Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Karla Carolina Vicente de Sousa

PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM NÃO LINEARIDADES DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO

Goiânia
2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico**: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

1 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

2

Nome completo do autor: Karla Carolina Vicente de Sousa

Título do trabalho: PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM NÃO LINEARIDADES DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Karla Carolina Vicente de Sousa

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 03 / 03 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Karla Carolina Vicente de Sousa

PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM NÃO LINEARIDADES DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Vicente de Sousa, Karla Carolina
PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM NÃO LINEARIDADES DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO [manuscrito] / Karla Carolina Vicente de Sousa. - 2017.
xcix, 99 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui símbolos, gráfico.

1. Métodos Variacionais. 2. Problemas elípticos semilineares. 3. Não linearidades do tipo côncavo-convexo. 4. Variedade de Nehari. 5. Fibering Maps. I. Domingos da Silva, Edcarlos, orient. II. Título.

CDU 517.95

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE KARLA CAROLINA VICENTE DE SOUSA – Às 16:00 horas do primeiro dia do mês de março do ano de dois mil e dezessete (01/03/2017), reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Edcarlos Domingos da Silva - Orientador, Prof. Kaye Oliveira da Silva e Prof. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **"PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM NÃO LINEARIDADES DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO"**, em nível de Mestrado, área de concentração em Análise, de autoria de Karla Carolina Vicente de Sousa, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Edcarlos Domingos da Silva, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida à autora da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu a examinanda, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Análise pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Edcarlos D. da Silva
Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Presidente - IME/UFG

Prof. Dr. Kaye Oliveira da Silva
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Membro – DM/UnB

Karla Carolina Vicente de Sousa

Bacharela em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG. Durante o Mestrado foi bolsista CNPq e desenvolveu um trabalho teórico em Equações Diferenciais Parciais.

À memória de minha avó Guilhermina Bueno da Silva.

.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar a saúde necessária para me dedicar aos meus estudos e correr atrás dos meus sonhos. Agradeço aos meus pais, Carlos Menezes e Valéria Vicente, que foram meus primeiros investidores e me derão o carinho e apoio emocional necessários para lutar por meus objetivos. Agradeço ao meu namorado, Gustavo Silvestre, por estar sempre ao meu lado e ser meu fiel ouvinte, e também a toda sua família, que me acolheram como se eu fizesse parte dela. Não posso deixar de agradecer as mulheres, além da minha mãe, que me inspiraram nessa luta, mulheres que nunca desistiram: Kátia Menezes (minha tia, e também a primeira doutora que conheci), Guilhermina Bueno da Silva (minha avó, que nos deixou muitas saudades) e Maria de Lurdes da Silva Ferreira (minha madrinha e a grande matriarca da família).

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva, que fez esse trabalho possível, pela confiança depositada em mim e pelos conselhos. Também quero demonstrar minha gratidão aos professores que acreditaram no meu trabalho e que marcaram minha vida acadêmica, deixando lições que levarei eternamente: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina, Prof. Dr. Maurilio Márcio Melo, Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves, Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins, Prof. Dr. Maxwell Lizete e Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues. Também quero agradecer a todo grupo de análise do IME/UFG.

Agradeço aos meus amigos e colegas de mestrado e de IME, pela parceria nos estudos e pelos momentos de descontração que também se fazem necessários: Ana Maria Alves da Silva, Samuel Carlos de Souza Ferreira, Dayane Palmer de Oliveira, Nayra Thayne Cena de Oliveira, Harley Davidson Weirich, Ilton Menezes, Laredo Rennan, Steffanio Moreno, Heric Marques, Mayk Joaquim dos Santos e Naysa Crystine Oliveira. Gostaria de agradecer as meninas da portaria e da limpeza do IME, pelo entusiasmo do "Bom dia"; e a todos os técnicos administrativos, que sempre estiveram de prontidão para nos auxiliar. Enfim, quero deixar meu sentimento de GRATIDÃO a todos que contribuíram, mesmo que um $\epsilon > 0$ para que essa dissertação fosse possível.

"Lutei pelo justo, pelo bom e pelo melhor do mundo."
Olga Benário,
1942.

Resumo

Karla Carolina Vicente de Sousa. **PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM NÃO LINEARIDADES DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO**. Goiânia, 2017. 95p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções positivas para o seguinte problema elíptico semilinear com não linearidades do tipo côncavo-conexo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & x \in \Omega \\ \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é uma domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com bordo regular e $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ (onde $2^* - 1 = +\infty$, se $N = 1$ ou $N = 2$ e $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, quando $N \geq 3$). Além disso, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $a, b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que assumem valores positivos, porém, tais funções podem mudar de sinal em Ω.

Palavras–chave

Métodos Variacionais, Problemas elípticos semilineares, Não linearidades que trocam de sinal, Não linearidades do tipo côncavo-convexo, Variedade de Nehari, *Fibering Maps*.

Abstract

Karla Carolina Vicente de Sousa. **SEMILINEAR ELLIPTIC PROBLEMS WITH CONCAVE-CONVEX NONLINEARITIES**. Goiânia, 2017. 95p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we study the existence of positive solutions for the following semilinear elliptic problem with concave-convex nonlinearities

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & x \in \Omega \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary and $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ (where $2^* - 1 = +\infty$, if $N = 1$ or $N = 2$ and $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, where $N \geq 3$). Furthermore, $\lambda > 0$ is a parameter and $a, b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ are continuous functions which are somewhere positives, however, such functions may change sign in Ω.

Keywords

Variational Methods, Semilinear elliptic problems, Sign-changing nonlinearities, concave-convex nonlinearities, Nehari manifold, *Fibering Maps*.

Sumário

Lista de Símbolos e Notações

Notações Gerais

$\mathbb{R}^N$	$\{(x_1, x_2 \ldots, x_N) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ \forall \ i \in \mathbb{N}\}$
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	Domínio (aberto conexo) limitado de $\mathbb{R}^N$
$B(x,r)$	Bola aberta, centrada em x e de raio $r > 0$
U	Subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$
$\overline{U}$	Fecho de U
∂U	Fronteira de U
$U' \subset\subset U$	$\overline{U'} \subset U$
$\|U\|$	Medida do conjunto U
U^*	Dual Topológico do espaço U
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradiente da função u
$\Delta u = div \nabla u = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}$	Laplaciano da função u
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$\overset{cont}{\hookrightarrow}$	Imersão contínua
$\overset{cpt}{\hookrightarrow}$	Imersão compacta
q.t.p.	quase todo ponto
$L^p(U)$	{ "Classe de funções" $u : U \to \mathbb{R}$: u é mensurável e $\int_U \|u\|^p dx < +\infty\}$ $1 \leq p < +\infty$
$L^\infty(U)$	{ "Classe de funções" $u : U \to \mathbb{R}; \ \exists \ C > 0$, tal que $\|u(x)\| \leq C \ q.t.p. \ x \in U\}$
$W^{1,p}(U)$	{ "Classe de funções" $u : U \to \mathbb{R}; u \in L^p(U)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(U) \ \forall i = 1, \ldots, n\}$

$W_0^{1,p}(U)$	{ "Classe de funções" $u : U \to \mathbb{R}; u \in L^p(U),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(U)\ \forall i = 1, \ldots, n$ e $u(x) = 0$, em ∂U}
$H_0^1(U)$	$W_0^{1,2}(U)$
S_{p+1}	Melhor constante na imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$
S_{q+1}	Melhor constante na imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$
$\|\cdot\|_{p,U}$	Norma no espaço $L^p(U)$
$\|\cdot\|_{\infty,U}$	Norma no espaço $L^\infty(U)$
$\|\cdot\|_{1,p,U}$	Norma no espaço $W^{1,p}(U)$
$\|\cdot\|_U$	Norma no espaço $H_0^1(U)$

Nas normas definidas acima, o conjunto U será ocultado caso $U = \Omega$.

INTRODUÇÃO

Em 1993, Ambrosetti, Brezis e Cerami [3] estudaram o seguinte problema elíptico semilinear com não linearidades do tipo côncavo-convexo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & x \in \Omega \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{ABC_λ}$$

onde Ω é uma domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com bordo regular, λ é um parâmetro real e $0 < q < 1 < p \leq 2^* - 1$ (onde $2^* - 1 = +\infty$, se $N = 1$ ou $N = 2$ e $2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, quando $N \geq 3$). No citado trabalho, os autores mostraram a existência de um parâmetro $\Lambda > 0$, de modo que, se $0 < \lambda < \Lambda$, o problema (ABC_λ) admite duas soluções, se $\lambda = \Lambda$, o problema admite pelo menos uma solução e se $\lambda > \Lambda$ o problema não admite solução. Este é um dos trabalhos mais relevantes no estudo de problemas elípticos cujas não linearidades são uma combinação entre uma função sublinear e uma função superlinear. A partir dele surgiram diversos trabalhos nesse sentido, como, por exemplo, os artigos dos autores Brown&Wu [8] e Wu [21], nos quais esta dissertação é baseada.

Neste trabalho dissertaremos sobre uma espécie de generalização do problema (ABC_λ). Nosso principal objetivo é discutir sobre quais circunstâncias existem soluções positivas para o seguinte problema elíptico semilinear com não linearidades do tipo côncavo-convexo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q_λ}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com bordo regular, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$. Além disso, $a, b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que assumem algum valor positivo, porém, tais funções podem mudar de sinal em Ω. As funções a e b são conhecidas como funções peso.

Baseados no artigo de Brown&Wu [8], vamos mostrar, utilizando o método de minimização sobre a variedade de Nehari, introduzida em [16], que para λ suficientemente pequeno é possível encontrar pelo menos duas soluções não negativas para o problema (Q_λ). Uma das principais ferramentas é aplicar as *fibering maps*, com o intuito de determinar pontos críticos sobre a variedade de Nehari. Utilizaremos o método de regularização denomidado *bootstrap* para mostrar que as soluções encontradas pertencem ao espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Adicionalmente, daremos condições para que as soluções estejam em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0,1)$. Por fim, utilizaremos a Desigualdade de Harnack, cf. [17], para mostrar que sob certas hipóteses adicionais pelo menos uma das soluções é positiva.

Este trabalho está dividido em três capítulos e quatro apêndices assim distribuídos:

No Capítulo 1, iremos realizar uma série de conceitos e resultados preliminares. Como nos dois capítulos subsequentes, trabalharemos com o método de minimização sobre a variedade de Nehari, na seção 1.2 do Capítulo 1, definiremos a variedade de Nehari associada ao problema (Q_λ) e as *fibering maps*, mostrando a associação entre estas duas ferramentas. Em seguida, na seção 1.3, enunciaremos e demonstraremos resultados auxiliares que serão utilizados nos Capítulos 2 e 3. E, por fim, na seção 1.4, vamos abordar diversas características topológicas da variedade de Nehari.

No Capítulo 2 vamos estudar um caso particular do problema (Q_λ), a saber:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + u^p, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{P_λ}$$

que é o caso em que a função $b(x) \equiv 1$. Baseados no artigo de Wu [21], vamos utilizar o Princípio Variacional de Ekeland, cf. [10], para mostrar a existência de duas soluções não negativas.

No Capítulo 3, temos por objetivo estudar o problema geral Q_λ, baseados no artigo de Brown&Wu [8]. O Teorema central deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.1 *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que, se $\lambda < \lambda_0$, o problema (Q_λ) admite duas soluções não-negativas $u^+, u^- \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ de energias negativa e positiva, respectivamente. Além disso, uma das soluções encontradas é, na realidade, positiva.*

No Apêndice A, enunciamos alguns resultados de Cálculo Diferencial, Análise Funcional e Medida e Integração frequentemente utilizados neste trabalho. O Apêndice B trata de uma revisão sobre alguns conceitos de diferenciabilidade de funcionais definidos em espaços de Banach. Além disso, neste mesmo apêndice aproveitamos tais resultados para mostrar a classe de regularidade do funcional energia envolvido no problema. No Apêndice C realizamos, com muitos detalhes, o *bootstrap* para o problema (Q_λ). E, por fim, no Apêndice D enunciamos a Desigualdade de Harnack e a utilizamos para mostrar que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno a solução $u^- \geq 0$ encontrada é, na realidade, positiva.

CAPÍTULO 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo iremos apresentar conceitos e resultados preliminares para progresso na resolução do problema (Q_λ). Tais conceitos e resultados são análogos para o problema (P_λ), desde que façamos $b(x) \equiv 1$.

1.1 Conceitos Preliminares

Inicialmente, vamos definir solução fraca para o problema elíptico (Q_λ).

Definição 1.1 *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca para o problema (Q_λ) se, e só se,*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega a(x) u^q v \, dx + \int_\Omega b(x) u^p v \, dx, \tag{1-1}$$

para toda função $v \in H_0^1(\Omega)$.

Utilizaremos, neste trabalho, o produto interno usual do espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, isto é, se $u, v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Tal produto interno gera a seguinte norma

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como estamos em busca de soluções positivas para o problema, vamos definir o funcional energia $J_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ associado como

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx. \tag{1-2}$$

De acordo com o Apêndice B, J_λ é um funcional de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, cuja derivada de Gâteaux em $u \in H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$< J_\lambda'(u), v >= \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q-1}u \; v \, dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p-1}uv \, dx, \qquad (1\text{-}3)$$

para toda direção $v \in H_0^1(\Omega)$.

Neste caso, $0 \leq u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca para o problema (Q_λ) se, e somente se, é ponto crítico do funcional J_λ.

O Teorema a seguir mostra que o ínfimo do funcional energia J_λ em $H_0^1(\Omega)$ não é atingido.

Teorema 1.2 *O funcional energia $J_\lambda(u)$ é ilimitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Como a função $b(x)$ assume valores positivos, seja $x_0 \in \Omega$ tal que $b(x_0) > 0$. Nesse caso, pela continuidade da função b, existe $r_0 > 0$ tal que $b(x) > 0$, para todo $x \in B(x_0, r_0) \subset \Omega$. Sendo assim, tome $u \in C_0^\infty(B(x_0, r_0))$, e então, $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$. Dessa forma, para $t > 0$

$$J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1} - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}. \qquad (1\text{-}4)$$

Portanto, $\lim_{t\to\infty} J_\lambda(tu) = -\infty$. Demonstrando o desejado. $\square$

1.2 A Variedade de Nehari e as *Fibering Maps*

O Teorema 1.2 nos mostra que a minimização global não gera pontos críticos. Neste caso, podemos considerar a variedade de Nehari, introduzida em [16]. A variedade de Nehari para o problema (Q_λ) é definida por

$$N_\lambda(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0\}.$$

Na realidade, da maneira com que foi definida, $N_\lambda(\Omega)$ é apenas um conjunto. Mais adiante daremos condições para que $N_\lambda(\Omega)$ seja, de fato, uma variedade diferenciável. No decorrer do texto, chamaremos $N_\lambda(\Omega)$ de variedade de Nehari, mesmo sem antes provar tal fato, cometendo assim um abuso de linguagem bastante comum em textos que tratam sobre o assunto.

Observação 1.3 *Note que a escolha do conjunto $N_\lambda(\Omega)$ é conveniente, haja visto que soluções não-negativas para o nosso problema pertencem a tal conjunto. Assim, devemos provar que $N_\lambda(\Omega) \neq \emptyset$, para que possam haver pontos críticos não-triviais do funcional J_λ, e portanto, soluções para o problema (Q_λ).*

Utilizando a definição da variedade de Nehari e a equação (1-3), temos que

$$\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx = 0, \tag{1-5}$$

sempre que $u \in N_\lambda(\Omega)$. Neste caso, obtemos

$$\|u\|^2 - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx = \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \tag{1-6}$$

$$\|u\|^2 - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx. \tag{1-7}$$

As identidades (1-6) e (1-7) serão frequentemente utilizadas neste trabalho.

O teorema a seguir nos garante que o ínfimo do funcional energia J_λ sobre $N_\lambda(\Omega)$ é finito, isto é, $\alpha_\lambda(\Omega) > -\infty$, onde $\alpha_\lambda(\Omega) := \inf\limits_{u \in N_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u)$.

Teorema 1.4 *O funcional J_λ é coercivo e limitado inferiormente em $N_\lambda(\Omega)$.*

Demonstração. Utilizando (1-6), que $a \in L^\infty(\Omega)$ e que $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço $L^{q+1}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx \\ &\geq \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|^2 - \lambda\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u\|^{q+1} \\ &= \|u\|^2\left(C_1 - \lambda C_2\|u\|^{q-1}\right) \end{aligned} \tag{1-8}$$

onde S_{q+1} é a melhor constante na imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$ e $C_1 = \frac{p-1}{2(p+1)}$ e $C_2 = \frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}$ são constantes positivas que não dependem de u. Note que, se $\|u\| \geq \left(\frac{2\lambda C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-q}}$, então $C_1 - \lambda C_2\|u\|^{q-1} \geq \frac{C_1}{2}$. Dessa forma, $J_\lambda(u) \geq \|u\|^2\left(\frac{C_1}{2}\right)$, sempre que $\|u\| \geq \left(\frac{2\lambda C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-q}}$. Portanto, o funcional J_λ é coercivo. Adicionalmente, nesse caso, temos que

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{2\lambda C_2}{C_1}\right)^{\frac{2}{1-q}}\left(\frac{C_1}{2}\right) = C_3$$

De (1-8) temos que

$$J_\lambda(u) \geq \left(C_1\|u\|^2 - \lambda C_2\|u\|^{q+1}\right) \geq -\lambda C_2\|u\|^{q+1}.$$

Assim, se $\|u\| \leq \left(\frac{2\lambda C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{1-q}}$, temos que

$$J_\lambda(u) \geq \left(-\lambda C_2 \left(\frac{2\lambda C_2}{C_1}\right)^{\frac{q+1}{1-q}}\right) = -\lambda^{\frac{2}{1-q}} C_4,$$

onde $C_4 = C_2 \left(\frac{2C_2}{C_1}\right)^{\frac{q+1}{1-q}} > 0$. Consequentemente, para todo $u \in N_\lambda(\Omega)$, temos que

$$J_\lambda(u) \geq min\{C_3, -\lambda^{\frac{2}{1-q}} C_4\} = -\lambda^{\frac{2}{1-q}} C_4, \tag{1-9}$$

já que $C_3 > 0$. Portanto, $J_\lambda(u)$ é limitado inferiormente em $N_\lambda(\Omega)$. □

O Teorema 1.4 nos garante a existência de sequência minimizante em $N_\lambda(\Omega)$.

A seguir definiremos uma classe de funções importantíssima para o estudo do problema (Q_λ).

A variedade de Nehari está associada ao comportamento de funções denominadas *fibering maps*. Tais funções são definidas, para cada $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \gamma_u(t) &= J_\lambda(tu) && (1\text{-}10)\\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \lambda\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx && (1\text{-}11)\end{aligned}$$

onde $t > 0$. Derivando (1-10) e (1-11), obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \gamma_u'(t) &= \langle J_\lambda'(tu), u\rangle && (1\text{-}12)\\ &= t\|u\|^2 - \lambda t^q \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - t^p\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx && (1\text{-}13)\end{aligned}$$

Note que, como $t > 0$, segue de (1-12) que

$$\gamma_u'(t) = \frac{1}{t}\langle J_\lambda'(tu), tu\rangle, \tag{1-14}$$

implicando, assim, que $t > 0$ é ponto crítico de γ_u se, e só se, $tu \in N_\lambda(\Omega)$. Particularmente, $u \in N_\lambda(\Omega)$, se, e só se, $t = 1$ é ponto crítico de γ_u.

Dessa forma, a tarefa de mostrar que $N_\lambda(\Omega) \neq \emptyset$ pode ser substituída por encontrar pontos críticos para as *fibering maps*.

Observação 1.5 *Usando o funcional J_λ, observe que $tu \in N_\lambda(\Omega)$ se, e somente se, $-tu \in N_\lambda(\Omega)$. Isso justifica a definição da fibering map somente para $t > 0$.*

Note que encontrar pontos críticos de γ_u determinando-os explicitamente é inviável. Dessa forma, para cada $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, definimos a seguinte função auxiliar

$$m_u(t) = t^{1-q}\|u\|^2 - t^{p-q}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx,\ t > 0. \tag{1-15}$$

Neste caso, teremos

$$m_u{}'(t) = (1-q)t^{-q}\|u\|^2 - (p-q)t^{p-q-1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx. \tag{1-16}$$

Derivando novamente, obtemos

$$m_u{}''(t) = (1-q)(-q)t^{-q-1}\|u\|^2 - (p-q)(p-q-1)t^{p-q-2}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx. \tag{1-17}$$

Deixando t^q em evidência na equação (1-13), obtemos que

$$\begin{aligned} \gamma_u'(t) &= t^q\left(t^{1-q}\|u\|^2 - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - t^{p-q}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx\right) && (1\text{-}18)\\ &= t^q\left(m_u(t) - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx\right). && (1\text{-}19) \end{aligned}$$

Deste modo, de (1-19) e (1-14), conseguimos as equivalências

$$tu \in N_\lambda(\Omega) \Leftrightarrow \gamma_u'(t) = 0 \Leftrightarrow m_u(t) = \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx,\ t > 0. \tag{1-20}$$

A partir de agora, podemos escolher entre provar que a variedade de Nehari, $N_\lambda(\Omega)$, é não vazia; encontrar pontos críticos para as *fibering maps* ou resolver a equação $m_u(t) = \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx$, para $t > 0$.

Calculando a derivada segunda de γ_u, obtemos que

$$\begin{aligned} \gamma_u''(t) &= \|u\|^2 - \lambda q t^{q-1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - pt^{p-1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx && (1\text{-}21)\\ &= \frac{1}{t^2}\left(\|tu\|^2 - \lambda q\int_\Omega a(x)|tu|^{q+1}dx - p\int_\Omega b(x)|tu|^{p+1}dx\right)\\ &= \frac{1}{t^2}\gamma_{tu}''(1),\ t > 0. && (1\text{-}22) \end{aligned}$$

Se $u \in N_\lambda(\Omega)$, então $t = 1$ é um ponto crítico da função γ_u. Sendo assim, podemos caracterizá-lo de acordo com o sinal da derivada segunda de γ_u, isto é, verificar se $\gamma_u''(1) > 0$, $\gamma_u''(1) < 0$ ou $\gamma_u''(1) = 0$. No caso do problema (Q_λ), veremos mais adiante, que essa caracterização equivale a verificar se o ponto crítico é um ponto de mínimo local , de máximo local ou de inflexão, respectivamente. Dessa forma, similarmente ao método utilizado por Tarantello [18], nós dividimos $N_\lambda(\Omega)$

em três partes:

$$N_\lambda^+(\Omega) = \{u \in N_\lambda(\Omega) : \gamma_u''(1) > 0\}$$
$$N_\lambda^-(\Omega) = \{u \in N_\lambda(\Omega) : \gamma_u''(1) < 0\}$$
$$N_\lambda^0(\Omega) = \{u \in N_\lambda(\Omega) : \gamma_u''(1) = 0\}.$$

Observação 1.6 *Se $t > 0$ é tal que $tu \in N_\lambda(\Omega)$ (isto é, se $\gamma_u'(t) = 0$ ou $\gamma_{tu}'(1) = 0$), então de (1-7) e (1-21), segue que*

$$\gamma_u''(t) = (1-q)\|u\|^2 - (p-q)t^{p-1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx. \tag{1-23}$$

Estas informações, juntamente com (1-22) e (1-16), implicam que

$$\gamma_u''(t) = \frac{1}{t^2}\gamma_{tu}''(1) = t^q m_u'(t). \tag{1-24}$$

A equação (1-24) nos diz que para caracterizarmos um ponto crítico de γ_u basta olharmos para o sinal da derivada primeira de m_u relativa a tal ponto.

Uma vez definidos os subconjuntos acima, estamos aptos a enunciar o próximo teorema, que dá uma condição suficiente para que o conjunto $N_\lambda(\Omega)$ seja, enfim, uma variedade diferenciável.

Teorema 1.7 *Se $N_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$, então o conjunto $N_\lambda(\Omega)$ é uma variedade de classe C^1.*

Demonstração. Temos que $N_\lambda(\Omega) = G_\lambda^{-1}(\{0\})$, onde $G_\lambda : H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ é uma função definida por

$$G_\lambda(u) = \langle J_\lambda'(u), u\rangle = \|u\|^2 - \lambda\textstyle\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx.$$

Note que G_λ é uma função de classe C^1, cuja derivada de Gâteaux em $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, na direção do vetor v, é dada por

$$\langle G_\lambda'(u), v\rangle = 2\int_\Omega \nabla u\nabla v dx - (q+1)\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q-1}uvdx - (p+1)\int_\Omega b(x)|u|^{p-1}uvdx.$$

Queremos provar que $N_\lambda(\Omega) = G_\lambda^{-1}(\{0\})$ é variedade. Com efeito, vamos mostrar que 0 é valor regular de $G_\lambda(u)$. Isto é equivalente a mostrar que, para todo $u \in N_\lambda(\Omega)$, a função $G_\lambda'(u) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é sobrejetora, ou seja, que existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$\langle G'_\lambda(u), v\rangle \neq 0$. Mas como $u \in N_\lambda(\Omega)$, basta tomar $v = u$ que teremos

$$\begin{aligned}
\langle G'_\lambda(u), u\rangle &= 2\|u\|^2 - (q+1)\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - (p+1)\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \\
&= \left[\|u\|^2 - q\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - p\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx\right] \\
&+ \left[\|u\|^2 - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx\right] \\
&= \gamma''_u(1) + \langle J'_\lambda(u), u\rangle \\
&= \gamma''_u(1). \qquad (1\text{-}25)
\end{aligned}$$

Como $N^0_\lambda(\Omega) = \emptyset$, temos que $\gamma''_u(1) \neq 0$, e, portanto, $G'_\lambda(u) : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ é sobrejetora para cada $u \in N_\lambda(\Omega)$. Assim, finalizamos a demonstração. $\square$

O lema a seguir exibe uma condição suficiente para que a minimização sobre Nehari gere pontos críticos para o funcional J_λ.

Lema 1.8 *Suponha que u_0 é um ponto de máximo local (mínimo local) para J_λ em $N_\lambda(\Omega)$. Então, se $u_0 \notin N^0_\lambda(\Omega)$, u_0 é um ponto crítico de J_λ.*

Demonstração.

Estamos com o seguinte problema de otimização:

$$\textit{max(min)inizar o funcional } J_\lambda \textit{ restrito à } N_\lambda(\Omega)\ ,$$

onde $N_\lambda(\Omega) = G^{-1}_\lambda\{0\}$ e G_λ é como no teorema anterior.

Assim, pelo Teorema de Multiplicadores de Lagrange, cf. Zeidler [22], temos que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle J'_\lambda(u_0), v\rangle = \mu\langle G'_\lambda(u_0), v\rangle, \qquad (1\text{-}26)$$

para todo $v \in H^1_0(\Omega)$. Tomando $v = u_0$ e usando que $u_0 \in N_\lambda(\Omega)$, segue de (1-25) que $\langle G'_\lambda(u_0), u_0\rangle = \gamma''_{u_0}(1)$, o qual é diferente de zero, por hipótese. Segue de (1-26) que $\mu = 0$. Portanto, u_0 é ponto crítico de J_λ. $\square$

O Lema anterior garante que minimizar sobre Nehari é eficiente para obter pontos críticos para o funcional energia J_λ (desde que tal ponto crítico não pertença a $N^0_\lambda(\Omega)$), e, assim obter soluções fracas para (Q_λ). Entretanto, antes de tentar encontrar tais pontos críticos, devemos verificar se a variedade de Nehari é ou não vazia. Com efeito analisaremos as *fibering maps* definidas anteriormente.

Os comportamentos das funções m_u e γ_u dependem dos sinais das integrais $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx$ e $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx$. Agora vamos analisar todos os casos possíveis para o comportamento da função m_u:

Caso A Se $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$, temos que

$$m_u(t) = t^{1-q}\|u\|^2 - t^{p-q}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0, \quad \forall\ t > 0$$

e a derivada

$$m_u'(t) = (1-q)t^{-q}\|u\|^2 - (p-q)t^{p-q-1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0, \quad \forall\ t > 0.$$

Portanto, a função m_u é estritamente crescente e positiva em $(0, +\infty)$. Além disso, como $\lim_{t\to 0} m_u(t) = 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que a imagem de m_u é uma bijeção com a semi-reta $\mathbb{R}_+^*$. A Figura 1.1 ilustra um possível gráfico de m_u neste caso.

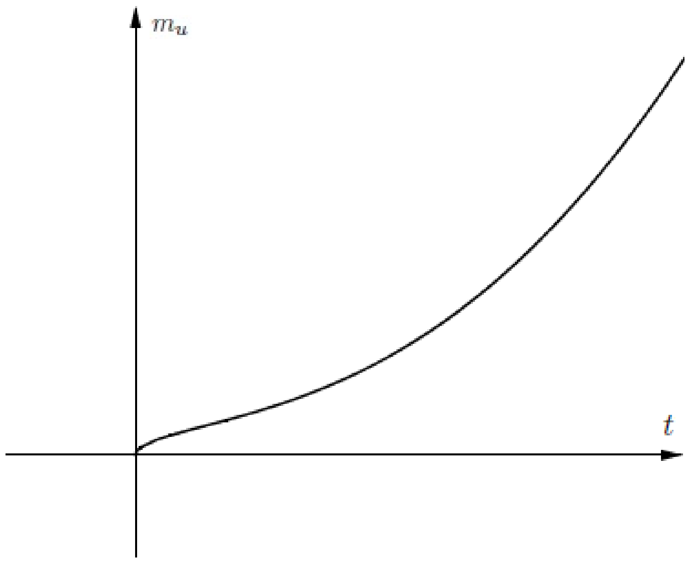

Figura 1.1: *Possível gráfico da função m_u no **Caso A**.*

Caso B Se $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$, a função m_u satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\lim_{t\to+\infty} m_u(t) = -\infty$;

(ii) $\lim_{t\to 0} \frac{m_u(t)}{t^{1-q}} = \|u\|^2 > 0$;

(iii) Existe um único $t = t_{max}(u) = \left(\frac{(1-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0$, tal que $m_u'(t_{max}(u)) = 0$. Mas ainda, $m_u'(t) > 0$, para todo $t \in (0, t_{max})$ e $m_u'(t) < 0$, para todo $t \in (t_{max}, +\infty)$;

(iv) Substituindo $t = t_{max}(u)$ em (1-15) obtemos

$$m_u(t_{max}) = \frac{p-1}{p-q}\left(\frac{(1-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} \|u\|^2 > 0;$$

(v) Substituindo $t = t_{max}(u)$ em (1-17) obtemos

$$m_u''(t_{max}(u)) = (1-q)(1-p)\left(\frac{(1-q)\|u\|^2}{(p-q)\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{-\frac{1+q}{p-1}}\|u\|^2 < 0. \qquad (1\text{-}27)$$

As propriedades (i) e (ii) nos garantem que m_u é uma função que troca de sinal em $(0,+\infty)$, fica positiva em uma vizinhança da origem e realiza valores negativos para $t > 0$ suficientemente grande. Já as propriedades (iii), (iv) e (v) mostram que a função m_u cresce estritamente no intervalo $(0, t_{max})$, atinge seu máximo global em $t_{max}(u)$ e, em seguida, decresce estritamente no intervalo $(t_{max}, +\infty)$. Note que a única raiz positiva da função m_u é

$$t = \bar{t}(u) = \left(\frac{\|u\|^2}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} > t_{max}.$$

Utilizando as informações obtidas acima, concluímos que para cada $s \in (-\infty, 0]$, existe um único $t > 0$, o qual pertence ao intervalo $[\bar{t}, +\infty)$, tal que, $m_u(t) = s$. A Figura 1.2 ilustra um possível gráfico de m_u neste caso.

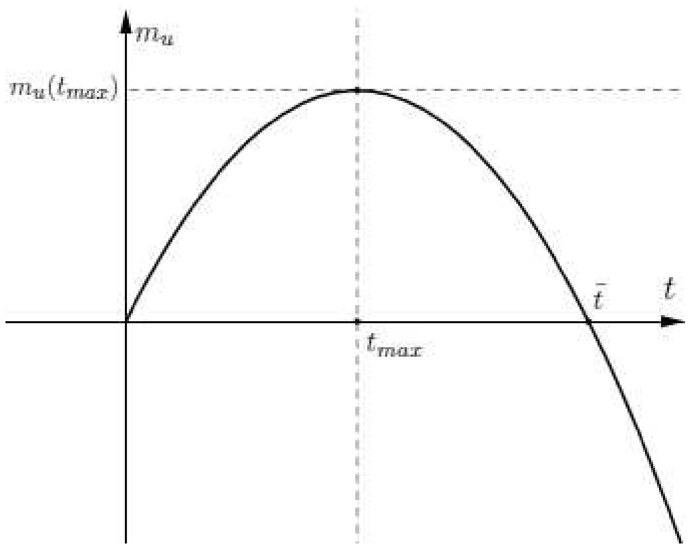

Figura 1.2: *Possível gráfico da função m_u no **Caso B**.*

Uma vez analisadas as possibilidades para a função auxiliar m_u estamos prontos para analisar todas as possibilidades para as *fibering maps*. Temos quatro casos a considerar:

Caso 1 *Neste caso estamos supondo que $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ e $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$ são verificadas. Assim, estamos na situação descrita pelo Caso A e ilustrada pela*

Figura 1.1 para a função m_u. Consequentemente, temos que $m_u(t) > 0$, para todo $t > 0$. Portanto, não existe $t > 0$ tal que $m_u(t) = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$. Deste modo, as equivalências em (1-20) garantem que não existe múltiplo algum de u em Nehari.

Com respeito as fibering maps, temos que $\gamma_u(t) > 0$ e $\gamma_u'(t) > 0$, para todo $t > 0$, isto é, a função $\gamma_u(t)$ é estritamente crescente e positiva, para todo $t > 0$. A Figura 1.3 ilustra um possível gráfico da função γ_u neste caso.

Observação 1.9 *Note que, se $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ e $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, teríamos que $N_\lambda(\Omega) = \emptyset$. Portanto, a equação ($Q_\lambda$) só teria solução trivial. De fato, se supormos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ solução para (Q_λ) satisfazendo as hipóteses do Caso 1, de (1-5), teríamos que*

$$\|u\|^2 = \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx + \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0,$$

o que implica que $\|u\| = 0$, e, portanto, $u = 0$ q.t.p. de Ω. Mas, vale ressaltar, que este caso não pode ocorrer para todo $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, já que, por hipótese, as funções a e b assumem algum valor positivo, e, portanto, sempre podemos conseguir funções em $C_0^\infty(B)$, onde B é uma bola contida em Ω, na qual a função a ou(e) a função b assume(m) valores positivos.

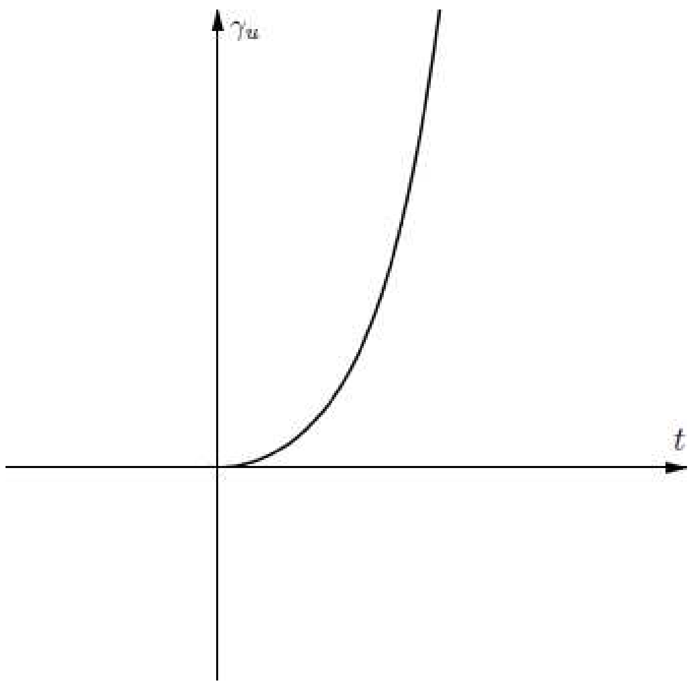

Figura 1.3: *Possível gráfico da função γ_u no Caso 1.*

Caso 2 *Este é o caso em que $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$. Dessa forma, continuamos na situação descrita no Caso*

A. Porém, agora, como $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ *e a imagem da função* m_u *é uma bijeção com a semi-reta* $\mathbb{R}_+^*$, *existe um único* $t^+ = t^+(u) > 0$ *com* $m_u(t^+) = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx$ *e* $m_u'(t^+) > 0$.

Quanto a função γ_u, *de* (1-20) *e* (1-24), *temos, respectivamente, que* $t^+ = t^+(u) > 0$ *é seu único ponto crítico e* $\gamma_u''(t^+) > 0$. *Logo,* t^+ *é um mínimo local de* γ_u *(ou, equivalentemente,* $t^+u \in N_\lambda^+(\Omega)$*). Neste caso, também temos que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma_u(t)}{t^{q+1}} = -\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx < 0,$$

isto é, em uma vizinhança da origem a fibering map assume valores negativos. Mais ainda, $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma_u(t) = +\infty$. *Munidos de tais informações e da unicidade do ponto crítico de* γ_u, *para* $t > 0$, *concluímos que* t^+ *é ponto de mínimo global e* $\gamma_u(t^+) < 0$. *A Figura 1.4 ilustra um possível gráfico da função* γ_u *neste caso.*

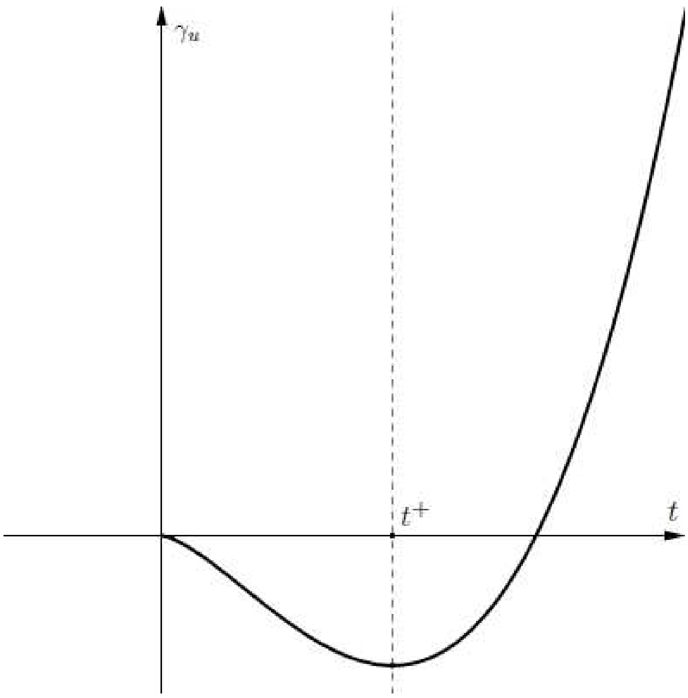

Figura 1.4: *Possível gráfico da função* γ_u *no Caso 2.*

Caso 3 *Este é o caso em que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *satisfaz* $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ *e* $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$. *Assim, estamos na situação descrita no Caso B com respeito a função* m_u. *Nesse caso, a imagem da função* m_u *restrita ao intervalo* $[\bar{t}, +\infty)$ *é uma bijeção com respeito à semi-reta* $\mathbb{R}_-^\star$, *e, portanto, existe um único* $t^- = t^-(u) \geq \bar{t} > 0$ *com* $m_u(t^-) = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx$ *e* $m_u'(t^-) < 0$.

Dessa forma, de (1-20) *e* (1-24), *temos, respectivamente, que* $t^- > 0$ *é o único ponto tal que* $\gamma_u'(t^-) = 0$ *e* $\gamma_u''(t^-) < 0$, *ou seja,* t^- *é um máximo local para* γ_u

(o que equivale a dizer que $t^{-}u \in N_{\lambda}^{-}(\Omega)$). Mais ainda, temos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\gamma_u(t)}{t^{q+1}} = -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \geq 0$$

(o que mostra que em uma vizinhança da origem a fibering map é não-negativa) e $\lim_{t\to+\infty}\gamma_u'(t) = -\infty$. Munidos de tais informações e da unicidade do ponto crítico de γ_u, para $t>0$, concluímos que t^{-} é ponto de máximo global e $\gamma_u(t^{-})>0$. A Figura 1.5 ilustra um possível gráfico que descreve a função γ_u nesse caso.

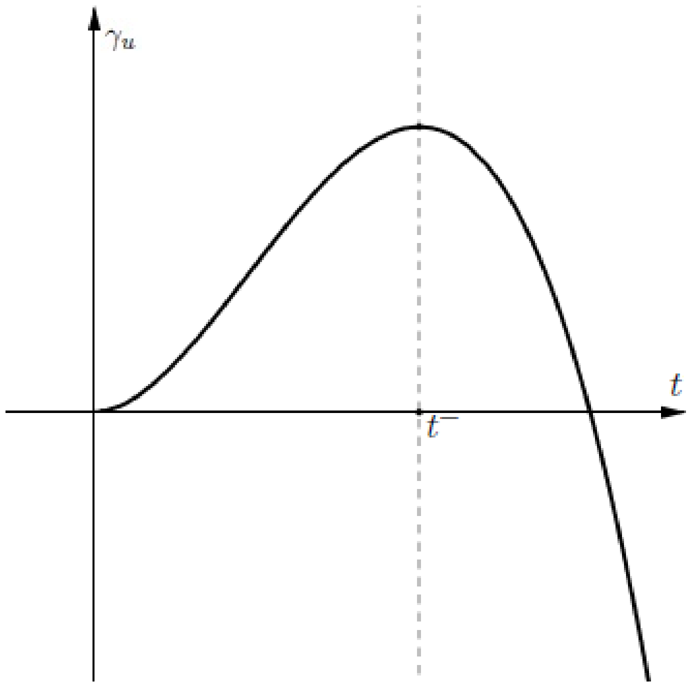

Figura 1.5: *Possível gráfico da função γ_u no Caso 3.*

Caso 4 *Neste caso estamos supondo que $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$ são verificadas. Assim, estamos novamente na situação descrita no Caso B para a função m_u. Além disso, a função γ_u é negativa em uma vizinhança da origem e também para $t>0$ grande. Como $\lambda\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $m_u(t_{max}) = (t_{max})^{1-q}\|u\|^2\frac{p-1}{p-q} > 0$ é o maior valor que a função m_u assume, existem três possíveis subcasos que devemos considerar e analisar:*

(i) *Se λ suficientemente pequeno, de modo que $\lambda\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx < m_u(t_{max})$, teremos a existência de únicos $0<t^{+}<t_{max}$ e $t_{max}<t^{-}$, tais que, $m_u(t^{+}) = m_u(t^{-}) = \lambda\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx$, com $m_u'(t^{+})>0$ e $m_u'(t^{-})<0$. O que equivale a dizer que vão existir $t^{+}=t^{+}(u)$ e $t^{-}=t^{-}(u)$ tais que $t^{+}(u)u \in N_{\lambda}^{+}(\Omega)$ e $t^{-}(u)u \in N_{\lambda}^{-}(\Omega)$. A Figura 1.6 ilustra um possível gráfico da função γ_u neste subcaso.*

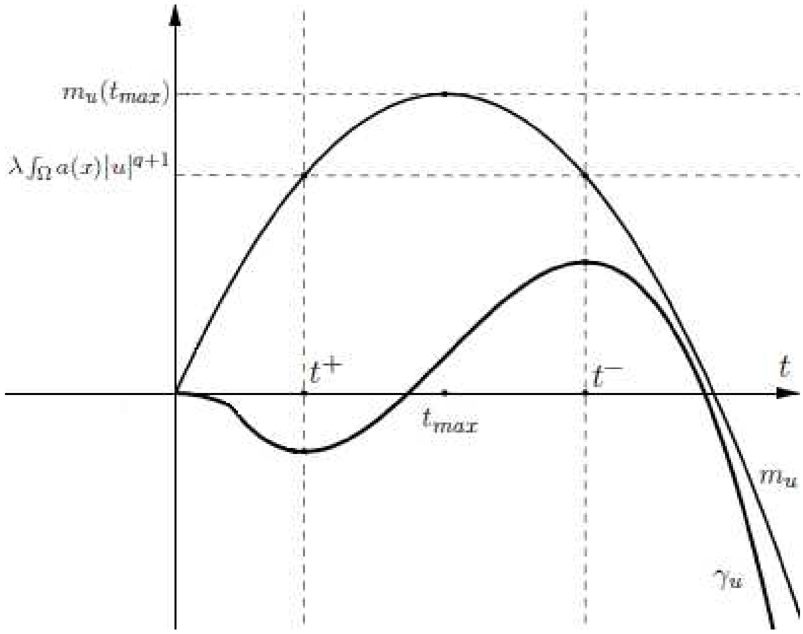

Figura 1.6: *Possível gráfico da função γ_u no Subcaso (i).*

(ii) *Se $\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx = m_u(t_{max})$, então t_{max} será o único ponto crítico da função γ_u. Como $m_u'(t_{max}) = 0$, de (1-24) temos que $\gamma_u''(t_{max}) = 0$, isto é, $t_{max}(u)u \in N_\lambda^0(\Omega)$. Este é o único caso em que o ponto crítico de γ_u possui derivada segunda nula. Vamos mostrar que, neste caso, t_{max} é ponto de inflexão. De fato, da*

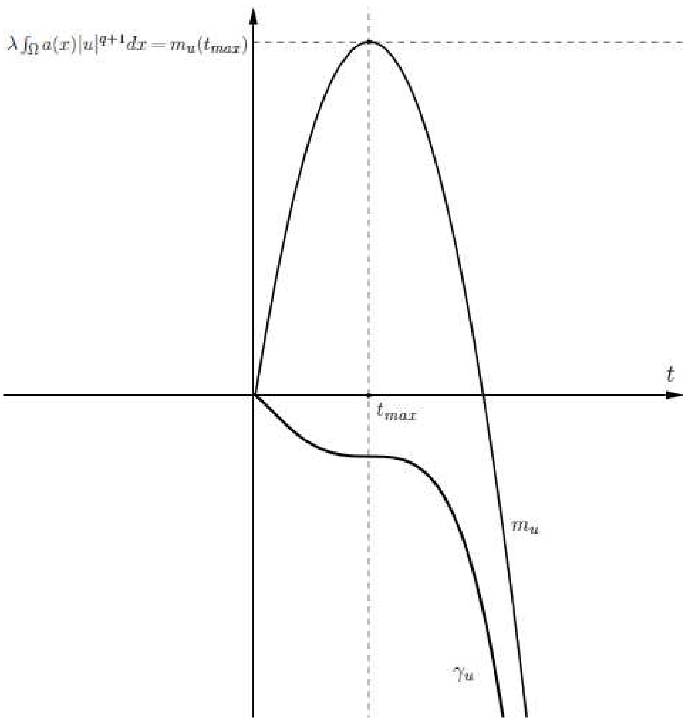

Figura 1.7: *Possível gráfico da função γ_u no Subcaso (ii).*

equação (1-19), *segue que*

$$\gamma_u''(t) = qt^{q-1}[m_u(t) - m_u(t_{max})] + t^q m_u'(t)$$

e,

$$\gamma_u'''(t) = q(q-1)t^{q-2}[m_u(t) - m_u(t_{max})] + 2qt^{q-1}m_u'(t) + t^q m_u''(t).$$

Assim, de (1-27), *temos que* $\gamma_u'''(t_{max}) = (t_{max})^q m_u''(t_{max}) \neq 0$. *Portanto,* $t_{max}(u)$ *é um ponto de inflexão de* γ_u. *Mais ainda, como* t_{max} *é o máximo global da função auxiliar* m_u, *de* (1-19), *temos que* $\gamma_u'(t) \leq 0$ *para todo* $t > 0$, *ou seja, a função* γ_u *é não-crescente. Note que, neste caso, a função será sempre negativa, visto que a mesma já assume valores negativos para* $t > 0$ *pequeno. A Figura 1.7 ilustra um possível gráfico da função* γ_u *neste subcaso.*

(iii) *Finalmente, caso* λ *seja grande, de modo que* $\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx > m_u(t_{max})$, *então,* γ_u *não terá pontos críticos ou, equivalentemente, não existirão múltiplos de* u *em* $N_\lambda(\Omega)$. *Nesse caso, a equação* (1-20) *nos garante que a função* γ_u *é decrescente e negativa.A Figura 1.8 ilustra um possível gráfico da função* γ_u *neste subcaso.*

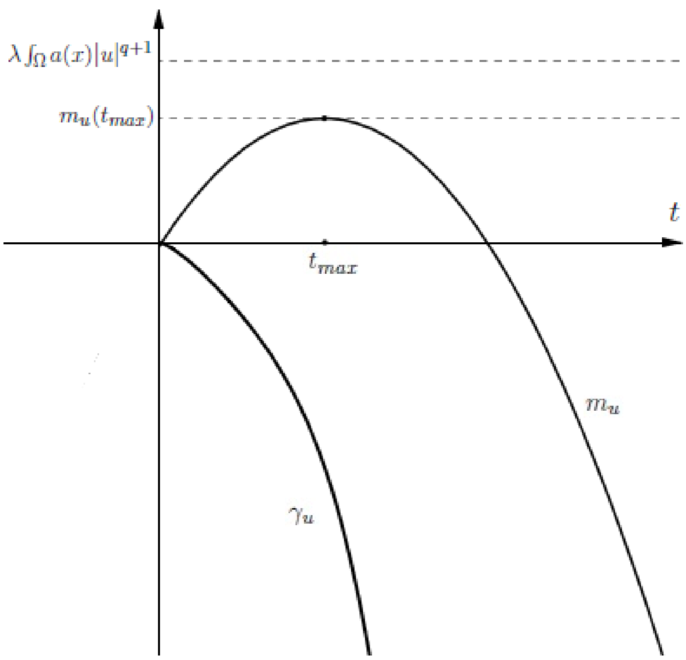

Figura 1.8: *Possível gráfico da função* γ_u *no Subcaso (iii).*

Assim, finalizamos a análise de todas as possibilidades para o comportamento das *fibering maps*.

1.3 Principais Resultados Auxiliares

Nesta seção, vamos provar a existência de $\lambda_1 > 0$, tal que, se $\lambda < \lambda_1$ e $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ satisfaz $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$, então ocorrerá o descrito no Caso 4(i), da seção 1.2 e ilustrado pela Figura 1.6.

O Lema a seguir garante que a função γ_u sempre assume valores positivos, desde que λ seja suficientemente pequeno.

Lema 1.10 *Existe $\lambda_1 > 0$ tal que, quando $\lambda \in (0, \lambda_1)$, γ_u assume valores positivos, para todo $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$.*

Demonstração.

Se $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$, então $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma_u(t) = +\infty$, e, portanto, para t suficientemente grande, temos que $\gamma_u(t) > 0$, para todo $\lambda > 0$.

Agora, se $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$, defina a seguinte função

$$h_u(t) := \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx, \ t > 0.$$

Então, temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} h_u'(t) &= t\|u\|^2 - t^p \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \\ &= t\left(\|u\|^2 - t^{p-1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx\right). \end{aligned}$$

Logo, $h_u'(t) = 0$ se, e só se, $t = t_0 = \left(\frac{\|u\|^2}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Calculando a derivada segunda da função h_u, obtemos

$$h_u''(t) = \|u\|^2 - pt^{p-1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} h_u''(t_0) &= \|u\|^2 - p{t_0}^{p-1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx, \\ &= \|u\|^2 - p\left(\frac{\|u\|^2}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \\ &= \|u\|^2 - p\|u\|^2 \\ &= (1-p)\|u\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Assim, $h_u(t_0) = \max\limits_{t\geq 0} h_u(t)$. Como uma consequência, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} h_u(t_0) &= \frac{{t_0}^2}{2}\|u\|^2 - \frac{{t_0}^{p+1}}{p+1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \\ &= {t_0}^2\left(\frac{\|u\|^2}{2} - \frac{{t_0}^{p-1}}{p+1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx\right) \\ &= \left(\frac{\|u\|^2}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\|u\|^2}{p+1}\right) \\ &= \left(\frac{\|u\|^2}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\|u\|^2 \\ &= \left(\frac{\|u\|^2\|u\|^{p-1}}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right) \\ &= \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\left(\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{\left(\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx\right)^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned} \tag{1-28}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx &\leq \int_\Omega b^+(x)|u|^{p+1}dx \\ &\leq \|b^+\|_\infty S_{p+1}^{p+1}\|u\|^{p+1}, \end{aligned}$$

onde $b^+(x) = \max\{0, b(x)\}$ e S_{p+1} é a melhor constante na imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$. Portanto, de (1-28), segue que

$$\begin{aligned} h_u(t_0) &\geq \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\left(\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{\left(\|b^+\|_\infty S_{p+1}^{p+1}\|u\|^{p+1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\left(\frac{1}{\|b^+\|_\infty^2 S_{p+1}^{2(p+1)}}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \delta, \end{aligned} \tag{1-29}$$

onde δ não depende de u. Note que

$$\gamma_u(t) = h_u(t) - \lambda\frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx, \tag{1-30}$$

nosso objetivo é mostrar que existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\gamma_u(t_0) > 0$, sempre que $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

Com efeito, faremos algumas estimativas. Temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{{t_0}^{q+1}}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1} &\le \frac{1}{q+1}\left(\frac{\|u\|^2}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}}\right)^{\frac{q+1}{p-1}}\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u\|^{q+1}\\
&= \frac{1}{q+1}\left(\frac{\|u\|^{p+1}}{\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}}\right)^{\frac{q+1}{p-1}}\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\\
&= \frac{1}{q+1}\left(\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{\left(\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}\right)^2}\right)^{\frac{q+1}{2(p-1)}}\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\\
&= \frac{1}{q+1}\left[\left(\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{\left(\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\frac{q+1}{2}}\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}. \quad (1\text{-}31)
\end{aligned}
$$

Usando (1-28), temos que

$$
\left(\frac{2(p+1)}{p-1}\right)^{\frac{q+1}{2}}(h_u(t_0))^{\frac{q+1}{2}} = \left[\left(\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{\left(\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\frac{q+1}{2}} \quad (1\text{-}32)
$$

Assim, de (1-31) e (1-32), segue que

$$
\frac{{t_0}^{q+1}}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1} \le C(h_u(t_0))^{\frac{q+1}{2}}, \quad (1\text{-}33)
$$

onde $C = \frac{1}{q+1}\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\left(\frac{2(p+1)}{p-1}\right)^{\frac{q+1}{2}}$ é uma constante que não depende de u. Utilizando (1-30) e (1-33), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\gamma_u(t_0) &\ge h_u(t_0) - \lambda C(h_u(t_0))^{\frac{q+1}{2}}\\
&= h_u(t_0)^{\frac{q+1}{2}}[h_u(t_0)^{\frac{1-q}{2}} - \lambda C]
\end{aligned}
$$

Além disso, de (1-29), temos que

$$
\gamma_u(t_0) \ge h_u(t_0)^{\frac{q+1}{2}}[\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda C]. \quad (1\text{-}34)
$$

Tomando $\lambda_1 = \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2C}$, temos que, para todo $\lambda \in (0,\lambda_1)$, $\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda C > \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2} > 0$. Consequentemente, temos que $\gamma_u(t_0) > h_u(t_0)^{\frac{q+1}{2}}[\delta^{\frac{1-q}{2}}/2] > 0$. O que prova o desejado. □

Agora estamos aptos a enunciar e provar a seguinte proposição

Proposição 1.11 *Se $\lambda_1 > 0$ é o mesmo obtido no Lema 1.10 e $\lambda \in (0, \lambda_1)$, então, existem únicos $t^+(u), t^-(u) > 0$, com $t^+(u) < t_{max}(u) < t^-(u)$, tais que, $t^+(u)u \in N_\lambda^+(\Omega)$ e $t^-(u)u \in N_\lambda^-(\Omega)$, para todo $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ que satisfaz $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx > 0$ e $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$.*

Demonstração. Como estamos sob as condições do Caso 4, da seção 1.2, pelas equivalências obtidas em (1-20) e pelo gráfico da função m_u, temos que γ_u pode admitir no máximo dois pontos críticos. Quando $\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx > m_u(t_{max})$, γ_u não admite pontos críticos, veja a Figura 1.8. Se $\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx = m_u(t_{max})$, γ_u admite um só ponto crítico, veja a Figura 1.7. Finalmente, quando $\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx < m_u(t_{max})$, γ_u admite dois pontos críticos, sendo um dos pontos críticos localizado na parte crescente e o outro na parte decrescente de m_u, veja a Figura 1.6.

Neste caso, a função γ_u assume valores negativos próximo à origem e também quando $t > 0$ é grande. O Lema 1.10 garante que, para $0 < \lambda < \lambda_1$ a função γ_u assume algum valor positivo. Assim, devido a continuidade da função γ_u, existe uma vizinhança onde $\gamma_u(t) > 0$. Dessa forma, temos que próximo à origem a função γ_u é decrescente (e, portanto tem derivada negativa) e em algum momento tem que crescer para assumir valores positivos (e, portanto ter derivada positiva). Como para $t > 0$ grande a função fica negativa, a mesma deve decrescer (ficando novamente com derivada negativa) em algum momento. Entre essas mudanças de sinal da derivada de γ_u obtemos pelo menos dois pontos críticos, via Teorema do Valor Intermediário.

Assim, como γ_u possui ao mesmo tempo o máximo de dois pontos críticos e o mínimo da mesma quantidade, concluímos que, se $0 < \lambda < \lambda_1$, a *fibering map* relativa ao ponto u possui exatamente dois pontos críticos $t^+(u), t^-(u) > 0$, com $t^+(u) < t_{max}(u)$ e $t_{max}(u) < t^-(u)$, isto é, $t^+(u)u \in N_\lambda^+(\Omega)$ e $t^-(u)u \in N_\lambda^-(\Omega)$. Aqui concluímos a demonstração. □

Como consequências da Proposição 1.11 temos os dois corolários a seguir

Corolário 1.12 *Se $\lambda < \lambda_1$, então $N_\lambda(\Omega) \neq \emptyset$.*

Demonstração. De fato, a observação 1.9 nos garante que existe $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ que não satisfaz o Caso 1. Assim, se u satisfaz o Caso 2 ou 3, vimos existem $t^+ > 0$ e $t^- > 0$, respectivamente, tais que $t^+u \in N_\lambda^+(\Omega)$ e $t^-u \in N_\lambda^-(\Omega)$. Por outro lado, se u satisfaz o Caso 4 e $\lambda < \lambda_1$, segue da Proposição 1.11 que existem $t^+, t^- > 0$ tais que $t^+u \in N_\lambda^+(\Omega)$ e $t^-u \in N_\lambda^-(\Omega)$. Isto finaliza a demonstração. □

Corolário 1.13 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 1.11, temos que $t^{-}(u)$ e $t^{+}(u)$ são pontos de máximo global e mínimo local, respectivamente, da função γ_u. Em outras palavras, $J_\lambda(t^- u) = \max_{t\geq 0} J_\lambda(tu)$ e $J_\lambda(t^+ u) = \min_{0\leq t\leq t^-} J_\lambda(tu)$.*

Demonstração. Temos que $m_u'(t) > 0$, em $(0, t_{max})$, $m_u'(t) < 0$, em $(t_{max}, +\infty)$ e $m_u(t^+) = m_u(t^-) = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx$. Assim, utilizando a identidade (1-19) temos que $\gamma_u'(t) < 0$ nos intervalos $(0,t^+)$ e $(t^-, +\infty)$ e $\gamma_u'(t) > 0$ em (t^+, t^-). Assim, a função γ_u é decrescente em $(0,t^+)$ e crescente em (t^+, t^-), implicando que $J_\lambda(t^+ u) = \min_{0\leq t\leq t^-} J_\lambda(tu)$. Além disso, como descrevemos no Caso 4, da Seção 1.2, temos que existe uma vizinhança da origem onde a função γ_u é negativa. Portanto, $J_\lambda(tu) = \gamma_u(t) < 0$, em $(0, t^+]$. Por outro lado, como a função γ_u é crescente em (t^+, t^-) e decrescente em $(t^-, +\infty)$, temos que $J_\lambda(t^-(u)u) \geq \gamma_u(t)$, para todo $t \in (t^+, +\infty)$. Vimos no Lema 1.10 que, para $\lambda < \lambda_1$ a função γ_u assume valores positivos. Dessa forma, $J_\lambda(t^-(u)u) > 0$, implicando que $J_\lambda(t^-(u)u) > J_\lambda(tu)$, para $t \in [0, t^+]$, visto que, nesse intervalo, $J_\lambda(tu) \leq 0$. Logo, $J_\lambda(t^- u) = \max_{t\geq 0} J_\lambda(tu)$. Concluindo o desejado. □

O próximo resultado segue da demonstração do Lema 1.10 e o Corolário 1.13.

Corolário 1.14 *Se $\lambda < \lambda_1$, então existe $\delta_1 > 0$, tal que $J_\lambda(u) \geq \delta_1$, para todo $u \in N_\lambda^-(\Omega)$.*

Demonstração. Se $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, segue de (1-7), (1-21) e da definição do conjunto $N_\lambda^-(\Omega)$ que

$$\int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx > \frac{1-q}{p-q}\|u\|^2 > 0.$$

Dessa forma, estamos sob as condições do Caso 3 ou do Caso 4, da seção 1.2, e, como $\lambda < \lambda_1$, segue do Corolário 1.13 que, em ambos os casos, $t^-(u) = 1$ é um ponto de máximo global para γ_u, isto é, $J_\lambda(u) = \gamma_u(1) \geq \gamma_u(t)$, para todo $t > 0$. Particularmente, $J_\lambda(u) \geq \gamma_u(t_0)$, onde t_0 é como na demonstração do Lema 1.10. Dessa forma, de (1-29) e (1-34) obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq h_u(t_0)^{\frac{q+1}{2}}[\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda C] \\ &\geq \delta^{\frac{q+1}{2}}[\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda C] = \delta_1, \end{aligned}$$

onde $\delta_1 > 0$, sempre que $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Como δ_1 não depende de u temos o desejado. □

Se denotarmos por $\alpha_\lambda^-(\Omega) := \inf\limits_{u \in N_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u)$, o ínfimo do funcional J_λ em $N_\lambda^-(\Omega)$, então, utilizando o Corolário 1.14, temos que $\alpha_\lambda^-(\Omega) \geq \delta_1 > 0$, quando $\lambda < \lambda_1$.

Segue da Proposição 1.11 o seguinte resultado

Corolário 1.15 *Se $\lambda < \lambda_1$, então $N_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $N_\lambda^0(\Omega) \neq \emptyset$. Assim, seja $u \in N_\lambda^0(\Omega)$. Como vimos na Seção 1.2 temos quatro possibilidades para o comportamento de γ_u. Se ocorre o Caso 1, então nenhum múltiplo de u pertence a $N_\lambda(\Omega)$. O que contradiz a hipótese. O segundo e o terceiro casos garantem a unicidade de $t = t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in N_\lambda(\Omega)$, o que implica que $t(u) = 1$. Porém, em um dos casos $u \in N_\lambda^+(\Omega)$ e no outro $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, e que é um absurdo, já que $N_\lambda^+(\Omega), N_\lambda^-(\Omega)$ e $N_\lambda^0(\Omega)$ são conjuntos disjuntos. Só resta o quarto e último caso. Entretanto, como $\lambda \in (0, \lambda_1)$, segue da Proposição 1.11, que existem únicos $t^+(u), t^-(u) > 0$ tais que $t^+(u)u, t^-(u)u \in N_\lambda(\Omega)$, assim, temos que $t^+(u) = 1$ ou $t^-(u) = 1$; porém, também temos, nesse caso, que $t^+(u)u \in N_\lambda^+(\Omega)$ e $t^-(u)u \in N_\lambda^-(\Omega)$. O que é, mais uma vez, um absurdo. Logo, $N_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$. $\square$

Denotando por $\alpha_\lambda^+(\Omega) := \inf\limits_{u \in N_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$ o ínfimo de J_λ em $N_\lambda^+(\Omega)$, o Lema a seguir nos garante que $\alpha_\lambda^+(\Omega) < 0$.

Lema 1.16 *Se $u \in N_\lambda^+(\Omega)$, então $J_\lambda(u) < 0$. Particularmente, $\alpha_\lambda^+(\Omega) < 0$.*

Demonstração. Se $u \in N_\lambda^+(\Omega)$, então de (1-6), (1-21) e da definição de $N_\lambda^+(\Omega)$ segue que

$$(1-p)\|u\|^2 + (p-q)\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx > 0$$

Consequentemente,

$$\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx > \frac{p-1}{p-q}\|u\|^2. \tag{1-35}$$

Utilizando, mais uma vez, a identidade (1-6), temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u\|^2 - \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|^2 - \frac{p-q}{(q+1)(p+1)}\lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Além disso, usando (1-35), obtemos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &< \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|^2 - \frac{p-1}{(q+1)(p+1)}\|u\|^2 \\ &= -\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left(\frac{1-q}{2(q+1)}\right)\|u\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha_\lambda^+(\Omega) < 0$. O que finaliza a demonstração. $\square$

1.4 Caracterização Topológica de $N_\lambda(\Omega)$

Nesta seção vamos apresentar diversos resultados que caracterizam $N_\lambda(\Omega)$, $N_\lambda^-(\Omega)$ e $N_\lambda^+(\Omega)$, topologicamente. Além disso, tais resultados serão utilizados nos próximos capítulos. O resultado a seguir nos garante que, para $\lambda \in (0, \lambda_1)$, o conjunto $N_\lambda^+(\Omega)$ não é fechado em $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 1.17 *Se $\lambda < \lambda_1$, então $N_\lambda^+(\Omega)$ não é fechado em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ tal que $\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $u_n \rightharpoonup 0$, $u_n \nrightarrow 0$. Dessa forma, temos que $\liminf_{n \to +\infty} \|u_n\|^2 = l > 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único $t_n > 0$ tal que $t_n u_n \in N_\lambda^+(\Omega)$. De (1-5), segue que

$$\|t_n u_n\|^2 = \lambda \int_\Omega a(x)|t_n u_n|^{q+1} dx + \int_\Omega b(x)|t_n u_n|^{p+1} dx, \tag{1-36}$$

ou equivalentemente,

$$t_n{}^2 \|u_n\|^2 = t_n{}^{q+1} \lambda \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx + t_n{}^{p+1} \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx. \tag{1-37}$$

Além disso, de (1-21) e da definição de $N_\lambda^+(\Omega)$, temos que

$$0 < \|u_n\|^2 - t_n{}^{q-1} q\lambda \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx - t_n{}^{p-1} p \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $t_n{}^2$, temos que

$$0 < t_n{}^2 \|u_n\|^2 - t_n{}^{q+1} q\lambda \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx - t_n{}^{p+1} p \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx$$

ou seja,

$$t_n{}^{p+1} \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1} dx < t_n{}^2 \frac{1}{p} \|u_n\|^2 - \lambda t_n{}^{q+1} \frac{q}{p} \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx. \tag{1-38}$$

Combinando as equações (1-37) e (1-38), segue que

$$t_n{}^2 \|u_n\|^2 < t_n{}^{q+1} \lambda \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx + t_n{}^2 \frac{1}{p} \|u_n\|^2 - \lambda t_n{}^{q+1} \frac{q}{p} \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx$$

isto é,

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) t_n{}^2 \|u_n\|^2 < \left(1 - \frac{q}{p}\right) t_n{}^{q+1} \lambda \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} dx. \tag{1-39}$$

Como $\liminf\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|^2 = l > 0$, escolha $\varepsilon > 0$, de modo que $l-\varepsilon > 0$. Nesse caso, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|u_n\|^2 > l-\varepsilon$, sempre que $n \geq n_0$. Substituindo essa estimativa na desigualdade (1-39), segue que

$$\left(1-\frac{1}{p}\right){t_n}^2(l-\varepsilon) < \left(1-\frac{q}{p}\right){t_n}^{q+1}\lambda\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx, \tag{1-40}$$

se $n \geq n_0$. Dividindo ambos os lados da equação (1-40) por ${t_n}^{q+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)(l-\varepsilon)$, obtemos

$${t_n}^{1-q} < \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{q}{p}\right)\frac{\lambda}{l-\varepsilon}\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx, \tag{1-41}$$

ou seja,

$$t_n < \left[\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{q}{p}\right)\frac{\lambda}{l-\varepsilon}\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx\right]^{\frac{1}{1-q}}. \tag{1-42}$$

Como $u_n \rightharpoonup 0$, então, o Teorema de Rellich-Kondrachov A.14 e o Teorema da Convergência Dominada A.4, nos garantem que, a menos de subsequência, $\left\{\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}\right\}$ e $\left\{\int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1}\right\}$ convergem para 0. Sem perda generalidade, chamaremos tal subsequência de $\{u_n\}$. Portanto, da desigualdade (1-42) segue que $t_n \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Agora, defina $v_n = t_n u_n$, então $v_n \in N_\lambda^+(\Omega)$ e de (1-36) segue que

$$\begin{aligned}\|v_n\|^2 &= \lambda\int_\Omega a(x)|t_n u_n|^{q+1}dx + \int_\Omega b(x)|t_n u_n|^{p+1}dx,\\ &= \lambda {t_n}^{q+1}\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx + {t_n}^{p+1}\int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1}dx. \end{aligned}\tag{1-43}$$

Logo, $\|v_n\|^2 \to 0$, quando $n \to +\infty$. Dessa forma, obtemos que a sequência (v_n) converge fortemente para 0 em $H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, construímos uma sequência em $N_\lambda^+(\Omega)$ que converge para zero, mostrando o desejado. $\square$

Observação 1.18 *Note que existe uma sequência $(u_n) \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, tal que $\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}\,dx > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $u_n \rightharpoonup 0$, $u_n \nrightarrow 0$. De fato, como a função contínua $a(x)$ assume algum valor positivo, basta tomar uma bola $B \subset \Omega$, de modo que $a(x) > 0$, sempre que $x \in B$. Assim, temos que $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}\,dx > 0$, para toda função $u \in C_0^\infty(B)$ (podemos olhar essas funções como funções em $H_0^1(\Omega)$ expandindo-as como sendo zero em $\Omega\backslash B$). Agora, considere $B_1 \subset B$ e defina $u_n = \varphi_n$, onde $\varphi_n \in C^\infty(B_1)$ são autofunções ortonormais em $H_0^1(B_1)$, associadas ao problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in B_1\\ u = 0, & x \in \partial B_1. \end{cases}$$

Tais funções geram o espaço $H_0^1(B_1)$. Expandindo-as como zero em $B\backslash B_1$, temos que $\varphi_n \in C_0^\infty(B)$. Portanto, $\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1} > 0$. Mais uma vez expandindo as funções φ_n como zero em $\Omega\backslash B_1$ geramos uma nova família de funções ortonormais em $H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, a Desigualdade de Bessel, cf. [15], pg. 157, nos garante que se $v \in H_0^1(\Omega)$, então $\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_i\rangle|^2$. Consequentemente, a sequência das somas parciais é limitada e monótona crescente. Portanto, a série converge, implicando que o termo geral converge para zero, isto é, $|\langle v, \varphi_i\rangle|^2 \to 0$, quando $i \to +\infty$. Logo, $\langle v, \varphi_i\rangle \to 0$, quando $i \to +\infty$. A aleatoriedade de $v \in H_0^1(\Omega)$ e o Teorema de Representação de Riez A.6 nos garantem que $\varphi_i \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, a convergência forte não ocorre, pois, $\|\varphi_i\| = 1$.

Observação 1.19 *Como zero é um ponto aderente a $N_\lambda^+(\Omega)$, então o mesmo é ponto aderente a $N_\lambda(\Omega)$. Consequentemente, $N_\lambda(\Omega)$ não é fechado em $H_0^1(\Omega)$.*

O próximo lema mostra que o que impede $N_\lambda(\Omega)$ de ser um subconjunto fechado de $H_0^1(\Omega)$ é somente o fato de que a função nula é um de seus pontos de aderência.

Lema 1.20 *Se $\lambda < \lambda_1$, então $\overline{N_\lambda(\Omega)} = N_\lambda(\Omega) \bigcup \{0\}$.*

Demonstração. De fato, se $\{u_n\} \subset N_\lambda(\Omega)$ é tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 - \int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1}dx - \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx \\ &= \|u\|^2 - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx - \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx \\ &= \langle J'_\lambda(u), u\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $u = 0$ ou $u \in N_\lambda(\Omega)$. Vimos na Proposição 1.17 existe sequência em $N_\lambda(\Omega)$ a qual converge para zero. O que finaliza a demonstração. $\square$

Observação 1.21 *Segue como um corolário do Lema 1.20 e do teorema 1.4 que J_λ restrito a $\overline{N_\lambda(\Omega)}$ é limitado inferiormente.*

O Lema a seguir, mostra que o ínfimo sobre $N_\lambda(\Omega)$ é igual ao ínfimo sobre $\overline{N_\lambda(\Omega)}$.

Lema 1.22 *Se $\lambda < \lambda_1$, então $\inf_{\overline{N_\lambda(\Omega)}} J_\lambda(u) = \alpha_\lambda(\Omega)$.*

Demonstração. Como $\alpha_\lambda(\Omega) \leq \alpha_\lambda^+(\Omega) < 0$ e $J_\lambda(0) = 0$, segue que

$$\alpha_\lambda(\Omega) \leq J_\lambda(u), \text{ para todo } u \in \overline{N_\lambda(\Omega)}.$$

Portanto, $\alpha_\lambda(\Omega) \leq \inf_{N_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u)$.

Por outro lado, como $N_\lambda(\Omega) \subset \overline{N_\lambda(\Omega)}$, temos que $\alpha_\lambda(\Omega) \geq \inf_{N_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u)$. Assim, concluímos que $\alpha_\lambda(\Omega) = \inf_{N_\lambda(\Omega)} J_\lambda(u)$. $\square$

A seguir vamos demonstrar um lema que garante que, ao contrário de $N_\lambda^+(\Omega)$, $N_\lambda^-(\Omega)$ fica "longe"de zero.

Lema 1.23 *Existe uma constante $C_5 > 0$, tal que $\|u\| > C_5$, sempre que $u \in N_\lambda^-(\Omega)$.*

Demonstração. De fato, seja $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, então de (1-7) e (1-21), segue que

$$(1-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx < 0.$$

Logo,

$$\frac{(1-q)}{(p-q)}\|u\|^2 < \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx \leq \|b\|_\infty S_{p+1}^{p+1}\|u\|^{p+1},$$

implicando em

$$\frac{(1-q)}{\|b\|_\infty S_{p+1}^{p+1}(p-q)}\|u\|^2 < \|u\|^{p+1}.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $\|u\|^2$ e elevando ambos os lados por $\frac{1}{p-1}$, obtemos

$$\|u\| > \left[\frac{(1-q)}{\|b\|_\infty S_{p+1}^{p+1}(p-q)}\right]^{\frac{1}{p-1}} = C_5, \tag{1-44}$$

onde a constante $C_5 > 0$ não depende de u. Isto finaliza a demonstração. $\square$

Segue do Lema 1.23 e do Corolário 1.15 o seguinte resultado

Lema 1.24 *Se $\lambda \in (0, \lambda_1)$, então $N_\lambda^-(\Omega)$ é fechado, e, portanto, completo em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset N_\lambda^-(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Segue do Lema 1.23 que $\|u_n\| > C_5$, e, assim, $\|u\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n\| \geq C_5$. O que prova que $u \neq 0$. A convergência forte implica que $0 = \langle J_\lambda'(u_n)u_n\rangle \to \langle J_\lambda'(u), u\rangle$. Portanto, temos que $u \in N_\lambda(\Omega)$. Além disso, como $\gamma_{u_n}''(1) < 0$, temos que $0 \geq \lim_{n\to\infty}\gamma_{u_n}''(1) = \gamma_u''(1)$. Dessa forma, $u \in N_\lambda^-(\Omega)$ ou $u \in N_\lambda^0(\Omega)$. Porém, como $\lambda \in (0, \lambda_1)$, segue do Corolário 1.15, que $u \in N_\lambda^-(\Omega)$. Isso prova que $N_\lambda^-(\Omega)$ é fechado em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço métrico completo, temos que $N_\lambda^-(\Omega)$ também o é. $\square$

Considere a seguinte aplicação $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(u) = \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx$. Tal aplicação é contínua. Portando, o conjunto $\Sigma = \{u \in H_0^1(\Omega); \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0\} = \psi^{-1}((0, +\infty))$ é um aberto de $H_0^1(\Omega)$.

Lema 1.25 *Se $\lambda < \lambda_1$, a função $t^- : \Sigma \to \mathbb{R}_+^*$ que associa a cada $u \in \Sigma$ o real $t^-(u) > 0$, tal que $t^-(u)u \in N_\lambda^-(\Omega)$, é de classe $C^1(\Sigma, N_\lambda^-(\Omega))$.*

Demonstração. Defina $F : \Sigma \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira

$$F(u,t) = \gamma_u'(t) = t\|u\|^2 - \lambda t^q \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - t^p \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx.$$

A função F, assim definida, é de classe $C^1(\Sigma \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$(cf. no Apêndice B). Além disso,

$$D_2F(u,t) = \gamma_u''(t) = \|u\|^2 - \lambda q t^{q-1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - pt^{p-1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx,$$

é a derivada parcial de F com respeito a segunda variável.

Como $u \in \Sigma$, segue dos Casos 3 e 4, já analisados na seção 1.2, que existe um único inteiro $t^-(u) > 0$ tal que $t^-(u)u \in N_\lambda^-(\Omega)$, implicando que $F(u,t^-(u)) = \gamma_u'(t^-(u)) = 0$ e $D_2F(u,t^-(u)) = \gamma_u''(t^-(u)) < 0$. Sendo assim, segue do Teorema da Função Implícita A.3, que existem vizinhanças $\Sigma_u^\star$ de u em $H_0^1(\Omega)$ e $U^\star$ de $t^-(u)$ em $\mathbb{R}$; e uma função $t^- : \Sigma_u^\star \to \mathbb{R}$, com $t^- \in C^1(\Sigma_u^\star, \mathbb{R})$ e que satisfaz:

(i) $F(v,t^-(v)) = 0$, para todo $v \in \Sigma_u^\star$;

(ii) $F(v,s) = 0$, com $(v,s) \in \Sigma_u^\star \times U^\star$, então $s = t^-(v)$;

(iii) $(t^-)'(v) = -(D_2F(p))^{-1} \circ D_1F(p)$, onde $p = (v, t^{-1}(v))$ e $v \in \Sigma_u^\star$.

O item (i) nos garante que $\gamma_v'(t^-(v)) = 0$, para todo $v \in \Sigma_u^\star$, isto é, $t^-(v)v \in N_\lambda(\Omega)$. Além disso, como $D_2F(u,t^-(u)) < 0$ e $F \in C^1(\Sigma \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, então existe uma vizinhança $\Sigma_u^{\star\star} \times U^{\star\star}$ de $(u,t^-(u))$ em $\Sigma \times \mathbb{R}_+^*$, tal que $D_2F(v,s) < 0$, para todo $(v,s) \in \Sigma_u^{\star\star} \times U^{\star\star}$. Sendo assim, defina $\Pi_u = \Sigma_u^\star \cap \Sigma_u^{\star\star}$ (a qual continua sendo uma vizinhança de u em Σ) e $W = U^\star \cap U^{\star\star}$ (a qual continua sendo uma vizinhança de $t^-(u)$ em $\mathbb{R}_+^*$). Agora, temos as seguintes propriedades:

(i) $F(v,t^-(v)) = 0$, sempre que $v \in \Pi_u$, e, portanto, $t^-(v)v \in N_\lambda(\Omega)$;

(ii)Se $(v,s) \in \Pi_u \times W$ e $F(v,s) = 0$, então $s = t^-(v)$;

(iii) $D_2F(v,t^-(v)) = \gamma_{t-(v)v}''(1) < 0$, para todo $v \in \Pi_u$.

Devido a unicidade do real positivo t^- tal que $t^-v \in N_\lambda^-(\Omega)$, a função $t^- : \bigcup\limits_{u \in \Sigma} \Pi_u = \Sigma \to \mathbb{R}_+^*$ definida em cada Π_u como a função que acabamos de construir e que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) acima, está bem definida e é de classe C^1. $\square$

Utilizando o Lema 1.25, vamos mostrar que $N_\lambda^-(\Omega)$ é homeomorfo a $S \cap \Sigma$, onde $S = \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\| = 1\}$ é a esfera do espaço $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.26 *A função $\varphi : S_1 = S \cap \Sigma \to N_\lambda^-(\Omega)$, definida por $\varphi(u) = t^-(u)u$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. A aplicação φ está bem definida. De fato, como $S_1 \subset \Sigma$, temos que, para cada $u \in S_1$, existe um único inteiro $t^-(u) > 0$, tal que $t^-(u)u = \varphi(u) \in N_\lambda^-(\Omega)$.

Note que $\varphi(u) = t^-(u)I(u)$, onde $I : S_1 \to S_1$ é a aplicação identidade, portanto, segue do Lema 1.25, que φ é uma aplicação contínua.

Agora, considere a seguinte aplicação $\varphi^{-1} : N_\lambda^-(\Omega) \to S_1$, definida por $\varphi^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|}$. Observe que φ^{-1} é a razão entre as aplicações identidade e norma. Portanto, φ^{-1} também é contínua. Vamos mostrar que φ^{-1} é a inversa de φ. Mas, antes, vamos provar que, $N_\lambda^-(\Omega) = \left\{u \in \Sigma;\ t^-\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|\right\}$. Temos que $N_\lambda^-(\Omega) \subset \Sigma$, pois, se $u \in N_\lambda(\Omega)$, então estamos no Caso 3 ou no Caso 4, já analisados na seção 1.2. Portanto, $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$. Se $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, então $\frac{u}{\|u\|} \in \Sigma$ e, assim, existe um único inteiro $t^-\left(\frac{u}{\|u\|}\right) > 0$, tal que $t^-\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\frac{u}{\|u\|} \in N_\lambda(\Omega)$. Mas $\|u\|\frac{u}{\|u\|} \in N_\lambda^-(\Omega)$, logo, $t^-\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|$. Por outro lado, se $t^-\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|$, então, $t^-\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\frac{u}{\|u\|} = \|u\|\frac{u}{\|u\|} = u \in N_\lambda^-(\Omega)$. Dessa forma, temos que

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(u) = \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = t^-\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\frac{u}{\|u\|} = \|u\|\frac{u}{\|u\|} = u,\ \ u \in N_\lambda^-(\Omega).$$

Isto prova o desejado. $\square$

Observação 1.27 *Note que, se $b(x) \equiv 1$, então $\Sigma = H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ e o conjunto $S_1 = S$. Isto é, $N_\lambda^-(\Omega)$ é homeomorfo à esfera.*

CAPÍTULO 2

O Problema Côncavo-Convexo com uma Função Peso Trocando de Sinal

Este capítulo é baseado no artigo de Wu [21]. Nosso objetivo é provar, utilizando o Princípio Variacional de Ekeland, cf. [10], que existe $\lambda_3 > 0$ tal que, se $\lambda \in (0, \lambda_3)$, então o problema (P_λ) admite duas soluções não-negativas. Note que no problema (P_λ), a função $b(x) \equiv 1$. Dessa forma, sempre que utilizarmos os resultados do Capítulo 1 estaremos considerando este fato.

Primeiramente, exibiremos algumas definições e um resultado sobre espaços topológicos localmente conexos, que podem ser encontrados em [20].

Definição 2.1 *Se X é um espaço topológico e $x \in X$, uma vizinhança de x é um conjunto U que contém um conjunto aberto V contendo x. A coleção $\mathbb{U}_x$ de todas as vizinhanças de x é o sistema de vizinhança de x*

Definição 2.2 (Base de Vizinhança) *Uma base de vizinhança de x no espaço topológico X é uma sub-coleção $\mathbb{B}_x$ tomada do sistema de vizinhança $\mathbb{U}_x$, tendo a propriedade de que cada $U \in \mathbb{U}_x$ contém algum elemento $V \in \mathbb{B}_x$. Isto é, o sistema de vizinhança $\mathbb{U}_x$ pode ser determinado por como segue:*

$$\mathbb{U}_x = \{U \subset X;\ V \subset U \ \textit{para algum}\ V \in \mathbb{B}_x\}.$$

Definição 2.3 (Espaço Topológico Localmente Conexo) *Um espaço topológico X é localmente conexo se, e somente se, todo ponto $x \in X$ admite uma base de vizinhança composta de abertos e conexos.*

Proposição 2.4 *As componentes conexas de um espaço X localmente conexo são abertos e fechados de X.*

Agora estamos preparados para resolver o problema a seguir.

Defina $\Theta := \{x \in \Omega;\ a(x) > 0\} = a^{-1}\{(0, +\infty)\}$. Como $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e Ω é um domínio limitado, temos que Θ é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que Θ é um domínio de $\mathbb{R}^N$, pois caso contrário, como Θ é um espaço localmente conexo, basta trabalhar em uma de suas componentes conexas. Sendo assim, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p, & x \in \Theta \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Theta \end{cases} \tag{Q}$$

onde p é como no problema (Q_λ). Associado a (Q), considere o funcional energia

$$K(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Theta |u|^{p+1}dx.$$

Então, o funcional K é de classe $C^1(\Theta, \mathbb{R})$, e sua derivada de Gateaux em $u \in H_0^1(\Theta)$ é dada por

$$\langle K'(u), v\rangle = \int_\Theta \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Theta |u|^{p-1}uv\, dx$$

na direção do vetor $v \in H_0^1(\Theta)$. Dessa forma, $0 \leq u \in H_0^1(\Theta)$ é solução para o problema (Q) se, e só se, é ponto crítico do funcional K. Definimos, também, a variedade de Nehari associada ao problema, como sendo

$$M(\Theta) := \Big\{u \in H_0^1(\Theta)\backslash\{0\};\ \langle K'(u), u\rangle = 0\Big\}.$$

Assim, se $u \in M(\Theta)$, então

$$\langle K'(u), u\rangle = \int_\Theta |\nabla u| dx - \int_\Theta |u|^{p+1}dx = 0 \tag{2-1}$$

Pode ser encontrado em [5], p.59-63, que o nível $\beta(\Theta) = \inf\{K(u);\ u \in M(\Theta)\}$ é atingido por uma função não-negativa, ou seja, existe $w \in M(\Theta)$, $w(x) \geq 0$ em Θ, tal que $\beta(\Theta) = K(w)$. Adicionalmente, tal função é uma solução não-negativa para o problema (Q). Realizando um *bootstrap* análogo ao feito no Apêndice C, pode-se provar que $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Theta})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Além disso, o Teorema D.2, nos garante que a solução w é, na realidade, positiva em Θ. Como $w \in M(\Theta)$, de (2-1) obtemos que $\beta(\Theta) = K(w) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Theta |\nabla w|^2 dx = \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\int_\Theta |\nabla w|^2 dx > 0$. Agora estamos aptos a provar o seguinte lema:

Lema 2.5 *Se $\lambda \in (0, \lambda_1)$, existe $t_\lambda > 0$ tal que*

$$\alpha_\lambda(\Omega) \leq \alpha_\lambda^+(\Omega) < -\tfrac{1-q}{q+1}{t_\lambda}^2\beta(\Theta) < 0.$$

Demonstração. Defina $w_0(x) = w(x)$, em Θ e $w_0(x) = 0$, em $\Omega\backslash\Theta$. Assim, $0 \not\equiv w_0 \in H_0^1(\Omega)$. Mais ainda, $\int_\Theta |\nabla w|^2 dx = \int_\Omega |\nabla w_0|^2 dx$ e $\int_\Theta |w|^{p+1}dx = \int_\Omega |w_0|^{p+1}dx$; implicando que $\beta(\Theta) = K(w) = \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\int_\Theta |\nabla w|^2 = \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\int_\Omega |\nabla w_0|^2$. Então, usando a definição do conjunto Θ, temos que

$$\int_\Omega a(x)w_0^{q+1}dx = \int_\Theta a(x)w^{q+1}dx > 0.$$

Nesse caso, como $\lambda < \lambda_1$, utilizando a Proposição 1.11 temos que existe um único real positivo $t_\lambda = t^+(w_0) > 0$, tal que $t_\lambda w_0 \in N_\lambda^+(\Omega)$. Assim, de (1-7), segue que

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_\lambda w_0) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) t_\lambda^2 \|w_0\|^2 - \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right) t_\lambda^{p+1} \int_\Omega |w_0|^{p+1}dx \\ &= t_\lambda^2 \left[\frac{q-1}{2(q+1)}\|w_0\|^2 + t_\lambda^{p-1}\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\int_\Omega |w_0|^{p+1}dx\right] \\ &= t_\lambda^2 \left[\frac{q-1}{2(q+1)}\int_\Theta |\nabla w|^2 + t_\lambda^{p-1}\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\int_\Theta |w|^{p+1}dx\right]. \end{aligned} \tag{2-2}$$

De (1-23) e da definição de $N_\lambda^+(\Omega)$, temos que

$$(1-q)t_\lambda^2\|w_0\|^2 > (p-q)t_\lambda^{p+1}\int_\Omega |w_0|^{p+1}dx,$$

que implica, juntamente com (2-1), que

$$\begin{aligned} (1-q)t_\lambda^2 \int_\Theta |\nabla w|^2 &> (p-q)t_\lambda^{p+1}\int_\Theta |w|^{p+1}dx \\ &= (p-q)t_\lambda^{p+1}\int_\Theta |\nabla w|^2 dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$t_\lambda^{p-1} < \frac{1-q}{p-q}. \tag{2-3}$$

Mais ainda, de (2-1) e (2-2), temos que

$$J_\lambda(t_\lambda w_0) = t_\lambda^2\left[\frac{q-1}{2(q+1)}\int_\Theta |\nabla w|^2 + t_\lambda^{p-1}\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\int_\Theta |\nabla w|^2\right].$$

Assim, segue de (2-3) que

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_\lambda w_0) &< t_\lambda^2\left[\frac{q-1}{2(q+1)} + \frac{1-q}{(p+1)(q+1)}\right]\int_\Theta |\nabla w|^2 \\ &= -\frac{1-q}{1+q}t_\lambda^2\frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Theta |\nabla w|^2 \\ &= -\frac{1-q}{1+q}t_\lambda^2\beta(\Theta). \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha_\lambda^+(\Omega) < -\frac{1-q}{1+q}t_\lambda^2\beta(\Theta) < 0$. A outra desigualdade segue do fato de que $N_\lambda^+(\Omega) \subset N_\lambda(\Omega)$. Isso finaliza a demonstração. $\square$

Antes de provar os teoremas principais deste capítulo, vamos utilizar a ideia de Tarantello, cf. [18], para obter os seguintes resultados

Lema 2.6 *Se $\lambda < \lambda_1$, para cada $u \in N_\lambda(\Omega)$, existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0,\epsilon) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $\xi(0) = 1$, a função $\xi(w)(u-w) \in N_\lambda(\Omega)$ e*

$$\langle \xi'(0), w\rangle = -\frac{2\int_\Omega \nabla u \nabla w dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uwdx - (q+1)\int_\Omega a|u|^{q-1}uwdx}{(1-q)\int_\Omega |\nabla u|^2 - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}, \quad (2\text{-}4)$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração.

Para cada $u \in N_\lambda(\Omega)$, defina a função $F_u : \mathbb{R}_+^* \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como $F_u(\beta, w) = \langle J_\lambda'(\beta(u-w)), \beta(u-w)\rangle$, isto é, $F_u(\beta,w) = \beta^2\|u-w\|^2 - \beta^{p+1}\int_\Omega |u-w|^{p+1}dx - \beta^{q+1}\lambda\int_\Omega a(x)|u-w|^{q+1}dx$. Realizando estimativas análogas às realizadas no Apêndice B, obtemos que $F_u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e a derivada parcial de F_u com respeito a segunda variável é dada por:

$$\begin{aligned} \langle D_2F_u(\beta,w), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{F_u(\beta, w+tv) - F_u(\beta,w)}{t} \\ &= 2\int_\Omega \nabla(u-w)\nabla v dx - (p+1)\int_\Omega |u-w|^{p-1}(u-w)vdx - \\ &- (q+1)\int_\Omega a(x)|u-w|^{q-1}(u-w)vdx, \end{aligned} \quad (2\text{-}5)$$

onde $w, v \in H_0^1(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Como $u \in N_\lambda(\Omega)$, fazendo $\beta = 1$ e $w \equiv 0$, segue que $F_u(1,0) = \langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0$.

Derivando parcialmente a função F_u com respeito a primeira variável, obtemos

$$\begin{aligned} D_1F_u(\beta,w) &= 2\beta\|u-w\|^2 - (p+1)\beta^p\int_\Omega |u-w|^{p+1}dx - \\ &- (q+1)\beta^q\lambda\int_\Omega a(x)|u-w|^{q+1}dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} D_1F_u(1,0) &= 2\|u\|^2 - (p+1)\int_\Omega |u|^{p+1}dx - (q+1)\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx, \\ &= \|u\|^2 - \int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx + \\ &+ \|u\|^2 - p\int_\Omega |u|^{p+1}dx - q\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx \\ &= \langle J_\lambda'(u), u\rangle + \gamma_u''(1), \end{aligned}$$

onde a última identidade segue de (1-5) e (1-21). Como $\lambda < \lambda_1$, segue do Corolário 1.15 que

$$D_1F_u(1,0) = \gamma_u''(1) \neq 0.$$

Assim, utilizando o Teorema da Função Implícita A.3, temos que existe $\epsilon > 0$ e uma função $\xi : B(0,\epsilon) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, de classe $C^1(B(0,\epsilon),\mathbb{R})$ que satisfaz:
i) $F_u(\xi(w),w) = 0$, para todo $w \in B(0,\epsilon)$;
ii) $F_u(\beta,w) = 0$, $(\beta,w) \in (1-\delta,1+\delta) \times B(0,\epsilon)$, implica que $\beta = \xi(w)$, onde $(1-\delta,1+\delta) \subset \mathbb{R}_+^*$ é a vizinhança de 1 obtida através do Teorema da Função Implícita A.3.
iii) $\xi'(w) = -[D_1F_u(\xi(w),w)]^{-1} \circ D_2F_u(\xi(w),w)$, se $w \in B(0,\epsilon)$.

Do item i), temos que $\langle J_\lambda'(\xi(w)(u-w)),\xi(w)(u-w)\rangle$=0, implicando, assim, que $\xi(w)(u-w) \in N_\lambda(\Omega)$, para todo $w \in B(0,\epsilon)$. Além disso, como $F(1,0) = 0$ e $(1,0) \in (1-\delta,1+\delta) \times B(0,\epsilon)$, temos que $\xi(0) = 1$. Adicionalmente, de iii), temos que

$$\langle \xi'(0),w\rangle = -\frac{\langle D_2F_u(1,0),w\rangle}{2\|u\|^2 - (p+1)\int_\Omega |u|^{p+1}dx - (q+1)\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx}.$$

Mas, de (2-5), obtemos

$$\begin{aligned}\langle D_2F_u(1,0),w\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{F_u(1,tw)-F_u(1,0)}{t}\\ &= 2\int_\Omega \nabla u\nabla w dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uwdx - (q+1)\int_\Omega a|u|^{q-1}uwdx\end{aligned}$$

Além disso, como $u \in N_\lambda(\Omega)$, de (1-7) , temos que

$$2\|u\|^2 - (p+1)\int_\Omega |u|^{p+1}dx - (q+1)\lambda\int_\Omega a|u|^{q+1}dx = (1-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx.$$

O que mostra (2-4). Assim, concluímos o desejado.

□

Lema 2.7 *Se $\lambda < \lambda_1$, para cada $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0,\epsilon) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $\xi^-(0) = 1$, a função $\xi^-(w)(u-w) \in N_\lambda^-(\Omega)$ e*

$$\langle \xi'^-(0),w\rangle = -\frac{2\int_\Omega \nabla u\nabla w dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uwdx - (q+1)\int_\Omega a|u|^{q-1}uwdx}{(1-q)\int_\Omega |\nabla u|^2 - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}, \tag{2-6}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. O Lema 2.6 já nos garante que, para cada $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, existe $\epsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0,\epsilon) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $\xi^-(0) = 1$, a função $\xi^-(w)(u-w) \in N_\lambda(\Omega)$ e vale (2-6). Resta-nos, então, provar que $\xi^-(w)(u-w) \in N_\lambda^-(\Omega)$.

Como $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, segue da equação (1-23) e da definição de $N_\lambda^-(\Omega)$, que

$$\gamma_u''(1) = (1-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx < 0. \tag{2-7}$$

Além disso, $\xi^-(w)(u-w) \in N_\lambda(\Omega)$, para todo $w \in B(0,\epsilon)$, assim, segue da equação (1-23) que

$$\begin{aligned}\gamma''_{\xi^-(w)(u-w)}(1) &= (1-q)\|\xi^-(w)(u-w)\|^2 - (p-q)\int_\Omega |\xi^-(w)(u-w)|^{p+1}dx \\ &= (1-q)\xi^-(w)^2\|u-w\|^2 - (p-q)\xi^-(w)^{p+1}\int_\Omega |u-w|^{p+1}dx.\end{aligned}$$

Tomando o limite com $\epsilon \to 0$ na última igualdade acima e utilizando a continuidade da função ξ^- obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\gamma''_{\xi^-(w)(u-w)}(1) &= \\ &= (1-q)\|u\|^2 - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\ &= \gamma_u(1) < 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, para ϵ suficientemente pequeno, digamos $\epsilon \leq \epsilon_1$, teremos $\gamma''_{\xi^-(w)(u-w)}(1) < 0$, sempre que $w \in B(0,\epsilon_1)$. Nesse caso, basta considerar $\xi^-|_{B(0,\epsilon_1)}$ provando o resultado desejado. □

Agora, estamos aptos a provar a proposição abaixo, mas, antes disso, vamos enunciar o Princípio Variacional de Ekeland, cf.[10], do qual faremos uso neste trabalho.

Teorema 2.8 (Princípio Variacional de Ekeland) *Seja (X,d) um espaço métrico completo. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ um funcional semi-contínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in X$ tal que*

$$\phi(u_\epsilon) \leq \inf_X \phi + \epsilon$$

e

$$\phi'(u_\epsilon) < \phi(u) + \epsilon d(u,u_\epsilon), \text{ para todo } u \in X, \text{ com } u \neq u_\epsilon$$

Observação 2.9 *No nosso caso, onde $X = H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, a métrica coincide com a norma do espaço e a semi-continuidade inferior (na topologia)fraca implica na semi-continuidade inferior(na topologia forte).*

Observação 2.10 *No decorrer do texto diremos que uma sequência (f_n) de um certo espaço de Banach H é $o_n(1)$, quando $f_n \to 0$, na norma de H, quando $n \to +\infty$. Por outro lado, diremos que uma sequência (f_ρ) de um certo espaço de Banach H é $o_\rho(1)$, quando $f_\rho \to 0$, na norma de H, quando $\rho \to 0$.*

Proposição 2.11 *Existe $\lambda_3 > 0$, tal que, se $\lambda \in (0,\lambda_3)$, então:*

i) Existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset N_\lambda(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda(\Omega) + o_n(1),$$

$$J'_\lambda(u_n) = o_n(1), \text{ em } H^{-1}(\Omega);$$

ii) Existe uma sequência $\{u_n\} \subset N^-_\lambda(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha^-_\lambda(\Omega) + o_n(1),$$

$$J'_\lambda(u_n) = o_n(1), \text{ em } H^{-1}(\Omega);$$

Demonstração. **i)** Segue do Princípio Variacional de Ekeland, que existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \overline{N_\lambda(\Omega)}$ tal que

$$J_\lambda(u_n) < \inf_{\overline{N_\lambda(\Omega)}} J_\lambda(u) + \frac{1}{n} = \alpha_\lambda(\Omega) + \frac{1}{n} \tag{2-8}$$

e

$$J_\lambda(u_n) < J_\lambda(w) + \frac{1}{n}\|w-u_n\|, \text{ para cada } w \in \overline{N_\lambda(\Omega)},\ w \neq u_n \tag{2-9}$$

Afirmamos que a sequência $\{u_n\}$ não converge fraco para zero, pois, caso contrário, usando o fato do funcional J_λ ser fracamente semi-contínuo inferiormente e (2-8) , teríamos que $0 = J_\lambda(0) \leq \liminf_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda(\Omega) < 0$. O que é um absurdo. Dessa forma, $\{u_n\}$ também não converge forte para 0, e portanto, para n suficientemente grande $\|u_n\| > 0$. Isso mostra que, a partir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, a sequência $\{u_n\}$ pertence a $N_\lambda(\Omega)$. Considerando agora $\{u_n\}$ com $n > n_0$, temos que essa nova sequência também satisfaz (2-8) e (2-9).

Sendo assim, usando (2-8) e que $u_n \in N_\lambda(\Omega)$, temos que $\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda(\Omega)$, ou seja, $J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda(\Omega) + o_n(1)$.

Para n suficientemente grande, segue do Lema 2.5 que

$$\alpha_\lambda(\Omega) + \frac{1}{n} < -\frac{1-q}{1+q} t_\lambda^2 \beta(\Omega) < 0.$$

Portanto, de (2-8) e de (1-6), obtemos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\| - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx \\ &< -\frac{1-q}{1+q} t_\lambda^2 \beta(\Omega) < 0, \end{aligned} \tag{2-10}$$

já que $u_n \in N_\lambda(\Omega)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\| > 0$ a desigualdade acima nos garante que

$$\begin{aligned} -\lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx &= -\lambda\left(\frac{p-q}{(q+1)(p+1)}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx \\ &< -\frac{1-q}{1+q}t_\lambda^2\beta(\Omega). \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 e simplificando o termo comum $1+q$, obtemos

$$\lambda\left(\frac{p-q}{p+1}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx > (1-q)t_\lambda^2\beta(\Omega).$$

Utilizando a norma de a em $L^\infty(\Omega)$, as imersões de Sobolev e a desigualdade acima, obtemos a seguinte sequência de desigualdades

$$\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u_n\|^{q+1} \geq \int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx > \left(\frac{(1-q)(p+1)}{\lambda(p-q)}\right)t_\lambda^2\beta(\Omega). \tag{2-11}$$

Neste caso, segue que

$$\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u_n\|^{q+1} > \left(\frac{(1-q)(p+1)}{\lambda(p-q)}\right)t_\lambda^2\beta(\Omega).$$

Portanto temos

$$\|u_n\| > \left[\left(\frac{(1-q)(p+1)}{\|a\|_\infty\lambda(p-q)}\right)(S_{q+1}^{q+1})^{-1}t_\lambda^2\beta(\Omega)\right]^{\frac{1}{q+1}dx} = C_6, \tag{2-12}$$

onde $C_6 > 0$ é uma contante que não depende de n. Novamente, de (2-10), temos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx < 0.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\|u_n\|^2 < \lambda\left(\frac{p-q}{(q+1)(p+1)}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx$$

e, simplificando o termo comum $(p+1)$, utilizando a norma da função a em $L^\infty(\Omega)$ e as imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &< \lambda\left(\frac{2(p-q)}{(q+1)(p-1)}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx \\ &\leq \lambda\left(\frac{2(p-q)}{(q+1)(p-1)}\right)\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u_n\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Dividindo a desigualdade acima por $\|u_n\|^{q+1}$ e elevando a potência $\frac{1}{1-q}$, temos que

$$\|u_n\| < \left[\lambda\left(\frac{2(p-q)}{(q+1)(p-1)}\right)\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\right]^{1-q} = C_7, \tag{2-13}$$

onde $C_7 > 0$ é uma constante que não depende de n.

Agora, iremos mostrar que

$$\|J'_\lambda(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

A prova é dividida em uma série de estimativas.

O Lema 2.6 nos garante que, para cada $u_n \in N_\lambda(\Omega)$, existe $\epsilon_n > 0$ e uma função diferenciável $\xi_n : B(0,\epsilon_n) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}_+^*$, com $\xi_n(0) = 1$ e $\xi_n(w)(u_n - w) \in N_\lambda(\Omega)$, para todo $w \in B(0,\epsilon_n)$. Escolha $0 < \rho < \epsilon_n$ e $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$. Defina $w_\rho = \rho\frac{u}{\|u\|}$. Assim, $\|w_\rho\| = \rho$ e $w_\rho \in B(0,\epsilon_n)$, e, portanto, $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) \in N_\lambda(\Omega)$. Segue de (2-9) que

$$J_\lambda(u_n) \leq J_\lambda(\eta_\rho) + \frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|,$$

donde temos que

$$J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\|. \tag{2-14}$$

Note que quando $\rho \to 0$, então $\eta_\rho \to u_n$, já que $w_\rho \to 0$ e $\xi_n(w_\rho) \to \xi_n(0) = 1$. Como J_λ é Fréchet diferenciável, segue que

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) - \langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n\rangle|}{\|\eta_\rho - u_n\|} = 0.$$

Neste caso, temos que

$$J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) = \langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n\rangle + o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|), \tag{2-15}$$

onde $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|)}{\|\eta_\rho - u_n\|} = 0$. Assim, de (2-14) e (2-15) obtemos que

$$\langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n\rangle \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\| + o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|),$$

isto é,

$$\langle J'_\lambda(u_n), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n\rangle \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\| + o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|).$$

Somando e subtraindo adequadamente w_ρ na desigualdade acima, temos que

$$\langle J'_\lambda(u_n), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n + w_\rho - w_\rho\rangle \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\| + o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|).$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}\langle J'_\lambda(u_n), -w_\rho\rangle + (\xi_n(w_\rho)-1)\langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho\rangle&\\ \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\| + o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|).&\end{aligned} \tag{2-16}$$

Como $\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) = \eta_\rho \in N_\lambda(\Omega)$, então $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), \eta_\rho\rangle = 0$, isto é, $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)\rangle = 0$. Consequentemente, $\xi_n(w_\rho)\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle = 0$. Como $\xi_n(B(0,\epsilon_n)) \subset \mathbb{R}^*_+$, segue que $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle = 0$. Assim, somando $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle$ e $-\xi_n(w_\rho)\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle$ a equação (2-16) obtemos

$$\begin{aligned}\langle J'_\lambda(u_n), -w_\rho\rangle + (\xi_n(w_\rho)-1)\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle&\\ \geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\| + o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|).&\end{aligned}$$

Mas $w_\rho = \rho\frac{u}{\|u\|}$. Assim substituindo na desigualdade acima temos que

$$\begin{aligned}-\rho\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle &\geq -\frac{1}{n}\|\eta_\rho - u_n\| + o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|) -\\ &- (\xi_n(w_\rho)-1)\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle &\leq \frac{1}{n\rho}\|\eta_\rho - u_n\| + \frac{o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|)}{\rho} +\\ &+ \frac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho}\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle.\end{aligned} \tag{2-17}$$

Neste momento, gostaríamos de mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle\right| = 0. \tag{2-18}$$

Com efeito, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{n\rho}\|\eta_\rho - u_n\| = 0, \tag{2-19}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\rho\to 0}\frac{o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|)}{\rho} = 0 \tag{2-20}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\rho\to 0}\frac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho}\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle = 0. \tag{2-21}$$

Segue de (2-17) que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{\rho\to 0}\left\langle J'_\lambda(u_n),\frac{u}{\|u\|}\right\rangle &\le\\ &\le \lim_{n\to\infty}\lim_{\rho\to 0}[\tfrac{1}{n\rho}\|\eta_\rho-u_n\|+\tfrac{o_\rho(\|\eta_\rho-u_n\|)}{\rho}+\\ &+\tfrac{(\xi_n(w_\rho)-1)}{\rho}\langle J'_\lambda(u_n)-J'_\lambda(\eta_\rho),u_n-w_\rho\rangle].\end{aligned}$$

Mas, como ξ_n é uma função diferenciável e $\|w_\rho\|=\rho\to 0$ quando $\rho\to 0$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-\xi_n(0)-\langle\xi'_n(0),w_\rho\rangle|}{\|w_\rho\|} &=\\ \lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1-\langle\xi'_n(0),w_\rho\rangle|}{\rho}=0.\end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, segue que

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|}{\rho}-\frac{|\langle\xi'_n(0),w_\rho\rangle|}{\rho}\le 0.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|}{\rho} &\le \lim_{\rho\to 0}\frac{|\langle\xi'_n(0),w_\rho\rangle|}{\rho}\\ &\le \lim_{\rho\to 0}\frac{\|\xi'_n(0)\|\|w_\rho\|}{\rho}\\ &= \|\xi'_n(0)\|. \end{aligned}\tag{2-22}$$

Para verificarmos (2-19), (2-20) e (2-21), vamos supor que $\|\xi'_n(0)\|\le\mathbf{K}$, onde $\mathbf{K}>0$ é uma constante que não depende de n . Posteriormente, faremos a verificação deste fato.

Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned}\|\eta_\rho-u_n\| &= \|\xi_n(w_\rho)(u_n-w_\rho)-u_n\|\\ &\le |\xi_n(w_\rho)-1|\|u_n\|+|\xi_n(w_\rho)|\|w_\rho\|\\ &= |\xi_n(w_\rho)-1|\|u_n\|+|\xi_n(w_\rho)|\rho \end{aligned}\tag{2-23}$$

Assim, de (2-22), (2-23) e da continuidade da função ξ_n, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{n\rho}\|\eta_\rho - u_n\| &\leq \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{n\rho}\{|\xi_n(w_\rho)-1|\cdot\|u_n\| + |\xi_n(w_\rho)|\rho\} \\
&= \frac{\|u_n\|}{n}\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|}{\rho} + \lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)|}{n} \\
&\leq \frac{\|u_n\|}{n}\|\xi_n'(0)\| + \frac{|\xi_n(0)|}{n} \\
&= \frac{\|u_n\|}{n}\|\xi_n'(0)\| + \frac{1}{n}. \qquad (2\text{-}24)
\end{aligned}$$

Daí, utilizando a limitação, para sequência $\{u_n\}$, dada por (2-13) obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{n\rho}\|\eta_\rho - u_n\| &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{\|u_n\|}{n}\|\xi_n'(0)\| + \frac{1}{n} \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left[\frac{C_7}{n}\|\xi_n'(0)\| + \frac{1}{n}\right] = 0. \qquad (2\text{-}25)
\end{aligned}$$

Assim, provamos (2-19).

Note que, quando $\rho \to 0$, então $\eta_\rho \to u_n$. Então, usando que o funcional J_λ é de classe C^1, temos que

$$\lim_{\rho\to 0}\langle J_\lambda'(u_n) - J_\lambda'(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle = 0.$$

Segue da igualdade acima e de (2-22) que

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{(\xi_n(w_\rho)-1)|}{\rho}\right|\langle J_\lambda'(u_n) - J_\lambda'(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle| \leq \mathbf{K}\cdot 0 = 0, \qquad (2\text{-}26)$$

o que nos dá (2-21).

Além disso, temos que $\lim_{\rho\to 0}\dfrac{o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|)}{\|\eta_\rho - u_n\|} = 0$. Usando (2-22), (2-23) e (2-13), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\frac{\|\eta_\rho - u_n\|}{\rho} &\leq \lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|\|u_n\| + |\xi_n(w_\rho)|\rho}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|\|u_n\|}{\rho} + \lim_{\rho\to 0}|\xi_n(w_\rho)| \\
&\leq \|\xi_n'(0)\|C_7 + 1.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{o_\rho(\|\eta_\rho - u_n\|)}{\|\eta_\rho - u_n\|}\cdot\frac{\|\eta_\rho - u_n\|}{\rho} = 0. \qquad (2\text{-}27)$$

Assim, obtemos (2-20).

Dessa forma, segue de (2-17), (2-24), (2-26) e (2-27) que

$$\left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \leq \frac{\|u_n\|}{n}\|\xi_n'(0)\| + \frac{1}{n}. \tag{2-28}$$

Portanto, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \leq 0. \tag{2-29}$$

Agora, se ao invés de u, utilizarmos $-u$, as estimativas serão totalmente análogas, obtendo

$$\lim_{n\to\infty} - \left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle J_\lambda'(u_n), \frac{-u}{\|u\|} \right\rangle \leq 0. \tag{2-30}$$

Usando as desigualdades (2-29) e (2-30) concluímos (2-18).

Observe que tomamos $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ qualquer em (2-18). Por definição, temos que

$$\|J_\lambda'(u_n)\|_{H^{-1}} = \sup_{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}} \left| \left\langle J'(u_n), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \right|.$$

Assim, segue que

$$\lim_{n\in\infty} \|J_\lambda'(u_n)\|_{H^{-1}} = 0.$$

Agora, vamos verificar que, de fato, $\|\xi_n'(0)\|$ é limitado. Da equação (2-4) obtemos que

$$|\langle \xi_n(0), v\rangle| \leq \frac{2\int_\Omega |\nabla u_n||\nabla v|dx + (p+1)\int_\Omega |u_n|^p|v|dx + (q+1)\int_\Omega |a(x)||u_n|^q|v|dx}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx|},$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Utilizando a desigualdade de Hölder, a norma da função a em L^∞ e as imersões de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
|\langle \xi_n(0), v\rangle| &\leq \frac{2\|u_n\|\|v\| + (p+1)\left(\int_\Omega (|u_n|^p)^{\frac{p+1}{p}}dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |v|^{p+1}dx\right)^{\frac{1}{p+1}}}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx|} + \\
&+ \frac{(q+1)\|a\|_\infty \left(\int_\Omega (|u_n|^q)^{\frac{q+1}{q}}dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |v|^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}}}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx|} \\
&= \frac{2\|u_n\|\|v\| + (p+1)\|u_n\|_{p+1}^p\|v\|_{p+1} + (q+1)\|a\|_\infty\|u_n\|_{q+1}^q\|v\|_{q+1}}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx|} \\
&\leq \frac{2\|u_n\|\|v\| + (p+1){S_{p+1}}^{p+1}\|u_n\|^p\|v\| + (q+1)\|a\|_\infty {S_{q+1}}^{q+1}\|u_n\|^q\|v\|}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx|}.
\end{aligned}$$

Deixando o termo $\|v\|$ em evidência e utilizando (2-13), segue que

$$|\langle \xi_n(0), v\rangle| \leq \frac{b\|v\|}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx|},$$

onde $b>0$ é uma constante que não depende de n.

Queremos mostrar que

$$\left|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx\right| > c, \tag{2-31}$$

para alguma constante $c>0$ e para n suficientemente grande. Com efeito, vamos supor que existe uma subsequência (a qual também chamaremos de $\{u_n\}$) da sequência $\{u_n\}$ tal que

$$(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx = o_n(1), \tag{2-32}$$

isto é,

$$\|u_n\|^2 = \frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx + o_n(1). \tag{2-33}$$

Assim, de (2-12) e (2-32) obtemos que

$$\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx = \frac{1-q}{p-1}\|u_n\|^2 + o_n(1) > \frac{1-q}{p-1}(C_6)^2 + o_n(1).$$

Desse modo, temos que

$$\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx > C_p, \tag{2-34}$$

para n suficientemente grande, onde $C_p>0$ é uma constante que não depende de n. Como $u_n \in N_\lambda(\Omega)$, segue de (1-7) e (2-32) que

$$\begin{aligned}
\lambda\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx &= \|u_n\| - \int_\Omega |u_n|^{p+1} \\
&= \left(\frac{p-q}{1-q} - 1\right)\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1) \\
&= \left(\frac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1),
\end{aligned} \tag{2-35}$$

isto é,

$$\left(\frac{p-q}{p-1}\right)\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx = \left(\frac{p-q}{1-q}\right)\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1). \tag{2-36}$$

De (2-33) e (2-36), segue que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &= \left(\frac{p-q}{p-1}\right)\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx + o_n(1)\\
&\leq \left(\frac{p-q}{p-1}\right)\lambda\|a\|_\infty\|u_n\|_{q+1}^{q+1} + o_n(1)\\
&\leq \left(\frac{p-q}{p-1}\right)\lambda\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u_n\|^{q+1} + o_n(1),
\end{aligned}$$

onde utilizamos a norma em L^∞ da função a e utilizamos a imersão de Sobolev do espaço $H_0^1(\Omega)$ em L^{q+1}. Agora, dividindo a última expressão obtida acima por $\|u_n\|^{q+1}$ obtemos

$$\|u_n\|^{1-q} \leq \left(\frac{p-q}{p-1}\right)\lambda\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1} + o_n(1).$$

Portanto, temos que

$$\|u_n\| \leq \left[\left(\frac{p-q}{p-1}\right)\lambda\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\right]^{1-q} + o_n(1). \tag{2-37}$$

Observação 2.12 *Note que mantemos o termo $o_n(1)$ nas duas desigualdades acima, já que, utilizando (2-12), temos que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|o_n(1)|}{\|u_n\|^{q+1}} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{|o_n(1)|}{C_6^{q+1}} = 0,$$

isto é, o termo $\frac{o_n(1)}{\|u_n\|^{q+1}}$ continua sendo $o_n(1)$.

Agora, defina

$$I_\lambda(u_n) = \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\left[\frac{\|u_n\|^{2p}}{\int_\Omega|u_n|^{p+1}dx}\right]^{\frac{1}{p-1}} - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx.$$

Vamos provar que $I_\lambda(u_n)$ é $o_n(1)$. De (2-33) e (2-35), temos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= \left(\tfrac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\tfrac{p-1}{1-q}\right)\left[\frac{\left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega|u_n|^{p+1}+o_n(1)\right)^p}{\int_\Omega|u_n|^{p+1}dx}\right]^{\frac{1}{p-1}} -\\
&- \left(\tfrac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega|u_n|^{p+1} + o_n(1),
\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= \left(\tfrac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\tfrac{p-1}{1-q}\right)\left(\tfrac{p-q}{1-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{\left(\int_\Omega |u_n|^{p+1}\right)^p}{\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx}\right]^{\frac{1}{p-1}} - \\ &- \left(\tfrac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1). \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= \left(\tfrac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega |u_n|^{p+1} - \left(\tfrac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1) \\ &= o_n(1) \end{aligned} \tag{2-38}$$

Observação 2.13 *Note que* $\left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1)\right)^p = \left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}\right)^p + o_n(1)$. *De fato,* $\left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1)\right)^p = \left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}\right)^p \left(1 + \frac{o_n(1)}{\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}}\right)^p$. *A desigualdade* (2-34) *nos garante que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|o_n(1)|}{\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{|o_n(1)|}{\frac{p-q}{1-q}C_p} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{o_n(1)}{\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}}\right)^p = 1.$$

Consequentemente, $\left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1)\right)^p = \left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}\right)^p (1 + o_n(1))$. *Entretanto, de* (2-13)*, temos que*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1} + o_n(1)\right)^p o_n(1) &\leq \lim_{n\to+\infty} (S_{p+1}^{p+1}\|u_n\|^{p+1})^p o_n(1) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} (S_{p+1}^{p+1} C_7^{p+1})^p o_n(1) = 0. \end{aligned}$$

E assim provamos o desejado.

Por outro lado, utilizando a norma de a em $L^\infty(\Omega)$ e as imersões de Sobolev, temos que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &\geq \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\left[\frac{\|u_n\|^{2p}}{S_{p+1}^{p+1}\|u_n\|^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p-1}} - \lambda\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u_n\|^{q+1}\\
&= \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\left[\frac{\|u_n\|^{p-1}}{S_{p+1}^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p-1}} - \lambda\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\|u_n\|^{q+1}\\
&= \|u_n\|^{q+1}\left[\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\frac{\|u_n\|^{-(q+1)}}{(S_{p+1}^{p+1})^{\frac{1}{p-1}}} - \lambda\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\right].
\end{aligned}
$$

Utilizando (2-13) obtemos que

$$
I_\lambda(u_n) > \|u_n\|^{q+1}\left[\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\frac{{C_7}^{-(q+1)}}{(S_{p+1}^{p+1})^{\frac{1}{p-1}}} - \lambda\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}\right]. \tag{2-39}
$$

Agora, se tomarmos $\lambda < \lambda_3$, onde $\lambda_3 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2\|a\|_\infty S_{q+1}^{q+1}}\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\frac{{C_7}^{-(q+1)}}{(S_{p+1}^{p+1})^{\frac{1}{p-1}}}$, então o termo entre colchetes na desigualdade (2-39) é maior que $\frac{1}{2}\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\frac{{C_7}^{-(q+1)}}{(S_{p+1}^{p+1})^{\frac{1}{p-1}}}$. Fazendo uso de tal fato e da desigualdade em (2-12), segue que

$$
I_\lambda(u_n) > C_6 q + 1\frac{1}{2}\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\frac{{C_7}^{-(q+1)}}{(S_{p+1}^{p+1})^{\frac{1}{p-1}}}, \tag{2-40}
$$

o que contradiz (2-38). A contradição é oriunda da suposição de que ocorre (2-32). Dessa forma, obtemos que vale (2-31). Isso mostra que,

$$
\frac{|\langle \xi_n'(0), v\rangle|}{\|v\|} < \frac{b}{c},
$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, isto, é $\|\xi_n'(0)\| \leq \frac{b}{c} = \mathbf{K}$, sendo, portando, limitado.

(ii) Segue do Lema 1.24 que $N_\lambda^-(\Omega)$ é espaço métrico completo, e, assim, do Princípio Variacional de Ekeland, temos que existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset N_\lambda^-(\Omega)$ tal que

$$
J_\lambda(u_n) < \inf_{N_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) + \frac{1}{n} = \alpha_\lambda^-(\Omega) + \frac{1}{n} \tag{2-41}
$$

e

$$
J_\lambda(u_n) < J_\lambda(w) + \frac{1}{n}\|w - u_n\|, \; \textit{para cada } w \in N_\lambda^-(\Omega), \; w \neq u_n \tag{2-42}
$$

Sendo assim, usando (2-41) e que $u_n \in N_\lambda^-(\Omega)$, temos que $\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda(\Omega)$, ou seja, $J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^-(\Omega) + o_n(1)$.

Segue do Lema1.23 que existe uma constante $C_5 > 0$, que não depende de n, tal que

$$\|u_n\| \geq C_5. \tag{2-43}$$

Utilizando a coercividade do funcional J_λ sobre $N_\lambda(\Omega)$, e, portanto, sobre $N_\lambda^-(\Omega)$, temos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada, ou seja, existe uma constante $C_8 > 0$ que não depende de n tal que

$$\|u_n\| \leq C_8. \tag{2-44}$$

Assim, substituindo o Lema 2.6 pelo Lema 2.7, a equação (2-12) pela equação (2-43) e a equação (2-13) pela equação (2-44), as estimativas, a partir de agora, são análogas às realizadas na parte (i). □

Teorema 2.14 *Seja $\lambda_3 > 0$ como na proposição anterior, então para $\lambda \in (0, \lambda_3)$ o funcional J_λ tem um mínimo $u_0^+ \in N_\lambda^+(\Omega)$ que satisfaz:*
i) $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda(\Omega) = \alpha_\lambda^+(\Omega) < 0$;
ii) u_0^+ é uma solução não negativa da equação (P_λ);
iii) $J_\lambda(u_0^+) \to 0$, quando $\lambda \to 0$.

Demonstração. A Proposição 2.11, item i), nos garante que existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset N_\lambda(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda(\Omega) + o(1);$$

$$J'_\lambda(u_n) = o(1), \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Além disso, a desigualdade (2-13) nos garante que a sequência em questão é limitada. Assim a sequência $\{u_n\}$ admite uma subsequência (a qual também chamaremos de $\{u_n\}$) tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0^+, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),$$

para algum $u_0^+ \in H_0^1(\Omega)$.Usando as imersões compactas temos que

$$u_n \to u_0^+, \text{ fortemente em } L^{p+1}(\Omega)$$

e

$$u_n \to u_0^+, \text{ fortemente em } L^{q+1}(\Omega).$$

Afirmamos que $\int\limits_\Omega a(x)|u_0^+|^{q+1}dx \neq 0$. De fato, $\int\limits_\Omega a(x)|u_0^+|^{q+1}dx = 0$, então, utilizando a continuidade da função a e Teorema da Convergência Dominada A.4, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx = \int\limits_\Omega a(x)|u_0^+|^{q+1}dx = 0, \tag{2-45}$$

que implica, juntamente com (1-5), que

$$\|u_n\|^2 = \int\limits_\Omega |u_n|^{p+1}dx + o_n(1).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p+1}\int\limits_\Omega |u_n|^{p+1}dx - \lambda\frac{1}{q+1}\int\limits_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int\limits_\Omega |u_n|^{p+1}dx + o_n(1)\right) - \frac{1}{p+1}\int\limits_\Omega |u_n|^{p+1}dx + o_n(1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int\limits_\Omega |u_n|^{p+1}dx + o_n(1), \end{aligned}$$

implicando que $\lim\limits_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int\limits_\Omega |u_0^+|^{p+1}dx \geq 0$. O que é um absurdo, já que, $J_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda(\Omega) < 0$, quando $n \to \infty$. O que prova o desejado. Neste caso, podemos concluir que $u_0^+ \neq 0$.

Vamos provar que $\langle J'_\lambda(u_n), v\rangle \to \langle J'_\lambda(u_0^+), v\rangle$, quando $n \to +\infty$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ fixado. A convergência fraca nos garante que $\langle u_n, v\rangle \to \langle u_0^+, v\rangle$, quando $n \to \infty$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $u_n \to u_0^+$ em $L^{p+1}(\Omega)$, então, a menos de subsequência, $u_n \to u_0^+$, q.t.p de Ω e $|u_n(x)| \leq h_p(x) \in L^{p+1}(\Omega)$. Dessa forma, $|u_n|^{p-1}u_n v \to |u_0^+|^{p-1}u_0^+ v$ q.t.p de Ω e $|u_n|^p|v| \leq |h_p|^p|v| \in L^1(\Omega)$, já que $|h_p|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $v \in L^{p+1}(\Omega)$. Logo, segue do Teorema da Convergência Dominada A.4 que

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\Omega |u_n|^{p-1}u_n v dx = \int\limits_\Omega |u_0^+|^{p-1}u_0^+ v dx.$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\Omega a(x)|u_n|^{q-1}u_n v dx = \int\limits_\Omega a(x)|u_0^+|^{q-1}u_0^+ v dx.$$

Portanto, seguem as igualdades

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle J'_\lambda(u_n),v\rangle &= \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n v dx - \int_\Omega a(x)|u_n|^{q-1}u_n v dx \\
&= \int_\Omega \nabla u_0^+ \nabla v dx - \int_\Omega |u_0^+|^{p-1}u_0^+ v dx - \int_\Omega a(x)|u_0^+|^{q-1}u_0^+ v dx \\
&= \langle J'_\lambda(u_0^+),v\rangle.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, por hipótese, $\langle J'_\lambda(u_n),v\rangle \to 0$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Assim, $\langle J'_\lambda(u_0^+),v\rangle = 0$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, se $v = u_0^+$, temos que $\langle J'_\lambda(u_0^+),u_0^+\rangle = 0$. Assim, $u_0^+ \in N_\lambda(\Omega)$.

Afirmamos que $u_n \to u_0^+$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Se supormos, por absurdo, que $u_n \nrightarrow u_0^+$, pelo Lema(A.16), teremos que $\|u_0^+\|^2 < \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2$. Assim $\langle J'_\lambda(u_0^+),u_0^+\rangle < \liminf_{n\to\infty}\langle J'_\lambda(u_n),u_n\rangle = 0$, implicando, assim, que $u_0^+ \notin N_\lambda(\Omega)$. O que é um absurdo. A convergência forte juntamente com a continuidade do funcional J_λ nos garante que $J_\lambda(u_n) \to J_\lambda(u_0^+)$, e, portanto, $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda(\Omega) \le \alpha_\lambda^+(\Omega)$.

Vamos provar que $u_0^+ \in N_\lambda^+(\Omega)$. Temos que $u_0^+ \in N_\lambda(\Omega)$, assim, de (1-6) e do fato que $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda(\Omega) < 0$ obtemos

$$
\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_0\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega a(x)|u_0^+|^{q+1}dx < 0,
$$

a qual implica

$$
\lambda\left(\frac{p-q}{(q+1)(p+1)}\right)\int_\Omega a(x)|u_0^+|^{q+1}dx > \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)\|u_0\|^2.
$$

Logo, segue que $\int_\Omega a(x)|u_0^+|^{q+1}dx > 0$. Como estamos sob as condições do Caso 4, analisado na Seção 1.2 do Capítulo 1, e $\lambda < \lambda_1$, a Proposição (1.11) nos garante a existência de únicos $t^+ = t^+(u_0^+), t^- = t^-(u_0^+)$, com $0 < t^+ < t_{max} < t^-$ e $t^+u_0^+, t^-u_0^+ \in N_\lambda(\Omega)$. Mas $u_0^+ \in N_\lambda(\Omega)$, logo, $t^+ = 1$ ou $t^- = 1$. Vamos supor que $t^- = 1$, nesse caso, novamente, da Proposição (1.11), temos que $t^-u_0^+ = u_0^+ \in N_\lambda^-(\Omega)$ e $t^- > 0$ é o único que satisfaz $J_\lambda(u_0^+) = J_\lambda(t^-u_0^+) = \max_{t\ge 0} J(tu_0^+)$. Dessa forma, temos que $J_\lambda(t^+u_0^+) < J_\lambda(t^-u_0^+) = J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda(\Omega)$. Absurdo, já que $t^+u_0^+ \in N_\lambda^+(\Omega) \subset N_\lambda(\Omega)$. Assim, $t^+ = 1$. Portanto, $t^+u_0^+ = u_0^+ \in N_\lambda^+(\Omega)$; implicando que $J_\lambda(u_0^+) \ge \alpha_\lambda^+(\Omega)$. Porém, já havíamos mostrado que $J_\lambda(u_0^+) \le \alpha_\lambda^+(\Omega)$, e, portanto, $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda^+(\Omega)$. Finalizamos a demonstração do item i).

Da forma com que definimos o funcional energia J_λ, temos que $J_\lambda(|u_0^+|) =$

$J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda^+(\Omega)$. Dessa forma, podemos assumir que $u_0^+ \geq 0$, em Ω. Portanto, segue do Lema 1.8 que u_0^+ é uma solução não negativa do problema (P_λ). Finalizando a demonstração do item ii)

A desigualdade (1-9) do Teorema 1.4 e o Lema 1.16 nos garantem que $0 > J_\lambda(u_0^+) \geq -\lambda^{\frac{2}{1-q}} C_4$, onde $C_4 > 0$ é uma constante. Assim, temos que $J_\lambda(u_0^+) \to 0$ quando $\lambda \to 0$. O que prova (iii) e finaliza a demonstração da proposição. $\square$

Teorema 2.15 *Seja $\lambda_3 > 0$ como na Proposição (2.11), então, se $\lambda \in (0, \lambda_3)$, o funcional J_λ tem um mínimo $u_0^- \in N_\lambda^-(\Omega)$ que satisfaz:*

i) $J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-(\Omega)$;
ii) u_0^- é uma não negativa para o problema (P_λ).

Demonstração. A Proposição 2.11, item ii), nos garante que existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset N_\lambda^-(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^-(\Omega) + o(1);$$

$$J_\lambda'(u_n) = o(1), \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Além disso, a desigualdade (2-44) nos garante que a sequência em questão é limitada. Assim a sequência $\{u_n\}$ admite uma subsequência (a qual também chamaremos de $\{u_n\}$) tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0^-, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),$$

para algum $u_0^- \in H_0^1(\Omega)$. Das imersões compactas, temos que

$$u_n \to u_0^-, \text{ fortemente em } L^{p+1}(\Omega)$$
$$\text{e}$$
$$u_n \to u_0^-, \text{ fortemente em } L^{q+1}(\Omega).$$

Afirmamos que $u_0^- \neq 0$. De fato, se supormos que $u_0^- = 0$, então $\int_\Omega a(x)|u_0^-|^{q+1}dx = 0$ e $\int_\Omega |u_0^-|^{p+1}dx = 0$. Assim, de (1-5), obtemos que $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = 0$. Mas, isso é um absurdo, visto que, do Lema(1.23), temos que $\|u_n\| > C_5$.

Vamos provar que $\langle J_\lambda'(u_n), v\rangle \to \langle J_\lambda'(u_0^-), v\rangle$, quando $n \to \infty$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ fixado. A convergência fraca nos garante que $\langle u_n, v\rangle \to \langle u_0^-, v\rangle$, quando $n \to \infty$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $u_n \to u_0^-$ em $L^{p+1}(\Omega)$, então, a menos de subsequência, $u_n \to u_0^-$, q.t.p de Ω e $|u_n(x)| \leq h_p(x) \in L^{p+1}(\Omega)$. Dessa forma, $|u_n|^{p-1}u_n v \to |u_0^-|^{p-1}u_0^+ v$ q.t.p de Ω e $|u_n|^p|v| \leq |h_p|^p|v| \in L^1(\Omega)$, já que $|h_p|^p \in$

$L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $v \in L^{p+1}(\Omega)$. Logo, segue do Teorema da Convergência Dominada A.4 que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n v dx = \int_\Omega |u_0^-|^{p-1}u_0^- v dx.$$

Adicionalmente, temos que $L^{p+1}(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço $L^{q+1}(\Omega)$, assim, $u_n \to u_0^-$ também em $L^{q+1}(\Omega)$. Então, mais uma vez, $u_n \to u_0^-$, q.t.p de Ω e $|u_n(x)| \leq h_p(x) \in L^{p+1}(\Omega)$. Dessa forma, $|a(x)||u_n|^q|v| \leq \|a\|_\infty |h_p(x)|^q v \in L^1(\Omega)$, já que $|h_p|^q \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ e $v \in L^{q+1}(\Omega)$. Logo, utilizando novamente o Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x)|u_n|^{q-1}u_n v dx = \int_\Omega a(x)|u_0^-|^{q-1}u_0^- v dx.$$

Portanto segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle J_\lambda'(u_n), v\rangle &= \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n v dx - \int_\Omega a(x)|u_n|^{q-1}u_n v dx \\
&= \int_\Omega \nabla u_0^- \nabla v dx - \int_\Omega |u_0^-|^{p-1}u_0^- v dx - \int_\Omega a(x)|u_0^-|^{q-1}u_0^- v dx \\
&= \langle J_\lambda'(u_0^-), v\rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese, $\langle J_\lambda'(u_n), v\rangle \to 0$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Assim, $\langle J_\lambda'(u_0^-), v\rangle = 0$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, $u_0^- \in N_\lambda(\Omega)$.

Afirmamos que $u_n \to u_0^-$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Se supormos, por absurdo, que $u_n \nrightarrow u_0^-$, pelo Lema(A.16), teremos que $\|u_0^-\|^2 < \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2$. Assim, $\langle J_\lambda'(u_0^-), u_0^-\rangle < \liminf_{n\to\infty}\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle = 0$, implicando que $u_0^- \notin N_\lambda(\Omega)$. O que é um absurdo. A convergência forte juntamente com a continuidade do funcional J_λ garante que $J_\lambda(u_n) \to J_\lambda(u_0^-)$. Neste caso, temos que $J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-(\Omega)$. Como o espaço $N_\lambda^-(\Omega)$ é fechado, também temos que $u_0^- \in N_\lambda(\Omega)$. Finalizamos a demonstração do item i).

Da forma com que definimos o funcional energia J_λ, temos que $J_\lambda(|u_0^-|) = J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-(\Omega)$. Dessa forma, podemos assumir que $u_0^- \geq 0$, em Ω. Portanto, segue do Lema 1.8 que u_0^- é uma solução não negativa do problema (P_λ). Isto finaliza a demonstração do item ii)

□

CAPÍTULO 3

O Problema Côncavo-Convexo com Funções Peso Trocando de Sinal

Neste capítulo, baseados no artigo dos autores Brown&Wu [8], vamos mostrar que existem duas soluções não-negativas para o problema (Q_λ), sempre que $\lambda < \lambda_1$. Como vimos no Lema 1.8, pontos de mínimo de J_λ em $N_\lambda(\Omega)$, que não pertençam ao subconjunto $N_\lambda^0(\Omega)$, são pontos críticos do funcional J_λ. Dessa forma, vamos obter as soluções desejadas encontrando pontos de mínimo de J_λ sobre $N_\lambda^+(\Omega)$ e $N_\lambda^-(\Omega)$. Ao final do Capítulo, iremos mostrar a classe de regularidade das soluções encontradas e mostrar que, sob certas hipóteses uma das soluções é positiva.

O Teorema a seguir prova a existência de um mínimo do funcional J_λ em $N_\lambda^+(\Omega)$.

Teorema 3.1 *Se $\lambda < \lambda_1$, existe um mínimo de J_λ em $N_\lambda^+(\Omega)$.*

Demonstração. Como J_λ é limitado inferiormente em $N_\lambda(\Omega)$, então este também é limitado inferiormente em $N_\lambda^+(\Omega)$. Portanto, $\alpha_\lambda^+(\Omega) > -\infty$. Assim, existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset N_\lambda^+(\Omega)$ tal que $J_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda^+(\Omega)$, quando $n \to +\infty$. A coercividade de J_λ em $N_\lambda(\Omega)$ garante que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, existem uma subsequência (a qual também chamaremos, sem perda de generalidade, de $\{u_n\}$) e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, tais que, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue do Teorema de Rellich-Kondrachov A.14 e do Teorema A.5 que

$$u_n \to u_0, \text{ em } L^r(\Omega),\ r \in [1, 2^*)$$

$$u_n(x) \to u_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

$$|u_n(x)| \leq h_r(x) \in L^r(\Omega), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

a menos de subsequência. Como as funções $u_n \in N_\lambda(\Omega)$, segue da equação (1-6) que

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx,$$

isto é,

$$\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\int_{\Omega}a(x)|u_n|^{q+1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2-J_\lambda(u_n).$$

Utilizando que $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2>0$, para todo $n\in\mathbb{N}$ segue que

$$\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\int_{\Omega}a(x)|u_n|^{q+1}>-J_\lambda(u_n). \tag{3-1}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\Omega}a(x)|u_n|^{q+1}dx=\int_{\Omega}a(x)|u_0|^{q+1}dx$ e $\alpha_\lambda^+(\Omega)<0$, aplicando o limite com $n\to+\infty$ em ambos os lados da desigualdade (3-1), temos que

$$\lambda\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\right)\int_{\Omega}a(x)|u_0|^{q+1}dx\geq-\alpha_\lambda^+(\Omega)>0,$$

onde a última desigualdade segue do Lema 1.16. Portanto, $\int_{\Omega}a(x)|u_0|^{q+1}dx>0$ e $u_0\not\equiv 0$. Logo, ocorre o Caso 2 ou o Caso 4, analisados na Seção 1.2 do Capítulo 1. Dessa forma, segue da Proposição 1.11 que existe um único $t_0=t^+(u_0)>0$ tal que $t_0u_0\in N_\lambda^+(\Omega)$ e $J_\lambda(t_0u_0)<0$ (Lema 1.16). Note que tanto no Caso 2 quanto no Caso 4, temos que a função m_{u_0} é estritamente crescente no intervalo $(0,t_0)$. Assim, segue da igualdade (1-18) que

$$\begin{aligned}\gamma_{u_0}'(t) &= t^q\left[m_{u_0}(t)-\int_{\Omega}a(x)|u_0|^{q+1}\right]\\ &= t^q[m_{u_0}(t)-m_{u_0}(t_0)].\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma_{u_0}'(t)<0$, para todo $t\in(0,t_0)$, isto é, γ_{u_0}' é uma função estritamente decrescente em tal intervalo $(0,t_0)$ e $\gamma_{u_0}'(t_0)=0$.

Queremos provar que $u_n\to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Com efeito, vamos supor, por absurdo, que $u_n\nrightarrow u_0$. Assim, do Lema A.16, segue que $\liminf\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|^2>\|u_0\|^2$. Dessa forma, $\liminf\limits_{n\to+\infty}\gamma_{u_n}'(t)>\gamma_{u_0}'(t)$, para todo $t>0$. Particularmente, para $t=t_0$, temos que $\liminf\limits_{n\to+\infty}\gamma_{u_n}'(t_0)>\gamma_{u_0}'(t_0)=0$. Então, para n suficientemente grande $\gamma_{u_n}'(t_0)>0$.

Por outro lado, como $u_n\in N_\lambda^+(\Omega)$ temos que $m_{u_n}(1)=\int_\Omega a(x)|u_n|^{q+1}dx$ e m_{u_n} é estritamente crescente no intervalo $(0,1)$. Assim, $\gamma_{u_n}'(1)<0$, para todo $t\in(0,1)$. Logo, $t_0>1$, e, portanto, $J_\lambda(t_0u_0)=\gamma_{u_0}(t_0)\leq\gamma_{u_0}(1)=J_\lambda(u_0)<\liminf\limits_{n\to+\infty}J_\lambda(u_n)=\alpha_\lambda^+(\Omega)$. O que é um absurdo, já que $t_0u_0\in N_\lambda^+(\Omega)$. Dessa forma, $u_n\to u_0$ e $J_\lambda(u_0)=\alpha_\lambda^+(\Omega)$. Mais ainda, como $u_0\not\equiv 0$ e $\lambda<\lambda_1$ segue do Corolário 1.15 e do Lema 1.20 que $u_0\in N_\lambda^+(\Omega)$. Concluímos assim que u_0 é um ponto de mínimo local do funcional J_λ em $N_\lambda^+(\Omega)$. $\square$

O Próximo teorema garante a existência de um mínimo do funcional J_λ em $N_\lambda^-(\Omega)$.

Teorema 3.2 *Se $\lambda < \lambda_1$, então existe um mínimo de J_λ em $N_\lambda^-(\Omega)$.*

Demonstração. O Corolário 1.14 garante que $\alpha_\lambda^-(\Omega) \geq \delta_1 > 0$, logo, existe uma sequência minimizante $u_n \subset N_\lambda^-(\Omega)$, tal que $J_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda^-(\Omega)$, quando $n \to +\infty$. A coercividade do operador J_λ restrito a $N_\lambda(\Omega)$ garante que a sequência u_n é limitada. Portanto, admite subsequência a qual converge fraco em $H_0^1(\Omega)$. Digamos, sem perda de generalidade, que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Usando (1-7), segue que

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|u_n\|^2 - \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1}dx,$$

isto é,

$$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1}dx = \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\|u_n\|^2 + J_\lambda(u_n).$$

Utilizando que $\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\|u_n\|^2 > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos que

$$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b(x)|u_n|^{p+1}dx > J_\lambda(u_n). \tag{3-2}$$

Aplicando o limite, com $n \to +\infty$, na equação (3-2), segue do Teorema da Convergência Dominada A.4, que

$$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega b(x)|u_0|^{p+1}dx \geq \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^-(\Omega) > 0. \tag{3-3}$$

Logo, $\int_\Omega b(x)|u_0|^{p+1}dx > 0$, o que implica que $u_0 \neq 0$. Dessa forma, temos que ocorre o Caso 3 ou o Caso 4, estudados na Seção 1.2 do Capítulo 1. Em ambos os casos, existe um único $t_0 = t^-(u_0) > 0$, tal que $t_0u_0 \in N_\lambda^-(\Omega)$ e $\gamma_{u_0}(t_0) = \max_{t\geq 0}\gamma_{u_0}(t)$.

Queremos provar que $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Com efeito, vamos supor, por absurdo, que $u_n \nrightarrow u_0$. Assim, do Lema A.16, temos que $\|u_0\|^2 < \liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|^2$. Munidos de tal informação, obtemos que $J_\lambda(t_0u_0) < \liminf_{n\to+\infty} J_\lambda(t_0u_n) \leq \lim_{n\to+\infty} J_\lambda(t_0u_n)$. Adicionalmente, como $u_n \in N_\lambda^-(\Omega)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $t^-(u_n) = 1$ e $J_\lambda(u_n) = \gamma_{u_n}(1) = \max_{t>0}\gamma_{u_n}(t) \geq \gamma_{u_n}(t) = J_\lambda(tu_n)$, para todo $t > 0$; particularmente, para $t = t_0$. Assim, segue que

$$J_\lambda(t_0u_0) < \lim_{n\to+\infty} J_\lambda(t_0u_n) \leq \lim_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^-(\Omega),$$

o que é um absurdo, visto que $t_0u_0 \in N_\lambda^-(\Omega)$. O absurdo surgiu quando supomos que $u_n \nrightarrow u_0$. Dessa forma, $u_n \to u_0$ e, portanto, $J_\lambda(u_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^-(\Omega)$. Como $\lambda < \lambda_1$, o Lema 1.23 garante que $N_\lambda^-(\Omega)$ é fechado em $H_0^1(\Omega)$, e, assim, $u_0 \in N_\lambda^-(\Omega)$. $\square$

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 0.1:

Demonstração.[do Teorema 0.1] Como $|||u||| = \|u\|$, temos que $J_\lambda(|u|) = J_\lambda(u)$, $\langle J'_\lambda(u), u\rangle = \langle J'_\lambda(|u|), |u|\rangle$ e $\gamma''_u(1) = \gamma''_{|u|}(1)$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que os pontos de mínimo do funcional J_λ encontradas nos Teoremas 3.1 e 3.2, os quais chamaremos de u^+ e u^-, respectivamente, são não negativos em Ω. Além disso, $u^+ \in N_\lambda^+(\Omega)$ e $u^- \in N_\lambda^-(\Omega)$. O Corolário 1.14 e o Lema 1.16, nos garantem que $J_\lambda(u^+) < 0$ e $J_\lambda(u^-) > 0$. Como $J_\lambda(u^+) = \inf\limits_{N_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda = \alpha_\lambda^+(\Omega)$ e $J_\lambda(u^-) = \inf\limits_{N_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda = \alpha_\lambda^-(\Omega)$, o Lema 1.8 nos garante que u^+, u^- são pontos críticos do funcional J_λ, e, portanto, soluções fracas para o problema (Q_λ). Por argumento de regularização via *bootstrap* (cf. Apêndice C), prova-se que $u^\pm \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Adicionalmente, da Proposição C.15 temos que $u^\pm \in C^{2,\alpha q}(\overline{\Omega})$, caso as funções $a, b \in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. Por fim, utilizando a Desigualdade de Harnack, cf. Apêndice D, prova-se o Corolário D.5 que garante que se $\lambda < \left\{\dfrac{{C_9}^{1-q}}{\mathbf{C^Z Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}}\right\}$, então, a solução u^- encontrada é, na realidade, positiva em Ω. Assim, tomando $\lambda_0 = \min\left\{\dfrac{{C_9}^{1-q}}{\mathbf{C^Z Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}}, \lambda_1\right\}$, finalizamos a demonstração. $\square$

APÊNDICE A

Resultados de Cálculo Diferencial, Análise Funcional e Medida e Integração

Neste apêndice iremos apresentar alguns resultados clássicos de cálculo diferencial, análise funcional e de medida e integração que utilizamos neste trabalho.

Teorema A.1 (do Divergente) *Sejam $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ n funções C^1, definidas em uma vizinhança aberta O de $\overline{\Omega}$ tomando valores em $\mathbb{C}$; seja $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$. Temos*

$$\int_\Omega div\varphi dx = \int_{\partial\Omega}\varphi\cdot\nu d\sigma.$$

Demonstração: (cf. Treves [19], p. 78).

Teorema A.2 (Identidades de Green) *Sejam $\Omega\subset I\!R^N$ um domínio onde vale o Teorema do Divergente e $u,v\in C^2(\Omega)$. Então, valem as seguintes idêntidades*

$$\int_\Omega u\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu}d\sigma$$

e

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)d\sigma.$$

Demonstração: (cf. Folland [12], p. 69).

Teorema A.3 (Teorema da função implícita) *Seja $F\in C^k(\Sigma\times U,Y), k\geq 1$, onde Y é um espaço de Banach e Σ (respectivamente U) é um subconjunto aberto de um espaço de Banach T (respectivamente X). Suponha que $F(\lambda^\star,u^\star)=0$ e que $D_1(\lambda^\star,u^\star)\in Inv(U,Y)$. Então existe uma vizinhança $\Sigma^\star$ de $\lambda^\star$ em T, uma vizinhança $U^\star$ de $u^\star$ em X e uma aplicação $g\in C^k(\Sigma^*,X)$ tal que*
i) $F(\lambda,g(\lambda))=0$, para todo $\lambda\in\Sigma^\star$;
ii)$F(\lambda,u)=0$, $(\lambda,u)\in\Sigma^\star\times U^\star$, então $u=g(\lambda)$;
iii) $g'(\lambda)=-[D_2F(w)]^{-1}\circ D_1F(w)$, onde $w=(\lambda,g(\lambda))$ e $\lambda\in\Sigma^\star$

Demonstração.(cf. Ambrosetti&Prodi [4] ,p.38) □

Teorema A.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis satisfazendo:*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, *q.t.p. em* Ω;
(ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$, *tal que, para todo* n, $| f_n(x) | \leq g(x)$, *q.t.p. em* Ω.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Demonstração: (cf. Brézis [7], p. 90).

Teorema A.5 (Recíproca do Teorema de Lebesgue) *Sejam (f_n) uma sequência em $L^r(\Omega)$ e $f \in L^r(\Omega)$, tais que, $\| f_n - f \|_r \longrightarrow 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ e uma função $h \in L^r(\Omega)$, tais que,*

(i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$, *q.t.p. em* Ω;
(ii) $| f_{n_k}(x) | \leq h(x)$, $\forall k$, *q.t.p. em* Ω.

Demonstração: (cf. Brézis [7], p. 94).

Teorema A.6 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja $1 < r < \infty$ e seja $\phi \in (L^r(\Omega)^*)$. Então, existe uma única função $u \in L^{r'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf dx, \quad \forall f \in L^r(\Omega).$$

Além disso,

$$\| u \|_{r'} = \| \phi \|_{(L^p(\Omega)^*)} .$$

Demonstração: (cf. Brézis [7], p. 97).

Teorema A.7 (Desigualdade de Hölder) *Seja $f \in L^r(\Omega)$ e $g \in L^{r'}(\Omega)$ com $1 \leq r \leq \infty$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega | fg | \, dx \leq \left(\int_\Omega | f |^p \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega | g |^q \, dx \right)^{\frac{1}{r'}}$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.
Demonstração: (cf. Brézis [7], p.92).

Definição A.8 (Suporte de uma função contínua) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de u como sendo*

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; \quad u(x) \neq 0\}}.$$

Consideremos $W^{1,r}(\Omega)$, com $1 < r < \infty$, o espaço usual de Sobolev equipado com a norma

$$\| u \|_{1,r} = (\| u \|_r^r + \| \nabla u \|_r^r)^{\frac{1}{r}}$$

e seja $W_0^{1,r}$ o subespaço fechado e convexo de $W^{1,r}(\Omega)$ dado por

$$W_0^{1,r} = \{u \in W^{1,r}(\Omega); u \mid_{\partial\Omega} = 0\}$$

Teorema A.9 (Densidade) *Suponha que Ω é de classe C^1, e seja $u \in W^{1,r}(\Omega)$ com $1 \leq r < \infty$. Então, existe uma sequência (u_n) de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \mid_\Omega \longrightarrow u$ em $W^{1,r}(\Omega)$. Em outras palavras, a restrição à Ω de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ formam um subespaço denso de $W^{1,r}(\Omega)$*

Demonstração: (cf. Brézis [7], p. 277).

Lema A.10 *Seja $u \in W^{1,r}(\Omega)$ com $1 \leq r < \infty$ e assuma que $supp(u)$ é um subconjunto compacto de Ω. Então, $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$.*

Demonstração: (cf. Brézis [7], p.288).

Definição A.11 *Dizemos que um dominio Ω satisfaz a propriedade do cone se para qualquer $x \in \Omega$, existe um cone limitado C_x, com vértice em x, tal que, C_x está inteiramente contido em Ω.*

Definição A.12 *Dizemos que um domínio Ω satisfaz a propriedade de lipschitz local se existe uma cobertura localmente finita O por abertos U, tais que, $O \cap U$ são gráficos de funções uniformemente lipschitzianas.*

Teorema A.13 (Imersões Contínuas de Sobolev) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio satisfazendo a propriedade do cone, $j \geq 0$ e $m \geq 1$ inteiros positivos e $1 \leq k < \infty$. Então ocorrem a seguintes imersões contínuas*

(i) Se $m < \dfrac{N}{k}$, $W^{m,k}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, *onde* $k \leq r \leq \dfrac{Nk}{N - mk} = k^*$;

(ii) Se $m = \dfrac{N}{k}$, $W^{m,k}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, *onde* $k \leq r \leq \infty$;

(iii) Se $\dfrac{N}{k} < m$, $W^{j+m,k}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$, *onde* $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), |\alpha| \leq j\}$;

Se, além disso, Ω tem a propriedade de fortemente lipschitz local, então, *(iv) Se* $m-1<\dfrac{N}{k}<m$

$$W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow C^{j+\alpha}(\overline{\Omega}),\quad onde\quad 0<\alpha\leq m-\frac{N}{k};$$

(v) Se $m-1=\dfrac{N}{k}$

$$W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow C^{j+\alpha}(\overline{\Omega}),\quad onde\quad 0<\alpha<1.$$

Demonstração: (cf. Adams [1], p.97).

Teorema A.14 (Rellich-Kondrachov) *Sejam* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ *um domínio satisfazendo a propriedade do cone,* $m\geq 1$ *inteiro e* $1\leq k<\infty$*. Então, para qualquer* $j\geq 0$ *as imersões abaixo são compactas:*

(i) Se $m<\dfrac{N}{k}$, $W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$*, onde* $1\leq q<\dfrac{Nk}{N-mk}$*;*

(ii) Se $m=\dfrac{N}{k}$, $W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$*, onde* $1\leq q<\infty$*;*

(iii) Se $\dfrac{N}{k}<m$, $W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow C^j_B(\Omega)$*, onde e* $W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$*, onde* $1\leq q<\infty$*;*

(iv) Se $\dfrac{N}{k}<m$ *e* Ω *tem a propriedade de lipschitz local, então,*

$$W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}).$$

(v) Se $m-1<\dfrac{N}{k}<m$ *e* Ω *tem a propriedade de lipschitz local, então,*

$$W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow C^{j+\alpha}(\overline{\Omega}),\quad onde\quad 0<\alpha<m-\frac{N}{k}.$$

Em particular, se $N=(m-1)k$*, então,* $W^{j+m,k}(\Omega)\hookrightarrow C^{j+\alpha}(\overline{\Omega})$*, para* $0<\alpha<1$.

Demonstração: (cf. Adams [1], p.144).

A seguir enunciaremos e provaremos dois Lemas que serão de grande importância na demonstração dos resultados principais deste trabalho, sendo que o primeiro deles é uma variação do Lema de Brézis-Lieb para o espaço de Sobolev $H^1_0(\Omega)$.

Lema A.15 *Se* $u_n\rightharpoonup u_0$ *em* $H^1_0(\Omega)$*, então ocorre a seguinte igualdade*

$$\|u_0\|^2=\lim_{n\to+\infty}[\|u_n\|^2-\|u_n-u_0\|^2] \tag{A-1}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 - \|u_n - u_0\|^2 &= \langle u_n, u_n\rangle - \langle u_n - u_0, u_n - u_0\rangle \\
&= \langle u_n, u_n\rangle - \langle u_n, u_n\rangle + 2\langle u_n, u_0\rangle - \langle u_0, u_0\rangle \\
&= 2\langle u_n, u_0\rangle - \langle u_0, u_0\rangle.
\end{aligned}$$

Aplicando o limite em ambos os lados da igualdade acima, com $n \to +\infty$, e utilizando que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle u_n, u_0\rangle = \langle u_0, u_0\rangle$ segue a igualdade (A-1). □

Lema A.16 *Seja* (u_n) *uma sequência em* $H_0^1(\Omega)$*, tal que* $u_n \rightharpoonup u_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$*, porém,* $u_n \nrightarrow u_0$*. Então,* $\|u_0\|^2 < \liminf\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|^2$.

Demonstração. Como $u_n \nrightarrow u_0$, então existe $\varepsilon > 0$, tal que, $\|u_n - u_0\|^2 \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|^2 - \|u_n - u_0\|^2 \leq \|u_n\|^2 - \varepsilon.$$

Aplicando o limite inferior, com $n \to +\infty$, a ambos os lados da desigualdade acima, temos que

$$\liminf_{n\to+\infty} [\|u_n\|^2 - \|u_n - u_0\|^2] \leq \liminf_{n\to+\infty} [\|u_n\|^2] - \varepsilon. \tag{A-2}$$

Assim, segue do Lema A.15 que

$$\|u_0\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 - \varepsilon.$$

Consequentemente, $\|u_0\|^2 < \liminf\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|^2$. □

APÊNDICE B

Resultados Sobre Análise Funcional Não-Linear

Sempre que X for um espaço de Banach, vamos denotar por X^* seu dual (topológico), isto é, o espaço dos funcionais lineares e contínuos definidos em X e tomando valores em $\mathbb{R}$. Lembramos que X^* é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|A\| = \sup\{|A(u)| : u \in X, \|u\| = 1\}.$$

Enunciaremos agora, diversas definições e resultados que faremos uso durante este trabalho.

Definição B.1 (Convergência Forte) *Seja X um espaço vetorial normado e $(u_n) \subseteq X$ uma sequência. Dizemos que (u_n) converge forte para u em X, e escrevemos*

$$u_n \to u,$$

se

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\| = 0,$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma do espaço X.

Definição B.2 (Convergência Fraca) *Seja X um espaço de Banach e $(u_n) \subseteq X$ uma sequência. Dizemos que (u_n) converge fraco para $u \in X$, e escrevemos*

$$u_n \rightharpoonup u,$$

se

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle, \quad \forall f \in X^*.$$

Dessa forma, temos que, se $u_n \to u$, então $u_n \rightharpoonup u$

Teorema B.3 (Compacidade Fraca) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (u_n) uma sequência limitada em X. Então, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$ e*

$u \in X$, tal que,

$$u_{n_j} \rightharpoonup u. \quad em \quad X.$$

Demonstração: (cf. Brézis [7], p. 69).

Teorema B.4 *Seja X um espaço de Banach e (u_n) uma sequência em X e $\sigma(X,X^*)$ a topologia fraca em X. Então,*

(i) $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\sigma(X,X^*)$ *se, e somente se,* $\langle f,u_n\rangle \to \langle f,u\rangle$, $\forall f \in X^*$.
(ii) *Se* $u_n \to u$, *então* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\sigma(X,X^*)$.
(iii) *Se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\sigma(X,X^*)$, *então* $(\| u_n \|)$ *é limitada e* $\| u \| \leq \liminf \| u_n \|$.
(iv) *Se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\sigma(X,X^*)$ *e* $f_n \to f$ *em* X^* *(isto é,* $\| f_n - f \|_{X^*} \to 0$*), então* $\langle f_n,u_n\rangle \to \langle f,u\rangle$.

Demonstração: (cf. Brézis [7], p.58).

Se X é um espaço de Banach e $U \subset X$ é um aberto, um funcional I em U é uma aplicação $I : U \to \mathbb{R}$.

Apresentaremos, agora, algumas definições de diferenciabilidade e suas principais propriedades. Tais definições e resultados podem ser encontrados em [5].

Definição B.5 (Fréchet Diferenciável) *Seja X um espaço de Banach, U um subconjunto aberto de X e seja $I : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é (Fréchet) diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X^*$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0 \tag{B-1}$$

Definição B.6 *Seja $I : U \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável em $u \in U$. O único elemento de X^* tal que ocorre (B-1) é chamado de diferencial de Fréchet de I em u, e é denotada por $I'(u)$ ou por $dI(u)$. Assim, temos que*

$$I(u+v) = I(u) + I'(u)v + o(\|v\|)$$

quando $\|v\| \to 0$.

Definição B.7 *Seja U um subconjunto aberto de X. Se o funcional I é diferenciável em todo $u \in U$, dizemos que I é diferenciável em U. A aplicação $I' : U \to X^*$ que leva $u \in U$ em $I'(u) \in X^*$ é chamada de derivada (de Fréchet) de I.Se a derivada I' é contínua de U em X^* nós dizemos que I é de classe C^1 em U e escrevemos $I \in C^1(U)$.*

Definição B.8 *Seja H um espaço de Hilbert, U um subconjunto aberto de H e seja $R : H^* \to H$ o isomorfismo de Riesz. Assuma que o funcional $I : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em u. O elemento $RI'(u) \in H$ é chamado de gradiente de I em u e é denotado por $\nabla I(u)$; portanto*

$$I'(u)v = \langle \nabla I(u), v \rangle,$$

para todo $v \in H$.

Observação B.9 *Neste trabalho cometeremos um abuso de notação denotando o representante de $I'(u)$ na representação de Riesz pelo mesmo nome. Dessa forma, escreveremos $\langle I'(u), v \rangle$ ou invés de $\langle \nabla I(u), v \rangle$.*

Definição B.10 *Seja X um espaço de Banach, U um subconjunto aberto de X e $I : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é Gâteaux diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X^*$ tal que, para todo $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = Av. \tag{B-2}$$

Se I é Gâteaux diferenciável em u, existe um único funcional linear $A \in X^*$ satisfazendo (B-2). Este é chamado de derivada de Gâteaux de I em u e é denotado por $I'_G(u)$.

Proposição B.11 *Assuma que U é um subconjunto aberto de X, que I é Gâteaux diferenciável em U e que $I'_G(u)$ é contínua em $u \in U$. Então, I é também Fréchet diferenciável em u e $I'_G(u) = I'(u)$.*

Demonstração: (cf. Ambrosetti & Prodi [4], p. 14).

Definição B.12 *Seja X um espaço de Banach, U um aberto de X e assuma que $I : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável. Um ponto crítico de I é um ponto $u \in U$ tal que*

$$I'(u) = 0.$$

Como $I'(u)$ é um elemento do espaço dual X^*, isto significa que $I'(u)v = 0$, para todo $v \in X$.

Agora, faremos uso dos conceitos acima para provarmos alguns resultados a cerca do funcional J_λ.

Lema B.13 *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\int_\Omega a(x)|u+tv|^{q+1}dx - \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx}{t} = (q+1)\int_\Omega a(x)|u|^{q-1}uvdx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Para cada $x \in \Omega$, considere a seguinte função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) = |u+tv|^{q+1} = |u(x)+tv(x)|^{q+1}.$$

Temos que $f(0) = |u|^{q+1}$, e, portanto, $f(t) - f(0) = |u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}$. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por ser a composta de duas funções contínuas. Se supormos que $u(x) \neq 0$. Aplicando a regra da cadeia, temos que para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $u+tv \neq 0$, vale que

$$f'(t) = (q+1)|u+tv|^q \frac{(u+tv)}{|u+tv|} v = (q+1)|u+tv|^{q-1}(u+tv)v,$$

inclusive para $t = 0$, temos que $f'(t) = (q+1)|u|^{q-1}uv$. Se considerarmos a função contínua $g(t) = |u+tv|$, como $g(0) = |u| > 0$, existe uma vizinhança $[-t,t]$ da origem tal que $g(t) = |u+tv| > 0$, para todo elemento nesse intervalo. Assim, temos que f é de classe C^1 em $(0,t)$ (respectivamente em $(-t,0)$). Então, pelo teorema do valor médio real existe $\theta(x,t) \in (0,t)$ (respectivamente, $\theta(x,t) \in (-t,0)$) tal que

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(\theta(x,t)) = (q+1)|u+\theta v|^{q-1}(u+\theta v)v \tag{B-3}$$

(respectivamente, $\frac{f(0)-f(-t)}{t} = f'(\theta(x,-t))$). Assim, temos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0).$$

(respectivamente, $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0)$). Donde, segue que

$$\lim_{t\to 0} \frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} = (q+1)|u|^{q-1}uv. \tag{B-4}$$

Agora estudaremos, separadamente, o caso $u(x) = 0$. Nesse caso, a função f se resume a $f(t) = |tv|^{q+1}$. Assim, temos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{|tv|^{q+1}}{t} = 0,$$

já que $1 < q+1 < 2$. Provamos que independente do valor de $u(x)$, vale (B-4).

Além disso, de (B-3), temos que

$$\left| \frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} \right| = (q+1)|u+\theta v|^q|v| \leq (q+1)[|u|^q|v| + |\theta|^q|v|^q].$$

Como estamos fazendo $|t|$ pequeno, e consequentemente $|\theta|$ pequeno, podemos supor que $\theta < 1$. Assim, segue que

$$\left|\frac{|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1}}{t}\right| \leq (q+1)[|u|^q|v|+|v|^{q+1}], \tag{B-5}$$

onde o lado direito da equação (B-5) não depende de t. Como $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em L^{q+1}, temos que $u,v \in L^{q+1}$. Portanto, $\frac{|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1}}{t} \in L^{q+1}$. Assim, segue do Teorema da Convergência Dominada A.4, que

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{a(x)(|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1})}{t}dx = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{a(x)(|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1})}{t},$$

logo

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{a(x)(|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1})}{t}dx = (q+1)\int_\Omega a(x)|u|^{q-1}uvdx.$$

Isso conclui a prova. □

Lema B.14 *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_\Omega b(x)|u+tv|^{p+1}dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx}{t} = (p+1)\int_\Omega b(x)|u|^{p-1}uvdx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. *A demonstração deste Lema segue exatamente os mesmos passos do Lema B.13.* □

Lema B.15 *O funcional $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx,$$

onde $\lambda > 0$, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$ e as funções $a,b : \Omega \to \mathbb{R}$ são contínua é de classe C^1.

Demonstração. Sejam $u,v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+tv)|^2-|\nabla u|^2}{t}dx &= \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\langle\nabla u,\nabla u\rangle+2t\langle\nabla u,\nabla v\rangle+t^2\langle\nabla v,\nabla v\rangle-\langle\nabla u,\nabla u\rangle}{t}dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \langle\nabla u,\nabla v\rangle dx \\
&= \int_\Omega \langle\nabla u,\nabla v\rangle dx.
\end{aligned}
$$

Utilizando o obtido acima e os Lemas B.13 e B.14, temos que existe a derivada de Gâteaux de J_λ, em todo $u\in H_0^1(\Omega)$ para todo $v\in H_0^1(\Omega)$. Além disso, temos que $\langle J'_\lambda(u),v\rangle$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J_\lambda(u+tv)-J_\lambda(u)}{t} &= \\
&= \int_\Omega \langle\nabla u,\nabla v\rangle dx-\lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q-1}uvdx-\int_\Omega b(x)|u|^{p-1}uvdx.
\end{aligned}
$$

Neste momento devemos mostrar que J'_λ é contínua, para todo $u\in H_0^1(\Omega)$. Com efeito, vamos mostrar que J_λ é sequencialmente contínua, isto é, se $u_n\to u$, em $H_0^1(\Omega)$. Então $|\langle J'_\lambda(u_n),v\rangle-\langle J'_\lambda(u),v\rangle|\to 0$, para todo $v\in H_0^1(\Omega)$.

A diferença $|\langle J'_\lambda(u_n),v\rangle-\langle J'_\lambda(u),v\rangle|$ é igual a seguinte expressão

$$
\left|\int_\Omega \langle\nabla(u_n-u),\nabla v\rangle-\lambda\int_\Omega a(|u_n|^{q-1}u_n-|u|^{q-1}u)v-\int_\Omega b(|u_n|^{p-1}u_n-|u|^{p-1}u)v\right|.
$$

Utilizando a desigualdade triangular, a desigualdade de Hölder e as normas em L^∞ das funções a e b, obtemos que a expressão acima é menor ou igual a

$$
\|u_n-u\|\|v\|+\lambda\|a\|_\infty\int_\Omega ||u_n|^{q-1}u_n-|u|^{q-1}u||v|+\|b\|_\infty\int_\Omega ||u_n|^{p-1}u_n-|u|^{p-1}u||v|.
$$

Agora, iremos analisar cada termo da expressão acima. Como $v\in H_0^1(\Omega)$ e u_n converge para u na norma do espaço $H_0^1(\Omega)$, segue que

$$
\|u_n-u\|\|v\|\to 0, \tag{B-6}
$$

quando $n\to\infty$. Além disso, pelas imersões de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$, temos que $u_n(x)\to u(x)$, $q.t.p$ de Ω e existem funções, $h_{q+1}(x)\in L^{q+1}(\Omega)$ e $h_{p+1}(x)\in L^{p+1}(\Omega)$, tais que $|u_n(x)|\le h_{q+1}(x)$ e $|u_n(x)|\le h_{p+1}(x)$. A convergência $q.t.p$ implica que $|(|u_n|^{q-1}u_n-|u|^{q-1}u)||v|\to 0$ e $|(|u_n|^{p-1}u_n-|u|^{p-1}u)||v|\to 0$ $q.t.p$ em Ω. Além disso, temos as seguintes estimativas

$$
|(|u_n|^{q-1}u_n-|u|^{q-1}u)||v|\le|u_n|^q|v|+|u|^q|v|\le h_{q+1}^q(x)|v|+|u|^q|v|\in L^1(\Omega)
$$

e

$$|(|u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u)||v| \leq |u_n|^p|v| + |u|^p|v| \leq h_{p+1}^p(x)|v| + |u|^p|v| \in L^1(\Omega),$$

e assim, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |(|u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u)||v|dx = 0 \tag{B-7}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |(|u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u)||v|dx = 0. \tag{B-8}$$

As equações (B-6), (B-7) e (B-8) implicam que a derivada de Gâteaux de J_λ existe e é contínua em todo $u \in H_0^1(\Omega)$. E assim, finalizamos a demonstração.

□

APÊNDICE C

Regularização Via *Bootstrap*

Esse apêndice tem por objetivo exibir o processo de regularização denominado "*bootstrap*", que foi citado algumas vezes no presente trabalho. Primeiramente, exibiremos algumas definições e resultado sobre o espaço das funções Hölder contínuas. [13]

Definição C.1 (Funções Hölder Contínuas) *Dizemos que uma função u é Hölder contínua em $\overline{\Omega}$ com ordem $\alpha \in (0,1)$ se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \text{ com } x,\ y \in \Omega. \tag{C-1}$$

Definição C.2 *i) Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e contínua, nós definimos*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

ii)A α-ésima seminorma de Hölder de $u : \Omega \longrightarrow I\!R$ é

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}; x,y \in \Omega \text{ e } x \neq y\right\},$$

e a α-ésima norma de Hölder é definida como segue

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Definição C.3 *O espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ consiste em todas as funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ para as quais a norma definida por*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^{\alpha}u]_{C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

é finita.

Proposição C.4 *O espaço de funções $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração.(cf. Evans [11], p. 255) □

Proposição C.5 *Se* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *e* $0 < \nu < \alpha \leq 1$, *então* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \overset{cont}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$

Demonstração.(cf Furtado [13]) □

No problema (Q_λ) supomos que o domínio Ω é regular. Por mais que essa hipótese não tenha sido utilizada nos capítulos anteriores, neste apêndice a regularidade do conjunto Ω será essencial. O termo "regular" pode ter diversos significados na literatura. Entretanto, neste trabalho, dizer que conjunto Ω é regular significa que este satisfaz as hipóteses do próximo teorema.

O Teorema a seguir aborda dois resultados muito importantes na teoria de regularidade para problemas elípticos. Este foi enunciado segundo [13].

Teorema C.6 ***(i)(Agmon, Douglis, Nirenberg)*** *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio e* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Suponha que Ω *é de classe* C^2 *com* $\partial\Omega$ *limitada e* $f \in L^s(\Omega), 1 < s < \infty$. *Então* $u \in W^{2,s}(\Omega)$ *e existe uma constante* $C = C(\Omega, s) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{2,s} \leq C\|f\|_s.$$

(ii)(Schauder) *Se* Ω *é limitado e de classe* $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e existe uma constante* $C = C(\Omega, \alpha) > 0$, *tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

A prova de (i) encontra-se em [2] e a prova de (ii) encontra-se em [14]. O Teorema acima também pode ser usado para regularizar soluções de problemas elípticos não-lineares, como é o nosso caso. Por isso, vamos utilizá-lo para provar que soluções $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ do problema (Q_λ) pertencem ao espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Defina $g(x,u) = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p$, que corresponde ao lado direito da equação diferencial em (Q_λ). Então, utilizando a norma em $L^\infty(\Omega)$ das funções a e b, obtemos a seguinte condição de crescimento sobre g:

$$|g(x,u)| \leq \lambda\|a\|_\infty|u|^q + \|b\|_\infty|u|^p. \tag{C-2}$$

Dessa forma, se $u \in L^r(\Omega)$, onde $p \leq r \leq \infty$, então $|u|^q \in L^{\frac{r}{q}}(\Omega)$ e $|u|^p \in L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$. Como $p > q$, temos que $\frac{r}{p} < \frac{r}{q}$. Assim, $|u|^p, |u|^q \in L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$ (já que $L^{\frac{r}{q}}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$; implicando que $g \in L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$.

Vamos começar o processo tratando os casos $n = 1$ e $n = 2$ separadamente. Se $n = 1$ temos de imediato, do Teorema(A.13), que o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Deste modo, temos o desejado. Se $n = 2$ temos, novamente, do Teorema(A.13), que $W_0^{1,2}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)$, para todo $2 \leq s < \infty$. Logo, tomando $s = 2p$, dada a condição de crescimento (C-2), temos que $g \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega) = L^2(\Omega)$. Assim segue do Teorema(C.6), que $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Além disso, do Teorema(A.13), obtemos que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

A partir de agora, trabalharemos somente com a dimensão $n > 2$.

Primeiramente, segue da imersão $H_0^1(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^{2^*}(\Omega)$, que $u \in L^{2^*}(\Omega)$; o que implica, como já vimos, que $g \in L^{r_1}(\Omega)$, onde $r_1 = \frac{2^*}{p}$. Assim, segue do Teorema(C.6) que $u \in W^{2,r_1}(\Omega)$. Agora, devemos considerar três casos:

1)$2r_1 > n$. Então, temos que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e finalizamos aqui o *bootstrap*;

2) $2r_1 = n$. Então $W^{2,r_1}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$, para todo $r_1 \leq r < \infty$. Neste caso, tome r de modo que $\frac{2r}{p} > n$, pois, assim, $u \in L^r(\Omega)$, e, portando, pelo raciocínio anterior $g \in L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$. Novamente, pelo Teorema(C.6), $u \in W^{2,\frac{r}{p}}(\Omega)$. Mas, da maneira que tomamos r, estamos no caso 1). Logo, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e finalizamos aqui o *bootstrap*;

3) Se $2r_1 < n$, então $W^{2,r_1}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$, para todo $r_1 \leq r \leq \frac{nr_1}{n-2r_1} = 2^{**}$. Neste caso devemos prosseguimos com o *bootstrap*.

As imersões citadas nos três casos acima são oriundas do Teorema (A.13).

Afirmamos que $2^{**} = \frac{nr_1}{n-2r_1} > 2^* = \frac{2n}{n-2}$. De fato, por hipótese, temos que $p < 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$ o que implica que

$$n + 2 > p(n-2).$$

Subtraindo 4 de ambos os lados, temos que

$$n - 2 > p(n-2) - 4,$$

dividindo a desigualdade acima por $n-2$, segue que

$$1 > p - \frac{4}{n-2},$$

isto é,

$$\frac{1}{p-\frac{4}{n-2}} > 1,$$

já que $2r_1 < n$ implica que $p-\frac{4}{n-2} > 0$. Agora, multiplicando e dividindo o termo à esquerda na desigualdade acima por n, temos que

$$\frac{n}{pn-22^*} > 1,$$

multiplicando a desigualdade acima por 2^*, obtemos

$$\frac{\frac{2^*}{p}n}{n-2\frac{2^*}{p}} > 2^*,$$

e como $r_1 = \frac{2^*}{p}$, segue que

$$2^{**} = \frac{r_1 n}{n-2r_1} > 2^*.$$

Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{2^{**}}{2^*} = 1+\delta \tag{C-3}$$

Como estamos no terceiro caso, então $u \in L^{2^{**}}(\Omega)$. Portanto, $g \in L^{r_2}(\Omega)$, onde $r_2 = \frac{2^{**}}{p}$. Segue, mais uma vez, do Teorema(C.6), que $u \in W^{2,r_2}(\Omega)$. Como observamos, $2^{**} > 2^*$, e, portando, $r_2 = \frac{2^{**}}{p} > r_1 = \frac{2^*}{p}$. Novamente,temos três casos a considerar:

1) Se $2r_2 > n$, então, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e finalizamos aqui o *bootstrap*;

2) Se $2r_2 = n$, procedemos de maneira análoga ao segundo caso da primeira etapa do *bootstrap* e concluímos, mais uma vez, que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e finalizamos o *bootstrap*;

3) Se $2r_2 < n$, então $W^{2,r_2}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$, para todo $r_2 \leq r \leq \frac{nr_2}{n-2r_2} = 2^{***}$. Nesse caso, prosseguimos com o *bootstrap*.

Afirmamos que $2^{***} = \frac{nr_2}{n-2r_2} > 2^{**} = \frac{nr_1}{n-2r_1}$. De fato, por hipótese, $p < 2^*-1 = \frac{n+2}{n-2} = 1+\frac{4}{n-2}$, assim, multiplicando por n, temos que

$$n > pn-2\frac{2n}{n-2} = pn-22^*,$$

que é equivalente a expressão abaixo

$$n > pn - 2p\frac{2^*}{p} = pn - 2pr_1 = p(n - 2r_1).$$

Subtraindo da desigualdade acima o termo $2r_1$, obtemos

$$n - 2r_1 > p(n - 2r_1) - 2r_1,$$

e como $2r_1 < n$, podemos dividir a desigualdade acima por $n - 2r_1$, gerando

$$1 > p - \frac{2r_1}{n - 2r_1}.$$

Note que $p - \frac{2r_1}{n-2r_1} > 0$ se, e só se, $pn - \frac{2nr_1}{n-2r_1} > 0$, que equivale a $n > \frac{22^{**}}{p} = 2r_2$, que é o caso estudado neste momento. Assim, dividindo a desigualdade acima por $p - \frac{2r_1}{n-2r_1}$ obtemos

$$\frac{1}{p - \frac{2r_1}{n-2r_1}} > 1,$$

e multiplicando e dividindo o termo à esquerda por $\frac{n}{p}$ e na sequência multiplicando ambos os lados por 2^{**}, temos, respectivamente,

$$\frac{\frac{n}{p}}{n - \frac{2nr_1}{p(n-2r_1)}} > 1,$$

e

$$\frac{\frac{2^{**}}{p}n}{n - 2\frac{2^{**}}{p}} > 2^{**}.$$

Neste caso, temos

$$\frac{r_2 n}{n - 2r_2} > 2^{**}.$$

Concluindo que

$$2^{***} > 2^{**}.$$

Além disso, note que

$$\frac{2^{***}}{2^*} = \frac{2^{***}}{2^{**}}\frac{2^{**}}{2^*} \tag{C-4}$$

e mais, afirmamos que

$$\frac{2^{***}}{2^{**}} > \frac{2^{**}}{2^*}. \tag{C-5}$$

De fato, como $r_2 > r_1$, temos que

$$\frac{1}{n - 2r_2} > \frac{1}{n - 2r_1},$$

multiplicando a desigualdade acima por $\frac{n}{p}$ obtemos

$$\frac{\frac{n}{p}}{n-2r_2} > \frac{\frac{n}{p}}{n-2r_1},$$

multiplicando e dividindo por 2^{**} e 2^{*}os lados esquerdo e direito da desigualdade acima temos que

$$\frac{\frac{n\frac{2^{**}}{p}}{n-2r_2}}{2^{**}} > \frac{\frac{n\frac{2^{*}}{p}}{n-2r_1}}{2^{*}},$$

isto é

$$\frac{\frac{nr_2}{n-2r_2}}{2^{**}} > \frac{\frac{nr_1}{n-2r_1}}{2^{*}}.$$

Donde segue o desejado.

Dessa maneira, de (C-3), (C-4) e (C-5), segue que

$$\frac{2^{***}}{2^{*}} > (1+\delta)^2 \tag{C-6}$$

Diante do terceiro caso, temos que $u \in L^{2^{***}}(\Omega)$, e, portanto, $g \in L^{r_3}(\Omega)$, onde $r_3 = \frac{2^{***}}{p}$. Segue, mais uma vez, do Teorema(C.6), que $u \in W^{2,r_3}(\Omega)$. Como vimos, $2^{***} > 2^{**} > 2^{*}$, e, portanto, $r_3 = \frac{2^{***}}{p} > r_2 = \frac{2^{**}}{p} > r_1 = \frac{2^{*}}{p}$. Temos, mais uma vez três, casos possíveis, onde nos dois primeiros (quando $2r_3 > n$ ou $2r_3 = n$) obteremos $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e no terceiro caso (quando $2r_3 < n$) o melhor imersão contínua possível será no espaço $L^{2^{****}}(\Omega)$. Assim teremos que prosseguir com o *bootstrap*.

Afirmamos que $2^{****} = \frac{nr_3}{n-2r_3} > 2^{***} = \frac{nr_2}{n-2r_2}$. De fato, por hipóteses, temos que $p < 2^{*}-1 = \frac{n+2}{n-2} = 1+\frac{4}{n-2}$. Logo, multiplicando por n temos que

$$n > np - 2\frac{2n}{n-2} = np - 22^{*}.$$

Note que $np - 22^{*} > 0$, se, e só se,$np - 2\frac{2^{*}}{p} = np - 2r_1 > 0$, que equivale a $np > 2r_1$, o que ocorre, já que estamos no caso em que $np > 2r_3 > 2r_1$. Assim, dividindo a expressão acima por $np - 22^{*}$ e multiplicando por p obtemos

$$p < \frac{np}{np-22^{*}} = \frac{np-22^{*}+22^{*}}{np-22^{*}} = 1+\frac{22^{*}}{np-22^{*}} = 1+\frac{2\frac{2^{*}}{p}}{n-2\frac{2^{*}}{p}} = 1+\frac{2r_1}{n-2r_1}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por n, obtemos

$$n > pn - 2\frac{nr_1}{n-2r_1} = pn - 22^{**} = p(n-2\frac{2^{**}}{p}) = p(n-2r_2),$$

subtraindo de ambos os lados da desigualdade $-2r_2$ temos

$$n - 2r_1 > p(n - 2r_2) - 2r_2,$$

dividindo a desigualdade acima por $n - 2r_2$ (já que $2r_2 < n$), temos

$$1 > p - \frac{2r_2}{(n - 2r_2)}.$$

Para o caso $p - \frac{2r_2}{(n-2r_2)} > 0$ obtemos

$$\frac{1}{p - \frac{2r_2}{n-2r_2}} > 1.$$

Multiplicando e dividindo o lado esquerdo por n/p e multiplicando a desigualdade por 2^{***} obtemos

$$\frac{\frac{2^{***}}{p}n}{n - 2\frac{2^{***}}{p}} > 2^{***},$$

logo,

$$2^{****} = \frac{nr_3}{(n - 2r_3)} > 2^{**}.$$

Assim, temos o desejado. Note que, de (C-6), temos que

$$\frac{2^{****}}{2^{*}} = \frac{2^{****}}{2^{***}}\frac{2^{***}}{2^{*}} > \frac{2^{****}}{2^{***}}(1+\delta)^2. \tag{C-7}$$

Além disso, como

$$r_3 > r_1,$$

temos que

$$\frac{1}{n - 2r_3} > \frac{1}{n - 2r_1},$$

multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\frac{n}{p}$, multiplicando e dividindo por 2^{***} e 2^{*} os lados esquerdo e direito, respectivamente, da desigualdade acima, obtemos

$$\frac{\frac{n\frac{2^{***}}{p}}{n-2r_3}}{2^{***}} > \frac{\frac{n\frac{2^{*}}{p}}{n-2r_1}}{2^{*}},$$

isto é,

$$\frac{\frac{nr_3}{n-2r_3}}{2^{***}} > \frac{\frac{nr_1}{n-2r_1}}{2^{*}},$$

que é o mesmo que

$$\frac{2^{****}}{2^{***}} > \frac{2^{**}}{2^{*}} \tag{C-8}$$

Assim, de (C-3), (C-7) e (C-8), segue que

$$\frac{2^{****}}{2^{*}} > (1+\delta)^3 \tag{C-9}$$

Repetindo o processo k-vezes obtemos uma sequência estritamente crescente

$$r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_k,$$

onde $r_k = \frac{2^{*^k}}{p}$. Note que $\frac{r_{k+1}}{r_1} = \frac{2^{*^{k+1}}}{2^*} = (1+\delta)^k \geq 1+k\delta$, onde a última desigualdade segue da Desigualdade de Bernoulli. Dessa forma, para k suficientemente grande teremos $2r_k > n$. Consequentemente, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Particularmente, $u \in L^\infty(\Omega)$.

Observação C.7 *Para o nosso problema é suficiente que u pertença ao espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$, porém através do Teorema de Imersões Contínuas de Sobolev (Teorema (A.13)), tomando $j=1, m=1$ e fazendo k grande, de modo que $r_k > n$, obtemos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.*

Agora, enunciaremos e provaremos uma série de lemas que utilizaremos mais adiante.

Lema C.8 *Se $0 \leq u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então a função $u^p \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $p>1$.*

Demonstração. Defina a função $h(t) := |tu(x)+(1-t)u(y)|^p$, com $t \in [0,1]$. Então, $h(0) = u^p(y)$ e $h(1) = u^p(x)$. Além disso, a função h é de classe C^1 e $h'(t) = p(u(x)-u(y))|tu(x)+(1-t)u(y)|^{p-1}$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t \in (0,1)$ tal que

$$|h(1)-h(0)| = |h'(t)|.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}
|u(x)^p - u(y)^p| &= p|(u(x)-u(y))||tu(x)+(1-t)u(y)|^{p-1} \\
&\leq p|u(x)-u(y)|t|u(x)-u(y)|^{p-1} + p|u(x)-u(y)||u(y)|^{p-1} \\
&\leq p|u(x)-u(y)|\left[|u(x)-u(y)|^{p-1} + (\sup_{\Omega} u)^{p-1}\right]. \qquad \text{(C-10)}
\end{aligned}$$

Como $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que $|u(x)-u(y)| \leq C_\alpha |x-y|^\alpha$, para todo $x,y \in \Omega,\ x \neq y$. Dessa forma, segue da desigualdade (C-10) que

$$\begin{aligned}
|u(x)^p - u(y)^p| &\leq pC_\alpha \left[\left(\sup_{x,y\in\Omega} |u(x)-u(y)|\right)^{p-1} + \left(\sup_{\Omega} u\right)^{p-1}\right] |x-y|^\alpha \\
&= C_\alpha \tilde{c}_p |x-y|^\alpha, \qquad \text{(C-11)}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{c}_p = p\left[\left(\sup_{x,y\in\Omega}|u(x)-u(y)|\right)^{p-1} + \left(\sup_{\Omega} u\right)^{p-1}\right] > 0$. Isso finaliza a demonstração. □

Lema C.9 *Suponha que $0 \leq u$ satisfaça as mesmas hipóteses do lema anterior e que a função contínua $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ pertence ao espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então a função $b \cdot u^p \in C^{0,\alpha}$.*

Demonstração. Como $b \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, existe uma constante $C_{b,\alpha} > 0$, tal que

$$|b(x)-b(y)| \leq C_{b,\alpha}|x-y|^{\alpha}, \ \ x,y \in \Omega. \tag{C-12}$$

Note que,

$$\begin{aligned} |b(x)u^p(x)-b(y)u^p(y)| &= |b(x)u^p(x)-b(y)u^p(x)+b(y)u^p(x)-b(y)u^p(y)| \\ &\leq |b(x)-b(y)||u^p(x)|+|u^p(x)-u^p(y)||b(y)| \\ &\leq |a(x)-a(y)|\left(\sup_{\Omega} u\right)^{q} + |u^p(x)-u^p(y)|\sup_{\Omega} b. \end{aligned}$$

Dessa forma, de (C-11) e (C-12), temos que

$$\begin{aligned} |b(x)u^p(x)-b(y)u^p(y)| &\leq C_{b,\alpha}|x-y|^{\alpha}\left(\sup_{\Omega} u\right)^{p} + C_{\alpha}\tilde{c}_p|x-y|^{\alpha}\sup_{\Omega} b \\ &= |x-y|^{\alpha}\left[C_{b,\alpha}\left(\sup_{\Omega} u\right)^{p} + C_{\alpha}\tilde{c}_p\sup_{\Omega} b\right], \ \ x,y \in \Omega. \end{aligned}$$

Assim finalizamos a demonstração. □

O lema a seguir é um resultado auxiliar para a demonstração do Lema C.11.

Lema C.10 *Se $0 < q < 1$ e $0 < k < 1$, então $1-k^q \leq (1-k)^q$.*

Demonstração. De fato, como $0 < k < 1$ e $0 < q < 1$, então $k^q \geq k$. Portando, $1-k^q \leq 1-k$. Como $0 < 1-k < 1$ e $0 < q < 1$, então $(1-k)^q \geq 1-k$. Dessa forma, $1-k^q \leq (1-k)^q$. □

O Lema C.10 implica no lema a seguir.

Lema C.11 *Seja $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^q$, onde $0 < q < 1$. Então $f \in C^{0,q}([0,1])$.*

Demonstração. Vamos estimar os possíveis valores do quociente $\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^q}$ com $t \neq s$. Se $t = 0$ (ou $s = 0$), então $\frac{|-s^q|}{|-s|^q} = 1$ $\left(\frac{|-t^q|}{|-t|^q} = 1\right)$. Por outro lado, se $t, s \neq 0$ e $t > s$, então $\frac{|t^q-s^q|}{|t-s|^q} = \frac{t^q|1-(\frac{s}{t})^q|}{t^q|1-\frac{s}{t}|^q} = \frac{(1-\frac{s}{t})^q}{(1-\frac{s}{t})^q}$. Fazendo $k=\frac{s}{t}$, temos que $0<k<1$. Então, estamos sob as hipóteses do Lema C.10. Logo, $\frac{(1-k)^q}{(1-k)^q} \leq 1$. Assim, $\sup\limits_{t\neq s} \dfrac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^q} \leq 1$. Isso prova que $f \in C^{0,q}$. □

Lema C.12 *Se a função* $0 \leq u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, *então a composta* $f \circ u = u^q : \Omega \to \mathbb{R}$ *pertence ao espaço* $C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Temos que

$$\frac{|f(u(x))-f(u(y))|}{|x-y|^{\alpha q}} = \frac{|f(u(x))-f(u(y))|}{|u(x)-u(y)|^q}\frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{\alpha q}}.$$

O Lema C.11 garante que $\frac{|f(u(x))-f(u(y))|}{|u(x)-u(y)|^q} \leq 1$. Logo,

$$\frac{|f(u(x))-f(u(y))|}{|x-y|^{\alpha q}} \leq \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{\alpha q}}.$$

Mas, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, logo,

$$\frac{|f(u(x))-f(u(y))|}{|x-y|^{\alpha q}} \leq \frac{c_\alpha^q|x-y|^{\alpha q}}{|x-y|^{\alpha q}}$$
$$\frac{|f(u(x))-f(u(y))|}{|x-y|^{\alpha q}} \leq C_\alpha^q.$$

A última desigualdade equivale a

$$\frac{|u^q(x)-u^q(y)|}{|x-y|^{\alpha q}} \leq c_\alpha^q,\ x,y\in\Omega,\ x\neq y \tag{C-13}$$

Isso prova que $f(u) = u^q \in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. □

Lema C.13 *Suponha que* $0 \leq u$ *satisfaça as mesmas hipóteses do lema anterior e que a função contínua* $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *pertence ao espaço* $C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. *Então a função* $a \cdot u^q \in C^{0,\alpha q}$.

Demonstração. Como $a \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então $a \in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. Assim, existe uma constante $C_{a,\alpha q}(\overline{\Omega}) > 0$, tal que

$$|a(x)-a(y)| \leq C_{a,\alpha q}|x-y|^{\alpha q},\ x,y\in\Omega. \tag{C-14}$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
|a(x)u^q(x)-a(y)u^q(y)| &= |a(x)u^q(x)-a(y)u^q(x)+a(y)u^q(x)a(y)u^q(y)| \\
&\leq |a(x)-a(y)||u^q(x)|+|u^q(x)-u^q(y)||a(y)| \\
&\leq |a(x)-a(y)|\left(\sup_\Omega u\right)^q+|u^q(x)-u^q(y)|\sup_\Omega a.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, de (C-13) e (C-14), temos que

$$
\begin{aligned}
|a(x)u^q(x)-a(y)u^q(y)| &\leq C_{a,\alpha q}|x-y|^{\alpha q}\left(\sup_\Omega u\right)^q+C_\alpha^q|x-y|^{\alpha q}\sup_\Omega a \\
&= |x-y|^{\alpha q}\left[C_{a,\alpha q}\left(\sup_\Omega u\right)^q+C_\alpha^q\sup_\Omega a\right],\ x,y\in\Omega.
\end{aligned}
$$

Assim finalizamos a demonstração. □

Observação C.14 *Como $0<\alpha,q<1$, então $\alpha q<\alpha$. Dessa forma, a Proposição C.5, nos garante que $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\overset{cont}{\hookrightarrow}C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. Assim, mediante as hipóteses dos lemas anteriores, temos que as funções $u,a\cdot u^q,b\cdot u^p\in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. A Proposição C.4 nos diz que $C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$ é um espaço vetorial. Logo, a função $g(x,u)=a(x)u^q(x)+b(x)u^p(x)$ definida no início deste Apêndice pertence ao espaço $C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$.*

Agora estamos aptos a provar a seguinte proposição.

Proposição C.15 *Seja $0\leq u\in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$ uma solução para o problema (Q_λ). Suponha que as funções $a,b\in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. Então $u\in C^{2,\alpha q}(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Como u, a, $b\in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$, os Lemas C.9 e C.13 nos garantem que a função $g\in C^{0,\alpha q}(\overline{\Omega})$. Sendo assim, segue do Teorema de Schauder C.6 que $u\in C^{2,\alpha q}(\overline{\Omega})$ □

APÊNDICE D

A Desigualdade de Harnack

Neste apêndice vamos enunciar a desigualdade de Harnack, que será utilizada para mostrar que as soluções não negativas do problema (Q_λ), encontradas nos capítulos 2 e 3, e já regularizadas no Apêndice C, são, sob certas circunstâncias, soluções positivas.

Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado.

Teorema D.1 (Desigualdade de Harnack) *Seja $\bar{u} \in W^{1,r}_{loc}(U)$, $1 < r < N$ uma solução não-negativa da equação*

$$div\,\boldsymbol{A}(x,\bar{u},\nabla u) + \boldsymbol{B}(x,\bar{u},\nabla u) = 0. \tag{D-1}$$

Suponha que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ satisfazem :

(i) Existem constantes $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \geq 0$, tais que, para todo $(x,z,\xi) \in U \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ ocorre, para $r > 1$,

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{A}(x,z,\xi),\xi\rangle \geq |\xi|^r - \boldsymbol{a}_2 z^r - \boldsymbol{a}^r, \\ \boldsymbol{B}(x,z,\xi) \leq \boldsymbol{b}_1|\xi|^{r-1} + \boldsymbol{b}_2 z^{r-1} + \boldsymbol{b}^{r-1} \end{cases} \tag{D-2}$$

(ii)$|\boldsymbol{A}(x,z,\xi)| \leq \boldsymbol{a}_1|\xi|^{r-1} + \bar{\boldsymbol{a}}_2 z^{r-1} + \bar{\boldsymbol{a}}^{r-1}$, onde $\boldsymbol{a}_1$ é uma constante positiva (≥ 1), $\bar{\boldsymbol{a}} \in L^N(U)$ e $\bar{\boldsymbol{a}}_2 \in L^{\frac{N}{r-1}}(U)$.

Então, para qualquer domínio U' com fecho contido em U, temos que

$$\sup_{U'} u \leq \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{Z}}\left[\inf_{U'} u + \boldsymbol{Z}k\right], \tag{D-3}$$

onde $\boldsymbol{C}$ só depende de r, N, ϵ, $\boldsymbol{a}_1$, $\|\bar{\boldsymbol{a}}_2\|_{N/(r-1),U'}$, $\|\boldsymbol{b}_1\|_{r\beta,U'}$, $\|\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2\|_{\beta,U'}$, $k = \|\boldsymbol{a}\|_{r\beta} + \|\boldsymbol{b}\|_{(r-1)\beta} + \|\bar{\boldsymbol{a}}\|_N$, $\beta = \frac{\max\{N/p,1\}}{1-\epsilon}$, com $\epsilon \in (0,1]$ e $\boldsymbol{Z}$ é o número de bolas de (mesmo) raio $\delta/4$ necessárias para cobrir U', $\delta = dist(U',\partial U)$. (Supomos $\delta \leq 4$, sem perda de generalidade).

Demonstração. (cf. Pucci & Serrin [17], p.164) □

O Teorema a seguir mostra que uma solução não negativa para o problema (Q) é positiva.

Teorema D.2 *Se* $w \in \boldsymbol{C}^{0,\alpha}(\overline{\Theta})$ *é uma solução não-negativa do problema* (Q_λ)*, então* $w > 0$ *em* Θ.

Demonstração. Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ tal que $\Theta \subset\subset U$ e $dist(\Theta, \partial U) = \delta$. Defina $\bar{w}(x) = w(x)$ e $b_0(x) = b(x)$ quando $x \in \overline{\Theta}$ e $\bar{w}(x) = 0$ e $b_0(x) = 0$, quando $x \in U \backslash \overline{\Theta}$. Agora, a nova função b_0 não é, necessariamente, contínua, porém, está em $L^\infty(U)$ e assume valores positivos em algum aberto de U. Dessa forma, como $w \in C^{0,\alpha}(\overline{\Theta})$ é uma solução não-negativa do problema (Q_λ), temos que $\bar{w} \in H_0^1(U)$ é uma solução não negativa do problema

$$\begin{cases} -\Delta \bar{w} = b_0(x)\bar{w}^p, & x \in U \\ \bar{w} = 0, & x \in \partial U. \end{cases}$$

Nesse caso, temos que as funções $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do Teorema de Harnack D.1 são $\mathbf{A}(x,z,\xi) = \xi$ e $\mathbf{B}(x,z,\xi) = -b_0(x)z^p$. Além disso, temos que

$$\langle \mathbf{A}(x, \bar{w}, \nabla \bar{w}), \nabla \bar{w} \rangle = |\nabla \bar{w}|^2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, \bar{w}, \nabla \bar{w}) &\leq \|b_0\|_{\infty,U} \|\bar{w}\|_{\infty,U}^{p-1} \bar{w} \\ &= \|b\|_{\infty,\Theta} \|w\|_{\infty,\Theta}^{p-1} \bar{w} \end{aligned}$$

e

$$|\mathbf{A}(x, \bar{w}, \nabla \bar{w})| = |\nabla \bar{w}|.$$

Dessa forma, para $r = 2$, $\mathbf{a}_2 = 0$, $\mathbf{b}_1 = 0$, $\mathbf{b}_2 = \|b\|_{\infty,\Theta}\|w\|_{\infty,\Theta}^{p-1}$, $\mathbf{a} = 0$, $\bar{\mathbf{a}} = 0$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = 0$, $\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{b} = 0$, temos que as hipóteses da Desigualdade de Harnack D.1 são satisfeitas. Como tomamos o conjunto U de modo que o domínio Θ satisfaça $\Theta \subset\subset U$ e $dist(\Theta, \partial U) = \delta$, temos que

$$\sup_{\Theta} w \leq \mathbf{C}^{\mathbf{Z}} \left[\inf_{\Theta} w + \mathbf{Z}k \right], \tag{D-4}$$

onde $k = \|\mathbf{a}\|_{r\beta,\Theta} + \|\mathbf{b}\|_{\beta,\Theta} + \|\bar{\mathbf{a}}\|_{N,\Theta} = 0$, $\beta = \frac{\max\{N/p,1\}}{1-\epsilon}$, com $\epsilon \in (0,1]$ e $\mathbf{Z}$ é o número de bolas de (mesmo) raio $\delta/4$ necessárias para cobrir Θ. Note que $\overline{\Theta}$ é compacto, logo $\mathbf{Z}$ é finito.

Se supormos que existe $y \in \Theta$ tal $w(y) = 0$, então de (D-5) segue que

$$\sup_{\Theta} w \leq 0,$$

implicando que $w \equiv 0$. Absurdo. Consequentemente, $w > 0$ em Θ. $\square$

No Lema a seguir, obteremos uma estimativa importante para a demonstração do Teorema D.4.

Lema D.3 *Se $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução não-negativa do problema (Q_λ), com $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, então existe uma constante $C_9 > 0$, que não depende de u e λ, tal que $\|u\|_\infty \geq C_9$.*

Demonstração. Como $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução de (Q_λ), então , usando o Teorema do Divergente A.1, temos que

$$\|u\|^2 = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx + \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx.$$

Utilizando as normas das funções u, a e b no espaço L^∞, temos que

$$\|u\|^2 \leq \lambda\|a\|_\infty\|u\|_\infty^{q+1}|\Omega| + \|b\|_\infty\|u\|_\infty^{p+1}|\Omega|$$

Note que o Lema 1.23 garante a existência de uma constante $C_5 > 0$, que não depende de u e λ, tal que $\|u\| > C_5$, sempre que $u \in N_\lambda^-(\Omega)$. Assim, temos que

$${C_5}^2 < \lambda\|a\|_\infty\|u\|_\infty^{q+1}|\Omega| + \|b\|_\infty\|u\|_\infty^{p+1}|\Omega|.$$

Portanto,

$${C_5}^2 < |\Omega| \max\{\lambda\|a\|_\infty, \|b\|_\infty\}(\|u\|_\infty^{q+1} + \|u\|_\infty^{p+1}),$$

ou seja,

$$\frac{{C_5}^2}{|\Omega| \max\{\lambda\|a\|_\infty, \|b\|_\infty\}} < 2\max\{\|u\|_\infty^{q+1}, \|u\|_\infty^{p+1}\}.$$

Se $\|u\|_\infty \in (0,1)$, então $\max\{\|u\|_\infty^{q+1}, \|u\|_\infty^{p+1}\} = \|u\|_\infty^{q+1}$. Portanto, temos que

$$\|u\|_\infty > \left(\frac{{C_5}^2}{2|\Omega| \max\{\lambda\|a\|_\infty, \|b\|_\infty\}}\right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Por outro lado, se $\|u\|_\infty > 1$, então $\max\{\|u\|_\infty^{q+1}, \|u\|_\infty^{p+1}\} = \|u\|_\infty^{p+1}$. Dessa forma, temos que

$$\|u\|_\infty > \left(\frac{{C_5}^2}{2|\Omega| \max\{\lambda\|a\|_\infty, \|b\|_\infty\}}\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Assim, tomando $C_9 = \min\left\{\left(\frac{{C_5}^2}{2|\Omega|\max\{\lambda\|a\|_\infty,\|b\|_\infty\}}\right)^{\frac{1}{q+1}}, \left(\frac{{C_5}^2}{2|\Omega|\max\{\lambda\|a\|_\infty,\|b\|_\infty\}}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right\}$, obtemos que $\|u\|_\infty > C_9$, para todo $u \in N_\lambda^-(\Omega)$, solução do problema (Q_λ). $\square$

O Teorema a seguir mostra sob quais circunstâncias uma solução $0 \leq u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ para o problema (Q_λ) é positiva.

Teorema D.4 *Suponha que u satisfaça as mesmas hipóteses do Lema anterior. Então $u > 0$ em Ω, desde que $\lambda < \frac{C_9^{1-q}}{\mathbf{C^Z Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}}$.*

Demonstração. Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ tal que $\Omega \subset\subset U$ e $dist(\Omega, \partial U) = \delta$. Defina $\bar{u}(x) = u(x)$, $a_0(x) = a(x)$ e $b_0(x) = b(x)$ quando $x \in \overline{\Omega}$ e $\bar{u}(x) = 0$, $a_0(x) = 0$ e $b_0(x) = 0$, quando $x \in U \backslash \overline{\Omega}$. Agora, as novas funções a_0 e b_0 não são, necessariamente, contínuas, porém, estão em $L^\infty(U)$ e assumem valores positivos em algum aberto de U. Dessa forma, como $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução não-negativa do problema (Q_λ), temos que $\bar{u} \in H_0^1(U)$ é uma solução não negativa do problema

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} = \lambda a_0(x)\bar{u}^q + b_0(x)\bar{u}^p, & x \in U \\ \quad \bar{u} = 0, \quad x \in \partial U. \end{cases} \tag{R_λ}$$

Nesse caso, temos que as funções $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do Teorema de Harnack D.1 são $\mathbf{A}(x,z,\xi) = \xi$ e $\mathbf{B}(x,z,\xi) = -(\lambda a_0(x) z^q + b_0(x) z^p)$. Além disso, temos que

$$\langle \mathbf{A}(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}), \nabla \bar{u} \rangle = |\nabla \bar{u}|^2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) &\leq \lambda \|a_0\|_{L^\infty(U)} \|\bar{u}\|^q_{L^\infty(U)} + \|b_0\|_{L^\infty(U)} \|\bar{u}\|^{p-1}_{L^\infty(U)} \bar{u} \\ &= \lambda \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^q_{L^\infty(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} \bar{u} \end{aligned}$$

e

$$|\mathbf{A}(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})| = |\nabla \bar{u}|.$$

Dessa forma, para $r = 2$, $\mathbf{a}_2 = 0$, $\mathbf{b}_1 = 0$, $\mathbf{b}_2 = \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}$, $\mathbf{a} = 0$, $\bar{\mathbf{a}} = 0$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = 0$, $\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{b} = \lambda \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^q_{L^\infty(\Omega)}$, temos que as hipóteses da Desigualdade de Harnack D.1 são satisfeitas. Como tomamos o conjunto U de modo que o domínio Ω satisfaça $\Omega \subset\subset U$ e $dist(\Omega, \partial U) = \delta$, temos que

$$\sup_\Omega u \leq \mathbf{C^Z} \left[\inf_\Omega u + \mathbf{Z} k \right], \tag{D-5}$$

onde $k = \|\mathbf{a}\|_{r\beta} + \|\mathbf{b}\|_\beta + \|\bar{\mathbf{a}}\|_N = \|\lambda \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^q_{L^\infty(\Omega)}\|_{(r-1)\beta} = \lambda \|a\|_\infty \|u\|^q_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}$, $\beta = \frac{\max\{N/p, 1\}}{1-\epsilon}$, com $\epsilon \in (0,1]$ e $\mathbf{Z}$ é o número de bolas de (mesmo) raio $\delta/4$ necessárias para cobrir Ω. Note que $\overline{\Omega}$ é compacto, logo $\mathbf{Z}$ é finito.

Se supormos que existe $y \in \Omega$ tal $u(y) = 0$, então de (D-5) segue que

$$\sup_\Omega u \leq \mathbf{C^Z Z} k = \mathbf{C^Z Z} \lambda \|a\|_\infty \|u\|^q_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}},$$

que ocorre, se, e somente se,

$$\lambda \geq \frac{\sup_{\Omega} u}{\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\|a\|_\infty \|u\|_\infty^q |U|^{\frac{1}{\beta}}}. \tag{D-6}$$

Como a função $u \in C^{0,\alpha}$, temos que $\sup_{\Omega} u = \|u\|_\infty$. Dessa forma, a desigualdade (D-6) ocorre se, e somente se,

$$\lambda \geq \frac{\|u\|_\infty^{1-q}}{\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}}. \tag{D-7}$$

O que contradiz nossa hipótese, pois, do Lema D.3, temos que

$$\lambda < \left\{ \frac{{C_9}^{1-q}}{\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}} \right\} \leq \frac{\|u\|_\infty^{1-q}}{\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}} \tag{D-8}$$

Portanto, devemos ter $u > 0$ em Ω.

$\square$

Corolário D.5 *Se* $\lambda < \min\left\{ \frac{{C_9}^{1-q}}{\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}}, \lambda_1 \right\}$, *então exite uma solução positiva* $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para o problema* (Q_λ).

Demonstração. No Capítulo 3, mostramos que, para $\lambda < \lambda_1$, existe uma solução $0 \leq u \in N_\lambda^-(\Omega)$ para o problema (Q_λ). No Apêndice C, mostramos que a solução $u \in C^{0,\alpha}$. Além disso, como $\lambda < \frac{{C_9}^{1-q}}{\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}\|a\|_\infty |U|^{\frac{1}{\beta}}}$, estamos sob as hipóteses do Teorema D.4. Logo, $u > 0$ em Ω. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. **Sobolev Spaces**. Pure and applied mathematics. Academic Press, 1975.

[2] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L. **Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II**. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:35–92, 1964.

[3] Ambrosetti, A.; Brezis, H.; Cerami, G. **Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems**. *J. Funct. Anal.*, 122(2):519–543, 1994.

[4] Ambrosetti, A.; Prodi, G. **A primer of nonlinear analysis**, volume 34 de **Cambridge Studies in Advanced Mathematics**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Corrected reprint of the 1993 original.

[5] Badiale, M.; Serra, E. **Semilinear elliptic equations for beginners**. Universitext. Springer, London, 2011. Existence results via the variational approach.

[6] Brezis, H. **Analyse fonctionnelle**. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[7] Brezis, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Universitext. Springer, New York, 2011.

[8] Brown, K. J.; Wu, T.-F. **A fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem**. *Electron. J. Differential Equations*, p. No. 69, 9, 2007.

[9] Chipot, M. **Elliptic equations: an introductory course**. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[10] de Figueiredo, D. G. **Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours**, volume 81 de **Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics**. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[11] Evans, L. C. **Partial differential equations**, volume 19 de **Graduate Studies in Mathematics**. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[12] Folland, G. B. **Introduction to partial differential equations**. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976. Preliminary informal notes of university courses and seminars in mathematics, Mathematical Notes.

[13] Furtado, M. **Notas de EDP2**, volume 1.2. Universidade de Brasília, 2012.

[14] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[15] Kreyszig, E. **Introductory functional analysis with applications**. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978.

[16] Nehari, Z. **On a class of nonlinear second-order differential equations**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:101–123, 1960.

[17] Pucci, P.; Serrin, J. **The maximum principle**, volume 73 de **Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[18] Tarantello, G. **On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent**. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 9(3):281–304, 1992.

[19] Trèves, F. **Basic linear partial differential equations**. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Reprint of the 1975 original.

[20] Willard, S. **General topology**. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004. Reprint of the 1970 original [Addison-Wesley, Reading, MA; MR0264581].

[21] Wu, T.-F. **On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function**. *J. Math. Anal. Appl.*, 318(1):253–270, 2006.

[22] ZEIDLER, E. **Applied functional analysis**, volume 109 de **Applied Mathematical Sciences**. Springer-Verlag, New York, 1995. Main principles and their applications.