

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

*Ademar Paulo Júnior*

**Interações efetivas entre quarks a baixas energias a partir da  
Cromodinâmica Quântica considerando o condensado de  
quark-antiquark**

GOIÂNIA

2014

*Ademar Paulo Júnior*

**Interações efetivas entre quarks a baixas energias a partir da  
Cromodinâmica Quântica considerando o condensado de  
quark-antiquark**

*Dissertação submetida ao Instituto de  
Física da Universidade Federal de Goiás  
como parte dos requisitos necessários à ob-  
tenção do título de Mestre em Física.*

**ORIENTADOR:** *Prof. Dr. Fábio Luis Braghin*

**GOIÂNIA**

Janeiro de 2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)  
GPT/BC/UFG**

P331i Paulo Júnior, Ademar  
Interações efetivas entre quarks a baixas energias a partir da Cromodinâmica Quântica considerando o condensado de quark-antiquark [manuscrito] / Ademar Paulo Júnior. - 2014. 89 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Luis Braghin.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física, 2014.

Bibliografia.  
Inclui lista de figuras e tabelas.  
Apêndices.  
1. Cromodinâmica quântica 2. Quarks 3. Glúons  
4. Energias I Título.

CDU: 530.145

*A natureza é um enorme jogo de xadrez disputado  
por deuses, e que temos o privilégio de observar.  
As regras do jogo são o que chamamos de física  
fundamental, e compreender essas regras é a nossa meta.*

*Richard Philips Feynman*

*A minha esposa, Tainá de Abreu.  
Aos meus pais e irmão.*

# Agradecimentos

Ao longo desta jornada devo agradecer à muitas pessoas que de diversas maneiras contribuíram para a realização deste trabalho. É difícil lembrar todos os nomes, mas agradeço a todos que de alguma maneira deixaram suas contribuições me apoiando, orientando e caminhando ao meu lado.

À minha esposa Tainá de Abreu por todos os momentos em que me apoiou e teve paciência com minhas dificuldades e ausências. Saiba que te amo e que seu apoio incondicional foi um grande amparo ao longo desta jornada que chega ao fim.

Aos meus pais e irmão pelo carinho e compreensão e pela torcida para que eu pudesse alcançar mais esta realização pessoal. Graças a seus esforços e apoio pude caminhar tranquilo e chegar até aqui.

Ao Prof. Dr. Fábio Luis Braghin pela orientação ao longo destes mais de dois anos, sempre paciente com minhas limitações e dificuldades e por seu estímulo ao longo desta caminhada. Aos professores do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás pelas aulas ministradas e pelos conhecimentos transmitidos meus sinceros agradecimentos, estendidos também à todos os servidores do IF-UFG sem os quais nada disto seria possível.

Aos amigos Rodrigo Tanaka e Jeane Silveira e aos colegas e amigos do IF: Orlei, Ana Livia, Andesson, Luana, Hugo, Vitor, Ricardo e em especial ao colega de pesquisa e amigo Ednaldo Barros Júnior pelas muitas discussões que contribuíram sobremaneira para a realização deste trabalho. Aos colegas de trabalho da Base Aérea de Anápolis e aos novos colegas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins pela compreensão e apoio ao longo deste.

Ao meu primo Luiz Antônio e sua esposa Márcia Giovânia por todo o apoio e pelo carinho de seus filhos Áurea, Eugênio e Aliane. À minha tia Benvinda, minha sogra Misley e minha pequena cunhada Ana Luisa pelas orações e carinho com que sempre me trataram.

Enfim, a todos aqueles que me apoiaram e a todas as forças que colocaram estes e outras pessoas não menos importantes em meu caminho ao longo de toda uma existência, meu muito obrigado.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2 Cromodinâmica Quântica</b>	<b>11</b>
2.1 Aspectos Introdutórios . . . . .	11
2.2 Partículas Fundamentais . . . . .	13
2.3 Lagrangeana da QCD . . . . .	15
2.4 Simetrias da QCD . . . . .	16
2.5 Quantização da QCD . . . . .	21
2.6 Condensados e a QCD . . . . .	24
<b>3 Modelos Efetivos e Técnicas Auxiliares</b>	<b>27</b>
3.1 O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio . . . . .	27
3.2 Método do Campo Auxiliar . . . . .	29
3.3 Minimização do potencial efetivo . . . . .	33
3.4 Expansão Funcional . . . . .	35
<b>4 Desenvolvimento do Modelo</b>	<b>38</b>
4.1 Integração funcional dos glúons . . . . .	39
4.1.1 O propagador dos glúons considerando termos de auto-interação com aproximações . . . . .	39
4.1.2 Ação com propagador do glúon modificado . . . . .	43
4.1.3 Condensado de glúons . . . . .	44
4.2 Integração funcional dos quarks que condensam . . . . .	46
4.2.1 Ação com termos de interação quadri fermiônica . . . . .	46
4.2.2 Propagador dos quarks considerando termos de quarta ordem . . . . .	49

4.2.3	Ação efetiva para os campos fermiônicos . . . . .	51
4.3	As equações do GAP acopladas . . . . .	52
4.4	Expansão funcional para interações efetivas para quarks a baixas energias . . . .	57
4.4.1	Termo de sexta ordem . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>66</b>
<b>A</b>	<b>Álgebra do grupo de Simetria SU(N)</b>	<b>69</b>
<b>B</b>	<b>Transformações de Fierz</b>	<b>72</b>
<b>C</b>	<b>Solução das equações do GAP</b>	<b>75</b>
C.1	Equação do GAP para os glúons . . . . .	75
C.2	Equações do GAP acopladas . . . . .	76
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

4.1	Massa efetiva em função da massa dinâmica para $\Lambda = 706$ MeV. . . . .	56
4.2	Constante de acoplamento $g_4$ em função da massa dinâmica dos glúons. . . . .	57
4.3	Massa corrigida em função da massa efetiva dos quarks que condensam. . . . .	60

# Lista de Tabelas

4.1	Valores numéricos para $m_g$ (MeV), $\Lambda$ (MeV), $M_u$ , $M_d$ e $M_s$ (MeV) que solucionam simultaneamente as equações (4.81) e (4.84) para $m_u = 3$ MeV, $m_d = 6$ MeV, $m_s = 91$ MeV e $N_c = 3$ . . . . .	55
4.2	Massa efetiva $M$ (MeV), correção $\Delta g_4$ ( $\text{GeV}^{-2}$ ) e correção relativa $\frac{\Delta g_4}{g_4}$ para a constante de acoplamento $g_4 = 9,8 \text{ GeV}^{-2}$ obtida na Seção 4.3. . . . .	62
4.3	Massa efetiva $M$ (MeV), correção $\Delta g_6$ ( $\text{GeV}^{-5}$ ) e correção relativa $\frac{\Delta g_6}{g_6}$ para a constante de acoplamento $g_6 = 239,1 \text{ GeV}^{-5}$ obtida por <i>Vogl</i> e <i>Weise</i> (1991). . .	65

# Resumo

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a atual teoria que busca descrever as interações fortes dentro do modelo padrão. Trata-se de uma teoria de calibre não-abeliana em que os quarks e glúons constituem as partículas fundamentais. Entretanto, a QCD apresenta dificuldades quando consideram-se regimes de baixas energias em que técnicas não perturbativas devem ser utilizadas. Assim, o uso de modelos efetivos é de extrema importância e utilidade para os regimes de baixas energias que são os de interesse deste trabalho. Partindo da QCD desenvolveremos um modelo efetivo para interações entre quarks levando em conta a presença dos condensados de glúons de ordem dois,  $\langle A_\mu^a A_a^\mu \rangle$ , e de quark-antiquark,  $\langle \bar{q}q \rangle$ . As equações do GAP acopladas são obtidas para  $N_s = 3$  e suas soluções numéricas são encontradas. Além disso, a expansão funcional do potencial efetivo até sexta ordem no campo dos quarks é calculada e as contribuições destes termos consideradas na lagrangeana efetiva.

# Abstract

The Quantum Chromodynamics (QCD) is the current theory that aim to describe the strong interactions in the Standard Model. It is a non-abelian gauge theory where quarks and gluons are the fundamental particles. However, QCD exhibits difficulties when low energy regimes are considered and perturbative methods cannot be employed. Thus, effective models are extremely important and useful when low energy limits are considered. Starting with QCD we develop an effective model taking into account the second order gluon condensate,  $\langle A_\mu^a A_a^\mu \rangle$ , and quark-antiquark,  $\langle \bar{q}q \rangle$ . The coupled GAP equations are derived for  $N_s = 3$  and numerical solutions are found for that. Furthermore, a functional expansion from effective potential to the sixth order is calculated and contributions from that terms inserted into the effective lagrangian.

# Capítulo 1

## Introdução

A estrutura atômica tal qual a conhecemos está bem distante daquela inicialmente imaginada pelos gregos nos primórdios da ideia atomística. A atual teoria que busca descrever as interações fundamentais da natureza, é o *Modelo Padrão das Partículas Elementares*, em que a Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*) é a parte que estuda as interações nucleares fortes ocorridas entre os hádrons [1–4]. O efeito das interações fortes não é diretamente perceptível a nível macroscópico, mas a existência de prótons e nêutrons estáveis e, conseqüentemente, de toda matéria que conhecemos mostra a importância dessa força. Como marco inicial da descoberta de partículas elementares podemos estabelecer a descoberta do elétron por Thomson, em 1897, e posteriormente, Rutherford realiza um experimento que revela a existência de um núcleo composto por partículas, até então, tomadas como fundamentais.

Entretanto, após longo caminho percorrido entre experimentos e previsões teóricas, mesmo os componentes nucleares deveriam ser compostos por partículas ainda menores, os quarks [5, 6]. Um modelo para explicar a estabilidade dos núcleos atômicos foi inicialmente proposto por Yukawa, em que a ideia da força forte foi introduzida, e os núcleons interagem atrativamente por meio da troca de mésons. Mais tarde, os quarks e a carga de cor como uma de suas propriedades intrínsecas passaram a figurar como as peças para explicar as interações fortes e, conseqüentemente os modelos nucleares passaram a ser considerados a partir da QCD [7].

Assim, considerando-se essa propriedade a constante de acoplamento depende da escala de energia envolvida, sendo fraca para regimes de altas energias e forte para processos que

envolvam baixas energias. A QCD pode ser investigada com teoria de perturbação no regime de altas energias e temperaturas [8], que têm fornecido resultados satisfatórios quando comparados aos dados experimentais e de cálculos na rede [9, 10]. Entretanto, para as interações a baixas energias, em que os quarks (e glúons) encontram-se confinados dentro dos hádrons, algumas características da QCD ainda têm sérias dificuldades para a descrição de fenômenos observáveis e a expansão perturbativa não fornece resultados satisfatórios [11, 12]. Devido à constante de acoplamento forte para esses regimes, a QCD deve ser trabalhada de forma não perturbativa e surgem dificuldades no sentido de explicar algumas de suas propriedades como o confinamento, a quebra espontânea de simetria quiral, os condensados de quarks-antiquarks e de glúons, dentre outros [13].

Para métodos não perturbativos o desafio é lidar com os graus de liberdade nas diferentes escalas de energia consideradas e, neste sentido, para regimes de baixas energias uma poderosa ferramenta para descrever processos envolvendo interações fortes são as *Teorias de Campo Efetivas* (EFT, do inglês *Effective Field Theory*) [14]. Em [15] vemos que as teorias efetivas descrevem fenômenos a baixas escalas de energia e podem ser empregadas, em seus limites de validade, ao invés de teorias mais fundamentais. A ideia de teorias efetivas também é empregada em diversas outras áreas da física e consiste em tratar os diversos graus de liberdade do sistema relevantes para a descrição do processo de interesse, em que a escolha das variáveis que serão eliminadas depende do sistema em questão [16].

Para a QCD, diversas teorias efetivas têm sido desenvolvidas a fim de explicar diferentes comportamentos e interações da matéria hadrônica a baixas energias. Neste trabalho, buscaremos obter uma teoria efetiva para interações entre quarks considerando os graus de liberdades associados aos condensados de glúon de ordem 2,  $\langle A_\mu^a A_a^\mu \rangle$ , e do condensado escalar de quark-antiquark,  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Entretanto, a lagrangeana quantizada apresenta muitos termos de interação (e de auto-interação) das partículas fundamentais tornando sua análise complicada do ponto de vista das equações fundamentais.

Partindo do funcional gerador da QCD e utilizando-se do método de integrais de tra-

jetórias faremos inicialmente a integração funcional dos glúons, dadas as devidas considerações e aproximações. É muito importante salientar que as aproximações consideradas não devem modificar a estrutura dos resultados dessas integrações [17], uma vez que os termos a serem aproximados terão contribuições em termos de coeficientes numéricos associados às constantes de acoplamento do modelo. Depois procedemos eliminando a parte dos campos fermiônicos que condensam por meio da integração de variáveis de Grassmann obtendo-se assim uma expressão que representa uma ação efetiva de onde podemos obter as expressões que caracterizam o estado fundamental do modelo. Entretanto, nesse processo será necessária a utilização de campos auxiliares que estarão associados aos condensados.

Uma característica da derivação de nosso modelo será a obtenção de uma expressão que remete ao modelo de Nambu–Jona-Lasínio (NJL) que inicialmente não levava em conta a presença dos glúons como mediadores das interações fortes entre os quarks. Alguns trabalhos como *QCD-motivated Nambu–Jona-Lasínio model with quark and gluon condensates* [18] buscam estabelecer modelos efetivos para a QCD levando em conta a estrutura do modelo NJL e a presença dos glúons e dos condensados. Um ponto marcante no modelo é a presença da simetria quiral, associada ao sabor dos quarks, sendo essa uma das mais importantes [19, 20] simetrias da QCD, e modelos que visem explicar a teoria devem levar em conta sua presença. Associada à simetria quiral a presença do condensado escalar de quark-antiquark também é outro ponto que têm sido objeto de estudos e discussões sobre modelos efetivos para baixas energias na QCD [21–23].

Diante do exposto acima, este trabalho tem por objetivo derivar um modelo efetivo que, partindo da QCD possa descrever os graus de liberdade dos quarks e suas interações com os condensados no limite de baixas energias. No Capítulo 2, será apresentada uma breve revisão da QCD onde aspectos históricos importantes serão apresentados e as partículas fundamentais da teoria serão introduzidas com suas propriedades e características relevantes para o entendimento do trabalho. Na Seção 2.3 a lagrangeana da QCD é apresentada e algumas de suas características são discutidas mostrando-se suas simetrias na Seção 2.4. Uma breve discussão

da quantização da QCD é mostrada na seção seguinte onde será introduzida a fixação de calibre e, finalizando este capítulo, os condensados são apresentados na Seção 2.6.

No Capítulo 3, algumas técnicas auxiliares são introduzidas, apresentando-se uma revisão sobre o modelo NJL na Seção 3.1 e a introdução dos campos auxiliares, a minimização do potencial efetivo e a expansão do determinante funcional, respectivamente, são discutidos nas Seções 3.2, 3.3 e 3.4.

Por fim, a derivação do modelo é realizada no Capítulo 4, em que o procedimento seguido é a integração funcional dos campos dos glúons e dos quarks que condensam para posterior análise na Seção 4.3 do estado fundamental da teoria e a solução numérica das equações do GAP com seus respectivos valores numéricos. A expansão do determinante funcional é realizada na Seção 4.4 onde discutimos os termos da expansão até a sexta ordem nas derivadas e seus resultados numéricos para a lagrangeana final do modelo efetivo desejado.

# Capítulo 2

## Cromodinâmica Quântica

### 2.1 Aspectos Introdutórios

A busca do homem pelos componentes elementares da matéria inicia-se na Grécia Antiga a partir de suas discussões sobre como essa era constituída. Entretanto, podemos destacar a descoberta do elétron, por J. J. Thomson em 1897, como o início da Física de Partículas Elementares responsável pela quebra do paradigma da indivisibilidade dos átomos. Alguns anos mais tarde, em 1911, Ernest Rutherford e seus colaboradores bombardeando uma lâmina de ouro com radiação alfa concluem que o átomo deveria possuir um núcleo central positivo com os elétrons orbitando em torno desse e o átomo seria preenchido, em sua grande parte, por espaços vazios [1]. Possibilitando uma nova visão dos componentes fundamentais da matéria, tal descoberta também suscitou novas questões sobre como era garantida a estabilidade atômica. Diversos físicos notáveis, como Niels Bohr e Arnold Sommerfeld buscaram explicações para tal estabilidade, mas apenas a Física Clássica não seria capaz de fornecer conclusões plausíveis e o surgimento da Mecânica Quântica contribuiu de forma fundamental para o desenvolvimento das teorias que buscavam explicar a estrutura da matéria.

Em virtude deste trabalho não ter por objetivo uma revisão histórica precisa, mas de alguns poucos fatos que foram marcantes dentro deste contexto, cabe ressaltar que diversos outros nomes e propostas contribuíram para a formulação de uma teoria que explicasse satisfatoriamente a composição fundamental da matéria. A descoberta do nêutron por James Chadwick, em 1932, veio incluir mais um componente ao modelo atômico proposto por Ruther-

ford, mas ainda havia um questionamento muito forte sobre a estabilidade do núcleo atômico formado por partículas que sofreriam de repulsão coulumbiana onde apenas introdução dos nêutrons não seria suficiente para elucidar tal questão.

A proposta foi a da existência de uma força ainda mais intensa do que a força de repulsão elétrica, que ficou conhecida como força forte, e sendo esta de curto alcance não seria sentida fora do núcleo atômico. O primeiro modelo significativo para explicar a força forte foi proposto por Hideki Yukawa em 1935, onde as partículas nucleares deveriam ser atraídas mutuamente por meio de partículas intermediadoras, chamadas de *mésons* [1] e, desde então, muito foi descoberto e investigado, levando à formulação da Cromodinâmica Quântica.

No atual *Modelo Padrão* da Física de Partículas, a QCD é a teoria responsável por explicar as interações fortes [2, 8, 11]. Atualmente, as quatro forças fundamentais conhecidas são: gravitacional, eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte [1, 2, 24]<sup>1</sup>. A força gravitacional foi desenvolvida inicialmente na teoria clássica da Gravitação Universal de Newton e posteriormente foi incorporada pela teoria da Relatividade Geral de Einstein, mas sua forma quântica ainda não foi concluída. Para as forças eletromagnéticas, que surgiram da união de teorias antigamente separadas (a eletricidade e o magnetismo), temos a Eletrodinâmica desenvolvida nos trabalhos de Maxwell, a nível clássico, que já incorporava a Relatividade Restrita de Einstein, e que tem sua versão quântica dada pela Eletrodinâmica Quântica (QED), dos trabalhos de Tomonaga, Feynman e Schwinger nos anos 40. A primeira teoria para a força nuclear fraca, foi desenvolvida inicialmente por Enrico Fermi em 1933 visando explicar o decaimento beta e hoje está embasada nos trabalhos de Glashow, Weinberg e Salam, nos anos 60, sendo uma teoria puramente quântico-relativística.

Cada uma destas forças tem um mediador, cuja troca caracteriza a interação [1, 2]. A força gravitacional tem como possível mediador o *gráviton*, a eletromagnética, o *fóton*; para as interações fracas os *bósons vetoriais* W e Z e, por fim, para a força forte os *glúons*. Tais

---

<sup>1</sup>Na lagrangeana do Modelo Padrão ainda não é possível inserir-se a quantização do campo gravitacional devido à dificuldades técnicas ainda não solucionadas.

mediadores são partículas elementares conhecidas como bósons de calibre vetoriais e regidas por teorias de calibre invariantes sob transformações locais (dependentes do espaço-tempo) que têm por base algum grupo de simetria [25].

As partículas fundamentais da QCD são os *quarks* e os glúons e ambos carregam uma importante propriedade dentro da teoria: a carga de cor. A presença deste novo número quântico leva a um acoplamento entre quarks e glúons e, além disso, a carga de cor leva a uma auto-interação entre os glúons, o que não ocorre, por exemplo, no caso dos fótons, os bósons de calibre da Eletrodinâmica Quântica. Além disso, a QCD apresenta ainda o *confinamento* dos quarks e glúons dentro dos hádrons, as partículas sujeitas à interação forte. Este mecanismo ainda não é bem compreendido [3], mas uma evidência dessa propriedade é a não observação de quarks ou glúons livres e, conseqüentemente, o confinamento da cor, uma vez que dentro dos hádrons apenas estados ligados de quarks, que levem à combinação de estados sem cores, será permitida.

Finalmente, a constante de acoplamento desta teoria, diferentemente da QED, apresenta um comportamento conhecido como *liberdade assintótica* explicada pelos físicos Gross, Politzer e Wilczek (nobel de Física em 2004). Em seu trabalho eles demonstraram basicamente que teorias de calibre não-abelianas são assintoticamente livres [26–28] o que torna a constante de acoplamento da QCD (uma teoria de calibre não-abeliana) dependente da escala de energia envolvida no processo físico. Portanto, para processos que envolvem altas escalas de energia, a constante de acoplamento da QCD é fraca e para processos com baixas energias envolvidas, alguns dos quais serão discutidos ao longo deste trabalho, ela é forte.

## 2.2 Partículas Fundamentais

Conforme dito anteriormente, as partículas fundamentais da QCD são os quarks e os glúons. Os glúons são os campos de calibre responsáveis por mediar as interações entre os quarks, os campos de matéria [2]. Assim, a força de interação entre os quarks é realizada mediante a troca de glúons [1].

Os quarks, propostos independentemente por Murray Gell-Mann e George Zweig em 1964, tiveram como objetivo a explicação do chamado *Caminho Óctuplo* em que os hádrons eram organizados seguindo determinado padrão. A partir de estudos de decaimentos de partículas presentes em raios cósmicos e do avanço da Física e Engenharia de grandes aceleradores de partículas uma grande quantidade destas, até então tidas como fundamentais, foi detectada, levando à formação do Caminho Óctuplo. Entretanto, de modo análogo ao descobrimento das partículas subatômicas como os elétrons, prótons e nêutrons, acreditava-se que esta grande quantidade de partículas fundamentais era o indicativo de estruturas ainda mais elementares: os quarks, onde os hádrons observados seriam estados ligados de quarks.

Os diferentes tipos de quarks são chamados de *sabores* sendo propostos inicialmente três tipos: *up*, *down* e *strange* [5], considerados quarks leves, que gerarão contribuições efetivas nos regimes de baixas energias [6, 16]. Posteriormente foram descobertos mais três tipos: *charm*, *bottom* e *top*, considerados como quarks pesados sendo que a cada um dos tipos de quarks correspondem suas respectivas antipartículas. Além do sabor, conforme já mencionado anteriormente, os quarks também carregam o número quântico de cor, totalizando três cores e suas respectivas *anticores*.

Os quarks são partículas que obedecem ao *Princípio da Exclusão de Pauli*, pois possuem spin semi-inteiro e são *férmions* (obedecem a estatística de Fermi-Dirac) sendo representados como espinores de Dirac. Os campos espinoriais dos quarks são denotados na representação fundamental por  $q_\alpha^{f,c}(x)$  (os campos dos antiquarks são representados por  $\bar{q}_\alpha^{f,c}$ ) onde  $f = 1, 2, \dots, N_f$  representam índices de sabor<sup>2</sup>,  $c = 1, 2, \dots, N_c$  os índices de cor<sup>3</sup> e  $\alpha = 1, 2, 3, 4$  índices de Dirac [2]<sup>4</sup>.

Os hádrons observáveis são estados ligados de quarks e antiquarks e, dentre esses, podemos encontrar aqueles que possuem spin semi-inteiro, chamados de *bárions*, formados por

---

<sup>2</sup> $N_f$  = número de sabores

<sup>3</sup> $N_c$  = número de cores

<sup>4</sup>Ao longo deste trabalho os índices de cor, sabor e Dirac serão omitidos a fim de evitar sobrecarga de notação sendo explicitados quando necessário.

três quarks/antiquarks, e os que possuem spin inteiro conhecidos como *mésons*, compostos de um par quark-antiquark [6]. Além disso, quarks possuem carga elétrica fracionada de modo que os estados físicos observados apresentam carga elétrica inteira devido à combinação dos diferentes quarks.

Já os glúons são os bósons de calibre vetoriais que também carregam a carga de cor, levando portanto a um acoplamento com os quarks e a auto-interação conforme já mencionado na Seção 2.2. São descritos na representação adjunta por  $A_\mu^a(x)$  em que  $\mu$  representam índices de Lorentz e  $a = 1, 2, \dots, N_c^2 - 1$ , definido no Apêndice A, um índice do grupo de simetria  $SU(3)_{cor}$ . Diferentemente dos quarks, os glúons não possuem sabor e são campos de Yang-Mills [2, 29], em que a álgebra do grupo de simetria a que pertencem é mostrada no Apêndice A.

## 2.3 Lagrangeana da QCD

Uma vez que apresentamos as características básicas da QCD bem como a de suas partículas fundamentais, vamos analisar seu formalismo utilizando-se da formulação lagrangeana. A densidade lagrangeana clássica da QCD, é dada por [2, 6, 8, 27]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q, \quad (2.1)$$

em que  $q$ ,  $\bar{q}$  e  $A_\mu^a$  representam campos de quarks, antiquarks e glúons, respectivamente, e

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.2)$$

é o tensor de força da QCD,  $g$  é uma constante de acoplamento adimensional<sup>5</sup> e  $f^{abc}$  são as constantes de estrutura antissimétricas do grupo de simetria  $SU(3)_{cor}$ , cujas propriedades são descritas no Apêndice A.

No segundo termo da expressão (2.1),  $\gamma^\mu$  representa as matrizes de Dirac em um espaço quadridimensional,  $D_\mu$  é a derivada covariante definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x), \quad (2.3)$$

---

<sup>5</sup>O valor numérico de  $g$  é obtido em [10] a partir de cálculos numéricos, e será retomado na Seção 4.3.

em que observamos o acoplamento entre quarks e glúons por meio de  $g$ , e o campo  $A_\mu(x)$  é a representação adjunta que relaciona os geradores do grupo de simetria ao campo de calibre vetorial dada por:

$$A_\mu(x) = T^a A_\mu^a(x), \quad (2.4)$$

em que  $T^a$  é o gerador do grupo de simetria definido pelas expressões (A.3) e (A.7) para o espaço de cor, com  $N_c = 2$  e  $N_c = 3$ , respectivamente. Por fim,  $m$  é uma matriz diagonal de massa no espaço de sabor [2, 8] conhecida como *massa de corrente* dos quarks ou *massa dos quarks livres* [8], diferentemente da chamada *massa constituinte* que leva em conta o mecanismo de geração dinâmica de massa em função das interações entre os quarks [30].

A expressão (2.1) pode ser definida como a soma das contribuições dos campos dos glúons e dos quarks<sup>6</sup>:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{gluons} + \mathcal{L}_{quarks}, \quad (2.5)$$

em que o termo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gluons} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a) + \frac{g}{4}f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c(\partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a) \\ & + \frac{g}{4}f^{ade}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_d^a A_e^d \end{aligned} \quad (2.6)$$

é obtido tomando-se o produto entre o tensor de força nas suas formas covariante e contravariante, respectivamente. Da expressão (2.6) percebemos que o primeiro termo corresponde à parte cinética e os demais termos representam as auto-interações entre os glúons.

## 2.4 Simetrias da QCD

A Física tem nas quantidades conservadas suas principais leis universais. A conservação de energia, momento linear e angular são exemplos de tais quantidades que contribuem para os sistemas físicos em geral. Na QCD, bem como em teorias de campo, usamos a formulação lagrangeana, em que as simetrias da teoria correspondem a quantidades conservadas [20, 27], que podem ser dadas por correntes. Nesta formulação, uma teoria é considerada simétrica

<sup>6</sup>A partir deste ponto utilizaremos a notação  $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$  para o termo lagrangeano dos quarks.

(ou invariante), se para uma dada transformação infinitesimal  $\delta\mathcal{L}$ , aplicada sobre a densidade lagrangeana original  $\mathcal{L}$ , isto é,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} , \quad (2.7)$$

obtivermos o mesmo resultado para a lagrangeana transformada  $\mathcal{L}'$ , levando-nos a:

$$\delta\mathcal{L} = 0 . \quad (2.8)$$

Se o valor esperado para o estado fundamental da lagrangeana  $\mathcal{L}'$  for não-nulo, a simetria é quebrada *espontaneamente*. Entretanto, pode ocorrer uma quebra da simetria já no termo lagrangeano de modo que

$$\delta\mathcal{L} \neq 0 . \quad (2.9)$$

Quando (2.9) acontece, a simetria é quebrada *explicitamente*, e um exemplo dessa quebra é a presença de um termo de massa em  $\mathcal{L}_{quarks}$ , que discutiremos mais adiante.

As leis de conservação, que definem quantidades que não variam independentemente da evolução dinâmica do sistema, têm um importante papel dentro da física e são consequências naturais das propriedades de simetria de um sistema, de acordo com o *teorema de Noether* [27, 31]. Esse teorema nos diz que cada transformação de simetria contínua leva a uma lei de conservação e, portanto, a uma corrente conservada.

Contudo, as quebras de simetria também podem contribuir para a compreensão do estado fundamental e de algumas propriedades das teorias. O *teorema de Goldstone* prevê que a quebra espontânea de uma simetria contínua leva ao aparecimento de bósons sem massa conhecidos como *bósons de Goldstone* [27–29, 32, 33]. Essa quebra espontânea de simetria origina um estado fundamental não trivial com consequências muito interessantes conforme veremos adiante.

Uma das simetrias da QCD é a simetria de calibre de cor, alcançada por meio da inserção do campo de calibre vetorial não-abeliano, dado pelos glúons. Partindo-se da densidade lagrangeana de Dirac para férmions livres e adaptando-as para os campos dos quarks, temos

[29, 31]:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{q}^c (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q^c, \quad (2.10)$$

que é simétrica para transformações de calibre global (independente das coordenadas):

$$q^c \rightarrow e^{-i\theta^a T^a} q^c, \quad \bar{q}^c \rightarrow e^{i\theta^a T^a} \bar{q}^c, \quad (2.11)$$

mas não para transformações locais (dependentes das coordenadas)

$$q^c \rightarrow e^{-i\theta^a(x) T^a} q^c, \quad \bar{q}^c \rightarrow e^{i\theta^a(x) T^a} \bar{q}^c, \quad (2.12)$$

e para o campo de calibre

$$A_\mu \rightarrow e^{-ig\theta^a(x)} \left( A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) e^{+ig\theta^a(x)}, \quad (2.13)$$

em que  $\theta^a$  é um parâmetro global real e infinitesimal de transformação.

Deste modo, para que a lagrangeana definida em (2.10) se torne invariante sob tais transformações locais devemos introduzir a derivada covariante, definida em (2.3), e, conseqüentemente, um campo de calibre que se acopla aos campos dos quarks [14, 25, 29], conforme mencionado na Seção 2.3. Por conseguinte, para que ocorra a invariância de calibre o tensor de força da QCD definido em (2.2) inclui termos que levam também a auto-interação destes campos e, portanto, à lagrangeana definida em (2.1).

A simetria de sabor também desempenha papel fundamental na QCD. Explicitando-se os índices de sabor para a equação (2.1):

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}^f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q^f \quad (2.14)$$

observamos que ela é *sempre* invariante sob transformações vetoriais do grupo unitário dadas por:

$$U_V(1) : q^f \rightarrow e^{-i\alpha} q^f, \quad \bar{q}^f \rightarrow e^{+i\alpha} \bar{q}^f, \quad (2.15)$$

sendo  $\alpha$  é um parâmetro real de transformação e tem como correntes conservadas:

$$j_\mu = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}^f \gamma_\mu q^f, \quad (2.16)$$

que representam fisicamente a conservação do número bariônico, ocorrendo separadamente para cada sabor, em todos os processos envolvendo interações fortes [2, 6, 20]. Já para transformações vetoriais do grupo de simetria:

$$SU_V(N_f) : q^f \rightarrow e^{-i\Phi^a T^a} q^f, \quad \bar{q}^f \rightarrow e^{+i\Phi^a T^a} \bar{q}^f, \quad (2.17)$$

em que  $\Phi^a$  é um parâmetro real de transformação, a corrente vetorial:

$$J_\mu^a = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}^f \gamma_\mu T^a q^f, \quad (2.18)$$

somente é conservada no limite em que as massas dos quarks são iguais [2, 14]. Por exemplo, para  $N_f = 2$  devemos ter  $m_u = m_d$ , cuja corrente está associada à antiga simetria de isospin para os núcleons, e para  $N_f = 3$ , onde  $m_u = m_d = m_s$ , associamos o Caminho Óctuplo.

Entretanto, para as transformações axiais definidas por:

$$U_A(1) : q^f \rightarrow e^{-i\beta\gamma_5} q^f, \quad \bar{q}^f \rightarrow \bar{q}^f e^{+i\beta\gamma_5}, \quad (2.19)$$

$$SU_A(N_f) : q^f \rightarrow e^{-i\Omega^a T^a \gamma_5} q^f, \quad \bar{q}^f \rightarrow \bar{q}^f e^{+i\Omega^a T^a \gamma_5}, \quad (2.20)$$

com  $\beta$  e  $\Omega^a$  sendo parâmetros reais da transformação, a lagrangeana (2.14) somente será invariante no *limite quiral*, onde  $m_f = 0$ . Assim, podemos escrever a lagrangeana quiral a partir de (2.14) de onde encontramos as correntes conservadas:

$$j_{5,\mu} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}^f \gamma_\mu \gamma_5 q^f, \quad (2.21)$$

$$J_{5,\mu}^a = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}^f \gamma_\mu \gamma_5 T^a q^f. \quad (2.22)$$

Cabe ressaltar, que no nível quântico, a corrente axial definida por (2.21) não é conservada, o que é conhecido como *anomalia axial* [2, 6, 8, 14, 16, 20].

As transformações (2.17) e (2.20) são chamadas de *transformações quirais* e remetem à chamada *simetria quiral*, que é uma simetria global da QCD, exata apenas no *limite quiral* [2, 14, 19, 20] e responsável por importantes efeitos no estado de vácuo da teoria [14, 20, 28]. Porém, o limite quiral é idealizado [2], uma vez que as massas dos quarks não são nulas e,

portanto, a inserção do termo de massa na lagrangeana quiral é responsável por uma quebra de simetria, exceto para as transformações definidas por (2.15).

Portanto, o fato dos quarks possuírem massa leva a uma quebra explícita de simetria da lagrangeana (2.14). Mas, se tomarmos os quarks leves, cujas massas, dadas em [34]  $m_u = 2,3 \text{ MeV}$ ,  $m_d = 4,8 \text{ MeV}$  e  $m_s = 95 \pm 5 \text{ MeV}$ , são relativamente pequenas se comparadas com a escala hadrônica ( $\Lambda_{had.} \approx 1 \text{ GeV}$ ) [11] então, a simetria quiral pode ser tomada como uma boa aproximação para regimes de baixas energias envolvidas considerando-se a presença desses quarks [2, 20]<sup>7</sup> e que também está presente no espectro hadrônico e nuclear. Além disso, a QCD no limite de baixas energias apresenta a chamada *quebra espontânea de simetria quiral*<sup>8</sup>, e uma teoria com objetivo de descrever as interações fortes deve levar em conta esta importante propriedade.

A quiralidade é introduzida por meio da matriz  $\gamma^5$  de modo que definimos os operadores de projeção quiral [14]:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad , \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (2.23)$$

que atuam nos campos dos quarks:

$$q_L = P_L q \quad , \quad q_R = P_R q \quad (2.24)$$

resultando em quarks com quiralidade direita e esquerda, respectivamente representados em (2.24). No limite quiral, a separação dos campos dos quarks em termos de projeções quirais resulta na completa separação dos quarks com projeções direita daqueles com projeção esquerda. Entretanto, o termo de massa contribui para a mistura desses campos, e conseqüentemente a uma quebra explícita da simetria quiral.

Algumas conseqüências físicas da quebra espontânea de simetria quiral na QCD, além das mencionadas no parágrafo anterior, são: a geração dinâmica de massa para os quarks e hádrons [8, 20, 22, 35], a modificação do estado fundamental da QCD levando à presença

<sup>7</sup>Para os quarks *charm*, *bottom* e *top*, cujas massas são, respectivamente,  $m_c = 1,275 \pm 0,025 \text{ GeV}$ ,  $m_b = 4,66 \pm 0,03 \text{ GeV}$  e  $m_t = 173,07 \pm 0,52 \pm 0,72 \text{ GeV}$  [34]; a simetria quiral deixa de ser uma boa aproximação, uma vez que o limite energético se torna muito alto para ser avaliado não perturbativamente.

<sup>8</sup>Na literatura é comum encontrar a sigla  $\chi SB$ , para a expressão em inglês *Chiral Symmetry Breaking*.

do condensado escalar [8, 14, 19, 20] e a presença de *pseudo-bósons* de Goldstone com massas pequenas, porém não-nulas<sup>9</sup>.

E desta maneira, sob o ponto de vista das simetrias contínuas globais, temos que as principais simetrias da QCD para o espaço de sabor são:

$$SU_V(N_f) \otimes SU_A(N_f) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1)$$

além da simetria de calibre de cor.

## 2.5 Quantização da QCD

Nas Seções 2.3 e 2.4 vimos a lagrangeana da QCD e mencionamos algumas de suas importantes simetrias e propriedades. Entretanto, a teoria ainda se apresenta na sua forma clássica e precisamos realizar a sua quantização, em que será mais conveniente, para o objetivo deste trabalho, utilizarmos o método de integrais de trajetória desenvolvido por Feynman. Assim, o funcional gerador da QCD, neste formalismo, é dado por [8, 25, 29]:

$$Z[J_\mu^a, \bar{\eta}, \eta]_{QCD} = e^{iW[J_\mu^a, \bar{\eta}, \eta]} = N \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \mathcal{D}[\bar{q}] \mathcal{D}[q] e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{QCD} + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\eta} q + \eta \bar{q} \}}, \quad (2.25)$$

em que  $N$  é uma constante de normalização,  $\mathcal{L}_{QCD}$  é dada por (2.1),  $J_\mu^a$  representa uma fonte de glúons e  $\eta$  ( $\bar{\eta}$ ) as fontes para os campos  $q$  ( $\bar{q}$ ).

Neste formalismo, o termo  $\int d^4x \mathcal{L}_{QCD}$  representa uma ação funcional para os campos dos quarks e glúons e nosso objetivo é determinar as funções de Green que irão levar aos propagadores desses campos. Se tomarmos a lagrangeana para os glúons livres, isto é, desconsiderando-se os campos dos quarks e os termos de auto-interação da expressão (2.6), e realizarmos uma integração por partes, temos a ação dada por:

$$\begin{aligned} S_{gluons}^0 &= \int d^4x \mathcal{L}_{gluons}^0 = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu^a(x) [(g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \delta^{ab} \delta^4(x-y)] A_\nu^b(y), \end{aligned} \quad (2.26)$$

<sup>9</sup>O bóson de Goldstone para  $N_f = 2$ , são os píons cuja massa é da ordem de  $140 \text{ MeV}$ .

em que o termo entre colchetes representa a função de Green que devemos inverter, por meio de [6]

$$(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)\delta^{ab}\mathcal{D}_{\nu\rho}^{bc}(x-y) = g_\rho^\mu\delta^{ac}\delta^4(x-y), \quad (2.27)$$

em que  $\mathcal{D}_{\nu\rho}^{bc}(x-y)$  representa o propagador para os glúons livres. Entretanto, a função de Green definida em (2.26) não é inversível [4, 6, 25, 29] e é necessária a inserção de um termo de fixação de calibre, analogamente ao que ocorre na QED [28], cujo significado é a eliminação dos graus de liberdade não-físicos [6, 36].

O termo de fixação de calibre será inserido na lagrangiana de modo a quebrar a invariância de calibre e permitir a remoção da indefinição e, com isso, encontrarmos o propagador dos glúons. Esse procedimento foi desenvolvido por *Faddeev-Popov* e consiste na inserção da identidade [4, 29, 32]:

$$1 = \Delta_{FP} \int \prod_x d\theta(x) \delta(F^a[A_\mu^\theta(x)]) \quad (2.28)$$

ao funcional gerador (2.25), em que  $\Delta_{FP} = \det\left(\frac{\delta F^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^b(y)}\right)_{\theta=0}$  é o determinante de Faddeev-Popov<sup>10</sup>, que é invariante de calibre;  $\int \prod_x d\theta(x)$  representa um elemento infinito de volume que será incorporado à constante de normalização,  $F^a[A_\mu^\theta(x)] = f(x) = 0$  é a condição de fixação de calibre e  $\theta(x)$  é um parâmetro infinitesimal de transformação de calibre. Como  $f(x)$  não depende de  $A_\mu^a$  podemos inserir a identidade (2.28) no funcional gerador (2.25), resultando em:

$$Z[J_\mu^a, \bar{\eta}, \eta]_{QCD} = N \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \mathcal{D}[\bar{q}] \mathcal{D}[q] \Delta_{FP} \delta(F^a[A_\mu^\theta(x)] - f(x)) e^{i \int d^4x \{\mathcal{L}_{QCD} + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\eta}q + \eta\bar{q}\}} \quad (2.29)$$

que pode ser multiplicada por um fator  $e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (f(x))^2}$ , e integrada sobre todos  $f(x)$  [25, 29] resultando em:

$$Z[J_\mu^a, \bar{\eta}, \eta]_{QCD} = N \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \mathcal{D}[\bar{q}] \mathcal{D}[q] \Delta_{FP} [A_\mu^a] e^{i \int d^4x \{\mathcal{L}_{QCD} - \frac{1}{2\xi} (F^a[A_\mu^\theta(x)])^2 + \bar{\eta}q + \eta\bar{q}\}}. \quad (2.30)$$

Assim, o termo lagrangeano de fixação de calibre será dado por:

$$\mathcal{L}_{FG} = -\frac{1}{2\xi} (F^a[A_\mu^\theta(x)])^2. \quad (2.31)$$

<sup>10</sup>O determinante de Faddeev-Popov pode ser interpretado como o jacobiano devido à escolha do calibre e que pode ser calculado através das restrições na escolha das transformações infinitesimais de calibre [29].

Como podemos ver em [25] algumas condições de fixação de calibre são:

$$F^a [A_\mu^\theta(x)] = \partial_\mu A_\mu^a(x) = 0, \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot \vec{A}(x) = 0, \quad (2.33)$$

$$A_3^a(x) = 0, \quad (2.34)$$

$$A_0^a(x) = 0, \quad (2.35)$$

que são, respectivamente, os calibres de *Landau*, de *Coulomb*, *Axial* e *Temporal*. Para este trabalho iremos considerar a escolha do calibre de Landau e o termo de fixação de calibre será, portanto dado por:

$$\mathcal{L}_{FG} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2, \quad (2.36)$$

em que  $\xi$  é um parâmetro real arbitrário de fixação de calibre e no calibre de Landau corresponde a tomarmos o limite  $\xi \rightarrow 0$ .

Entretanto, a escolha de calibres, como o de Landau ou o de Coulomb, por exemplo, resultam nas chamadas cópias ou ambiguidades de Gribov [25] que correspondem a diferentes configurações de campos satisfazendo as condições de calibre definidas [36,37]. Essas cópias não afetam os resultados para uma teoria perturbativa (para altas energias) [4,12], mas ainda nesses regimes, a unitariedade também é perdida e o determinante de Faddeev-Popov em (2.30), que tem por objetivo restaurar essa propriedade, pode ser escrito como [25,32]:

$$\Delta_{FP} = \det \left( \frac{\delta F^a [A_\mu^\theta(x)]}{\delta \theta^b(y)} \right) = \int \mathcal{D}[\bar{c}^a] \mathcal{D}[c^a] \exp \left[ i \int d^4x \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a \right], \quad (2.37)$$

em que inserimos os campos independentes  $c(x)$  e  $\bar{c}(x)$  [4,28], que obedecem relações de anti-comutação assim como campos fermiônicos, mas que são escalares de Lorentz [25,28,29]. A conexão entre a estatística e o spin não é violada, pois esses campos não representam nenhuma partícula no estado inicial ou final [28] e, por este motivo, são conhecidos como *fantasmas de Faddeev-Popov*. Assim, (2.37) equivale a inserção de um termo lagrangeano para os campos fantasmas:

$$\mathcal{L}_{fantasmas} = \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a, \quad (2.38)$$

em que  $D_\mu$  é a derivada covariante já definida em (2.3).

Por fim, obtemos a lagrangeana total da QCD levando-se em conta a quantização, partindo-se de (2.1) e aplicando-se (2.36) e (2.38), de modo que:

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{quarks} + \mathcal{L}_{fantasmas} , \quad (2.39)$$

cuja ação é definida por:

$$S_{QCD} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu)^2 + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q + \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a \right. \\ \left. + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{\eta}q + \eta\bar{q} + \bar{\chi}c + \chi\bar{c} \right] , \quad (2.40)$$

em que incluímos  $\chi$  e  $\bar{\chi}$ , que são as fontes para os campos fantasmas.

Desse modo, temos a lagrangeana da QCD em sua forma quantizada bem como a correspondente ação já modificada com a presença dos termos de fixação de calibre e dos campos fantasmas necessários neste processo. Conseqüentemente, o funcional gerador para a teoria fica dado por:

$$Z[J_\mu^a, \bar{\eta}, \eta, \bar{\chi}, \chi]_{QCD} = e^{iW[J_\mu^a, \bar{\eta}, \eta, \bar{\chi}, \chi]} = N \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \mathcal{D}[\bar{q}] \mathcal{D}[q] \mathcal{D}[\bar{c}^a] \mathcal{D}[c^a] e^{iS_{QCD}} \quad (2.41)$$

## 2.6 Condensados e a QCD

Como já comentado na Seção 2.4, o condensado escalar de quark-antiquark, surge como consequência da quebra espontânea de simetria quiral e sua presença nos regimes de baixas energias é muito importante para a compreensão do estado fundamental da teoria.

A ideia da condensação de partículas foi introduzida por Einstein em 1924, onde à medida que o gás de bósons ideal é resfriado observa-se uma transição de fase [38], que ocorre na chamada *temperatura de Bose Einstein*  $T_0$ , em que há a acumulação de todos os bósons não interagentes no estado de menor energia (estado fundamental). Essa nova fase da matéria ficou conhecida como *condensado de Bose-Einstein* uma vez que estes obedecem à distribuição estatística de Bose [39]. Assim, abaixo de  $T_0$ , o estado fundamental passa a ser ocupado

macroscopicamente, ou seja, os efeitos quânticos passam a ser observáveis bem como os macroscópicos [40].

A existência dos condensados foi inicialmente associada ao comportamento de superfluido do hélio líquido<sup>11</sup>, mas a detecção experimental do condensado de Bose-Einstein só ocorreu em 1995 em átomos de rubídio resfriados e confinados magneticamente [38, 39]. Analogamente, mecanismo semelhante foi proposto na teoria BCS da supercondutividade por meio dos pares de Cooper.

Os condensados da QCD correspondem ao valor esperado de um operador composto no estado fundamental [11], e ocorrem para os campos de glúons e de quarks [21, 23]. Dois importantes condensados da QCD são: o condensado de glúons de ordem 2  $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$  e o condensado escalar de quark-antiquark  $\langle \bar{q}q \rangle$ .

Um dos efeitos do condensado de glúons de ordem 2, será a modificação do propagador do glúon e a geração de massa dinâmica para esses [41, 42]. Já o condensado escalar de quark-antiquark pode ser representado em termos das projeções quirais por [6]

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \doteq \langle 0 | \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L | 0 \rangle, \quad (2.42)$$

e é conhecido como *condensado quiral*. Quando  $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = 0$ , observamos que não haverá um acoplamento entre os quarks com quiralidade direita e esquerda [6]. Entretanto,  $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \neq 0$  é um efeito da quebra espontânea da simetria quiral [21] da QCD ocorrendo para  $T \leq T_c$ , em que  $T_c$  é uma temperatura crítica abaixo da qual ocorre a condensação. A restauração da simetria quiral ocorre para temperaturas maiores do que a temperatura crítica,  $T \geq T_c$  [6, 11, 23].

Além disso, dentro desse limite a presença de condensados deve ser responsável por efeitos nas massas efetivas dos quarks. As massas dos quarks leves, dadas na Seção 2.4, são bastante diferentes das massas efetivas observadas no modelo de quarks constituintes, em que as propriedades dos hádrons podem ser obtidas considerando-se os quarks fracamente interagentes<sup>12</sup> dentro daqueles e com massas dadas por  $M_u \approx M_d \sim 300 \text{ MeV}$  e  $M_s \sim 500 \text{ MeV}$  [16],

<sup>11</sup>Este comportamento é aproximado, pois as interações entre as partículas não são desprezíveis para este sistema.

<sup>12</sup>O fato dos quarks constituintes interagirem fracamente dentro dos núcleons está associado ao confinamento

sendo o mecanismo de geração de massa dinâmica associado à presença dos condensados da quebra espontânea de simetria quiral.

Como já comentamos anteriormente, os bósons de Goldstone estão associados à quebra espontânea de simetria. Na QCD, a simetria quiral é aproximada e esses bósons possuem massa, ainda que pequenas se comparadas à escala hadrônica. Considerando-se, portanto, os quarks leves, o espectro da QCD possui nove pseudo-bósons de Goldstone representados pelos píons ( $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ ), káons ( $K^0, \bar{K}^0, K^+, K^-$ ) e mésons eta ( $\eta, \eta'$ ) [4], onde o méson  $\eta'$  está relacionado à anomalia axial [8, 43, 44]. Para  $N_f = 2$ , a relação Gell-Mann–Oakes–Renner [45, 46]:

$$(m_u + m_d) \times \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle = -f_\pi^2 m_\pi^2 (1 - \delta_\pi), \quad (2.43)$$

relaciona o termo de quebra explícita da simetria quiral,  $m_u + m_d$ , com o termo de quebra espontânea representado por  $\langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle$ . Em (2.43)  $f_\pi = 93 \text{ MeV}$  é a constante de decaimento do pión,  $m_\pi = 150 \text{ MeV}$  a massa do pión e  $\delta_\pi = 0,047 \pm 0,017$  um parâmetro de correção quiral. E analogamente, para  $N_f = 3$ , temos:

$$\left( m_s + \frac{m_u + m_d}{2} \right) \times \left\langle 0 \left| \frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{2} + \bar{s}s \right| 0 \right\rangle = -2f_K^2 m_K^2 (1 - \delta_K), \quad (2.44)$$

em que  $f_K = (1,22 \pm 0,01)f_\pi$  é a constante de decaimento do káon,  $m_k = 495 \text{ MeV}$  a massa do káon e  $\delta_K = 0,61 \pm 0,22$ .

Com isto, concluímos uma breve revisão sobre a QCD e algumas de suas propriedades para baixas energias relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

---

dos quarks dentro destes e, conseqüentemente, à intensidade da constante de acoplamento que, neste caso, se torna mais fraca uma vez que a distância entre os quarks é pequena. A medida que esta distância é aumentada observa-se um aumento da constante de acoplamento e, conseqüentemente, uma aumento da interação atrativa entre os quarks.

# Capítulo 3

## Modelos Efetivos e Técnicas Auxiliares

### 3.1 O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio

O modelo de Nambu–Jona-Lasinio foi desenvolvido por Y. Nambu e G. Jona-Lasinio em 1961 (*Dynamical model of elementary particles based on an analogy with Superconductivity I e II*), sendo considerada uma teoria pré-QCD de núcleons que se relacionam por meio de uma interação efetiva entre dois corpos [8]. Sendo assim, esse modelo ainda não levava em conta a presença de quarks e glúons, e as interações eram dadas por correntes de mésons.

A importância de tal modelo é que sua lagrangeana para campos de núcleons já levava em conta algumas das simetrias observáveis da QCD, entre elas a simetria quiral. Portanto, ele é invariante quiral sendo importante para a compreensão dos hádrons mais leves. Além disso, a quebra espontânea de simetria quiral também é encontrada, o que leva ao fato do modelo ter sido, mais tarde, estendido aos quarks e à geração de massa dinâmica dos mesmos.

O modelo NJL foi construído para guardar a simetria  $SU_V(2) \otimes U_V(1) \otimes SU_A(2) \otimes U_A(1)$ , e sua lagrangeana original para  $N_f = 2$  é dada por [47]

$$\mathcal{L}_{NJL}^2 = -\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}M^0\psi + g_0 \left[ \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi - \sum_{i=1}^3 \bar{\psi}\gamma_5\tau_i\psi\bar{\psi}\gamma_5\tau_i\psi \right], \quad (3.1)$$

em que  $M^0$  foi definido como o operador de massa das partículas “nuas”,  $g_0$  é a constante de acoplamento positiva de dimensão  $[massa]^{-2}$ ,  $\psi$  os campos para as partículas fermiônicas consideradas fundamentais em  $SU(2)_{sabor}$  e  $\tau_i$  as matrizes de Pauli para o espaço de isospin. O modelo NJL foi elaborado tomando como partículas fundamentais os núcleons (prótons e

nêutrons) e guarda analogias com o modelo BCS para a supercondutividade, uma vez que se baseia nas interações atrativas do tipo nêutron–anti-nêutron.

Como podemos observar em (3.1) o modelo considera as interações de quarta ordem entre os férmions e, além disso, a presença do operador  $M^0$  é fundamental para a quebra explícita da simetria quiral e a existência de uma massa não nula para o pión [47], que era descrito inicialmente como um estado ligado de nêutron e anti-nêutron [16].

Com o advento da QCD o modelo foi deixado de lado, mas conforme podemos ver em [49], sua extensão para a teoria foi novamente importante pois conseguia explicar satisfatoriamente a simetria quiral da QCD bem como sua o mecanismo de sua quebra e a geração de massa dinâmica para os quarks em regimes de baixas energias. O modelo foi mais tarde desenvolvido para  $SU(3)_{sabor}$  [44], já levando em conta sua extensão para a QCD e utilizando-se o termo incluído por G. t' Hooft que quebra explicitamente a simetria axial  $U_A(1)$  [50]. Assim, para  $N_f = 3$  a lagrangeana efetiva do modelo é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NJL}^3 = & \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + \sum_{a=0}^8 \frac{1}{2} g_s [(\bar{q}\lambda_a q)^2 + (i\bar{q}\lambda_a \gamma_5 q)^2] \\ & + g_D [\det \bar{q}(1 - \gamma_5)q + \det \bar{q}(1 + \gamma_5)q] , \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que  $q$  representa os campos dos férmions (agora já descritos pelos quarks),  $m$  o termo diagonal da matriz de massa das correntes de quarks (para  $N_f = 3$ ),  $g_s$  a constante de acoplamento para o termo lagrangeano que conserva a simetria quiral e  $g_D$  a constante para a parte que quebra explicitamente a simetria axial. Além disso, o determinante e  $\lambda_a$ , que representam as matrizes de Gell-Mann, são dados no espaço de sabor.

Portanto, (3.2) apresenta a lagrangeana efetiva para o modelo NJL com  $N_f = 3$  onde observamos além dos termos de interação quadri fermiônicos, a inserção do termo de interação de seis férmions dado pelo determinante de *t' Hooft* que surge como forma de levar em conta a anomalia axial e a não manifestação física dos campos  $\eta'$ .

Por se tratar de uma teoria onde as interações entre os quarks são de caráter pontual, o modelo NJL não é um modelo renormalizável, isto é, existem infinitos que aparecem no cálculo

de alguns observáveis, sendo necessária a imposição de esquemas de regularização do modelo, por exemplo, através do limite da escala de energia [8]. Desse modo, temos um modelo efetivo que é válido para o limite de baixas energias [49] que não explica o confinamento de quarks e glúons.

Apesar disto, o modelo NJL tem apresentado bons resultados para modelos levando em conta lagrangeanas quirais [16], extensões para interações de ordem superior entre os quarks [17, 50], efeitos de deformações de simetria introduzidas por campos de quarks [51], estados de diquark e seu confinamento [52], estudo de propriedades de mésons em densidades finitas [53], modelos considerando interações entre condensados [18] e até mesmo versões que buscam explicar o mecanismo de Higgs no Modelo padrão por meio de relações de sua massa com a do quark top, dentre outros.

## 3.2 Método do Campo Auxiliar

Até agora, introduzimos como campos na lagrangeana da QCD os campos de matéria, representados pelos quarks e sendo considerados como *campos físicos* [54] descrevendo os graus de liberdade físicos da teoria; e os *campos de calibre*, representados pelos glúons inseridos a fim de deixar a lagrangeana invariante sob transformações de calibre locais. Podemos incluir uma terceira categoria de campos em nossa teoria, os chamados *campos auxiliares*, os quais podem ser eliminados da teoria sem perda de generalidade, mas que por conveniência matemática, representam elementos essenciais para o desenvolvimento e solução de uma teoria que busque descrever o comportamento destas partículas fundamentais<sup>1</sup>.

No formalismo de integrais de trajetória, escrevemos o funcional gerador para a teoria e procedemos a integração funcional dos campos, que consiste em uma integral gaussiana, isto é, com termos quadráticos nos campos que desejamos integrar [25]. Assim, para campos fermiônicos  $\psi$ , com  $\bar{\psi}$  representando seus conjugados, a integração funcional para variáveis de

<sup>1</sup>Esta técnica também é conhecida como transformação de *Hubbard-Stratonovich*.

Grassmann corresponde a [25, 49, 55]:

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] e^{i \int d^4x \bar{\psi} F \psi} = \det F, \quad (3.3)$$

em que  $F$  representa um operador matricial, neste caso anti-simétrico. Já para campos bosônicos, representados por  $A_\mu$ , a integral gaussiana é dada por:

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}[A_\mu] e^{\frac{i}{2} \int d^4x A_\mu B^{\mu\nu} A_\nu} = (\det B)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

em que  $B$  representa um operador matricial atuando sobre os campos bosônicos.

Portanto, nosso objetivo é escrever uma ação que contenha uma estrutura em que os operadores estejam ligados a termos de segunda ordem nos campos que desejamos integrar. Entretanto, a presença de termos de auto-interação para os glúons, observados em (2.6); e de termos de interação quadri fermiônicos, presentes nas expressões (3.1) e (3.2) do modelo NJL, levam a estruturas que não correspondem a integrações gaussianas, tornando o problema matematicamente mais complicado.

Para contornar essas dificuldades, a introdução de campos auxiliares constitui-se em uma ferramenta fundamental para os estudos realizados em regimes não-perturbativos [56], que é o objetivo deste trabalho. Assim, o objetivo da inserção destes campos é linearizar a ação afim de podermos realizar uma integração gaussiana, ou seja, eliminamos os termos de interação de quarta ordem, seja para o caso fermiônico [57], seja para o caso bosônico [41, 42]. Como consequência temos o aparecimento de um novo campo presente agora na chamada *ação efetiva* para nossa teoria [58].

De modo a ilustramos a introdução destes campos podemos considerar uma teoria cuja ação é definida por

$$S_0[\varphi^i] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi_i - \frac{1}{2} m^2 \varphi_i^2 \right], \quad (3.5)$$

em que  $\varphi^i$  representam os campos de matéria, sendo  $i = 1, \dots, N$  algum índice de simetria interna do grupo  $SU(N)$ ; e  $m$  é um termo de massa da teoria. Por questões de simplicidade,

não escrevemos explicitamente as fontes para esses campos. Realizando-se uma integração por partes no primeiro termo dessa ação (já desprezando termos de superfície) podemos obter:

$$S_0[\varphi^i] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \varphi^i (\square + m^2) \varphi^i \right], \quad (3.6)$$

cujo funcional gerador

$$Z = N \int \mathcal{D}[\varphi^i] e^{iS_0[\varphi^i]} = N \int \mathcal{D}[\varphi^i] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x [\varphi^i (\square + m^2) \varphi^i]}, \quad (3.7)$$

e que pode ser integrada via integração gaussiana, por meio de (3.3) ou (3.4) dependendo da natureza do campo  $\varphi^2$ . Vamos tomar, novamente por questão de simplicidade, tais campos como escalares, e a integração funcional resulta em [31]:

$$Z = N \int \mathcal{D}[\varphi^i] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x [\varphi^i (\square + m^2) \varphi^i]} = N [\det (\square + m^2)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

O determinante em (3.8) pode ser calculado por meio da relação [31, 49, 59]

$$\det K = e^{\text{Tr} \ln K} \quad (3.9)$$

em que  $K$  é uma matriz diagonal, resultando em

$$Z = N e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\square + m^2)} = N e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \sum_i \ln (\square + m^2)}, \quad (3.10)$$

onde nos valemos do fato de que  $\text{Tr} = \int d^4x \sum_i$ , com  $\sum_i$  sendo o traço tomado sobre o índice de simetria considerado. O expoente em (3.10) representa uma ação dada por

$$S_0[\varphi^i] = - \int d^4x \sum_i \frac{1}{2} \ln (\square + m^2). \quad (3.11)$$

Entretanto, os campos da expressão (3.5) representam campos livres, isto é, sem considerar a presença de interações entre os campos de matéria. Devemos lembrar que o caso não interagente não corresponde a uma situação física real, fato esse que podemos corrigir considerando a mais simples das interações entre eles por meio de um termo do tipo  $\varphi_i^4$  correspondendo às interações de ordem mais baixa em nossa teoria. Assim, a ação pode ser reescrita como

$$S[\varphi^i] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi_i - \frac{1}{2} m^2 \varphi_i^2 - g_4 \varphi_i^4 \right], \quad (3.12)$$

---

<sup>2</sup>Para a integração fermiônica devemos lembrar que o termo de massa é dado apenas por  $m$  e representa uma matriz de massa dos campos.

em que  $g_4$  representa uma constante de acoplamento relativa à interação entre dois campos de matéria da nossa teoria, cujo funcional gerador

$$Z = N \int \mathcal{D}[\varphi^i] e^{-i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \varphi^i (\square + m^2) \varphi^i + g_4 \varphi_i^4 \right]}, \quad (3.13)$$

em que já realizamos a integral por partes, não representa uma integral gaussiana e, consequentemente, não podemos aplicar as definições já previamente estabelecidas para tal. O termo de interação pode ser tomado como um potencial que torna a equação de movimento para esses campos não linear.

Com o objetivo de eliminar o termo de quarta ordem vamos introduzir um campo auxiliar  $\phi$ , dado pela identidade

$$1 = N' \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2g_4} (\phi + g_4 \varphi_i^2)^2 \right] \right\}, \quad (3.14)$$

em (3.13), e portanto, o funcional gerador com a introdução de (3.14) se torna

$$Z = N \int \mathcal{D}[\varphi^i] \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \varphi^i (\square + m^2) \varphi^i - \phi (\varphi^i \varphi^i) - \frac{1}{2g_4} \phi^2 \right] \right\}, \quad (3.15)$$

onde o fator de normalização  $N'$  foi incorporado à  $N$ . Na QCD, para o caso dos quarks, ocorre a associação do campo auxiliar a um campo bosônico escalar. A equação (3.15) pode ser rearranjada, de modo que

$$Z = N \int \mathcal{D}[\varphi^i] \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[ \int d^4x \varphi^i (\square + m^2 - 2\phi) - \frac{1}{g_4} \phi^2 \varphi^i \right] \right\}, \quad (3.16)$$

e a ação funcional em termos dos campos de matéria  $\varphi$  integrada, obtendo-se assim uma ação efetiva

$$S_{eff} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \ln (\square + m^2 - 2\phi) + \left( \frac{1}{2g_4} \phi^2 \right) \right]. \quad (3.17)$$

Podemos observar que esse método tem duas importantes consequências: a primeira delas é a geração de um termo na função de Green original (representado por  $2\phi$ ) e a segunda, é o aparecimento de um campo extra na integração funcional. Na QCD, a primeira consequência está ligada à geração dinâmica de massa, seja para os glúons, seja para os quarks, sendo que,

para os últimos, está associada à quebra da simetria quiral. Já para a segunda, a análise do estado fundamental pode ser tomada com base na “extremização” da ação para o campo auxiliar, como veremos na seção seguinte.

Como podemos observar, este método fornece uma alternativa quando consideramos o formalismo de integrais de trajetórias. Para o caso de campos escalares a integração pelo método canônico, que consiste em escrever uma hamiltoniana em termos de operadores de criação e aniquilação, pode ser realizada sem grandes complicações. Mas, para a integração dos campos dos glúons, os termos de auto interação de quarta ordem, mostrados na expressão (2.6), levam à dificuldades matemáticas que podem ser contornadas por meio desta técnica. De modo análogo, para os campos dos quarks, a interação do tipo NJL pode ser integrada e, como consequência, ser associada ao condensado de quark-antiquark.

O que buscamos mostrar nesta seção foi apenas uma técnica geral, as particularidades para o caso da QCD serão colocadas no capítulo seguinte, em que iremos considerar as integrais funcionais para os campos dos quarks e glúons. Na seção seguinte procederemos à “extremização” da ação efetiva (3.17) e, com isso, uma análise do estado fundamental da teoria.

### 3.3 Minimização do potencial efetivo

Uma vez inserido um campo auxiliar, a ação efetiva descrita em (3.17) passa a depender deste campo conduzindo a um valor não-trivial para o estado fundamental da teoria. Se observamos (3.17), podemos constatar que os termos cinéticos desta ação estão ausentes, e podemos, portanto, expressar seus termos como um potencial efetivo, da forma

$$S_{eff} = \int d^4x V_{eff}(\phi), \quad (3.18)$$

em que

$$V_{eff}(\phi) = -\frac{1}{2} \ln(\square + m^2 - 2\phi) + \frac{1}{2g_4} \phi^2, \quad (3.19)$$

e explicitando-se a dependência em  $x$  e  $y$ , temos

$$V_{eff}(\phi(x)) = - \int d^4y \left[ \frac{1}{2} \ln(\square + m^2 - 2\phi(x)) \delta^4(x - y) \right] + \frac{1}{2g_4} \phi^2(x). \quad (3.20)$$

Como podemos observar em [25, 32], o campo auxiliar pode ser dividido em um campo de “*background*” clássico e um campo de flutuação quântica, de modo que

$$\phi(x) \longrightarrow \phi_0 + \phi(x) . \quad (3.21)$$

O primeiro equivale a um campo de configuração constante associada ao condensado no estado fundamental, e o segundo, corresponde à flutuação quântica que deverá ser integrada funcionalmente. Em termos da ação efetiva, podemos tomar seu extremo considerando o limite em que  $\phi(x) = \phi_0$ , de modo que

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[\phi]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x)=\phi_0} = 0 . \quad (3.22)$$

Considerando-se o potencial efetivo podemos minimizá-lo através de

$$\left. \frac{\partial V_{eff}[\phi_0]}{\partial \phi_0} \right|_{\phi_0=\langle \phi \rangle} = 0 , \quad (3.23)$$

que resulta em

$$\left. \frac{\partial V_{eff}[\phi_0]}{\partial \phi_0} \right|_{\phi_0=\langle \phi \rangle} = \left[ \frac{1}{(\square + m^2 - 2\phi_0)} \right] \delta^4(x - y) + \frac{\phi_0}{g_4} = 0 . \quad (3.24)$$

Aplicando-se a representação para a função delta de Dirac

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (3.25)$$

em (3.24) e tomando-se o limite local ( $x \rightarrow y$ ), temos

$$\langle \phi \rangle = -g_4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2 - 2\phi_0} \quad (3.26)$$

que é conhecida como equação do GAP. Para contornar a presença do polo em (3.26), inserimos um termo imaginário infinitesimal  $i\epsilon$ , conhecido como prescrição de Feynman, tal que

$$\langle \phi \rangle = -g_4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2 - 2\phi_0 + i\epsilon} . \quad (3.27)$$

A próxima etapa na solução desta equação é a fixação de um *cutoff*, isto é, um limite  $\Lambda$  na escala de energia para eliminarmos as divergências ultravioleta (este cálculo é desenvolvido

para os campos dos glúons e dos quarks nos Apêndices C.1 e C.2, respectivamente, e não será reproduzido aqui para o caso escalar). Portanto, (3.27) revela que, no estado fundamental, a presença do campo auxiliar está associada com a condensação dos campos  $\varphi$  em modos de campos coletivos dos campos  $\phi$  introduzidos.

Neste trabalho, buscaremos derivar tais equações partindo da lagrangeana da QCD que quantizamos em (2.39). O método desenvolvido nas Seções 3.2 e 3.3 é de caráter geral e será retomado mais adiante.

### 3.4 Expansão Funcional

O campo auxiliar, como já vimos, tem importantes consequências dentro do estado fundamental da teoria em questão. Entretanto, para minimizarmos o potencial efetivo, levamos em conta apenas as contribuições do campo constante, ou seja  $\phi_0$ , de modo que as contribuições a ordens superiores não são consideradas. Para considerarmos as contribuições das flutuações quânticas, podemos recorrer ao método da expansão derivativa apresentado em [60–62].

O método consiste em expandir o potencial efetivo em termos de potências dos momentos ou das derivadas dos campos bosônicos que interagem com os campos de matéria massivos [61]. Essa expansão equivale a um desenvolvimento perturbativo válido até determinada ordem nas derivadas e somente quando o campo está variando lentamente [62]. Entretanto, neste trabalho estamos interessados em expandir o potencial efetivo, mas não iremos levar em conta os acoplamentos derivativos, mas sim uma expansão do determinante funcional resultante da integração dos campos da teoria. Como exemplo, podemos considerar a densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi_i - \frac{1}{2} m^2 \varphi_i^2 - g_4 \varphi_i^4, \quad (3.28)$$

contida na expressão (3.12). Já vimos que a introdução do campo auxiliar, resulta na ação efetiva em termos de  $\varphi$ , que pode ser reescrita como

$$S[\varphi^i] = \int d^4x d^4y [\varphi^i(x) (G^{-1}(x-y) - H(\phi)) \varphi^i(y)] \quad (3.29)$$

onde  $G^{-1}(x)$  representa a função de Green para os campos  $\varphi$  dada por

$$G^{-1}(x - y) = (\square + m^2) \delta^4(x - y) , \quad (3.30)$$

e  $H(\phi)$  o termo de interação dependente do campo auxiliar  $\phi$ , dado por

$$H(\phi) = \kappa \phi(x) \delta^4(x - y) , \quad (3.31)$$

em que  $\kappa$  representa um termo de proporcionalidade que tem sua estrutura dependente do tipo de campo em questão<sup>3</sup>. A função  $G^{-1}$  pode ser invertida por meio de

$$(\square + m^2) G(x - y) = \delta^4(x - y) , \quad (3.32)$$

resultando no propagador livre dos campos de matéria

$$G(x - y) = \left[ \frac{1}{\square + m^2} \right] \delta^4(x - y) , \quad (3.33)$$

dado no espaço de momento por

$$G(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{k^2 + m^2} \right] . \quad (3.34)$$

Portanto, podemos escrever o funcional gerador da ação (3.29)

$$Z = N \int \mathcal{D}[\varphi^i] \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y [\varphi^i(x) (G^{-1}(x - y) - H(\phi)) \varphi^i(y)] \right\} , \quad (3.35)$$

cuja integração funcional dos campos  $\varphi$  resulta em

$$Z = N [\det (G^{-1}(x - y) - H(\phi))]^{-\frac{1}{2}} = N \exp \left\{ \text{tr} \int d^4x \ln [G^{-1}(x - y) - H(\phi)] \right\} . \quad (3.36)$$

A ação efetiva

$$S_{eff}[\phi] = \text{tr} \int d^4x \ln [G^{-1}(x - y) - H(\phi)] \quad (3.37)$$

pode ser escrita na forma

$$S_{eff}[\phi] = \text{tr} \int d^4x \ln [G^{-1}(x - y)] + \text{tr} \int d^4x d^4y d^4z \ln [1 - G(x - z)H(z - y)] \quad (3.38)$$

$$= S_0 + S[\phi] , \quad (3.39)$$

---

<sup>3</sup> $\kappa$  pode ser escalar para campos escalares ou matricial para campos de calibre vetoriais e campos spinoriais.

sendo o primeiro termo do lado direito da igualdade,  $S_0$ , correspondente à ação para os campos de matéria livres, e o segundo termo<sup>4</sup>,  $S[\phi]$ , pode ser expandido por meio da expansão funcional de Taylor do logaritmo da ação (3.38), definida em [25], resultando em

$$S[\phi] = \int d^4x S(\phi(x))_{\phi(x)=0} + \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta S(\phi(x_1))}{\delta \phi(x_2)} \Big|_{\phi(x)=0} \phi(x_2) + \frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \frac{\delta^2 S(\phi(x_1))}{\delta \phi(x_2) \delta \phi(x_3)} \Big|_{\phi(x)=0} \phi(x_2) \phi(x_3) + \dots \quad (3.40)$$

em que  $S(\phi(x)) = \ln [1 - G(x - z)H(z - y)]$ . Para uma teoria de campos  $\varphi$  escalares,  $\kappa$  pode ser tratado como uma constante numérica e  $G(x - z)$  escrito no espaço de momentos e, portanto, a ação (3.40) resulta em

$$S[\phi] = - \int d^4x d^4y \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \kappa G(k) \phi(x) + \frac{\kappa^2}{2!} \phi(x) G(k) G(k) \phi(y) + \dots \right] \right\}. \quad (3.41)$$

Podemos observar que a ação efetiva resultante da expansão funcional tem a forma de um termo lagrangeano e pode contribuir com a teoria efetiva até determinada ordem da expansão, em geral para baixas ordens nas derivadas. Esse caso será desenvolvido para os campos dos quarks, onde consideraremos a expansão em termos das flutuações. Entretanto, o termo de interação tem uma forma mais complicada que a aqui analisada, em virtude da presença das matrizes de Dirac e das matrizes no espaço de sabor. De posse destas ferramentas, que serão de extrema importância na derivação da teoria efetiva, passaremos agora à derivação do modelo efetivo, partindo do funcional gerador da QCD definido em (2.41).

---

<sup>4</sup>Devemos lembrar da dependência em  $\phi(x)$  para  $H(z - y)$ .

# Capítulo 4

## Desenvolvimento do Modelo

O funcional gerador da QCD definido em (2.41) pode ser reescrito como:

$$Z[J_\mu^a, \bar{\eta}, \eta, \bar{\chi}, \chi] = N \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \mathcal{D}[\bar{q}] \mathcal{D}[q] \mathcal{D}[\bar{c}] \mathcal{D}[c] e^{i[S_1 + S_2]} \quad (4.1)$$

onde a ação  $S_1$  é definida tomando-se o termo lagrangeano dos campos fantasmas<sup>1</sup> dado pela expressão (2.38), de modo que

$$S_1 = \int d^4x [\mathcal{L}_{fantasmas} + \bar{\chi}c + \chi\bar{c}] = \int d^4x [(\partial^\mu \bar{c}^a)(\partial_\mu c^a) - (\partial^\mu \bar{c}^a)(g f^{abc} A_\mu^b) c^a + \bar{\chi}c + \chi\bar{c}] . \quad (4.2)$$

A ação  $S_2$ , em termos dos campos dos glúons e quarks, é definida como

$$S_2 = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a(x))^2 + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\eta}q + \eta\bar{q} \right] , \quad (4.3)$$

em que será útil escrevermos o termo de interação glúon-quark, presente na derivada covariante, em termos de uma corrente fermiônica dada por

$$j_a^\mu(x) = \bar{q}(x) g \gamma^\mu T^a q(x) . \quad (4.4)$$

Portanto, (4.3) pode ser escrita na forma explícita

$$S_2 = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \frac{g}{4} f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c (\partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a) \right. \\ \left. + \frac{g}{4} f^{ade} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_d^\mu A_e^\nu - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu - j_a^\mu A_\mu^a + \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\eta}q + \eta\bar{q} \right] \quad (4.5)$$

onde os cinco primeiros termos serão trabalhados a fim de integrarmos funcionalmente os glúons.

---

<sup>1</sup>Em virtude complicações técnicas, que são introduzidas por esses campos, eles serão desconsiderados ao longo deste trabalho.

## 4.1 Integração funcional dos glúons

Nesta seção encontraremos um propagador para os glúons considerando-se a presença dos termos de auto-interação dos campos dos glúons, em que serão feitas aproximações com o intuito de realizarmos a integração funcional destes campos eliminando sua dependência explícita de nossa teoria efetiva. Como é discutido em [17], essas aproximações não devem modificar a estrutura dos resultados, uma vez que a dependência nestas aproximações estará associada com a constante de acoplamento do modelo para os termos de interação de quatro férmions. Para a integração funcional, utilizaremos o método do campo auxiliar, que já discutimos na Seção 3.2, a fim de trocarmos a interação de ordem quatro no campo dos glúons por interações de segunda ordem que podem ser integradas funcionalmente.

### 4.1.1 O propagador dos glúons considerando termos de auto-interação com aproximações

Tomando-se (4.5) podemos escrever a parte da ação para os termos que dependem apenas dos campos dos glúons, expressa por

$$S[A_\mu^a] = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 + \frac{g}{4}f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) + \frac{g}{4}f^{ade}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A_d^\mu A_e^\nu - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu \right] \quad (4.6)$$

que podemos escrever como:

$$S[A_\mu^a] = \int d^4x [\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3] , \quad (4.7)$$

em que

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 , \quad (4.8)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{g}{4} [f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) + f^{ade}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A_d^\mu A_e^\nu] , \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu . \quad (4.10)$$

Considerando-se tais termos, faremos a separação do campo do glúon em componentes longitudinal e transversal, de modo análogo ao que é feito em [2, 42]. Assim, temos

$$A_\mu^a(x) = A_\mu^{a,L}(x) + A_\mu^{a,T}(x), \quad (4.11)$$

em que a parte longitudinal do campo é dada por

$$A_\mu^{a,L} = \partial_\mu \frac{1}{\square} \partial_\nu A_a^\nu \quad (4.12)$$

e a transversal

$$A_\mu^{a,T} = \left( g_{\mu\nu} - \partial_\mu \frac{1}{\square} \partial_\nu \right) A_a^\nu. \quad (4.13)$$

A aplicação de (4.11) ao termo lagrangeano (4.8) resulta, após a integração por partes da respectiva ação, no seguinte termo lagrangeano:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \left[ A_\mu^a (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \delta^{ab} A_\nu^b + \frac{1}{\xi} A_\mu^a \partial^\mu \partial^\nu \delta^{ab} A_\nu^b \right], \quad (4.14)$$

que representam os termos cinéticos dos campos de calibre<sup>2</sup>. Para (4.9), que representa os termos de auto-interação de terceira ordem, a separação em modos longitudinal e transversal resulta apenas em termos que possuem acoplamentos derivativos. Estes podem ser considerados como termos de ordem mais alta em energia para o propagador do glúon e sua dinâmica e, para nosso modelo, iremos escolher desprezar a presença de tais termos.

Para (4.10), a interação de quarta ordem possui extrema importância, pois a partir dela torna-se possível o surgimento do condensado de glúons. Assim, adotando-se procedimento análogo àquele desenvolvido em [41, 42], em que consideramos as diferentes combinações para os campos dos glúons, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -\frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} [4\delta^{bc} \delta^{de} + 16\delta^{bd} \delta^{ce} + 4\delta^{be} \delta^{cd}] A_\mu^b A_b^\mu A_\nu^d A_d^\nu \\ &= -\frac{g^2}{4} [4(f^{abb} f^{add}) + 16(f^{abc} f^{abc}) + 4(f^{abc} f^{acb})] A_\mu^b A_b^\mu A_\nu^d A_d^\nu \\ &= -\frac{g^2}{4} [12(f^{abc})^2] A_\mu^b A_b^\mu A_\nu^d A_d^\nu = -\frac{12}{4} g^2 N_c (N_c^2 - 1) A_\mu^b A_b^\mu A_\nu^d A_d^\nu \end{aligned} \quad (4.15)$$

<sup>2</sup>A partir deste ponto omitimos o índice para diferenciar os modos longitudinal e transversal, uma vez que estamos interessados apenas nos modos transversais.

e portanto:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{c}{4} A_\mu^b A_b^\mu A_\nu^d A_d^\nu = -\frac{c}{4} (A_\mu^a A_a^\mu)^2 \quad (4.16)$$

onde fizemos o uso das propriedades da constante de estrutura definidas em (A.10). Na constante  $c = \frac{12}{(32)(34)} g^2 N_c (N_c^2 - 1)$ , dividimos o coeficiente em (4.15) por (32)(34) a fim de normalizarmos as contrações realizadas em (4.16) da mesma forma que nos trabalhos [41, 42].

Após essas considerações, a ação (4.7) pode ser reescrita aplicando-se (4.14) e (4.16), tornando-se

$$S[A_\mu^a] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left[ A_\mu^a (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^a + \frac{1}{\xi} A_\mu^a \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a \right] - \frac{c}{4} (A_\mu^a A_a^\mu)^2 \right\}, \quad (4.17)$$

cujo funcional gerador

$$Z[J_\mu^a] = N \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \exp \left\{ i \left[ S[A_\mu^a] - \int d^4x j_\mu^a A_\mu^a \right] \right\} \quad (4.18)$$

contém agora o termo de interação de quarta ordem que, conforme discutido na Seção 3.2, fará necessária a introdução de um campo escalar auxiliar, através da identidade

$$1 = N' \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ i \int d^4x \frac{c}{4} [\phi - A_\mu^a A_a^\mu]^2 \right\}, \quad (4.19)$$

cuja aplicação no funcional gerador (4.18), resulta em

$$S[A_\mu^a, \phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left[ A_\mu^a (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^a + \frac{1}{\xi} A_\mu^a \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a - c\phi (A_\mu^a A_a^\mu) \right] + \frac{c\phi^2}{4} \right\}. \quad (4.20)$$

Entretanto, ao tomarmos a ação *apenas nos termos dependentes dos campos dos glúons*, devemos considerar que o termo de segunda ordem ( $c\phi(A_\mu^a A_a^\mu)$ ), devido à inserção do campo auxiliar, deve conter apenas a contribuição dos modos transversais, uma vez que a fixação do calibre de Landau e a presença dos campos fantasmas, garantem a presença apenas de modos de contribuição físicos, isto é, dos glúons transversais [4]. Deste modo, a ação efetiva para os campos dos glúons levando em conta a projeção (4.13) é dada por

$$S[A_\mu^a] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left[ A_\mu^a (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^a + \frac{1}{\xi} A_\mu^a \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a - c\phi A_\mu^a \left( g^{\mu\nu} - \partial^\mu \frac{1}{\square} \partial^\nu \right) A_\nu^a \right] \right\} \quad (4.21)$$

que por sua vez, torna-se

$$S[A_\mu^a] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu^a(x) [\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x-y)]^{-1} A_\nu^b(y), \quad (4.22)$$

em que definimos

$$[\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x-y)]^{-1} = \left[ \left( g^{\mu\nu} - \partial^\mu \frac{1}{\square} \partial^\nu \right) (\square - c\phi(x)) + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta^{ab} \delta^4(x-y), \quad (4.23)$$

cuja inversão resulta, após as devidas manipulações matemáticas e troca de índices a fim de convenção de notação, no propagador do glúon

$$\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = \left[ \frac{g^{\mu\nu} - \partial^\mu \frac{1}{\square} \partial^\nu}{\square - c\phi(x)} + \xi \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square^2} \right] \delta^{ab} \delta^4(x-y) \quad (4.24)$$

já contendo os termos de auto-interação de mais baixas ordens.

A expressão (4.24) nos revela a presença de um polo na função de Green ( $\square = c\phi(x)$ ) que pode ser relacionada à um termo de massa. Portanto, a inclusão do termo de interação de quarta ordem (4.10) mostra uma massa gerada dinamicamente, desde de que haja um condensado de glúons no vácuo da QCD [42], conforme discutimos na Seção 2.6. Essa massa gerada dinamicamente deve desaparecer assintoticamente em regimes de altas energias [63]. Assim, podemos escrever o termo de massa para os glúons

$$m_G^2 = c\phi(x), \quad (4.25)$$

com dependência no campo  $\phi(x)$  e, por conseguinte, do momento [42, 63]. Além disso, precisamos contornar a presença do polo em (4.24), que pode ser feita pela inserção de um termo imaginário infinitesimal  $i\epsilon$ . Assim, temos o propagador (4.24) dado por

$$\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = \left[ \frac{g^{\mu\nu} - \partial^\mu \frac{1}{\square} \partial^\nu}{\square - m_G^2 + i\epsilon} + \xi \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square^2 + i\epsilon} \right] \delta^{ab} \delta^4(x-y). \quad (4.26)$$

Uma vez que escrevemos a ação efetiva (4.22) para os campos dos glúons, podemos agora partir para a integração funcional destes, que será uma integração gaussiana.

## 4.1.2 Ação com propagador do glúon modificado

Antes de realizarmos a integração funcional dos glúons, vamos definir o funcional gerador para os glúons livres

$$Z_0[0] = N' \int D[A_\mu^a] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \left[ \frac{1}{2} A_b^\rho(x) [\mathcal{D}_{0\nu\rho}^{bc}(x-y)]^{-1} A_c^\nu(y) \right] \right\}, \quad (4.27)$$

que é igual à unidade e cuja função de Green

$$[\mathcal{D}_{0ab}^{\mu\nu}(x-y)]^{-1} = \left[ g^{\mu\nu} \square - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta^{ab} \delta^4(x-y) \quad (4.28)$$

corresponde à função (4.23) no limite em que  $\phi(x) = 0$ . Ao invertermos essa função, obtemos o propagador dos glúons livres

$$\mathcal{D}_{0ab}^{\mu\nu}(x-y) = \left[ \frac{g^{\mu\nu} - \partial^\mu \frac{1}{\square} \partial^\nu}{\square} + \xi \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square^2} \right] \delta^{ab} \delta^4(x-y). \quad (4.29)$$

Portanto, vamos realizar a integração funcional em

$$\frac{Z[J_\mu^a]}{Z_0[0]} = \frac{N \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \exp \left\{ i \left[ \int d^4x d^4y \frac{1}{2} A_\mu^a(x) [\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x-y)]^{-1} A_\nu^b(y) - \int d^4x j_a^\mu(x) A_\mu^a(x) \right] \right\}}{N' \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \left[ \frac{1}{2} A_b^\rho(x) [\mathcal{D}_{0\nu\rho}^{bc}(x-y)]^{-1} A_c^\nu(y) \right] \right\}}, \quad (4.30)$$

que resulta em

$$Z[J_\mu^a] = \frac{N \left\{ \det [\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(x-y)]^{-1} \right\}^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \right]}{\left\{ \det [\mathcal{D}_{0\nu\rho}^{bc}(x-y)]^{-1} \right\}^{-\frac{1}{2}}}, \quad (4.31)$$

em que a constante de normalização  $N'$  foi incorporada a  $N$ . Por meio da definição (3.9), podemos reescrever (4.31) de modo a obter

$$Z[J_\mu^a] = N \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ (\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu})^{-1} (\mathcal{D}_{0\nu\rho}^{bc}) \right] - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \right\}, \quad (4.32)$$

em que o termo entre chaves pode ser visto como uma ação efetiva dependente apenas do campo  $\phi(x)$  e das correntes de férmions.

Podemos reescrever a ação efetiva definida em (4.2), considerando-se a integração dos glúons, tal que

$$S[\bar{\psi}, \psi, \phi] = \int d^4x \left\{ \frac{i}{2} \text{tr} \ln \left[ (\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu})^{-1} (\mathcal{D}_{0\nu\rho}^{bc}) \right] - \frac{1}{2} \int d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \right. \\ \left. + \int d^4y \frac{c}{4} \phi^2(x) \delta^4(x-y) + \int d^4y \bar{q}(x) [(i\cancel{\partial} - m) \delta^4(x-y)] q(y) \right\} \quad (4.33)$$

passa a depender explicitamente dos campos de matéria e do campo auxiliar<sup>3</sup>. Assim, eliminamos da ação original os glúons, por meio da adição de um campo escalar  $\phi(x)$  e, além disso, a presença do termo de corrente leva à interações de quarta ordem nos campos fermiônicos.

O primeiro termo de (4.33) contém o produto dos operadores  $[\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}]^{-1} \mathcal{D}_{0\rho\nu}^{bc}$ , que carrega uma dependência no campo auxiliar. Assim, podemos tomar este produto explicitamente, de modo a obter

$$[\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}]^{-1} \mathcal{D}_{0\rho\nu}^{bc} = \left[ \left( g_\rho^\mu - \partial^\mu \frac{1}{\square} \partial_\rho \right) \left( \frac{\square - c\phi(x)}{\square} \right) \right] \delta^{ac} \delta^4(x-y) \quad (4.34)$$

e, portanto, o termo de interesse na ação

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[ (\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu})^{-1} (\mathcal{D}_{0\rho\nu}^{bc}) \right] &= \frac{1}{2} \left( \text{tr} \widehat{\delta}_\rho^\mu \right) (\text{tr} \delta^{ac}) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi(x)}{\square} \right) \right] \delta^4(x-y) \\ &= \frac{3}{2} (N_c^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi(x)}{\square} \right) \right] \delta^4(x-y). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Em (4.35) utilizamos as propriedades do traço sobre os índices de cor na representação adjunta, e sobre o operador  $\widehat{\delta}_\rho^\mu$  ( $\text{tr} \widehat{\delta}_\rho^\mu = 3$ ). A aplicação de (4.35) em (4.33), resulta na ação efetiva

$$\begin{aligned} S[\bar{\psi}, \psi, \phi] &= \int d^4x \left\{ \frac{3i}{2} (N_c^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi(x)}{\square} \right) \right] \delta^4(x-y) + \int d^4y \frac{c}{4} \phi^2(x) \delta^4(x-y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) + \int d^4y \bar{q}(x) [(i\cancel{D} - m) \delta^4(x-y)] q(y) \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

em que explicitamos a dependência em termos dos campos  $\phi(x)$ .

### 4.1.3 Condensado de glúons

Com o intuito de analisar o efeito do campo auxiliar, e conseqüentemente da formação de condensados, podemos proceder de maneira análoga à Seção 3.3 onde tomamos o extremo da ação efetiva

$$S_0[\phi(x)] = \int d^4x \left\{ \frac{3i}{2} (N_c^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi(x)}{\square} \right) \right] \delta^4(x-y) + \frac{c}{4} \phi^2(x) \right\} \quad (4.37)$$

em que consideramos o vácuo da teoria, isto é, na ausência de campos de matéria. Assim, podemos tomar o extremo da ação, tal que

$$\left. \frac{\delta S_0[\phi(x)]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi(x)=\phi_0} = 0, \quad (4.38)$$

<sup>3</sup>Estamos omitindo as fontes para os glúons,  $J_a^\mu$ , e para os quarks,  $\eta, \bar{\eta}$ .

em que  $\phi_0$  corresponde ao campo de background clássico. Em termos do potencial efetivo temos

$$V_{eff}(\phi_0) = \frac{3i}{2}(N_c^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi_0}{\square} \right) \right] \delta^4(x - y) + \frac{c}{4}\phi_0^2, \quad (4.39)$$

cuja minimização, dada por

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(\phi_0)}{\partial \phi_0} \right|_{\phi_0=\langle\phi\rangle} = 0, \quad (4.40)$$

resulta em

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(\phi_0)}{\partial \phi_0} \right|_{\phi_0=\langle\phi\rangle} = \left[ -\frac{3i}{2}(N_c^2 - 1) \left( \frac{c}{\square - c\phi_0} \right) \delta^4(x - y) + \frac{c}{2}\phi_0 \right]_{\phi_0=\langle\phi\rangle} = 0, \quad (4.41)$$

cuja solução resulta em

$$\langle\phi\rangle = 3i(N_c^2 - 1) \left( \frac{1}{\square - m_G^2} \right) \delta^4(x - y), \quad (4.42)$$

A aplicação da representação definida pela expressão (3.25) em (4.42), tomando-se o limite local ( $x \rightarrow y$ ), nos dá

$$\langle\phi\rangle = 3i(N_c^2 - 1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 - m_G^2 + i\epsilon} \right) \quad (4.43)$$

que é conhecida como equação do GAP para os glúons, cuja solução, mostrada em detalhes no Apêndice C.1 é

$$\langle\phi\rangle = \frac{3}{16\pi^2}(N_c^2 - 1) \left[ \Lambda^2 - m_G^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + m_G^2}{m_G^2} \right) \right], \quad (4.44)$$

em que  $\Lambda$  representa um cutoff na escala de energia do modelo introduzido com a finalidade de regularizar as divergências ultravioleta. Portanto, podemos associar a presença do campo escalar auxiliar à geração dinâmica de massa para os glúons, uma vez que  $m_G^2 = c\phi_0$ , e que conforme cálculos na rede pode ser estimada em torno de 600 MeV [42, 63]. Além disso, o fato de  $\langle\phi\rangle \neq 0$  implica na ocupação do estado de menor energia que, conforme discutido na Seção 2.6 está associado à presença de condensados  $\langle\phi\rangle = \phi_0 = \langle A_\mu^a A_a^\mu \rangle$ .

Cabe ressaltar que nesta subseção não levamos em conta a presença dos campos de matéria e sua interação com os condensados de glúons e, para isso, partiremos à integração funcional dos quarks, considerando a presença dos termos de interação de quarta ordem presentes na ação efetiva (4.36).

## 4.2 Integração funcional dos quarks que condensam

Uma vez que integramos os campos dos glúons voltaremos à ação definida em (4.36), em que podemos observar a presença de um termo de interação quadri fermiônico dada pelo produto das correntes  $j_a^\mu(x)j_b^\nu(y)$ . Inicialmente iremos utilizar as transformações de Fierz, discutidas no Apêndice B, para obtermos um termo de interação em que aplicaremos a técnica do campo auxiliar de modo análogo ao que já realizamos nas Seções 3.2 e 4.1.1. Nosso objetivo é o de trocar a interação de quarta ordem nos campos dos férmions por interações de segunda ordem que podem ser integradas via integração gaussiana. Em seguida, realizaremos a separação do campo fermiônico em duas partes: um campo de background, representando os campos que condensam, os quais serão integrados; e a flutuação quântica responsável pelos campos físicos.

### 4.2.1 Ação com termos de interação quadri fermiônica

Uma vez que integramos os glúons vamos proceder com a integração funcional para os quarks. A ação efetiva definida por (4.36) contém um termo de interação quadri fermiônico que pode ser representado explicitamente por

$$\int d^4y j_a^\mu(x)\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y)j_b^\nu(y) = \int d^4y \bar{q}(x)g\gamma^\mu T^a q(x) \left[ \left( \frac{g_{\mu\nu} - \partial_\mu \frac{1}{\square} \partial_\nu}{\square - c\phi(x)} \right) \delta^4(x-y)\delta^{ab} \right] \times \\ \times \bar{q}(y)g\gamma^\nu T^b q(y), \quad (4.45)$$

em que consideramos o calibre de Landau ( $\xi \rightarrow 0$ ). Para o termo entre parênteses vamos desconsiderar o fator  $\partial^\mu \frac{1}{\square} \partial^\nu$  pois são acoplamentos derivativos que, conforme já comentado anteriormente, escolheremos não considerá-los para o modelo que buscamos obter. Explicitando-se os índices de cor, sabor e Dirac, já definidos na Seção 2.2, o termo de interação de quarta ordem se torna

$$\int d^4y j_a^\mu(x)\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y)j_b^\nu(y) \simeq \int d^4y \left[ \bar{q}_\alpha^{fc}(x)(\gamma^\mu)_{\alpha\alpha'} \mathbb{1}^{ff'} (T_j^a)_{cc'} q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \right] \times \\ \times \left[ \left( \frac{g^2}{\square - c\phi(x)} \right) \delta^4(x-y) \right] \times \left[ \bar{q}_\beta^{gd}(y)(\gamma_\mu)_{\beta\beta'} \mathbb{1}^{gg'} (T_j^a)_{dd'} q_{\beta'}^{g'd'}(y) \right] \quad (4.46)$$

em que  $\mathbb{1}^{ff'}$  e  $\mathbb{1}^{gg'}$  representam os elementos da matriz identidade no espaço de sabor. Podemos definir o operador

$$\widehat{W} = \frac{g^2}{\square - c\phi(x)} \delta^4(x - y), \quad (4.47)$$

que, aplicando-se a representação (3.25), pode ser aproximado de uma função no espaço de momentos [49, 64] de modo que

$$W[\phi(x)] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{-g^2}{k^2 + c\phi(x)} \right) e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (4.48)$$

que aplicada à (4.46) resulta em

$$\begin{aligned} \int d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \simeq \int d^4y W[\phi(x)] \times & \left[ \bar{q}_\alpha^{fc}(x) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \right] \times \\ & \times \left[ \bar{q}_\beta^{gd}(y) \Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} q_{\beta'}^{g'd'}(y) \right], \end{aligned} \quad (4.49)$$

em que definimos

$$\Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu)_{\alpha\alpha'} \mathbb{1}^{ff'} (\lambda_j^a)_{cc'}, \quad (4.50)$$

$$\Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\beta\beta'} \mathbb{1}^{gg'} (\lambda_j^a)_{dd'}, \quad (4.51)$$

nas quais consideramos o gerador do grupo de simetria,  $T_j^a = \frac{\lambda_j^a}{2}$ , em que  $\lambda_j^a$  são as matrizes de Gell-Mann para o espaço de cor; já  $\mathbb{1}^{ff'}$  e  $\mathbb{1}^{gg'}$  são as matrizes identidade no espaço de sabor, para  $N_f = 3$ . Tomando-se o limite local obtemos

$$\int d^4y W[\phi(x)] \rightarrow \left( \frac{-g^2}{c\phi_0} \right), \quad (4.52)$$

em que já consideramos o limite de interesse onde  $\phi(x) = \phi_0$  e, portanto, (4.49) se torna

$$\int d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \simeq - \left( \frac{g^2}{c\phi_0} \right) \left[ \bar{q}_\alpha^{fc}(x) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \right] \left[ \bar{q}_\beta^{gd}(x) \Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} q_{\beta'}^{g'd'}(x) \right]. \quad (4.53)$$

Estamos interessados em escrever a interação quadri fermiônica como um termo do tipo NJL fazendo uso das transformações de Fierz discutidas com mais detalhes no Apêndice B. Assim, o termo

$$\bar{q}_\alpha^{fc}(x) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \bar{q}_\beta^{gd}(x) \Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} q_{\beta'}^{g'd'}(x) \quad (4.54)$$

precisa ser escrito a partir da aplicação de um operador  $\mathfrak{F}$  que atua neste termo a fim de realizarmos as transformações de Fierz.

A análise da troca  $\Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} \Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta'}^{fg',cd'} \Gamma_{\beta\alpha'}^{gf',dc'}$ , no produto de operadores mediante o uso das transformações de Fierz é mostrada com detalhes no Apêndice B, resultando, para os termos de interesse, em

$$\Gamma_{\alpha\beta'}^{fg',cd'} \Gamma_{\beta\alpha'}^{gf',dc'} \simeq \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{16}{9}\right) \sum_{j=0}^8 (\lambda^j)_{ff'} (\lambda^j)_{gg'} [\mathbb{1}_{\alpha\beta'} \mathbb{1}_{\alpha'\beta'} + (i\gamma^5)_{\alpha\beta'} (i\gamma^5)_{\alpha'\beta'}] \mathbb{1}_{cc'}^c \mathbb{1}_{dd'}^c \quad (4.55)$$

em que consideramos apenas os termos escalares e pseudo-escalares, que conservam a simetria quiral. Deste modo, podemos agora escrever o termo de interação (4.53), considerando-se o termo “transformado” pelas identidades de Fierz, tal que

$$\frac{1}{2} \int d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \simeq -g_4 \sum_{j=0}^8 \left[ (\bar{q}\lambda^j q)^2 + (\bar{q}\lambda^j i\gamma_5 q)^2 \right], \quad (4.56)$$

em que  $g_4$  representa a constante de acoplamento para a interação de ordem quatro, dada por:

$$g_4 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{16}{9}\right) \left(\frac{g^2}{c\phi_0}\right) = \frac{g^2}{9 m_G^2} \quad (4.57)$$

que possui dimensão de  $[massa]^{-2}$ , conforme era de se esperar para um termo de acoplamento do tipo NJL. Em (4.57) os coeficientes  $\frac{1}{2}$  vêm do termo da ação definida em (4.36) e da identidade para o espaço de sabor definida em (B.8); o coeficiente  $\frac{1}{4}$  vem da definição do gerador do grupo de simetria e  $\frac{16}{9}$  da identidade de cor dada em (B.10). Portanto, o termo de interação quadri fermiônico dado em termos das correntes  $j_a^\mu$  resulta em um termo bilinear do tipo NJL com constante de acoplamento  $g_4$  redefinida com relação ao modelo NJL original.

A ação em termos apenas dos campos dos quarks pode ser escrita aplicando-se (4.56), de modo que

$$S_{\text{NJL}}[\bar{q}, q] = \int d^4x \left\{ \bar{q} (i\rlap{/}\partial - m) q + g_4 \sum_{j=0}^8 \left[ (\bar{q}\lambda^j q)^2 + (\bar{q}\lambda^j i\gamma_5 q)^2 \right] \right\} \quad (4.58)$$

resulta no funcional gerador

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}[\bar{q}] \mathcal{D}[q] e^{iS_{\text{NJL}}[\bar{q}, q]}. \quad (4.59)$$

## 4.2.2 Propagador dos quarks considerando termos de quarta ordem

Conforme discutimos na Seção 3.3, podemos separar os campos  $\bar{q}(x)q(x)$  em

$$\bar{q}(x)q(x) \longrightarrow [\bar{q}(x)q(x)]_c + \bar{q}(x)q(x) , \quad (4.60)$$

em que  $[\bar{q}(x)q(x)]_c$  representa a parte do campo que irá condensar no estado fundamental<sup>4</sup> e  $\bar{q}q$  uma flutuação quântica. Esta separação é realizada para o campos dos glúons em [41,42] onde o campo de background é tomado no limite em que  $x = 0$ . Em (4.60), nosso campo de background possui uma dependência nas coordenadas diferentemente dos trabalhos anteriormente citados.

Nosso objetivo é obter uma ação efetiva final em termos das flutuações onde os campos que condensam sejam integrados e passemos a depender dos graus de liberdade do campo auxiliar que utilizaremos para obter uma integração gaussiana. Assim, a ação (4.58) passa a ser descrita por

$$S[\bar{q}, q] = S_0[\bar{q}_c, q_c] + S_3 , \quad (4.61)$$

em que

$$S_0[\bar{q}_c, q_c] = \int d^4x \left\{ \bar{q}_c(i\cancel{\partial} - m)q_c + g_4 \sum_{j=0}^8 \left[ (\bar{q}_c \lambda^j q_c)^2 + (\bar{q}_c \lambda^j i\gamma_5 q_c)^2 \right] \right\} \quad (4.62)$$

e

$$S_3 = \int d^4x \left\{ \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + g_4 \sum_{j=0}^8 \left[ (\bar{q} \lambda^j q)^2 + (\bar{q} \lambda^j i\gamma_5 q)^2 \right] + \Upsilon(x) \right\} \quad (4.63)$$

em que o termo

$$\begin{aligned} \Upsilon(x) = g_4 \sum_{j=0}^8 & \left[ (\bar{q} \lambda^j q)(\bar{q}_c \lambda^j q_c) + (\bar{q} \lambda^j i\gamma_5 q)(\bar{q}_c \lambda^j i\gamma_5 q_c) + (\bar{q}_c \lambda^j q_c)(\bar{q} \lambda^j q) \right. \\ & \left. + (\bar{q}_c \lambda^j i\gamma_5 q_c)(\bar{q} \lambda^j i\gamma_5 q) \right] , \quad (4.64) \end{aligned}$$

carrega a mistura dos dois campos. Inicialmente, estamos interessados em analisar o estado fundamental e vamos proceder à integração dos campos que condensam tomando o limite em

---

<sup>4</sup>Com o intuito de carregarmos a notação ao longo da integração e expansão funcionais, a notação utilizada será  $\bar{q}_c(x)$  e  $q_c(x)$ . Cabe aqui enfatizar que a condensação ocorre por meio dos pares de quarks representando o estado coletivo associado ao condensado, portanto a notação  $[\bar{q}(x)q(x)]_c$  é a mais correta.

que  $\bar{q}q \rightarrow 0$  e, portanto, (4.63) e (4.64) desaparecem neste limite. Na Seção 4.4 iremos considerar  $\bar{q}q \neq 0$  e sua interação com os campos que condensam, retomando assim tais termos.

Afim de integrarmos a ação (4.62) vamos introduzir um conjunto de campos auxiliares escalares  $S_j$ , através da identidade

$$1 = N'' \int \mathcal{D}[S_j] \exp \left\{ -i \int d^4x \frac{1}{4g_4} [S_j + 2g_4 (\bar{q}_c \lambda^j q_c)]^2 \right\}, \quad (4.65)$$

e de campos pseudo-escalares  $P_j$

$$1 = N''' \int \mathcal{D}[P_j] \exp \left\{ -i \int d^4x \frac{1}{4g_4} [P_j + 2g_4 (\bar{q}_c \lambda^j i\gamma_5 q_c)]^2 \right\}, \quad (4.66)$$

em que a soma sobre os índices  $j$  está implícita. Aplicando-se (4.65) e (4.66) no funcional gerador

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}[\bar{q}_c] \mathcal{D}[q_c] e^{iS_0[\bar{q}_c, q_c]} \quad (4.67)$$

obtemos a ação efetiva em termos dos campos auxiliares  $S_j$  e  $P_j$

$$S_0[\bar{q}_c, q_c, S_j, P_j] = \int d^4x \left\{ \int d^4y \bar{q}_c(x) \mathcal{F}^{-1}(x-y) q_c(y) - \frac{1}{4g_4} (S_j^2 + P_j^2) \right\}, \quad (4.68)$$

sendo

$$\mathcal{F}^{-1}(x-y) = [i\not{\partial} - (m + S_j \lambda^j + P_j \lambda^j i\gamma_5)] \delta^4(x-y), \quad (4.69)$$

cujas inversões irão fornecer o propagador dos quarks  $\bar{q}_c$  e  $q_c$ . Como se pode perceber, a introdução dos campos auxiliares leva ao aparecimento de termos, que podem ser relacionados à massa gerada dinamicamente e, analogamente ao caso dos glúons, à presença de condensados no estado fundamental. Portanto, o termo de massa em (4.69) pode ser escrito como

$$M = m + S_j \lambda^j + P_j \lambda^j i\gamma_5, \quad (4.70)$$

que representa uma matriz diagonal dos termos de massa, que podemos associar à massa dos quarks constituintes, conforme discutido na Seção 2.6 e cuja forma explícita

$$M = \begin{bmatrix} m_u + s_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d + s_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s + s_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_u & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 \\ 0 & 0 & M_s \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

é calculada no Apêndice C.2, onde levamos em conta que devido à exigências de simetria, apenas os valores dos campos auxiliares que contribuem são aqueles em que  $\langle s_f \rangle = s_f$  e  $\langle p_f \rangle = 0$  [6, 8, 18, 23, 49]. É importante notar que passamos a descrever o campo auxiliar  $S_j$ , em que  $j$  é um índice das Matrizes de Gell-Mann, em termos dos índices de sabor dado pela expressão (C.19).

A inversão de (4.69) resulta em

$$\mathcal{F}(x - y) = \left[ \frac{1}{i\not{\partial} - M + i\epsilon} \right] \delta^4(x - y), \quad (4.72)$$

que é o propagador dos quarks modificado pelos termos de interação com os campos auxiliares<sup>5</sup>. Assim, nossa próxima etapa será a integração funcional dos quarks que condensam tomando-se o limite em que  $\bar{q}q \rightarrow 0$ .

### 4.2.3 Ação efetiva para os campos fermiônicos

As identidades definidas em (4.65) e (4.66), quando aplicadas ao funcional gerador definido em (4.67) resultam na ação (4.68), que leva em conta a presença dos campos de quarks que condensam e dos campos auxiliares, podendo ser integrada funcionalmente, para os campos  $\bar{q}_c$  e  $q_c$ . As constantes de normalização  $N''$  e  $N'''$  podem ser incorporadas à constante  $N$  do funcional gerador total da teoria e a integração funcional dos campos  $\bar{q}_c$  e  $q_c$ , no limite em que  $\bar{q}q \rightarrow 0$  resulta em

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \det [\mathcal{F}^{-1}(x - y)] \int \mathcal{D}[S_j] \mathcal{D}[P_j] \exp \left\{ -i \int d^4x \frac{1}{4g_4} (S_j^2 + P_j^2) \right\} \quad (4.73)$$

e, por meio de (3.9) pode ser reescrita como

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}[S_j] \mathcal{D}[P_j] \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -i \text{tr} \ln (\mathcal{F}^{-1}(x - y)) - \frac{1}{4g_4} (S_j^2 + P_j^2) \right] \right\}, \quad (4.74)$$

cujo traço é tomado sobre os índices de cor, sabor e Dirac. Aqui, o termo entre colchetes pode ser tomado como uma ação efetiva em termos dos campos auxiliares e dada por

$$S_0[S_j, P_j] = \int d^4x \left\{ -i \text{tr} \ln (\mathcal{F}^{-1}(x - y)) - \frac{1}{4g_4} (S_j^2 + P_j^2) \right\}, \quad (4.75)$$

<sup>5</sup>Vale lembrar que, apesar de omitidas, este termo carrega dependências nos espaços de cor, sabor e Dirac.

em que eliminamos a dependência explícita em termos dos campos fermiônicos passando a depender dos graus de liberdade dos campos auxiliares.

Em [8, 49, 64] procedimento análogo é desenvolvido e podemos obter uma ação efetiva dependente de campos coletivos que terão contribuições ao estado fundamental da teoria. Um aspecto que cabe aqui ressaltar, diz respeito à constante de acoplamento obtida em nosso modelo como fruto dos coeficientes das transformações de Fierz e dependente do condensado de glúons. Portanto, podemos agora tomar uma ação efetiva em termos apenas dos campos auxiliares  $\phi$  e  $S_j$  e analisar a estrutura do vácuo da teoria efetiva.

### 4.3 As equações do GAP acopladas

Após a integração funcional dos glúons e dos quarks que condensam, podemos escrever uma ação efetiva em termos dos campos auxiliares até aqui introduzidos. Deste modo, (4.36) pode ser escrita como:

$$S[\phi, S_j, P_j] = \int d^4x \left\{ \frac{3i}{2}(N_c^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi(x)}{\square} \right) \right] \delta^4(x - y) + \frac{c}{4}\phi^2(x) - i \operatorname{tr} \ln (i\not{\partial} - M) \delta^4(x - y) - \frac{1}{4g_4} (S_j^2 + P_j^2) \right\} \quad (4.76)$$

que corresponde ao potencial efetivo

$$V_{eff}(\phi_0, s_f) = \frac{3i}{2}(N_c^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi_0}{\square} \right) \right] \delta^4(x - y) - i \operatorname{tr} \ln (i\not{\partial} - M) \delta^4(x - y) + \frac{c}{4}\phi_0^2 - \left( \frac{9c\phi_0}{4g^2} \right) \frac{1}{2} (s_u^2 + s_d^2 + s_s^2), \quad (4.77)$$

em que explicitamos a constante  $g_4$  com sua dependência em  $\phi_0$ , de acordo com (4.57), e escrevemos o campo auxiliar  $S_j$  em termos dos índices de sabor conforme a expressão (C.19), uma vez que o observável físico está relacionado ao sabor dos quarks em questão. Além disso, como estamos interessados no estado fundamental a contribuição dos campos  $P_j$  não é considerada em (4.77).

A minimização do potencial com relação à  $\phi_0$

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(\phi_0, s_f)}{\partial \phi_0} \right|_{\phi_0 = \langle \phi_0 \rangle} = 0, \quad (4.78)$$

resulta em

$$\langle \phi \rangle = 3i(N_c^2 - 1) \left[ \frac{1}{\square - m_G^2} \right] \delta^4(x - y) + \frac{9}{4g^2} (s_u^2 + s_d^2 + s_s^2) \quad (4.79)$$

que é a equação do GAP para o condensado de glúons, representada no espaço de momentos por

$$\langle \phi \rangle = 3i(N_c^2 - 1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 - m_G^2 + i\epsilon} \right) + \frac{9}{4g^2} (s_u^2 + s_d^2 + s_s^2), \quad (4.80)$$

cuja regularização por meio de um cutoff covariante resulta em

$$\langle \phi \rangle = \frac{3}{16\pi^2} (N_c^2 - 1) \left[ \Lambda^2 - m_G^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + m_G^2}{m_G^2} \right) \right] + \frac{9}{4g^2} (s_u^2 + s_d^2 + s_s^2). \quad (4.81)$$

Esta expressão, quando comparada com (4.44), obtida na subseção 4.1.3 em que as interações com os campos de matéria são desconsideradas, revela que a interação efetiva com os condensados de quarks resulta em um termo adicional dependente destes e tornando o acoplamento entre ambos explícito nesta equação.

Já a minimização do potencial efetivo com relação à  $s_f$

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(\phi_0, s_f)}{\partial s_f} \right|_{s_f = \langle s_f \rangle} = 0, \quad (4.82)$$

deve levar em conta a presença do termo matricial de massa  $M$  presente no logaritmo do potencial efetivo definido em (4.77), bem como do traço sobre os índices de cor, sabor e Dirac. No Apêndice C.2 desenvolvemos detalhadamente este cálculo, que leva à

$$\langle s_f \rangle = \frac{16ig^2 N_c}{9c\phi_0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{M_f}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \right), \quad (4.83)$$

que representa as 3 equações do GAP para  $N_f = 3$ , e o acoplamento com o condensado de glúons é garantido por meio da constante  $g_4$ . Como podemos perceber, esta equação contém divergências que podem ser regularizadas por meio do cutoff covariante de modo que (4.83) se torna

$$\langle s_f \rangle = \frac{g_4 N_c M_f}{\pi^2} \left[ \Lambda^2 - M_f^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + M_f^2}{M_f^2} \right) \right]. \quad (4.84)$$

Da identidade matricial definida na expressão (4.71) podemos extrair a seguinte relação:

$$M_f = m_f + \langle s_f \rangle, \quad (4.85)$$

que aplicando-se (4.84) resulta nas equações do GAP de massa para os quarks, definidas por:

$$M_u = m_u + \frac{g_4 N_c M_u}{\pi^2} \left[ \Lambda^2 - M_u^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + M_u^2}{M_u^2} \right) \right], \quad (4.86)$$

$$M_d = m_d + \frac{g_4 N_c M_d}{\pi^2} \left[ \Lambda^2 - M_d^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + M_d^2}{M_d^2} \right) \right], \quad (4.87)$$

$$M_s = m_s + \frac{g_4 N_c M_s}{\pi^2} \left[ \Lambda^2 - M_s^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + M_s^2}{M_s^2} \right) \right], \quad (4.88)$$

que fornecem a massa efetiva dos quarks em função das massas dos quarks livres a partir da fixação de um cutoff  $\Lambda$ .

No limite quiral,  $m_f = 0$ , a equação (4.85) possui como uma de suas soluções, a trivial, em que  $\langle s_f \rangle = 0$ , e portanto,  $M_f = 0$ , em que não é observada quebra de simetria quiral, tendo os férmions massas nulas. Além da solução trivial é esperado que haja uma em que  $\langle s_f \rangle \neq 0$  e a simetria quiral é espontaneamente quebrada com férmions de massas não nulas [65]. A condição que define a ocorrência ou não da solução não trivial está associada ao valor da constante de acoplamento  $g_4$ . Definindo-se um valor crítico para esta constante<sup>6</sup>

$$g_{4_{crit.}} = \frac{\pi^2}{3\Lambda^2}, \quad (4.89)$$

podemos obter, no modelo NJL, a solução trivial quando  $g_4 < g_{4_{crit.}}$  e para o segundo caso, temos  $g_4 > g_{4_{crit.}}$ , regime este em que os bósons de Goldstone não possuem massa [65]. Entretanto, nosso modelo considera  $m_f \neq 0$ , ocorrendo a quebra explícita da simetria quiral e, portanto, com pseudo-bósons de Goldstone.

As soluções numéricas para as equações definidas em (4.84) para os quarks, e que também satisfaçam as equações definidas em (4.81) para os glúons, considerando um determinado valor de cutoff, são mostradas na Tabela 4.1 fixando-se  $m_u = 3$  MeV,  $m_d = 6$  MeV,  $m_s = 91$  MeV e  $N_c = 3$ . Para a obtenção destes valores tomamos o mesmo cutoff, ou seja,

<sup>6</sup>Este valor é definido em [65–67] e a análise da transição de fase entre os dois casos é analisada com mais detalhes.

aquele que soluciona ambas as equações, calculado a partir da variação da massa dos glúons, e podemos observar que no intervalo  $\Lambda = 650$  MeV a  $\Lambda = 760$  MeV obtemos os melhores valores de massa efetiva para os quarks<sup>7</sup>.

$m_g$	100	200	300	400	500	600	650	700	800
$\Lambda$	109	217	325	435	542	651	706	760	870
$M_u$	50	94	139	183	229	274	297	319	365
$s_u$	47	91	136	180	226	271	294	316	362
$M_d$	56	100	145	189	235	281	303	326	372
$s_d$	49	93	138	182	228	274	296	319	365
$M_s$	137	192	245	295	345	395	419	443	492
$s_s$	46	101	154	204	254	304	328	352	401

Tabela 4.1: Valores numéricos para  $m_g$  (MeV),  $\Lambda$  (MeV),  $M_u$ ,  $M_d$  e  $M_s$  (MeV) que solucionam simultaneamente as equações (4.81) e (4.84) para  $m_u = 3$  MeV,  $m_d = 6$  MeV,  $m_s = 91$  MeV e  $N_c = 3$ .

Assim, podemos considerar  $\Lambda = 706$  MeV em que  $m_G = 650$  MeV resultando em boa concordância com [42], que seguindo procedimento análogo, calcula uma massa para os glúons,  $m_G = 614$  MeV, gerada dinamicamente como efeito da condensação  $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ , que discutimos na subseção 4.1.3. Por conseguinte, para este cutoff, as massas efetivas para os quarks *up*, *down* e *strange*, respectivamente, são  $M_u = 297$  MeV,  $M_d = 303$  MeV e  $M_s = 419$  MeV, revelando que nosso modelo, no estado fundamental, obtém massas efetivas próximas aos valores de massas constituintes onde  $M_u \approx M_d \approx 300$  MeV e  $M_s \approx 500$  MeV [16, 49, 65–67]. Para a solução das equações de GAP acopladas, fixamos como parâmetros as massas dos quarks livres, a partir das relações (2.43) e (2.44), a fim de obtermos os valores já determinados na Seção 2.6 para as massas dos píons e káons, e para as constantes de decaimento de ambos.

O valor numérico da constante de acoplamento adimensional  $g$ , presente na lagrangeana da QCD, e utilizado no cálculo dos valores presentes na Tabela 4.1, é obtido em [10] a partir de cálculos na rede e dado por

$$g = \sqrt{\frac{4\pi(8,92)}{N_c}}. \quad (4.90)$$

<sup>7</sup>Ainda existe a possibilidade de fixar cutoffs diferentes para os quarks e glúons, mas neste trabalho optamos por tomar o mesmo valor para ambos.

Nesse trabalho, uma revisão sobre os valores numéricos para a constante de acoplamento da QCD no calibre de Landau considerando-se o regime do infravermelho é feito, e seus resultados comparados a demais valores fenomenológicos já presentes na literatura.

A relação entre a massa dinâmica e a massa efetiva, para o cutoff já discutido, é mostrada na figura 4.1, onde podemos observar um valor limite para a massa efetiva ( $M_{u_{max}} \approx 338$  MeV,  $M_{d_{max}} \approx 342$  MeV e  $M_{s_{max}} \approx 426$  MeV) com o aumento da massa gerada dinamicamente pela quebra espontânea de simetria quiral.

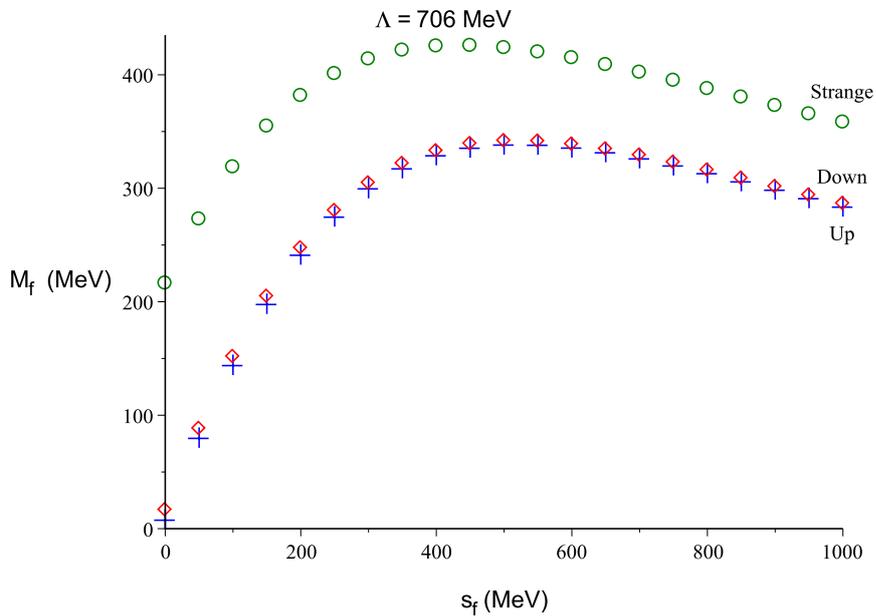


Figura 4.1: Massa efetiva em função da massa dinâmica para  $\Lambda = 706$  MeV.

A constante de acoplamento  $g_4$  para o termo de interação de quarta ordem, definida em (4.57), é um parâmetro dependente do condensado de glúons  $\phi_0$  e conseqüentemente da massa dos mesmos. Na figura 4.2 foi plotada a variação de  $g_4$  com relação à massa dinâmica dos glúons de onde podemos extrair  $g_4 = 9,8 \text{ GeV}^{-2}$  para  $m_g = 650$  MeV. Considerando-se  $\Lambda = 706$  MeV o valor crítico da constante de acoplamento obtido é  $g_{4_{crit.}} = 6,7 \text{ GeV}^{-2}$  revelando que, de fato, a simetria quiral é quebrada e os quarks possuem massa dinâmica, além dos condensados de quark-antiquark possuírem valores não nulos. Em [8, 66, 68] os valores da constante de acoplamento  $g_4$  são obtidos entre  $5$  e  $7 \text{ GeV}^{-2}$ , porém considerando-se  $130 \text{ MeV} < m_s < 160 \text{ MeV}$  e um

cutoff de  $\Lambda \approx 900$  MeV, mas a lagrangeana efetiva destes trabalhos não leva em conta o campo dos glúons, considerando o modelo NJL original com interações de sexta e oitava ordem nos campos dos quarks. Não obstante, é conveniente enfatizar que nossa constante de acoplamento  $g_4$  não é um parâmetro do modelo, mas foi obtida após a integração dos campos dos glúons e das transformações de Fierz sendo inversamente proporcional ao campo auxiliar  $\phi$  introduzido na integração funcional dos glúons.

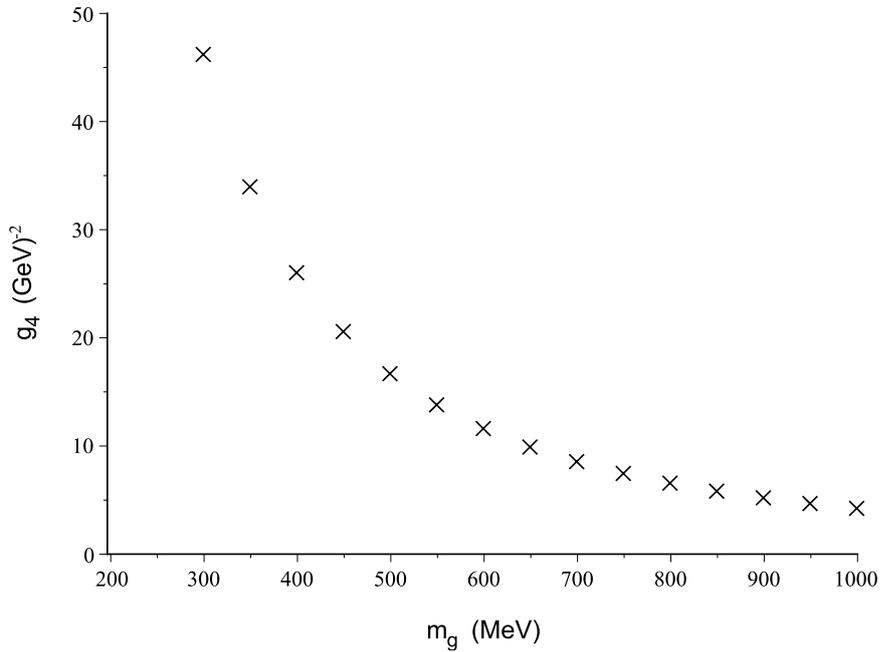


Figura 4.2: Constante de acoplamento  $g_4$  em função da massa dinâmica dos glúons.

## 4.4 Expansão funcional para interações efetivas para quarks a baixas energias

Na Seção 3.4, consideramos as interações devido às flutuações para o caso de um campo escalar  $\varphi$ . Agora, vamos aplicar este método de modo a analisarmos os efeitos na expansão da ação efetiva (4.61) e, para tanto, vamos voltar nossa atenção para o termo  $\Upsilon(x)$  definido em (4.64). Como os quarks são variáveis de Grassmann, isto é, obedecem às relações de anti-

comutação [29, 31], podemos reescrever (4.64) como

$$\Upsilon(x) = \int d^4y \bar{q}_c(x) \left\{ 2g_4 \sum_{j=0}^8 [\lambda^j (\bar{q}\lambda^j q) + i\lambda^j \gamma_5 (\bar{q}\lambda^j i\gamma_5 q)] \delta^4(x-y) \right\} q_c(y), \quad (4.91)$$

e portanto, nosso análogo à  $H(\phi)$  da Seção 3.4 como

$$H(x-y) = 2g_4 \sum_{j=0}^8 [\lambda^j (\bar{q}\lambda^j q) + i\lambda^j \gamma_5 (\bar{q}\lambda^j i\gamma_5 q)] \delta^4(x-y). \quad (4.92)$$

Este operador, permite-nos reescrever o funcional gerador

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}[\bar{q}_c] \mathcal{D}[q_c] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{q}_c(x) [\mathcal{F}^{-1}(x-y) + H(x-y)] q_c(y) \right\}, \quad (4.93)$$

em que  $\mathcal{F}^{-1}(x-y)$  é definido na subseção 4.2.2 e nossa ação efetiva em termos dos campos que condensam pode ser escrita por

$$S_0[\bar{q}_c, q_c] = \int d^4x d^4y \bar{q}_c(x) [\mathcal{F}^{-1}(x-y) + H(x-y)] q_c(y). \quad (4.94)$$

A integração funcional dos campos  $\bar{q}_c, q_c$  resulta, por sua vez na ação efetiva

$$\begin{aligned} S_{eff}[\bar{q}, q] &= \text{tr} \int d^4x \ln [\mathcal{F}^{-1}(x-y)] + \text{tr} \int d^4x d^4y d^4z \ln [1 - \mathcal{F}(x-z)H(z-y)] \\ &= S_0 + S[\bar{q}, q] \end{aligned} \quad (4.95)$$

com  $\mathcal{F}(x-y)$  definido por (4.72), em que empregamos o mesmo método já mostrado na Seção 3.4. Portanto, nosso interesse é desenvolver a expansão funcional para a ação  $S[\bar{q}, q]$  por meio da expansão de Taylor, onde agora vamos levar em conta que a estrutura algébrica dependente das matrizes  $\lambda^j$  e  $\gamma_5$  torna o desenvolvimento dependente das relações respeitadas para o produto e o traço dessas matrizes. Deste modo, temos

$$\begin{aligned} S[\bar{q}, q] &= \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 S[\bar{q}(x_1), q(x_2)]_{\bar{q}(x)=q(x)=0} \\ &+ \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \frac{\delta S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3)} \Bigg|_{\bar{q}(x)=q(x)=0} \bar{q}(x_3) \\ &+ \text{tr} \frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \frac{\delta^2 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4)} \Bigg|_{\bar{q}(x)=q(x)=0} \bar{q}(x_3) q(x_4) \\ &+ \text{tr} \frac{1}{3!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 d^4x_5 \frac{\delta^3 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4) \delta \bar{q}(x_5)} \Bigg|_{\bar{q}(x)=q(x)=0} \bar{q}(x_3) q(x_4) \bar{q}(x_5) + \dots \end{aligned} \quad (4.96)$$

em que a condição  $\bar{q}(x) = q(x) = 0$  faz com que o primeiro termo e aqueles de ordem ímpar nas derivadas se anulem, deixando-nos apenas os termos de ordem par nas derivadas.

O cálculo para a segunda derivada resulta em:

$$\left. \frac{\delta^2 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4)} \right|_{\bar{q}(x) = q(x) = 0} = -2g_4 [(\mathcal{F}(x-y)\lambda^j) (\lambda^j) + (\mathcal{F}(x-y)i\lambda^j\gamma_5) (\lambda^j i\gamma_5)] \times \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_2 - x_4), \quad (4.97)$$

e o termo que carrega a segunda derivada na expansão funcional em (4.96) se torna

$$\text{tr} \frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \frac{\delta^2 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4)} \bar{q}(x_3) q(x_4) = \text{tr} \left\{ -g_4 \int d^4x_1 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \right) \times \left[ \lambda^j (\bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1)) + (i\lambda^j \gamma_5) (\bar{q}(x_1) \lambda^j i\gamma_5 q(x_1)) \right] \right\}. \quad (4.98)$$

Para o cálculo do traço, podemos reescrever o termo escalar

$$\begin{aligned} \lambda^j (\bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1)) &= \sum_{j=0}^8 \lambda^j (\bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1)) \\ &= \lambda^0 (\bar{q}(x_1) \lambda^0 q(x_1)) + \sum_{j=1}^8 \lambda^j (\bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1)), \end{aligned} \quad (4.99)$$

em que podemos observar que o produto  $\bar{q}\lambda^j q$  resulta em um termo escalar de modo que o traço de (4.99) no espaço de sabor e Dirac torna-se

$$\begin{aligned} \text{tr} [\lambda^j (\bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1))] &= \text{tr} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1} \left( \bar{q}(x_1) \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1} q(x_1) \right) \right] + \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^8 \lambda^j \bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1) \right] \\ &= \left( \frac{2}{3} \right) [\bar{q}(x_1) q(x_1)] \text{tr} [\mathbb{1}] + [\bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1)] \text{tr} [\lambda^j] \\ &= 2 \bar{q}(x_1) q(x_1), \end{aligned} \quad (4.100)$$

onde utilizamos as propriedades sobre o traço das matrizes de Gell-Mann no espaço de sabor e a definição de  $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}$ . Para o termo pseudo-escalar podemos utilizar o mesmo raciocínio, entretanto, a presença de  $\gamma_5$  no espaço de Dirac irá anular este termo. Portanto, após o cálculo do traço nos espaços de cor, sabor e Dirac, temos o termo de segunda ordem resultando em

$$\int d^4x_1 \bar{q}(x_1) \left\{ -(2)(4)(N_c) g_4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{M}{p^2 - M^2} \right) \right\} q(x_1) \quad (4.101)$$

em que o fator (4) vem do traço sobre o espaço de Dirac e  $N_c$  sobre o espaço de cor. Este termo possui dimensão de massa e portanto podemos escrever

$$\Delta m_f = -\frac{8g_4 N_c}{(2\pi)^4} \int d^4p \left( \frac{M_f}{p^2 - M_f^2} \right), \quad (4.102)$$

que pode ser resolvida por meio da regularização por cutoff de modo a obtermos:

$$\Delta m_f = \frac{g_4 N_c M_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp_E \left( \frac{p_E^3}{p_E^2 + M_f^2} \right). \quad (4.103)$$

Podemos definir uma massa efetiva para a parte dos campos responsáveis pelas partículas físicas que interagem correspondendo a

$$m_f^* = m_f + \Delta m_f, \quad (4.104)$$

em que associamos (4.103) a um termo de correção da massa dos quarks livres devido a expansão funcional da ação efetiva  $S[\bar{q}, q]$ . Para o cutoff definido na Seção 4.3 plotamos (4.104) como função da massa efetiva dos quarks que condensam na figura 4.3.

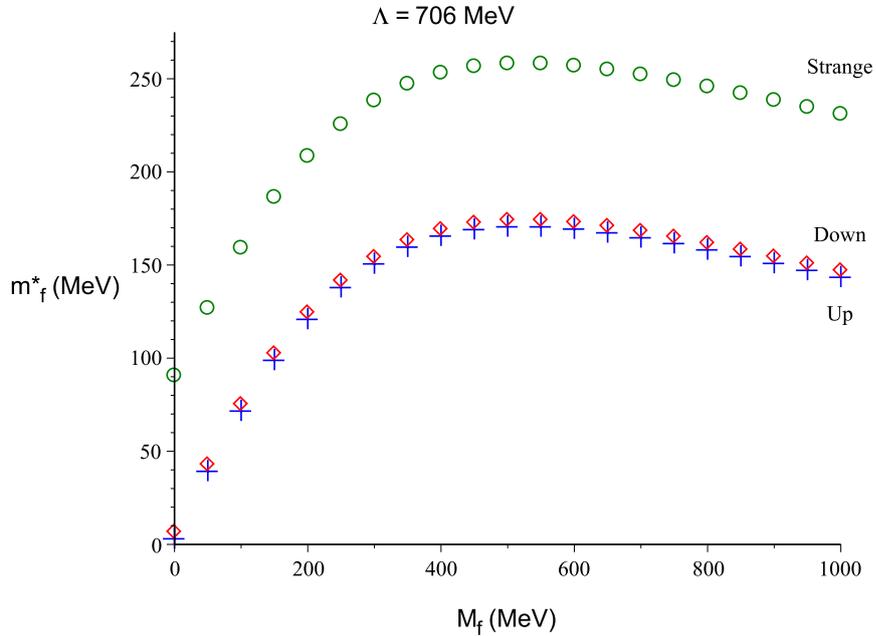


Figura 4.3: Massa corrigida em função da massa efetiva dos quarks que condensam.

Percebe-se comportamento análogo ao da figura 4.1 uma vez que, um limite superior ( $m_{u_{max}}^* \approx 171$  MeV,  $m_{d_{max}}^* \approx 174$  MeV e  $m_{s_{max}}^* \approx 258$  MeV) é observado para a massa corrigida

conforme aumenta-se a massa efetiva dos quarks que condensam. Os valores de  $m_u^* = 151$  MeV,  $m_d^* = 154$  MeV e  $m_s^* = 257$  MeV, obtidos para  $\Lambda = 706$  MeV, são inferiores às massas dos quarks constituintes. Em [69] uma massa constituinte  $M_Q = 190 \pm 40$  MeV é obtida considerando-se o Modelo Quiral de Quarks Constituintes para baixas energias a partir de valores fenomenológicos.

Para a derivada de quarta ordem em (4.96), temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^4 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4) \delta \bar{q}(x_5) \delta q(x_6)} \right|_{\bar{q}(x) = q(x) = 0} &= -8g_4^2 [(\mathcal{F}(x-z)\lambda^k) (\lambda^k) + (\mathcal{F}(x-z)i\lambda^k\gamma_5) (\lambda^k i\gamma_5)] \times \\ &\times [(\mathcal{F}(z-y)\lambda^j) (\lambda^j) + (\mathcal{F}(z-y)i\lambda^j\gamma_5) (\lambda^j i\gamma_5)] \times \\ &\times \delta^4(x_1-x_3)\delta^4(x_2-x_4)\delta^4(x_1-x_5)\delta^4(x_2-x_6) \end{aligned} \quad (4.105)$$

e, portanto o termo de quarta ordem pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\text{tr} \frac{1}{4!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 d^4x_5 d^4x_6 \frac{\delta^4 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4) \delta \bar{q}(x_5) \delta q(x_6)} \bar{q}(x_3) q(x_4) \bar{q}(x_5) q(x_6) \\ &= -\frac{g_4^2}{3} \text{tr} \left\{ \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \right) [\lambda^k (\bar{q}(x_1)\lambda^k q(x_2)) + (i\lambda^k\gamma_5) (\bar{q}(x_1)\lambda^k i\gamma_5 q(x_2))] \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \right) [\lambda^j (\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_2)) + (i\lambda^j\gamma_5) (\bar{q}(x_1)\lambda^j i\gamma_5 q(x_2))] \right\}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

O traço a ser calculado é o da expressão

$$\begin{aligned} &(\lambda^k)(\bar{q}(x_1)\lambda^k q(x_2))(\lambda^j)(\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_2)) + (\lambda^k i\gamma_5)(\bar{q}(x_1)\lambda^k i\gamma_5 q(x_2))(\lambda^j i\gamma_5)(\bar{q}(x_1)\lambda^j i\gamma_5 q(x_2)) \\ &+ (\lambda^k)(\bar{q}(x_1)\lambda^k q(x_2))(\lambda^j i\gamma_5)(\bar{q}(x_1)\lambda^j i\gamma_5 q(x_2)) + (\lambda^k i\gamma_5)(\bar{q}(x_1)\lambda^k i\gamma_5 q(x_2))(\lambda^j)(\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_2)) \end{aligned} \quad (4.107)$$

que pode ser realizado de modo análogo ao caso do termo de segunda ordem. Para o primeiro termo de (4.107), temos:

$$\begin{aligned} \text{tr} \{ \lambda^k [\bar{q}(x_1)\lambda^k q(x_2)] \lambda^j [\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_2)] \} &= [\bar{q}(x_1)\lambda^k q(x_2)] [\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_2)] \text{tr}[\lambda^k \lambda^j] \\ &= 2\delta^{kj} [\bar{q}(x_1)\lambda^k q(x_2)] [\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_2)] \\ &= 2 [\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_2)]^2. \end{aligned} \quad (4.108)$$

O segundo termo resulta em

$$\text{tr} \{ \lambda^k i\gamma_5 [\bar{q}(x_1)\lambda^k i\gamma_5 q(x_2)] \lambda^j i\gamma_5 [\bar{q}(x_1)\lambda^j i\gamma_5 q(x_2)] \} = 2 [\bar{q}(x_1)\lambda^j i\gamma_5 q(x_2)]^2, \quad (4.109)$$

enquanto que os demais termos de (4.107) irão desaparecer em virtude da matriz  $\gamma_5$  que possui traço nulo. Deste modo, podemos reescrever o termo de quarta ordem considerando-se os traços no espaço de cor, sabor e Dirac como

$$\int d^4x_1 \left[ -\frac{8g_4^2 N_c}{3} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + M^2}{(p^2 - M^2)(p^2 - M^2)} \right] \left\{ [\bar{q}(x_1)\lambda^j q(x_1)]^2 + [\bar{q}(x_1)\lambda^j i\gamma_5 q(x_1)]^2 \right\}. \quad (4.110)$$

Podemos observar que o termo entre colchetes possui dimensão de  $[massa]^{-2}$  conforme o termo de acoplamento  $g_4$  do modelo NJL e, portanto, podemos escrever o termo de correção

$$\Delta g_4 = \frac{g_4^2 N_c}{3\pi^2} \int_0^\Lambda dp_E \frac{p_E^3 (p_E^2 + M^2)}{(p_E^2 + M^2)(p_E^2 + M^2)} \quad (4.111)$$

para a constante de acoplamento do termo de interação de ordem quatro. A tabela 4.2 mostra a variação da massa efetiva  $M$  e os valores da correção  $\Delta g_4$  para tal variação. Também calculamos a correção relativa à constante  $g_4$  já obtida na Seção 4.3.

$M$ (MeV)	$\Delta g_4$ ( $\text{GeV}^{-2}$ )	$\frac{\Delta g_4}{g_4}$
100	2,2	0,23
200	1,9	0,20
300	1,6	0,16
400	1,3	0,14
500	1,1	0,11
600	0,9	0,09
700	0,8	0,08
800	0,6	0,06

Tabela 4.2: Massa efetiva  $M$  (MeV), correção  $\Delta g_4$  ( $\text{GeV}^{-2}$ ) e correção relativa  $\frac{\Delta g_4}{g_4}$  para a constante de acoplamento  $g_4 = 9,8 \text{ GeV}^{-2}$  obtida na Seção 4.3.

Podemos agora escrever a lagrangeana para nosso modelo efetivo incorporando os parâmetros e variáveis até aqui introduzidas, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \bar{q} (i\not{\partial} - m^*) q + g_4^* \left[ (\bar{q}\lambda^j q)^2 + (\bar{q}\lambda^j i\gamma_5 q)^2 \right] + \frac{3i}{2} (N_c^2 - 1) \left[ \ln \left( \frac{\square - c\phi}{\square} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4} c\phi^2 - i \text{tr} \ln (i\not{\partial} - M) - \frac{1}{4g_4} \left( \frac{1}{2} s_f^2 + P_j^2 \right) \end{aligned} \quad (4.112)$$

onde  $m^*$  é definida em (4.104),  $M$  em (4.70) e

$$g_4^* = g_4 + \Delta g_4. \quad (4.113)$$

#### 4.4.1 Termo de sexta ordem

A expansão funcional definida por (4.96) pode ser realizada até a  $n$ -ésima ordem nas derivadas funcionais. Como já mencionado, para  $n$  ímpar as derivadas se anulam restando apenas os termos com derivadas de ordem  $n$  par. Na seção anterior calculamos as derivadas para  $n = 2$  e  $n = 4$  que levam a termos de correção de massa e da constante de acoplamento  $g_4$ , respectivamente. Um termo interessante a ser calculado é a derivada de sexta ordem, mas antes de realizarmos este cálculo vamos fazer uma breve digressão sobre o termo de interação de sexta ordem da lagrangeana do modelo NJL para  $N_f = 3$  definida na expressão (3.2).

Na Seção 2.4 já mencionamos o fato de que a corrente axial não é conservada a nível quântico (anomalia axial) e, portanto, a quebra explícita da simetria  $U_A(1)$  deve estar presente em modelos que busquem descrever as interações fortes. Para o modelo NJL com  $N_f > 2$  qualquer interação quadri fermiônica que preserve a simetria quiral também o faz para a axial e a interação mais simples que quebra esta simetria é dada pelo determinante de t' Hooft contendo uma interação de  $2N_f$  férmions [70, 71]. Assim, para o caso de interesse, isto é,  $SU(3)$ , teremos uma interação de 6 férmions que corresponde ao termo lagrangeano

$$\mathcal{L}_6 = g_6 \{ \det [\bar{q} (1 - \gamma_5) q] + \det [\bar{q} (1 + \gamma_5) q] \}, \quad (4.114)$$

em que o determinante é tomado sobre o espaço de sabor e  $g_6$  representa a constante de acoplamento da interação de dimensão  $[massa]^{-5}$ .

Uma revisão mais detalhada sobre este termo é feita em [44, 66, 67, 71] e, com base nesses trabalhos, podemos reescrever o termo (4.114) como:

$$\mathcal{L}_6 = \frac{g_6}{6} D_{jkl} \left[ \frac{1}{3} (\bar{q} \lambda^j q) (\bar{q} \lambda^k q) (\bar{q} \lambda^l q) - (\bar{q} \lambda^j i \gamma_5 q) (\bar{q} \lambda^k i \gamma_5 q) (\bar{q} \lambda^l q) \right] \quad (4.115)$$

em que  $D_{jkl}$  representam os coeficientes totalmente simétricos definidos no Apêndice A. É

importante lembrar que estamos considerando apenas as partes escalar e pseudo-escalar em (4.115).

Com base nessas considerações, podemos retomar a derivada de sexta ordem na expansão funcional dada por

$$\begin{aligned} \frac{\delta^6 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4) \delta \bar{q}(x_5) \delta q(x_6) \bar{q}(x_7) \delta q(x_8)} \Bigg|_{\bar{q}(x) = q(x) = 0} &= -96g_4^3 \{ \mathcal{F}(x-w) \times [(\lambda^l)(\lambda^l) + \\ & (\lambda^l i \gamma_5) (\lambda^l i \gamma_5)] \times \mathcal{F}(w-z) [(\lambda^k)(\lambda^k) + (\lambda^k i \gamma_5) (\lambda^k i \gamma_5)] \times \mathcal{F}(z-y) \times \\ & \times [(\lambda^j)(\lambda^j) + (\lambda^j i \gamma_5) (\lambda^j i \gamma_5)] \} \times \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_2 - x_4) \delta^4(x_1 - x_5) \times \\ & \times \delta^4(x_2 - x_6) \delta^4(x_1 - x_7) \delta^4(x_1 - x_8) \end{aligned} \quad (4.116)$$

que resulta no termo de sexta ordem

$$\begin{aligned} \text{tr} \frac{1}{6!} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 d^4 x_5 d^4 x_6 d^4 x_7 d^4 x_8 \frac{\delta^6 S(\bar{q}(x_1), q(x_2))}{\delta \bar{q}(x_3) \delta q(x_4) \bar{q}(x_5) \delta q(x_6) \bar{q}(x_7) \delta q(x_8)} \times \\ \times \bar{q}(x_3) q(x_4) \bar{q}(x_5) q(x_6) \bar{q}(x_7) q(x_8) \\ = -\frac{96g_4^3}{6!} \text{tr} \left\{ \int d^4 x_1 d^4 x_2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left( \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \right) \left( \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \right) \left( \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \right) \times \right. \\ \times [(\lambda^l)(\lambda^l) + (\lambda^l i \gamma_5) (\lambda^l i \gamma_5)] [(\lambda^k)(\lambda^k) + (\lambda^k i \gamma_5) (\lambda^k i \gamma_5)] [(\lambda^j)(\lambda^j) + (\lambda^j i \gamma_5) (\lambda^j i \gamma_5)] \times \\ \left. \times \bar{q}(x_1) q(x_2) \bar{q}(x_1) q(x_2) \bar{q}(x_1) q(x_2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

O cálculo do traço deste termo deve levar em conta a presença do produto de matrizes  $\gamma_5$ , que em número ímpar será nulo. Assim, devemos calcular o traço do termo

$$\begin{aligned} (\lambda^l) (\lambda^k) (\lambda^j) (\bar{q} \lambda^l q) (\bar{q} \lambda^k q) (\bar{q} \lambda^j q) + (\lambda^l) (\lambda^k i \gamma_5) (\lambda^j i \gamma_5) (\bar{q} \lambda^l q) (\bar{q} \lambda^k i \gamma_5 q) (\bar{q} \lambda^j i \gamma_5 q) \\ + (\lambda^l i \gamma_5) (\lambda^k) (\lambda^j i \gamma_5) (\bar{q} \lambda^l i \gamma_5 q) (\bar{q} \lambda^k q) (\bar{q} \lambda^j i \gamma_5 q) + (\lambda^l i \gamma_5) (\lambda^k i \gamma_5) (\lambda^j) \times \\ \times (\bar{q} \lambda^l i \gamma_5 q) (\bar{q} \lambda^k i \gamma_5 q) (\bar{q} \lambda^j q), \end{aligned} \quad (4.118)$$

cujos termos considerados são apenas aqueles que irão contribuir para tal, isto é, que possuem o produto em número par de matrizes  $\gamma_5$  e omitimos as dependências nas coordenadas para evitar sobrecarga de notação. Usando as propriedades definidas em (A.13) e (A.16), e após

algumas manipulações matemáticas, temos que a expressão (4.117) se torna

$$\int d^4x_1 \left[ -\frac{96g_4^3 N_c}{5} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{3p^2 M + M^3}{(p^2 - M^2)(p^2 - M^2)(p^2 - M^2)} \right) \right] \left\{ \frac{1}{6} D_{jkl} \left[ \frac{1}{3} (\bar{q}(x_1) \lambda^j q(x_1)) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\bar{q}(x_1) \lambda^k q(x_1)) (\bar{q}(x_1) \lambda^l q(x_1)) - (\bar{q}(x_1) \lambda^j i \gamma_5 q(x_1)) (\bar{q}(x_1) \lambda^k i \gamma_5 q(x_1)) (\bar{q}(x_1) \lambda^l q(x_1)) \right] \right\}, \quad (4.119)$$

que representa um termo lagrangeano dado por (4.115) em que a expressão entre colchetes possui dimensão da constante de acoplamento  $g_6$ , que podemos representar como um termo de correção à tal constante dada por

$$\Delta g_6 = \frac{12g_4^3 N_c}{5\pi^2} \int_0^\Lambda dp_E \frac{p_E^3 (3p_E^2 M + M^3)}{(p^2 - M^2)(p^2 - M^2)(p^2 - M^2)}. \quad (4.120)$$

A tabela 4.3 contém a correção  $\Delta g_6$  com relação à variação da massa efetiva  $M$ , bem como o valor relativo  $\frac{\Delta g_6}{g_6}$ , em que tomamos o valor absoluto  $g_6 = 239,1 \text{ GeV}^{-5}$  obtido em [65]. Como podemos observar, o efeito da correção desta constante, comparado com o efeito da correção para  $g_4$  é bem mais acentuado e tende a se tornar cada vez menor à medida que a massa efetiva aumenta.

$M$ (MeV)	$\Delta g_6$ ( $\text{GeV}^{-5}$ )	$\frac{\Delta g_6}{g_6}$
100	273	1,14
200	288	1,21
300	246	1,03
400	194	0,81
500	147	0,61
600	110	0,46
700	82	0,34
800	47	0,26

Tabela 4.3: Massa efetiva  $M$  (MeV), correção  $\Delta g_6$  ( $\text{GeV}^{-5}$ ) e correção relativa  $\frac{\Delta g_6}{g_6}$  para a constante de acoplamento  $g_6 = 239,1 \text{ GeV}^{-5}$  obtida por *Vogl e Weise* (1991).

# Capítulo 5

## Conclusões

A partir do funcional gerador da QCD em (2.41), por meio de algumas aproximações, obtivemos uma teoria efetiva onde os graus de liberdade estão associados à parte dos campos fermiônicos responsáveis pelas partículas físicas  $\bar{q}$  e  $q$ , aos condensados de glúons de ordem dois,  $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ , e de quark-antiquark,  $\langle \bar{q}_c q_c \rangle$ , na expressão (4.112). Diferentemente do que é comumente encontrado na literatura relativa à este tema, realizamos a separação dos campos dos quarks em uma parte que condensa e em flutuações quânticas associadas aos campos físicos interagentes em torno do estado fundamental, obtendo-se assim uma teoria efetiva para quarks a baixas energias na presença dos condensados supracitados. Em geral, em trabalhos como [8, 16, 65] esta separação não é feita e o campo fermiônico é tratado da mesma forma seja para o estado fundamental, seja para flutuações em torno deste estado.

Conforme já discutimos, o tensor de força da QCD contém termos que levam a uma auto-interação entre os glúons e para realizarmos a integração funcional dos mesmos introduzimos, com algumas aproximações, o campo auxiliar  $\phi$ , que está associado à condensação dos glúons e, conseqüentemente, a uma geração de massa dinâmica  $m_G = 650$  MeV obtida a partir da solução das equações de GAP acopladas para um valor de cutoff  $\Lambda = 706$  MeV. Esses valores possuem boa concordância com aqueles já obtidos na literatura em que a massa dos glúons é estimada entre 550 e 650 MeV.

Um ponto importante deste trabalho é a dependência da constante de acoplamento  $g_4$  de maneira inversamente proporcional ao quadrado da massa dos glúons revelando um aco-

plamento entre esses e os campos fermiônicos da teoria, uma vez que as equações de GAP (4.84) guardam uma dependência entre essa constante e a massa efetiva dos quarks que condensam. Para a massa  $m_G$  calculada numericamente obtivemos  $g_4 = 9,8 \text{ GeV}^{-2}$  que representa um valor suficiente para que haja quebra de simetria quiral e a presença de condensados de quark-antiquark. Para  $m_u \neq m_d \neq m_s \neq 0$ , a quebra de simetria é explícita e a massa efetiva dos quarks tem seu valor aumentado como efeito das interações com os condensados.

As soluções das equações do GAP acopladas revelam um valor para a massa efetiva dos quarks que condensam condizente com a massa dos quarks constituintes para um cutoff mais baixo que o usual. Assim, o acoplamento entre os condensados de glúons e quark-antiquark revela que a maior parte da massa efetiva é gerada dinamicamente pela quebra espontânea da simetria quiral, uma vez que  $s_f \gg m_f$ , com bons valores para as aproximações consideradas ao longo de nosso cálculo. Em comparação a outros trabalhos como [8,65,66,68] obtivemos valores mais baixos para  $m_s$ , mais próximos àqueles disponíveis em [34], e para o cutoff  $\Lambda$ . Portanto, para o estado fundamental nosso modelo conduz a valores próximos àqueles já discutidos na literatura e à valores experimentais e de cálculo na rede. Até esse ponto tomamos  $\bar{q}q = 0$  e vale ressaltar que as equações de GAP obtidas neste modelo não contém a dependência com relação ao termo de t' Hooft.

Ao considerarmos a parte do campo fermiônico responsável pelas interações, uma expansão funcional pode ser feita na ação efetiva considerando a presença de tais termos levando à correções consideradas até a sexta ordem nas derivadas. Para o termo de segunda ordem na expansão funcional, obtivemos um termo correção de massa,  $\Delta M$  para os campos de matéria da teoria. Entretanto, a correção não resulta em uma massa efetiva da ordem da massa constituinte (para  $\Lambda = 706 \text{ MeV}$  e  $m_G = 650 \text{ MeV}$ ), mas que pode ser comparada ao valor obtido por [69] a partir das regras de soma da QCD e de valores fenomenológicos. Assim, a massa efetiva obtida através da expressão (4.104) é cerca de 50% menor do que a massa estimada para os quarks constituintes.

Já o termo de quarta ordem obtido na expansão representa uma pequena correção na

constante de acoplamento do modelo NJL, que obtivemos a partir da integração funcional dos glúons e das transformações de Fierz, calculada numericamente em torno de 15%. O aumento na massa efetiva dos quarks conduz a um valor cada vez menor para essa correção no cutoff considerado como solução para as equações do GAP acopladas.

O termo de sexta ordem nas derivadas representa uma correção à constante de interação para seis quarks introduzidas pelo termo que quebra explicitamente a simetria  $U_A(1)$ . Essa correção apresenta uma maior intensidade que aquela observada para o termo de quarta ordem, ficando em torno de 80% para uma massa efetiva  $M = 400$  MeV.

Esta expansão pode ser realizada até a  $n$ -ésima ordem e em etapas futuras deste trabalho buscaremos obter o termo de interação de oito quarks e a possível correção para as constantes deste termo de interação comparando-a com o que já está disponível na literatura. Além disso, outras considerações como a integração dos campos fantasmas e dos acoplamentos derivativos são etapas futuras que poderão dar continuidade a este trabalho.

# Apêndice A

## Álgebra do grupo de Simetria $SU(N)$

Os grupos  $SU(2)$  e  $SU(3)$  são grupos de simetria  $SU(N)$ , em que os operadores unitários são representados por matrizes unitárias  $U$ , de ordem  $N$ , com determinante igual à unidade e que podem ser dadas através de geradores  $T^a$ , em que  $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ ; e escritas como:

$$U(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{N^2-1}) = \exp(i\Lambda_a T^a) \quad (\text{A.1})$$

A fim de que a matriz seja unitária, os geradores devem ser Hermitianos e para que tenhamos  $\det U = +1$  eles devem ter traço nulo [72]. Os geradores obedecem à *álgebra de Lie*:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (\text{A.2})$$

onde  $f^{abc}$  são as constantes de estrutura antissimétricas do grupo. Quando tais geradores comutam, dizemos que eles correspondem à uma teoria **abeliana** em que  $f^{abc} = 0$ . Entretanto, quando a relação de comutação não é satisfeita, temos uma teoria **não-abeliana**, que correspondem aos grupos simetrias para sabor e cor no caso da QCD.

Para o grupo  $SU(2)$ , temos  $N = 2$ , e os geradores que são dados por:

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\sigma^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) são as 3 matrizes de Pauli, definidas por

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

que possuem traço nulo. A identidade é representada por

$$\sigma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

e as constantes de estruturas são dadas pelo tensor antissimétrico de Levi-Civita,  $\varepsilon^{abc} = -\varepsilon^{abc} = 1$ , onde  $a = 1,2,3$  e portanto as relações de comutação são dadas por

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\varepsilon^{abc}\sigma^c. \quad (\text{A.6})$$

Para o grupo  $SU(3)$ , temos  $N = 3$ , e, por sua vez, os geradores são:

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad (\text{A.7})$$

onde  $\lambda^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) são as 8 matrizes de Gell-Mann, definidas por

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda^5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

com traço nulo e cuja identidade, é definida por

$$\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}. \quad (\text{A.9})$$

Neste caso, as constantes de estrutura dadas pelo tensor antissimétrico  $f^{abc}$ , que possui as seguintes propriedades:

$$f^{acd} f^{bcd} = N\delta^{ab} \quad e \quad f^{abc} f^{abc} = N(N^2 - 1) \quad (\text{A.10})$$

e com relações de comutação

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c. \quad (\text{A.11})$$

O traço do produto das matrizes de Gell-Mann, que será de grande utilidade no cálculo da expansão funcional, é dado por [72]

$$\text{tr} [\lambda^a \lambda^b] = 2\delta^{ab}, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{tr} [\lambda^a \lambda^b \lambda^c] = 2d^{abc}, \quad (\text{A.13})$$

onde  $d^{abc}$  são os coeficientes simétricos que ocorrem nas relações de anti-comutação destas matrizes, definidas por

$$\{\lambda^a, \lambda^b\} = \frac{4}{3}\delta^{ab}\mathbb{1} + 2d^{abc}\lambda^c, \quad (\text{A.14})$$

$$d^{abc} = d^{bac} = d^{acb} \text{ etc.} \quad (\text{A.15})$$

Será conveniente estendermos estes coeficientes para o caso  $U(3)$ , que incorpora a matriz  $\lambda^0$ , como podemos ver em [66, 71], e definirmos

$$D^{abc} = \begin{cases} d^{abc} & \text{para } a, b, c \in \{1, \dots, 8\} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \text{para } a = 0, b = c = 1, \dots, 8 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \text{para } a = b = c = 0 \end{cases} . \quad (\text{A.16})$$

# Apêndice B

## Transformações de Fierz

Na subseção 4.2.1 partimos do termo de interação quadrifermiônico com o objetivo de encontrar um termo bilinear que pudesse ser integrado via integrais de trajetória. Portanto, temos

$$j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) = \left[ (\bar{q})_\alpha^{fc} (\gamma^\mu)_{\alpha\alpha'} \mathbb{1}^{ff'} (T_j^a)_{cc'} (q)_{\alpha'}^{f'c'} \right] \left[ \left( \frac{g^2}{\square - c\phi(x)} \right) \delta^4(x-y) \right] \times \\ \times \left[ (\bar{q})_\beta^{gd} (\gamma_\mu)_{\beta\beta'} \mathbb{1}^{gg'} (T_j^a)_{dd'} (q)_{\beta'}^{g'd'} \right], \quad (\text{B.1})$$

onde explicitamos os índices de cor, sabor e Dirac, já definidos na Seção 2.2. Entretanto, antes de podermos encontrar nosso resultado final, precisamos lançar mão das chamadas *Transformações de Fierz*.

As transformações de Fierz representam ferramentas matemáticas utilizadas a fim de examinarmos o efeito da troca entre os campos fermiônicos presentes nos termos de interação quadrifermiônicos em um mesmo ponto do espaço tempo [8, 73, 74]. A presença do operador  $\widehat{W}$  definido em (4.47) é contornada por meio de sua aproximação por uma função com dependência do campo auxiliar  $\phi_0$  introduzido na integração dos glúons. Deste modo, a expressão

$$\int d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \simeq - \left( \frac{g^2}{c\phi_0} \right) \left[ \bar{q}_\alpha^{fc}(x) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \right] \left[ \bar{q}_\beta^{gd}(x) \Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} q_{\beta'}^{g'd'}(x) \right], \quad (\text{B.2})$$

carrega o produto dos operadores definidos em (4.50) e (4.51) onde o produto cruzado de matrizes deve ser analisado em função da troca dos campos fermiônicos por meio da aplicação

do operador  $\mathfrak{F}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left[ \bar{q}_\alpha^{fc}(x) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \bar{q}_\beta^{gd}(x) \Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} q_{\beta'}^{g'd'}(x) \right] &= -\bar{q}_\alpha^{fc}(x) q_{\beta'}^{g'd'}(x) \bar{q}_\beta^{gd}(x) q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \Gamma_{\alpha\alpha'}^{ff',cc'} \Gamma_{\beta\beta'}^{gg',dd'} \\ &= -\bar{q}_\alpha^{fc}(x) q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \bar{q}_\beta^{gd}(x) q_{\beta'}^{g'd'}(x) \Gamma_{\alpha\beta'}^{fg',cd'} \Gamma_{\beta\alpha'}^{gf',dc'}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Deste modo, (B.2) se torna

$$\int d^4y j_a^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_b^\nu(y) \simeq \left( \frac{g^2}{c\phi_0} \right) \bar{q}_\alpha^{fc}(x) q_{\alpha'}^{f'c'}(x) \bar{q}_\beta^{gd}(x) q_{\beta'}^{g'd'}(x) \Gamma_{\alpha\beta'}^{fg',cd'} \Gamma_{\beta\alpha'}^{gf',dc'}, \quad (\text{B.4})$$

e, portanto estamos interessados em analisar

$$\Gamma_{\alpha\beta'}^{fg',cd'} \Gamma_{\beta\alpha'}^{gf',dc'} = \left[ (\gamma^\mu)_{\alpha\beta'} (\gamma_\mu)_{\alpha'\beta} \mathbb{1}^{fg'} \mathbb{1}^{gf'} (\lambda_j^a)_{cd'} (\lambda_j^a)_{dc'} \right], \quad (\text{B.5})$$

onde utilizaremos as propriedades dos produtos entre matrizes definidas em [8, 29, 33, 73].

Para o primeiro produto

$$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta'} (\gamma_\mu)_{\alpha'\beta} = \frac{1}{4} \left[ 4\mathbb{1}_{\alpha\beta'} \mathbb{1}_{\alpha'\beta} - 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{\alpha'\beta'} - 2(\gamma^\mu \gamma^5)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu \gamma^5)_{\alpha'\beta'} + 4(i\gamma^5)_{\alpha\beta'} (i\gamma^5)_{\alpha'\beta} \right] \quad (\text{B.6})$$

onde os termos do lado direito representam, respectivamente, as partes escalar, vetorial, axial e pseudo-escalar. Já para o produto da identidades de sabor, partimos de

$$\left[ \begin{array}{c} \lambda^0 \lambda^0 \\ \lambda^i \lambda^i \end{array} \right]_{fg';gf'} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \lambda^0 \lambda^0 \\ \lambda^i \lambda^i \end{array} \right]_{ff';gg'} \quad (\text{B.7})$$

válida para  $SU(3)$ , resultando em

$$(\lambda^0)_{fg'} (\lambda^0)_{gf'} = \frac{1}{3} (\lambda^0)_{ff'} (\lambda^0)_{gg'} + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^8 (\lambda^j)_{ff'} (\lambda^j)_{gg'} \quad (\text{B.8})$$

cuja definição de  $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}$  nos fornece

$$\mathbb{1}^{fg'} \mathbb{1}^{gf'} = \frac{1}{2} (\lambda^0)_{ff'} (\lambda^0)_{gg'} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^8 (\lambda^j)_{ff'} (\lambda^j)_{gg'} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^8 (\lambda^j)_{ff'} (\lambda^j)_{gg'}. \quad (\text{B.9})$$

Por fim, para as matrizes de Gell-Mann no espaço de cor, temos

$$(\lambda_j^a)_{cd'} (\lambda_j^a)_{dc'} = \sum_{j=1}^8 (\lambda_j^a)_{cd'} (\lambda_j^a)_{dc'} = \frac{16}{9} \mathbb{1}_{cc'}^c \mathbb{1}_{dd'}^c - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^8 (\lambda_j^a)_{cc'} (\lambda_j^a)_{dd'} \quad (\text{B.10})$$

em que o último termo do lado direito da igualdade representa os octetos de cor.

Portanto, a aplicação de (B.6), (B.9) e (B.10) em (B.5) fornece o produto

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta'}^{fg',cd'} \Gamma_{\beta\alpha'}^{gf',dc'} = & \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^8 (\lambda^j)_{ff'} (\lambda^j)_{gg'} \right] \times \left[ \mathbb{1}_{\alpha\beta'} \mathbb{1}_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{2} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^5)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu \gamma^5)_{\alpha'\beta'} \right. \\ & \left. + (i\gamma^5)_{\alpha\beta'} (i\gamma^5)_{\alpha'\beta'} \right] \times \left[ \frac{16}{9} \mathbb{1}_{cc'}^c \mathbb{1}_{dd'}^c - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^8 (\lambda_j^a)_{cc'} (\lambda_j^a)_{dd'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Levando-se em conta que estamos interessados apenas nos termos que conservam a simetria quiral, dados pelos termos escalar e pseudo escalar do produto cruzado das matrizes de Dirac; e desprezando-se os octetos de cor, obtemos

$$\Gamma_{\alpha\beta'}^{fg',cd'} \Gamma_{\beta\alpha'}^{gf',dc'} = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{16}{9} \right) \sum_{j=0}^8 (\lambda^j)_{ff'} (\lambda^j)_{gg'} \left[ \mathbb{1}_{\alpha\beta'} \mathbb{1}_{\alpha'\beta'} + (i\gamma^5)_{\alpha\beta'} (i\gamma^5)_{\alpha'\beta'} \right] \mathbb{1}_{cc'}^c \mathbb{1}_{dd'}^c. \quad (\text{B.12})$$

# Apêndice C

## Solução das equações do GAP

### C.1 Equação do GAP para os glúons

Com o intuito de buscarmos uma solução para a equação (4.43) vamos remover o polo da função de Green por meio de uma rotação para o espaço Euclideo onde fazemos  $k_0 \rightarrow ik_{0E}$ . Assim, temos que (4.43) se torna:

$$\langle \phi \rangle = 3i(N_c^2 - 1) \int \frac{id^4 k_E}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{-k_E^2 - m_G^2} \right) \quad (\text{C.1})$$

Conforme vemos em [29], a integral quadri-dimensional em (C.1) pode ser escrita como:

$$\int d^4 k_E = \int d\Omega \int_0^\infty k_E^3 dk_E = 2\pi^2 \int_0^\infty k_E^3 dk_E = \pi^2 \int_0^\infty k_E^2 d^2 k_E, \quad (\text{C.2})$$

e portanto,

$$\langle \phi \rangle = \frac{3}{16\pi^2} (N_c^2 - 1) \int_0^\infty d^2 k_E \left( \frac{k_E^2}{k_E^2 + m_G^2} \right). \quad (\text{C.3})$$

Fazendo-se uma troca de variáveis  $k_E^2 \rightarrow w$ , (C.3) se torna

$$\langle \phi \rangle = \frac{3}{16\pi^2} (N_c^2 - 1) \int_0^\infty dw \left( 1 - \frac{m_G^2}{w + m_G^2} \right), \quad (\text{C.4})$$

que, como se pode perceber apresenta divergências conhecidas como *divergências ultravioletas* [29]. A fim de contorná-las podemos impor um cutoff covariante, dado por  $\Lambda$ , limitando a escala de energia de nosso modelo [4, 8, 29]. Deste modo, (C.4) se torna:

$$\langle \phi \rangle = \frac{3}{16\pi^2} (N_c^2 - 1) \int_0^{\Lambda^2} dw \left( 1 - \frac{m_G^2}{w + m_G^2} \right) \quad (\text{C.5})$$

cuja solução da integração resulta em

$$\langle \phi \rangle = \frac{3}{16\pi^2} (N_c^2 - 1) \left[ \Lambda^2 - m_G^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + m_G^2}{m_G^2} \right) \right]. \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Equações do GAP acopladas

A equação do GAP para o condensado de quark-antiquark pode ser obtida a partir da “extremização” da ação efetiva definida em (4.75) que, por questões de simetria discutidas na subseção 4.2.2, pode ser escrita como:

$$S_0[S_j] = \int d^4x \left\{ -i \text{tr} \ln (\mathcal{F}^{-1}(x - y)) - \frac{1}{4g_4} (S_j^2) \right\}. \quad (\text{C.7})$$

Esta expressão acarreta duas dificuldades matemáticas a fins de realização da minimização do potencial efetivo. A primeira delas está associada ao campo auxiliar escrito em termos dos índices  $j$  do grupo de simetria, ao passo que necessitamos de obter sua relação para os índices de sabor para analisarmos as equações do GAP. A segunda das dificuldades diz respeito ao primeiro termo desta ação que podemos redefinir levando em conta as questões de simetria apontadas como

$$\mathcal{F}^{-1}(x - y) = [i\cancel{\partial} - (m + S_j \lambda^j)] \delta^4(x - y), \quad (\text{C.8})$$

onde temos a presença das matrizes de massa  $m$  e de Gell-Mann  $\lambda^j$  no espaço de sabor, que dificulta a derivação de tal termo.

Começaremos observando que o termo

$$S_j \lambda^j = \sum_{n=1}^8 S_n \lambda^n \quad (\text{C.9})$$

deve levar em conta as contribuições das matrizes  $\lambda$  que apresentam apenas termos diagonais, uma vez que estamos interessados em uma matriz de massa diagonal  $M$ . Assim, temos que apenas os termos

$$S_j \lambda^j = S_0 \lambda^0 + S_3 \lambda^3 + S_8 \lambda^8 \quad (\text{C.10})$$

serão considerados e, portanto podemos definir a identidade matricial

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}}S_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + S_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}S_8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_u + \sqrt{\frac{2}{3}}S_0 + S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_8 & 0 & 0 \\ 0 & m_d + \sqrt{\frac{2}{3}}S_0 - S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_8 & 0 \\ 0 & 0 & m_s + \sqrt{\frac{2}{3}}S_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}S_8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_u + s_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d + s_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s + s_s \end{bmatrix} \tag{C.11}
\end{aligned}$$

de onde podemos extrair as relações

$$s_u = \sqrt{\frac{2}{3}}S_0 + S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_8, \tag{C.12}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{2}{3}}S_0 - S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_8, \tag{C.13}$$

$$s_s = \sqrt{\frac{2}{3}}S_0 - \frac{2}{\sqrt{3}}S_8. \tag{C.14}$$

Resolvendo-se as equações (C.12)–(C.14) para  $S_0, S_3$  e  $S_8$ , temos

$$S_0 = \frac{\sqrt{6}}{6} (s_u + s_d + s_s), \tag{C.15}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} (s_u - s_d), \tag{C.16}$$

$$S_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} (s_u + s_d - 2s_s). \tag{C.17}$$

$$\tag{C.18}$$

Portanto, temos

$$S_j^2 = S_0^2 + S_3^2 + S_8^2 = \frac{1}{2} (s_u^2 + s_d^2 + s_s^2), \tag{C.19}$$

que elimina a dependência de (C.7) em termos dos índices  $j$ .

A fim de contornar a segunda dificuldade podemos tomar

$$\begin{aligned}
tr \ln (\mathcal{F}^{-1}(x - y)) &= tr \ln (i\cancel{\partial} - M) \delta^4(x - y) \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr \ln (\cancel{p} - M) \tag{C.20}
\end{aligned}$$

que aplicada juntamente com (C.19) à ação (C.7) resulta no potencial efetivo

$$V_{eff}(s_f) = -4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr \ln (\not{p} - M) - \frac{1}{4g_4} \left(\frac{1}{2}\right) s_f^2 \quad (C.21)$$

que podemos minimizar por meio de

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(s_f)}{\partial s_f} \right|_{s_f=\langle s_f \rangle} = 0, \quad (C.22)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_{eff}(s_f)}{\partial s_f} \right|_{s_f=\langle s_f \rangle} &= 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr \left( \frac{1}{\not{p} - M} \right) - \frac{1}{4g_4} s_f \\ &= 4iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{M_f}{\not{p}^2 - M_f^2} \right) - \frac{1}{4g_4} s_f, \end{aligned} \quad (C.23)$$

onde nos valemos do fato de que o traço sobre a matriz  $\gamma_\mu$  é nulo. Deste modo, temos

$$\langle s_f \rangle = 16ig_4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{M_f}{\not{p}^2 - M_f^2} \right) \quad (C.24)$$

uma integral divergente em termos dos momentos mais elevados e que podemos regularizar de modo análogo ao já desenvolvido no Apêndice C.1, resultando na equação do GAP para o condensado de quarks

$$\langle s_f \rangle = \frac{g_4N_cM_f}{\pi^2} \left[ \Lambda^2 - M_f^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2 + M_f^2}{M_f^2} \right) \right]. \quad (C.25)$$

# Referências Bibliográficas

- [1] GRIFFITHS, D. *Introduction to elementary particles*. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley-VCH, 2008.
- [2] HUANG, K. *Quarks, Leptons and Gauge Fields*. 2nd. ed. Singapore: World Scientific, 1992.
- [3] CHANG, L.; ROBERTS, C. D. *Hadron Physics: The Essence of Matter*. Abril 2010. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1003.5006v2>>. Acesso em: 15 set. 2012.
- [4] SMILGA, A. *Lectures on Quantum Chromodynamics*. Singapore: World Scientific, 2001.
- [5] RICHARD, J. *An introduction to the quark model*. Maio 2012. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1205.4326v2>>. Acesso em: 17 mar. 2013.
- [6] GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. *Quantum Chromodynamics*. 3rd. ed. Berlin: Springer, 2007.
- [7] SHURYAK, E. Structure of the QCD vacuum and hadrons. *Physics Reports*, v. 264, p. 357–373, 1996.
- [8] KLEVANSKY, S. P. The Nambu Jona-Lasinio model of Quantum Chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, v. 64, n. 3, p. 649–708, 1992.
- [9] SKANDS, P. Z. *Introduction to QCD*. Julho 2012. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1207.2389>>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- [10] CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Propagators, running coupling and condensates in lattice QCD. *Brazilian Journal of Physics*, v. 37, n. 2B, p. 484–493, 2007.

- [11] IOFFE, B. L. QCD (Quantum Chromodynamics) at low energies. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 56, p. 232–277, 2006.
- [12] FRASCA, M. Infrared QCD. *International Journal of Modern Physics E*, v. 18, n. 3, p. 693–703, 2009.
- [13] WEISE, W. QCD aspects of hadron physics. *Nuclear Physics A*, v. 670, p. 3c–13c, 2000.
- [14] SCHERER, S. Chiral perturbation theory: Introduction and recent results in the one-nucleon sector. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 64, p. 1–60, 2010.
- [15] WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields - Volume I*. New York: Cambridge University Press, 1995.
- [16] HATSUDA, T.; KUNIHIRO, T. QCD phenomenology based on a chiral effective lagrangian. *Physics Reports*, v. 247, p. 221–367, 1994.
- [17] BARROS-JR., E.; BRAGHIN, F. L. Eighth order quark interaction with gluon condensate  $\langle A^2 \rangle$ . *Physical Review D*, v. 88, 2013.
- [18] EBERT, D.; VOLKOV, M. K. QCD-motivated Nambu–Jona-Lasinio model with quark and gluon condensates. *Physics Letters B*, v. 272, p. 86–90, 1991.
- [19] LEUTWYLER, H. Symmetries of QCD. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, v. 108, p. 37–48, 2002.
- [20] KOCH, V. *Aspects of Chiral Symmetry*. Fevereiro 2008. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/nucl-th/9706075v2>. Acesso em: 10 mai. 2012.
- [21] KONDO, K. Vacuum condensate of mass dimension 2 as the origin of mass gap and quark confinement. *Physics Letters B*, v. 514, p. 335–345, 2001.
- [22] GASSER, J.; LEUTWYLER, H. The chirally improved quark propagator and restoration of chiral symmetry. *Physics Letters B*, v. 711, p. 217–224, 2012.

- [23] REINHARDT, H.; WEIGEL, H. *The vacuum nature of the QCD condensates*. Abril 2012. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1201.3262v2>>. Acesso em: 06 set. 2012.
- [24] FEYNMAN, R. P. *The Feynman Lectures on Physics*. New York: Addison-Wesley, 1964.
- [25] DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. 2nd. ed. Singapore: World Scientific, 2006.
- [26] GROSS, D. J. Asymptotic freedom and QCD – a historical perspective. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, v. 135, p. 193–211, 2004.
- [27] CHENG, T.; LI, L. *Gauge Theory of Elementary Particles Physics*. [S.l.]: Oxford Science, 1988.
- [28] WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields - Volume II*. New York: Cambridge University Press, 1996.
- [29] DAS, A. *Lectures on Quantum Field Theory*. Singapore: World Scientific, 2008.
- [30] LAVELLE, M.; MCMULLAN, D. Constituent quarks from QCD. *Physics Reports*, v. 279, p. 1–65, 1997.
- [31] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [32] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *Introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Perseus Book, 1995.
- [33] ITZYKSON, C.; ZUBER, J. *Quantum Field Theory*. New York: Dover Publications, 2005.
- [34] J. BERINGER et al. Particle Data Group. *Physical Review D*, v. 86, 2012. Disponível em: <<http://pdg.lbl.gov>>. Acesso em: 30 mar. 2013.
- [35] GASSER, J.; LEUTWYLER, H. Quark masses. *Physics Reports (Review Section of Physics Letters)*, v. 87, n. 3, p. 77–169, 1982.

- [36] CUCCHIERI, A. Gribov copies in the minimal Landau gauge: The influence on gluon and ghost propagators. *Nuclear Physics B*, v. 508, p. 353–370, 1997.
- [37] SILVA, P. J.; OLIVEIRA, O. Gribov copies, lattice QCD and the gluon propagator. *Nuclear Physics B*, v. 690, p. 177–198, 2004.
- [38] SCHWABL, F. *Statistical Mechanics*. 2nd. ed. Berlin: Springer, 2006.
- [39] SALINAS, S. A. R. *Introdução à Física Estatística*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1997.
- [40] DESAI, B. R. *Quantum Mechanics with Basic Field Theory*. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [41] CELENZA, L. S.; SHAKIN, C. M. Description of gluon condensate. *Physical Review D*, v. 34, n. 5, p. 1591–1600, 1986.
- [42] LI, X.; SHAKIN, C. M. Description of gluon propagation in the presence of an  $A^2$  condensate. *Physical Review D*, v. 71, 2005.
- [43] OSIPOV, A. A.; BLIN, A. H.; HILLER, B. *The 't Hooft determinant resolution of the  $\eta'$  puzzle*. Outubro 2004. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0410148v1>>. Acesso em: 15 set. 2012.
- [44] KUNIHITO, T.; HATSUDA, T. Effects of flavour mixing induced by axial anomaly on the quark condensates and meson spectra. *Physics Letters B*, v. 206, n. 3, p. 385–390, 1988.
- [45] COLANGELO, J. G. G.; LEUTWYLER, H. *The quark condensate from  $K_{e4}$  decays*. Março 2001. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0103063v1>>. Acesso em: 18 jul. 2013.
- [46] JAMIN, M. Flavour-symmetry breaking of the quark condensate and chiral corrections to the gell-mann–oakes–renner relation. *Physics Letters B*, v. 538, p. 71–76, 2002.

- [47] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with Superconductivity II. *Physical Review*, v. 124, n. 1, p. 246–254, 1961.
- [48] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with Superconductivity I. *Physical Review*, v. 122, n. 1, p. 345–358, 1961.
- [49] EBERT, D.; REINHARDT, H.; VOLKOV, M. K. Effective Hadron Theory of QCD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 33, p. 1–120, 1994.
- [50] OSIPOV, A. A. et al. *Extended NJL model with eight-quark interactions*. Outubro 2009. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0910.0371v1>>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- [51] TIMOTEO, V. S.; LIMA, C. L. Chiral symmetry restoration and pion properties in a q-Deformed NJL Model. *Brazilian Journal of Physics*, v. 36, n. 1B, p. 208–217, 2006.
- [52] HELLSTERN R. ALKOFER, H. R. G. Diquark confinement in an extended NJL model. *Nuclear Physics A*, v. 625, p. 697–712, 1997.
- [53] HOSAKA, A. Meson properties at finite density in an extended Nambu–Jona-Lasinio model. *Physics Letters B*, v. 244, p. 363–367, 1990.
- [54] SIEGEL, W. The auxiliary field problem. *Physica 15 D*, p. 208–212, 1985.
- [55] FRADKIN, E. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. 2nd. ed. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [56] NITTA, M. Auxiliary field methods in supersymmetric non-linear sigma models. *Nuclear Physics B*, v. 711, p. 133–162, 2005.
- [57] KASHIWA, T.; SAKAGUCHI, T. Auxiliary field method in 4- and 3-dimensional Nambu–Jona-Lasinio models. *Physical Review D*, v. 68, 2003.
- [58] YURKEVICH, I. V. *Bosonisation as the Hubbard Stratonovich Transformation*. Abril 2002. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0112270v2>>. Acesso em: 10 set. 2012.

- [59] HUANG, K. *Quantum Field Theory*. New York: John Wiley and Sons, 1998.
- [60] DAS, A. *Finite Temperature Field Theory*. Singapore: World Scientific, 1997.
- [61] DAS, A.; HOTT, M. *On the derivative expansion at finite temperature*. Julho 1994. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9407283v1>>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- [62] MASSO, E.; ROTA, F. Summing the derivative expansion of the effective action. *Nuclear Physics B*, v. 620, p. 566–578, 2002.
- [63] AGUILAR, A. C.; PAPAVALASSILIOU, J. Analyzing dynamical gluon mass generation. *Brazilian Journal of Physics*, v. 37, n. 1, p. 239–245, 2007.
- [64] CAHILL, R. T.; ROBERTS, C. D. Solitons bag models of hadrons from QCD. *Physical Review D*, v. 32, n. 9, p. 2419–2428, 1985.
- [65] VOGL, U.; WEISE, W. The Nambu and Jona-Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 27, p. 195–272, 1991.
- [66] KLIMT M. LUTZ, U. V. S.; WEISE, W. Generalized SU(3) Nambu–Jona-Lasinio Model (I) - Mesonic modes. *Nuclear Physics A*, v. 516, p. 429–468, 1990.
- [67] KLIMT M. LUTZ, U. V. S.; WEISE, W. Generalized SU(3) Nambu–Jona-lasinio Model (II) - From current to constituent quarks. *Nuclear Physics A*, v. 516, p. 469–495, 1990.
- [68] OSIPOV B. HILLER, A. H. B. A. A.; PROVIDÊNCIA, J. *Effects of eight-quark interactions on the hadronic vacuum and mass spectra of light mesons*. Julho 2006. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0607066v1>>. Acesso em: 10 nov. 2013.
- [69] DE RAFAEL, E. The Constituinte Chiral Quark model revisited. *Physics Letters B*, v. 703, p. 60–65, 2011.
- [70] BERNARD, R. L. J. V.; MEISSNER, U. Flavor mixing via dynamical chiral symmetry breaking. *Physics Letters B*, v. 198, n. 1, p. 92–98, 1987.

- [71] DMITRASINOVIC, V.  $U_A(1)$  breaking and scalar mesons in the Nambu and Jona-Lasinio model. *Physical Review C*, v. 55, n. 3, p. 1383–1396, 1996.
- [72] GREINER, W.; MULLER, B. *Quantum Mechanics: Symmetries*. 2nd. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [73] CAMPOS, F. A. P. *Bosonização do Modelo de Nambu–Jona-Lasinio  $SU(3)$  Generalizado na Expansão  $1/N$* . Tese (Doutorado) — Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 1995.
- [74] NIEVES, J. F.; PAL, P. B. *Generalized Fierz identities*. Junho 2003. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0306087v1>>. Acesso em: 05 ago. 2013.