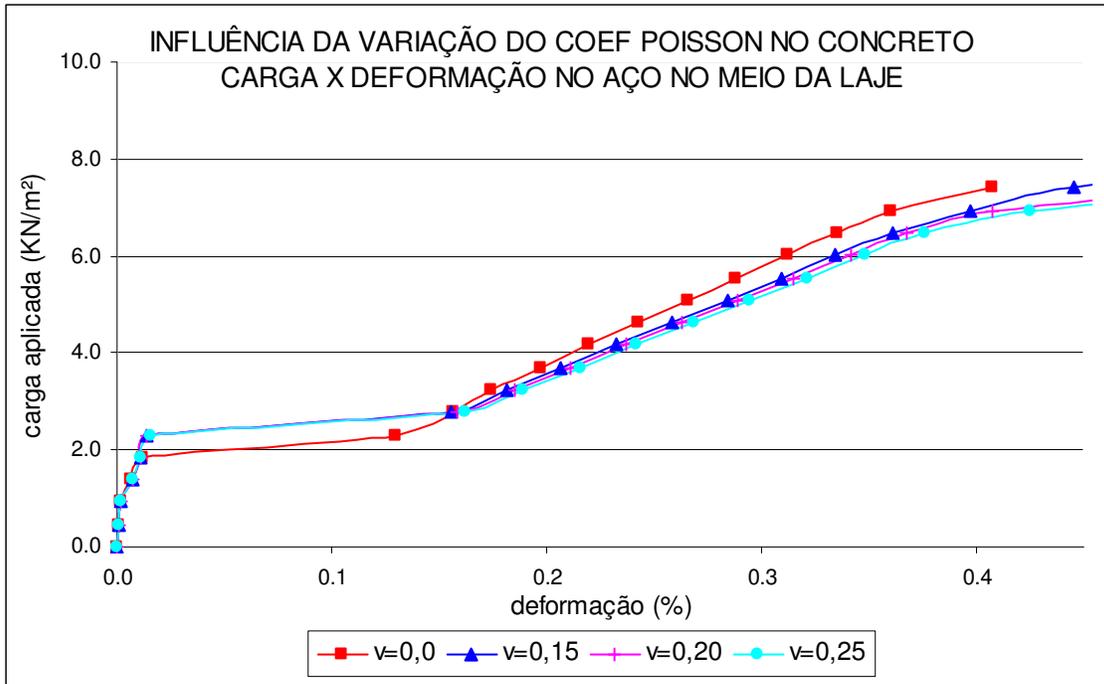


Gráfico 4.19 - Influência da variação do coeficiente de Poisson aplicada no concreto, nas deformações da armadura no meio da laje

- espessura da laje – quanto menor a espessura, mais flexível é o comportamento da laje para todo carregamento (gráfico 4.20);

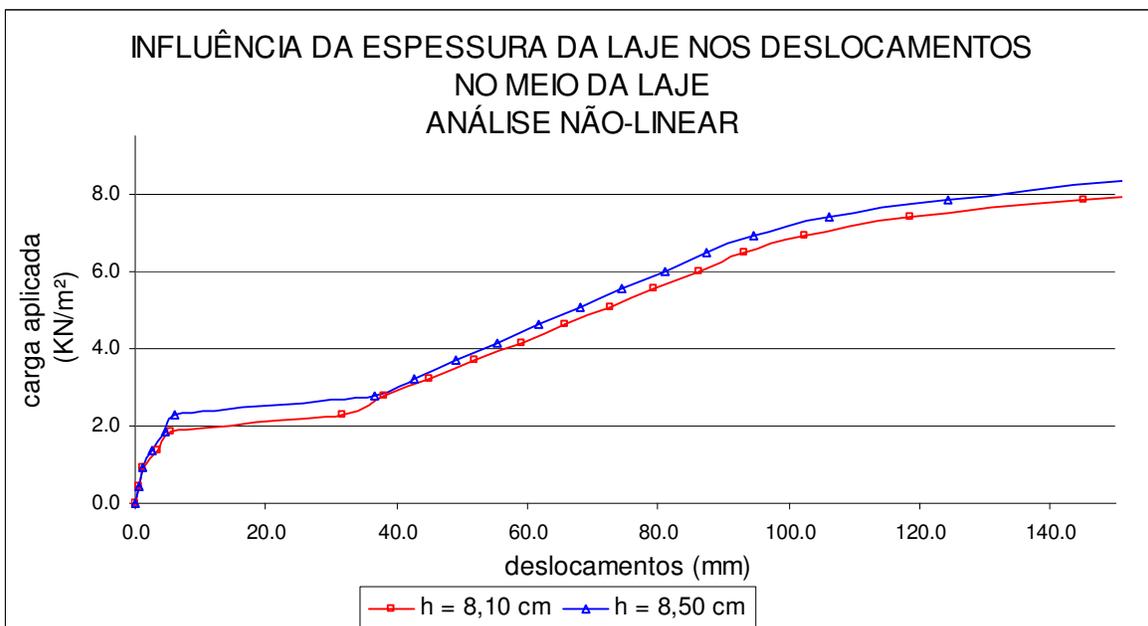


Gráfico 4.20 - Influência da variação da espessura nos deslocamentos no meio da laje, obtidos na análise não-linear

- posição da armadura – o programa mostrou-se bastante sensível ao posicionamento da armadura principal de tração. Quanto menor a distância da face mais tracionada da laje ao centro de gravidade da grelha ou da barra, menores foram os deslocamentos apresentados. O gráfico 4.21 ilustra os deslocamentos obtidos com a variação da posição da armadura positiva;

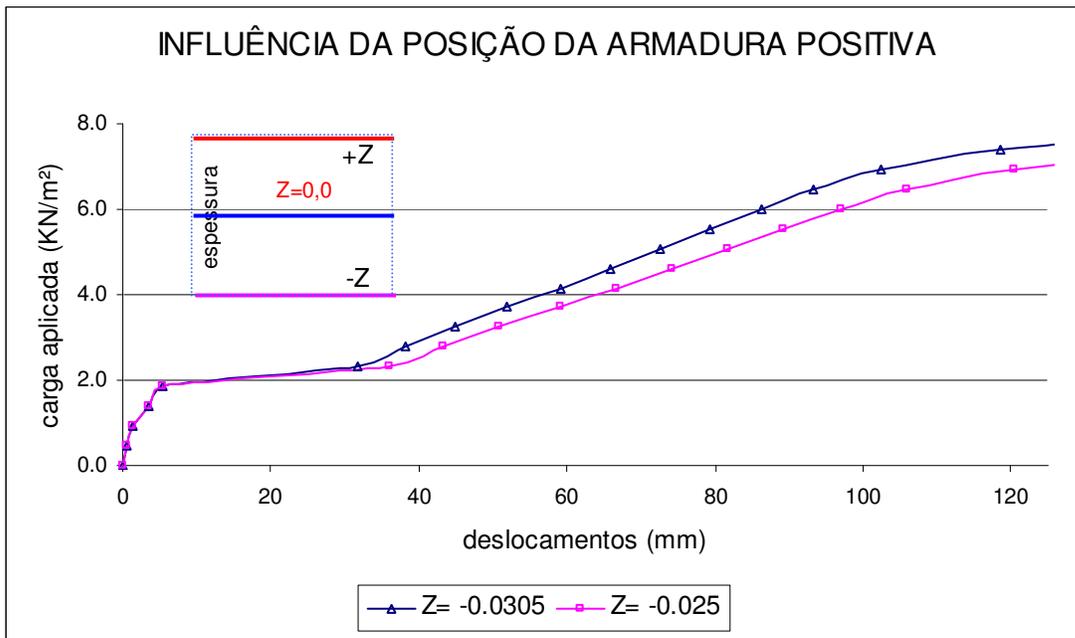


Gráfico 4.21 - Influência da posição da armadura positiva nos deslocamentos no meio da laje

- as influências do módulo de elasticidade e da resistência à compressão do concreto são melhor observadas na curva de comportamento limite mínimo: a resistência a compressão do concreto não influenciou o comportamento da curva, ao contrário do módulo de elasticidade que, quanto menor o módulo aplicado, mais abatida tornou-se a curva. Deve ser ressaltado que o concreto não atingiu a sua máxima resistência à compressão em nenhum dos ensaios numéricos realizados. Estas informações estão representadas no gráfico 4.22.

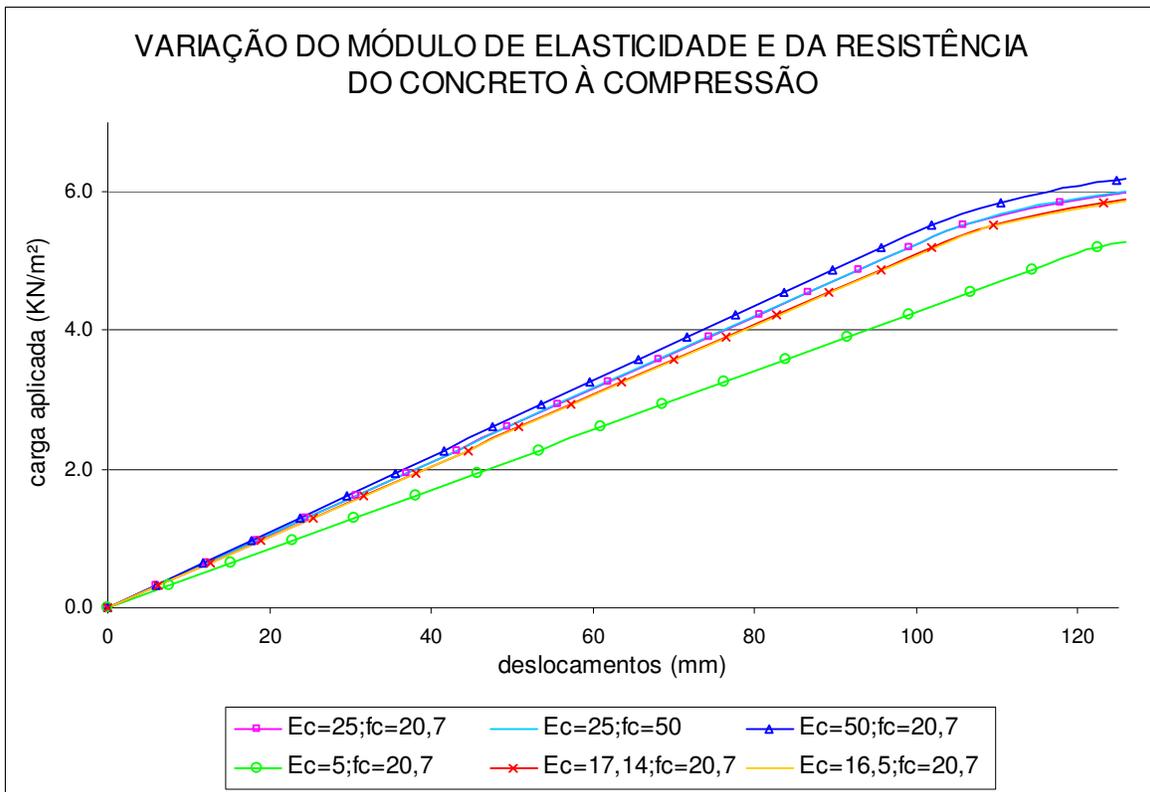


Gráfico 4.22 - Influência da variação do módulo de elasticidade (GPa) e da resistência do concreto à compressão

- quanto às influências dos elementos finitos de casca e de sólido e dos modelos de fissuração utilizados na modelagem das lajes, pôde ser observado que, dentre os modelos com elementos de casca, o modelo com fissura do tipo *Rotating* ficou mais flexível do que os demais; nos modelos com elemento sólido este resultado também se verificou (gráfico 4.23).

Na comparação entre os modelos com elementos de casca e com elemento sólido, os primeiros ficaram mais rígidos, mesmo quando os modelos foram comparados com os fatores de retenção ao cisalhamento variando (gráfico 4.23).

Os fatores de retenção ao cisalhamento de 0,9 resultaram modelos numéricos mais rígidos do que os modelos com fissuração do tipo *Rotating*, tanto para os modelos com cascas quanto com sólidos. A laje modelada com elemento sólido, com apoio no meio, apresentou-se mais sensível à variação da retenção ao cisalhamento;

os modelos com apoio no fundo parecem ser influenciados com cargas próximas à ruína (gráfico 4.24);

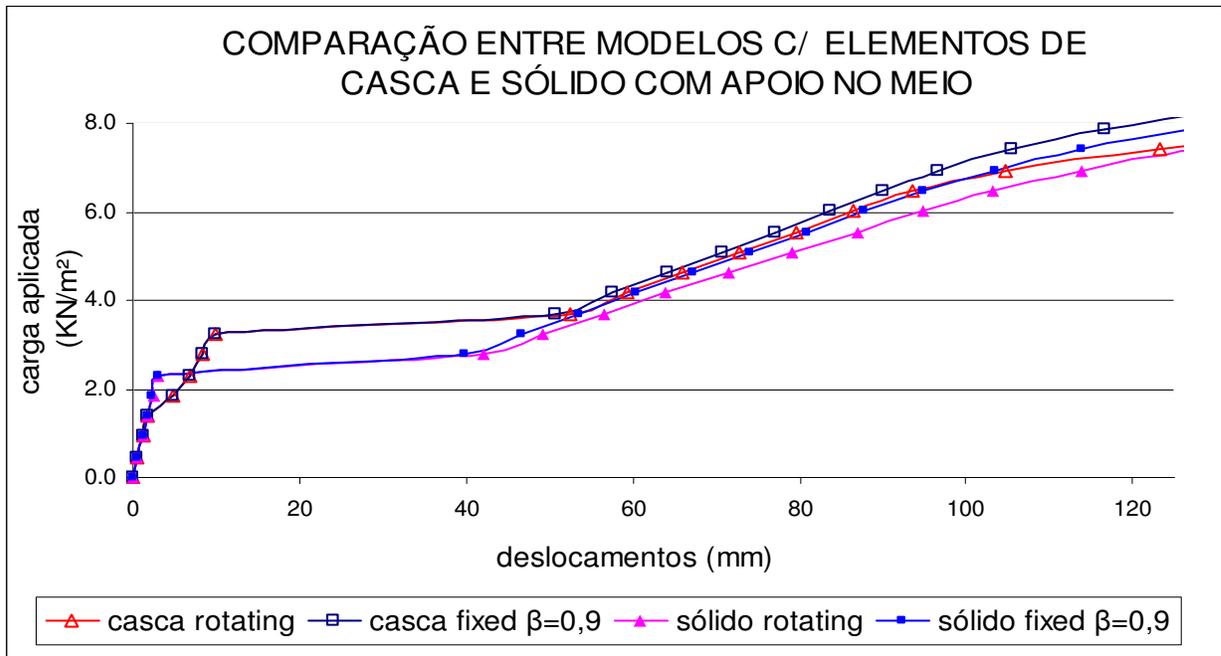


Gráfico 4.23 – Comparação entre os deslocamentos centrais dos modelos com elemento de casca e sólido com apoio no meio

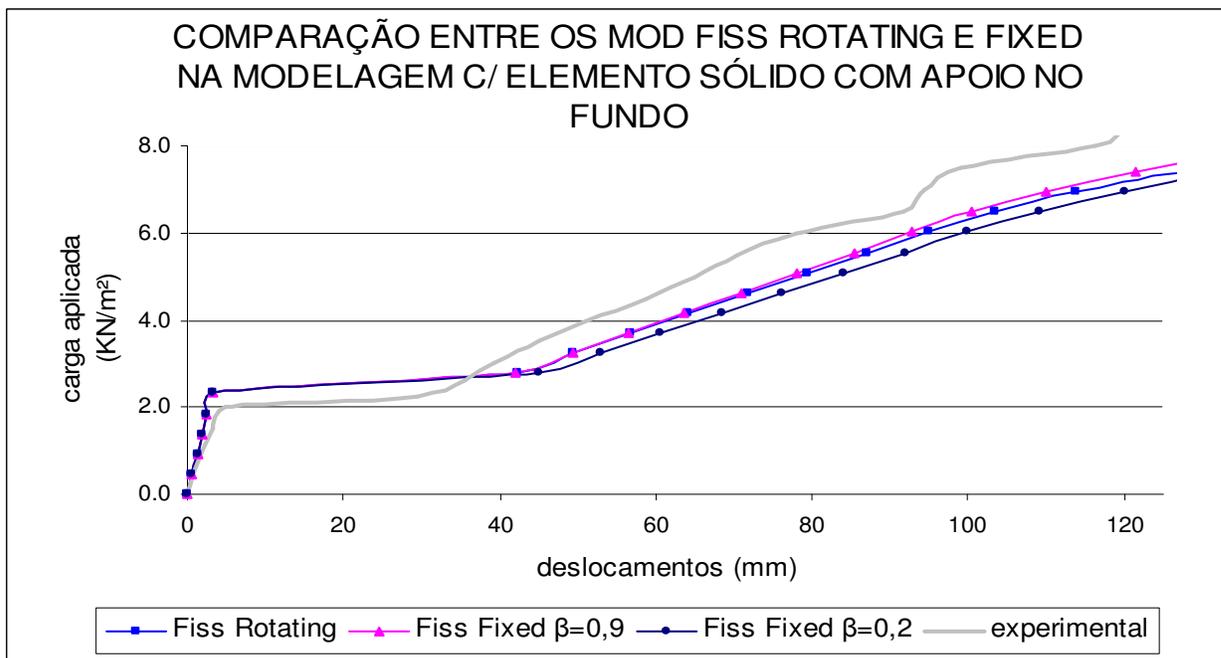


Gráfico 4.24 – Comparação entre os deslocamentos centrais dos modelos com elemento sólido com apoio no fundo

Entre os modelos com elemento sólido foi verificado que a posição dos apoios, na face inferior (fundo) e na superfície média (meio) não influenciou as respostas da modelagem com modelos de fissuração do tipo *Rotating*. Porém quando foram utilizados modelos de fissuração do tipo *Fixed*, o apoio no fundo tornou o modelo mais flexível (gráfico 4.25).

Na comparação dos modelos com elemento sólido e com casca, quando o modelo com sólido está com o apoio no meio, os comportamentos das lajes foram mais próximos, enquanto que os modelos com sólido, com apoio no fundo, apresentaram o comportamento mais flexível (gráfico 4.26).

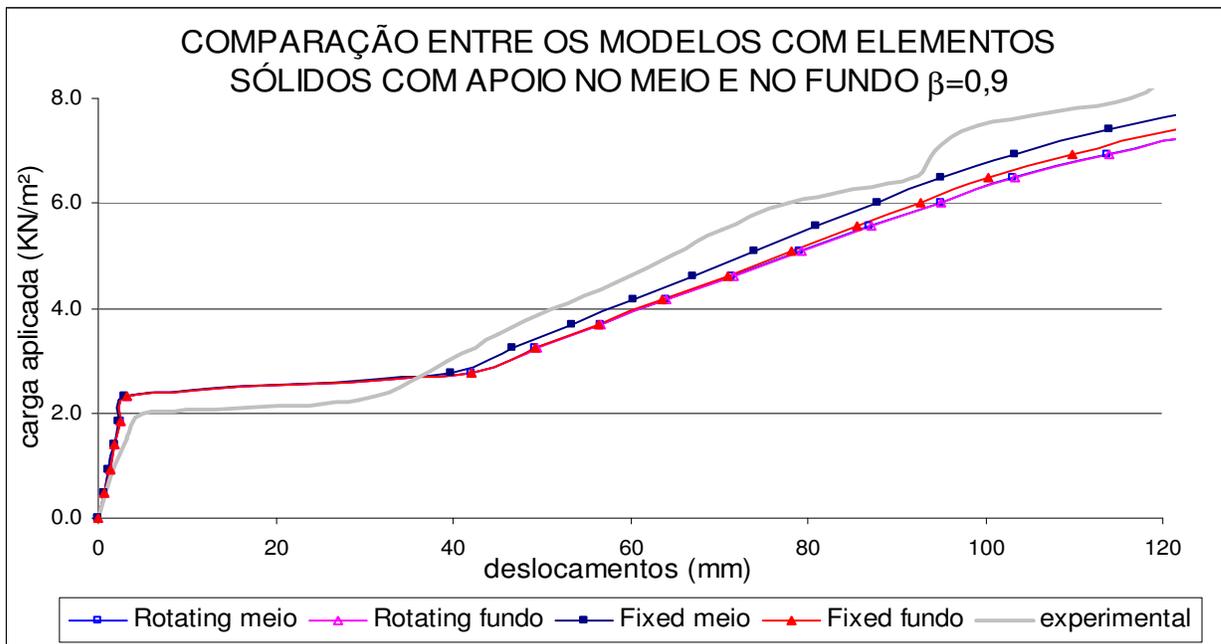


Gráfico 4.25 – Comparação entre os deslocamentos no meio da laje dos modelos com elemento sólido, com apoio no meio e no fundo da laje

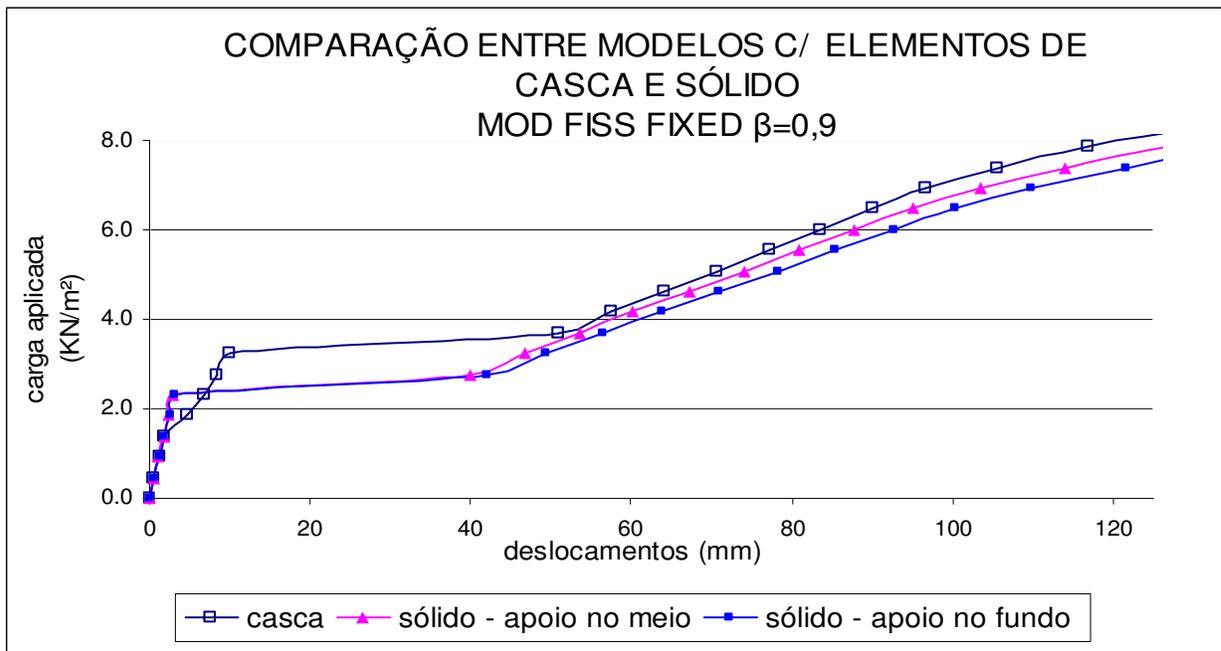


Gráfico 4.26 – Comparação entre os deslocamentos centrais nos modelos com elemento de casca e sólido, com apoio no meio e no fundo

4.5 Resultados do programa experimental

4.5.1 Análise das lajes de Campos (2000)

4.5.1.1 Laje L1 (laje de referência - espessura 8,1 cm)

4.5.1.1.1 Modelos com elementos de casca

No gráfico 4.27 são apresentadas as curvas carga x deslocamentos no centro da laje para os modelos com elemento de casca, variando-se a presença das armaduras nos cantos. São apresentadas as curvas dos modelos com as armaduras de canto, conforme o modelo experimental (modelo completo); dos modelos isolando-se as armaduras de canto, ou seja, com a armadura de canto somente na face superior e com a armadura de canto, somente na face inferior; e sem nenhuma armadura de canto. Analisando a atuação das armaduras de canto, atuando isoladamente, as armaduras dispostas nos cantos, principalmente as localizadas na face superior,

apresentaram-se pouco eficientes no enrijecimento do modelo. Entretanto, quando atuam simultaneamente (modelo completo) percebe-se uma efetiva contribuição.

Foi possível identificar no gráfico 4.28, carga aplicada x tensão no concreto, as cargas que provocaram as primeiras fissuras. Estas fissuras foram observadas quando o concreto apresentou uma perda de resistência à tração com a abertura da fissura e a conseqüente transferência de tensões para o aço.

Experimentalmente, o aparecimento das primeiras fissuras, foi registrado graficamente, com carga de $2,0 \text{ KN/m}^2$, enquanto que, visualmente, as fissuras foram observadas a partir de cargas de $2,5 \text{ KN/m}^2$. No entanto, observando as tensões no concreto ao longo da espessura da laje, dadas numericamente no modelo completo, pode-se notar que as fissuras aparecem com cargas próximas de $1,00 \text{ KN/m}^2$ (gráfico 4.28), coincidindo com o início das deformações na armadura (gráfico 4.29).

O modelo numérico (completo) rompeu com o escoamento da armadura, observado no gráfico de carga x (tensão-deformação) no aço, com cargas próximas de $6,48 \text{ KN/m}^2$ e as deformações no aço atingiram $0,39\%$ (gráfico 4.29). Nos resultados experimentais estes valores foram de $6,25 \text{ KN/m}^2$ e $0,56\%$, respectivamente.

Quanto aos deslocamentos no centro da laje, o resultado obtido experimentalmente para a laje L1 foi de $124,7 \text{ mm}$ com um carregamento de $9,0 \text{ KN/m}^2$. Numericamente este valor foi atingido com cargas menores, próximas a $7,60 \text{ KN/m}^2$, no modelo completo (gráfico 4.30). Observou-se que os resultados apresentaram-se bem aproximados até a armadura começar a escoar, a partir daí os resultados passaram a divergir, o que pode ser atribuído à consideração da ligação perfeita entre o concreto e o aço.

Apesar de não ter sido visualizado o esmagamento do concreto, na face superior da laje, Campos (2000) considerou ter atingido, na ruptura, valores bem próximos ao esmagamento. Numericamente, os valores para as tensões de

compressão no concreto, correspondentes à carga de ruptura experimental, foram próximas de 6,50 MPa, bem abaixo do valor da resistência à compressão, que foi de 20,8 MPa.

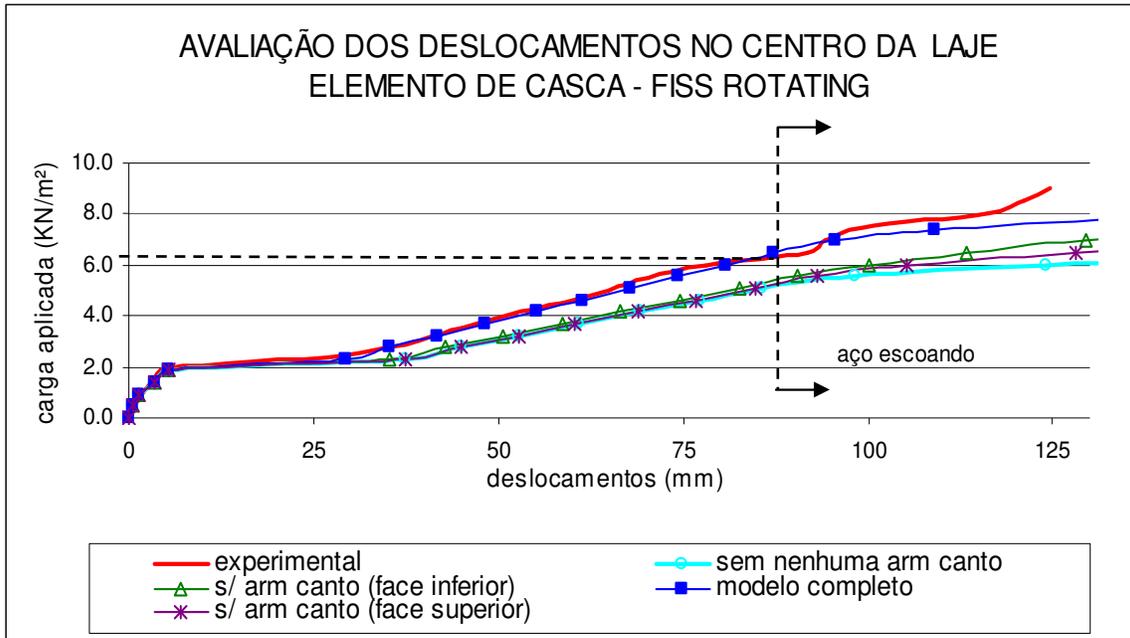


Gráfico 4.27 - Curvas carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para o modelo completo e para os modelos sem armadura de canto na face inferior, na face superior e sem nenhuma armadura de canto.

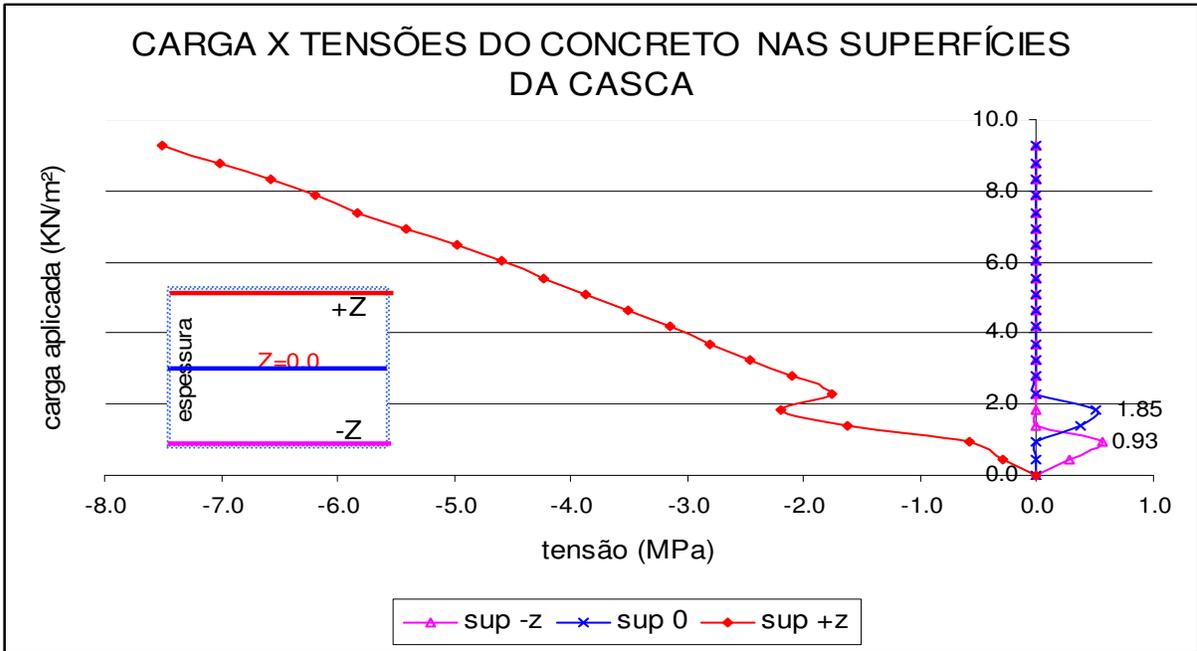


Gráfico 4.28 –Carga aplicada x tensão nas superfícies de concreto no meio da laje

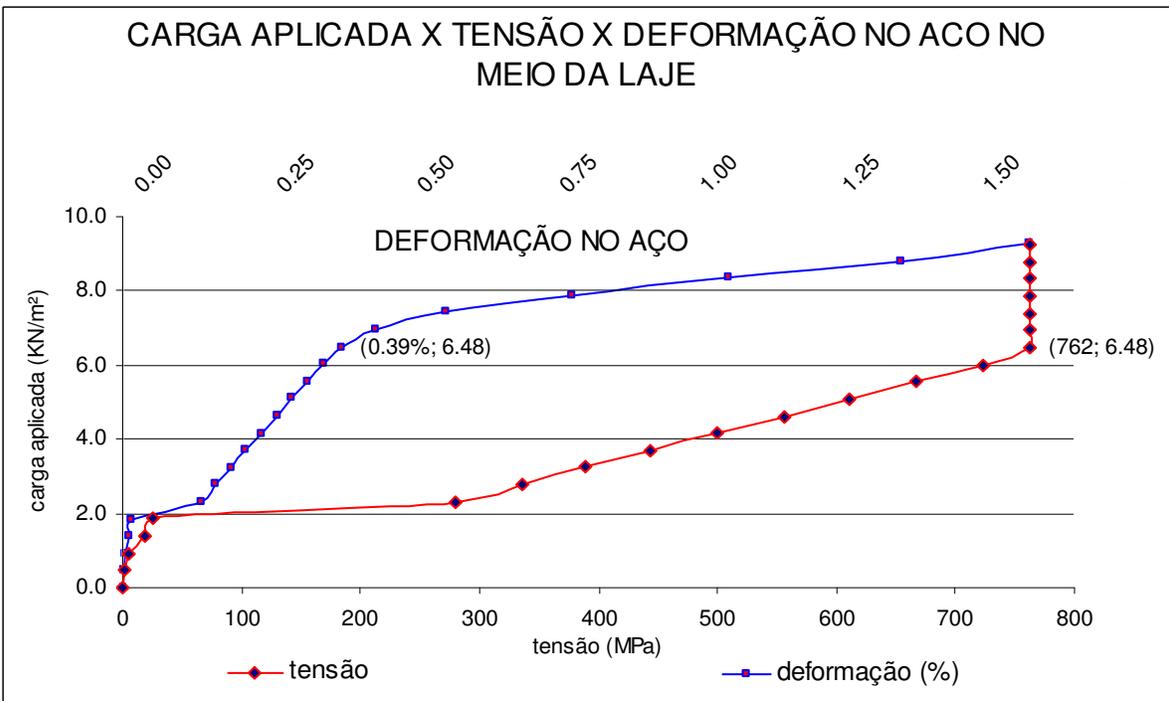
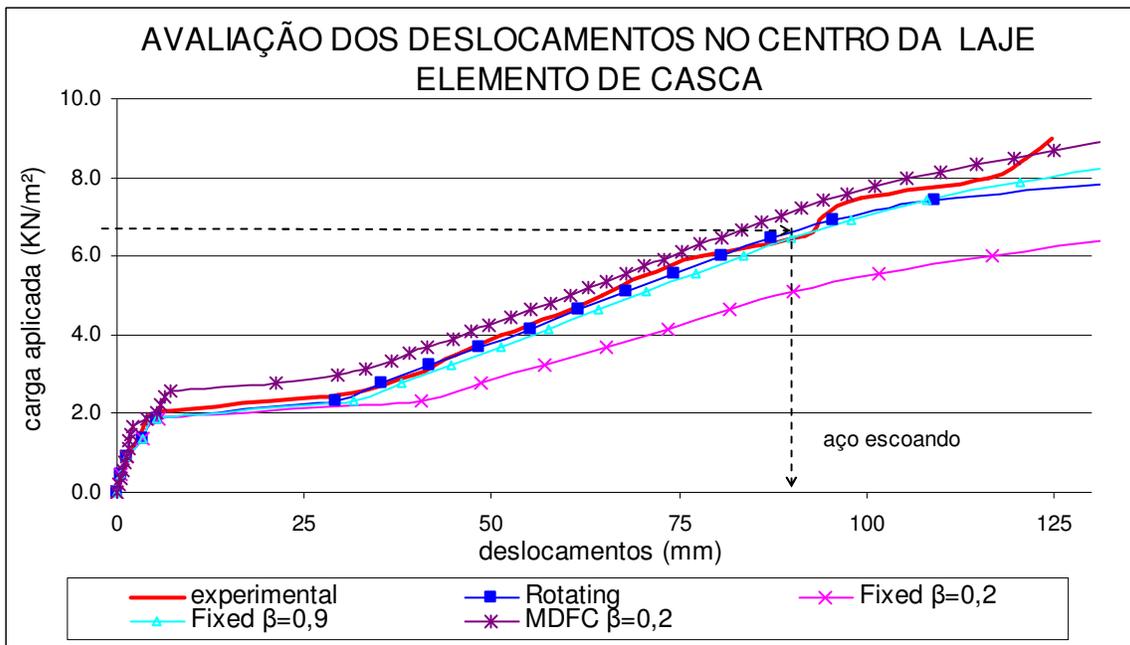


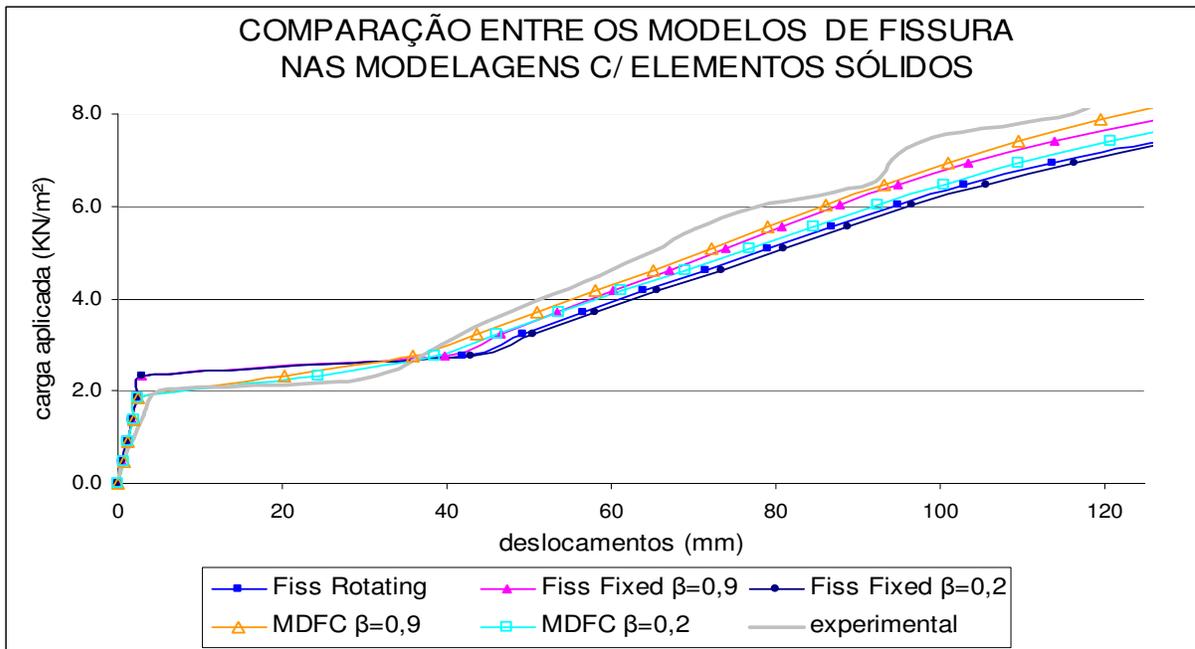
Gráfico 4.29 – Carga aplicada(KN/m^2) x (deformação(%) – tensão(MPa)) no aço, no meio da laje



4.30 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para os modelos com casca

4.5.1.1.2 Modelos com elementos sólidos

Os modelos usando elementos sólidos apresentaram respostas mais flexíveis do que os modelos com cascas. O gráfico 4.31 apresenta os exemplos de modelagem usando modelos de fissuras do tipo *Rotating*, *Fixed* e *Multi-directional fixed* (MDFC) com $\beta=0,2$ e $\beta=0,9$.



4.31 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para os modelos com sólido

Entre os modelos com elemento sólido foi verificado que a posição dos apoios, na face inferior (fundo) e na superfície média (meio) não influenciou as respostas da modelagem com modelos de fissuração do tipo *Rotating*. Nos modelos com fissuração do tipo *Fixed*, ou *Multi-directional fixed* (MDFC) com o apoio no fundo tem-se resultados um pouco mais flexível, porém estas diferenças não foram relevantes (gráfico 4.32).

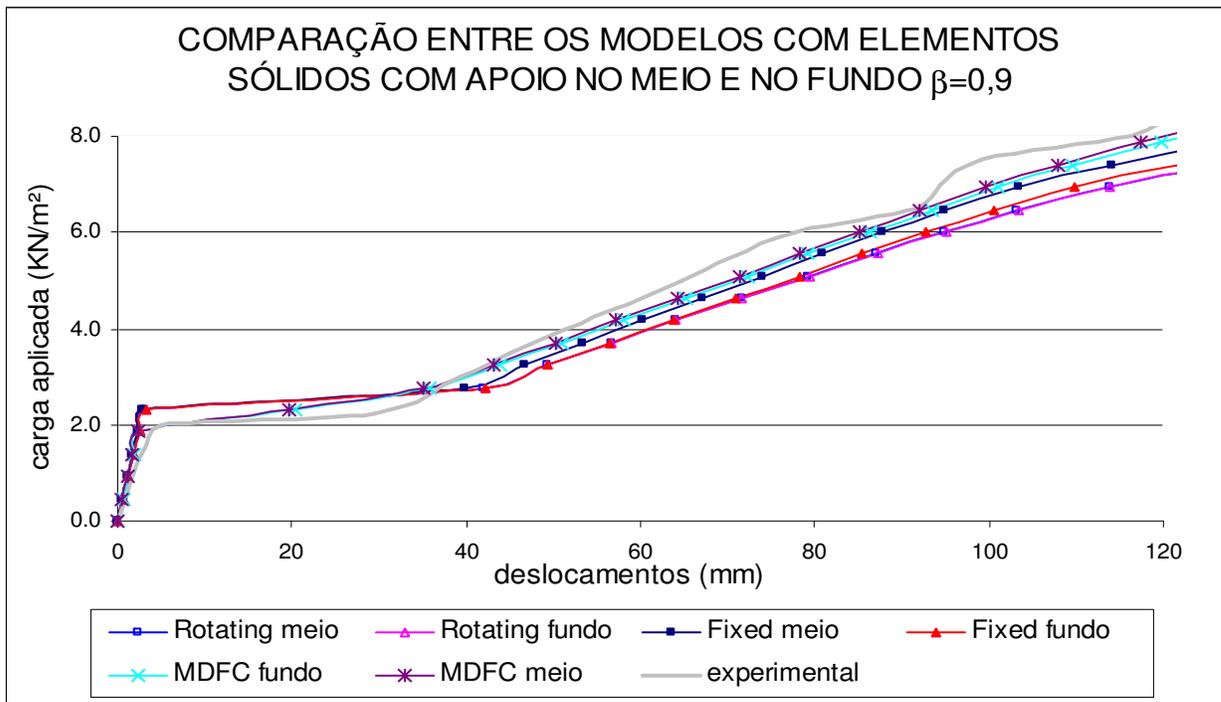


Gráfico 4.32 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão para os modelos com elemento sólido com apoio no meio e no fundo, $\beta=0,9$

Uma representação das tensões no concreto ao longo da espessura, fornecidas pelo programa, no centro da laje, é mostrada na figura 4.9-a. A figura 4.9-b mostra o panorama das tensões desenvolvidas na armadura, para a carga aplicada de 80% do carregamento total.

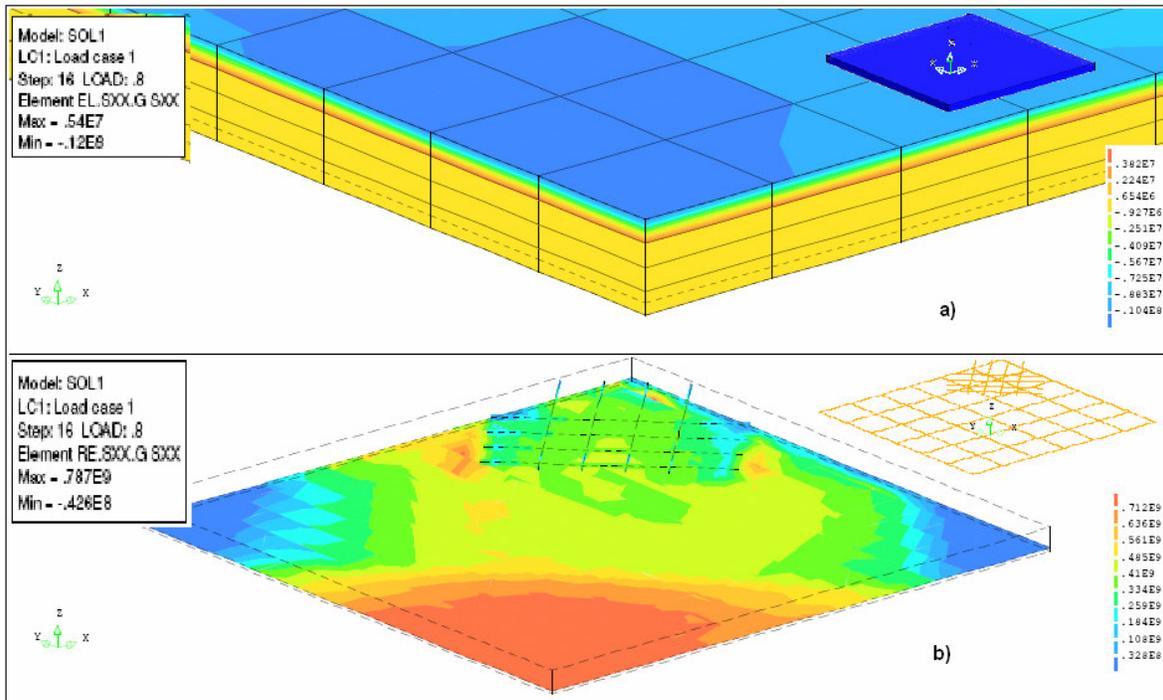


Figura 4.9 – Panorama das tensões desenvolvidas nas camadas de concreto (a) e na camada da armadura (b) no centro da laje (modelo completo) com a carga aplicada de 80% do carregamento total

4.5.1.2 Laje L2

A laje L2 foi construída semelhante à L1, mas com espessura de 7,2 cm, sendo esta a única diferença entre elas. Apesar da sua menor espessura, a laje L2 respondeu, experimentalmente, mais rígida do que a L1, após as primeiras fissuras (gráfico 4.33). Na comparação numérica entre as duas lajes, não foi observado o mesmo comportamento experimental. Os resultados estão representados no gráfico 4.34.

As modelagens, com elementos de casca e sólido, não apresentaram resultados aproximados às respostas experimentais relatadas. No entanto, nos gráficos carga x deslocamentos (gráfico 4.35) e carga aplicada x tensão na armadura (gráfico 4.36), no centro da laje modelada, observou-se uma boa previsão do estágio quando as fissuras se estabilizaram.

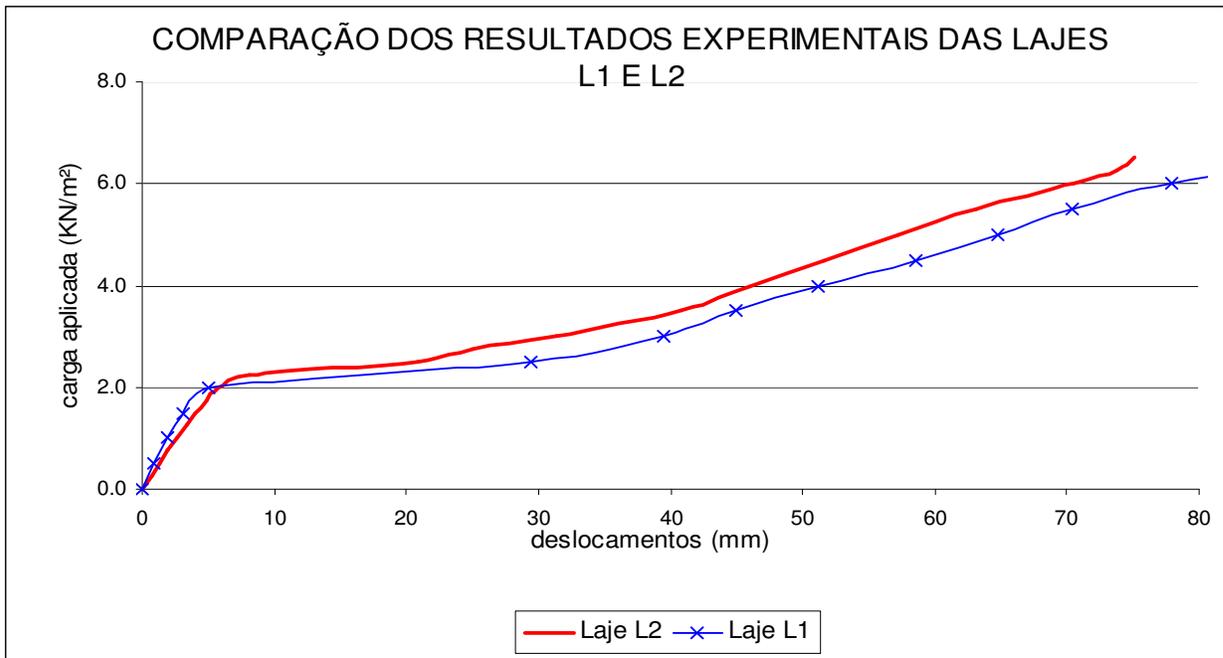


Gráfico 4.33 – Carga aplicada x deslocamentos no meio do vão obtidos com os valores dos ensaios experimentais das lajes L1 e L2

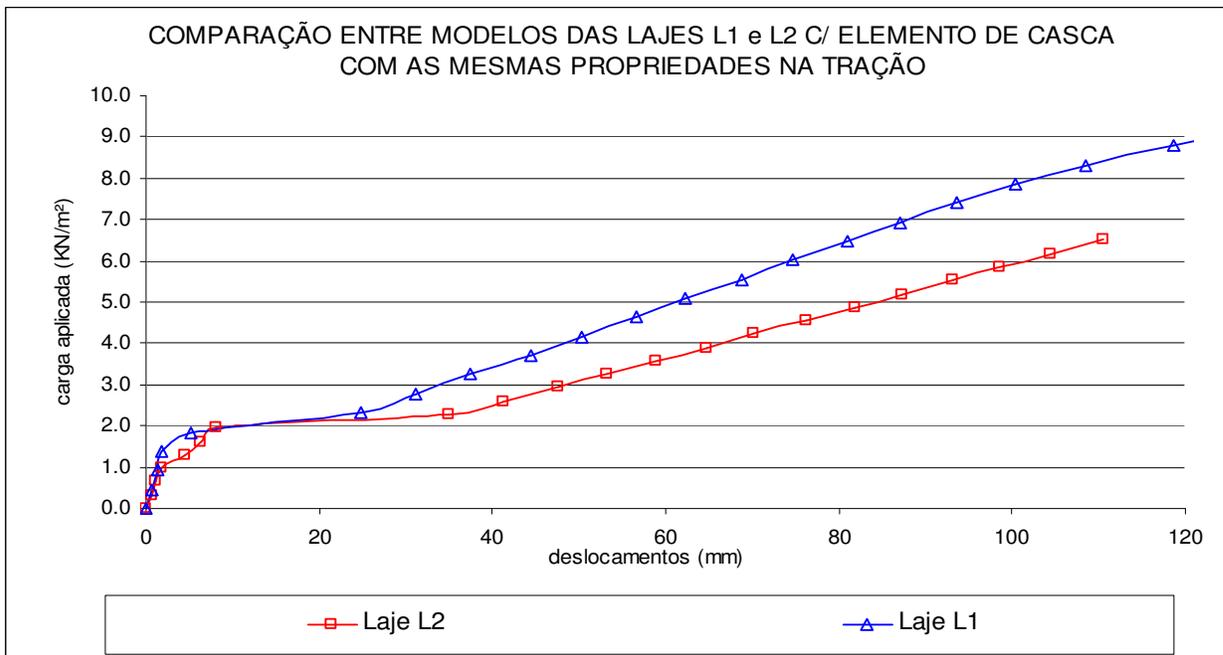


Gráfico 4.34 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos com elementos de casca das lajes L1 e L2, com as mesmas propriedades do concreto à tração

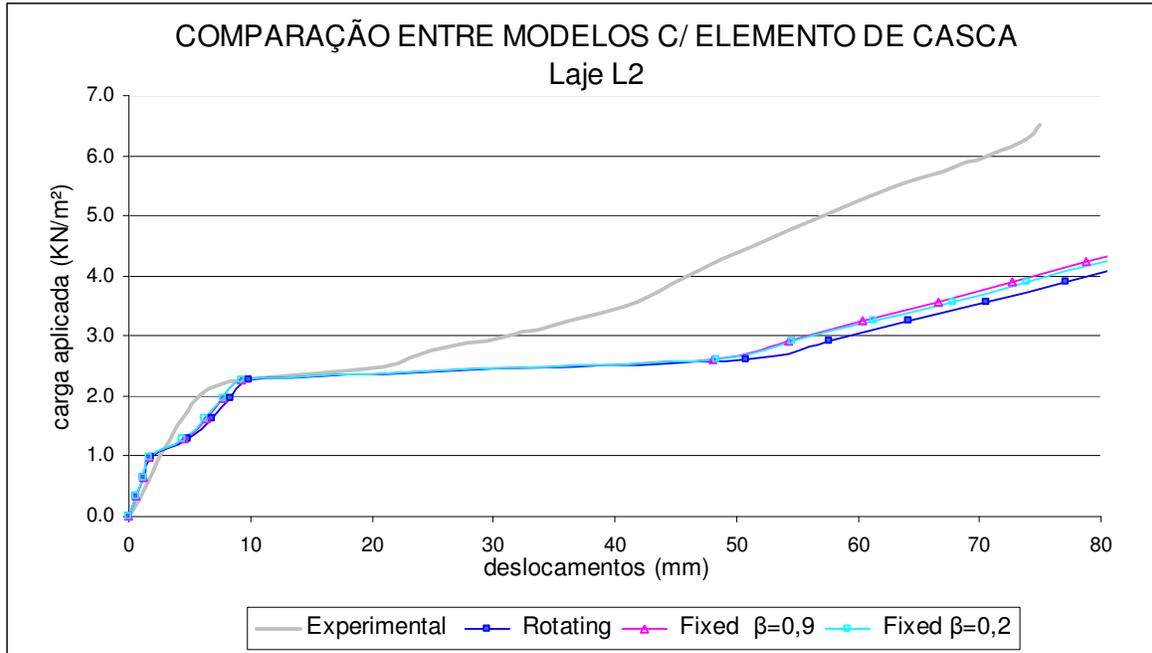


Gráfico 4.35 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos completos com elementos de casca que apresentaram os melhores resultados para a laje L2

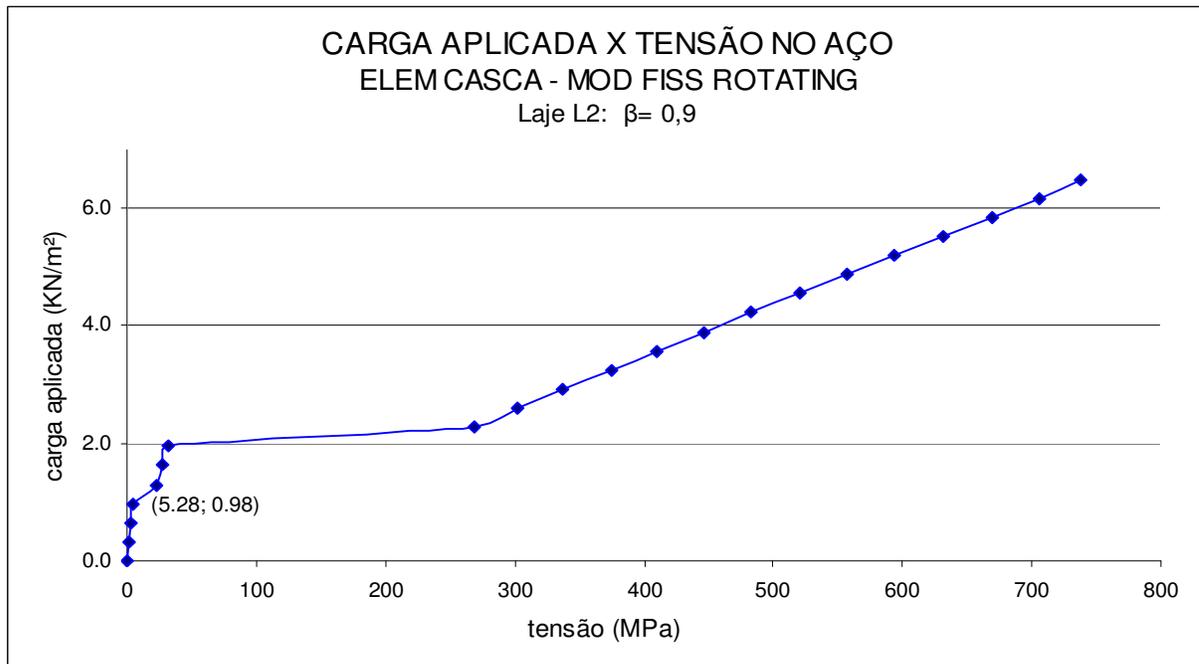


Gráfico 4.36 – Carga aplicada x tensão na armadura no meio da laje para o modelo completo com elemento de casca

4.5.1.3 Laje L3a

A laje L3a foi construída com deficiência de armadura. Nela foram inseridas 21 barras de aço com 3.4 mm de diâmetro. As armaduras nos cantos foram dispostas como na laje L1. A melhor resposta numérica foi observada usando elementos de casca com modelo de fissuração do tipo *Rotating*. A curva carga x deslocamentos dos modelos completos, sem armadura de canto na face inferior, sem armadura de canto na face superior e sem nenhuma armadura de canto, são apresentadas no gráfico 4.37.

O gráfico 4.38, carga x tensão no aço no meio da laje, apresenta o comportamento da armadura da laje L3a. O comportamento da laje mostrou ser influenciado pela presença das armaduras de canto, principalmente pela armadura de canto localizada na face superior, sob baixo nível de carregamento.

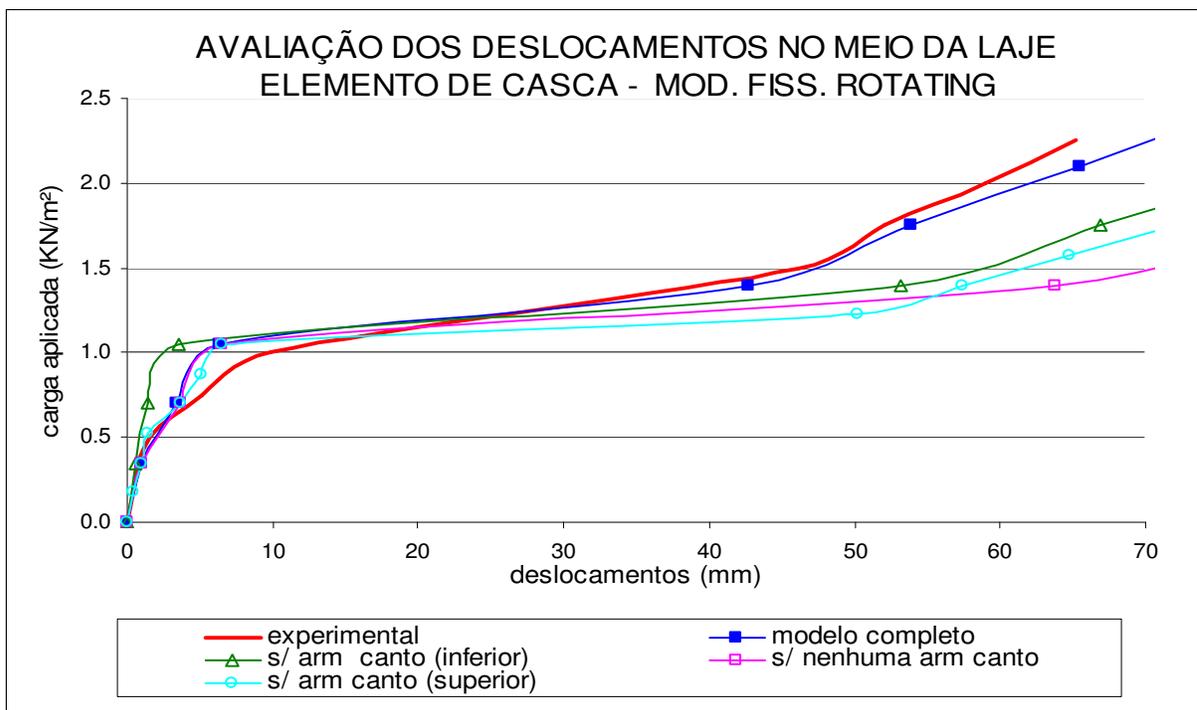


Gráfico 4.37 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos com elemento de casca que apresentaram os melhores resultados para a laje L3a; com e sem armadura de canto nas faces inferior e superior; e sem nenhuma armadura de canto

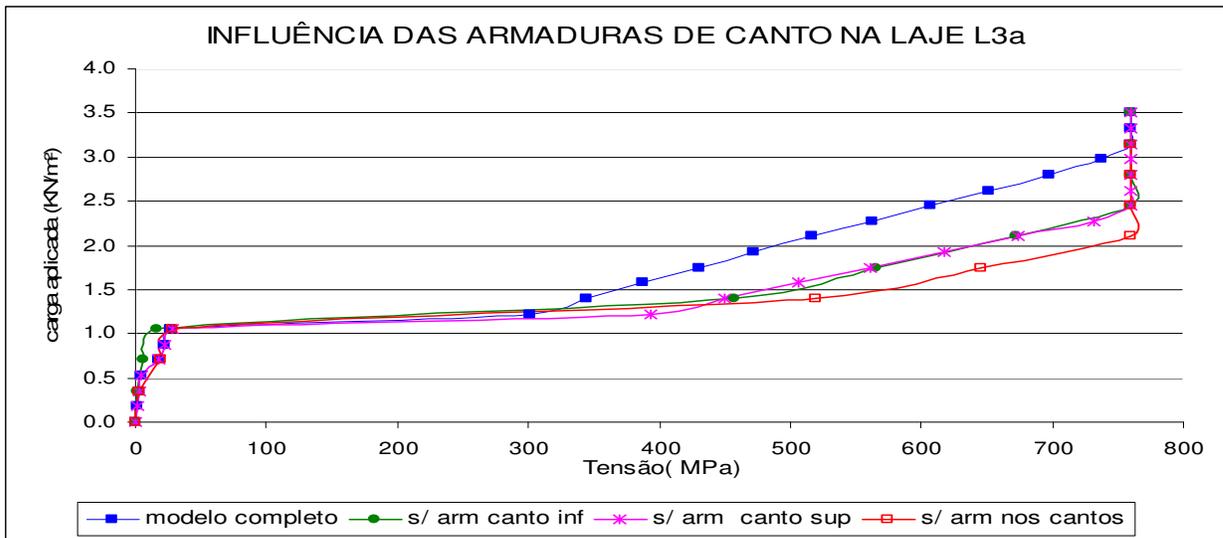


Gráfico 4.38 – Carga aplicada x tensão na armadura, avaliada no meio da laje, para os modelos sem as armaduras de canto nas faces inferior e superior e sem nenhuma armadura de canto

A carga de parada experimental foi de $2,25 \text{ KN/m}^2$. Com aquele carregamento, Campos (2000) relatou que a armadura já entrava em escoamento. Numericamente, no modelo completo, a armadura atingiu a sua tensão de escoamento com cargas próximas a $3,15 \text{ KN/m}^2$ (gráfico 4.39). Campos também relatou que o reforço aplicado nesta laje não apresentou o mesmo grau de eficiência das demais lajes e o autor concluiu que a laje foi limitada pela quantidade de armadura.

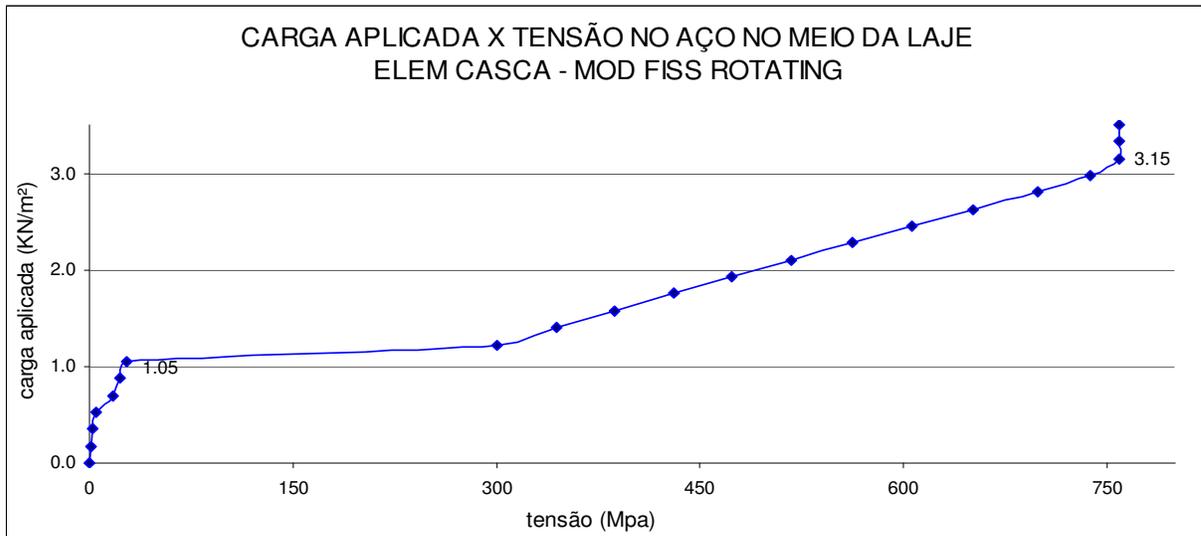


Gráfico 4.39 – Tensão na armadura principal x carga aplicada, avaliada em um elemento no meio da laje para o modelo com elemento de casca que apresentou o comportamento mais aproximado

4.5.1.4 Laje L4

A laje L4 foi executada com um concreto de baixa resistência à compressão. As modelagens completas para esta laje, com elementos de casca e sólido (gráfico 4.40), apresentaram um comportamento rígido para as cargas que levaram às primeiras fissuras, tornando-se mais flexíveis a partir deste evento. Pôde ser observado que o aço atingiu a sua tensão de escoamento com carga de 5,5 KN/m² (gráfico 4.41), próxima à carga de parada do ensaio que foi de 4,75 KN/m². Dentro do programa experimental, esta laje foi reforçada e levada à ruptura com uma carga de 12,0 KN/m².

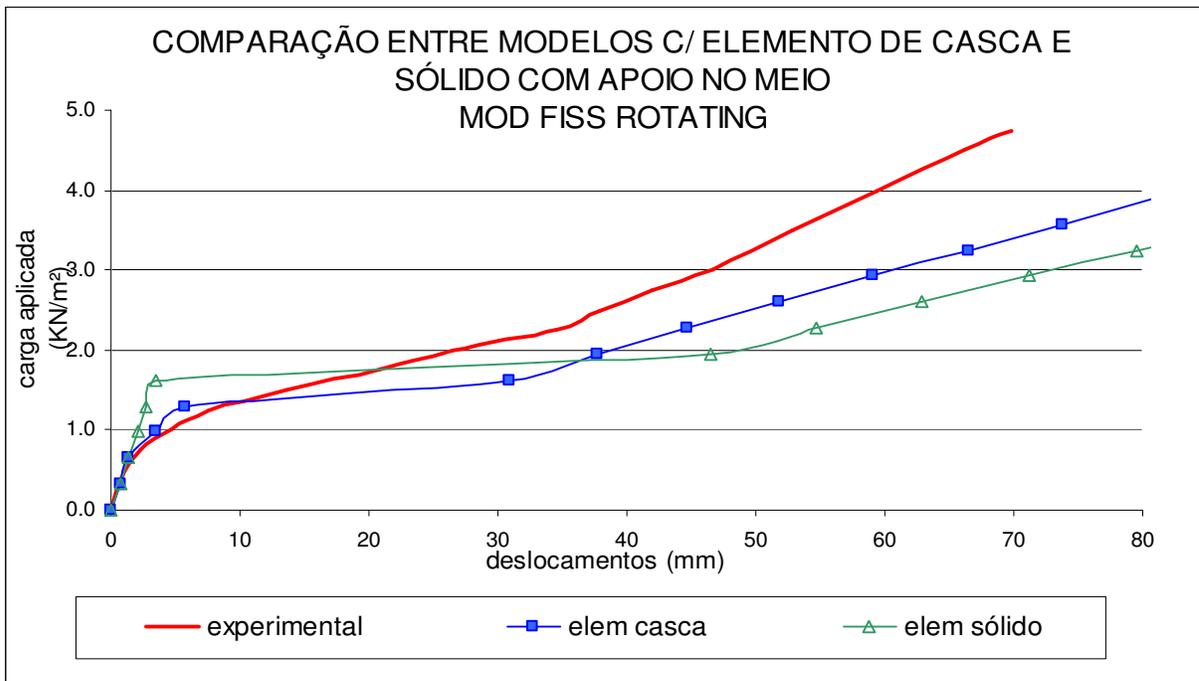


Gráfico 4.40 – Carga aplicada x deslocamentos no meio da laje para os modelos com elementos de casca e sólido que apresentaram os melhores resultados para a laje L4

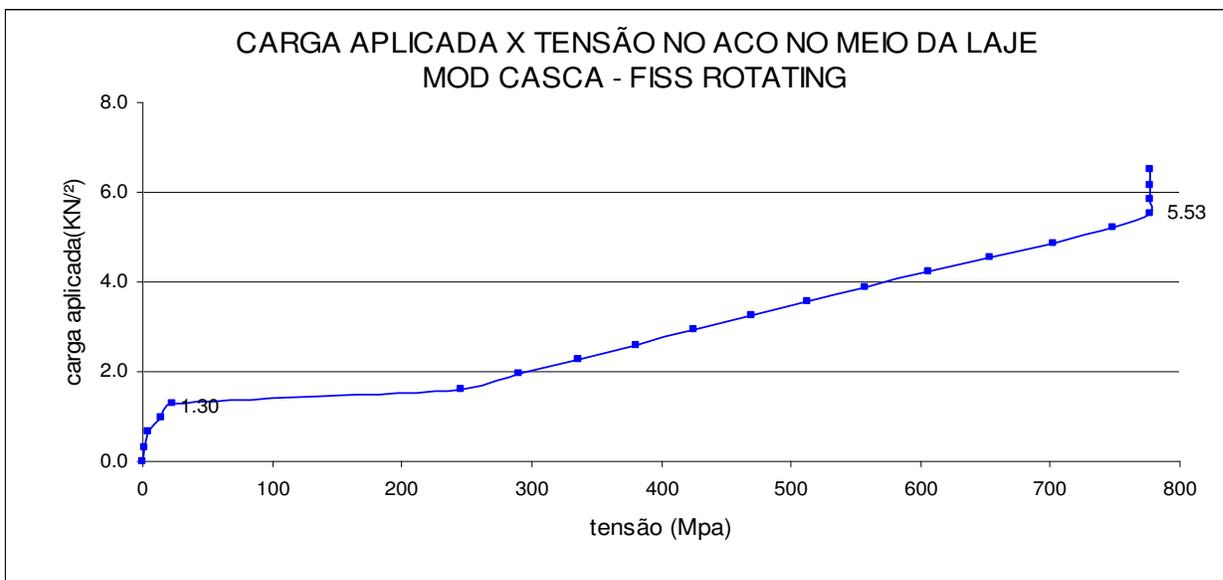


Gráfico 4.41 – Carga aplicada x tensão na armadura, avaliadas em um elemento no meio da laje para o modelo com elemento de casca que apresentou o comportamento mais aproximado

4.5.2 Análise das lajes de Pires (2003)

O aspecto padrão da curva obtida para as lajes foi semelhante aos aspectos das curvas carga x tensão e carga x deformação obtidas para a armadura no centro da laje. Diferente do padrão obtido para as curvas das lajes de Campos (2000), estas não apresentaram o trecho com o patamar tão extenso, e isto, provavelmente, se deve à maior taxa de armadura destas lajes. O último trecho da curva é característico de um escoamento que também pôde ser observado no comportamento do aço, diferenciando do comportamento experimental, uma vez que para a modelagem da armadura, foi escolhido o modelo de Von Mises com plasticidade ideal.

Nas análises preliminares, foram realizadas modelagens variando-se os valores para a resistência do concreto e energia do fraturamento na tração, confirmando que as respostas também são influenciadas pela variação dos parâmetros de resistência do concreto na tração, quando utilizados os modelos de fissuração do tipo *Rotating* e *Fixed*. Na verificação da influência do número de incrementos de carregamento, constatou-se que 40 passos de cargas conduziram a bons resultados, valores além, pouca ou nenhuma influência, apresentaram (gráfico 4.42).

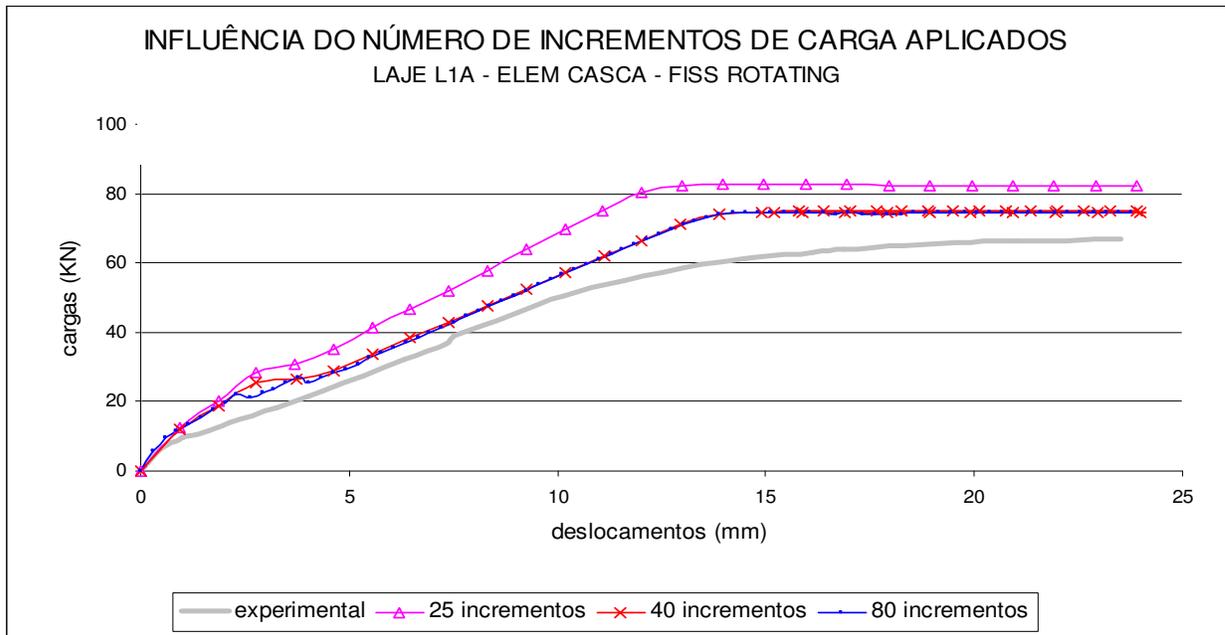


Gráfico 4.42 – Verificação da influência do número de passos de carga nas respostas aos carregamentos aplicados x deslocamentos no meio da laje

4.5.2.1 Laje L1A

Explorando as condições de apoio desta laje e o esquema de carregamento, os modelos permitiram variar o carregamento, aplicando-os como incrementos fixos e pré-definidos, de cargas ou de deslocamentos nas duas linhas de carregamento situadas no terço médio da laje. Portanto, as avaliações dos resultados obtidos para a laje L1A. foram feitas sob os dois aspectos: as reações para os deslocamentos aplicados e os deslocamentos obtidos para as forças aplicadas.

Os parâmetros dos materiais aplicados foram os dos ensaios experimentais e para a resistência à tração foram aplicados os valores do ensaio de compressão diametral (ou ensaio de tração indireta). Os resultados para os modelos com fissuras do tipo *Rotating* e elemento de casca com aplicação de cargas, variando-se o tipo de carregamento são apresentados no gráfico 4.43 de carga x deslocamento.

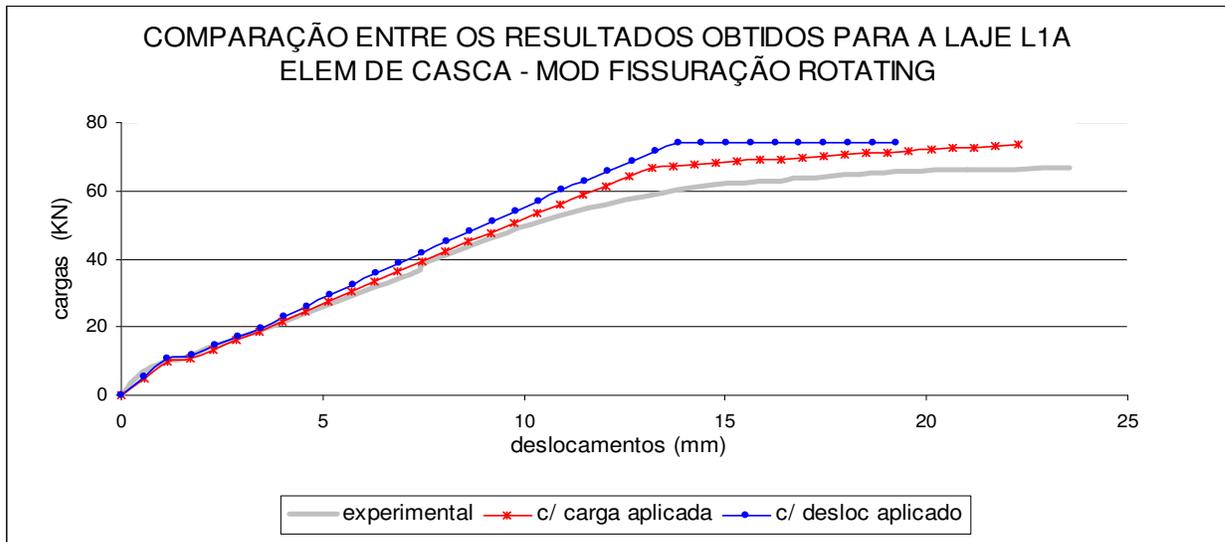


Gráfico 4.43 – Curvas de carregamento x deslocamentos para os modelos com elemento de casca variando-se o tipo de carregamento

A utilização de valores reduzidos da resistência à tração do concreto, obtida nos ensaios de tração indireta, conforme a indicação da norma brasileira ($f_{ct} = 0,9f_{ct,sp}$) não influenciou nos resultados numéricos, que são apresentados no gráfico 4.44.

Os modelos com elementos de casca ficaram mais rígidos do que os modelos com elementos sólidos. As primeiras fissuras com os modelos com elemento de casca foram observadas com cargas próximas a 10 MPa, enquanto que, experimentalmente, foram relatadas com carga 11,42 MPa (gráfico 4.45).

Os modelos com sólidos, com apoio no meio e fundo, apresentaram respostas muito parecidas, e ficaram mais rígidos sob baixo carregamento, definindo o aparecimento das primeiras fissuras com cargas acima das experimentais (gráfico 4.46).

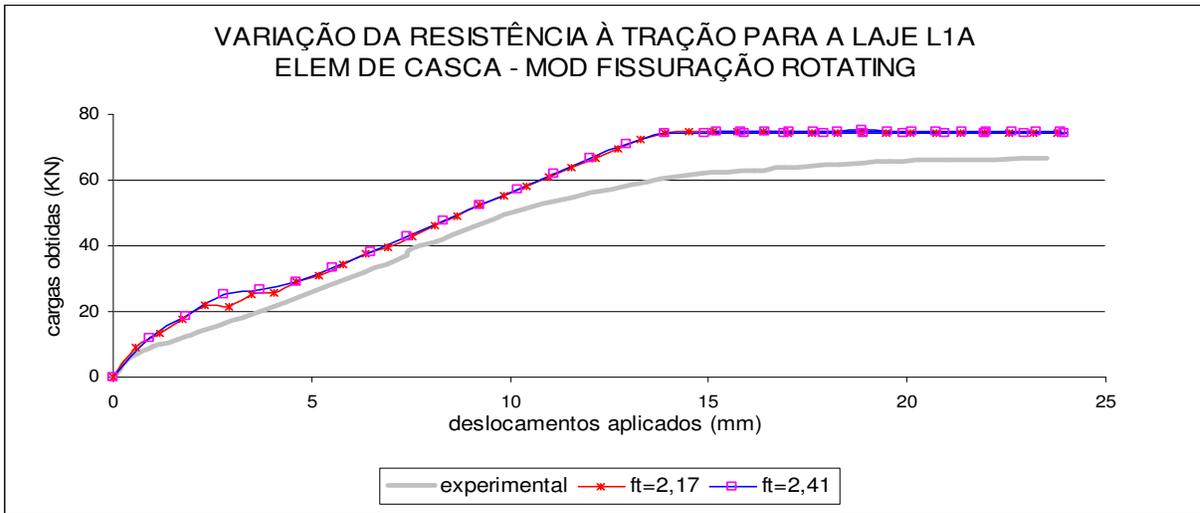


Gráfico 4.44 – Curvas de carregamento x deslocamentos aplicados para os modelos com elemento de casca variando-se a resistência do concreto à tração (valores em MPa)

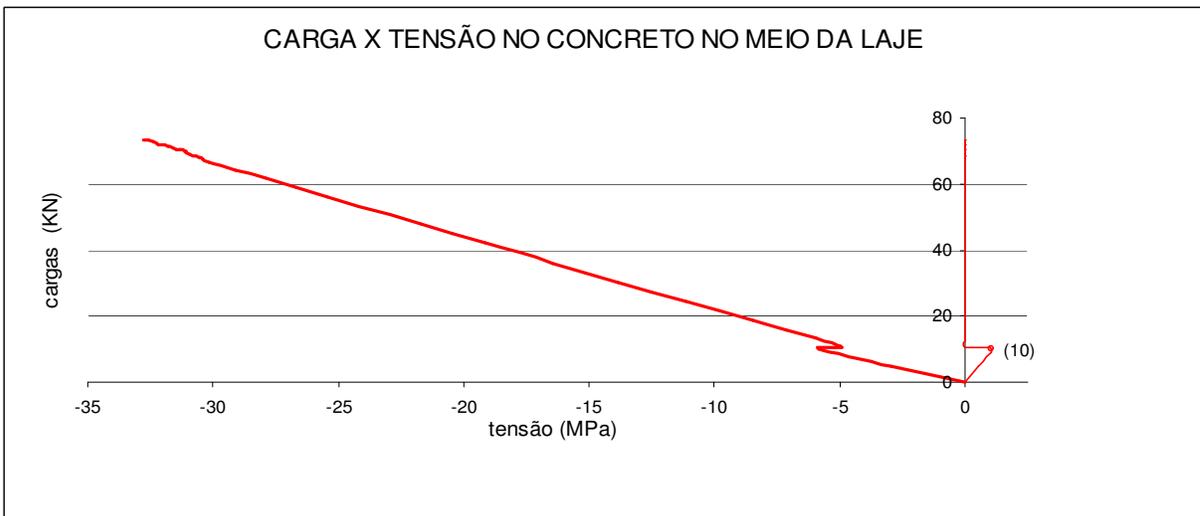


Gráfico 4.45 – Curvas carga x tensão no concreto no meio da laje, nos modelos com elemento de casca

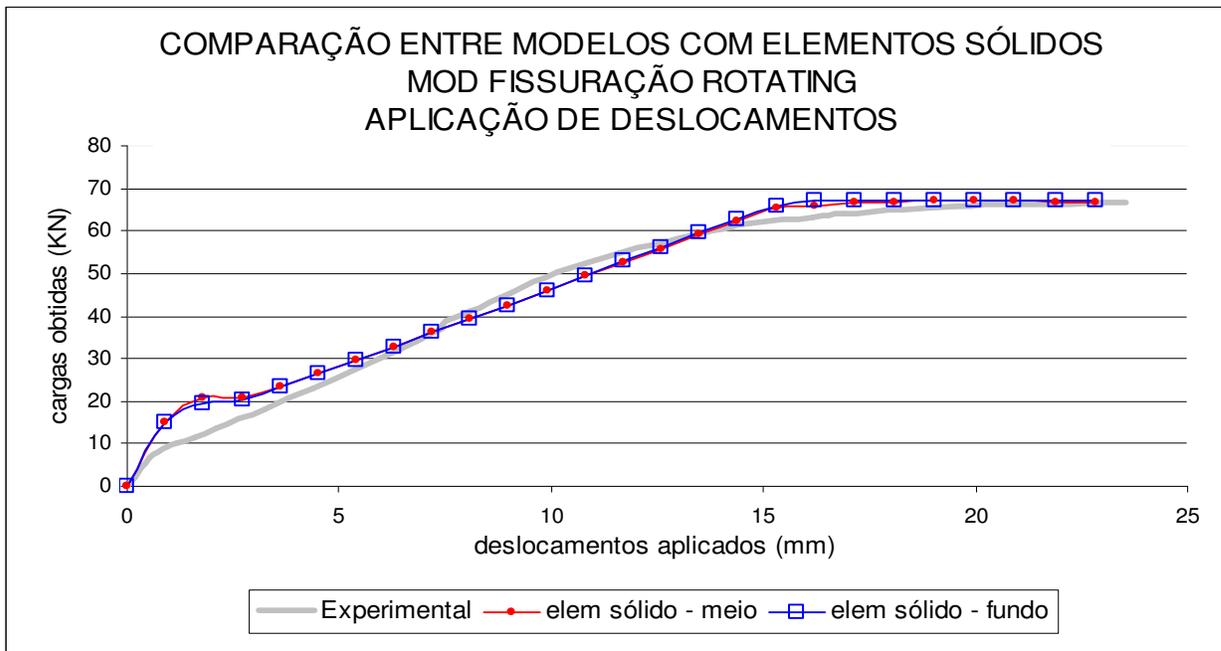


Gráfico 4.46 – Curvas de cargas obtidas x deslocamentos aplicados, para os modelos com elemento sólido com apoio no meio e no fundo

4.5.2.2 Laje L3A

Na modelagem da laje L3A, com a aplicação de incrementos de força, as análises ficaram instáveis, ainda sob cargas relativamente baixas, e não convergiram. Portanto, foram aplicados incrementos de deslocamentos.

A laje L3A foi construída com as mesmas características da L1A, mas com uma espessura de 15 cm. Os modelos com elementos de cascas apresentaram comportamento mais rígido do que os modelos com elemento de sólido. Os resultados dos modelos com elementos de casca e sólidos e fissuração do tipo *Rotating* são apresentados no gráfico 4.47, de cargas obtidas x deslocamentos aplicados. Entre os modelos usando elemento sólido, as respostas obtidas com os dois tipos de apoios (no meio e no fundo da laje) foram semelhantes às da laje L1A: aparentemente a posição dos apoios nos modelos pouco influenciou no comportamento das lajes.

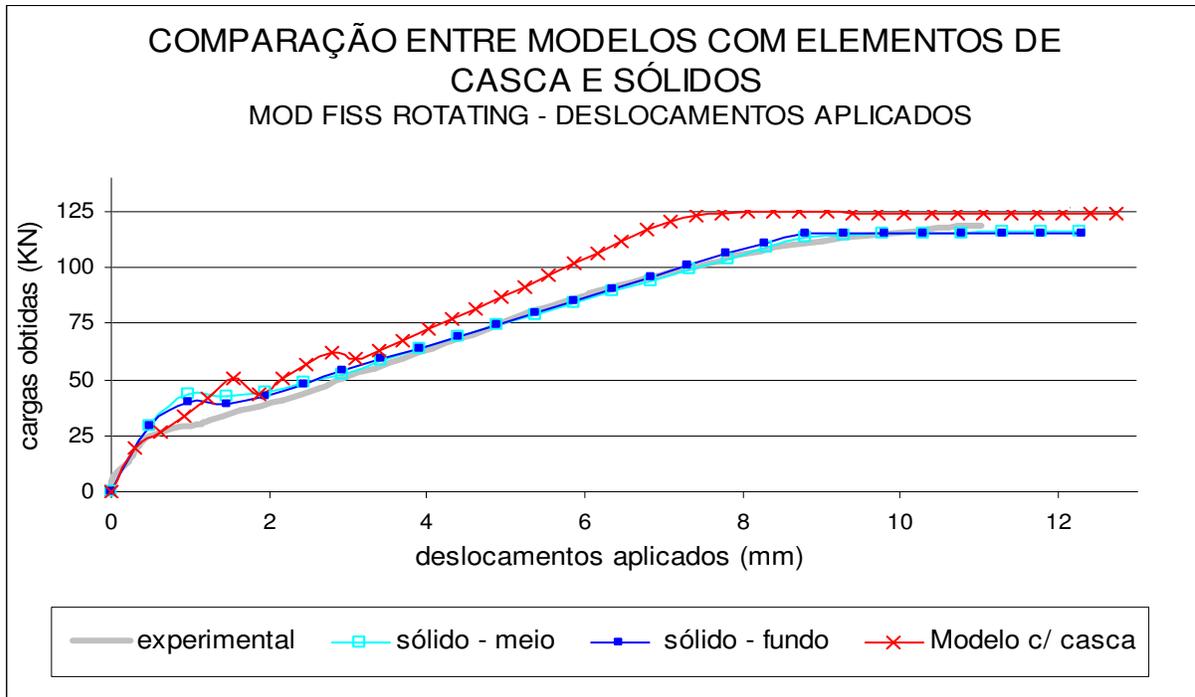


Gráfico 4.47 – Cargas obtidas com a aplicação de deslocamentos nos modelos com elementos de casca e sólido, apoio no meio e no fundo

Nenhum modelo numérico apresentou ruptura, nem por esmagamento do concreto (gráfico 4.48) nem por escoamento da armadura (gráfico 4.49) uma vez que a resistência de escoamento do aço foi dada por 686,2 MPa. As primeiras fissuras foram observadas com cargas de 23,93 KN, menores do que as obtidas experimentalmente (27,41 KN).

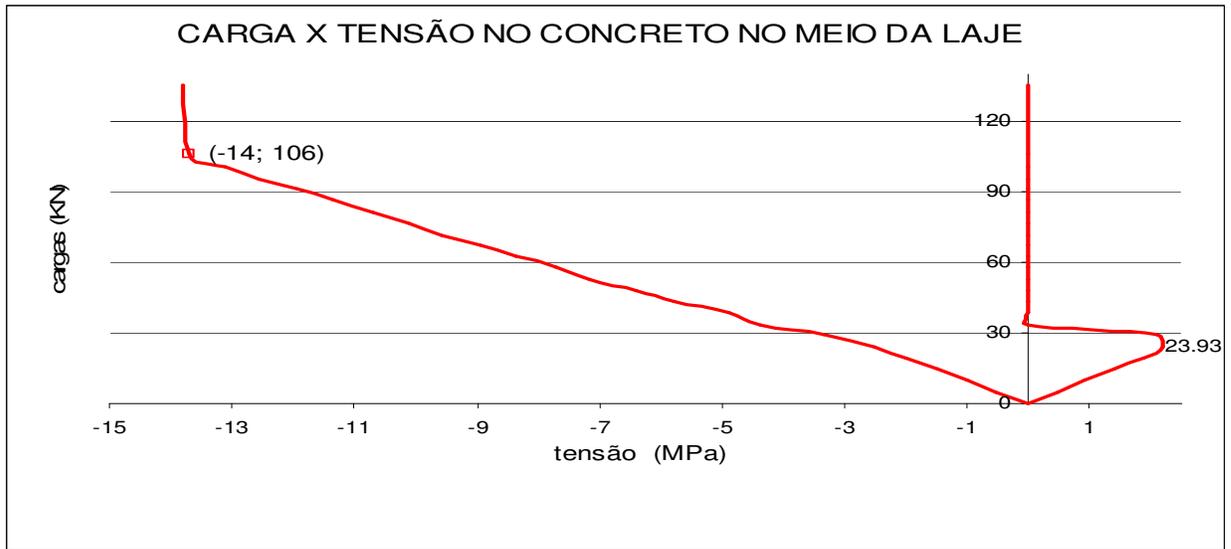


Gráfico 4.48 – Cargas x tensão no concreto nos modelos com elementos sólidos (com a aplicação de deslocamentos)

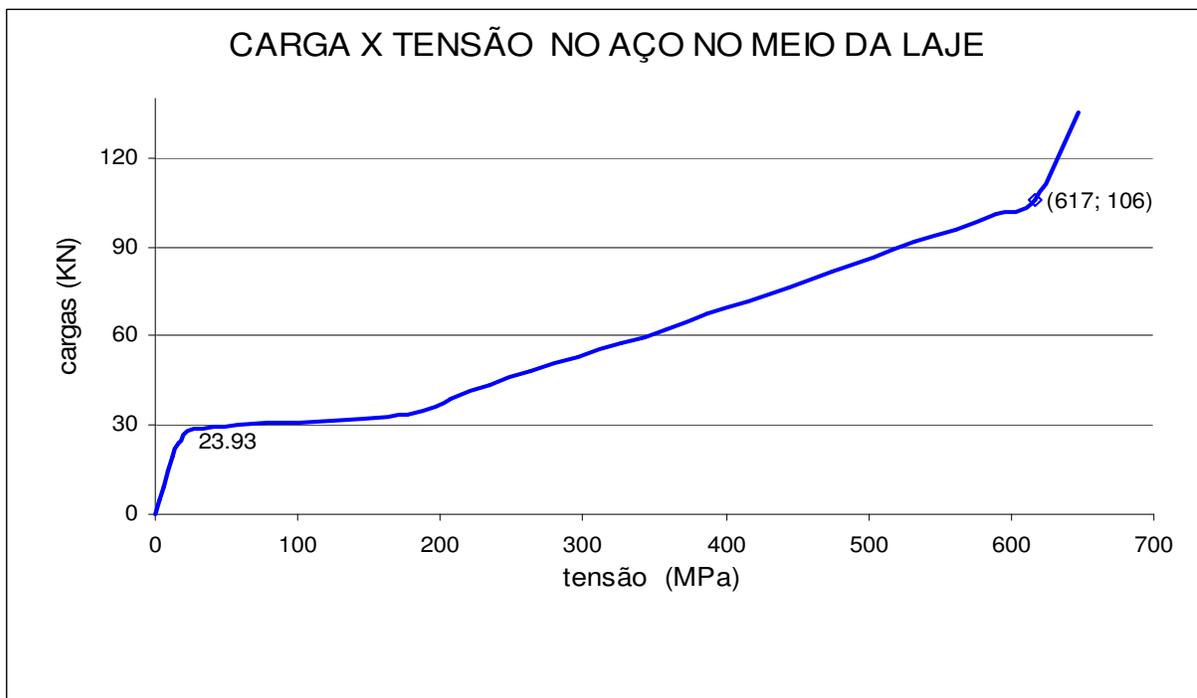


Gráfico 4.49 – Cargas x tensão no aço nos modelos com elementos sólidos (com a aplicação de deslocamentos)

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Os parâmetros de fratura - máxima resistência do concreto à tração, energia despendida na formação de uma fissura e a relação tensão x abertura de fissura - são fundamentais para que se possa prever o comportamento pós-fissura das estruturas de concreto. Portanto, a sua correta estimativa, juntamente com um robusto e confiável sistema computacional, são condições primordiais para que se possa ter uma boa simulação numérica de estruturas.

5.1 Quanto à resistência à tração do concreto:

Para as lajes de Pires (2003) os valores utilizados nas modelagens foram obtidos em ensaios experimentais de tração indireta (ou ensaio de compressão diametral) enquanto para as lajes de Campos (2000) os valores utilizados foram obtidos em ensaios de arrancamento. Em ambos os casos, para que se tivessem bons resultados numéricos, os valores utilizados tiveram que ser menores que os prescritos por normas. Este procedimento está de acordo com o que já foi previsto por outros pesquisadores, entre os quais Cruz et al (2004), e os valores foram válidos para todos os modelos de fissuração utilizados.

5.2 Quanto aos valores da energia do fraturamento e dos diagramas pós-pico do concreto à tração:

Para todos os modelos de fissuração utilizados, os valores da energia de fraturamento foram obtidos com as expressões fornecidas pelo CEB-FIP 1990 e deram bons resultados.

Como não foram efetuados ensaios para a determinação dos valores de energia no modo I de fratura, nem ensaios de tração direta para a determinação do comportamento pós-pico do concreto, procedeu-se à determinação, por retro-análise, de diagramas pós-pico bilineares. Para a determinação destes diagramas foram utilizados os valores da energia de fraturamento obtidos com as expressões fornecidas pelo CEB-FIP 1990. Para todos os modelos de fissuração utilizados, este procedimento se mostrou adequado.

Quando foram utilizados diagramas lineares, com os valores de energia obtidos pelas expressões do CEB-FIP 1990, todos os modelos de fissuração utilizados não forneceram bons resultados, desde o início do processo de fissuração até a sua estabilização. Para que se tivessem bons resultados, os valores tomados para a energia deveriam ser menores do que os utilizados com diagramas bilineares.

5.3 Quanto ao aparecimento das primeiras fissuras numéricas:

Os valores numéricos das cargas relacionadas ao aparecimento das primeiras fissuras das lajes de Campos (2000) foram cerca de 50% menores do que os relatados para as primeiras fissuras visualizadas experimentalmente. Entretanto, os gráficos numéricos, desde o início do carregamento até o processo de estabilização das fissuras, retrataram bem o comportamento verificado experimentalmente. Nas lajes de Pires, as cargas necessárias para o aparecimento das primeiras fissuras até os processos de estabilização das fissuras, também, foram coerentes com os ensaios experimentais.

5.4 Quanto ao fator de retenção ao cisalhamento (β):

Em geral, o comportamento de placas é dominado por flexão simples, onde a influência das tensões cisalhantes não é muito relevante e nas lajes de concreto

armado, devido à fissuração esta influência é ainda menor. Nas formulações da mecânica da fratura a influência da abertura de fissuras nas tensões e deformações cisalhantes é dada pelo fator de retenção das tensões cisalhantes β e pôde-se notar que a sua variação afeta o comportamento das lajes, como já se sabia para a simulação de vigas. Quanto maior o valor tomado para β , mais rígida se torna a laje.

5.5 Quanto à influência da resistência máxima à compressão e da energia da fratura na compressão:

Como em nenhuma das lajes analisadas a resistência à compressão do concreto foi alcançada não se pôde avaliar se o valor da energia da fratura à compressão do concreto fornecido gráfico parabólico adotado pelo CEB-FIP é coerente ou não.

5.6 Quanto à influência do coeficiente de Poisson aplicado ao concreto:

Quanto menor foi o coeficiente de Poisson aplicado, mais flexíveis foram as respostas das lajes modeladas com casca e com sólido, na análise linear. Na análise não-linear, ficaram mais rígidas;

Os momentos fletores obtidos no meio das lajes, tanto na análise linear, quanto na não-linear, para os modelos com casca e sólido, ficaram menores com o coeficiente de Poisson tendendo a zero;

5.7 Quanto aos elementos de casca e sólidos:

As lajes com maior espessura apresentaram as melhores respostas numéricas. Dentre estas as lajes de Pires (2003) apresentaram respostas bem

aproximadas utilizando os parâmetros de materiais informados dos ensaios experimentais ou calculados com as formulações convencionais.

Para as lajes analisadas, as respostas obtidas com os modelos com elemento de casca foram mais rígidas do que com elemento sólido, como se esperava.

5.8 Quanto à posição dos apoios nos modelos com elementos sólidos:

Para todos os modelos de fissura utilizados, as diferenças obtidas com os apoios na superfície média ou no fundo das lajes, não foram relevantes.

5.9 Quanto aos modelos adotados:

Os modelos adotados capturaram bem o comportamento da laje construída com deficiência de armadura (L3a) do programa de Campos (2000), produzindo respostas com boa aproximação. O mesmo não aconteceu para a laje construída com deficiência de resistência no concreto (L4).

Para melhorar o desempenho da análise é necessário fornecer parâmetros de rigidez do concreto à tração mais precisos. Os testes de arrancamento realizados nas lajes forneceram valores com razoável precisão para a entrada de dados do programa.

Os modelos com elementos sólidos com apoio no fundo representam situações comuns de execução e forneceram bons resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 2003.

BITTENCOURT, Túlio Nogueira. **Faturamento do Concreto Estrutural: Aspectos Teóricos, Computacionais e Experimentais, e suas Aplicações**. 1999. 226 p. Tese (Concurso de Livre Docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

CAMPOS, Carlos de Oliveira. **Análise experimental de lajes de concreto armado reforçadas pela face superior**. 2000. 131 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2000.

CARVALHO, João Dirceu N. **Estruturas de Concreto**. Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal de Maringá. Paraná, 2003. 130 p. Notas de aula.

CARVALHO, Roberto Chust. **Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. 1994. 208 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.

CASTRO, Luís Manuel Santos. **Modelação de Lajes com Elementos de Grelha**. Instituto Superior Técnico. Universidade Técnica de Lisboa. Portugal, 2000. 38 p. Elementos de estudo da disciplina de Análise de Estruturas II. Disponível em: <www.civil.ist.utl.pt/~luis/textos/modelação.pdf>

CEOTTO, Luiz Henrique. Ações Inovadoras. In: I SEMINÁRIO INOVAÇÕES NA CONSTRUÇÃO CIVIL BRASILEIRA, 2005, São Paulo, UNIEMP. p.51. Disponível em: <http://home.uniemp.org.br/seminarios/iccb_palestras.html>

COELHO, Jano D'Araujo; BANKI, André Luiz. Análise de placas pela teoria da elasticidade (artigo 230). In: Análise de lajes de concreto armado (seqüência de artigos). Eberick, 2002. p.11.

COELHO, Jano D'Araujo; LORIGGIO, Daniel Domingues. Analogia de grelha para o projeto de lajes de concreto armado. In: XXIX JORNADA SUL-AMERICANA DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 2000a, Uruguay. p.16.

COELHO, Jano D'Araujo; LORIGGIO, Daniel Domingues. Análise de lajes pelo método das faixas de Hillerborg (artigo 252). In: Análise de lajes de concreto armado (seqüência de artigos). Eberick, 2002b. p. 8.

COELHO, Jano D'Araujo; LORIGGIO, Daniel Domingues. Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelhas (artigo 270). In: Análise de lajes de concreto armado (seqüência de artigos). Eberick, 2002c. p.18.

CRUZ, José Sena; BARROS, Joaquim; AZEVEDO, Álvaro. **Elasto-plastic multi-fixed smeared crack model for concrete**. Universidade do Minho. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Portugal, 2004. 70 p.

DUARTE, Marcos Antônio da Silva. **Estudo comparativo entre diversos processos de análise de subsistemas horizontais de edifícios de concreto armado**. 2004. 178 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2004.

FEENSTRA, Peter H.; De BORST, René. A constitutive model for reinforced concrete based on stress decomposition. Proc. Engineering Mechanics, Proc of the 10th Conference, 643-646. 1995.

KANG, Wang Tai; BITTENCOURT, Túlio Nogueira. Identificação do processo de fraturamento do concreto estrutural. **Boletim Técnico**. FAPESP–EPUSP. 1998. 22p.

KAEFER, Luís Fernando. **A evolução do concreto armado**. Universidade de São Paulo. São Paulo, 1998, 43 p. Elementos de estudo da disciplina PEF 5707 – Concepção, Projeto e Realização das estruturas: aspectos históricos. Disponível em: www.lem.ep.usp.br/pef605/HistoriadoConcreto.pdf.

LEITÃO, Vitor M.A. ; CASTRO, Luís Manuel Santos. **Apontamentos sobre análise de lajes**. Instituto Superior Técnico. Universidade Técnica de Lisboa. Portugal, 2001. 123 p. Elementos de estudo da disciplina de Análise de Estruturas I.

LOURENÇO, Paulo B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear**. Departamento de Engenharia Civil. Universidade do Minho. Portugal, 1999. 124 p. Relatório 99-DEC/E-I.

MELO, Fábio A. Pereira; FONTE, Antônio Oscar C.; HOROWITZ, Bernardo. Análise estrutural de lajes planas sob a ação de carregamento vertical, comparando modelos numéricos com experimentais. In: XXIX JORNADA SUL-AMERICANA DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 2000, Uruguay. P.14.

NUNES, Fábio Wendell da Graça. **Resistência e módulo de elasticidade de concretos usados no Rio de Janeiro**, 2005. 110 p. Dissertação (Mestrado em Ciência em Engenharia Civil). Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2005.

PARSEKIAN, Guilherme Aris; CORRÊA, Márcio R. Silva. Cálculo e armação das lajes de concreto armado com a consideração do momento volvente. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 1998. 26 p. Cadernos de Engenharia de Estruturas nº 2.

PINHEIRO, Libânio M.; MUZARDO, Cassiane D; SANTOS, Sandro P. **Estruturas de concreto**. Escola de Engenharia de São Carlos – USP. São Paulo, 2003, 98 p. Notas de aula da disciplina Estruturas de Concreto A.

PINTO, Rivelli da Silva. **Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto**. 1997. 128 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

PIRES, Eliene Ferreira. **Comportamento e desempenho do reforço à flexão de lajes de concreto armado através do aumento da seção na região comprimida**. 2003. 100 p. Dissertação (mestrado em Engenharia de Estruturas). Universidade Federal de Minas Gerais. 2003.

PROENÇA, Sérgio Persival Baroncini. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**. 1988. 316 p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

RIBEIRO, Alberto Fernandes. **Modelos de fenda discreta na simulação do comportamento em flexão de betão reforçado com fibras de aço**. 121 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Guimarães, 2004.

SILVEIRA, Marcos. **Referência para cálculo de concreto armado**. Departamento de Estruturas e Engenharia de Fundações. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001. 27 p. Elementos de estudos.

SOUZA, Rafael Alves. **Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades**. 412 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.

SÜSSEKIND, José Carlos. **Curso de Concreto: concreto armado**. 7. ed. Rio de Janeiro: Ed. Globo, 1979. 376 p.

TNO DIANA BV. **Finite Element Analysis**. User's Manual – Release 8.1. 2. ed. Ed. Fritz C de Witte, 2003.

TRAUTWEIN, Leandro Mouta. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado: análise experimental e numérica**. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2006. 350p.