UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

ESTUDO E AVALIAÇÃO DE UMA PROPOSTA DE MODELAGEM DO COMPORTAMENTO MICROMECÂNICO DO CONCRETO

DANNILO CARVALHO BORGES

D0115E15
GOIÂNIA
2015

DANNILO CARVALHO BORGES

ESTUDO E AVALIAÇÃO DE UMA PROPOSTA DE MODELAGEM DO COMPORTAMENTO MICROMECÂNICO DO CONCRETO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Mecânica das Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. José Júlio de Cerqueira Pituba

D0115E15
GOIÂNIA
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

GPT/BC/UFG

Borges, Dannilo Carvalho.

Estudo e avaliação de uma proposta de modelagem do comportamento micromecânico do concreto [manuscrito] / Dannilo Carvalho Borges. - 2015.

CIX, 109 f.: il..

Orientador: Prof. Dr. José Júlio de Cerqueira Pituba

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil (EEC), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Goiânia, 2015.

Bibliografia.

Inclui abreviaturas, símbolos e lista de figuras.

1. Concreto. 2. Fratura Coesiva. 3. Materiais Frágeis. 4. Homogeneização. 5. Plasticidade. I. José Júlio de Cerqueira Pituba, orient. II. Título.

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Dannilo Carvalho Borges			
CPF:	734179121-72			
E-mail:	danniloc@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x] Sim [ ] Não				
Vínculo empregatício do autor:	Nenhum			
Agência de fomento: Campanha Nacional de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF: GO	CNPJ:	
Título:	Estudo e Avaliação de uma Proposta de Modelagem do Comportamento Micromecânico do Concreto			
Palavras-chave:	Concreto. Fratura Coesiva. Materiais Frágeis. Homogeneização. Plasticidade.			
Título em outra língua:	Study and Evaluation of a Modeling Proposal to Micromechanical Behavior to Concrete			
Palavras-chave em outra língua:	Concrete. Cohesive Fracture. Brittle Materials. Homogenization. Plasticity.			
Área de concentração:	Mecânica das Estruturas			
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	19/08/2015			
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Pós-graduação em Geotecnia, Mecânica das Estruturas e Construção civil			
Orientador (a):	José Júlio de Cerqueira Pituba			
E-mail:	julio.pituba@pq.cnpq.br			

3. Informações de acesso ao documento:
Liberação para disponibilização?[1] [X] total [ ] parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:
[ ] Capítulos. Especifique: _____
[ ] Outras restrições: _____
Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.
O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Dannilo Carvalho Borges
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 19 / 08 / 2015

[1] Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

Universidade Federal de Goiás
Escola de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil

FOLHA DE APROVAÇÃO

Estudo e Avaliação de uma Proposta de Modelagem do Comportamento Micromecânico do Concreto

Dannilo Carvalho Borges

Dissertação defendida e aprovada pela banca constituída pelos senhores:

Prof. Dr. José Julio de Cerqueira Rituba (GECON/UFG)

Prof.ª Dr.ª Sylvia Regina Mesquita de Almeida (GECON/UFG)

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques (PPGMateriais-UFAL)

Goiânia, 19 de agosto de 2015.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a minha família que sempre me apoiou nos momentos mais difíceis.

Um agradecimento especial a minha noiva Wanessa Carneiro, que me ajudou a superar os desafios com paciência.

Aos meus amigos que me acompanharam ao longo dessa jornada e pude encontrar apoio durante a pesquisa.

Aos professores do GECON que me acompanharam nessa jornada, deixo meu agradecimento por ter contribuído para uma formação profissional mais sólida.

Ao meu orientador, professor José Júlio, pela paciência e confiança depositada em mim para a realização desse projeto.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta para a modelagem numérica do comportamento mecânico da microestrutura de materiais heterogêneos e frágeis, tal como o concreto. Para este fim, apresenta-se um modelo 2D de escala mesoscópica. O material é considerado como composto por três fases consistindo de zona de interface, matriz e inclusões, onde cada constituinte é modelado adequadamente. O Elemento de Volume Representativo (EVR) consiste de inclusões idealizadas de forma circular aleatoriamente dispostas no EVR. A zona de interface é modelada por meio de elementos finitos coesivos e de contato e as inclusões são modeladas como meio elástico linear. Já a matriz é considerada como material elastoplástico. O principal objetivo é mostrar que modelos constitutivos simples empregados na microestrutura em conjunto com uma formulação baseada numa homogeneização computacional são uma alternativa aos modelos constitutivos macroscópicos complexos para o comportamento mecânico de materiais heterogêneos usando um procedimento baseado no Método dos Elementos Finitos no âmbito de uma teoria Multiescala. Uma série de exemplos envolvendo processos de microfissuração e plasticidade é apresentada de modo a ilustrar qualitativamente a performance da modelagem proposta.

Palavras-chave: Concreto. Fratura Coesiva. Materiais Frágeis. Homogeneização. Plasticidade.

ABSTRACT

This work deals with a proposed numerical modeling of mechanical behavior in brittle heterogeneous materials, such as concrete. For this propose, a two-dimensional meso-scale model is presented. The material is considered as a three-phase material consisting of interface zone, matrix and inclusions – each constituent modeled by an appropriate constitutive model. The Representative Volume Element (RVE) consists of inclusions idealized as circular shapes randomly placed into the RVE. The interface zone is modeled by means of cohesive contact finite elements the inclusions are considered as linear elastic media and matrix region is considered as elastoplastic material. The main goal here is to show that simple constitutive modeling of the microstructure can be employed with a computational homogenization-based approach as an alternative to complex macroscopic constitutive models for the mechanical behavior of the heterogeneous materials using a finite element procedure within a purely kinematical multi-scale framework. A set of numerical examples, involving the microcracking and plasticity processes, is provided in order to illustrate the qualitative performance of the proposed modeling.

Keywords: Concrete. Cohesive Fracture. Brittle Materials. Homogenization. Plasticity.

LISTA DE FIGURA

Figura 2.1 – Diferentes escalas de observação (BITTENCOURT, 1999).....21
Figura 2.2 – Níveis de observação do concreto (BITTENCOURT, 1999) 22
Figura 2.3 – A exsudação interna e a externa, (MEHTA; MONTEIRO, 2008).....23
Figura 2.4 – Intervalo dos vazios na pasta endurecida, (MEHTA e MONTEIRO, 2008) 24
Figura 2.5 – Representação diagramática do concreto, (MEHTA; MONTEIRO, 2008).....24
Figura 2.6 - Resposta do concreto sob ensaio de tração direta, adaptado pelo autor (KARIHALOO, 1995 *apud* OLIVEIRA, 2013).....26
Figura 2.7 - Diagrama Tensão x Deformação em compressão, (PROENÇA, 1988) 26
Figura 2.8 - Representação do comportamento do concreto sob compressão uniaxial (σ-ε), adaptado pelo autor (MEHTA; MONTEIRO, 2008).....27
Figura 2.9 - Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial no concreto, (PITUBA, 2003) 28
Figura 2.10 – Variação do coeficiente de Poisson, adaptado pelo autor (PROENÇA, 1988)..28
Figura 2.11 - Danificação em tração com início na Zona de Transição, (Mazars 1984, *apud* PITUBA 2003) 29
Figura 2.12 - Comportamento de isotropia transversal em tração uniaxial no concreto, (PITUBA, 2003) 30
Figura 2.13 - Danificação em compressão com início na Zona de Transição, (BUYUKOZTURK *et al.*, 1971 *apud* PITUBA 2003) 30
Figura 3.1 – Esquema representativo da Multiescala 33
Figura 3.2 – Esquema do estudo do EVR.....34
Figura 3.3 – Fluxograma do algoritmo computacional em elementos finitos 35
Figura 3.4 – Macro-Escala e representação da Mesoescala 36
Figura 3.5 – Esquema representativo da Multiescala, adaptado pelo autor (GIUSTI, 2009)...38
Figura 3.6 – Definição da célula unitária para meio periódicos.....48
Figura 4.1 – Variáveis da Mecânica: a) Abordagem Tradicional b) Mecânica da Fratura, adaptado pelo autor (ANDERSON, 1995) 54
Figura 4.2 – Regiões de comportamento distinto à frente da fissura, (BITTENCOURT, 1999) 56
Figura 4.3 – Configuração do Modelo em Elementos Finitos.....61

Figura 4.4 – Modelo do Elemento Finito de Contato e Fratura Coesiva, adaptado pelo autor (PITUBA; SOUZA NETO, 2015) 61
Figura 5.1 – Comportamento plástico: a) Real b) Idealizado, adaptado pelo autor (PROENÇA, 1988). 68
Figura 5.2 – Efeito Baüschinger, adaptado pelo autor (PROENÇA, 1988) 69
Figura 5.3 – Comportamento sob o regime: a) Elastoplástico perfeito b) Elastoplástico com encruamento 70
Figura 5.4 – Representação gráfica da função de plastificação: a) Curva de plastificação; b) Superfície de plastificação, adaptado pelo autor (FRANÇA, 2006) 72
Figura 5.5 – Regra Associativa e Não associativa, adaptado pelo autor (ALVES FILHO, 2012) 74
Figura 5.6 Modelos representativos da alteração da superfície de escoamento, adaptado pelo autor (ALVES FILHO, 2012) 75
Figura 5.7 – Representação gráfica do critério de Mohr-Coulomb, adaptado pelo autor (SOUZA NETO *et al*.,2008) 76
Figura 5.8 – Superfície de escoamento no plano principal de tensões (SOUZA NETO *et al*.,2008) 77
Figura 5.9 – Regra do Escoamento de Mohr-Coulomb: a) planos e pontas b) vértice, adaptado pelo autor (SOUZA NETO *et al*.,2008) 79
Figura 6.1 – Elemento de Volume Representativo 87
Figura 6.2 – Tensão Homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR com 4 inclusões 88
Figura 6.3 – Tensão Homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR com 8 inclusões 88
Figura 6.4 – Gráfico de cores do EVR com 4 inclusões sem fratura para a distribuição de tensão (σ) na direção *x* 89
Figura 6.5 – Gráfico de cores do EVR com 4 inclusões com fratura para a distribuição de tensão (σ) na direção *x* 89
Figura 6.6 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (λ_p) 90
Figura 6.7 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (σc) 91
Figura 6.8 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (ϕ) 91

Figura 6.9 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (ψ) 92
Figura 6.10 – Elemento de Volume Representativo de Nguyen *et al.* (2010) (NGUYEN *et al.*, 2010) 93
Figura 6.11 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* do EVR de 4 inclusões 93
Figura 6.12 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* do EVR de Nguyen *et al.* (2010) 94
Figura 6.13 – Tensão homogeneizada (σ) x Deformação do EVR com 4 inclusões 95
Figura 6.14 – Tensão homogeneizada (σ) x Deformação (ε) do EVR com 8 inclusões 95
Figura 6.15 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Nguyen sob o regime de tração 96
Figura 6.16 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação (ε) na direção *x* do EVR de Nguyen sob o regime de compressão 96
Figura 6.17 – Elemento de Volume Representativo com 1 inclusão e Zona de Transição ao redor 97
Figura 6.18 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de 1 inclusão 98
Figura 6.19 – Elemento de Volume Representativo de Oliver *et al.*(2014) 99
Figura 6.20 – Tensão Homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) sob o regime de Tração 100
Figura 6.21 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) sob o regime de Compressão 100
Figura 6.22 – EVR de Oliver *et al.* (2014) após fraturamento por tração (amplitude 300x) . 101
Figura 6.23 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) – Compressão e Tração sem inclusão de elementos de fratura 102
Figura 6.24 – Gráfico de cores do EVR de Oliver *et al.* (2014) sem fratura para a distribuição de tensão (σ) em regime de tração na direção x 102
Figura 6.25 – Gráfico de cores do EVR de Oliver *et al.* (2014) sem fratura para a distribuição de tensão (σ) em regime de compressão na direção x 103
Figura 6.26 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) – Compressão e Tração com a inclusão de elementos de fratura 103

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CTOD	*Crack Tip Opening Displacement*
EPT	Estado Plano de Tensão
EVR	Elemento de Volume Representativo
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEL	Mecânica da Fratura Elástico Linear
MFEP	Mecânica da Fratura Elastoplástico
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS ROMANOS

A	Área
b	Campo de forças de volume
$\mathbf{B}$	Matriz que relaciona deslocamentos com deformações
c	Coesão
$\boldsymbol{D}$	Matriz constitutiva tangente consistente
E	Módulo de elasticidade
f	Tensor constitutivo simétrico
f_c	Resistência a compressão
$\boldsymbol{F}$	Vetor de forças internas
$\boldsymbol{F_b}$	Vetor de forças reativas ao campo de deslocamento imposto
$\boldsymbol{F_i}$	Vetor de forças internas nos nós internos
$\mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{int}}$	Forças Internas do elemento finito
G_c	Densidade de energia do Modo I
$\boldsymbol{H}$	Lei de Encruamento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez tangente
l	Comprimento característico do macrocontínuo
l_μ	Comprimento característico do EVR
$\mathbf{n}$	Vetor normal a fissura
$\boldsymbol{N}$	Vetor de escoamento plástico
$\boldsymbol{q}$	Variável que descreve os processos inelásticos da coesão
$\mathbf{R}$	Força fora de equilíbrio
t	Tensão coesiva ao longo da fissura

t^e	Campo de forças externas
t^i	Campo de forças internas
t^v	Campo de forças que atua no vazio
u	Campo de deslocamento
$\boldsymbol{u_\mu}$	Campo de deslocamento microscópico
$\overline{\boldsymbol{u_\mu}}$	Campo de deformação macroscópica
$\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}$	Campo de flutuação do deslocamento
$\mathbf{u_e}$	Deslocamentos nodais do elemento finito
V	Volume

SÍMBOLOS GREGOS

β	Parâmetro que relaciona os modos de aberturas normais e cisalhantes
$d\gamma$	Multiplicador Plástico
δ	Deslocamento de abertura efetiva
δ_c	Abertura Crítica
δ_n	Abertura devido ao modo I
δ_s	Abertura devido ao modo II
Γ_e	Vetor de forças internas relacionado ao lado (positivo ou negativo) do Elemento finito
ε	Tensor de deformações
ε_e	Tensor de deformações elásticas
ε_p	Tensor de deformações plásticas
ε_μ	Campo de deformação microscópicas do EVR
$\tilde{\varepsilon}_\mu$	Campo de flutuação da deformação

λ_p	Fator de Penalidade
σ	Tensão
σ_c	Máxima tensão de tração normal coesiva
σ_μ	Tensão microscópica
σ_y	Tensão de escoamento
υ	Coeficiente de Poisson
ϕ	Ângulo de atrito
Φ	Função de plastificação
$\dot{\Phi}$	Gradiente da função de plastificação
$\boldsymbol{\Phi}$	Energia coesiva liberada
ψ	Ângulo de dilatância
Ψ	Função do potencial
Ω	Domínio do macrocontínuo
Ω_μ	Domínio do EVR
Ω_μ^m	Domínio da matriz do EVR
Ω_μ^i	Domínio das inclusões do EVR
Ω_μ^v	Domínio dos vazios do EVR
Ω_μ^s	Domínio sólido do EVR
$\mathbb{V}_\mu$	Campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

∇^s Operador gradiente simétrico do campo de deslocamento u

$\otimes$ Multiplicador vetorial

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 --INTRODUÇÃO 17

1.1 OBJETIVOS 18

1.2 JUSTIFICATIVA 19

1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TEXTO 20

CAPÍTULO 2 --CONCRETO 21

2.1 A ESTRUTURA DO CONCRETO 22

2.2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO 25

2.2.1 Comportamento macroscópico do concreto à tração 25

2.2.2 Comportamento macroscópico do concreto em compressão 26

2.2.3 Comportamento da mesoestrutura do concreto 29

CAPÍTULO 3 --MODELAGEM DA MICROESTRUTURA SEGUNDO UMA ABORDAGEM MULTIESCALA 32

3.1 TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO 36

3.1.1 Introdução 36

3.1.2 Campo de Deslocamento e Flutuação dos Deslocamentos 38

3.1.3 Formulação do MEF 39

3.1.3.1 Problema de equilíbrio do EVR 39

3.1.3.2 Princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel 43

3.1.3.3 Cálculo da tensão homogeneizada do EVR 44

3.1.3.4 Condições de contorno impostas ao EVR 45

3.1.3.5 Cálculo do módulo constitutivo tangente homogeneizado 50

CAPÍTULO 4 --MODELAGEM CONSTITUTIVA DO EVR UTILIZANDO A MECÂNICA DA FRATURA 54

4.1 HISTÓRICO 54

4.2 MODELO DE FRATURA COESIVA 56

4.3 FORMULAÇÃO DO MODELO DE FRATURA COESIVA 57

4.3.1 Modelo constitutivo 58

4.3.2 Elemento finito de contato e fratura coesiva 60

CAPÍTULO 5 --MODELAGEM CONSTITUTIVA DO EVR UTILIZANDO A TEORIA DA PLASTICIDADE 67

5.1 CONCEITOS BÁSICOS 67

5.2 MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTOPLÁSTICOS 70

5.2.1 Tensor de deformações elastoplásticas 70

5.2.2 Lei do comportamento elástico 71

5.2.3 Função de plastificação 71

5.2.4 Regra do escoamento plástico 72

5.2.5 Lei de encruamento 74

5.3 MODELO DE MOHR – COULOMB 76

5.3.1 Implementação computacional 77

5.3.1.1 Mapeamento do plano principal 81

5.3.1.2 Mapeamento pelas pontas 82

5.3.1.3 Mapeamento pelo vértice 83

5.3.2 Estado plano de tensão 84

CAPÍTULO 6 --APLICAÇÕES NUMÉRICAS 86

6.1 INFLUÊNCIA DO FRATURAMENTO NA ZONA DE TRANSIÇÃO 87

6.2 INFLUÊNCIA PARAMÉTRICA NA RESPOSTA HOMOGENEIZADA DO EVR 90

6.2.1 Modelo de fratura coesiva 90

6.2.2 Modelo de plasticidade 91

6.2.3 Análise da influência das condições de contorno da formulação Multiescala 92

6.3 ANISOTROPIA DO EVR 94

6.4 RESPOSTAS HOMOGENEIZADAS EM TRAÇÃO E COMPRESSÃO 96

6.5 ZONA DE TRANSIÇÃO DO CONCRETO 97

6.6 ELEMENTOS DE FRATURAS NA MATRIZ 98

CAPÍTULO 7 --CONCLUSÕES E SUGESTÕES 104

7.1 CONCLUSÕES 104

7.2 SUGESTÕES 105

REFERÊNCIAS 106

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

Atualmente, a Engenharia tem usado diversos materiais compósitos, em especial com aplicações estruturais. Os materiais compósitos, por definição, são formados pela combinação de dois ou mais materiais que apresentam comportamentos físicos distintos. Muitos desses materiais têm seu uso já consolidado. Pesquisas nessa área englobam desde a criação de novos materiais quanto o aperfeiçoamento de materiais já existentes. Um dos materiais mais utilizados e também importante no mundo, pertencente ao segundo grupo, é o concreto.

São inúmeras as vantagens para a utilização do concreto, tais como: a facilidade em ser moldado em diferentes tamanhos e formas, o baixo custo e sua rápida disponibilidade.

Por se tratar de um material amplamente difundido, torna-se cada vez mais necessário utilizar modelos constitutivos capazes de obter, de forma satisfatória, o comportamento das estruturas constituídas por esse material.

Contudo, em geral, é bastante difícil de propor uma lei constitutiva que reproduza o comportamento do concreto em função de um tipo qualquer de solicitação devido à sua complexidade de comportamento, por se tratar de um material heterogêneo. Dentro desse contexto, surgiram as chamadas Teorias Constitutivas Fenomenológicas que têm como objetivo obter as respostas constitutivas através do estudo do comportamento das características e das variáveis de interesse. Tais modelos tentam modelar o comportamento macroscópico do material homogêneo baseado no que acontece em sua microestrutura. Dentro desse contexto, têm-se modelos baseados na Mecânica do Dano e no Contínuo, como em trabalhos de Pituba (2003) e Pituba e Fernandes (2011), modelos de viscoelasticidade em trabalho de Marques e Creus (1994), modelos de plasticidade em trabalho de Peric e Souza Neto (1999) e modelos de fraturas em trabalhos de Camacho e Ortiz (1996).

Com o avanço da tecnologia e a maior demanda de conhecimento sobre o comportamento de materiais, o grande número de parâmetros envolvidos na sua descrição faz com que esse tipo de abordagem torne-se difícil de ser utilizada. Para enfrentar esse desafio, foi desenvolvida a chamada teoria Multiescala, onde a resposta constitutiva do material é obtida a partir da análise

em diferentes escalas e/ou tempo. Logo, é possível ter uma integração do comportamento que acontece numa escala menor até o nível macroscópico, obtendo resposta do comportamento de maneira mais precisa.

Uma das principais vantagens da abordagem em Multiescala é que os fenômenos físicos podem ser melhor avaliados. Observado numa escala menor, é possível considerar as características de cada material, as imperfeições e as fissuras e, assim, transportar essas informações para uma escala maior.

Analisado em nível macroscópico, o concreto comporta-se como um material contínuo. Mas, a sua microestrutura é composta por vários materiais, apresentando comportamentos distintos entre si. Por se tratar de uma mistura, o próprio processo de confecção do concreto faz com que algumas regiões tenham comportamentos distintos. Além disso, uma das características mais importantes para o presente trabalho diz respeito às fissuras que se formam durante o processo de produção, o endurecimento e especialmente durante um carregamento.

Os fenômenos abordados por teorias convencionais, na realidade, são um reflexo macroscópico do que acontece na microestrutura. Por esse motivo, a análise de materiais heterogêneos, especialmente o concreto, através da abordagem Multiescala possibilita a formulação de modelos constitutivos macroscópicos eficazes com a utilização de modelos constitutivos simples, em formulação e identificação paramétrica, na sua microestrutura.

Para se fazer a modelagem em Multiescala deve-se definir, no domínio do macrocontínuo, pontos de interesse que são chamados de Elementos de Volume Representativos (EVR) que representam a microestrutura ao nível dos grãos constituintes do material. Aliado a essa formulação, o Método dos Elementos Finitos permite a discretização de um EVR, possibilitando utilizar a Mecânica da Fratura para representar as fraturas com a implementação de modelos constitutivos de plasticidade levando em conta variáveis como a geometria dos materiais constituintes e suas propriedades.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é avaliar as potencialidades e as limitações de uma proposta de modelagem do comportamento mecânico de materiais heterogêneos, como o concreto. Pretende-se, portanto, obter respostas macroscópicas complexas do comportamento mecânico

do concreto utilizando modelos constitutivos simples, em formulação e quantidade de parâmetros, empregados na mesoescala segundo uma modelagem baseada em técnica de homogeneização, usando um procedimento em elementos finitos dentro de uma teoria Multiescala.

Este trabalho de pesquisa apresenta como objetivos específicos:

- Abordar a técnica e os conceitos de homogeneização em EVR utilizados neste trabalho sob ação de carregamento de natureza mecânica.
- Implementar e avaliar a contribuição do comportamento plástico da matriz através do modelo constitutivo de Mohr-Coulumb juntamente com modelo de fratura coesiva empregado na Zona de Transição.
- Por fim, pretende-se verificar a influência da distribuição de agregados na resposta mecânica do concreto e como o modelo de plasticidade afeta a ductilidade da matriz, principalmente no regime de compressão.

1.2 JUSTIFICATIVA

A Mecânica da Fratura é uma ferramenta para a análise dos efeitos da deterioração de materiais submetidos à ação de natureza mecânica, abordando o efeito de trincas e sua propagação na resposta do material. No caso do concreto, um material heterogêneo no qual a fissuração em muitos casos é o fenômeno dominante no comportamento não-linear, a Mecânica da Fratura é capaz de proporcionar modelos constitutivos apropriados. Dentro desse contexto, tem-se o trabalho realizado por Pituba e Souza Neto (2015), no qual foram analisadas as respostas mecânicas de um EVR e a influência da distribuição de agregados contida nele. Apesar de capturar fenômenos de anisotropia, a resposta homogeneizada é muito rígida, principalmente em regime de compressão. Isso se dá devido à consideração do comportamento elásticos nos agregados e da matriz. Portanto, justifica-se a inclusão da plasticidade na matriz para se obter uma resposta mais dúctil em regimes predominantes de compressão.

A análise de materiais heterogêneos através de uma abordagem em Multiescala utilizando a Mecânica da Fratura e do Contato, além da Teoria da Plasticidade, dá a possibilidade de formular modelos constitutivos simples, que levam em consideração a geometria dos constituintes do EVR, as propriedades de cada material e os fenômenos na microestrutura, capturando dessa forma, respostas complexas de comportamento macromecânico de um

material heterogêneo. Nessa linha de pesquisa, é possível citar alguns trabalhos da área como: Raghavan e Ghosh (2004), Somer *et al.*(2009), Greco (2009) e Peric *et al.* (2011).

Acredita-se que esse estudo seja justificado pela possibilidade de ganho em acurácia de resultados macromecânicos de estruturas de materiais heterogêneos, sem necessidade de recorrer a modelos constitutivos no meio contínuo complexos, com um grande número de parâmetros que inviabilizam sua utilização para fins práticos da Engenharia.

1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TEXTO

O texto está divido em sete capítulos da seguinte maneira:

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o concreto e suas características mecânicas e físicas, desde a sua macroestrutura até a sua microestrutura.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão bibliográfica sobre a teoria de homogeneização no âmbito da formulação em várias escalas empregada neste trabalho. Apresenta também a metodologia adotada para esse trabalho.

O Capítulo 4 aborda os conceitos básicos da Mecânica da Fratura, assim como a formulação constitutiva do elemento finito de contato e fratura coesiva proposto por Pituba e Souza Neto (2015).

O Capítulo 5 trata da revisão bibliográfica acerca da Teoria da Plasticidade, assim como a formulação da Teoria Constitutiva de Mohr-Coulomb.

No Capítulo 6 são apresentadas as análises do modelo proposto juntamente com os resultados obtidos ao longo da pesquisa.

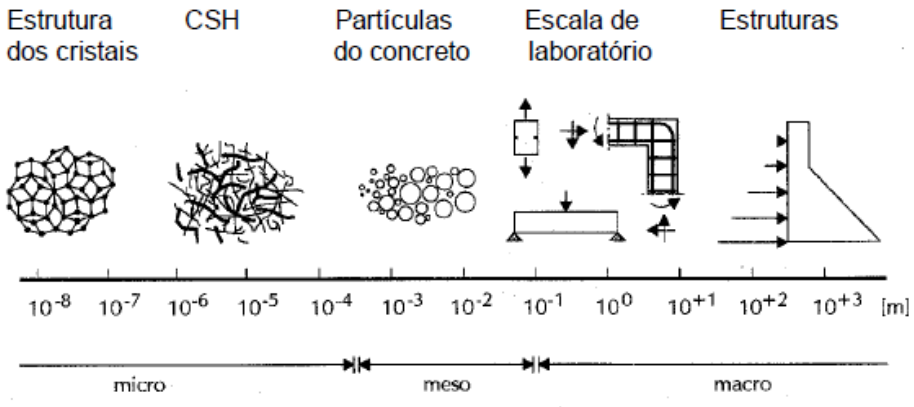
No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões deste trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2
CONCRETO

A composição do concreto é formada, em geral, de agregado miúdo, agregado graúdo, água e cimento Portland, podendo ou não ser acrescida de aditivo. Suas principais vantagens são a resistência à água e o baixo custo econômico.

Sendo um material compósito, os materiais constituintes apresentam dimensões variadas e propriedades mecânicas distintas. Van Mier (1997) e Bittencourt (1999) dividiram as estruturas do concreto em níveis de observação, através de escalas conforme apresentado na Figura 2.1. É possível observar na escala nanométrica (10^{-9} m) diferentes estruturas atômicas do concreto. Na escala micrométrica (10^{-6} m) é possível observar os grãos de cimento. Antes do endurecimento, os grãos de cimento não-hidratados podem ser observados, enquanto no estado de endurecimento os grãos de silicato de cálcio e hidróxido de cálcio são visíveis. A estrutura complexa dos poros, também pode ser observada. Em uma escala milimétrica (10^{-3} m) as partículas de areia e agregados podem ser observadas. Os poros grandes e a interação entre os agregados e a pasta de cimento são características desse nível de observação. A escala métrica (10 m) é o nível em que os laboratórios executam os seus experimentos. Não é possível observar nenhuma estrutura interna e o comportamento mecânico e as propriedades são semelhantes em seus corpos de provas ou estruturas. Em escalas maiores, (10^{2} e 10^{3} m), são encontradas as estruturas mais comuns na Engenharia Civil.

Figura 2.1 – Diferentes escalas de observação (BITTENCOURT, 1999)



Na Engenharia, costuma-se utilizar três diferentes escalas estruturais, chamadas de micro, meso (ou média) e macro escalas. As três escalas são observadas na Figura 2.2. Na microescala, a estrutura interna do cimento e a pasta de cimento endurecida são as características mais relevantes. Na mesoescala, as partículas das estruturas tornam-se mais importantes. Nota-se que a natureza heterogênea do material provoca concentração local de tensões e a existência de poros e impurezas no material diminui sua resistência. Além disso, é possível reconhecer a pasta de cimento, a areia, os agregados graúdos e suas interfaces. Na macroescala, as estruturas internas do material não podem ser reconhecidas (BITTENCOURT, 1999).

Figura 2.2 – Níveis de observação do concreto (BITTENCOURT, 1999)

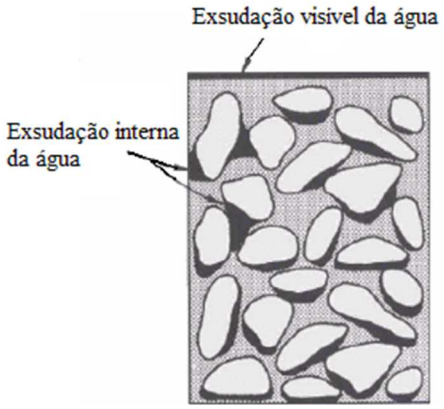
a) Microescala b) Mesoescala c) Macroescala

2.1 A ESTRUTURA DO CONCRETO

Na mesoescala, o concreto pode ser considerado um material bifásico, consistindo de partículas de agregado dispersas em uma matriz de pasta de cimento. Essas duas fases são chamadas de fase Agregado e fase Pasta, respectivamente. Ainda pode-se pensar que o concreto apresenta também uma terceira fase, chamada de Zona de Transição.

A fase Agregado representa a maior parte do concreto. Ela influencia diretamente as principais propriedades mecânicas, como módulo de elasticidade, massa unitária, dentre outras. Porém, quanto maior o tamanho do agregado, maior será a tendência do filme d'água se acumular próximo à sua superfície, enfraquecendo assim a Zona de Transição (MEHTA; MONTEIRO, 2008). Esse fenômeno é chamado de exsudação interna, ilustrada na Figura 2.3.

Figura 2.3 – A exsudação interna e a externa, (MEHTA; MONTEIRO, 2008)

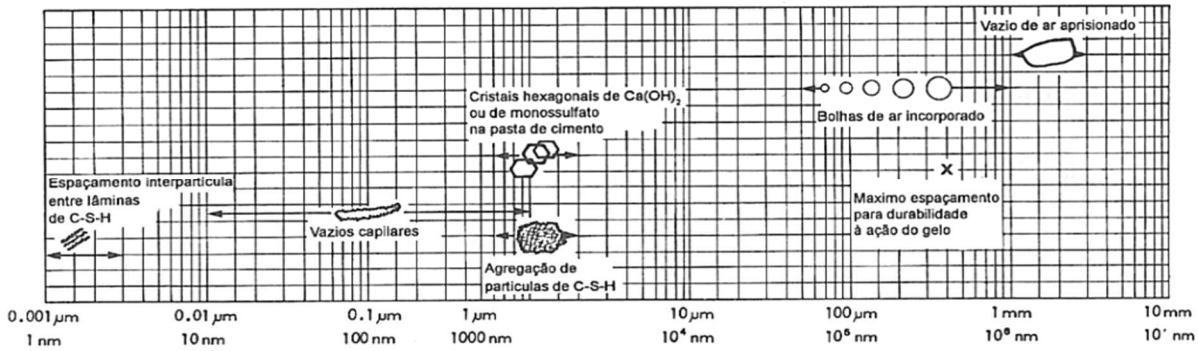


A fase Pasta (ou Matriz) origina-se na mistura dos os materiais, em especial o cimento com a água. A reação química produzida forma cristais ao redor dos grãos de cimento que, com o tempo, se solidifica e forma a pasta de concreto. O endurecimento do concreto fresco vem seguido por vários processos químicos e, como consequência disso, surgem os chamados vazios na pasta. Segundo Mehta e Monteiro (2008), a origem desses vazios são de diversas fontes e em diferentes escalas:

- O processo químico provocado pelo CSH (silicato de cálcio hidratado) resulta no surgimento de vazios conhecidos como espaço interlamelar. Devido à sua dimensão ser bastante pequena, entre 5 a 25 Å (1 Å=10^{-10} m), ela não tem efeito sobre a resistência da pasta.
- Os vazios capilares originam-se através do excesso de água de amassamento. Durante o processo químico, o espaço ocupado pela água e pelo cimento é substituído gradativamente pelos produtos de hidratação. Os espaços que não são ocupados pela hidratação dão origem a esses vazios, os quais podem assumir diversos tamanhos. Se esses tamanhos forem maiores que 50 μm, são conhecidos com macroporos e prejudicam a resistência da pasta. Tamanhos menores que 50 μm são conhecidos como microporos e são importantes para retração e fluência.
- Os vazios conhecidos como Ar Incorporado são provocados durante o processo de mistura e podem ser colocados propositalmente com finalidade de incorporar poros na pasta de cimento. Esses vazios têm a dimensão de 50 a 200 μm. Devido à essa dimensão, conforme a quantidade de ar incorporado presente, são capazes de afetar a resistência e a impermeabilidade.

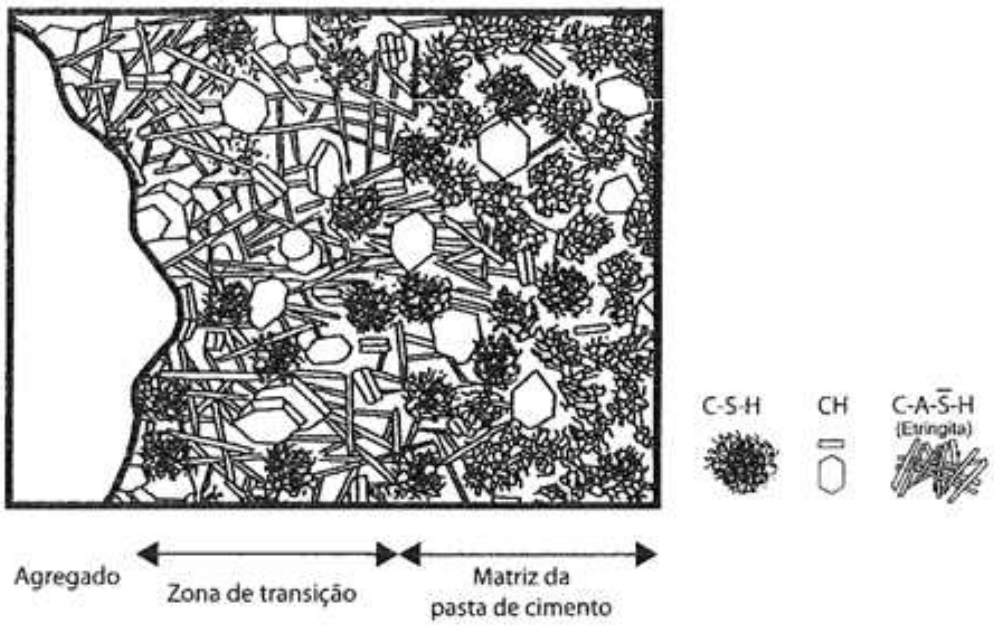
Em termos de escala, as dimensões dos vazios são mostradas na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Intervalo dos vazios na pasta endurecida, (MEHTA e MONTEIRO, 2008)



A Zona de Transição está localizada entre as fases agregado e pasta. Ela é a parte mais fraca do concreto devido ao acúmulo de água na superfície do agregado juntamente com o surgimento de vazios internos na pasta sendo assim responsável pela resistência limite. A Zona de Transição é uma região de 10 a 50 μm de espessura ao redor do agregado graúdo. Por ser a parte mais fraca, comparada com as fases agregado e pasta, exerce uma influência muito maior sobre o comportamento mecânico do concreto (MEHTA; MONTEIRO, 2008). A Figura 2.5 detalha a microestrutura da Zona de Transição.

Figura 2.5 – Representação diagramática do concreto, (MEHTA; MONTEIRO, 2008)



Há a presença de microfissuras localizadas nessa zona devido a vários fatores como, por exemplo, a presença de vazios capilares. A quantidade depende de vários aspectos como relação água/cimento, vibração, umidade, grau de adensamento, entre outros. Assim, o concreto, especialmente na Zona de Transição, é um material que contém microfissuras antes mesmo de qualquer carregamento. Por esse motivo, o concreto apresenta comportamento frágil quando se encontra em regime de tração e dúctil quando para regime de compressão.

2.2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO

As fraturas presentes no concreto devido aos esforços atuantes propagam-se de maneiras distintas para cada tipo de esforço. Além desse comportamento, os esforços que acontecem na macroestrutura, impactam a meso estrutura do concreto.

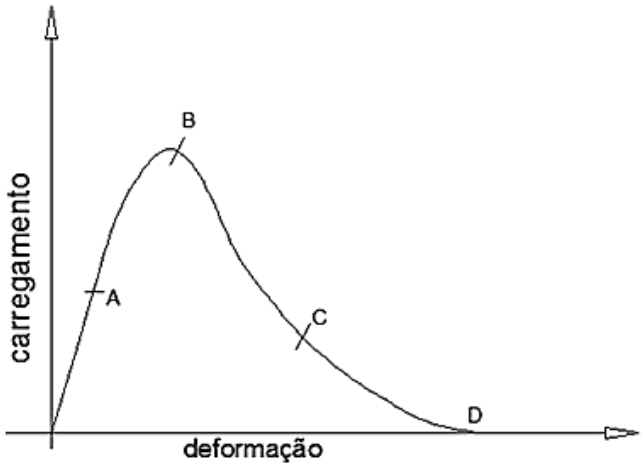
2.2.1 Comportamento macroscópico do concreto à tração

O comportamento do concreto simples em um ensaio de tração direta é mostrado na Figura 2.6 relacionando Tensão x Deformação. Segundo Terrien[1] (1980 *apud* PITUBA, 2003) e Oliveira (2013) tem-se duas fases distintas: antes da tensão de pico e após a tensão de pico.

- Na primeira fase, o material apresenta um comportamento tipicamente elástico linear até o ponto A. Do ponto A ao ponto B é apresentado um comportamento não linear devido às primeiras evoluções de danificação na interface entre as fases agregado-pasta.
- Na segunda fase, a partir do ponto B, tem se um aumento de deformação seguida pela diminuição da tensão. Essa característica pós-pico do material é chamada de amolecimento ou "*softening"* e é predominante em materiais que apresentam encruamento no regime pré-pico e amolecimento no regime pós-pico como os materiais quase-frágeis.

[1] TERRIEN, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique postcritique d'un béton sollicité en traction. **Bulletin de Liaison Ponts et Chaussées**, n. 105, pp. 65-72.

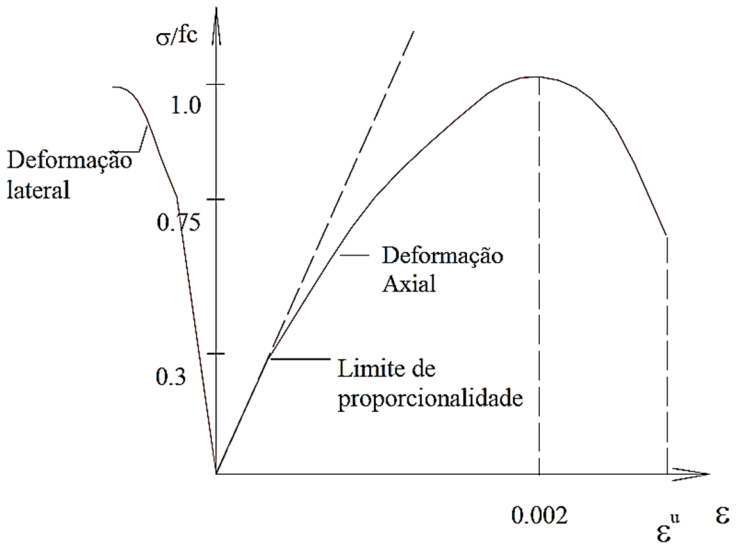
Figura 2.6 - Resposta do concreto sob ensaio de tração direta, adaptado pelo autor (KARIHALOO[2], 1995 *apud* OLIVEIRA, 2013)



2.2.2 Comportamento macroscópico do concreto em compressão

O comportamento do concreto submetido a um carregamento de compressão uniaxial é influenciado pelo surgimento de fissuras internas levando a uma perda gradual de rigidez e resistência. O diagrama típico de Tensão x Deformação de um ensaio de compressão uniaxial é mostrado na Figura 2.7.

Figura 2.7 - Diagrama Tensão x Deformação em compressão, (PROENÇA, 1988)

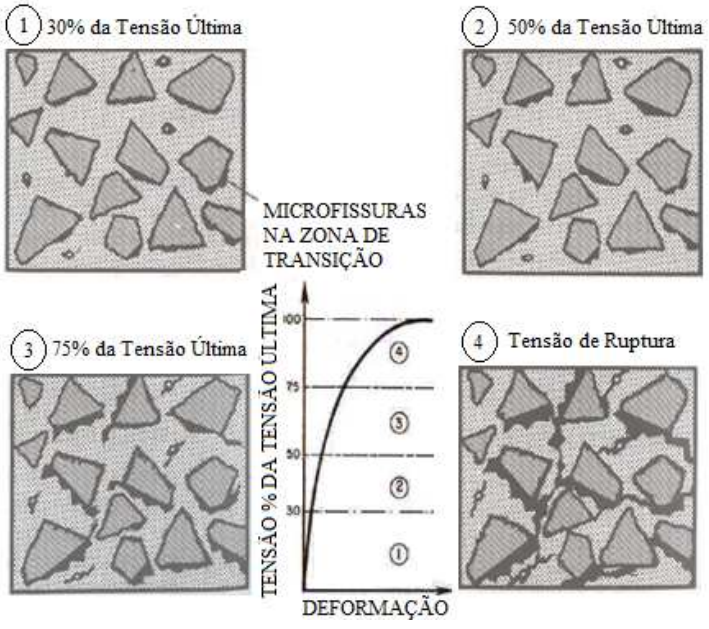


[2] KARIHALOO, L. B., **Fracture Mechanics & Structural Concrete**. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1995.

Segundo Proença (1988), Pituba (2003), Mehta e Monteiro (2008) e Oliveira (2013) o concreto tem as seguintes características quando submetido à compressão uniaxial, sendo essas ilustradas na Figura 2.8:

- No início do carregamento até a marca de 30% da resistência à compressão (f_c), o concreto desenvolve um estado quase linear-elástico. Tem-se a manutenção da rigidez e do coeficiente de Poisson. A pequena não linearidade é proveniente do início do escorregamento no contato dos agregados com a argamassa.
- No valor de 30 a 50% de f_c, tem se, na meso escala, o início das propagação das fissuras na Zona de Transição. Isso provoca uma perda da rigidez do concreto, porém o coeficiente de Poisson permanece o mesmo.
- No valor de 50 a 75% de f_c, tem-se a propagação das fissuras na pasta de concreto, juntamente com a propagação das fissuras da Zona de Transição, o que tende a tornar o sistema instável.
- Para valores acima de 75% da f_c, o sistema torna-se instável. Existe a conexão das fissuras da Zona de Transição e da pasta de cimento, resultando no colapso da peça. A partir desse valor, acontece o efeito Rusch. Esse efeito diz que, se o concreto for submetido a valores superiores a essa marca, mesmo em um regime constante, o material continuaria a ruir com o tempo. Na meso escala, há a evolução e a integração das fissuras na argamassa.

Figura 2.8 - Representação do comportamento do concreto sob compressão uniaxial (σ-ε), adaptado pelo autor (MEHTA; MONTEIRO, 2008)

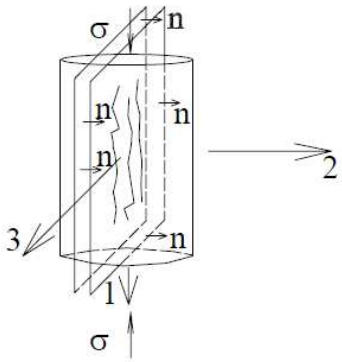


Além dessas características, existem alguns aspectos com relação à resposta macroscópica: variação volumétrica, isotropia transversal e a mudança do coeficiente de Poisson.

Segundo Proença (1988), conforme o acréscimo de tensão, tem-se uma diminuição do volume proporcional a esse aumento. Se o concreto atingir um valor de 75% de f_c, o volume inverte o sentido de variação e passa-se a expansão.

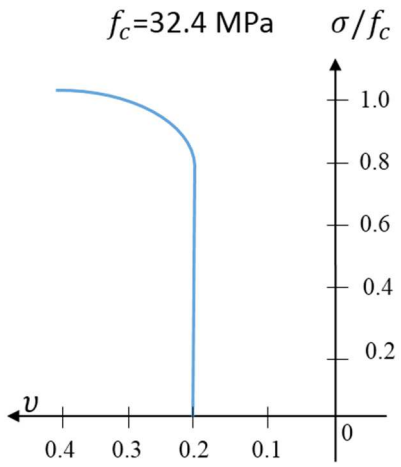
Durante a evolução da fissuração nas fases não-lineares, o material torna-se anisotrópico (isotropia transversal). Conforme mostrado na Figura 2.9, esse fato é observado pela orientação privilegiada da microfissuracão na direção paralela ao carregamento (PITUBA, 2003).

Figura 2.9 - Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial no concreto, (PITUBA, 2003)



Conforme se aproxima da tensão de pico, o valor do coeficiente de Poisson aumenta em consequência da área superficial de fissuras (PROENÇA, 1988), conforme mostrado na Figura 2.10.

Figura 2.10 – Variação do coeficiente de Poisson, adaptado pelo autor (PROENÇA, 1988)



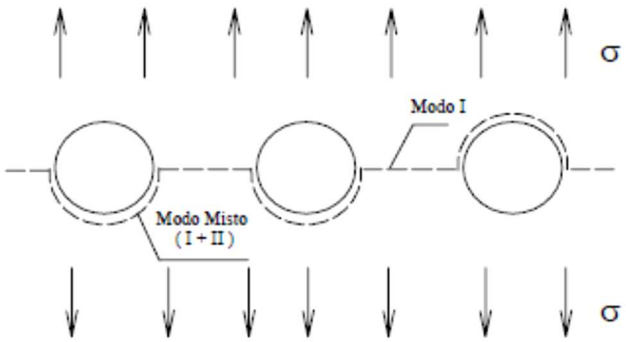
2.2.3 Comportamento da mesoestrutura do concreto

De acordo com Pituba (2003), o concreto, de forma simplificada apresenta-se constituído por agregados graúdos de forma geométrica circular e apresentam as seguintes características predominante de tração:

- Durante o processo de carregamento, tem-se a ocorrência dos modos I (representa abertura devido à força normal) e II (representa abertura devido à força cisalhante), respectivamente, ao longo de seu hemisfério, dependendo do seu estado inicial de fissuração.
- Com o avanço do carregamento e com uma fissuração completa ao redor do grão, a propagação da fissura é instável e em modo I, na direção perpendicular ao do carregamento.

A Figura 2.11 apresenta esse modelo, para concreto simples, de fissuração.

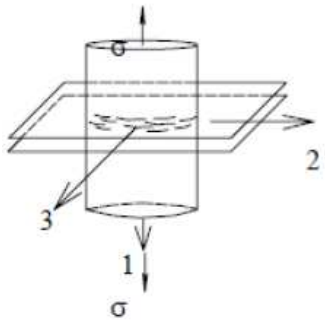
Figura 2.11 - Danificação em tração com início na Zona de Transição, (Mazars[3] 1984, *apud* PITUBA 2003)



O processo de fissuração em tração uniaxial pode render ao concreto um comportamento de isotropia transversal, já que numa direção (paralela ao carregamento) ele se comporta de maneira diferente em relação às outras duas direções (PITUBA, 2003). A Figura 2.12 representa o comportamento dessa anisotropia.

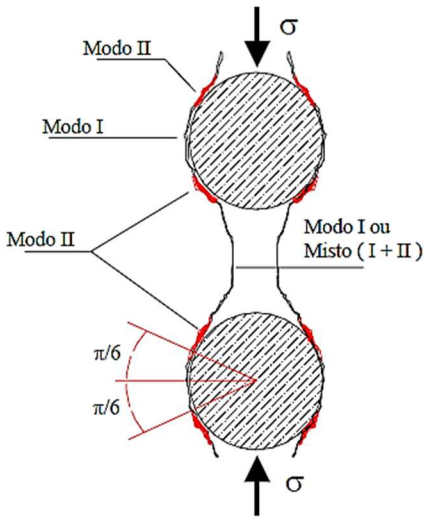
[3] MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure**, 1984. Thése de Doctorat d'État. Université Paris 6. Paris, 1984.

Figura 2.12 - Comportamento de isotropia transversal em tração uniaxial no concreto, (PITUBA, 2003)



Já na compressão uniaxial, a danificação tem as características indicadas na Figura 2.13. A primeira fissura aparece com modo II de abertura na região do contorno do agregado, aproximadamente a 30° em relação à horizontal. A fissura progride ao longo da interface passando a apresentar um modo I de abertura. Em seguida, sua evolução se dá na direção da solicitação, deixando a região de interface para se propagar na matriz. Para elevados níveis de solicitação evidencia-se um panorama de fissuras paralelas à direção de carregamento (BUYUKOZTURK[4] *et al.*, 1971 *apud* PITUBA 2003).

Figura 2.13 - Danificação em compressão com início na Zona de Transição, (BUYUKOZTURK[4] *et al.*, 1971 *apud* PITUBA 2003)



[4] BUYUKOZTURK, O.; NILSON, A. H.; SLATE, F. O. Deformation and fracture of particulate composite**.** **Journal Engineering. Mechanics**, ASCE, v. 98, 1972.

O comportamento mecânico do concreto na macroestrutura é um reflexo do que acontece na mesoestrutura. Portanto, estudar o comportamento em escalas menores, mostrará o comportamento da peça estrutural na macroescala.

.

CAPÍTULO 3
MODELAGEM DA MICROESTRUTURA SEGUNDO UMA ABORDAGEM MULTIESCALA

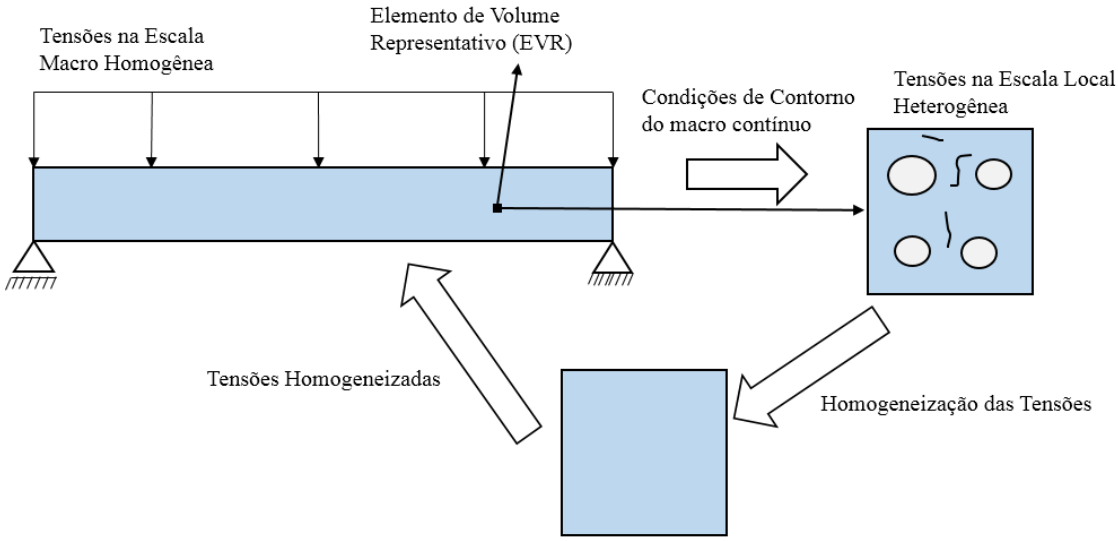
Na Engenharia são usados diversos tipos de materiais, com diferentes tipos de microestruturas, mas, no macronível, o comportamento mecânico são similares, como por exemplo a elasticidade, plasticidade, etc. Por causa dessas características, diversos modelos constitutivos que utilizam dos princípios da Termodinâmica e da Mecânica do Contínuo são propostos (FERNANDES *et al.*, 2015a). Essas teorias, chamadas de Teorias Fenomenológicas Constitutivas, apresentam respostas eficientes para várias situações. Porém não consideram de forma direta os fenômenos que acontecem na microestrutura. Nesses casos, surgiram as teorias Multiescala que permitem apresentar respostas que consideram as características da microestrutura e seus efeitos dissipativos.

Para uma análise Multiescala é necessário seguir alguns passos:

- Definem-se pontos de interesse a serem estudados no domínio da macroestrutura chamados de Elementos de Volumes Representativos (EVR). Para o caso do concreto, esses pontos representam a mesoestrutura do concreto ao nível de seus materiais constituintes. Características como microfissuras são monitoradas no EVR.
- Submete-se a estrutura a um carregamento qualquer e, através de um modelo na macroescala, obtém-se para cada EVR um campo de tensões ou deformações.
- Um modelo constitutivo é adotado na mesoescala e, através dele, o comportamento do material no EVR é estudado conforme a solicitação dada.
- Através da teoria da homogeneização e do conceito de média volumétrica, passa-se da mesoescala para a macroescala e atualiza-se a relação constitutiva para aquele ponto.
- Com a relação constitutiva atualizada para todos os EVR, dá-se novo incremento de carga obtendo-se, através do modelo na macroescala, novos campos de tensões e deformações a serem aplicados nos EVRs.

A Figura 3.1 mostra o esquema de uma análise em Multiescala.

Figura 3.1 – Esquema representativo da Multiescala

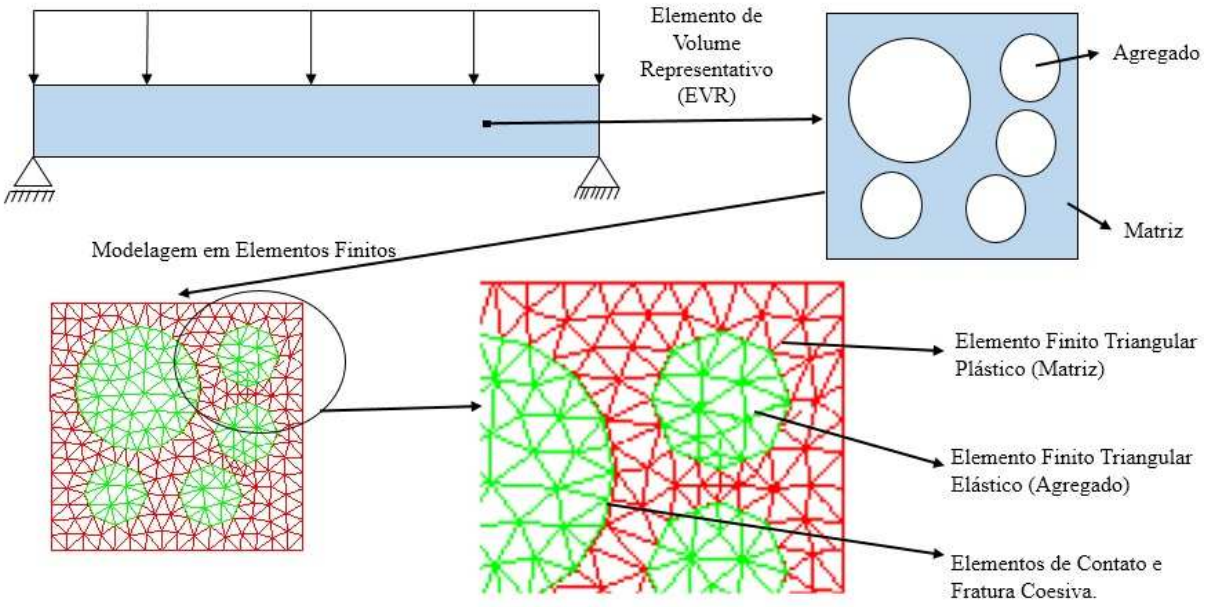


A formulação da modelagem Multiescala segue a proposta de Germain *et al.* (1983[1] *apud* GIUSTI, 2009) e sua estrutura variacional está descrita detalhadamente por Souza Neto e Feijóo (2006), Fernandes *et al.* (2015a) e Fernandes *et al.* (2015b). Para este trabalho, a análise está restrita ao estudo de um modelo proposto para a simulação do comportamento do EVR, ou seja, ao nível da mesoescala, sendo o EVR submetido a um estado imposto de deformação macroscópica.

Para simular o comportamento mecânico do concreto, uma modelagem em sua mesoestrutura é realizada considerando o comportamento mecânico de cada material constituinte e suas interações. O estudo da mesoescala é realizado através da definição de um EVR e seu domínio é discretizado através do Método dos Elementos Finitos (MEF), conforme ilustra a Figura 3.2. Os agregados seguem o regime elástico e a pasta cimentícia segue uma lei de evolução elastoplástica dada pelo modelo de Mohr-Coulomb. A Zona de Transição é discretizada por elementos finitos de contato e fratura coesiva, apresentados por Pituba e Souza Neto (2015) de modo a simular a abertura e/ou fechamento de fraturas naquela região, onde a mesma é a responsável pelo principais fenômenos dissipativos durante o processo de fraturamento na microestrutura do concreto.

[1] GERMAIN, P.; NGUYEN, Q. S.; SUQUET, P. Continuum thermodynamics. **Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME**, 50(4):1010-1020, 1983.

Figura 3.2 – Esquema do estudo do EVR

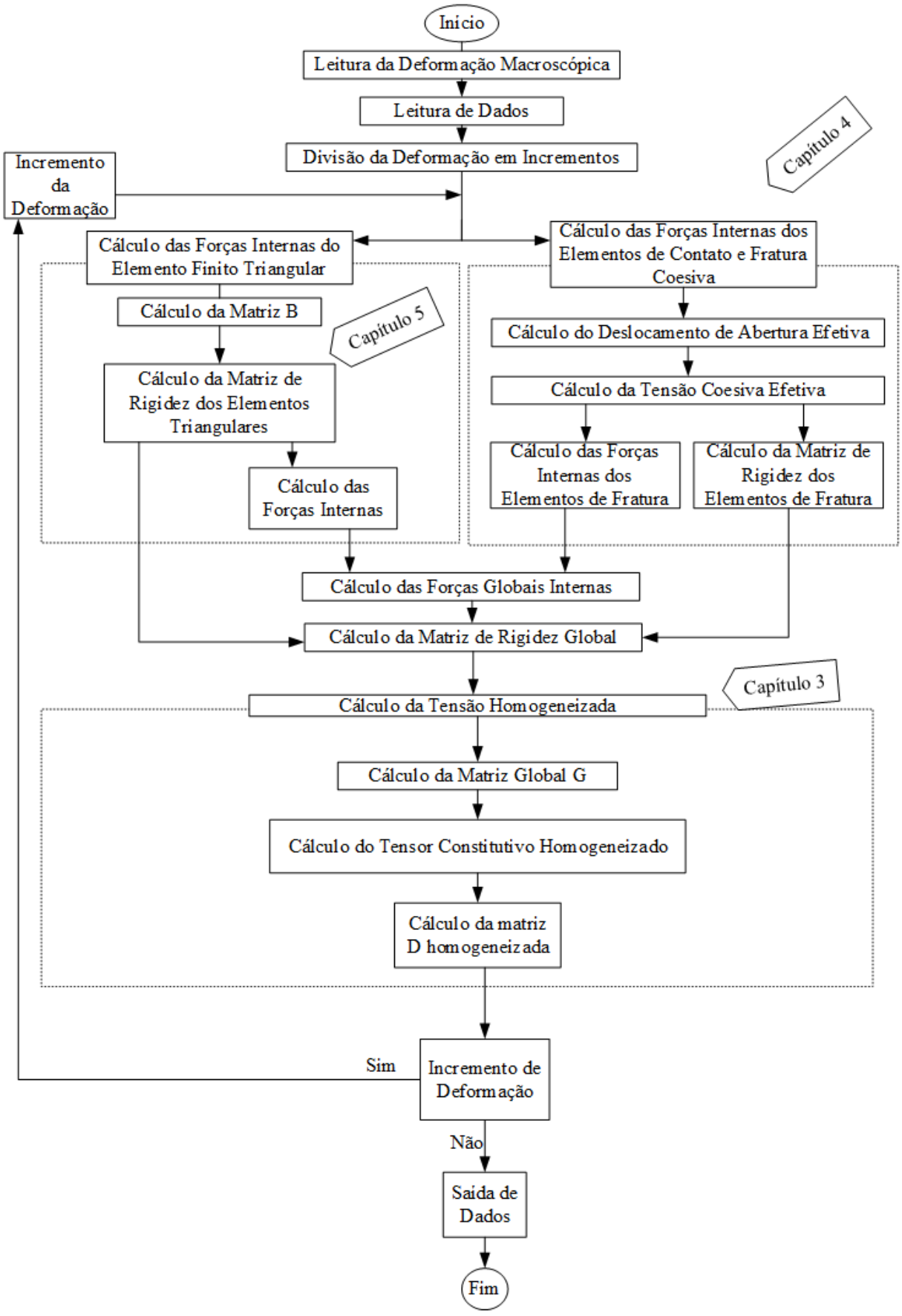


Após a obtenção das tensões em cada elemento finito nos diferentes materiais com distintos comportamentos mecânicos dentro do domínio do EVR, é utilizada uma teoria de homogeneização com o objetivo de avaliar o comportamento do material como um todo e assim, aproximar esse meio heterogêneo a um homogêneo.

Neste capitulo é apresentada a teoria de homogeneização empregada neste trabalho. Nos próximos capítulos são apresentados a formulação para os elementos finitos de contato e fratura coesiva (capítulo 4) e o modelo elastoplástico para a matriz cimentícia seguindo o modelo constitutivo de Mohr-Coulomb (capítulo 5) que foi implementado no código computacional utilizado neste trabalho.

A Figura 3.3 mostra o fluxograma do algoritmo utilizado na construção do código computacional.

Figura 3.3 – Fluxograma do algoritmo computacional em elementos finitos



3.1 TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO

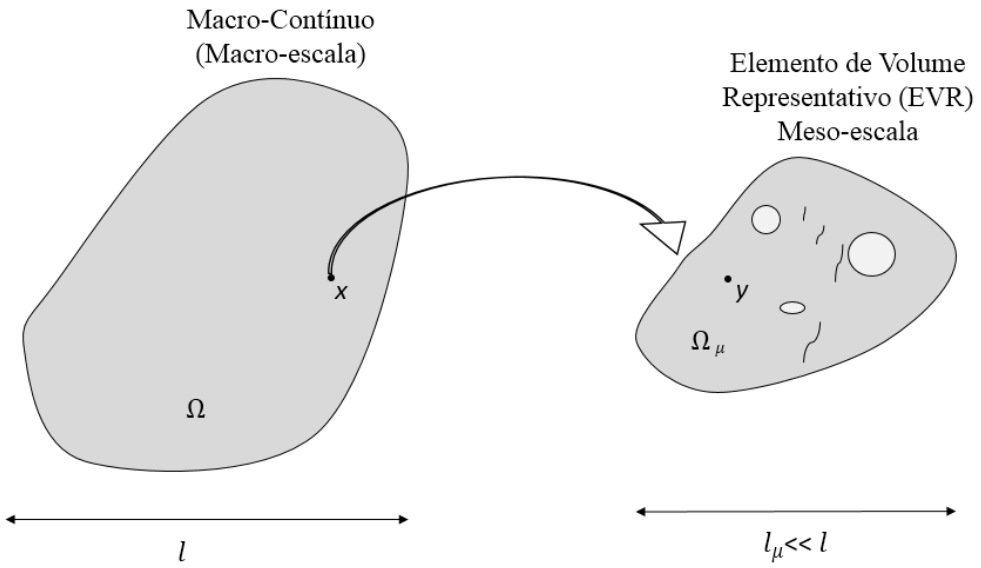
Na modelagem Multiescala, os seguintes requisitos devem ser observados:

- O equilíbrio do EVR;
- O Princípio da Macro Homogeneidade de Hill-Mandel deve ser verificado;
- A média volumétrica dos tensores de deformação e tensão;
- O espaço do campo de flutuação dos deslocamentos, cinematicamente admissível, do EVR deve ser um subespaço do espaço das flutuações de deslocamentos que são compatíveis com a hipótese da média volumétrica das deformações;

3.1.1 Introdução

O EVR é representado por $\Omega_\mu \subset \Re^N$. Portanto, cada ponto material $\boldsymbol{x}$ do corpo macrocontínuo, que por sua vez é representado por Ω, tem um EVR associado, onde o ponto $\boldsymbol{y}$ é um ponto do EVR. Além disso, para que a modelagem fique bem definida é necessário que o comprimento característico do EVR, l_μ, seja muito menor que o comprimento característico da macro escala, l, confome mostrado na abaixo.

Figura 3.4 – Macro-Escala e representação da Mesoescala



O EVR é constituído por uma parte denominada matriz, representada por Ω_μ^m, e dentro dessa matriz encontram-se as inclusões, representada por Ω_μ^i (GIUSTI, 2009). Assim, as definições dos domínios e seus contornos são:

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu^{\mathrm{m}} \cup \Omega_\mu^{\mathrm{i}} \tag{3.1}$$

$$\partial\Omega_\mu^{\mathrm{m}} = \partial\Omega_\mu \cup \partial\Omega_\mu^{\mathrm{i}} \tag{3.2}$$

onde, o símbolo ∂ significa o contorno do domínio em questão.

Por simplicidade, será considerado que as inclusões não interceptam o contorno do EVR.

$$\partial\Omega_\mu \cap \partial\Omega_\mu^i = \emptyset \tag{3.3}$$

A princípio, a tensão σ em um ponto qualquer do contínuo, em um certo instante de tempo *t* é dada pela deformação ε até aquele instante, ou seja:

$$\sigma(t) = f(\varepsilon^t) \tag{3.4}$$

onde, f é o tensor constitutivo simétrico, $\varepsilon = \nabla^s u$ e ∇^s é o operador gradiente simétrico do campo de deslocamento u. Similarmente, no EVR, tem-se que:

$$\varepsilon_\mu(y,t) = \nabla^s u_\mu \tag{3.5}$$

onde, $\varepsilon_\mu(y,t)$ é a deformação no EVR e u_μo vetor de deslocamento.

A deformação no ponto x é dada pela média volumétrica da deformação no EVR, ou seja:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y,t)dV \tag{3.6}$$

Com a equação (3.5), a equação (3.6) pode ser reescrita por:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \nabla^s u_\mu dV \tag{3.7}$$

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y,t)dV \tag{3.8}$$

Esse processo de transformar uma quantidade microscópica em uma quantidade macroscópica chama-se homogeneização. Portanto, $\varepsilon(x,t)$ é a deformação macroscópica ou homogeneizada e $\sigma(x,t)$ a tensão macroscópica ou homogeneizada.

3.1.2 Campo de Deslocamento e Flutuação dos Deslocamentos

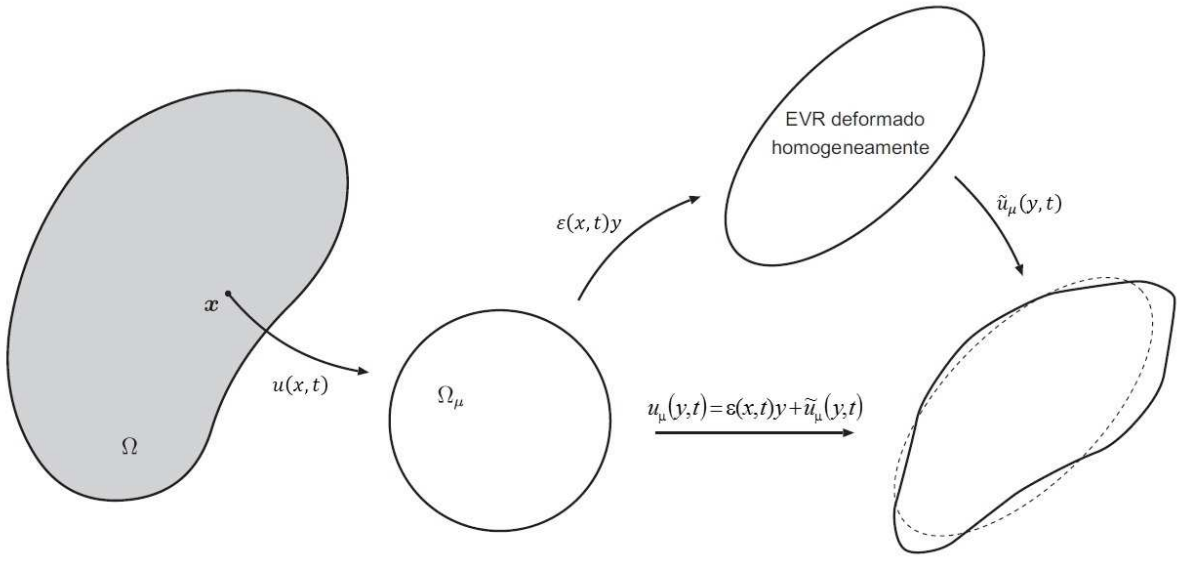
O campo de deslocamento microscópico u_μ pode ser decomposto, sem a perda da generalidade, por uma soma de:

$$u_\mu(y,t) = u(x,t) + \overline{u_\mu}(y,t) + \tilde{u}_\mu(y,t) \tag{3.9}$$

A parcela $\overline{u_\mu}(y,t)$ é o campo de deformação macroscópica que varia linearmente de acordo com a coordenada y, logo $\overline{u_\mu}(y,t) = \varepsilon(x,t)y$, e $\tilde{u}_\mu(y,t)$ é o campo de flutuação de deslocamento. A parcela $u(x,t)$ é o deslocamento macroscópico associado ao ponto $\boldsymbol{x}$, nesse caso os deslocamentos macroscópicos coincidem com o deslocamento rígido do corpo. Como esse deslocamento não implica numa deformação no EVR, essa parcela pode ser desconsiderada resultando na equação (3.10). A representação geométrica dessa decomposição é apresentada na Figura 3.5.

$$u_\mu(y,t) = \varepsilon(x,t)y + \tilde{u}_\mu(y,t) \tag{3.10}$$

Figura 3.5 – Esquema representativo da Multiescala, adaptado pelo autor (GIUSTI, 2009)



De maneira análoga, a equação (3.10) pode ser reescrita em termos de deformação, resultando em:

$$\varepsilon_\mu(y,t) = \varepsilon(x,t) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y,t) \tag{3.11}$$

onde, $\tilde{\varepsilon}_\mu(y,t) = \nabla^S \tilde{u}_\mu$ é o campo de flutuação das deformações, que varia de forma genérica em *y*.

3.1.3 Formulação do MEF

O estudo da mesoescala é realizado no EVR e utiliza a formulação do MEF para resolver o problema de equilíbrio. As variáveis do EVR, como por exemplo dimensões e constantes elásticas, são distintas das do material no macrocontínuo e essas características são definidas para um EVR padrão, que será adotado para todos os pontos do corpo. O EVR é descrito sobre uma malha de Elementos Finitos. Assim, a solução de um EVR, ou seja, o cálculo dos deslocamentos, das forças internas, das tensões e da matriz constitutiva elastoplástica dos seus elementos finitos é obtida quando se alcança a convergência, de acordo com a tolerância adotada do seu problema de equilíbrio. No entanto, para resolver esse problema de equilíbrio, necessita-se definir as condições de contorno a serem impostas no EVR. Ressalta-se que a resposta obtida pode variar em função da condição de contorno adotada.

Para uma melhor abordagem sobre o assunto da modelagem em Multiescala, são consideradas cinco etapas:

- Problema de Equilíbrio do EVR;
- Princípio de Macro-Homogeneidade de Hill-Mandel;
- Homogeneização das Tensões;
- Condição de Contorno Impostas no EVR
- Modulo Constitutivo Tangente Homogeneizado

3.1.3.1 Problema de equilíbrio do EVR

Numa formulação do MEF, considere a tensão em um ponto y do EVR ($\sigma_\mu = \sigma_\mu(y,t)$), o campo de forças de volume que agem no EVR ($b = b(y,t)$) e o campo de forças externas de superfície que atuam no contorno $\partial\Omega_\mu$ ($t^e = t^e(y,t)$). O Princípio de Trabalhos Virtuais (PTV) estabelece que o EVR está em equilíbrio se, e somente se, a equação variacional é satisfeita a cada instante:

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu} b\ \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^e\ \eta dA = 0 \qquad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.12}$$

Onde, Vμ é um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis, $\partial\Omega_\mu$ é o contorno externo do EVR e Ω_μ é o domínio do EVR.

É admitido que possam existir vazios no EVR, ou seja, $\Omega_\mu = \Omega_\mu^v \cup \Omega_\mu^S$, onde Ω_μ^v é o domínio dos vazios e Ω_μ^s o domínio dos sólidos, onde a equação (3.12) se torna:

$$\int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^S} b\ \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^e\ \eta dA + \int_{\Omega_\mu^V} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^V} b\ \eta dV = 0\ \ \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.13}$$

Considerando-se que os vazios isolados também estão em equilíbrio, pode-se escrever a equação (3.12) para um determinado vazio, obtendo-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\int_{\Omega_\mu^V} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^V} b\ \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu^V} t^V\ \eta dA = 0 \qquad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.14}$$

Assim, a equação (3.13) resulta em:

$$\int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^S} b\ \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^e\ \eta dA + \int_{\partial\Omega_\mu^V} t^V\ \eta dA = 0\ \ \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.15}$$

onde, $\partial\Omega_\mu^v$ é o contorno do vazio e t^v é o campo de forças que atua nos vazios.

Observe que, para materiais porosos com vazios, as forças t^v no contorno dos vazios são nulas, enquanto que, se o vazio for preenchido com fluido pressurizado, t^v são prescritas como a pressão uniforme distribuída sobre a interface do sólido com o vazio. Outro exemplo onde t^v não são nulas é o caso de fechamento de microfissuras, onde t^v é dado em função da história do deslocamento na interface do sólido com o vazio.

Neste trabalho, assume-se que as forças de volume que agem nos vazios são nulas (equação (3.16)). Assim, apenas a força t^v sobre $\partial\Omega_\mu^v$ é levada em conta na contribuição do vazio para a resistência do EVR.

$$b(y,t) = 0 \qquad \forall\ y \in \Omega_\mu^v \tag{3.16}$$

Para obter a equação final de equilíbrio do EVR deve-se considerar o Princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel (tópico 3.1.2.2), que estabelece as seguintes equações:

$$\int_{\partial\Omega_\mu} t^e\ \eta dA = 0 \qquad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.17}$$

$$\int_{\Omega_\mu^S} b\ \eta dV = 0 \qquad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.18}$$

A partir dessas equações, a equação de equilíbrio (3.15) resulta em:

$$\int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV + \int_{\partial\Omega_\mu^V} t^V\ \eta dA = 0 \qquad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.19}$$

Por outro lado, a tensão microscópica $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y,t)$ em um ponto y qualquer do EVR é relacionada com a deformação microscópica $\varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu(y,t)$, através da função constitutiva $f_y\left(\varepsilon_\mu(y,t)\right)$ que envolve as variáveis internas de acordo com o modelo constitutivo. Analogamente à equação (3.4), σ_μ pode ser definido como:

$$\sigma_\mu(y,t) = f_y(\varepsilon_\mu(y,t)) \tag{3.20}$$

Considerando a equação (3.5) tem-se:

$$\sigma_\mu(y,t) = f_y(\nabla^s u_\mu(y,t)) \tag{3.21}$$

Substituindo-se (3.21) em (3.19) chega-se à seguinte equação, que representa o problema de equilíbrio microscópico:

$$\int_{\Omega_\mu^S} f_y(\nabla^s u_\mu(y,t)) : \nabla^S \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu^V} t^V(y,t)\,\eta dA = 0 \quad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.22}$$

A partir da equação (3.10) e (3.22), tem-se:

$$\int_{\Omega_\mu^S} f_y(\varepsilon(x,t) + \nabla^s \widetilde{u_\mu}(y,t)) : \nabla^S \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu^V} t^V(y,t)\,\eta dA = 0 \quad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.23}$$

Em função da restrição cinemática adotada, obtêm-se diferentes tipos de modelos. Se não houver vazios, que é o caso a ser tratado nesse trabalho, a equação de equilíbrio se torna:

$$\int_{\Omega_\mu^S} f_y(\varepsilon(x,t) + \nabla^s \widetilde{u_\mu}(y,t)) : \nabla^S \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.24}$$

Discretizado o domínio do EVR em elementos finitos e fazendo-se a discretização no tempo, para um determinado incremento *n* e discretização *h*, deve-se encontrar o vetor de flutuações $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{n+1}} \in \mathrm{V}_\mu^h$ que satisfaça a seguinte equação:

$$\int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B}^T f_y\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{n+1}}\right) \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in \mathrm{V}\mu \tag{3.25}$$

onde, $\boldsymbol{B}$ é a matriz que relaciona deslocamentos com deformações (para um elemento $\varepsilon_e = \boldsymbol{B_e} U_e$) e f_y é o funcional que calcula as tensões microscópicas. Para um campo η qualquer a equação (3.25) sempre será satisfeita se:

$$\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{n+1}} = \int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B}^T f_y\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{n+1}}\right) dV = 0 \tag{3.26}$$

Aplicando o Método de Newton-Raphson à equação (3.26), numa determinada iteração *k* do incremento *n*, o equilíbrio é alcançado se a seguinte equação é satisfeita:

$$\boldsymbol{G^{k-1}} + \frac{d\boldsymbol{G^{k-1}}}{d\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k-1}}}\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}} = 0 \tag{3.27}$$

$$\int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B^T} f_y\left(\boldsymbol{\varepsilon^{n+1}} + \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{n}}\right)dV + \left[\int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B^T}\left(\frac{df_y}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\boldsymbol{\varepsilon^{n+1}}+\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{n+1}}}\right)\boldsymbol{B}dV\right]\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}} = 0 \tag{3.28}$$

$$\int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B^T} f_y\left(\boldsymbol{\varepsilon^{n+1}} + \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{n}}\right)dV + \left[\int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B^T}\boldsymbol{D^{k-1}}\boldsymbol{B}dV\right]\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}} = 0 \tag{3.29}$$

onde, $\boldsymbol{D^{k-1}} = \left(\frac{df_y}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\boldsymbol{\varepsilon^{n+1}}+\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{n+1}}}\right)$ é a matriz constitutiva tangente consistente.

A equação (3.29) pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{F}^{k-1} + \boldsymbol{K}^{k-1}\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}} = 0 \tag{3.30}$$

onde, $\boldsymbol{F}^{k-1} = \int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B^T} f_y\left(\boldsymbol{\varepsilon^{n+1}} + \boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}}\right)dV$ e $\boldsymbol{K}^{k-1} = \int_{\Omega_\mu^h} \boldsymbol{B^T}\boldsymbol{D^{k-1}}\boldsymbol{B}dV$, sendo $\boldsymbol{K}$ a matriz de rigidez tangente e $\boldsymbol{F}$ o vetor das forças internas; no caso de se ter uma discretização com N_e elementos, $\boldsymbol{K}$ é dada por $\boldsymbol{K}^{k-1} = \sum_{e=1}^{Ne} \boldsymbol{B_e^T}\boldsymbol{D_e^{k-1}}\boldsymbol{B_e}dV_e$.

Resolvendo-se o sistema de equações definido na equação (3.30), chega-se ao valor de $\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}}$, a partir do qual calcula o vetor das flutuações de tentativa na iteração *k*: $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}} = \widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k-1}} + \delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{k}}$.

3.1.3.2 Princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel

O Princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel estabelece que a potência das tensões macroscópicas deve ser igual à média volumétrica da potência das tensões microscópicas no EVR, ou seja:

$$\sigma : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \dot{\varepsilon}_\mu dV \tag{3.31}$$

Considerando as equações (3.5) e (3.11), o campo $\dot{\varepsilon}_\mu$ é cinematicamente admissível se satisfazer a seguinte condição:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\mu}} = \nabla^s \dot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\varepsilon} + \nabla^s \hat{\dot{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{\mu}}(y,t) \qquad \text{onde } \hat{\dot{u}}_\mu \in \mathbb{V}_\mu \tag{3.32}$$

O princípio de macro-homogeneidade de Hill-Mandel é válido se, e somente se, os trabalhos virtuais exercidos pelas forças externas, t^e, e os trabalhos virtuais exercidos pelas forças de volume, *b*, são iguais a zero, conforme demonstrado por Giusti (2009).

$$\int_{\partial\Omega_\mu} t^e \, \eta \, dA = 0 \qquad \forall \eta \in \mathbb{V}\mu \tag{3.33}$$

$$\int_{\Omega_\mu^S} b \, \eta dV = 0 \qquad \forall \eta \in \mathbb{V}\mu \tag{3.34}$$

3.1.3.3 Cálculo da tensão homogeneizada do EVR

A tensão $\sigma = \sigma(x,t)$ de um ponto *x* do macrocontínuo é definida como sendo a homogeneização do campo de tensões microscópicas $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y,t)$ que agem no EVR associado a esse ponto *x*. Admitindo-se que o domínio do EVR tem uma parte sólida e uma de vazios, ou seja, $\Omega_\mu = \Omega_\mu^v \cup \Omega_\mu^S$, tem-se:

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y,t) dV = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^S} \sigma_\mu(y,t) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu(y,t) dV \tag{3.35}$$

onde $\sigma = \sigma(x,t)$ é a tensão macroscópica ou homogeneizada.

Segundo Fernandes *et al.* (2015a), utilizando o teorema de Green e discretizando o EVR em elementos finitos, a equação (3.35) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{V_\mu} \left[\int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y,t) \otimes_s y dA - \int_{\Omega_\mu^S} b(y,t) \otimes_s y dV \right] \tag{3.36}$$

Onde, faz-se uso da seguinte expressão $u \otimes_s v = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$, no cálculo das integrais, válida para quaisquer vetores *u* e *v*.

Observe que a equação (3.36) é calculada de forma aproximada discretizando-se o EVR em elementos finitos, sendo t^e as forças internas dos nós sobre o contorno e *y* o vetor das coordenadas x_1 e x_2 do ponto *y* do EVR. Assim, para um determinado elemento *e*, o vetor das forças internas $(\boldsymbol{F}_{int})_e$ é dado por:

$$(\boldsymbol{F}_{int})_e = \boldsymbol{B}_e^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\sigma}_e V_e \tag{3.37}$$

sendo, **B** a matriz que relaciona deformação e deslocamento; **σ** são as tensões; e V_e é o volume do elemento. O vetor de forças internas total do EVR é obtido somando as contribuições de todos os elementos.

3.1.3.4 Condições de contorno impostas ao EVR

Para este trabalho, são consideradas três classes de modelos Multiescala para as condições de contorno do EVR. Cada classe do modelo se diferencia pela imposição de um espaço de variações admissíveis. As classes de modelos para este trabalho são conhecidas como:

- Modelo de Taylor ou de deformações homogêneas no EVR, também conhecido como regra das misturas;
- Modelo de deslocamento linear no contorno do EVR;
- Modelo de flutuações de deslocamentos periódicas no contorno do EVR.

É apresentada uma estimativa diferente para cada resposta macroscópica em cada um dos modelos. O modelo de Taylor apresenta a solução mais rígida em vista do problema microscópico e o modelo de flutuações periódicas de deslocamentos apresenta a solução menos rígida dentre os modelos utilizados neste trabalho.

As classes de modelos apresentadas neste capítulo encontram-se em Giusti (2009) e Fernandes *et al.* (2015a).

- Modelo de Taylor

O modelo de Taylor é o mais simples dos modelos do espaço de flutuações. É obtido quando $\mathbb{V}_\mu$ é nulo, ou seja:

$$\mathbb{V}_\mu=\{0\} \tag{3.38}$$

Nesse caso, a restrição cinemática no EVR é que o campo de flutuações seja nulo em qualquer ponto do seu domínio sólido, ou seja:

$$\tilde{u}_\mu = 0 \qquad \forall y \in \Omega_\mu^s \tag{3.39}$$

Assim, pela equação (3.10) obtém-se o seguinte campo de deslocamento microscópico:

$$u_\mu(y,t) = \varepsilon(x,t)y \tag{3.40}$$

Observando a equação (3.40) pode-se dizer que o campo de deslocamento microscópico tem uma variação linear em *y* e a sua deformação no EVR é constante, sendo igual à deformação macroscópica.

$$\varepsilon_\mu(y,t) = \varepsilon(x,t) \tag{3.41}$$

Assim, a equação de equilibrio (3.30) é dada pela solução trivial $\tilde{u}_\mu = 0$. Nesse caso não há necessidade de resolver o problema de equilíbrio do EVR, já que sua solução é conhecida.

- Modelo de Deslocamento Linear no Contorno do EVR

Nesse caso, as flutuações dos deslocamentos $\tilde{u}_\mu$ se anulam no contorno $\partial\Omega_\mu$ do EVR, isto é, os deslocamentos são lineares no contorno de $\partial\Omega_\mu$ do EVR:

$$u_\mu(y,t) = \varepsilon(x,t)y \qquad \forall y \in \partial\Omega_\mu \tag{3.42}$$

Para que a equação (3.34) imposta pelo Princípio de Hill-Mandel seja satisfeita, as forças de volume *b* são nulas no domínio Ω_μ, ou seja, a única força de volume, *b*, ortogonal a qualquer $\eta \in \mathbb{V}_\mu$ é $b(y,t) = 0$. Como o campo de flutuações é nulo em $\partial\Omega_\mu$, a equação (3.33) sempre

será satisfeita e, portanto, a força de superfície t^e sobre o contorno externo $\partial\Omega_\mu$, que deve ser ortogonal a $\mathbb{V}\mu$, pertence ao espaço dos campos regulares sobre $\partial\Omega_\mu$.

A tensão homogeneizada é dada pela equação (3.36), porém como as forças de volume, *b*, são nulas, nesse caso tem-se que:

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{V_\mu}\left[\int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y,t) \otimes_s y dA\right] \tag{3.43}$$

onde, t^e são as forças internas no contorno do EVR.

Neste modelo deve-se apenas calcular as flutuações no domínio do EVR. Assim, a equação (3.30) será decomposta em parcelas, onde o sub-índice *i* é relativo aos nós internos e *B* aos nós do contorno:

$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{Bi} \\ K_{iB} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_B \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \tag{3.44}$$

Considerando-se que $\delta\tilde{u}_B = 0$ e que F_B são apenas forças reativas ao campo de deslocamento imposto, as flutuações nos pontos internos são dadas por:

$$(\delta\widetilde{\boldsymbol{u_i}})_\mu^k = -(\boldsymbol{K_{ii}})^{-1(k-1)}(\boldsymbol{F_i})^{k-1} \tag{3.45}$$

sendo $\boldsymbol{F_i}$ o vetor das forças internas nos nós internos, que pode ser calculado através da equação (3.37), ou usando a seguinte equação de equilíbrio do EVR:

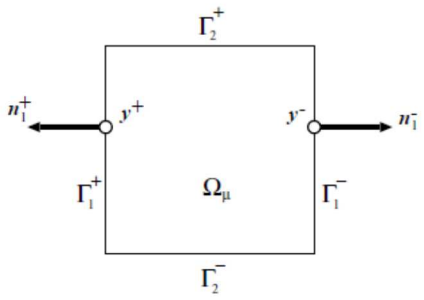
$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{Bi} \\ K_{iB} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} u_B \\ u_i \end{Bmatrix}_\mu^{k-1} = 0 \tag{3.46}$$

$$(\boldsymbol{F_i})^{k-1} = -(\boldsymbol{K_{iB}}\,\boldsymbol{K_{ii}})^{k-1} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_B \\ \boldsymbol{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^{k-1} \tag{3.47}$$

- Modelo de Flutuações dos Deslocamentos Periódicos Sobre o Contorno

Esse modelo é o mais adequado para descrever o comportamento de materiais com microestrutura periódica. Para definir o campo de flutuações nesse modelo, considere a Figura 3.6 onde é representado uma célula unitária retangular, por exemplo.

Figura 3.6 – Definição da célula unitária para meio periódicos



Observe que nos EVRs, cada lado Γ_i^+ corresponde a um lado igual e oposto Γ_i^-, sendo n_i^+ a direção normal ao contorno Γ_i^+ e n_i^- a direção normal ao contorno Γ_i^-, com $n_i^+ = -n_i^-$. Assim, para cada ponto y^+ pertencente ao contorno Γ_i^+ existe um ponto correspondente y^- do contorno Γ_i^-. Nesse modelo, adota-se que as flutuações do par de pontos y^+ e y^- são iguais, ou seja:

$$\tilde{u}_\mu(y^+,t) = \tilde{u}_\mu(y^-,t) \qquad \forall \text{ par de pontos} \{y^+, y^-\} \in \partial\Omega_\mu \tag{3.48}$$

Para satisfazer a condição (3.33) do Princípio de Hill-Mandel, a força de superfície t^e deve ser ortogonal ao espaço $\mathbb{V}\mu$ definido em (3.48), o que implica que t^e é antiperiódica em $\partial\Omega_\mu$, isto é:

$$t^e(y^+,t) = -t^e(y^-,t) \qquad \forall \text{ par de pontos} \{y^+, y^-\} \in \partial\Omega_\mu \tag{3.49}$$

Para satisfazer a equação (3.34), deve-se ter forças de volume *b* nulas no domínio Ω_μ do EVR. Assim, nesse caso, a tensão homogeneizada também é dada pela equação (3.43) e para se obter o vetor das forças internas nodais, o vetor dos deslocamentos no EVR e a matriz constitutiva tangente em cada elemento, deve-se antes resolver o problema de equilíbrio no EVR dado pela equação (3.30)**.**

A equação (3.30) será decomposta em parcelas, onde o sub-índice *i* é relativo aos nós internos; *p e m* se referem aos pares de pontos y^+ e y^- definidos no contorno (sem coincidir com canto), resultando em:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_m \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_{\mu}^{k} = 0 \tag{3.50}$$

onde F_p, F_m e F_i são as forças internas (calculadas através da equação (3.37)) nos pontos *p*, *m* e *i*.

De modo a evitar deslocamentos de corpo rígido, observe que nos cantos são prescritas flutuações nulas, por isso na equação (3.50) não são definidos termos relativos aos cantos. Além disso, tem-se que $\delta\tilde{u}_m = \delta\tilde{u}_p$. Portanto a equação (3.50) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_{\mu}^{k} = 0 \tag{3.51}$$

Fazendo-se manipulações algébricas na equação (3.51) essa pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{u}_p \\ \delta\tilde{u}_i \end{Bmatrix}_{\mu}^{k} = 0 \tag{3.52}$$

onde, as incógnitas do problema são as flutuações nos pontos *p* e nós internos.

O vetor $\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1}$ pode ser obtido a partir do vetor das forças internas (equação (3.37)) ou a partir da seguinte equação de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_i \\ F_c \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} & K_{pc} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} & K_{mc} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} & K_{ic} \\ K_{cp} & K_{cm} & K_{ci} & K_{cc} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_m \\ u_i \\ u_c \end{Bmatrix}_{\mu}^{k-1} = 0 \tag{3.53}$$

Assim, chega-se à equação (3.54):

$$\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} = -\begin{bmatrix} K_{pp}+K_{mp} & K_{pm}+K_{mm} & K_{pi}+K_{mi} & K_{pc}+K_{mc} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} & K_{ic} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_m \\ u_i \\ u_c \end{Bmatrix}^{k-1} \tag{3.54}$$

3.1.3.5 Cálculo do módulo constitutivo tangente homogeneizado

A tensão homogeneizada relativa ao macrocontínuo em um incremento *n+1* é apresentada por Fernandes *et al.* (2015a), dada pela seguinte forma:

$$\sigma = \sigma_n + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} : \Delta\varepsilon_{n+1} \tag{3.55}$$

onde, $D_{n+1} = \dfrac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ é o operador constitutivo tangente homogeneizado

Considerando-se as equações (3.8), (3.11) e (3.20) a tensão homogeneizada no incremento n+1 é:

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \sigma_{\mu(n+1)} dV = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} f_y\left(\varepsilon_{\mu(n+1)}\right) dV = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} f_y\left(\varepsilon_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)}\right) dV \tag{3.56}$$

Assim, o operador tangente homogeneizado é:

$$D_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \frac{\partial f_y\left(\varepsilon_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)}\right)}{\partial \varepsilon_{\mu(n+1)}} dV \tag{3.57}$$

No caso do Modelo de Taylor, tem-se campo de flutuações nulo no EVR, portanto: $\nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)} = 0$ e a equação (3.57) se torna:

$$D^{Taylor}_{n+1} = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \left.\frac{\partial f_y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{n+1} dV = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} \left.\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \varepsilon_\mu}\right|_{n+1} dV = \frac{1}{V_\mu}\int_{\Omega_\mu} D_{\mu(n+1)} dV \tag{3.58}$$

Onde, D_μ é o operador tangente consistente com a lei constitutiva incremental microscópica, ou seja, nesse caso D^{Taylor} representa a média volumétrica do tensor constitutivo incremental.

Considerando-se a equação (3.57) para um caso geral, pode-se representar o operador tangente na seguinte forma:

$$D_{n+1} = D_{n+1}^{Taylor} + \tilde{D}_{n+1} \tag{3.59}$$

$$\text{onde, } \tilde{D}_{n+1} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \left. \frac{\partial f_y\left(\nabla^S \tilde{u}_\mu\right)}{\partial \varepsilon_\mu} \right|_{(n+1)} dV \tag{3.60}$$

A fim de calcular $\tilde{D}_{n+1}$, considere a seguinte forma simplificada para as equações (3.45) e (3.52):

$$(\delta \tilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{R}})_{n+1} = -(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{R}})_n^{-1} (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}})_n \tag{3.61}$$

Para deslocamento linear no contorno (equação (3.45)) tem-se:

$$(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}})^{i_{RVE}} = (\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}})^{i_{RVE}} \tag{3.62}$$

$$(\boldsymbol{\delta \tilde{u}}_{\boldsymbol{R}})_n^{i_{EVR}+1} = (\boldsymbol{\delta \tilde{u}}_{\boldsymbol{Ri}})_n^{i_{EVR}+1} \tag{3.63}$$

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ii}})^{k-1} \tag{3.64}$$

Para flutuações periódicas (equação (3.52)), tem-se

$$(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}})^{i_{RVE}} = \begin{Bmatrix} F_p & F_m \\ & F_i \end{Bmatrix}^{i_{EVR}} \tag{3.65}$$

$$(\boldsymbol{\delta \tilde{u}}_{\boldsymbol{R}})_n^{i_{EVR}+1} = \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_n^{i_{EVR}+1} \tag{3.66}$$

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{k-1}} \tag{3.67}$$

Considerando-se as equações (3.61) e (3.37) e ainda que $D_{\mu(n+1)} = \left. \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \varepsilon_\mu} \right|_{n+1}$, a equação (3.60) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\tilde{D}_{n+1} = -\frac{1}{V_\mu} [\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{R}}] [\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{R}}]^{-1} [\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{R}}]^{\boldsymbol{T}} \tag{3.68}$$

onde, as matrizes $\boldsymbol{K_R}$ e $\boldsymbol{G_R}$ dependem do modelo adotado; a matriz $\boldsymbol{G_R}$ é obtida a partir da matriz $\boldsymbol{G}$ total, calculada da seguinte maneira:

$$G = \sum_{e=1}^{Ne} \left[D_\mu\right]_e \boldsymbol{B_e} V_e \tag{3.69}$$

sendo, N_e o número de elementos utilizados na discretização e $\boldsymbol{B}_e$ a matriz que relaciona deslocamento com deformação no elemento.

Para o cálculo de $\widetilde{D}_{n+1}$ tem-se:

- Modelo de Taylor

O operador tangente homogeneizado é dado pela equação (3.58). Considerando-se que no EVR sejam definidas N_f fases, podendo cada fase ter propriedades elásticas diferentes, a equação (3.58) é calculada da seguinte maneira:

$$D_{n+1}^{Taylor} = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{V_i}{V_{Total}} D_{\mu(n+1)}^{i} \tag{3.70}$$

- Modelo de Deslocamento Linear no Contorno

O operador tangente é dado pela equação (3.59), sendo a parcela de Taylor dada pela equação (3.70) e considerando-se equação (3.64), $\widetilde{D}_{n+1}$ (equação (3.68)) resulta em:

$$\widetilde{D}_{n+1} = -\frac{1}{V_\mu} [\boldsymbol{G_i}][\boldsymbol{K_{ii}}]^{-1}[\boldsymbol{G_i}]^{\boldsymbol{T}} \tag{3.71}$$

onde $\boldsymbol{G_i}$ é a parcela da matriz $\boldsymbol{G}$ referente aos pontos internos.

- Modelo de Flutuações Periódicas

O operador tangente é dado pela equação (3.59), sendo a parcela de Taylor dada pela equação (3.70) e na equação (3.68), $\boldsymbol{K_R}$ é dada pela equação (3.67) e $\boldsymbol{G_R}$ é definida como:

$$\boldsymbol{G_R} = [\boldsymbol{G_p} + \boldsymbol{G_m} \quad \boldsymbol{G_i}] \tag{3.72}$$

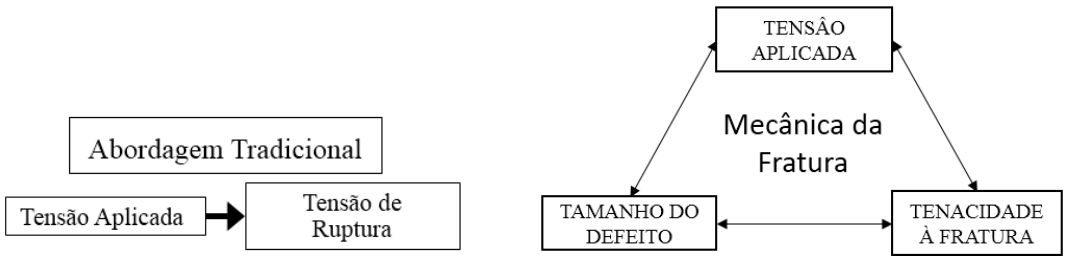
Logo a equação (3.68) torna-se:

$$\widetilde{D}_{n+1} = -\frac{1}{V_\mu}[\boldsymbol{G_p} + \boldsymbol{G_m} \quad \boldsymbol{G_i}][\boldsymbol{K_R}]^{-\mathbf{1}}[\boldsymbol{G_p} + \boldsymbol{G_m} \quad \boldsymbol{G_i}]^{\boldsymbol{T}} \tag{3.73}$$

CAPÍTULO 4
MODELAGEM CONSTITUTIVA DO EVR UTILIZANDO A MECÂNICA DA FRATURA

A Mecânica da Fratura surgiu com a necessidade de analisar o comportamento dos materiais em que a sua estrutura apresentava alguma fissura ou trinca. Em uma abordagem mais tradicional, o material é assumido ser adequado quando a tensão de ruptura for maior que a tensão aplicada esperada. Contudo, na Mecânica da Fratura têm-se duas importantes variáveis em substituição à tensão de ruptura que são o tamanho da fissura e a tenacidade à fratura como a característica relevante do material (ANDERSON, 1995), conforme mostrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Variáveis da Mecânica: a) Abordagem Tradicional b) Mecânica da Fratura, adaptado pelo autor (ANDERSON, 1995)



a) b)

4.1 HISTÓRICO

Os primeiros trabalhos foram aplicados apenas para materiais lineares-elasticos em condições de quase-estática. Esses trabalhos englobam o que é chamado de Mecânica da Fratura Linear-Elástico (MFLE). Posteriormente, surgiram trabalhos que consideraram a fratura sendo plástica em condições de quase-estática, dando origem a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) . A partir da MFEP, vários outros trabalhos surgiram como A Mecânica da Fratura Dinâmica, a Mecânica da Fratura Viscoelástica e a Mecânica da Fratura Viscoplástica que consideram o tempo como uma variável (ANDERSON, 1995). Por não ser objeto de estudo, os trabalhos que consideram a variável de tempo não será abordado.

Na MFLE há diversas pesquisas que podem ser destacadas. O primeiro trabalho na área foi realizado por Inglis (1913) que observou os efeitos das tensões próximas a furos elípticos localizados em placas planas e apresentou um fator de concentração de tensões. Com base nesse trabalho, Griffith (1920) formalizou uma conexão entre a tensão de fratura e o tamanho da fissura, dando origem ao conceito de balanço de energia. Porém o modelo não apresentou resposta esperada para outros materiais, como por exemplo, os metais. Assim, esse modelo é aplicado para materiais idealmente frágeis, como o vidro. A deficiência do modelo proposto por Griffith (1920) para materiais dúcteis foi solucionada por Irwin (1948[1] *apud* MARCHIORI, 1997) e por Orowan (1948[2] *apud* MARCHIORI, 1997). Eles sugeriram a modificação da expressão de Griffith (1920) para levar em consideração o fluxo de energia plástica, contemplando materiais elasto-plásticos. Westergaard (1939) representou os campos de tensões numa placa com um furo no centro. Irwin (1957) propôs um fator chamado de Intensidade de Tensão, que representa as tensões na região próxima à ponta da trinca. A MFLE só é válida quando a deformação localizada logo à frente e ao redor de uma de trinca de um material for pequena.

Já no âmbito da MFEP, surgiram os estudos para tratar de fissuras com aparecimentos de deformações plásticas. Wells (1961) propôs que a abertura na ponta da trinca fosse observada como uma medida de tenacidade da fratura, conhecida hoje como CTOD (*Crack Tip Opening Displacement)*. Ele a relacionou com o fator de intensidade de tensão no limite. Rice (1968) formulou a Integral J, como uma integral de linha ao redor de uma fissura, permitindo, assim, determinar mais de uma condição inicial para uma fissura.

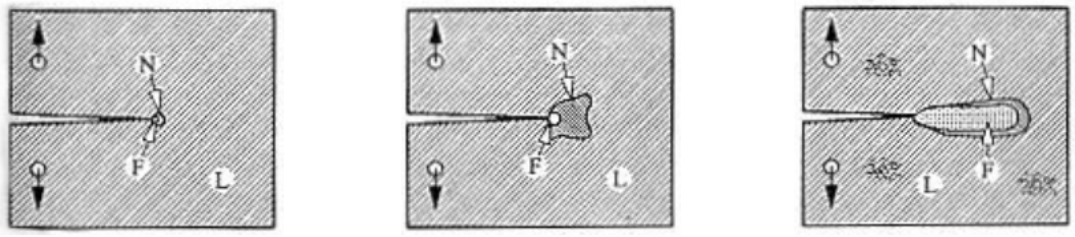
Para os materiais frágeis e quase-frágeis, como o concreto, as teorias da MFLE e MFEP não respondem bem por causa da existência de uma região que é capaz de transmitir esforços no início do fraturamento.

Durante o carregamento de uma estrutura de concreto, até certo nível ela pode-se admitir que ela se comporte em um regime de comportamento linear. Conforme o carregamento aumenta, alguns pontos nas seções mais solicitadas atingem a tensão máxima. Por causa da microestrutura heterogênea do concreto, desenvolvem-se zonas de plastificação e fraturamento em função do aparecimento de microfissuras que se concentram em pequenos volumes adjacentes à esses pontos mais solicitados, e que se caracterizam por alguma capacidade de

[1] IRWIN, G. R. Fracture Dynamics. **Fracture of Metals**, p. 147-166, 1948.
[2] OROWAN, E. Fracture and Strength of Solids. **Reports on Progress in Physics**, v. 12, p. 185-232, 1948.

transmissão (BITTENCOURT, 1999), como por exemplo na Zona de Transição do concreto. A Figura 4.2 apresenta os diferentes comportamentos à frente da trinca, onde F é a região de fraturamento, N a região de deformações plásticas e a região L apresenta as deformações elásticas.

Figura 4.2 – Regiões de comportamento distinto à frente da fissura, (BITTENCOURT, 1999)



Elástico linear Plástico não-linear Quase-frágil não linear

Se as deformações plásticas na zona de fraturamento forem pequenas, um modelo de fraturamento com base nos conceitos da elasticidade linear, a MFLE, descreve de maneira satisfatória o comportamento da fratura, sendo esse um caso de materiais de comportamento frágil. Mas se a região das deformações plásticas forem significativas em comparação à região elástica, o modelo anterior não se mostrará eficiente. Para os casos onde os efeitos de plastificação não são pequenos, os modelos da MFEP podem ser utilizados de maneira eficiente (BITTENCOURT, 1999).

Por apresentar uma zona de fraturamento impactante, o concreto experimenta um comportamento não-linear quase-frágil. A sua zona de fraturamento se assemelha com a sua região de plastificação. Logo, uma região fraturada impacta diretamente na capacidade de transmissão de esforços. Para esses casos, os modelos de fratura coesivas apresentam melhor eficiência.

4.2 MODELO DE FRATURA COESIVA

Os modelos anteriores são eficazes em se tratando de fraturas para materiais frágeis, em que a zona de fraturamento pode ser desprezada. Quando essa zona apresenta dimensões que não podem ser desprezadas, os modelos de fratura coesiva são mais indicados.

O modelo de fratura coesiva foi originalmente apresentado por Dugdale (1960). O objetivo do modelo era representar a fratura de chapas finas de materiais dúcteis, descrevendo a região danificada que apresenta uma certa capacidade de transmitir esforços. Logo, propôs a existência

de uma fratura capaz de transmitir os esforços de uma face para outra, diminuindo gradualmente até não haver mais essa característica. Com base nesse modelo, Barenblatt (1962) estendeu os conceitos para os materiais frágeis. Com a evolução da Mecânica da Fratura, Hillerborg *et al.* (1976) aplicaram o conceito da fratura coesiva para o concreto e propuseram o modelo de fissura fictícia.

O modelo de Needleman (1987[3] *apud* AMORIM, 2007) utilizou os conceitos de fratura coesiva descrito por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) através de uma abordagem computacional, como a dos elementos finitos. A ideia foi utilizar elementos coesivos entre os elementos finitos, na região de interface. Essa abordagem possibilitou representar o processo de ruptura, desde seu início com a ligação entre as faces até a completa separação do elementos finitos, resultando a formação dos vazios. A deficiência nesse modelo se deu pela não consideração de grandes deslocamentos na direção tangencial. Essa deficiência foi resolvida por Tvergaard (1990[4] *apud* AMORIM, 2007).

Outro modelo importante que contribuiu para a formulação do elemento coesivo a ser utilizado neste trabalho é o modelo de Camacho e Ortiz (1996), que apresentou uma nova forma de simular os diversos mecanismos de fraturamento. Foi incluído um novo parâmetro para a inicialização do processo de fratura. Essa nova variável permitiu que a análise inicie-se sem nenhuma fratura coesiva e, conforme o carregamento da malha, os elementos são incluídos durante a execução da análise. Ortiz e Pandolfi (1999) estenderam o trabalho de Camacho e Ortiz (1996) para os casos em três dimensões.

Posteriormente, Cirak *et al.*(2005) desenvolveram um método em elementos finitos para a simulação de fraturas dinâmicas e fragmentação de cascas finas, com base na teoria de Ortiz e Pandolfi (1999).

4.3 FORMULAÇÃO DO MODELO DE FRATURA COESIVA

O processo de carregamento de um material quase-frágil com inclusões é caracterizado por um regime elasto-plástico. Porém, durante o regime de carregamento pós-pico, esses materiais

[3] NEEDLEMAN, A. A Continuum Model for Void Nucleation By Inclusion Deboing. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, p. 525-531, 1987.
[4] TVERGAARD, V. Effect of Fibre Debonding in a Wisker Reinforced Metal. **Material Science and Engineering**, v. A125 p. 203-213, 1990.

apresentam um processo de danificação devido à fissuração que governa a perda da coesão na região de interface, entre a matriz e a inclusão. No caso do concreto, na Zona de Transição.

Para simular o comportamento mecânico na Zona de Transição, foi implementado um modelo de contato e fratura coesiva proposto por Pituba e Souza Neto. (2015), que desenvolveu uma extensão do modelo de Cirak *et al.* (2005). Também é apresentado o elemento finito desenvolvido para capaz de modelar o comportamento da Zona de Transição do concreto em conjunto com o modelo constitutivo de fratura coesiva.

4.3.1 Modelo constitutivo

O modelo proposto foi inicialmente desenvolvido por Ortiz e Pandolfi (1999) que descreve a lei coesiva de deformação-finita irreversível. A energia coesiva liberada $\boldsymbol{\Phi}$ é dada pela equação (4.1):

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\delta_n, \delta_s, \boldsymbol{q}) \tag{4.1}$$

onde,

δ_n – abertura devido ao modo I (normal);

δ_s – abertura devido ao modo II (escorregamento);

q – variável que descreve os processos inelásticos da coesão;

É possível assumir que a deformação devida à abertura por escorregamento é um valor escalar independente da direção de sua fissura na superfície, assim $\delta_s = |\delta_s|$, dando um caráter isotrópico para seu comportamento naquela superfície. Para a formulação da lei coesiva dos modos mistos, é introduzido um deslocamento de abertura efetiva apresentado na equação (4.2):

$$\delta = \sqrt{\beta^2 \delta_S^2 + \delta_n^2} \tag{4.2}$$

Onde,

δ – deslocamento de abertura efetiva

O parâmetro β assume valores diferentes para as aberturas de cisalhamento e normal, variando de 0 a 1. Do potencial da energia liberada ϕ, que é dependente de δ, segue a lei coesiva dada pela equação (4.3):

$$\boldsymbol{t} = \frac{t}{\delta}(\beta^2 \boldsymbol{\delta_S} + \delta_n \boldsymbol{n}) \tag{4.3}$$

onde,

n – é a vetor normal a fissura;

$\boldsymbol{\delta_s}$ – vetor de abertura por escorregamento localizado na superfície da fissura;

t – é vetor de tensão coesiva ao longo da fissura.

O valor de t é dado pela equação (4.4):

$$t = \sqrt{\beta^{-2}\boldsymbol{t_S}^2 + t_n^2} \tag{4.4}$$

A relação mostra que β é definido como sendo um fator de peso para se levar em conta o fenômeno de escorregamento entre as bordas da fissura. Nota-se que, próximo ao fechamento, a superfície coesiva é sujeita à condição de restrição de contato, incluindo o atrito. É considerado que o contato e o atrito são fenômenos independentes a serem modelados fora da lei coesiva (ORTIZ; PANDOLFI, 1999).

Para esse trabalho, foi adotado uma extensão do modelo de Cirak *et al.* (2005), realizada por Pituba e Souza Neto (2015), para simular o comportamento mecânico de materiais de modo a minimizar problemas de instabilidade da resposta numérica desse tipo de formulação. Essas relações são descritas nas equações (4.5) e (4.6).

$$t = \sigma_c e^{-\delta/\delta_c} \qquad \text{se } \delta = \delta_{\max} \text{ e } \dot{\delta} > 0 \tag{4.5}$$

$$t = \frac{t_{max}}{\delta_{\max}}\delta \qquad se\ \delta < \delta_{max} \text{ ou } \dot{\delta} \leq 0 \tag{4.6}$$

Onde *e* é a base neperiana (*e* =2,71828), σ_c é a máxima tensão de tração normal coesiva e δ_c é a abertura critica.

Segundo Cirak *et al.* (2005), enquanto a tensão efetiva for menor que a tensão de tração normal coesiva, σ_c, não há fratura presente na região verificada. Porém, quando a tensão efetiva na possível fratura assume valores maiores que σ_c, a fratura é criada considerada como um processo de separação gradual com a finalidade de evitar uma forte descontinuidade no material. Verifica-se também que a abertura máxima é aproximadamente $\delta_c = 2G_c/\sigma_c$, onde G_c é a densidade de energia do modo I.

Antes do aparecimento das fraturas, existe uma rigidez entre as bordas da possível fratura entre os elementos finitos triangulares dada por um chamado fator de penalidade (λ_p). Essa abordagem foi utilizada por Paulino *et al.* (2008) e é chamada de elementos coesivos intrínsecos. Observa-se que a inserção de fraturas a medida que o processo se propague pode ser uma outra alternativa utilizando teorias de malhas adaptativas, porém neste trabalho, se admite conhecer onde possivelmente as fraturas irão surgir, portanto não sendo o foco aqui de se utilizar ou desenvolver métodos adaptativos de geração de malhas.

Este fator de penalidade é um parâmetro de valor escalar. Na prática, valores altos para o fator de penalidade são adotados com a finalidade de obter uma resposta mais precisa. Tal procedimento garante que a possível fratura permaneça fechada até se atingir o critério de separação e, ao mesmo tempo, garante a admissibilidade física de todo o processo.

De maneira geral, pretende-se criar rigidez nos nós dos pares com o contato de elementos finitos coesivos, a fim de não permitir a penetração das superfícies de fissura (CIRAK *et al.* 2005). Por outro lado, nos regimes predominantes de tração, este fator de penalidade efetivamente substitui a porção rígida inicial da lei coesiva por uma resposta linear rígida na forma da equação (4.7).

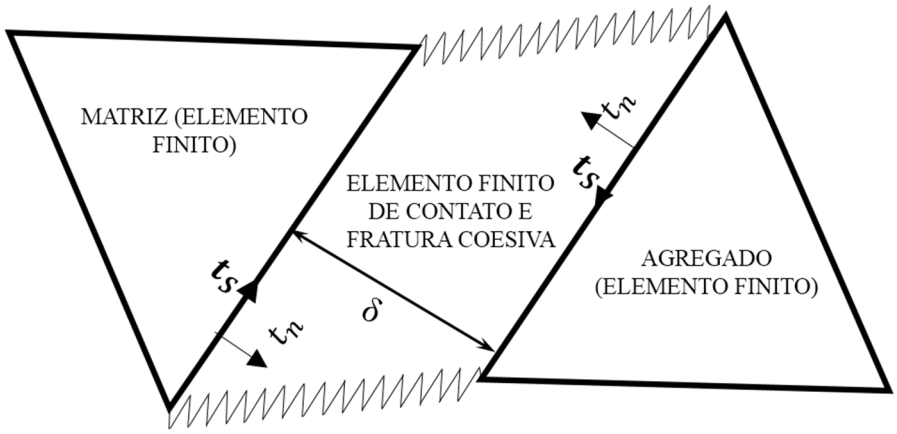
$$t = \lambda_p \delta \qquad se\ \ \lambda_p \delta \leq \sigma_c \tag{4.7}$$

4.3.2 Elemento finito de contato e fratura coesiva

É adotado que a fratura apareça e se propague apenas na fronteira do elemento finito de contato e fratura coesiva, como já adotado nos trabalhos de Paulino *et al.* (2008) e Oliver *et al.* (2014). Além disso, as bordas de uma fissura, por exemplo, de um lado direito e do seu lado oposto, interagem através da tração coesiva. Esse fenômeno investigado envolve uma transição da continuidade para uma descontinuidade discreta usando o modelo de fratura coesiva. Esse tipo de análise foi abordado por Paulino *et al.* (2008), podendo ser simulado por funções de

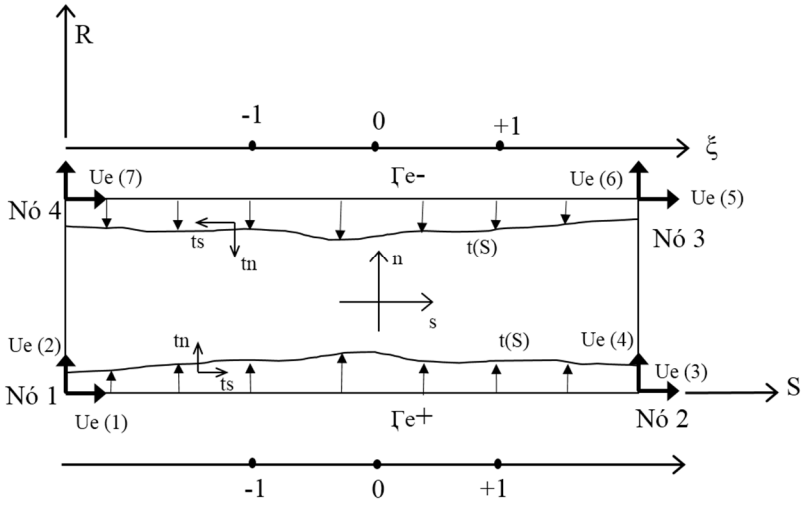
enriquecimento ou pelas técnicas de inserção de fratura entre elementos. Para esse trabalho foi utilizada a segunda técnica, onde o elemento finito de contato e fratura coesiva é inserido entre os elementos finitos triangulares, conforme mostrado na Figura 4.3. Apesar de simples, esse tipo de modelagem apresenta respostas precisas evitando a necessidade de uma adaptação na inserção do elemento coesivo.

Figura 4.3 – Configuração do Modelo em Elementos Finitos



Os tipos de elementos considerados nesse trabalho são compostos por duas superfícies que têm as configurações coincidentes com as bordas dos elementos finitos triangulares na configuração indeformada do EVR, conforme a Figura 4.4. O elemento finito de contato e fratura coesiva é definido como um elemento de quatro nós sendo a sua geometria compatível com a de dois elementos triangulares usados para modelar as fases da matriz e a inclusão. Essa formulação foi apresentada por Pituba e Souza Neto. (2015).

Figura 4.4 – Modelo do Elemento Finito de Contato e Fratura Coesiva, adaptado pelo autor (PITUBA; SOUZA NETO, 2015)



No sistema local do elemento finito, o eixo *s* é a direção de cisalhamento e o eixo *n* a direção normal, mostrados na Figura 4.4. Os deslocamentos nodais e as forças internas são dados nas equações (4.8) e (4.9).

$$\mathbf{u_e} = \begin{Bmatrix} u_e(1) \\ \vdots \\ u_e(4) \\ u_e(5) \\ \vdots \\ u_e(8) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u_e^+} \\ \mathbf{u_e^-} \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{F_e^{int}} = \begin{Bmatrix} F_e^{int}(1) \\ \vdots \\ F_e^{int}(4) \\ F_e^{int}(5) \\ \vdots \\ F_e^{int}(8) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F_e^{int+}} \\ \mathbf{F_e^{int-}} \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

As variáveis $\mathbf{u_e^+}$ e $\mathbf{F_e^{int+}}$ são os deslocamentos nodais e vetor de forças internas relacionadas com o lado positivo Γ_e^+. Similar, as variáveis $\mathbf{u_e^-}$ e $\mathbf{F_e^{int-}}$ são os deslocamentos nodais e vetor de forças internas relacionada ao lado negativo Γ_e^-.

A fim de calcular a função de abertura em cada ponto de Gauss, a seguinte equação (4.10) é utilizada:

$$\delta_e(\xi_i) = \mathbf{N_e^-}(\xi_i(s))\mathbf{u_e^-} - \mathbf{N_e^+}(\xi_i(s))\mathbf{u_e^+} = u^-(\xi_i) - u^+(\xi_i) \quad i=1,2,3... \tag{4.10}$$

onde,

$u^-(\xi_i)$ e $u^+(\xi_i)$ são os deslocamentos relacionados ao ponto de Gauss na superfície negativa e positiva. Já $\mathbf{N_e^-}(\xi_i(s))$ e $\mathbf{N_e^+}(\xi_i(s))$ são as funções de forma relacionadas ao ponto de Gauss na superfície negativa e positiva. Portanto, a matriz $\mathbf{N_e}$ tem a contribuição da função de forma de ambos os lados, representada na equação (4.11),

$$\mathbf{N_e} = [\mathbf{N_e^-}\ \mathbf{N_e^+}] = \begin{bmatrix} \mathbf{N_1(\xi_i)} & \mathbf{0} & \mathbf{N_2(\xi_i)} & \mathbf{0} & \mathbf{N_3(\xi_i)} & \mathbf{0} & \mathbf{N_4(\xi_i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N_1(\xi_i)} & \mathbf{0} & \mathbf{N_2(\xi_i)} & \mathbf{0} & \mathbf{N_3(\xi_i)} & \mathbf{0} & \mathbf{N_4(\xi_i)} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Considerando o princípio do trabalho virtual ao longo da fissura no lado positivo Γ_e^+, por exemplo, pode-se obter a equação (4.12).

$$\delta w_e^{int+} = \int_{\Gamma_e^+} \boldsymbol{t}(s).\boldsymbol{\eta}(s)d\Gamma_e = \left[\int_{\Gamma_e^+} \mathbf{N_e^{+T}}(s)\mathbf{t}(s)d\Gamma_e\right]\begin{Bmatrix}\eta_1^R\\ \eta_1^S\\ \eta_2^R\\ \eta_2^S\end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

A equação (4.12) apresenta o vetor de tensões e os deslocamentos virtuais. Entretanto, é possível obter o vetor das forças internas no elemento finito de contato e fratura coesiva conforme mostrado na equação (4.13).

$$\mathbf{F_e^{int+}} = \frac{l_e}{2}\int_{-1}^{+1} \mathbf{N_e^{+T}}(\xi)\ \mathbf{t}(S(\xi))\ d\xi \tag{4.13}$$

Onde l_e é o comprimento do elemento finito e $\mathbf{t}(S(\xi))$ é o vetor de tensão coesiva em cada ponto de Gauss composta pelas componentes de cisalhamento e normais, conforme a equação (4.14).

$$\mathbf{t}(S) = \begin{Bmatrix}\mathbf{t_s}(S)\\ \mathbf{t_n}(S)\end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

É importante notar que cada ponto de Gauss contribui para a evolução das forças internas através do vetor de tensão computado: ou pela lei coesiva (se a fissura está em regime de abertura ou de descarregamento) ou pela lei de contato (se a fissura está fechada e sendo impelida a continuar fechada no ponto de Gauss). Portanto, as superfícies da fissura podem não ser propriamente paralelas.

Para as fissuras abertas, no caso de carregamento, o vetor de tensão coesiva é obtido através das equações (4.4) e (4.5), particularmente no ponto de Gauss, sendo suas componentes conforme as equações (4.15) e (4.16).

$$t_s(\xi_i) = \frac{\sigma_c}{\delta} e^{-\frac{\delta(\xi_i)}{\delta_c}} \beta^2 \delta_s(\xi_i) \tag{4.15}$$

$$t_n(\xi_i) = \frac{\sigma_c}{\delta} e^{-\frac{\delta(\xi_i)}{\delta_c}} \delta_n(\xi_i) \tag{4.16}$$

Por outro lado, das equações (4.4) e (4.6) são obtidas o vetor de tensão coesiva para os casos de descarregamento nos pontos de Gauss de interesse, sendo suas componentes definidas como:

$$t_s(\xi_i) = \frac{t_{max(\xi_i)}}{\delta_{max}(\xi_i)} \beta^2 \delta_s(\xi_i) \tag{4.17}$$

$$t_n(\xi_i) = \frac{t_{max(\xi_i)}}{\delta_{max}(\xi_i)} \delta_n(\xi_i) \tag{4.18}$$

No contexto de cálculos de elementos finitos implícitos, as variáveis escalares $t_{max}(\xi_i)$ e $\delta_{max}(\xi_i)$, denotam os últimos valores convergidos do incremento anterior. Por outro lado, se as superfícies de fissura fecham no ponto de Gauss de interesse, o vetor de tensão é dado por:

$$t_s(\xi_i) = \lambda_p l_e \delta_s(\xi_i) \tag{4.19}$$

$$t_n(\xi_i) = \lambda_p l_e \delta_n(\xi_i) \tag{4.20}$$

Finalmente, deve ser notado que a integral, referente à equação (4.12), é válida ao longo da superfície indeformada do elemento, na sua configuração de referência. Essa integral pode ser numericamente aproximada utilizando um esquema com três pontos de Gauss definido ao longo do elemento. O vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{F_e^{int+}} \cong \frac{l_e}{2} \sum_{i=1}^{nGauss} \mathbf{N}_e^{+T}(\xi_i)\, \mathbf{t}(S(\xi_i)) \tag{4.21}$$

$$\mathbf{F_e^{int}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_e^{int+}} \\ \mathbf{F_e^{int-}} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Por outro lado, o vetor de forças internas no lado negativo $\mathbf{F_e^{int-}}$ é obtido tendo em conta que o vetor de tensão coesiva tem valores negativos, a fim de satisfazer o equilíbrio do elemento finito de contato e fratura coesiva, levando que $\mathbf{F_e^{int+}} = -\mathbf{F_e^{int-}}$.

Já o problema não-linear de valor de contorno do EVR discretizado é resolvido através da linearização da equação (4.23) de equilíbrio.

$$\mathbf{R} + \frac{d\mathbf{F}}{d\boldsymbol{u}} d\tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{4.23}$$

Onde,

R – a força desequilibrada;

$d\tilde{\boldsymbol{u}}$ – incremento de do campo de flutuação de deslocamento;

$\frac{d\mathbf{F}}{d\boldsymbol{u}}$ - rigidez tangente chamada também de **K**;

Portanto, com foco nos elementos finitos, a rigidez tangente consistente K_e é escrita como:

$$\mathbf{K_e} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F_e^{int}}}{\mathrm{d}\mathbf{u_e}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F_e^{int+}}}{\mathrm{d}\mathbf{u_e}} \\ -\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F_e^{int-}}}{\mathrm{d}\mathbf{u_e}} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Nota-se que na equação (4.24), a componente relacionada ao lado negativo deve levar em conta a direção do vetor de tensão coesiva para essa superfície. Para outro lado, considerando o lado positivo pode-se observar que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F_e^{int+}}}{\mathrm{d}\mathbf{u_e}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F_e^{int+}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}}{\mathrm{d}\mathbf{u_e}} \tag{4.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F_e^{int+}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}} \cong \frac{l_e}{2} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{nGauss}} \mathbf{N_e^{+T}}(\xi_\mathrm{i}) \, \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{e}\,\mathrm{S}(\xi_\mathrm{i})}} \tag{4.26}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}_\boldsymbol{e}}{d\boldsymbol{u}_\boldsymbol{e}} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{N_e^-}(\mathrm{S})\mathbf{u_e^-} - \mathbf{N_e^+}(\mathrm{S})\mathbf{u_e^+})}{\mathrm{d}\mathbf{u_e}} = [-\mathbf{N_e^+} \quad \mathbf{N_e^-}] \tag{4.27}$$

Para o lado negativo, equações similares podem ser obtidas. Nota-se ainda que na equação (4.26), a derivada $\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}$ pode ser calculada para o ponto de Gauss de interesse. Entretanto, considerando uma abertura de fissura, essa derivada é dada, respectivamente, para os casos de carregamento e descarregamento, pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{e}\,\mathrm{S}(\xi_\mathrm{i})}} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_s}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{s}} & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_s}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{n}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_n}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{s}} & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_n}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{n}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{t(\xi_\mathrm{i})}{\delta(\xi_\mathrm{i})} \begin{bmatrix} \beta^2 \left[1 - \dfrac{\beta^2\delta_\mathrm{s}^2(\xi_\mathrm{i})}{\delta^2(\xi_\mathrm{i})} - \dfrac{\beta^2\delta_\mathrm{s}^2(\xi_\mathrm{i})}{\delta_\mathrm{c}\delta(\xi_\mathrm{i})}\right] & -\dfrac{\delta_\mathrm{n}(\xi_\mathrm{i})\beta^2\delta_\mathrm{s}(\xi_\mathrm{i})}{\delta(\xi_\mathrm{i})}\left[\dfrac{1}{\delta(\xi_\mathrm{i})} + \dfrac{1}{\delta_\mathrm{c}}\right] \\ -\dfrac{\delta_\mathrm{n}(\xi_\mathrm{i})\beta^2\delta_\mathrm{s}(\xi_\mathrm{i})}{\delta(\xi_\mathrm{i})}\left[\dfrac{1}{\delta(\xi_\mathrm{i})} + \dfrac{1}{\delta_\mathrm{c}}\right] & 1 - \dfrac{\delta_\mathrm{n}^2(\xi_\mathrm{i})}{\delta_\mathrm{c}\delta(\xi_\mathrm{i})} - \dfrac{\delta_\mathrm{n}^2(\xi_\mathrm{i})}{\delta^2(\xi_\mathrm{i})} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{e}_{\mathrm{S}(\xi_\mathrm{i})}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_s}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{s}} & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_s}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{n}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_n}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{s}} & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t_n}(\xi_\mathrm{i})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \frac{t_{max}(\xi_i)}{\delta_{max}(\xi_i)} \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Por fim, se a fissura estiver fechando no ponto de Gauss, a matriz $\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e}$ é expressa pela equação (4.30).

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{e}_{\mathrm{S}(\xi_\mathrm{i})}}} = \lambda_\mathrm{p} l_e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

CAPÍTULO 5
MODELAGEM CONSTITUTIVA DO EVR UTILIZANDO A TEORIA DA PLASTICIDADE

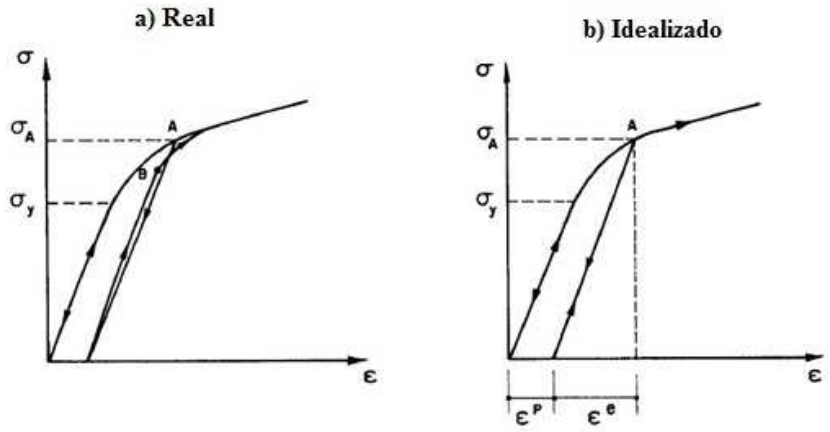
Neste capítulo, são brevemente apresentados os fundamentos da Teoria da Plasticidade, mostrados por Proença (1988) e por Souza Neto *et al.* (2008), o modelo constitutivo utilizado para simular o comportamento mecânico da Matriz e, em alguns casos, da Zona de Transição, como se verá no capítulo a seguir quando tratar dos resultados deste trabalho.

A Teoria da Plasticidade fornece uma estrutura geral para a descrição constitutiva para o comportamento de materiais. O foco de sua aplicação é em materiais, que após serem carregados, possuem uma deformação permanente (ou plástica) que surge quando for descarregado completamente. Vários materiais que são usuais na Engenharia comportam-se como descrito por essa teoria como, por exemplo, o concreto, rochas e metais. O objetivo da Teoria da Plasticidade é formular modelos constitutivos eficazes para descrever o comportamento fenomenológico de materiais em regime plástico. A teoria apresentada neste capítulo é restrito a pequenas deformações.

5.1 CONCEITOS BÁSICOS

O comportamento plástico de um material é observado quando as tensões exercidas sobre ele tornam-se nulas e é possível notar uma deformação permanente. Essas deformações surgem quando as tensões excedem um determinado limite chamado de tensão de escoamento. Essas características podem ser observadas através do gráfico de Tensão x Deformação, real e idealizado, da análise fenomenológica de um ensaio de tração simples, conforme mostrado no gráfico da Figura 5.1.

Figura 5.1 – Comportamento plástico: a) Real b) Idealizado, adaptado pelo autor (PROENÇA, 1988).



Nos gráficos, Proença (1988) destaca algumas regiões:

- A primeira região, compreendida da origem até o ponto da tensão de escoamento, σ_y, ocorre o regime elástico. Nessa região, o carregamento e o descarregamento percorrerá o mesmo caminho, sem aparecimento de deformações residuais. A deformação que aparece durante esse regime é chamada de deformação elástica, que desaparece quando, no descarregamento, a tensão torna-se nula.
- A segunda região, compreendida entre o ponto que atinge a tensão de escoamento, $\sigma_{y,}$ até o ponto A, ocorre o regime plástico. O descarregamento a partir desse ponto percorrerá um caminho diferente e paralelo ao caminho do regime elástico. Quando a tensão atinge o valor nulo, no descarregamento, uma deformação residual é observada. Essa deformação residual é chamada de deformação plástica, sendo essa deformação irrecuperável ou permanente.

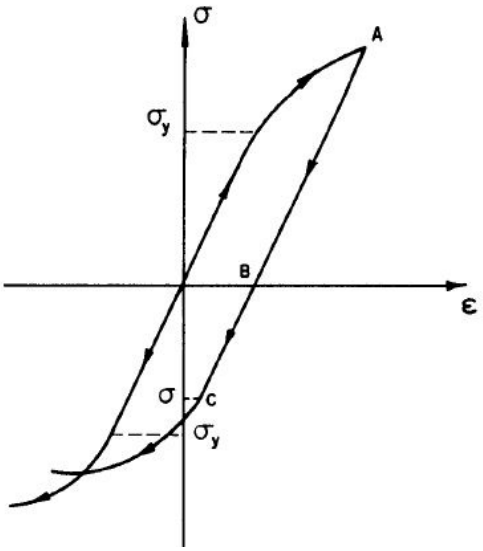
No modelo de comportamento plástico real, após ocorrer o descarregamento e o material apresentar uma deformação plástica, um novo carregamento é dado e percorrerá um caminho elástico. Esse novo caminho segue até atingir o ponto B, ao qual corresponde uma tensão maior que a tensão de escoamento inicial, σ_y. Nesse momento, a tensão de escoamento tem um novo valor, devido ao aparecimento da deformação plástica anterior. Esse fenômeno é chamado de encruamento.

No modelo de comportamento plástico idealizado é considerado uma simplificação, a desconsideração do efeito de histerese (efeito causado pelo descarregamento-carregamento em que a curva não passa pelo mesmo caminho), e admite-se que a nova tensão de escoamento seja

a mesma tensão em que houve o descarregamento, no caso da figura o ponto A e o caminho de carregamento é o mesmo que o do descarregamento anterior.

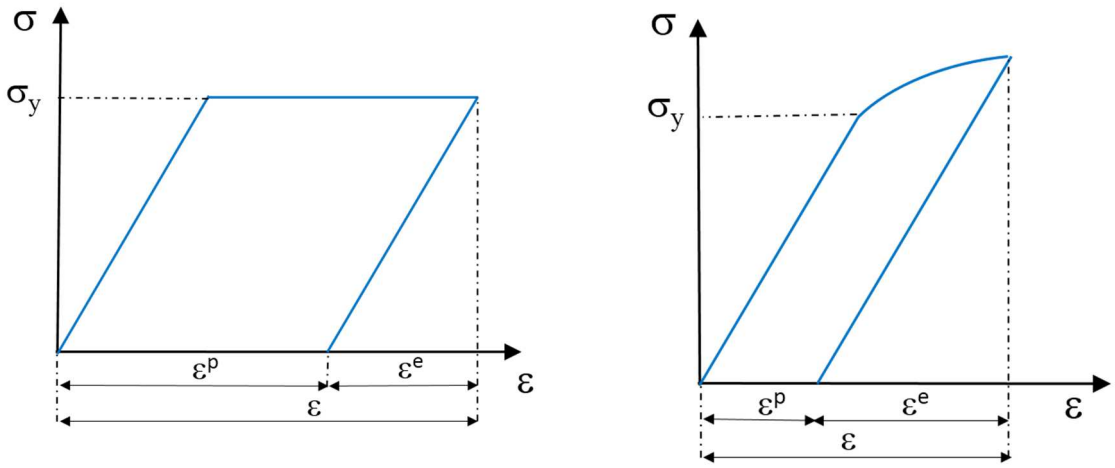
Outra característica sobre o comportamento do material no regime plástico é o efeito Baüschinger. Esse efeito é caracterizado pela influência da deformação permanente em casos de anisotropia. Na Figura 5.2 é considerado um material com tensões de escoamento iguais a σ_y, tanto na compressão quanto na tração. O material é carregado sob o regime de tração, inicialmente num estado sem deformações iniciais até atingir um valor de tensão superior à tensão de escoamento σ_y (ponto A). A partir desse momento é feito um descarregamento até o ponto B, onde nota-se a deformação plástica e assim é feito um novo carregamento, no regime de compressão. É possível observar que o novo ponto de escoamento foi afetado pela deformação permanente e atingiu um valor inferior a σ_y (PROENÇA, 1988).

Figura 5.2 – Efeito Baüschinger, adaptado pelo autor (PROENÇA, 1988)



Segundo Proença (1988), no espaço das tensões, uma forma de dar soluções únicas utilizando a Teoria da Plasticidade, implica que existem apenas dois comportamentos possíveis a serem considerados: o comportamento elastoplástico perfeito e o comportamento elastoplástico com encruamento. Essas limitações são realizadas através dos postulados de Drucker. Os dois tipos de comportamento são mostrados na figura abaixo:

Figura 5.3 – Comportamento sob o regime: a) Elastoplástico perfeito b) Elastoplástico com encruamento



a) Elastoplástico perfeito

b) Elastoplástico com encruamento

5.2 MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTOPLÁSTICOS

Um modelo constitutivo elastoplástico em geral, segundo Souza Neto *et al.* (2008), deve conter os seguintes componentes básicos:

- O tensor de deformações elastoplásticas;
- A lei do comportamento elástico;
- Uma função de plastificação;
- Uma regra de escoamento plástico, que define a evolução das deformações plásticas;
- Uma lei de encruamento, que define a evolução do limite de escoamento;

5.2.1 Tensor de deformações elastoplásticas

O tensor de deformações, ε, é dado pela soma de deformações elásticas, ε_e, e uma componente de deformações plástica, ε_p, ou seja:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{5.1}$$

Nesse trabalho, o tensor de deformações é imposto ao EVR como sendo uma dada deformação advinda da macroescala. Portanto, é um dado de entrada do código computacional utilizado neste trabalho na forma incremental para uma análise não-linear física do EVR.

5.2.2 Lei do comportamento elástico

Os modelos elastoplásticos seguem um comportamento linear e isotrópico, logo antes de atingir as tensões de escoamento. O seu comportamento segue a equação abaixo:

$$D_e = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-2v)[I] + v[I]\right]$$
$$\sigma = D_e : \varepsilon_e \tag{5.2}$$

onde,

E – módulo de Elasticidade;

v – coeficiente de Poisson.

5.2.3 Função de plastificação

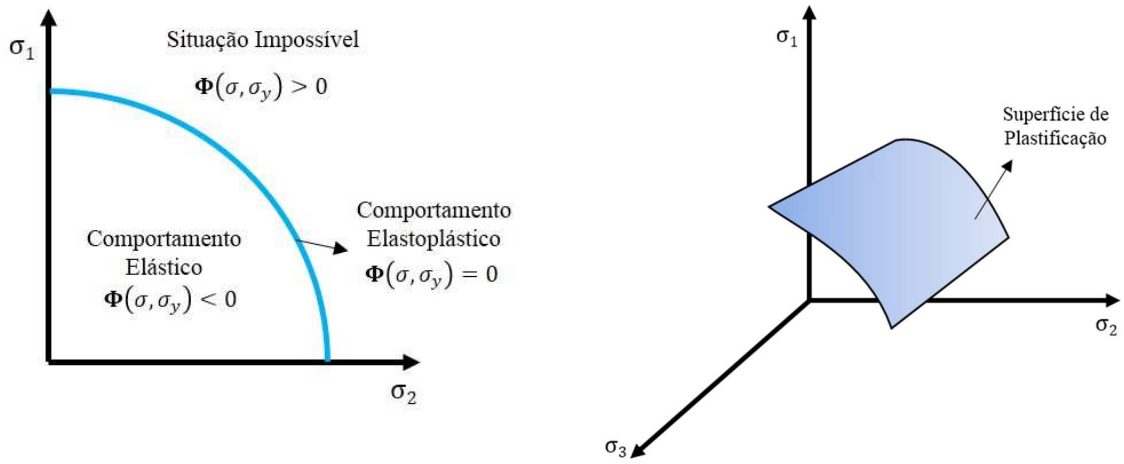
No modelo plástico implementado nesse trabalho, os materiais tem um comportamento elástico até atingir a sua tensão de escoamento. Após atingir essa tensão, os materiais se comportam como materiais plásticos.

Por causa de um domínio elástico, delimitado pela tensão de escoamento, surge uma função de plastificação, Φ, que determina quando o material se comporta de maneira elástica ou plástica. Quando a função de plastificação apresenta valores iguais a zero, o material pode estar em regime plástico se o gradiente da função de plastificação, $\dot{\Phi}$, apresentar maior que zero (situação de carregamento) ou regime elástico se o gradiente da função de plastificação apresentar valor menor ou igual a zero (situação de descarregamento). Se a função de plastificação apresenta valores abaixo de zero, o material está no regime elástico, mas se apresenta valores acima de zero, o material não admite essas tensões, apresentando uma situação impossível, conforme dado pela equação (5.3).

$$\begin{aligned}
&\Phi(\sigma, \sigma_y) < 0 && \text{Para estado elástico} \\
&\Phi(\sigma, \sigma_y) = 0 && \text{Para estado plástico} \quad \text{Se } \dot{\Phi} > 0 \text{ (carregamento)} \\
&\Phi(\sigma, \sigma_y) = 0 && \text{Para estado elástico} \quad \text{Se } \dot{\Phi} \leq 0 \text{ (descarregamento)} \\
&\Phi(\sigma, \sigma_y) > 0 && \text{Situação impossível}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

No espaço bidimensional, essa função é representada por uma curva de plastificação e no espaço é representado por uma superfície de plastificação, mostrado na Figura 5.4.

Figura 5.4 – Representação gráfica da função de plastificação: a) Curva de plastificação; b) Superfície de plastificação, adaptado pelo autor (FRANÇA, 2006)



a) Curva de Plastificação b) Superfície de Plastificação

Enquanto o material permanecer com estado de tensões no interior da região delimitada pela da superfície de plastificação, as deformações plásticas não ocorrerão, ou seja, $\varepsilon_p = 0$. Mas se a função de plastificação apresentar um valor igual à zero, o valor das deformações plásticas serão diferentes de zero, ou seja, $\varepsilon_p \neq 0$.

Existem vários modelos que determinam o valor dessa função de plastificação. Será utilizado nesse trabalho o modelo de plastificação de Mohr-Coulomb.

5.2.4 Regra do escoamento plástico

A regra de escoamento define uma relação entre as deformações plásticas e as tensões. Essa regra define em que tensões ocorrem o início do escoamento do material. De maneira geral, essa regra é dada por:

$$d\varepsilon_p = d\gamma \boldsymbol{N}(\sigma, \sigma_y) \tag{5.4}$$

onde,

$\boldsymbol{N}$ – vetor de escoamento plástico;

$d\gamma$ – multiplicador plástico, que determina a magnitude das deformações plásticas;

Numa relação de multisuperfícies, a equação (5.4), pode ser generalizada como:

$$d\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{n} d\gamma^i \boldsymbol{N^i} \tag{5.5}$$

O valor de $d\gamma$ define a magnitude das deformações plásticas. Ele é um valor escalar não negativo de forma que segue a condição complementar:

$$\Phi d\gamma = 0 \tag{5.6}$$

O vetor normal à superfície de escoamento plástico é caracterizado pela forma geral da expressão:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial\, \Phi}{\partial \sigma} \tag{5.7}$$

Uma forma de obter a regra de escoamento plástico é através da derivada de uma função potencial. A função potencial é uma função escalar do tensor das tensões, a partir do qual os incrementos de deformação plástica podem ser determinados por derivadas parciais em relação aos componentes do tensor das tensões. Conforme mostrado a equação abaixo:

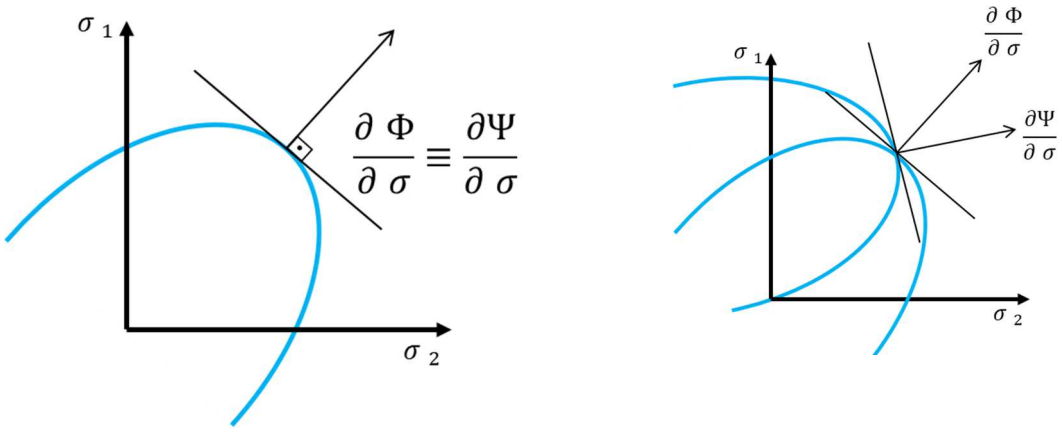
$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{\partial\, \Psi}{\partial \sigma} \tag{5.8}$$

onde,

Ψ – é a função do potencial;

Se a função potencial coincidir com a função de plastificação, a regra de escoamento é chamada de associativa. Mas se a função potencial não coincidir, é chamado de não associativa. A representação geométrica é mostrada no gráfico abaixo.

Figura 5.5 – Regra Associativa e Não associativa, adaptado pelo autor (ALVES FILHO, 2012)



Regra Associativa Regra Não-Associativa

Para os materiais mais dúcteis, como os metais, a regra associativa é mais utilizada devido os resultados serem mais concordantes com os experimentos. Para outros materiais, como solos e materiais granulados, a regra de escoamento plástico não-associativo mostra resultados mais realísticos (ALVES FILHO, 2012). Isso deve-se aos fenômenos de dilatância durante o escoamento plástico que geralmente é maior que a observada experimentalmente em ensaios de laboratórios como, por exemplo, materiais que seguem o modelo de Mohr-Coulomb (IBAÑEZ, 2003). Por esse motivo, o uso do modelo plástico não associativo minimiza essa característica.

Segundo Ibañez (2003), o ângulo de dilatância (ψ) expressa a relação existente entre os incrementos de deformação plásticas volumétricas e deformação plásticas distorcionais, sendo demonstrado que o valor do ângulo de atrito é igual ao ângulo de dilatância, para os casos da regra associativa. Sendo assim, a função de plastificação pode ser ajustada de acordo com a realidade do comportamento real do material, adicionando um novo parâmetro: ângulo de dilatância. Para os casos onde o ângulo de atrito é maior que o ângulo de dilatância, a função de plastificação é classificada de função não-associativa.

5.2.5 Lei de encruamento

A lei de encruamento estabelece uma relação entre a superfície de plastificação e a deformação plástica. Uma superfície de plastificação pode se alterar, conforme acontecem os carregamentos e descarregamentos. Assim, a lei de encruamento estabelece como essa superfície se altera em função da deformação plástica. Essa variável é definida conforme equação abaixo:

$$\boldsymbol{H} = \frac{\partial\, \sigma_y}{\partial \varepsilon_p} \tag{5.9}$$

O fato da superfície de plastificação se alterar, essa superfície pode assumir diferentes formas e comportamentos. Alves Filho (2012) classifica de acordo com três modelos:

- Modelo isotrópico

A superfície é provocada pelo incremento de deformação plástica, em que a superfície é uma expansão uniforme da superfície de escoamento do estágio anterior, Esse modelo é de simples representação, porém não incorpora o efeito Baüschinger. A representação é dada pela Figura 5.6 – a.

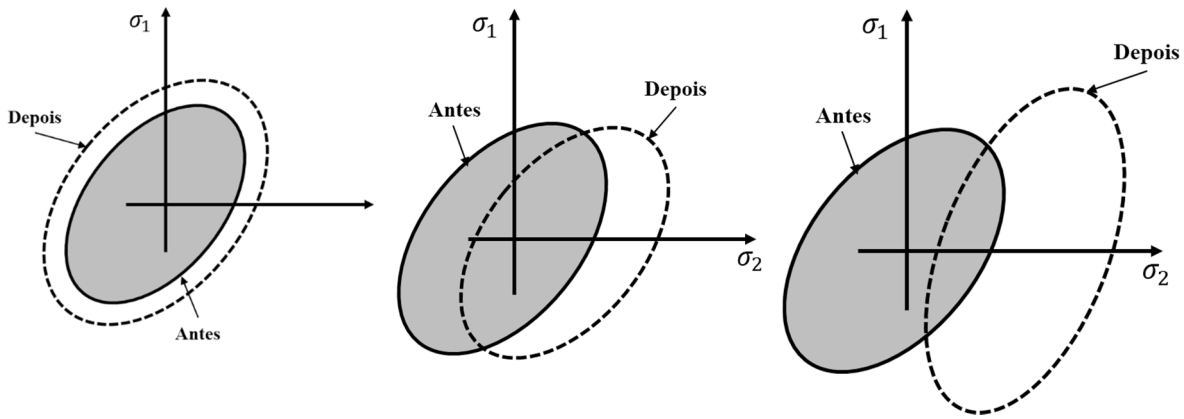
- Modelo cinemático

O modelo cinemático mantém a forma da superfície, porém ocorre uma translação no espaço das tensões como um corpo rígido. Esse modelo tem como objetivo representar o efeito Baüschinger. A sua representação é dada pela Figura 5.6 – b.

- Modelo de endurecimento distorcional

Esse modelo admite a expansão, a translação e a rotação da superfície de escoamento, alterando também a sua forma. A sua representação é dada pela Figura 5.6 – c.

Figura 5.6 Modelos representativos da alteração da superfície de escoamento, adaptado pelo autor (ALVES FILHO, 2012)



a) Modelo Isotrópico b) Modelo Cinemático c) Modelo de Endurecimento Distorcional

5.3 MODELO DE MOHR – COULOMB

Para materiais granulares coesivos, como solos argilosos, rochas e concretos, em seu comportamento mecânico é considerado o efeito do primeiro invariante de tensões principais, a pressão hidrostática, na condição de plastificação do material. Assim, um modelo que considera a dependência linear da função com esse invariante é o modelo de Mohr-Coulomb, conforme dito por Souza Neto *et al.* (2008).

O critério de Mohr-Coulomb assume que os fenômenos de escoamento plástico macroscópico é um resultado dos deslizamentos das partículas do material. Logo, o critério estabelece que o escoamento plástico aconteça quando a combinação da tensão de cisalhamento, τ, e a tensão normal, σ_n, atinge um valor crítico. A expressão mais simples é a função linear representada pela equação (5.10). A representação geométrica do critério de Mohr-Coulomb segue na Figura 5.7.

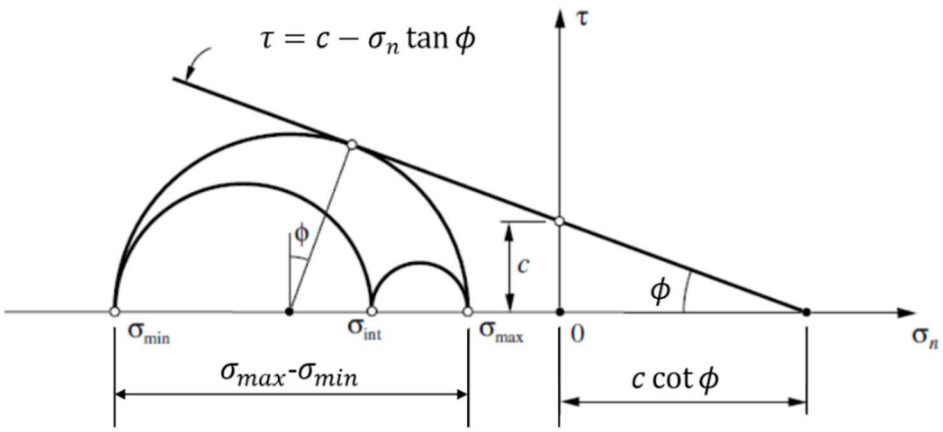
$$\tau = c - \sigma_n \tan\phi \tag{5.10}$$

onde,

c – coesão;

ϕ – é o ângulo interno de atrito do material;

Figura 5.7 – Representação gráfica do critério de Mohr-Coulomb, adaptado pelo autor (SOUZA NETO *et al.*,2008)



Sendo, o vértice localizado no ponto p, no eixo das tensões:

$$p = c\cot\phi \tag{5.11}$$

Associando as tensões principais com a expressão representada pela equação (5.10) e após algumas manipulações matemáticas é possível representar o critério de Mohr-Coulomb em termos das tensões principais:

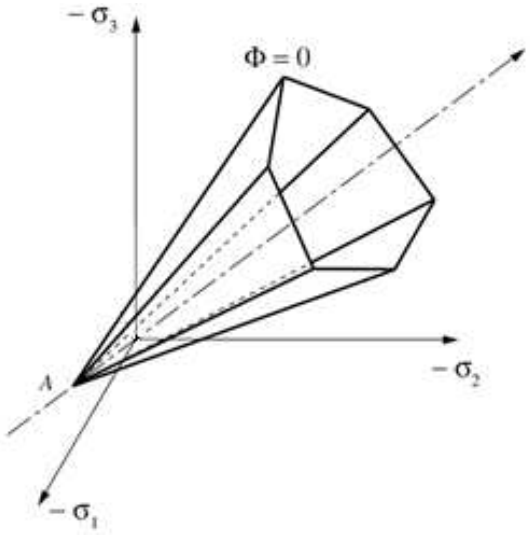
$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} cos\phi = c - \left(\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}\sin\phi\right)\tan\phi \tag{5.12}$$

Rearranjando os termos, a função de plastificação de Mohr-Coulomb é dada por

$$\Phi\left(\sigma, \sigma_y\right) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\sin\phi - 2c\cos\phi \tag{5.13}$$

A representação da superfície de plastificação de Mohr-Coulomb é realizada através de multisuperfícies, definida por seis planos no espaço das tensões principais. Cada plano é dado por uma expressão matemática e, geometricamente, representada um lado da pirâmide de Mohr-Coulomb. A representação gráfica dessa pirâmide é apresentada na Figura 5.8.

Figura 5.8 – Superfície de escoamento no plano principal de tensões (SOUZA NETO *et al*.,2008)



5.3.1 Implementação computacional

O modelo constitutivo de Mohr-Coulomb foi implementado num código computacional desenvolvido para a análise de EVRs de materiais heterogêneos submetidos a um estado de deformação macroscópico No início do carregamento, os incrementos das deformações macroscópicas são impostas, sendo as tensões corrigidas pelo modelo plástico. Com os valores

das tensões, é possível calcular o valor da função de plastificação. Enquanto esse valor for abaixo de zero, o material comporta-se no regime elástico e a superfície de plastificação não é atualizada. Após a função de plastificação atingir um valor positivo, é iniciado um mapeamento para atualizar os valores das tensões e assim, a superfície de plastificação.

A descrição do escoamento plástico das multisuperfícies de Mohr-Coulomb é representada pelas equações (5.7). Para os casos não associativos a descrição segue a equação (5.8). Logo, com as tensões principais ordenadas ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), é possível mapear o escoamento plástico para uma das superfícies do espaço. O mapeamento é feito de quatro distintas formas:

1. O escoamento plástico acontece no plano principal, onde somente um multiplicador plástico deve ser diferente de zero, ou seja, o escoamento plástico acontecerá apenas em um dos planos da pirâmide. O vetor do escoamento para esse caso é reduzido para a equação (5.14):

$$\boldsymbol{N^a} \equiv \boldsymbol{N}^1 = (1 + \sin\psi)e_1 \otimes e_1 - (1 - \sin\psi)e_3 \otimes e_3 \tag{5.14}$$

onde,

$$d\varepsilon_p = d\gamma \boldsymbol{N}^a \tag{5.15}$$

2. O escoamento plástico acontece pela ponta direita, onde somente dois multiplicadores plásticos devem ser diferentes de zero. Neste caso, o escoamento plástico acontece em dos planos da pirâmide. O vetor do escoamento plástico é definido como

$$d\varepsilon_p = d\gamma^a \boldsymbol{N^a} + d\gamma^b \boldsymbol{N^b} \tag{5.16}$$

onde,

$\boldsymbol{N^b}$ é o vetor de escoamento plástico do plano a direita do plano principal. A descrição de N^b é dado por:

$$\boldsymbol{N^b} \equiv \boldsymbol{N^6} = (1 + \sin\psi)e_1 \otimes e_1 - (1 - \sin\psi)e_2 \otimes e_2 \tag{5.17}$$

3. O escoamento plástico acontece pela ponta esquerda. Da mesma forma que o mapeamento anterior, porém o vetor de escoamento plástico na ponta se dá a esquerda do plano principal. O valor de N^b é dado por:

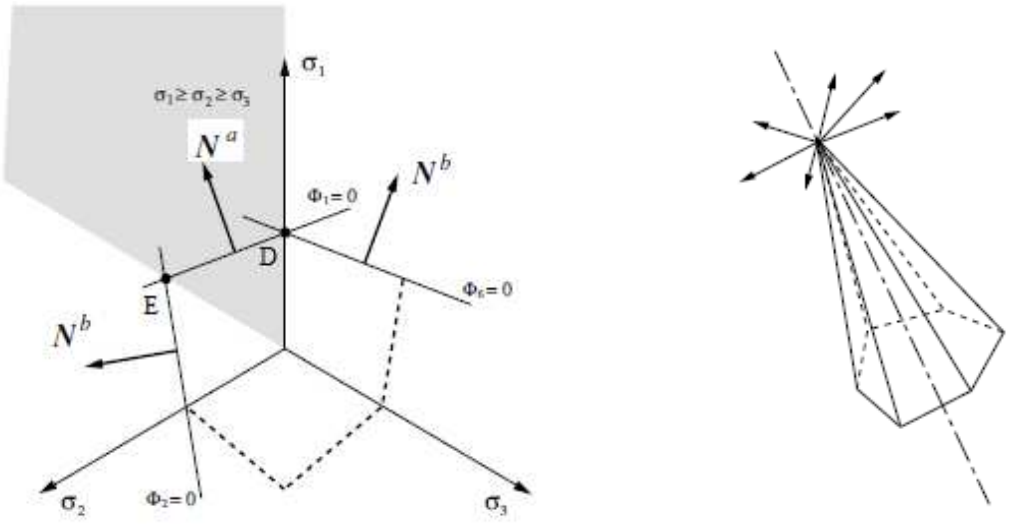
$$\boldsymbol{N^b} \equiv \boldsymbol{N^2} = (1 + \sin\psi)e_2 \otimes e_2 - (1 - \sin\psi)e_3 \otimes e_3 \tag{5.18}$$

4. O escoamento plástico acontece pelo vértice da pirâmide de Mohr-Coulomb. Neste caso, todos os seis multiplicadores plásticos devem ser diferente de zero. O escoamento plástico é dado por:

$$d\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{6} d\gamma^i \boldsymbol{N^i} \tag{5.19}$$

A representação geométrica das formas do mapeamento do escoamento plástico é ilustrado na Figura 5.9.

Figura 5.9 – Regra do Escoamento de Mohr-Coulomb: a) planos e pontas b) vértice, adaptado pelo autor (SOUZA NETO *et al*.,2008)



a) Plano e Pontas b) Vértice

Na implementação, a lei de encruamento é isotrópica e assume que a coesão seja uma função das variáveis internas de encruamento:

$$c = c(\bar{\varepsilon}_p) \tag{5.20}$$

Logo, a evolução da deformação plástica é dada por:

$$d\bar{\varepsilon}_p = 2\cos\phi d\gamma \qquad \text{para escoamento no plano principal} \tag{5.21}$$

$d\bar{\varepsilon}_p = 2\cos\phi(d\gamma^a + d\gamma^b)$ para escoamento nas pontas

$d\bar{\varepsilon}_p = 2\cos\phi \sum_{i=1}^{6} d\gamma^i$ para escoamento na vértice

O processo da plasticidade é feito através do mapeamento, inicialmente feito pelas tensões, chamadas de tensões de tentativa (σ^{trial}). Essas tensões nos fornece uma superfície de plastificação. Se os critérios de validação dos resultados forem negativos, ou seja, se não cumprirem com as validações dos critérios de elasticidade ou plasticidade, os valores de tentativa passam por um processo iterativo de Newton-Raphson, para a solução da não linearidade. Somente após o processo ser validado, as tensões são admitidas. A equação para a superfície de plastificação é dada por:

$$\Phi^{trial} \equiv \left(\sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial}\right) + \sigma_1^{trial} + \sigma_3^{trial}) \sin\phi - 2c\cos\phi \leq 0 \quad (5.22)$$

Se o valor da equação (5.22) for menor que zero, o comportamento do material é elástico e a atualização das tensões não é necessária ($\Phi = \Phi^{trial}$). Mas se for maior do que zero é necessário fazer uma atualização das tensões conforme equação:

$$\sigma = \sigma^{trial} - D_e : \Delta\varepsilon_p \quad (5.23)$$

Para a discretização não associativa do modelo de Mohr-Coulomb, o escoamento plástico segue a equação (5.19), resultando na equação:

$$\sigma = \sigma^{trial} - D_e : \sum_{i=1}^{6} d\gamma^i \boldsymbol{N^i} \quad (5.24)$$

Para um modelo isotrópico, as tensões podem ser atualizadas da forma equivalente de acordo com as tensões principais:

$$\sigma_j = \sigma_j^{trial} - \sum_{i=1}^{6} d\gamma^i \left(2G\left[\boldsymbol{N_d^i}\right]_j - K\boldsymbol{N_v^i}\right) \quad \text{sendo j =1, 2 ,3} \quad (5.25)$$

onde,

N_v^i – componente volumétrica do vetor de escoamento plástico de *N;*

A estratégia para selecionar o mapeamento mais apropriado é seguida por essa ordem:

- Aplica o mapeamento no plano principal;
- Verifica a validade do vetor de escoamento plástico. Analisam-se as tensões principais atualizadas que permanecem no mesmo plano de tensões antes da atualização;
- Se não for válido, aplica o mapeamento a direita ou a esquerda nas pontas;
- Verifica a validade do mapeamento pelas pontas, de maneira análoga a verificação do mapeamento no plano principal;
- Se não for válido, aplica o mapeamento no vértice da pirâmide;

5.3.1.1 Mapeamento do plano principal

O mapeamento pelo plano principal segue através da equação (5.25), que define a atualização das tensões principais, considerando o vetor de escoamento plástico definido na equação (5.14). A atualização das tensões é dada pelas equações:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_1^{trial} - d\gamma\left[2G\left(1+\frac{1}{3}\sin\psi\right)+2K\sin\psi\right] \\
\sigma_2 &= \sigma_2^{trial} + d\gamma\left(\frac{4}{3}G-2K\right)\sin\psi \\
\sigma_3 &= \sigma_3^{trial} + d\gamma\left[2G\left(1-\frac{1}{3}\sin\psi\right)-2K\sin\psi\right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

O multiplicador plástico, $d\gamma$, é obtido utilizando a equação (5.26):

$$\Phi \equiv \left(\sigma_1^{trial}-\sigma_3^{trial}\right)+\sigma_1^{trial}+\sigma_3^{trial})\sin\phi - 2c(\bar{\varepsilon_p}+\Delta\bar{\varepsilon_p})\cos\phi - ad\gamma = 0 \tag{5.27}$$

onde,

$$a = 4G\left(1+\frac{1}{3}\sin\psi\sin\phi\right)+4K\sin\psi\sin\phi \tag{5.28}$$

$\Delta\bar{\varepsilon_p}$ – função linear em função de dγ, dada pela equação:

$$\Delta\bar{\varepsilon_p} = 2\cos\phi d\gamma \tag{5.29}$$

5.3.1.2 Mapeamento pelas pontas

Antes de iniciar o mapeamento pelas pontas, é necessário determinar qual das pontas (direita ou esquerda) deve ser mapeada. A determinação é baseada na geometria da pirâmide de Mohr-Coulomb.

Souza Neto *et al.* (2008) descreve a equação para encontrar a ponta para o mapeamento mais apropriado. Se o valor de S for maior que zero, o mapeamento da ponta é feito pela ponta a direita. Mas se o mapeamento for menor, o mapeamento é feito pela ponta a esquerda.

$$S = (1 - \sin\psi)\sigma_1^{trial} - 2G\sigma_2^{trial} + (1 + \sin\psi)\sigma_3^{trial} \tag{5.30}$$

O mapeamento das tensões principais pela ponta direita se dá através da equação (5.25), considerando o incremento plástico da equação (5.16), conforme mostrado nas equações:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_1^{trial} - \left[2G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\psi\right) + 2K\sin\psi\right](d\gamma^a + d\gamma^b) \\
\sigma_2 &= \sigma_2^{trial} + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\psi d\gamma^a + \left[2G\left(1 - \frac{1}{3}\sin\psi\right) - 2K\sin\psi\right]d\gamma^b \\
\sigma_3 &= \sigma_3^{trial} + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\psi d\gamma^b + \left[2G\left(1 - \frac{1}{3}\sin\psi\right) - 2K\sin\psi\right]d\gamma^a
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Os multiplicadores plástico, dγ^a e dγ^b, são obtidos utilizando a equação (5.26) e resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\Phi^a \equiv \left(\sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial}\right) + \sigma_1^{trial} + \sigma_3^{trial})\sin\phi - 2c(\bar{\varepsilon_p} \\
+ \Delta\bar{\varepsilon_p})\cos\phi - ad\gamma^a - bd\gamma^b = 0 \\
\Phi^b \equiv \left(\sigma_1^{trial} - \sigma_2^{trial}\right) + \sigma_1^{trial} + \sigma_2^{trial})\sin\phi \\
- 2c\,(\bar{\varepsilon_p} + \Delta\bar{\varepsilon_p})\cos\phi - bd\gamma^a - ad\gamma^b = 0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

onde,

$$b = 2G\left(1 + \sin\phi + \sin\psi - \frac{1}{3}\sin\psi\sin\phi\right) + 4K\sin\psi\sin\phi \tag{5.33}$$

O valor de a é o mesmo da equação (5.28). O valor de $\Delta\bar{\varepsilon_p}$ é dado pela equação:

$$\Delta\bar{\varepsilon_p} = 2\cos\phi(d\gamma^a + d\gamma^b) \tag{5.34}$$

O mapeamento pela ponta esquerda se dá de forma análoga ao da ponta direita. A diferença está somente no tensor N^b da equação (5.18). As suas equações são descritas da forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_1^{trial} + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\psi\Delta\gamma^b - \left[2G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\psi\right) + 2K\sin\psi\right]d\gamma^a \\
\sigma_2 &= \sigma_2^{trial} + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right)\sin\psi\Delta\gamma^a - \left[2G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\psi\right) + 2K\sin\psi\right]d\gamma^b \\
\sigma_3 &= \sigma_3^{trial} + \left[2G\left(1 - \frac{1}{3}\sin\psi\right) - 2K\sin\psi\right](d\gamma^a + d\gamma^b)
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Os multiplicadores plástico, $d\gamma^a$ e dγ^b, são obtidos utilizando a equação (5.26) e resolvendo as equações:

$$\begin{aligned}
\Phi^a \equiv \left(\sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial}\right) + \sigma_1^{trial} + \sigma_3^{trial})\sin\phi \\
- 2c\,(\bar{\varepsilon_p} + \Delta\bar{\varepsilon_p})\cos\phi - ad\gamma^a - bd\gamma^b = 0 \\
\Phi^b \equiv \left(\sigma_2^{trial} - \sigma_3^{trial}\right) + \sigma_2^{trial} + \sigma_3^{trial})\sin\phi \\
- 2c\,(\bar{\varepsilon_p} + \Delta\bar{\varepsilon_p})\cos\phi - bd\gamma^a - ad\gamma^b = 0
\end{aligned} \tag{5.36}$$

onde,

$$b = 2G\left(1 - \sin\phi - \sin\psi - \frac{1}{3}\sin\psi\sin\phi\right) + 4K\sin\psi\sin\phi \tag{5.37}$$

5.3.1.3 Mapeamento pelo vértice

O mapeamento pelo vértice é dado pelo alongamento do ponto p, no eixo das tensões hidrostáticas da pirâmide, dado pela equação (5.11). A atualização desse valor é dada pela equação:

$$p = p^{trial} - K\Delta\varepsilon_p^v \tag{5.38}$$

As equações (5.11) e (5.38) resultam em:

$$c\left(\bar{\varepsilon_p} + \Delta\bar{\varepsilon_p}\right)\cot\phi - p^{trial} + K\Delta\varepsilon_p^v = 0 \tag{5.39}$$

onde,

$$\Delta\bar{\varepsilon_p} = \frac{\cos\phi}{\sin\psi}\Delta\varepsilon_p^v \tag{5.40}$$

Assim que a solução é encontrada, a atualização das tensões é dada por:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p \tag{5.41}$$

5.3.2 Estado plano de tensão

As formulações propostas nesse capítulo são válidas para os casos em que envolvam o espaço tridimensional. Para o Estado Plano de Tensões (EPT), Souza Neto *et al* (2008) propõem algumas simplificações.

Inicialmente, o EPT assume uma análise de materiais com uma das dimensões (geralmente a espessura) muito menor que as outras e o carregamento sendo perpendicular ao eixo dessa dimensão. A utilização dessa formulação implica que:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \tag{5.42}$$

Como a espessura é pequena, considera-se que as componentes da equação (5.42) se anulam no domínio. Mas a deformação ε_{33} ocorre devido ao efeito de Poisson, onde essa deformação se torna dependente das outras deformações, ε_{11} e ε_{22}:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \tag{5.43}$$

A estratégia para a aproximação ao estado plano de tensões é utilizar as equações constitutivas do estado plano de tensões, restringindo as tensões nos pontos Gauss.

Como as tensões σ_{13} e σ_{23} desaparecem na formulação, é adicionada na implementação a tensão σ_{33}, em que o valor dela é igual a zero. Porém ela está relacionada com a deformação ε_{33}, que depende das outras de outras deformações, conforme a equação (5.43).

Dada uma deformação elástica inicial, $(\varepsilon_e)_{33}$, aplica-se o algoritmo de integração axisimétrico e obtém-se a tensão σ_{33}. Caso a convergência seja atingida ($|\sigma_{33}| \leq \epsilon_{tol}$), a atualização da tensão é válida. Mas, caso não seja é necessário atualizar o valor da deformação $(\varepsilon_e)_{33}$. A

correção é feita através do procedimento de Newton-Raphson e o valor da deformação é corrigido de acordo com a matriz tangente consistente, D, corrigindo assim as tensões principais.

CAPÍTULO 6
APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Para verificar a viabilidade de emprego da formulação proposta, são realizadas simulações numéricas baseadas no comportamento da microestrutura do concreto. Inicialmente, foram gerados EVRs que possuem dimensões L x L (mm) e espessura na ordem de L/10 (mm) com inclusões dispostas numa matriz, evidenciando a distinção de dois materiais nos EVRs, simulando a estrutura bifásica do concreto. Tal EVR é composto por elementos finitos triangulares e elementos de fratura e contato.

A matriz foi considerada como meio elastoplástico seguindo o critério de plastificação de Mohr-Coulomb com os seguintes parâmetros. Para o do módulo de elasticidade da pasta de cimento, Mehta e Monteiro (2008) dizem que o valor fica compreendido entre 7 e 27 GPa. Ramesh *et al.* (1996) e Yang (1988) utilizaram em suas análises o valor de 20 GPa, o que fica dentro da faixa. Para as análises dos exemplos deste trabalho, foi utilizado esse mesmo valor (20 GPa). Para o coeficiente de Poisson, Brooks (2014) diz que para a pasta cimentícia o valor varia entre 0,20-0,23. Foi considerado o valor de 0,20, o mesmo valor utilizado por Oliver *et al.* (2014). Para os valores dos ângulos de atrito, autores como Nielsen e Hoang (2011), adotam o ângulo de atrito igual a 0º, porém, num estudo mais recente de Assad *et al.* (2014), encontram-se valores do ângulo de atrito entre 2º e 7,4º. Levando em consideração esse dado, foi considerado um valor de ϕ = 5º. Para ângulo de dilatância, foi utilizada a regra associativa, $\phi = \Psi$. Para a lei de encruamento, foram utilizados dois pontos, com valores iguais a 0,5 MPa no primeiro ponto e 40 MPa no segundo.

Os agregados são considerados como meios elásticos com módulo de elasticidade igual 35 GPa, conforme dito por Mehta e Monteiro (2008), para concretos com porosidade média (20-50 GPa). Para o valor do coeficiente de Poisson foi considerado um valor igual a 0,35.

Na região de interface matriz/agregado, nos casos em que foi avaliado o fraturamento, foram inseridos elementos de contato e fratura coesiva. Os parâmetros para esses elementos foram: λ_p = 200000, β = 0,707, σ_c=0.09 MPa. O valor da abertura da fratura, δ_c, foi utilizado igual a 0,0568mm. Esses valores foram referenciados por Ortiz (1999), Oliver *et al.* (2014), Pituba e Souza Neto (2015).

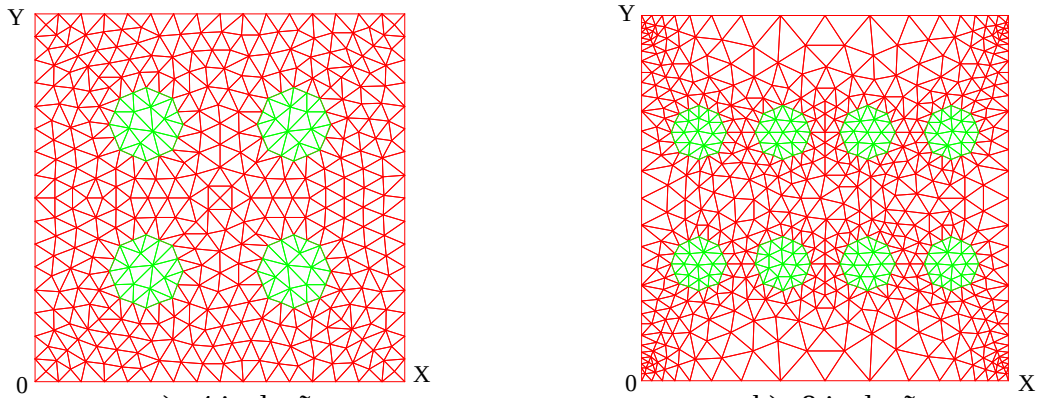
Esses valores paramétricos são utilizados em todos os exemplos, assim como o modelo com condição de contorno periódica, exceto quando especificado em contrário.

6.1 INFLUÊNCIA DO FRATURAMENTO NA ZONA DE TRANSIÇÃO

Para a análise do fraturamento na Zona de Transição, são analisados EVRs com 4 e 8 inclusões de formatos circulares, distribuídos na matriz e com diâmetro de 2 mm (no caso de 4 inclusões) e 1,5 mm (nos casos com 8). A consideração de utilizar os agregados na forma circular foi mostrada por Kim e Abu Al Rub (2011), devido à facilidade de implementação e análise computacional em relação a outras formas.

A Figura 6.1 mostra os EVRs com 4 e 8. A fração volumétrica dos agregados do EVR de 4 inclusões é de 12% com um total de 798 elementos finitos e 64 elementos finitos de contato e fratura coesiva quando incluído. A do EVR com 8 inclusões representa 14% da fração volumétrica com um total de 1184 elementos finitos e 128 elementos finitos de contato e fratura coesiva.

Figura 6.1 – Elemento de Volume Representativo



a) 4 inclusões b) 8 inclusões

Foram realizadas duas análises, a primeira onde a interface matriz/agregado foi modelada com elementos de fratura. Em outra, foi considerada uma perfeita aderência entre agregados e matriz, sem a inclusão de elementos de fratura.

Os EVRs foram submetidos a uma deformação macroscópica arbitrária total de $\varepsilon_x = 0{,}0001$ e $\varepsilon_y = -0{,}00001$ subdivididas em 30 incrementos, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo

(γ_{xy} = 0,0000001). Com as deformações aplicadas, obtêm-se os valores das tensões homogeneizadas para o EVR. Os gráficos das Figuras 6.2 - 6.3 relacionam as tensões homogeneizadas na direção *x* com a deformação macroscópica no mesmo eixo. Nota-se que a resposta do carregamento na parte elástica é igual quando se considerada o fraturamento ou a perfeita aderência. Contudo, após os processos dissipativos de plasticidade e de fratura, quando for o caso, as respostas divergem. A consideração do fraturamento na Zona de Transição evidência uma importante contribuição no comportamento não-linear do material em sua microestrutura. Assim, o modelo de fratura diminui a rigidez do EVR após atingir a tensão de escoamento. As respostas dos dois EVRs são similares devido ao valor bastante próximo da fração volumétrica de inclusões.

Figura 6.2 – Tensão Homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR com 4 inclusões

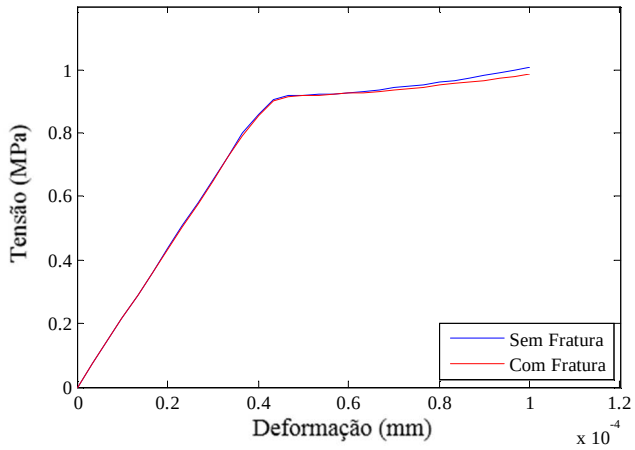
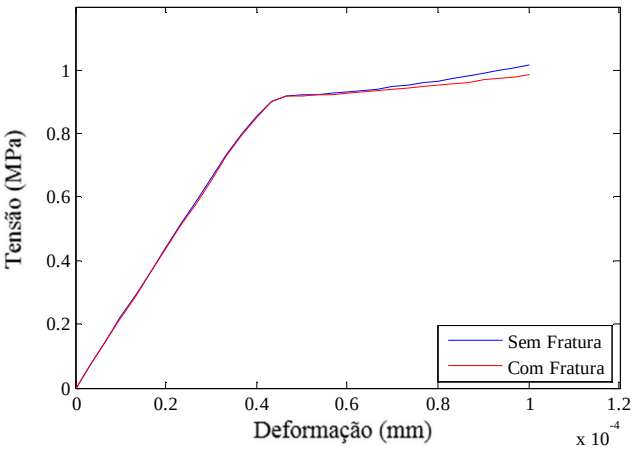


Figura 6.3 – Tensão Homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR com 8 inclusões



Para capturar detalhadamente o efeito que a fratura proporciona ao EVR, foi implementado no código computacional a relação tensão x deformação na Figura 6.2. Para o EVR com 4

inclusões sem fratura, o gráfico é mostrado na Figura 6.4 e o EVR com 4 inclusões e elementos de fratura é mostrado na Figura 6.5.

Figura 6.4 – Gráfico de cores do EVR com 4 inclusões sem fratura para a distribuição de tensão (σ) na direção *x*

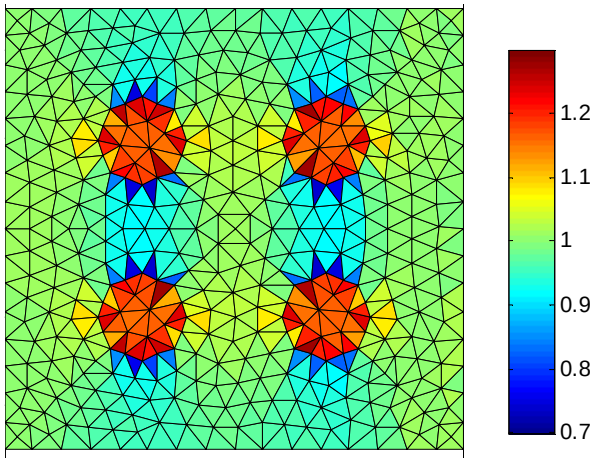
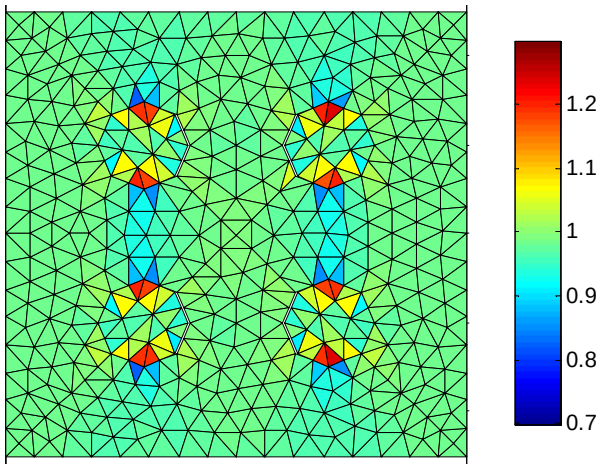


Figura 6.5 – Gráfico de cores do EVR com 4 inclusões com fratura para a distribuição de tensão (σ) na direção *x*



Na Figura 6.4 nota-se que a transmissão das tensões são continuas e impacta os agregados de maneira direta. Assim, os agregados, por apresentar rigidez maior que a pasta de cimento, impacta a resposta homogeneizada na Figura 6.2 dando mais rigidez.

Já na Figura 6.5, devido aos efeitos dissipativos dos elementos de fratura, as tensões nos agregados são menores por causa das transmissão das tensões nas fraturas que ocorrem de forma coesiva. Assim, o impacto que a rigidez dos agregados exerce na resposta homogeneizada é menor conforme mostrado na Figura 6.2.

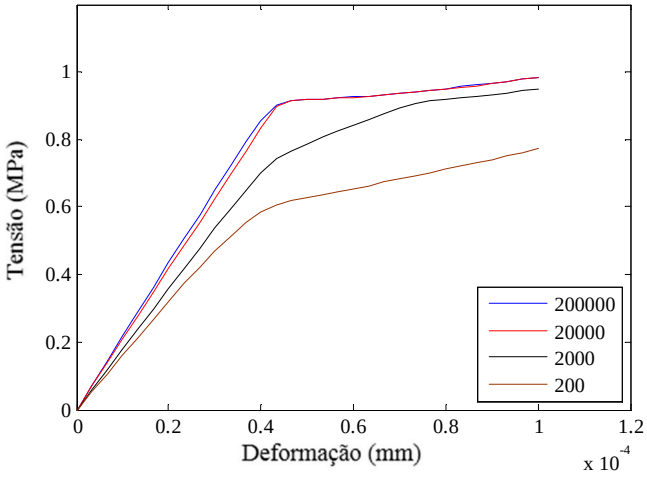
6.2 INFLUÊNCIA PARAMÉTRICA NA RESPOSTA HOMOGENEIZADA DO EVR

Nesse tópico é realizado a análise dos vários parâmetros e de que forma cada parâmetro influência nas respostas homogeneizadas.

6.2.1 Modelo de fratura coesiva

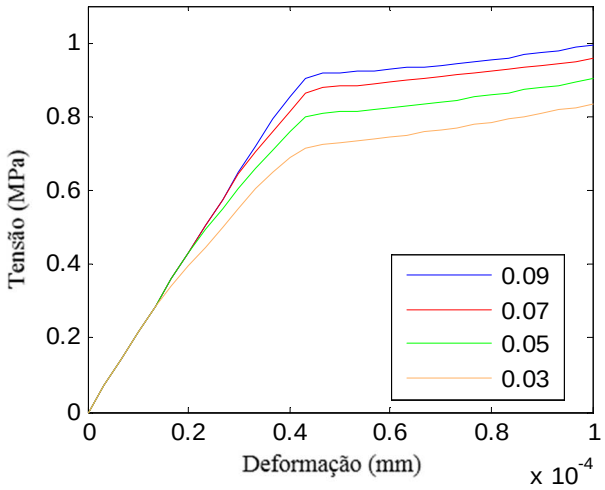
Neste exemplo foi verificada a influência paramétrica do modelo de fratura na resposta homogeneizada do EVR. Fez-se um estudo no primeiro EVR apresentado (Figura 6.1 - a). Na Figura 6.6 é mostrada a influência do fator de penalidade (λ_p). É possível analisar que, conforme o valor do fator de penalidade diminui, menos tensão é necessária para que a fratura se inicie, ou seja, a rigidez entre as faces das fraturas permanece contribuindo com o fechamento da mesma até se atingir um limite maior de tensão coesiva. Valor muito baixo do fator de penalidade influencia inclusive na resposta da região elástica.

Figura 6.6 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (λ_p)



Outro parâmetro do modelo de fratura coesiva que tem bastante influência na resposta é o valor da máxima tensão de tração normal coesiva. A Figura 6.7 mostra o gráfico de Tensão homogeneizada x Deformação variando o valor da máxima tensão normal coesiva (σ_c). Quanto menor o valor desse parâmetro, menor é a capacidade de transmissão de tensão dos elementos de fratura, resultando assim numa rigidez menor e no início mais cedo do processo de fraturamento.

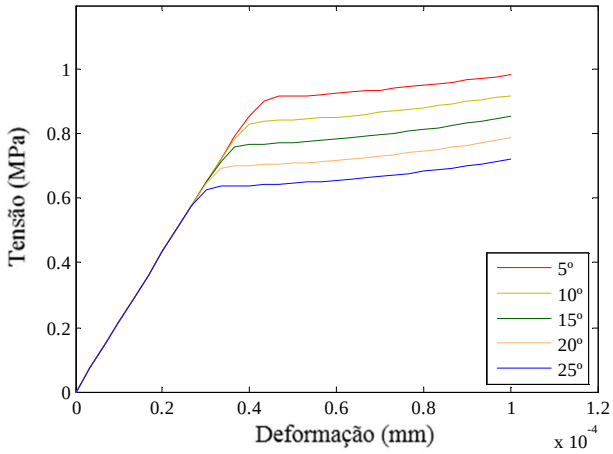
Figura 6.7 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (σ_c)



6.2.2 Modelo de plasticidade

Neste exemplo, foi avaliado o impacto que as variáveis do modelo de plasticidade tem resposta homogeneizada do EVR. Inicialmente, fez-se uma análise no EVR da Figura 6.1 – a, avaliando o impacto do ângulo de atrito (ϕ) na resposta homogeneizada. Os EVRs foram submetidos a uma deformação macroscópica arbitrária total de ε_x = 0,0001 e ε_y = -0,00001 subdivididas em 30 incrementos, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo (γ_{xy} = 0,0000001). Para a análise, foi utilizado o EVR com os elementos de fraturas inclusos, variando em cada análise apenas o valor do ângulo de atrito.

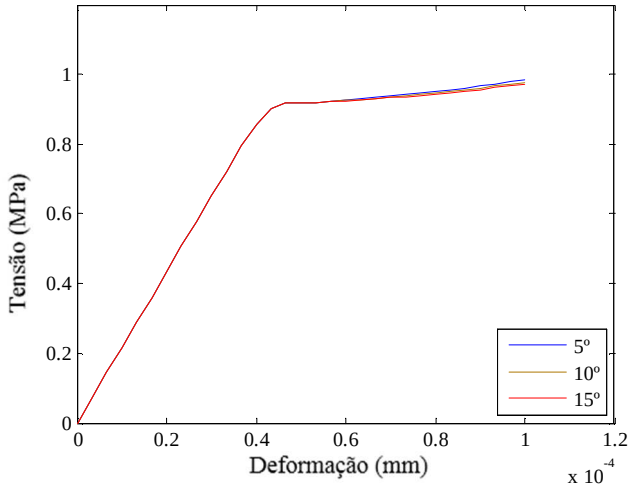
Figura 6.8 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (ϕ)



É possível notar que na Figura 6.13 o ângulo de atrito influencia quando o escoamento plástico é iniciado. Isso é devido à superfície de plastificação, que segue a equação (5.13), em que esse valor é utilizado nos cálculos.

Outro parâmetro utilizado no modelo de plasticidade é o valor do ângulo de dilatância (ψ). Fez-se uma análise do EVR da Figura 6.1 – a, avaliando a resposta homogeneizada. Os EVRs foram submetidos a uma deformação macroscópica arbitrária total de ε_x = 0,0001 e ε_y = -0,00001 subdivididas em 30 incrementos, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo (γ_{xy} = 0,0000001). Para a análise, foi utilizado o EVR com os elementos de fraturas, analisando a influência do ângulo de dilatância.

Figura 6.9 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* variando o parâmetros (ψ)



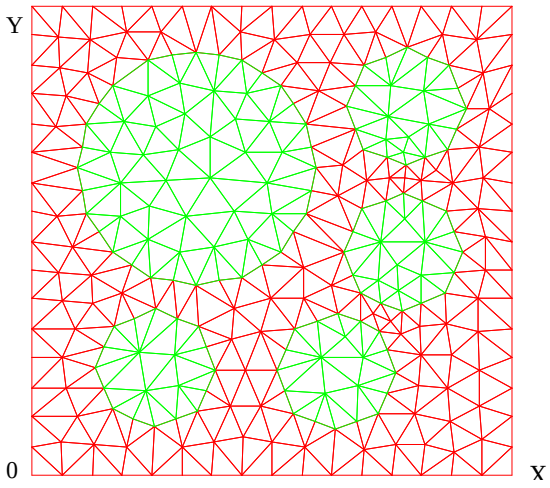
Na Figura 6.9 é possível destacar que o ângulo de dilatância influencia na plastificação, após o EVR atingir o escoamento. Apesar do resultado não ter mostrado grande impacto em comparação a outros exemplos, é válido lembrar que as análises são realizadas ao nível da microestrutura do material, onde a repercussão dessa influência é menor, porém numa análise em várias escalas, isso pode influenciar a resposta macromecânica de um sólido.

6.2.3 Análise da influência das condições de contorno da formulação Multiescala

Na formulação em Multiescala, a resposta homogeneizada é influenciada pelas condições de contorno conforme o tópico 3.1.2.4. Para essa análise foi sugerido um novo EVR com a distribuição de agregados de várias dimensões e distribuição aleatória. Utilizou-se o EVR

apresentado por Nguyen *et al.* (2010), mostrado na Figura 6.10. A utilização desse EVR deve-se a não apresentar simetria em nenhum eixo. A fração volumétrica desse EVR é de 35,6%, com 520 elementos finitos e, quando incluídos, 95 elementos de fraturas ao redor dos agregados.

Figura 6.10 – Elemento de Volume Representativo de Nguyen *et al.* (2010) (NGUYEN *et al.*, 2010)



Uma análise no EVR da Figura 6.1-a, comparando as duas condições de contorno impostas ao EVR (linear e periódica) é mostrada na Figura 6.11. Em seguida, é realizada uma análise de maneira similar ao EVR de Nguyen *et al.* (2010), mostrada na Figura 6.12. A deformação total imposta aos EVRs foi de ε_x = 0,00007 e ε_y = -0,000007, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo (γ_{xy} = 0,0000001).

Figura 6.11 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* do EVR de 4 inclusões

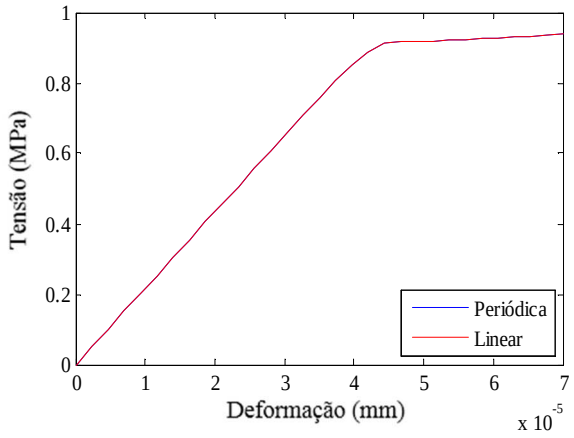
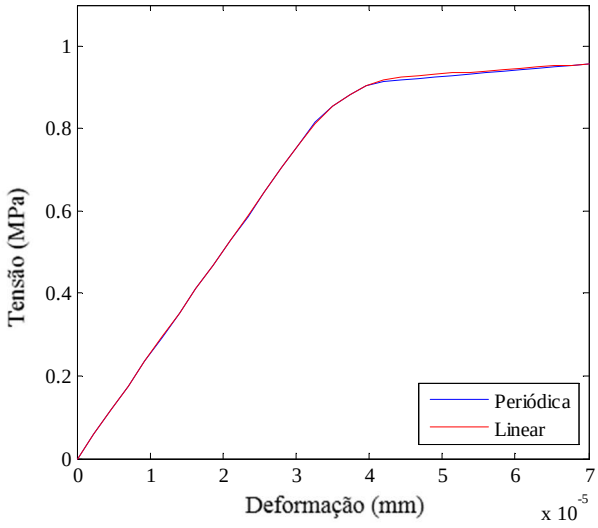


Figura 6.12 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* do EVR de Nguyen *et al.* (2010)



O uso de condições de contorno linear/periódica não influenciou na resposta da Figura 6.11, devido à disposição simétrica dos agregados no EVR. Mas quando o EVR não apresenta nenhuma forma de simetria, como mostrado na Figura 6.12, a resposta homogeneizada apresenta variação após as fraturas iniciarem. Essa variação é pequena, mas acredita-se que por causa do caráter microscópico da análise, possa ter um impacto maior numa análise Multiescala.

6.3 ANISOTROPIA DO EVR

Neste item, foi verificado o comportamento mecânico anisotrópico do EVR, mesmo utilizando modelos constitutivos simples em formulação. Foram realizados estudos nos EVRs da Figura 6.1. Primeiro, os EVRs foram submetidos a uma deformação macroscópica arbitrária total de ε_x = 0,0001 e ε_y = -0,00001 subdivididas em 30 incrementos, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo (γ_{xy} = 0,0000001). Posteriormente, são feitos incrementos em outra configuração, ε_y = 0,0001 e ε_x = -0,00001, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo (γ_{xy} = 0,0000001). Na Figura 6.13 é apresentada a modelagem no EVR com 4 inclusões e na Figura 6.14 é apresentada no EVR com 8 inclusões, mostrados em termos de Tensão homogeneizada x Deformações.

Figura 6.13 – Tensão homogeneizada (σ) x Deformação do EVR com 4 inclusões

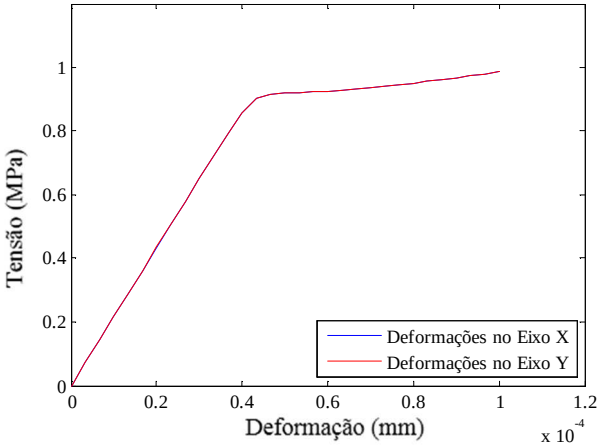
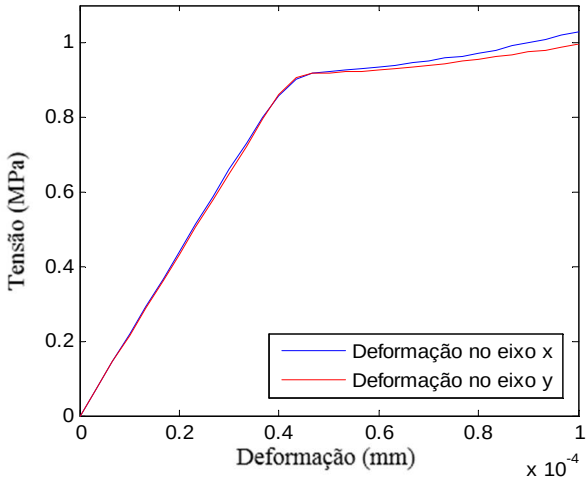


Figura 6.14 – Tensão homogeneizada (σ) x Deformação (ε) do EVR com 8 inclusões



Na Figura 6.13, o comportamento em diferentes direções foi o mesmo. Isso acontece por se tratar de um EVR com simetria nos eixos *x* e *y*. Mas na Figura 6.14, o comportamento em diferentes direções apresenta diferenças significativas no comportamento quando o processo de fraturamento é ativado. Isso se deve ao posicionamento das inclusões no EVR que proporciona uma geometria não simétrica. Portanto, a geometria das inclusões e o processo de fraturamento das interfaces levam à captura de um fenômeno complexo macroscópico com a utilização de modelos simples aplicados na mesoescala do material.

6.4 RESPOSTAS HOMOGENEIZADAS EM TRAÇÃO E COMPRESSÃO

Nesse exemplo, foi avaliada qual a influência do processo de fraturamento da Zona de Transição em regimes predominantes de tração e de compressão. Utilizando o EVR de Nguyen e os parâmetros considerados em exemplos anteriores, a primeira análise foi realizada no eixo *x*, com os valores de deformações macroscópicas iguais a ε_x = 0,0001 e ε_y = -0,00001, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo (γ_{xy} = 0,0000001). Posteriormente, no mesmo eixo foi realizada uma segunda análise considerando ao invés de tração, um estado predominante de compressão de mesma grandeza (ε_x = -0,0001, ε_y = 0,00001 e γ_{xy} = 0,0000001). Com os valores de tensões homogeneizadas na direção x e deformações impostas na direção *x*, são produzidos os gráficos das Figura 6.15 e 6.16.

Figura 6.15 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Nguyen sob o regime de tração

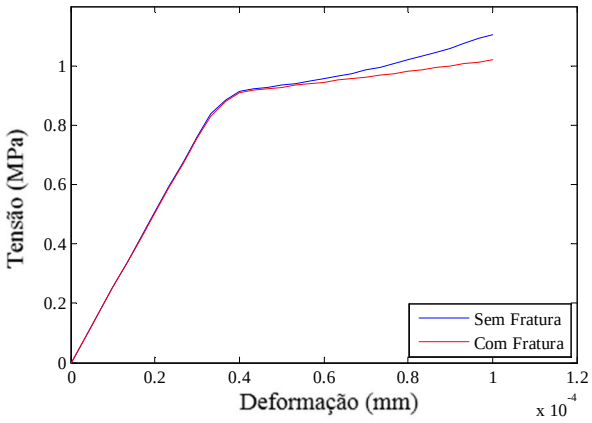
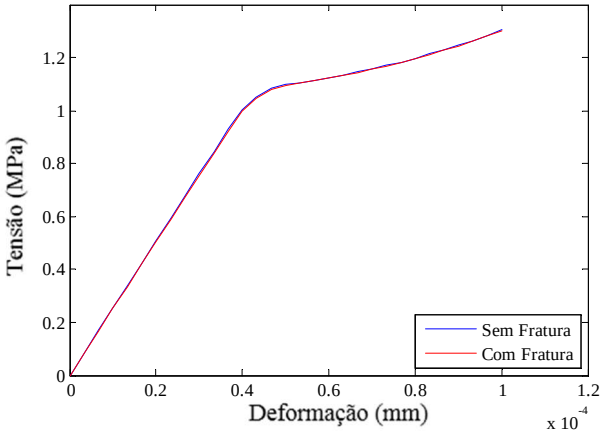


Figura 6.16 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação (ε) na direção *x* do EVR de Nguyen sob o regime de compressão

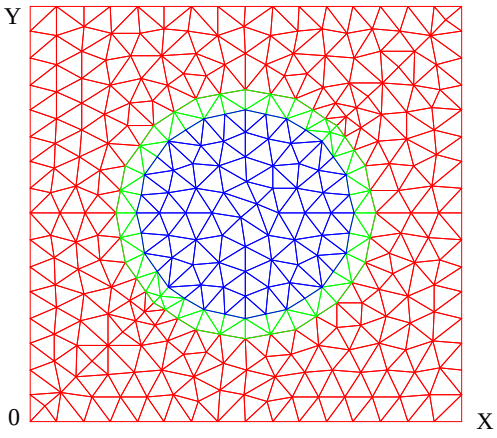


Na Figura 6.15 é possível ver que o processo de fraturamento atua de forma significante no EVR em regime predominante de tração, influenciando na rigidez e diminuindo a sua resistência. Já na Figura 6.16, por se tratar de um EVR sob o regime predominante de compressão, o processo de fraturamento não tem influência significativa, isso porque os elementos de fratura inseridos têm a perda de transmissão conforme o valor da tensão de tração coesiva torna-se significativo, o que não acontece em muitos elementos por estar no regime de predominante de compressão. Os sinais dos valores de tensão e deformação na Figura 6.16 foram invertidos intencionalmente para melhor visualização.

6.5 ZONA DE TRANSIÇÃO DO CONCRETO

Para modelar a Zona de Transição do concreto, alguns autores consideraram a mesma como uma região que suporta menos tensão localizada ao redor dos agregados com um módulo de elasticidade menor que o utilizado na pasta de cimento. Autores como Ramesh *et al.* (1996) e Yang (1998) consideraram em suas pesquisas que o valor do módulo de elasticidade da Zona de Transição fosse um valor porcentual da matriz. Nesse exemplo, um novo EVR com apenas uma inclusão central foi utilizado para essa análise, conforme a Figura 6.17. A fração volumétrica de agregados desse EVR é de 19,6%. Para o EVR sem a faixa da Zona de Transição, a quantidade de elementos finitos é de 612 elementos finitos e 36 elementos finitos de contato e fratura quando. Para o EVR com faixa da Zona de Transição e sem elementos de fratura, tem-se 612 elementos finitos.

Figura 6.17 – Elemento de Volume Representativo com 1 inclusão e Zona de Transição ao redor

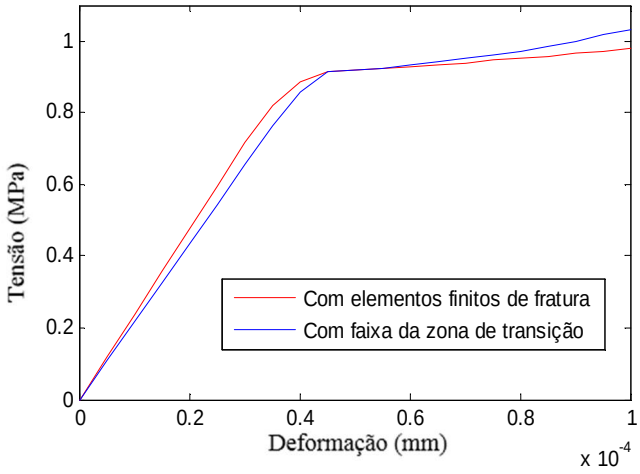


Analisou-se esse EVR, com uma faixa em elementos finitos que representa a Zona de Transição do concreto e comparou-se o resultado com outro EVR sem essa faixa, mas com a inclusão de

elementos de fratura. Foi considerado para a espessura da faixa de transição o valor de 40 μm, conforme Mehta e Monteiro (2008) onde diz que o tamanho da Zona de Transição compreende numa faixa de 20 até 50 μm.

São utilizados os mesmos parâmetros de exemplos anteriores e incrementos de deformação macroscópicas totais iguais a ε_x = 0,0001 e ε_y = -0,00001, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo (γ_{xy} = 0,0000001). Na região em verde da Figura 6.17 foi utilizado um módulo de elasticidade igual a 50% do valor da matriz, seguindo o preconizado pelos autores citados no início deste item. Na Figura 6.18 são apresentados os resultados de Tensão homogeneizada na direção *x* e Deformação macroscópica imposta na direção *x*.

Figura 6.18 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de 1 inclusão



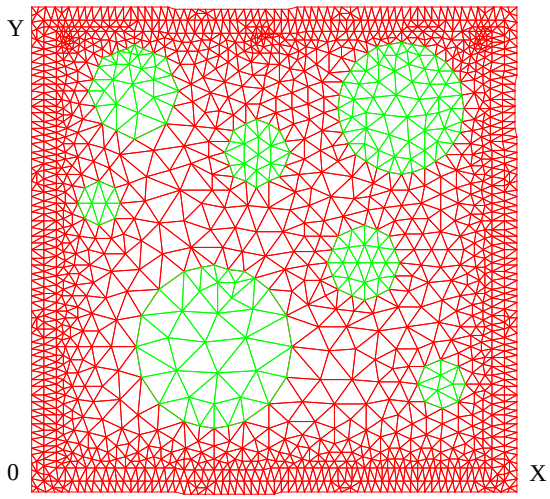
Pode-se perceber que para o modelo com a faixa da Zona de Transição, inicialmente o EVR apresenta uma rigidez menor no regime elástico quando comparada com o modelo sem a faixa e com os elementos de fratura. Porém, conforme o carregamento continua, após a plastificação, o modelo de fratura se torna menos rígido. Por causa dos elementos de fratura, a certo nível de carregamento, que enfraquece bastante a transmissão de forças impactando na sua rigidez, o que não acontece no modelo com a faixa da Zona de Transição.

6.6 ELEMENTOS DE FRATURAS NA MATRIZ

Nesse exemplo, foi avaliada a influência da inclusão de elementos de fraturas no interior da pasta de cimento. Para isso, um novo EVR foi utilizado onde o trajeto de fratura dentro da pasta já é conhecido. Utilizou-se o EVR de Oliver *et al.* (2014), mostrado na Figura 6.19. A fração

volumétrica dos agregados desse EVR é de 22,5%, com 3002 elementos finitos no total. Para os elementos de fratura, têm-se 120 elementos finitos ao redor dos agregados e, quando incluído, 139 elementos finitos no interior da matriz.

Figura 6.19 – Elemento de Volume Representativo de Oliver *et al*.(2014)



Foi realizada uma análise onde não foi incluído nenhum elemento de fratura. Posteriormente incluíram-se elementos de fraturas nas zonas de transição ao redor dos agregados e por fim, elementos de fraturas ligando os agregados em um caminho pré-determinado, segundo Oliver *et al*. (2014). Para os valores dos módulos de elasticidade e dos coeficientes de Poisson dos agregados e da matriz, foram utilizados os valores especificado por Oliver *et al.* (2014) do material chamado concreto regular. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson para os agregados são E = 100 GPa e ν = 0,2. Para a matriz segue os valores já utilizados em exemplos anteriores, E = 20 GPa e ν = 0,2. Para valores de deformações macroscópicas totais iguais a ε_x = 0,00007 e ε_y = -0,000007 realizou-se uma simulação inicialmente para estados predominantes em tração e posteriormente em compressão, conforme mostrado no gráfico de Tensão x Deformação nas Figura 6.20 e Figura 6.21.

Figura 6.20 – Tensão Homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) sob o regime de Tração

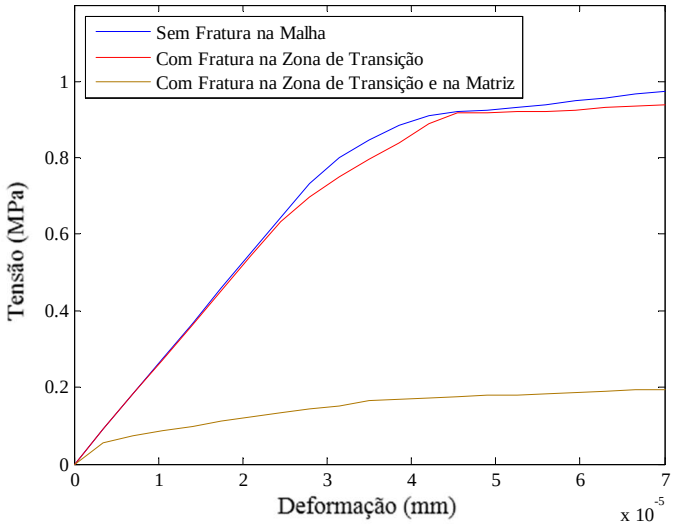
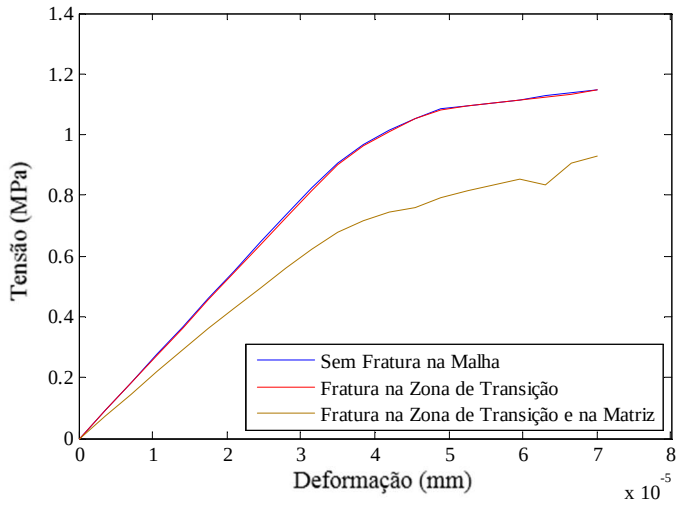
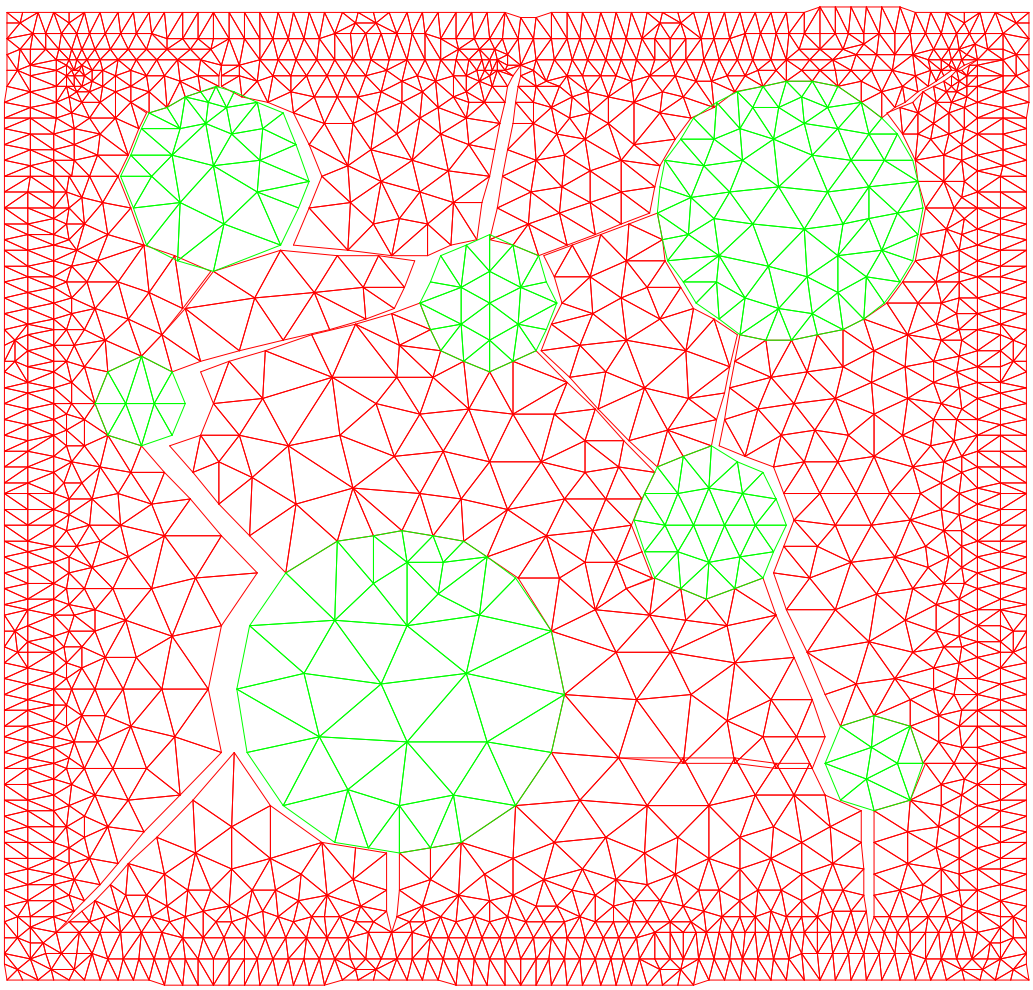


Figura 6.21 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) sob o regime de Compressão



É possível notar que na Figura 6.20, a resposta homogeneizada entre as malhas do EVR sem elementos de fraturas e com elementos de fraturas localizadas apenas ao redor dos agregados provocou uma resposta esperada, de acordo com o exemplo 6.1. Porém, quando inclui elementos de fratura no interior da matriz, o EVR se mostrou bastante fraturado com uma rigidez menor evidenciando o colapso da microestrutura do material. Mesmo com um fator de penalidade nas fraturas do interior da matriz maior que o fator de penalidade maior que o fator de penalidade das fraturas da Zona de Transição, esse tipo de abordagem influenciou inclusive na rigidez da parte elástica. A malha de elementos finitos fraturadas é mostrada na Figura 6.22.

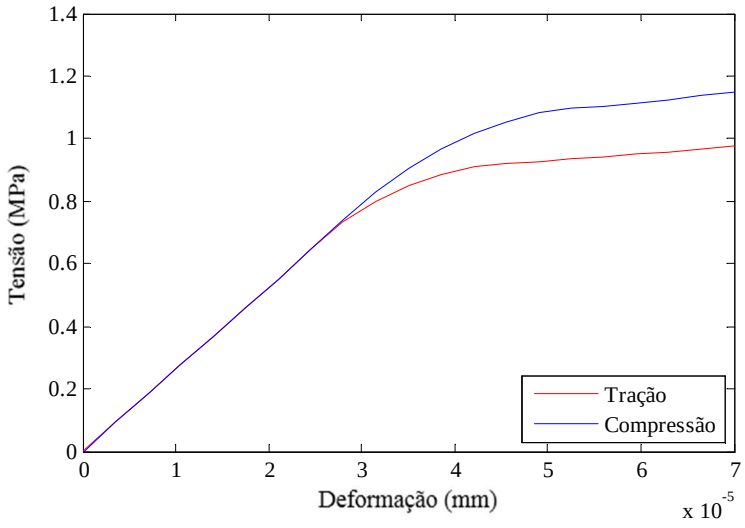
Figura 6.22 – EVR de Oliver *et al.* (2014) após fraturamento por tração (amplitude 300x)



Na Figura 6.21, a resposta homogeneizada do EVR entre os EVRs sem nenhum elemento de fratura e com elementos de fratura na Zona de Transição tem-se resposta esperada conforme o exemplo 6.4. Mas quando inclui elementos de fratura no interior da matriz, tem-se uma perda de rigidez logo no começo do carregamento, conforme aconteceu no regime predominante em tração.

A análise do EVR com os mesmo parâmetros, porém sem nenhuma inclusão de elementos de fraturas, realizada entre tração e compressão é mostrada na Figura 6.23. Nota-se que na compressão, a rigidez é maior que na tração devido à formulação proposta da plasticidade de Mohr-Coulomb. Os valores dos sinais para a reposta da compressão foram invertidos para melhor visualização e comparação.

Figura 6.23 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) – Compressão e Tração sem inclusão de elementos de fratura



Apesar de capturar uma diferença nas repostas homogeneizadas entre a tração e a compressão, ela não demonstra coerência para representar o concreto visto que essa diferença é pequena. A não inclusão da zona de transição (representada pelos elementos de contato e fratura coesiva ao redor do agregado) mostra que ocorre uma transmissão das tensões de maneira direta e total entre os agregados e a pasta de cimento, conforme mostrado na Figura 6.24 e Figura 6.25. Essa transmissão provoca um aumento da rigidez e da resistência do EVR.

Figura 6.24 – Gráfico de cores do EVR de Oliver *et al.* (2014) sem fratura para a distribuição de tensão (σ) em regime de tração na direção x

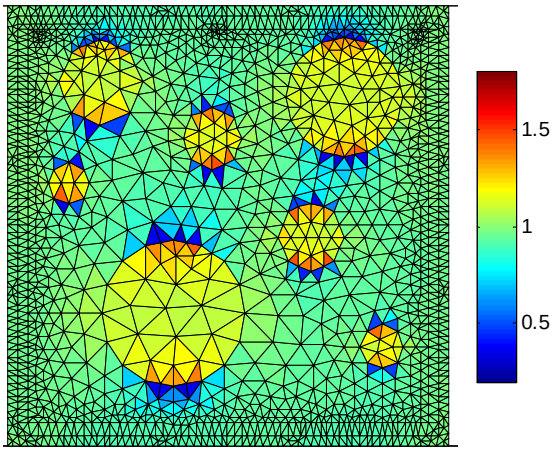
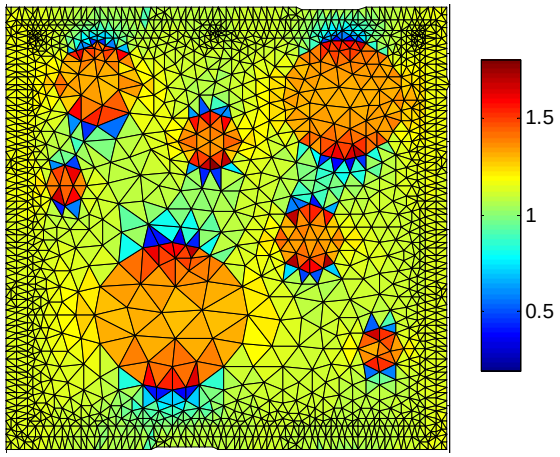
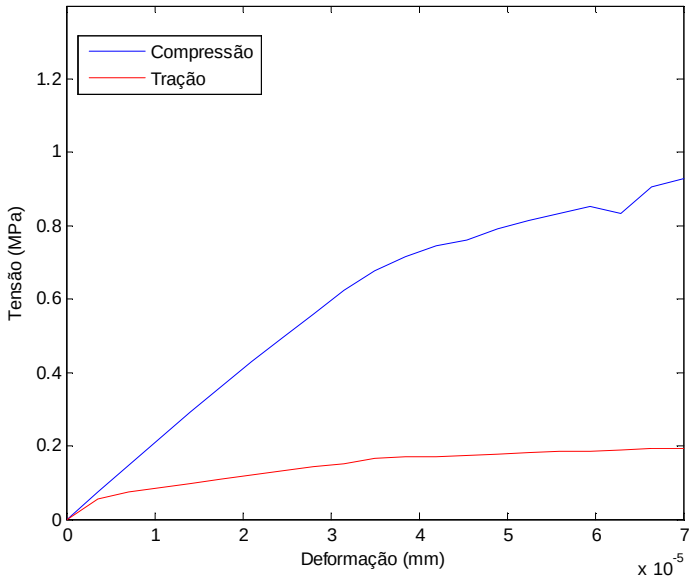


Figura 6.25 – Gráfico de cores do EVR de Oliver *et al.* (2014) sem fratura para a distribuição de tensão (σ) em regime de compressão na direção x



O aumento da rigidez do EVR é devido à grande rigidez dos agregados dada pela sua natureza elástica linear. Para ter uma representação melhor do concreto é necessário incluir as fraturas ao redor dos agregados e para representar uma situação de total ruína, o EVR deve incluir elementos de fraturas no interior da pasta de cimento para simular os caminhos de ruptura. A resposta homogeneizada é mostrada na Figura 6.26.

Figura 6.26 – Tensão homogeneizada na direção *x* (σ) x Deformação na direção *x* (ε) do EVR de Oliver *et al.* (2014) – Compressão e Tração com a inclusão de elementos de fratura



CAPÍTULO 7
CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas deste trabalho e em seguida, algumas sugestões para trabalhos futuros.

7.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma proposta para a modelagem do comportamento micromecânico do concreto. Importante destacar que a contribuição deste trabalho é numa visão qualitativa e se trata do primeiro trabalho no programa de Mestrado em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil na linha de análise numérica de materiais em várias escala. Esse tema, além de ser atual, é de grande interesse na comunidade científica mundial.

Os resultados apresentaram coerência com o comportamento mecânico esperado do concreto, encorajando trabalhos futuros nesse tema de pesquisa. O objetivo do trabalho em verificar a viabilidade do emprego da proposta para a microestrutura do concreto foi atingido, porém necessita-se de uma melhor avaliação em comparação com resultados experimentais para se ter uma avaliação quantitativa adequada.

A inclusão de elementos finitos de contato e fratura coesiva na modelagem apresentou resultados coerentes com o comportamento esperado quando incluídos na Zona de Transição do concreto, evidenciando a perda da rigidez na resposta homogeneizada, sem que haja a perda total de transmissão das tensões. Comparado com outras estratégias de simular o efeito da Zona de Transição do concreto, como a utilização de uma faixa de elementos finitos ao redor do agregado menos rígida que o restante da malha, mostrou-se viável já que esse tipo de elemento não influencia a resposta homogeneizada enquanto não for ativada a abertura do elemento. Quando considerou-se o processo de fraturamento no interior da matriz cimentícia, a resposta homogeneizada apresenta uma perda de rigidez muito grande, evidenciando total ruína do EVR.

A implementação do modelo de plasticidade na análise Multiescala mostrou-se satisfatório para contornar o problema das respostas rígidas apresentada por Pituba e Souza Neto (2015) em

regime predominantes de compressão. Porém, juntamente com a inclusão do modelo, foram acrescentados parâmetros na análise de difícil identificação.

A utilização apenas do modelo de plasticidade na pasta cimentícia não é satisfatório sem a inclusão dos elementos finitos de contato e fratura coesivas pois os agregados apresentam uma maior rigidez e resistência pela adoção de comportamento elástico linear, impactando na resposta homogeneizada. Essa consideração faz com que a resposta homogeneizada seja mais rígida por causa da transmissão total das tensões entre o agregado e a pasta de cimento.

O uso de modelos constitutivos simples em formulação e números de parâmetros mostrou-se viável dentro de uma teoria de homogeneização segundo uma abordagem Multiescala, sendo possível observar respostas macroscópicas homogeneizadas complexas. Porém, como em qualquer modelo constitutivo, o grande problema se dá na identificação dos parâmetros em nível da mesoescala.

7.2 SUGESTÕES

A partir da abordagem apresentada neste trabalho, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Avaliar as respostas obtidas pela modelagem proposta aqui numa visão mais quantitativa, procurando-se comparar os resultados obtidos da formulação com ensaios experimentais.
- Inclusão de um modelo de dano nas relações constitutivas do material na matriz cimentícia levando-se em consideração a possível localização de deformação.
- Desenvolver uma formulação Multiescala que considere a nucleação e propagação de fraturas na macroestrutura provenientes do fenômeno de localização de deformações no EVR.
- Desenvolver uma formulação, em nível da mesoescala, para levar em conta os efeitos de ar incorporado que surgem durante o processo de produção do concreto.
- Empregar a proposta da modelagem em uma análise Multiescala, acoplada para materiais heterogêneos com comportamento frágil.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, A. **Elementos finitos:** a base da tecnologia CAE - Análise não linear. 1. ed. São Paulo: Érica, 2012.

AMORIM, J. A. **Aplicação de modelos coesivos intrínsecos na simulação da propagação dinâmica de fraturas**, 2007. 140f. Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2007.

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications**. Boca Raton: CRC Press, 1995.

ASSAAD, J. J.; HARB, J.; MAALUF, Y. Measurement of yield stress of cement pastes using the direct shear test. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 214, p. 18-27, 2014.

BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium of crack in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55-129, 1962.

BITTENCOURT, T. N. **Fraturamento do concreto estrutural: aspectos teóricos, computacionais e experimentais e suas aplicações**, 1999. 226 f. Tese (Livre docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BUYUKOZTURK, O.; NILSON, A. H.; SLATE, F. O. Deformation and fracture of particulate composite. **Journal of Engineering Mechanics**, v 98, p. 581-593, 1972.

CAMACHO, G.; ORTIZ, M. Computational Modelling of Impact Damage in Brittle Materials. **International Journal of Solids and Structural**, v. 33 p. 2899-2938, 1996.

CIRAK, F.; ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. A. A cohesive approach to thin-shell fracture and fragmenta-tion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v 194, p. 2604-2618, 2005.

DUGDALE, D. S. Yelding of stell sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v 8, p 100-108, 1960.

FERNANDES, G. R.; PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. Multi-Scale Modelling for Bending Analysis of Heterogeneous Plates by Coupling BEM and FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v 51, p. 1-13, 2015a.

FERNANDES, G. R.; PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates.. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 54, p. 47-59, 2015b.

FRANÇA, P. T. **Estudo do comportamento de túneis: análise numérica tridimensional com modelos elasto-plásticos**, 2006. 185 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotecnia. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2006.

GIUSTI, S. M. **Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas**, 2009. 211 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 2009.

GRECO, F. Homogeneized Mechanical Behavior of composite micro-structures including micro-cracking and contact evolution. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 76, p. 182-208, 2009.

GRIFFITH, A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. **Philosofical Transactions**, v. 221, p. 163-198, 1920.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research,** v. 6, p. 773-782, 1976.

IBAÑEZ, J. P. **Modelagem constitutiva para solos com ênfase em solos não saturados**, 2003. 241 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

INGLIS, C. E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **Transactions of the Institution of Naval Architects**, v 55, p. 219-241, 1913.

IRWIN, G. R. Fracture Dynamics. **Fracture of Metals**, p. 147-166, 1948.

IRWIN, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. **Jornal of Applied Mechanics**, v 24, p. 361-364, 1957.

KARIHALOO, L. B. Fracture Mechanics & Structural Concrete. **Harlow: Longman Scientific & Technical**, 1995.

KIM, S.-M.; ABU AL-RUB, R. K. Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementious composites. **Cement and Concrete Research**, v. 41, p. 339-358, 2011.

MARCHIORI, D. G. **A mecânica da fratura elástica linear e o modelo coesivo na previsão do fraturamento de rochas**, 1997. 143 f. Dissertação (Mestrado em Geotecnia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. Geometrically nonlinear finite element analysis of viscoelastic composite materials under mechanical and hygrothermal loads. **Computers & Structures**, v. 53, n. 2, p. 449-456, 1994.

MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure**, 1984. Tese (Doutorado em Estruturas). Université Paris 6. Paris, 1984.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto:** Estrutura, Propriedades e Materiais. 1ª. ed. São Paulo: PINI, 2008.

NEEDLEMAN, A. A Continuum Model for Void Nucleation By Inclusion Deboing. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, p. 525-531, 1987.

NGUYEN, V.P.; LLOBERAS VALLS, O.; STROEVEN, M.; SLUYS, L.J. On the existence of representative volumes for softening quasi-brittle materials – a failure zone averaging scheme. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v. 199, p. 3026-3036, 2010.

NIELSEN, M. P.; HOANG, L. C. **Limit Analysis and Concrete Plasticity**. Boca Raton: CRC Press, 2011.

OLIVEIRA, H. L. **Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis**, 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

OLIVER, J.; CAICEDO, M.; ROUBIN, E.; HERNADÉZ, J. A.; HUESPE, A. Multi-scale (FE^2) analysis of materials failure in cement/aggregate-type composite structure. In: EURO-C,

2004, St. Anton am Alberg, XX. Anais. **Computational Modelling of Concrete Structure**, Londres: CRC PRESS, 2014. v.1, p. 39-49.

OROWAN, E. Fracture and Strength of Solids. **Reports on Progress in Physics**, v. 12, p. 185-232, 1948.

ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v 44, p. 1267-1282, 1999.

PAULINO, G. H.; CELES, W.; ESPINHA, R.; ZHANG, Z. A general topology-based framework for adaptative isertion of cohesive elements in finite element meshes. **Engineering with Computers**, v 24, p. 59-78, 2008.

PERIC D.; SOUZA NETO, E. A.; FEIJÓO R., PARTOVI M., MOLINA A.C. On Micro-to-Macro Transitions for Multiscale Analysis of Heterogeneous Materials: Unified Variational Basis and Finite Element Implementation. **International Journal Numerical Methods Engineering**, v. 87, p. 149-170, 2011.

PERIC, D.; SOUZA NETO, E. A. A new computational model for Tresca plasticity at finite strains with an optimal parametrization in the principal space. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 171, p. 463-489, 1999.

PITUBA, J. J. C. **Sobre a formulação de um modelo de dano para concreto**, 2003. 151 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R. An anisotropic damage model for concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 137 n. 9, p. 610-624, 2011.

PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. Modeling of unilateral effect in brittle materials by a mesoscopic scale approach. **Journal Computers and Concrete**, v. 15, n. 5, p. 735-758, 2015.

PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**, 1988. 330 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.

RAGHAVAN, P.; GHOSH, S. Two scale response and damage modeling of composite materials. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, p. 1619-1640, 2004.

RAMESH, G.; SOTELINO, E. D.; CHEN, W. F. Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials. **Cement and Concrete Research**, v. 26, p. 611-622, 1996.

RICE., J. R. A path independent integral and the aproximate analysis of stain concentration by notches and cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v 25. p. 379-386, 1968.

SOMER, D.D.; SOUZA NETO, E.A.; DETTMER, W.G.; PERIC, D. A sub-stepping scheme for multi-scale analysis of solids. **Computational Methods Application Mechanics Engineering**, v. 198, p. 1006-1016, 2009.

SOUZA NETO, E. A.; FEIJÓO, R. A. Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid: Small and Large Strain Kinematical Formulation. **Technical Report n 16/2006**, Laboratório Nacional de Computação Científica LNCC/MCT, Petrópolis, Brasil, 2006.

SOUZA NETO, E. A.; PERIÉ, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity:** Theory and Applications. Swensea: Wiley, 2008.

TERRIEN, M. Emission acoustique et comportement mécanique postcritique d'un béton sollicité en traction. **Bulletin de Liaison Ponts et Chaussées**. p 65-72, 1980.

TVERGAARD, V. Effect of Fibre Debonding in a Wisker Reinforced Metal. **Material Science and Engineering**, v. A125 p. 203-213, 1990.

VAN MIER, J. G. M. **Fracture processes of concrete:** assesment of material parameters for fracture models. Boca Raton: CRC Press, Inc, 1997. 446 p.

WELLS, A. A. Unstable Crack Propagation in Metals - Cleavage and Fast Fracture. **Crack Propagation Symposium Proc**, Cranfield College of Aeronautics, v 1, p. 210, 1961.

WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Cracks. **Journal Applied Mechanics**, v 6. p. A49-A53, 1939.

YANG, C. C. Effect of transition zone on elastic moduli of mortar. **Cement and Concrete Research**, v. 28 p. 727-736, 1988.