UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LUCAS GABRIEL FERREIRA DA CUNHA

Desigualdade de Díaz-Saá e aplicações

Goiânia
2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Lucas Gabriel Ferreira da Cunha

Título do trabalho: **Desigualdade de Díaz-Saá e aplicações**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [**X**] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Lucas G. F. Cunha

Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 20 / 03 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2]A assinatura deve ser escaneada.

Lucas Gabriel Ferreira da Cunha

Desigualdade de Díaz-Saá e aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Marcos Leandro Mendes Carvalho

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

da Cunha, Lucas Gabriel Ferreira
Desigualdade de Díaz-Saá [manuscrito] / Lucas Gabriel Ferreira da Cunha. - 2017.
96 f.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia. Apêndice.

1. Autovalor. 2. Convexidade . 3. Minimzação . 4. Regularidade. I. , Marcos Leandro Mendes Carvalho, orient. II. Título.

CDU 512.7

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE LUCAS GABRIEL FERREIRA DA CUNHA – Aos três dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (03/03/2017), às 09:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Marcos Leandro Mendes Carvalho - Orientador, Prof. Abiel Costa Macedo, e Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **"Desigualdade de Diáz-Saá e aplicações"**, em nível de Mestrado, área de concentração em Análise, de autoria de Lucas Gabriel Ferreira da Cunha, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Marcos Leandro Mendes Carvalho, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Análise, pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 10:30 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Marcos L. M. Carvalho

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Presidente - IME/UFG

Prof. Dr. Abiel Costa Macedo
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos
Membro – DM/UnB

LUCAS GABRIEL FERREIRA DA CUNHA

DESIGUALDADE DE DIÁZ-SAÁ E APLICAÇÕES

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 03 de março de 2017, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Abiel Costa Macedo
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos
Departamento de Matemática – UnB

Lucas Gabriel Ferreira da Cunha

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

Aos meus pais, Alcione e Neurimar.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, criador de tudo. Aos meus pais, Alcione e Neurimar. Irmãos, Gustavo e Taynara, por todo amor e apoio. À minha namorada Laena e sua família por tudo. À minha tia Angelita pela preocupação e carinho. Ao professor Marcos por toda atenção, paciência, dedicação, apoio, confiança, amizade e competência. Aos meus amigos do IME, Angelo, Bruna Luiza, Dassael, Domingos, Gregório, Hector, Heric, Jefferson dos Santos, Kariny, Lucas Brito, Mariazinha, Maurício Louzeiro, Mayk, Nielson, Raquel e Steffânio. Em especial aos meus amigos, Carol, Chen, Jean e Jhone Caldeira. Agradeço aos professores, Aline, Kaye, Maxwell e Romildo, pelo conhecimento que adquiri nos dois anos de mestrado. Em especial agradeço aos professores Edcarlos e José Valdo pelo apoio e competência. À minha avó Maria Divina e ao professor Walterson Pereira Ferreira in memoriam. À CAPES pelo apoio financeiro.

"Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis."

René Descartes,

.

Resumo

Cunha, Lucas G. F.. **Desigualdade de Díaz-Saá e aplicações** . Goiânia, 2017. 94p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho apresentaremos e demonstraremos a desigualdade de Díaz & Saá assim como as ferramentas utilizadas em sua demonstração e aplicaremos os resultados obtidos em problemas elípticos semilineares com domínios limitados e não limitados. Exibiremos condições necessárias e suficientes para mostrarmos a existência e a unicidade de solução para um problema do tipo $-\Delta_p u = f(x,u)$ em um domínio limitado, obteremos também a regularidade da solução para esse problema. Em seguida mostraremos resultados relativos ao primeiro autovalor de um sistema do tipo $(p,q)-Laplaciano$ em $\mathbb{R}^N$.

Palavras–chave

Autovalor, convexidade, minimização, regularidade.

Abstract

Cunha, Lucas G. F.. **Diáz & Saá's Inequality and applications**. Goiânia, 2017. 94p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we will present and demonstrate the Diaz & Saá's Inequality thus like the tools used in their demonstration and we will apply the results obtained in semilinear elliptic problems with limited and not limited domains. We will present necessary and sufficient conditions to show the existence and uniqueness of solution for the following $-\Delta_p u = f(x,u)$ problem type in a limited domain. Moreover, we will also obtain regularity of solution to this problem. Next we will show results relative to the first eigenvalue of a $(p,q)-Laplacian$ system type in $\mathbb{R}^N$.

Keywords

Eigenvalue, convexity, minimization, regularity.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Como motivação para este trabalho, estudamos inicialmente o artigo de Brezis e Oswald de 1986 no qual os autores apresentam resultados sobre a existência e unicidade de solução para um problema com operador do tipo *Laplaciano*, sendo esse um caso particular do que apresentaremos nesta dissertação. Posteriormente, estudamos o artigo de Díaz-Saá de 1987, que é a principal referência desta dissertação, onde os autores apresentaram a Desigualdade que deu nome a este trabalho. Por último, vimos o trabalho de Chaïb de 2002, no qual o autor apresenta um tipode de Desigualdade de Díaz-Saá para funções com domínio em todo $\mathbb{R}^N$.

Este trabalho tem como objetivo, demonstrar e aplicar a Desigualdade de Díaz-Saá. Esse resultado será apresentado em duas versões: a primeira, em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$, que será apresentada no Capítulo 2, a segunda, em todo $\mathbb{R}^N$, será apresentada no Capítulo 3.

No caso em que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, tratado por Díaz & Saá em [9], a desigualdade supracitada é obtida devido a monotonicidade da derivada de Fréchet do funcional convexo J, definido por,

$$J(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla(w^{\frac{1}{p}})|^p dx, w \in \mathcal{D}, \\ +\infty, w \in L^1(\Omega)/\mathcal{D}, \end{cases}$$

onde,

$$\mathcal{D} = \{u \in L^1(\Omega); u \geq 0, u^{\frac{1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)\}.$$

Nesse caso, usaremos o resultado para obtermos condições necessárias e suficientes para a existência de solução para um problema envolvendo o operador $p-Laplaciano$. Já no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, a Desigualdade de Díaz-Saá é consequência da Identidade de Picone e é obtida no trabalho de Chaïb [8]. Nesse caso, aplicaremos a Desigualdade para mostrarmos que o primeiro autovalor de um sistema do tipo $(p,q)-Laplaciano$ é isolado, simples e além disso é o único autovalor associado a um par de autofunções que não mudam de sinal.

No Capítulo 2 demostraremos em detalhes a desigualdade de Díaz-Saá sobre um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com bordo regular, no sentido em que satisfaz a condição da esfera interior definida em [11], e usaremos esse resultado para garantirmos, sob certas condições, a unicidade de solução para o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1-1}$$

Mostraremos também, via minimização do funcional energia associado ao problema (1-1), a existência de solução, seguindo os mesmos passos que Hain Brezis e Luc Oswald fizeram em [7], no caso em que $p = 2$. No entanto, para o caso em que $p > 1$ é qualquer, como feito por Díaz e Saá em [9].

Uma versão particular da desigualdade de Díaz-Saá está presente nas entrelinhas da demostração da unicidade de solução para o problema análogo ao anterior com $p = 2$ feita em [7]. A demostração da unicidade que encontra-se em [7] é análoga a que faremos neste trabalho, no entanto, sem auxilio dos resultados atribuídos a Lieberman, que foram publicados em seus trabalhos [13] e [12], nos anos de 1988 e 1991, respectivamente.

Pode-se notar que nos trabalhos anteriores ao [7] o esforço realizado para demonstrar a unicidade de solução para o problema (1-1), com $p = 2$, era muito maior e as demonstrações eram baseadas no princípio do máximo e no argumento de comparação. A simplicidade na prova apresentada por Brezis e Oswald é atribuída exatamente ao fato de usarem uma versão da desigualdade de Díaz-Saá para $p = 2$. Pode ser visto também, que nesses trabalhos, a existência de solução era verificada por métodos de sub e super-solução, nesta dissertação. Além disso, nos trabalhos anteriores a [7], não havia a verificação de que as condições dadas eram necessárias e suficientes para a existência de solução, neste trabalho o leitor poderá notar que fizemos tal verificação.

No Capítulo 3 apresentaremos uma versão da desigualdade de Díaz-Saá para todo $\mathbb{R}^N$, com auxilio da desigualdade de Picone obteremos a demonstração para esse Teorema e como aplicação desse resultado obteremos teoremas que nos dizem, sob hipóteses adequadas, algumas propriedades acerca do autovalor principal associado ao seguinte sistema de equações,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda b(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta} v \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v = \lambda b(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta} u \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} v(x) = 0, \end{cases} \tag{1-2}$$

onde b satisfaz condições adequadas que apresentaremos no Capítulo 3. Esse resultado foi apresentado por Karim Chaïb em [8].

CAPÍTULO 2

Desigualdade de Díaz & Saá em domínios limitados

Neste capítulo demonstraremos a desigualdade de Días-Saá sobre um domínio limitado e apresentaremos, como aplicação desse resultado, condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de solução não negativa para a equação $-\Delta_p u = f(x,u)$. Os espaços que apresentaremos no decorrer de todo o trabalho estarão definidos nos três apêndices A, B e C.

2.1 Desigualdade de Díaz & Saá

O resultado que intitula essa seção foi apresentado em [9] por Díaz e Saá, no entanto já havia sido utilizado em seu caso particular, para $p = 2$, por Brezis e Oswald em [7]. Tendo em vista os resultados que serão apresentados no decorrer dessa seção construiremos o funcional J como segue abaixo.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto e limitado, $\mathcal{D} = \{u \in L^1(\Omega); u \geq 0, u^{\frac{1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$ e $J : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por,

$$J(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla(w^{\frac{1}{p}})|^p dx, w \in \mathcal{D}, \\ +\infty, w \in L^1(\Omega)/\mathcal{D}. \end{cases} \tag{2-1}$$

Definimos o funcional acima com o intuito de usá-lo na demonstração do próximo Teorema. Para essa finalidade devemos averiguar a convexidade de J.

Lema 2.1 *O funcional J é convexo e $J \not\equiv +\infty$.*

Demonstração. Fixado x_0 elemento de Ω, sejam $\delta = d(x_0;\partial\Omega)$, $r = \dfrac{\delta}{2}$, $\overline{B(x_0,r)} = \{x \in \Omega; |x - x_0| \leq r\}$, onde d denota a função distância $d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$.

Para $h > 0$ fixado, definamos,

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{(r-|x-x_0|)h}{r}, \ x \in \overline{B(x_0,r)}, \\ 0, x \notin \overline{B(x_0,r)}. \end{cases} \tag{2-2}$$

Primeiramente mostraremos que $J \not\equiv +\infty$. Para isso, verificaremos que $u \in \mathcal{D}$. Notemos que $u \in L^1(\Omega)$, de fato,

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|dx = \int\limits_{\overline{B(x_0,r)}} \frac{(r-|x-x_0|)h}{r} dx \ \leq \ h|\overline{B(x_0,r)}| \ < \ +\infty.$$

Como $\int\limits_{\Omega} |u|dx \ = \ \int\limits_{\Omega} |u^{\frac{1}{p}}|^p dx$, concluímos que $u^{\frac{1}{p}} \in L^p$, além disso,

$$\nabla(u^{\frac{1}{p}}) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} u^{\frac{1-p}{p}} \nabla u \ = \ \dfrac{1}{p} \left[\dfrac{(r-|x-x_0|)h}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \dfrac{(x_0-x)}{|x-x_0|} \dfrac{h}{r} \ ,x \ \in \overline{B(x_0,r)}, \\ 0 \ ,x \notin \overline{B(x_0,r)}. \end{cases}$$

Notando que o maior valor que a função u assume é h, segue que,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla(u^{\frac{1}{p}}(x))|^p dx \leq \int\limits_{\overline{B(x_0,r)}} \frac{1}{p^p} \frac{h^{2-p}}{r} dx = \frac{1}{p^p} \frac{h^{2-p}}{r} |\overline{B(x_0,r)}| < +\infty.$$

Portando,

$$u^{\frac{1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega), u \in \mathcal{D},$$

assim,

$$u \in \mathcal{D},$$

além disso,

$$J(u) \ = \ \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |\nabla(u^{\frac{1}{p}})|^p dx \ \leq \ \frac{1}{p^{p+1}} \frac{h^{2-p}}{r} |\overline{B(x_0,r)}| \ < \ \infty$$

Para mostrarmos a convexidade de J, considere w_1, w_2 em $\mathcal{D}$, tais que,

$$w_i \not\equiv 0; \ z_i = w_i^{\frac{1}{p}}, \ i \in \{1,2\}, \ z_3 = (tw_1 + (1-t)w_2)^{\frac{1}{p}}, \ t \in (0,1). \tag{2-3}$$

Em notação de produto interno,

$$\langle (t^{\frac{p-1}{p}} z_1^{p-1}, (1-t)^{\frac{p-1}{p}} z_2^{p-1}), (t^{\frac{1}{p}} |\nabla z_1|, (1-t)^{\frac{1}{p}} |\nabla z_2|) \rangle = t z_1^{p-1} |\nabla z_1| + (1-t) z_2^{p-1} |\nabla z_2|. \tag{2-4}$$

Pela desigualdade de Hölder para somas (cf. Proposição B.8)

$$
\begin{aligned}
&\langle (t^{\frac{p-1}{p}} z_1^{p-1}, (1-t)^{\frac{p-1}{p}} z_2^{p-1}), (t^{\frac{1}{p}}|\nabla z_1|, (1-t)^{\frac{1}{p}}|\nabla z_2|)\rangle \\
&\leq ((t^{\frac{p-1}{p}} z_1^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} + ((1-t)^{\frac{p-1}{p}} z_2^{p-1})^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} ((t^{\frac{1}{p}}|\nabla z_1|)^p + ((1-t)^{\frac{1}{p}}|\nabla z_2|)^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (tz_1^p + (1-t)z_2^p)^{\frac{p-1}{p}} (t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

assim, por (2-4), e notando também que,

$$
z_3 = (tz_1^p + (1-t)z_2^p)^{\frac{1}{p}},\ t \in (0,1),
$$

temos,

$$
\begin{aligned}
tz_1^{p-1}|\nabla z_1| + (1-t)z_2^{p-1}|\nabla z_2| \quad &\leq \quad (tz_1^p + (1-t)z_2^p)^{\frac{p-1}{p}} (t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \quad z_3^{p-1}(t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
\tag{2-5}
$$

com isso,

$$
\nabla z_3 = z_3^{1-p}(tz_1^{p-1}\nabla z_1 + (1-t)z_2^{p-1}\nabla z_2),
$$

colocando ∇z_3 em módulo e multiplicando por z_3^{p-1}, obtemos,

$$
z_3^{p-1}|\nabla z_3| = |tz_1^{p-1}\nabla z_1 + (1-t)z_2^{p-1}\nabla z_2| \leq tz_1^{p-1}|\nabla z_1| + (1-t)z_2^{p-1}|\nabla z_2|. \tag{2-6}
$$

A parcela que aparece do lado direito da Desigualdade 2-6 é exatamente a que aparece do lado esquerdo de (2-5), assim,

$$
z_3^{p-1}|\nabla z_3| \leq z_3^{p-1}(t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}},
$$

ou seja,

$$
|\nabla z_3| \leq (t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}}.
$$

Ou, em outras palavras,

$$
|\nabla(tz_1^p + (1-t)z_2^p)^{\frac{1}{p}}| \leq (t|\nabla z_1|^p + (1-t)|\nabla z_2|^p)^{\frac{1}{p}}.
$$

Elevando à p e integrando, obtemos,

$$
\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(tz_1^p + (1-t)z_2^p)^{\frac{1}{p}}|^p dx \leq \frac{t}{p}\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p dx\right) + \frac{(1-t)}{p}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla z_2|^p dx\right).
$$

Em outras palavras, pela definição dada em (2-3), concluímos que,

$$J(tw_1 + (1-t)w_2) \leq tJ(w_1) + (1-t)J(w_2).$$

Pela Definição 12 do Apêndice B , concluímos que de fato J é convexo. $\square$

O próximo resultado que demonstraremos é um dos principais resultados apresentados nesse trabalho. Existe uma generalização desse resultado onde Ω é todo o $\mathbb{R}^N$, mas por enquanto, nos contentaremos apenas com o caso em que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$. A extensão será apresentada no Capítulo 3. No Teorema 2.2 abaixo, o conjunto $\mathcal{D}$ que é mencionado no enunciado é o mesmo da definição do funcional J que precede o Lema 2.1.

Teorema 2.2 ***(Desigualdade de Díaz-Saá)*** *Sejam w_1, w_2 pertencentes a $L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{D}$, além disso suponhamos que $w_1 = w_2$ sobre $\partial\Omega$. Se, para $i \neq j$, tivermos $\dfrac{w_i}{w_j} \in L^\infty(\Omega)$, então,*

$$\int_\Omega |\nabla(w_1^{\frac{1}{p}})|^{p-2}\nabla(w_1^{\frac{1}{p}})\nabla(w_1^{\frac{1-p}{p}}(w_1 - w_2))dx - \int_\Omega |\nabla(w_2^{\frac{1}{p}})|^{p-2}\nabla(w_2^{\frac{1}{p}})\nabla(w_2^{\frac{1-p}{p}}(w_1 - w_2))dx \geq 0. \tag{2-7}$$

Demonstração. Note que, se u é uma função que satisfaz as hipóteses deste Teorema, podemos mostrar que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. De fato, seja,

$$w = u^{\frac{1}{p}} \Rightarrow w^p = u \ \in L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Como u é elemento de $\mathcal{D}$,

$$\nabla u = \nabla(w^p) = pw^{p-1}\nabla w \in L^p(\Omega),$$

em particular, ∇u está bem definida e pertence a $L^p(\Omega)$ que está imerso em $L^1(\Omega)$, pois $|\Omega| < \infty$.

Sejam $u, v \in \mathcal{D}$ e $J : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional definido em (2-1), assim,

$$J'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{|\nabla((u+tv)^{\frac{1}{p}})|^p - |\nabla(u^{\frac{1}{p}})|^p}{t} dx.$$

Seja $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, definido por, $g(t) = |\nabla((u+tv)^{\frac{1}{p}})|^p = \left| \dfrac{1}{p}(u+tv)^{\frac{1-p}{p}}(\nabla u + t\nabla v) \right|^p$.

Note que,

$$\begin{aligned} g'(t) = \quad & p \quad \left|\frac{1}{p}(u+tv)^{\frac{1-p}{p}}(\nabla u+t\nabla v)\right|^{p-2}\left(\frac{1}{p}(u+tv)^{\frac{1-p}{p}}(\nabla u+t\nabla v)\right) \\ & \frac{1}{p} \quad \left(\frac{1-p}{p}(u+tv)^{\frac{1-2p}{p}}v(\nabla u+t\nabla v)+\frac{1}{p}(u+tv)^{\frac{1-p}{p}}\nabla v\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$g'(0) = p\left|\frac{1}{p}u^{\frac{1-p}{p}}\nabla u\right|^{p-2}\left(\frac{1}{p}u^{\frac{1-p}{p}}\nabla u\right)\frac{1}{p}\left(\frac{1-p}{p}u^{\frac{1-2p}{p}}v\nabla u+\frac{1}{p}u^{\frac{1-p}{p}}\nabla v\right). \tag{2-8}$$

Por outro lado,

$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|\nabla((u+tv)^{\frac{1}{p}})|^p-|\nabla(u^{\frac{1}{p}})|^p}{t}.$$

Pelo teorema do valor médio de Lagrange,

$$\exists\, \theta\in\mathbb{R},\ |\theta|<|t|;\ g'(\theta) = \frac{|\nabla((u+tv)^{\frac{1}{p}})|^p-|\nabla(u^{\frac{1}{p}})|^p}{t},$$

logo,

$$\begin{aligned} g'(\theta) \quad = \quad & p\left|\frac{1}{p}(u+\theta v)^{\frac{1-p}{p}}(\nabla u+\theta\nabla v)\right|^{p-2}\left(\frac{1}{p}(u+\theta v)^{\frac{1-p}{p}}(\nabla u+\theta\nabla v)\right) \\ & \frac{1}{p}\left(\frac{1-p}{p}(u+\theta v)^{\frac{1-2p}{p}}v(\nabla u+\theta\nabla v)+(u+\theta v)^{\frac{1-p}{p}}\nabla v\right). \end{aligned} \tag{2-9}$$

Com isso, colocando o lado direito da Igualdade 2-9 em módulo obtemos a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned} g'(\theta) \quad \leq \quad & \left|\frac{1}{p}(u+\theta v)^{\frac{1-p}{p}}(\nabla u+\theta\nabla v)\right|^{p-1} \\ & \left|\frac{1-p}{p}(u+\theta v)^{\frac{1-2p}{p}}v(\nabla u+\theta\nabla v)+(u+\theta v)^{\frac{1-p}{p}}\nabla v\right| \\ = \quad & \left|\frac{1}{p}(u+\theta v)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{(u+\theta v)}(\nabla u+\theta\nabla v)\right|^{p-1} \\ & \left|\frac{1-p}{p}(u+\theta v)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{(u+\theta v)^2}v(\nabla u+\theta\nabla v)+(u+\theta v)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{(u+\theta v)}\nabla v\right|, \end{aligned}$$

e, aplicando a desigualdade triangular, obtemos,

$$\begin{aligned} g'(\theta) &\leq \left(\frac{1}{p}|u+\theta v|^{\frac{1}{p}}\frac{1}{|u+\theta v|}(|\nabla u|+\theta|\nabla v|)\right)^{p-1} \\ & \frac{p-1}{p}\left(|u+\theta v|^{\frac{1}{p}}\frac{1}{|u+\theta v|^2}|v|(|\nabla u|+\theta|\nabla v|)+|u+\theta v|^{\frac{1}{p}}\frac{1}{|u+\theta v|}|\nabla v|\right). \end{aligned}$$

Assim, lembrando que $\theta \in (0,1)$ e que $u, v \geq 0$, segue que,

$$\begin{aligned} g'(\theta) &\leq \left(\frac{1}{p}|u+v|^{\frac{1}{p}}\frac{1}{|u|}(|\nabla u|+|\nabla v|)\right)^{p-1} \\ & \frac{p-1}{p}\left(|u+v|^{\frac{1}{p}}\frac{1}{|u|^2}|v|(|\nabla u|+|\nabla v|)+|u+v|^{\frac{1}{p}}\frac{1}{|u|}(|\nabla v|+|\nabla u|)\right), \end{aligned}$$

de onde, aplicando a distributividade do produto, temos,

$$g'(\theta) \leq \frac{p-1}{p^p}\left(\frac{|v|}{|u|}+1\right)|u+v|\left(\frac{1}{|u|}\right)^p(|\nabla u|+|\nabla v|)^p.$$

Usando a hipótese de que $\dfrac{u}{v} \in L^\infty(\Omega)$, existe uma constante C que depende de u, v e de p, tal que,

$$g'(\theta) \leq C(|u|+|v|)\left(\frac{1}{|u|}\right)^p C_p(|\nabla u|^p+|\nabla v|^p),$$

e, desse modo,

$$g'(\theta) \leq C\left(1+\left\|\frac{u}{v}\right\|_\infty\right)[|u|^{1-p}|\nabla u|^p+|u|^{1-p}|\nabla v|^p].$$

Como, por hipótese, $u \in L^\infty(\Omega), \nabla u$ e ∇v pertencem a $L^p(\Omega)$, como foi mostrado no começo da demonstração. Concluímos que o lado direito da desigualdade acima é um elemento de $L^1(\Omega)$. Tendo isso em mãos e usando o teorema da convergência dominada, temos,

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega g'(0)dx.$$

Notando que,

$$\nabla(u^{\frac{1-p}{p}}v) = \frac{1-p}{p}u^{\frac{1-2p}{p}}v\nabla u + u^{\frac{1-p}{p}}\nabla v,$$

e,

$$\nabla u^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} u^{\frac{1-p}{p}} \nabla u,$$

por (2-8), obtemos,

$$J'(u)v = \int_{\Omega} g'(0)dx = \int_{\Omega} |\nabla(u^{\frac{1}{p}})|^{p-2} \nabla u^{\frac{1}{p}} \nabla(u^{\frac{1-p}{p}} v)dx.$$

Mostramos no Lema 2.1 que J é convexo, portanto, pela reflexividade do espaço $W^{1,p}(\Omega)$, concluímos (2-7) através da Proposição B.2. □

Embora tenhamos feito a demonstração usando a convexidade do funcional J, como em [9] por Díaz e Saá, poderíamos ter utilizado a identidade de Picone em domínios limitados, semelhante ao que foi feito em [8] por Chaïb. No próximo capítulo, usaremos a identidade de Picone para demonstrar uma versão da Desigualdade de Díaz-Saá em $\mathbb{R}^N$. Esta ferramenta foi utilizada por Karin Chaïb em [8] e vem sendo muito utilizada até os dias atuais.

2.2 Um problema do tipo p-Laplaciano

Em seguida, como aplicação dos resultados anteriores, mostraremos a unicidade e daremos condições necessárias e suficientes para a existência de solução para o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0, \ u \not\equiv 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2-10}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com bordo $\partial\Omega$ regular. O caso particular desse problema, com o operador laplaciano $(p = 2)$, foi estudado por Hain Brezis e Luc Oswald em [7]. No caso geral, que acabamos de enunciar, usaremos a mesma estratégia utilizada em [7] para minimizar o funcional energia associado ao Problema (2-10) e sujeito as seguintes condições,

(i) $t \mapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,\infty)$. Além disso, $\forall t \in [0,\infty)$, $x \mapsto f(x,t) \in L^\infty(\Omega)$, $q.t.p\, x \in \Omega$;

(ii) A função, $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ é decrescente em $(0,\infty)$, $q.t.p.\ x \in \Omega$;

(iii) $\exists\, C>0;\ f(x,t)\le C(t^{p-1}+1),\ \forall t\in[0,\infty),\ q.t.p.\ x\in\Omega.$

Uma solução para o problema (2-10) é uma função $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ que satisfaz o problema, ou seja, $u\ge 0, u\not\equiv 0$ e

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx-\int_\Omega f(x,u)v dx=0,\ \forall\, v\in w_0^{1,p}(\Omega). \tag{2-11}$$

Desse modo, se u é solução de (2-10), usando (i), (ii) e (iii), pode-se mostrar que $f(\cdot,u(\cdot))\in L^\infty(\Omega)$. De fato,

$$\frac{f(x,u)}{u^{p-1}}\ge\frac{f(x,\|u\|_\infty)}{\|u\|_\infty{}^{p-1}}\ge-\frac{\|f(\cdot,\|u\|_\infty)\|_\infty}{\|u\|_\infty{}^{p-1}}=-M_u,$$

com isso,

$$f(x,u)\ge-\|f(\cdot,\|u\|_\infty)\|_\infty\frac{u^{p-1}}{\|u\|_\infty^{p-1}}\ge-\|f(\cdot,\|u\|_\infty)\|_\infty. \tag{2-12}$$

Por outro lado,

$$f(x,u)\le C(u^{p-1}+1)\le C(\|u\|_\infty^{p-1}+1),\quad\forall x\in\Omega.$$

Com isso em mãos, concluímos que $f(\cdot,u(\cdot))\in L^\infty(\Omega)$. Sendo u solução de (2-10) concluímos também que $\Delta_p u(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$. Tal conclusão é sutilmente importante na demostração do próximo teorema porque com ela em mente e notando que Ω é um domínio limitado podemos concluir que $\Delta_p u(\cdot)\in L^2(\Omega)$ e essa é uma das hipóteses do Teorema C.13 devido a Vázquez. Igualmente importante para a aplicação desse resultado é a propriedade $u\ge 0$ em Ω que toda solução para o problema (2-10) satisfaz.

Teorema 2.3 *O problema (2-10) possui no máximo uma solução.*

Demonstração. Sejam u,v soluções de (2-10). Pelo Teorema C.14, devido a Lieberman, temos que $u,v\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Note nesse ponto que para aplicarmos o Teorema C.14, é crucial termos de antemão que $u,v\in L^\infty(\Omega)$, o que acontece pois são ambas soluções de (2-10). Por (2-12), temos,

$$\begin{aligned} f(x,u)\ge -M_u u^{p-1} &\Rightarrow\ -\Delta_p u\ge -M_u u^{p-1}\\ &\Rightarrow\ L(u):=-\Delta_p u+M_u u^{p-1}\ge 0, \end{aligned} \tag{2-13}$$

desse modo, L é um operador elíptico não negativo. Definindo $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $\beta(s)=M_u s^{p-1}$, temos que,

$$\beta(s)s=M_u s^p,$$

com isso,

$$\int_0^1 (\beta(s)s)^{-\frac{1}{p}} ds = +\infty. \tag{2-14}$$

Assim, pelo Teorema C.13, devido a Vazques, concluímos que, para qualquer que seja x_0 em $\partial\Omega$ e η o normal exterior à Ω em x_0,

$$u(x), v(x) > 0 \ \ \forall x \in \Omega \ \text{ e } \ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0), \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) > 0. \tag{2-15}$$

Em sequência, mostraremos que $\frac{u}{v}, \frac{v}{u} \in L^\infty(\Omega)$. De fato, seja $\delta > 0$, definamos o conjunto,

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) < \delta\}, \ \text{ onde } \ d(x, \partial\Omega) = \inf\{|x-y|; y \in \partial\Omega\}.$$

Note que, podemos escolher δ de modo que,

$$\Omega \setminus \Omega_\delta = \{x \in \Omega; x \notin \Omega_\delta\} \neq \emptyset.$$

Com a regularidade garantida pelo Teorema C.14, podemos aplicar o Teorema de Weierstrass e obtermos a existência de x em $\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$ de modo que,

$$v(x) = v_\delta := \min\{v(x); x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}\},$$

e, além disso, pelo Princípio do Máximo (cf Teorema C.13) sabemos que v_δ é positivo. Desse modo,

$$0 < \frac{u}{v} < \frac{\|u\|_\infty}{v_\delta},$$

com isso,

$$\frac{u}{v} \in L^\infty(\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}). \tag{2-16}$$

Analogamente, mostra-se que,

$$\frac{v}{u} \in L^\infty(\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}). \tag{2-17}$$

Sejam r uma reta que possui o ponto x_0 com direção η e $x_1 \in r \cap \Omega_\delta$. Considere a seguinte parametrização: $\gamma(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$. Assim, usando a regra de L'Hôspital juntamente com (2-15) obtemos,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{u(\gamma(t))}{v(\gamma(t))}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial t}}{\frac{\partial v(\gamma(t))}{\partial t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\gamma'(t)\nabla u(\gamma(t))}{\gamma'(t)\nabla v(\gamma(t))}=\frac{\frac{\partial u(x_0)}{\partial \eta}}{\frac{\partial v(x_0)}{\partial \eta}}<+\infty.$$

Note que aplicar a regra de L'Hospital foi possível pois tanto o numerador quanto o denominador da fração tendem a zero quando t tende a zero. Portando

$$\frac{u}{v}\in L^\infty(\Omega_\delta),\ \ \text{analogamente}\ \ \frac{v}{u}\in L^\infty(\Omega_\delta),$$

com isso, pelo que foi obtido em (2-16) e (2-17), obtemos,

$$\frac{u}{v},\frac{v}{u}\in L^\infty(\Omega).$$

Note ainda que, $\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\in W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $u-v\left(\frac{v}{u}\right)^{p-1}\in W_0^{1,p}(\Omega)$ já que $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\frac{u}{v}\in L^\infty(\Omega)$, assim,

$$\left\langle -\Delta_p u,\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right\rangle=\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\left(\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right)dx=\int_\Omega f(x,u)\left(\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right)dx. \quad (2\text{-}18)$$

Analogamente,

$$\left\langle -\Delta_p v,\frac{u^p-v^p}{v^{p-1}}\right\rangle=\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\left(\frac{u^p-v^p}{v^{p-1}}\right)dx=\int_\Omega f(x,v)\left(\frac{u^p-v^p}{v^{p-1}}\right)dx. \quad (2\text{-}19)$$

Com (2-18) e (2-19) em mãos, definamos,

$$\Omega_+=\{x\in\Omega; u(x)>v(x)\},\ \ \Omega_-=\{x\in\Omega; u(x)<v(x)\},$$

e observemos que,

$$\int_\Omega f(x,v)\left(\frac{u^p-v^p}{v^{p-1}}\right)dx=\int_{\Omega_+} f(x,v)\left(\frac{u^p-v^p}{v^{p-1}}\right)dx+\int_{\Omega_-} f(x,v)\left(\frac{u^p-v^p}{v^{p-1}}\right)dx \quad (2\text{-}20)$$

e

$$\int_\Omega f(x,u)\left(\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right)dx=\int_{\Omega_+} f(x,u)\left(\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right)dx+\int_{\Omega_-} f(x,u)\left(\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right)dx. \quad (2\text{-}21)$$

Note também que, por (ii),

$$\int_{\Omega_+} \left(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}} \right) (u^p - v^p)dx < 0$$
$$\int_{\Omega_-} \left(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x,v)}{v^{p-1}} \right) (u^p - v^p)dx < 0.$$

Desse modo, subtraindo (2-19) de (2-18) e usando (2-20) e (2-21) concluímos que, se $u \neq v$, então,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{v^{p-1}} \right) dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right) dx < 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.2, temos que,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{v^{p-1}} \right) dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}} \right) dx \geq 0.$$

O que é uma contradição. Portanto $u = v$, em outras palavras, a solução de (2-10), quando existe, é única.

□

O próximo resultado garante a existência de solução para o problema (2-10). A demonstração da recíproca desse resultado, será feita via minimização do funcional energia associado ao problema (2-10). Mostraremos que esse funcional é coercivo, fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, com isso em mãos, aplicaremos a Proposição B.7, como foi feito em [7] por Brezis e Oswald, para o caso em que $p = 2$. Assim, garantiremos a existência de um ponto de mínimo global u para o funcional energia associado ao problema (2-10), que por sua vez é um ponto crítico, portanto candidato ser uma solução para o problema (2-10). Posteriormente, mostraremos que u é não negativo usando um resultado de [18] (Teorema C.13). Além disso truncaremos a função f e assim, garantiremos que a função u pertence ao espaço $L^\infty(\Omega)$. Quanto a regularidade da solução, usaremos um resultado de [12] que pode ser visto no Apêndice C (Teorema C.14).

Teorema 2.4 *O problema (2-10) possui solução se, e somente se,*

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v) < 0 < \lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty|v|^{p-2}v) \tag{2-22}$$

onde,

$$a_0(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}, \quad a_\infty(x) = \lim_{t\uparrow\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}},$$

e

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a|v|^{p-2}v) = \inf_{\|v\|_p=1} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^p dx - \int_{v\neq 0} a|v|^p dx; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Observação 1 *Existem casos em que $\lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v)$ é identicamente $-\infty$. Como exemplo, basta considerarmos o caso em que,*

$$f(x,t) = t^\sigma \ \textit{onde} \ \sigma < p-1.$$

Nesse caso f satisfaz as condições (iv), (v) e (vi) que apresentaremos em um momento oportuno no decorrer do texto e a condição (iii) com qual já estamos familiarizados. Além disso,

$$\begin{aligned} a_0(x) &= \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \\ &= \liminf_{t\downarrow 0} \frac{1}{t^{p-1-\sigma}} = +\infty \ \textit{pois} \ \sigma < p-1, \end{aligned}$$

com isso, vemos que $a_0(x) = +\infty$ para todo x em Ω. Assim, pela definição de $\lambda_1(-\Delta_p v - a|v|^{p-2}v)$ dada no enunciado do Teorema 2.4 é possível notar que $\lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v) = -\infty$.

Dividiremos a demonstração do Teorema 2.4 em alguns lemas, como segue.

Lema 2.5 *Se u é solução de (2-10), então,*

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v) < 0 < \lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty|v|^{p-2}v).$$

Demonstração. Seja u solução de (2-10). Pelo Princípio do Máximo (cf. Teorema C.13) concluímos na demonstração do Teorema 2.3 que, $u > 0$ em Ω $(u = |u|)$ e, pela condição (ii), temos que,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = f(x,u) \quad &\Rightarrow \quad \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} = \frac{f(x,u)}{u^{p-1}} < a_0 \\ &\Rightarrow \quad -\Delta_p u u < a_0 u^p \\ &\Rightarrow \quad \int_\Omega |\nabla u|^p dx - a_0 \int_\Omega |u|^p dx < 0. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de λ_1,

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v) \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega a_0|u|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx} < 0. \tag{2-23}$$

Afim de mostrarmos que $\lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty|v|^{p-2}v) > 0$, definamos

$$a(x) = \frac{f(x, \|u\|_\infty + 1)}{(\|u\|_\infty + 1)^{p-1}},$$

e, $\mu = \lambda_1(-\Delta_p v - a|v|^{p-2}v)$. Usando a teoria de minimização em esferas, pode-se mostrar (cf. Teorema C.12) que existe ψ tal que,

$$\begin{cases} -\Delta_p \psi - a\psi^{p-1} = \mu\psi^{p-1} \text{ em } \Omega, \\ \psi > 0 \text{ em } \Omega, \\ \psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2-24}$$

Dado $k > 0$ constante, por mera substituição é possível ver que $k\psi$ também é solução de (2-24), pois a constante se cancela. Seja $\Omega_k = \{x \in \Omega; k\psi(x) > u(x)\}$, desse modo,

$$0 \leq \int_{\Omega_k} \left(\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{\Delta_p(k\psi)}{(k\psi)^{p-1}} \right) (u^p - (k\psi)^p) dx = \int_{\Omega_k} \left(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - (a(x) + \mu) \right) (u^p - (k\psi)^p) dx,$$

ou seja,

$$0 \leq \int_{\Omega_k} \left(\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - (a(x) + \mu) \right) (u^p - (k\psi)^p) dx. \tag{2-25}$$

A desigualdade acima é consequência do Teorema 2.2, por outro lado, note que para k suficientemente grande $u^p(x) - (k\psi)^p(x) < 0$, $q.t.p\ x \in \Omega$, pois u é limitada já que é solução para o problema (2-10), com isso, por (2-25),

$$\frac{f(x,u)}{u^{p-1}} \leq a(x) + \mu = \frac{f(x, \|u\|_\infty + 1)}{(\|u\|_\infty + 1)^{p-1}} + \mu.$$

Como $\|u\|_\infty \geq u(x)\ \forall\, x \in\ \Omega$, a condição (ii) acarreta em,

$$\mu \geq \frac{f(x,u)}{u^{p-1}} - \frac{f(x, \|u\|_\infty + 1)}{(\|u\|_\infty + 1)^{p-1}} > 0.$$

Desse modo,

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty |v|^{p-2} v) \geq \mu > 0. \tag{2-26}$$

Portanto, concluímos de (2-23) e (2-26) que se u é solução de (2-10), então,

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_0 |v|^{p-2} v) < 0 < \lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty |v|^{p-2} v).$$

□

Consideremos, agora, o funcional energia $E : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado ao problema (2-10), definido por,

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(x,u) dx, \tag{2-27}$$

onde $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função potencial definida por,

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s) ds, \tag{2-28}$$

estenderemos f de forma natural como $f(x,t) = f(x,0)$, para qualquer que seja $t < 0$.

Para mostrarmos a recíproca do Teorema 2.4 enfraqueceremos as condições (ii) e (i), substituindo-as pelas três condições seguintes, e manteremos a condição (iii).

(iv) A função $t \mapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,+\infty)$, $q.t.p.\ x \in \Omega$;

(v) Dado $\delta > 0$ $\exists\, C_\delta \geq 0$, tal que, $f(x,t) \geq -C_\delta t^{p-1}$ $\forall\, t \in [0,\delta]$, $q.t.p.\ x \in \Omega$;

(vi) Para cada $t \geq 0$ a função $x \mapsto f(x,t)$ pertence a $L^\infty(\Omega)$.

Além disso definamos,

$$a_0(x) = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}, \quad a_\infty(x) = \limsup_{t \uparrow +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}. \tag{2-29}$$

Lema 2.6 *Existe $C > 0$ tal que $a_0 > -C$ e $a_\infty < C$.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$, por (v) existe $C_\delta > 0$ tal que, para $t \in [0,\delta]$,

$$f(x,t) \geq -C_\delta t^{p-1},$$

ou seja,

$$\frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \geq -C_\delta \Rightarrow \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \geq -C_\delta,$$

por outro lado, por (iii) exite $C_0 > 0$ tal que,

$$f(x,t) \leq C_0(t^{p-1}+1) \Rightarrow \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \leq C_0 + \frac{1}{t^{p-1}}$$
$$\Rightarrow \limsup_{t\uparrow+\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \leq \limsup_{t\uparrow+\infty} \left(C_0 + \frac{1}{t^{p-1}}\right) = C_0.$$

Tomando $C = \max\{C_0, C_\delta\}$, assim, $a_0 > -C,\ a_\infty < C$ como queríamos demonstrar. □

Para concluírmos a demonstração do Teorema 2.4 mostraremos que o funcional E possui mínimo não nulo em $W_0^{1,p}(\Omega)$ através da Proposição B.7, como havíamos mencionado anteriormente. Consideraremos a notação $\|\cdot\|$ para representar a norma usual de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, sem perda de generalidade, todas as constantes que aparecerem nas demonstrações, deste momento em diante, serão representadas pelo símbolo C, apenas por simplicidade.

Lema 2.7 *E é coercivo.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, $\|u_n\| \to +\infty$ mas $E(u_n) \leq C$ para todo n natural, onde C é um número real. Assim,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx < C,$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx < C + \int_\Omega F(x,u_n)dx. \tag{2-30}$$

Se $u_n(x) \geq 0$, então por (iii), temos,

$$F(x,u_n) = \int_0^{u_n} f(x,t)dt \leq \int_0^{u_n} C(1+t^{p-1})dt = C\left(u_n + \frac{u_n^p}{p}\right) \leq C\left(|u_n| + \frac{u_n^p}{p}\right).$$

Se $u_n(x) < 0$, então,

$$F(x,u_n) = f(x,0)\int_0^{u_n} dt \leq f(x,0)|u_n| \leq C\left(|u_n| + \frac{|u_n|^p}{p}\right).$$

Em todo caso, obtemos,

$$\int_\Omega F(x,u_n)dx \leq C\int_\Omega |u_n|dx + C\int_\Omega |u_n|^p dx. \tag{2-31}$$

Sejam, $\Omega_+ = \{x \in \Omega; u_n(x) \geq 1\}$, $\Omega_- = \{x \in \Omega; u_n(x) < 1\}$, assim, $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ e $\emptyset = \Omega_+ \cap \Omega_-$. Trabalhando na primeira integral a direita da desigualdade em (2-31). Obtemos,

$$\begin{aligned} C\int_\Omega |u_n|dx = C\int_{\Omega_+ \bigcup \Omega_-} |u_n|dx = C\int_{\Omega_+} |u_n|dx + C\int_{\Omega_-} |u_n|dx \leq C\int_{\Omega_+} |u_n|^p dx + C\int_{\Omega_-} 1dx \\ \leq C\int_{\Omega_+} (|u_n|^p + 1)\,dx + C\int_{\Omega_-} (|u_n|^p + 1)\,dx = C\int_\Omega (|u_n|^p + 1)\,dx. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$C\int_\Omega |u_n|dx \leq C\int_\Omega (|u_n|^p + 1)\,dx. \tag{2-32}$$

Da segunda integral a direita da igualdade em (2-31) temos,

$$C\int_\Omega |u_n|^p dx \leq C\int_\Omega (|u_n|^p + 1)\,dx. \tag{2-33}$$

Substituindo (2-32) e (2-33) em (2-31), obtemos,

$$F(x,u_n) \leq C\int_\Omega (|u_n|^p + 1)\,dx.$$

Adicionando essa informação à (2-30),

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq C + C\int_\Omega (|u_n|^p + 1)\,dx. \tag{2-34}$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{p}\|u_n\| \leq C + C\|u_n\|_p^p + C|\Omega|.$$

Como $\|u_n\| \to +\infty$, da desigualdade anterior segue que,

$$\|u_n\|_p \to +\infty. \tag{2-35}$$

Multiplicando (2-34) por $\dfrac{1}{\|u_n\|_p^p}$, obtemos,

$$\frac{1}{\|u_n\|_p^p}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right) \leq \frac{1}{\|u_n\|_p^p}C + \frac{1}{\|u_n\|_p^p}\left(C\int_\Omega (|u_n|^p+1)\,dx\right),$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_p}\right)\right|^p dx \leq \frac{1}{\|u_n\|_p^p}C + C + C\frac{|\Omega|}{\|u_n\|_p^p}. \tag{2-36}$$

De (2-35), podemos concluir que, o lado esquerdo da desigualdade em (2-36) é limitado.

Sejam, $t_n = \|u_n\|_p, v_n = \dfrac{u_n}{t_n}$. Assim, pelo que fizemos acima, temos,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v_n|^p dx \leq C.$$

Em outras palavras, $\|v_n\| \leq C$ para alguma constante C, ou seja, a sequência (v_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, a menos de uma subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e por imersões de Sobolev $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$. Além disso, $\|v_n\|_p = 1$ qualquer que seja n e isso garante que $\|v\|_p = 1$. Assim, $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$ e $\|v\|_p = 1$. Sejam, $v_n^+ = max\{v_n, 0\}$, $v_n^- = min\{v_n, 0\}$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,t_nv_n)dx &= \int_\Omega F(x,t_nv_n^+)dx + \int_\Omega F(x,t_nv_n^-)dx \\ &= \int_{[v>0]} F(x,t_nv_n^+)dx + \int_{[v\leq 0]} F(x,t_nv_n^+)dx + \int_\Omega F(x,t_nv_n^-)dx.\end{aligned} \tag{2-37}$$

Da segunda integral em (2-37), lembrando que $v_n^+(x) \geq 0$ qualquer que seja $x \in \Omega$ e usando o fato que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$, temos que,

$$\int_{[v\leq 0]} F(x,t_nv_n^+)dx \leq C\int_{[v\leq 0]} (t_n^p(v_n^+)^p + 1)dx \to C\int_{[v\leq 0]} 1dx.$$

Para n suficientemente grande,

$$\int_{[v\leq 0]} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n{}^p}dx \leq \frac{C}{t_n^p}\int_{[v\leq 0]} 1dx = o(1). \tag{2-38}$$

Da terceira integral em (2-37) e usando a condição (vi),

$$\begin{aligned} F(x,t_nv_n^-) = \int_0^{t_nv_n^-} f(x,t)dt &\leq \left| \int_0^{t_nv_n^-} f(x,0)dt \right| \\ &\leq \|f(x,0)\|_\infty t_n|v_n^-| \\ &\leq \|f(x,0)\|_\infty t_n|v_n|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega F(x,t_nv_n^-)dx \leq \|f(x,0)\|_\infty \int_\Omega t_n|v_n|dx.$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{t_n^p}$,

$$\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n^-)}{t_n^p}dx \leq \|f(x,0)\|_\infty \int_\Omega \frac{|v_n|}{t_n{}^{p-1}}dx = o(1). \tag{2-39}$$

Da primeira integral em (2-37), usando a regra de L'Hôspital,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^p} \leq \frac{1}{p}a_\infty(x)\ q.t.p. \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{(t_nv_n^+)^p} \leq \frac{1}{p}a_\infty(x).$$

Assim,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n{}^p} \leq \frac{1}{p}a_\infty v^p. \tag{2-40}$$

Por outro lado, usando a condição (iii),

$$\begin{aligned} \frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n{}^p} &\leq \frac{C}{t_n^p}\left(\frac{1}{p}(t_nv_n)^p + \left|t_nv_n^+\right|\right) \\ &= C\left[\frac{1}{p}(v_n)^p + \frac{|v_n^+|}{t_n^{p-1}}\right] \\ &\leq C\left[(v_n)^p + \frac{v_n^+}{t_n^{p-1}}\right] \\ &= C\left[(v_n)^p + \frac{u_n^+}{t_n^p}\right]. \end{aligned}$$

Como $v_n \to v$, em $L^p(\Omega)$, por imersões de Sobolev (Teorema C.2). Podemos tomar uma função h em $L^p(\Omega)$, tal que a menos de subsequência $\dfrac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^p} \leq h(x)\ q.t.p.$ Assim, por (2-40) e aplicando o Lema de Fatou, obtemos,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{[v>0]}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^p}dx\leq\int_{[v>0]}\limsup_{n\to+\infty}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^p}dx\leq\frac{1}{p}\int_{[v>0]}a_\infty v^p dx. \tag{2-41}$$

Combinando (2-38), (2-39) e (2-41), obtemos,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{t_n^p}dx\leq\frac{1}{p}\int_{[v>0]}a_\infty v^p dx. \tag{2-42}$$

Multiplicando (2-30) por $\frac{1}{t_n^p}$, chegamos na seguinte expressão,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla v_n|^p dx\leq\frac{C}{t_n^p}+\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{t_n^p}dx.$$

Passando ao $\limsup$,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla v|^p dx\leq\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla v_n|^p dx\leq\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega\frac{F(x,u_n)dx}{t_n^p}dx.$$

Juntando isso com o que foi obtido em (2-42),

$$\int_\Omega|\nabla v|^p dx\leq\int_{[v>0]}a_\infty v^p dx. \tag{2-43}$$

Definamos,

$$\alpha=\inf_{\phi\in W_0^{1,p}(\Omega)}\left\{\int_\Omega|\nabla\phi|^p dx-\int_{[\phi\neq 0]}a_\infty\phi^p dx;\ \|\phi\|_p=1\right\}.$$

Note que,

$$0\geq\int_\Omega|\nabla v|^p dx-\int_{[v\neq 0]}a_\infty v^p dx\geq\alpha 1=\alpha\|v^+\|_p^p. \tag{2-44}$$

De (2-43) e (2-44), concluímos que $v^+\equiv 0$. Substituindo essa informação em (2-43) concluímos que,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla v|^p dx\leq 0\Rightarrow\int_\Omega|\nabla v|^p dx=0\Rightarrow v=0.$$

O que é uma contradição, pois concluímos anteriormente que $\|v\|_p = 1$. A contradição surgiu em supormos que J não é coercivo, portanto concluímos que J é de fato coercivo. □

A demonstração que demos para o Lema 2.7 foi feita de modo análoga para o caso em que $p = 2$ em [7].

Observação 2 *É importante ressaltar que pela condição de crescimento de f dada em (iii) temos também uma condição de crescimento sobre a função potencial dada por,*

$$F(x,t) \leq C(t^p + t)\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

onde $C > 0$ é a mesma constante dada na condição de crescimento de f.

Lema 2.8 *E é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Pela Observação 2 $F(x,u_n) \leq C({u_n}^p + u_n)$. Assim, pelas imersões de Sobolev e por $W_0^{1,p}(\Omega)$ ser um espaço reflexivo, a menos de uma subsequência, $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Portanto existe uma função integrável h tal que $C({u_n}^p(x) + u_n(x)) \leq h(x)\ q.t.p.\ x \in \Omega$. Desse modo, o funcional E é dominado por uma função integrável e sendo assim, vale o Lema de Fatou para o $\limsup$, ou seja,

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx \leq \int_\Omega F(x,u)dx. \tag{2-45}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) &= \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \right) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \liminf_{n\to+\infty} \left(-\int_\Omega F(x,u_n)dx \right) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx.
\end{aligned}$$

Usando a semicontinuidade inferior da norma, e aplicando (2-45), obtemos,

$$\liminf_{n\to+\infty} E(u_n) \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(x,u)dx = E(u),$$

isto é, o funcional E é sequencialmente semicontínuo inferiormente com respeito a topologia fraca de $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Pelo Teorema B.7, os dois lemas anteriores juntos garantem a existência de um ponto u de mínimo global para E, que é também um ponto crítico de E. O próximo Lema vai garantir que esse ponto crítico se realiza em um nível de energia não nulo e isto nos diz que $u \not\equiv 0$, já que, $E(0) = 0$.

Lema 2.9 *Existe* φ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $E(\varphi) < 0$.

Demonstração. Fixemos $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dx - \int_{[\varphi \neq 0]} a_0 |\varphi|^p dx < 0. \tag{2-46}$$

Podemos tomar φ satisfazendo (2-46), pois por hipótese, $\lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v) < 0$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varphi \geq 0$ e que $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. De fato, podemos supor que φ é não negativa pois,

$$\int_{\Omega} |\nabla |\varphi||^p dx - \int_{[\varphi \neq 0]} a_0 ||\varphi||^p dx = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dx - \int_{[\varphi \neq 0]} a_0 |\varphi|^p dx < 0.$$

Assim, podemos tomar $|\varphi|$ no lugar de φ e a Desigualdade (2-46) permanece válida. Além disso, se φ não pertence ao espaço $L^\infty(\Omega)$ e já supondo que φ é não negativa, definamos a seguinte sequência,

$$\varphi_n(x) = \min\{\varphi(x), n\}.$$

Note que,

$$\nabla \varphi_n(x) = \begin{cases} \nabla \varphi(x) & \text{se} \quad n > \varphi(x) \\ 0 & \text{se} \quad n \leq \varphi(x) \end{cases}. \tag{2-47}$$

Assim, $q.t.p.\ x$ em Ω vale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |\nabla \varphi_n(x)|^p \leq |\nabla \varphi(x)|^p \ \in \ L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^p dx = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dx. \tag{2-48}$$

Por outro lado, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $\|f(\cdot,1)\|_\infty \leq a_0$, com isso, $\|f(\cdot,1)\|_\infty|\varphi_n|^p \leq a_0|\varphi_n|^p$. Pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi|^p dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi_n|^p dx, \tag{2-49}$$

logo,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\left\{\int_\Omega |\nabla\varphi_n|^p dx - \int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi_n|^p dx\right\} &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla\varphi_n|^p dx - \liminf_{n\to+\infty}\int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi_n|^p dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\varphi|^p dx - \int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi|^p dx < 0 \ \text{ por } (2\text{-}49).\end{aligned} \tag{2-50}$$

Agora, aplicando o Teorema B.1 juntamente com (2-50) concluímos que existe $n*$ tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\varphi_{n*}|^p dx - \int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi_{n*}|^p dx &\leq \limsup_{n\to+\infty}\left\{\int_\Omega |\nabla\varphi_n|^p dx - \int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi_n|^p dx\right\} + \varepsilon \\ &\leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^p dx - \int_{\varphi\neq 0} a_0|\varphi|^p dx + \varepsilon < 0.\end{aligned}$$

Logo, φ_{n*} pertence ao espaço $L^\infty(\Omega)\bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$, é não negativa e satisfaz (2-46), assim, podemos tomar φ_{n*} ao invés de φ em (2-46). Por esse argumento, no restante da demonstração, assumiremos, sem perda de generalidade, que φ é não negativa e pertence ao espaço $L^\infty(\Omega)$.

Pela regra de L'Hospital,

$$\liminf_{t\downarrow 0}\frac{F(x,t)}{t^p} \geq \frac{1}{p}a_0,$$

assim,

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{F(x,\varepsilon\varphi)}{\varepsilon^p\varphi^p} \geq \frac{1}{p}a_0 \Rightarrow \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{F(x,\varepsilon\varphi)}{\varepsilon^p} \geq \frac{1}{p}a_0\varphi^p,$$

pela condição (v), existe $C > 0$ tal que,

$$F(x,\varepsilon\varphi) \geq -C\varepsilon^p\varphi^p,$$

desse modo,

$$\frac{F(x,\varepsilon\varphi)}{\varepsilon^p} \geq -C\|\varphi\|_\infty{}^p = -C > -\infty,$$

com isso, o lado esquerdo da desigualdade acima é limitado inferiormente. Aplicando o lema de Fatou em conjunto com a Regra de L'Hospital,

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{[\varphi\neq 0]} \frac{F(x,\varepsilon\varphi)}{\varepsilon^p}dx \geq \int_{[\varphi\neq 0]} \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{F(x,\varepsilon\varphi)}{\varepsilon^p}dx \geq \frac{1}{p}\int_{[\varphi\neq 0]} a_0\varphi^p dx. \tag{2-51}$$

Tomando ε arbitrariamente pequeno, concluímos por (2-51) que,

$$\int_\Omega F(x,\varepsilon\varphi)dx \geq \frac{1}{p}\int_{[\varphi\neq 0]} a_0\varepsilon^p\varphi^p dx > \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varepsilon\varphi|^p dx,$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varepsilon\varphi|^p dx - \int_\Omega F(x,\varepsilon\varphi)dx < 0.$$

Em outras palavras, $\varepsilon\varphi$ é um elemento de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $E(\varepsilon\varphi) < 0$, como queríamos. Portanto o valor mínimo assumido pelo funcional energia associado ao problema (2-10) é não nulo. □

Observação 3 *A condição (v) garante uma condição de decrescimento para a função F, a verificação desse fato é feita como segue,*

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \geq \int_0^t -Cs^{p-1}ds = -Ct^p.$$

Com os Lemas 2.7, 2.8 e 2.9, concluímos que existe $u \not\equiv 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $E(u) = \inf\{E(v); v \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$.

Note que, por (v) obtemos que $f(x,0) \geq 0$. Assim, estendendo f para valores negativos da seguinte forma $f(x,t) = f(x,0)$, se $t < 0$ concluímos que,

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds = f(x,0)\int_0^t ds = f(x,0)t \leq 0,$$

assim,

$$F(x,u) \leq F(x,u^+),$$

juntando isso ao fato de que,

$$|\nabla u^+(x)| \leq |\nabla u(x)|,$$

concluímos pela definição do funcional energia E dada em (2-27) que,

$$E(u^+) \leq E(u),$$

onde u^+ está definida no apêndice sobre teoria da medida (Apêndice A). Ou seja, $E(u^+) = \inf\{E(v); v \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$. Portando podemos supor que, $u \geq 0$.

Concluímos do Lema 2.7, juntamente com o Lema 2.8, que u é ponto crítico de E (cf.Proposição B.7) em outras palavras, a igualdade (2-11) é satisfeita, além disso, pelo Lema 2.9 e pelo argumento feito logo acima, $u \not\equiv 0$.

Para concluirmos que u é de fato solução fraca para (2-10) resta mostrarmos que $u \in L^\infty(\Omega)$, com essa finalidade truncaremos a função f para obtermos uma condição de crescimento sobre $|f(x,\cdot)|$ e com isso poderemos usar um caso particular (cf. Teorema 3.1 em [18]) de um resultado de [18] que será tratado no Lema 2.10 e com ele concluiremos que u pertence ao espaço $L^\infty(\Omega)$. A conclusão de que u pertence a $L^\infty(\Omega)$ é crucial para garantirmos que u é de fato solução do nosso problema, pois até o presente momento sabemos apenas que u pertence a $W_0^{1,p}(\Omega)$, que u é uma função não negativa, não nula e que minimiza o funcional energia relacionado ao problema (2-10), além disso, se $u \in L^\infty(\Omega)$ podemos aplicar um resultado de [12] (cf. Teorema C.14 do Apêndice C) e garantirmos uma regularidade $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para u e isso garante que podemos aplicar o princípio do máximo de [20], desse modo teremos uma solução que assume apenas valores não negativos como desejado.

Para k inteiro positivo definamos,

$$f^k(x,t) = \begin{cases} max\{f(x,t), -kt^{p-1}\}, \text{ se } t \geq 0 \\ f(x,0), \text{ se } t < 0 \end{cases},$$

e

$$a_0^k(x) = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f^k(x,t)}{t^{p-1}}, \quad a_\infty^k(x) = \limsup_{t \uparrow \infty} \frac{f^k(x,t)}{t^{p-1}}.$$

Observação 4 *Note que, da maneira que definimos f^k temos de imediato que,*

$$\begin{aligned} f^k(x,t) &\geq -kt^{p-1} \\ &\geq -1-kt^{p-1} \\ &\geq -C_k(1+t^{p-1}). \end{aligned}$$

Observação 5 *A função f^k definida acima satisfaz as condições, (iii), (iv), (v) e (vi)*

De fato,

$$\begin{aligned} \text{se } f^k(x,t) &= -kt^{p-1} \text{ então, } -\|f(.,t)\|_\infty \leq f(x,u) \leq -kt^{p-1} \leq 0 \leq \|f(.,t)\|_\infty, \\ \text{se } f^k(x,t) &= f(x,t) \text{ então, } -\|f(.,t)\|_\infty \leq f(x,t) \leq \|f(.,t)\|_\infty, \end{aligned}$$

portando f^k satisfaz (vi).

$$\begin{aligned} \text{Se } f^k(x,t) &= -kt^{p-1} \leq 0 \text{ então, } f^k(x,t) \leq C(t^{p-1}+1),\ \forall\, C>0, \\ \text{se } f^k(x,t) &= f(x,t) \text{ então, } \exists\, C>0; f(x,t) \leq C(t^{p-1}+1), \end{aligned}$$

portanto f^k satisfaz (iii).

Por definição, $f^k(x,\cdot) : [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$, é definida como sendo o máximo entre duas funções contínuas, portanto é contínua, e assim, vale (iv).

Seja $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$ tal que $f(x,t) \geq -C_\delta t^{p-1}, \forall t \in [0,\delta]$. Seja $\bar{C_\delta} = \max\{C_\delta, k\}$, assim, $f^k(x,t) \geq -\bar{C_\delta} t^{p-1}$, qualquer que seja $t \in [0,\delta]$. Portanto, vale (v).

Das Observações 4 e 5, concluímos a seguinte condição de crescimento sobre $|f^k(x,\cdot)|$,

$$|f^k(x,t)| \leq C(1+|t|^{p-1}). \tag{2-52}$$

Observação 6 $\lambda_1(-\Delta_p v - a_0^k|v|^{p-2}v) < 0.$

De fato,

$$\frac{f^k(x,t)}{t^{p-1}} \geq \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \Rightarrow \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f^k(x,t)}{t^{p-1}} \geq \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}},$$

pela definição de λ_1 dada no teorema (2.4),

$$a_0^k(x) \geq a_0(x) \Rightarrow \lambda_1(-\Delta_p v - a_0^k|v|^{p-2}v) \leq \lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v)) < 0.$$

Observação 7 *Para k suficientemente grande* $\lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty^k |v|^{p-2} v) > 0$.

De fato, fixado $t > 0$, $-kt$ é tanto menor quanto maior for k, com isso, se k for grande $f^k(x,t)$ coincide com $f(x,t)$, ou seja, $a_\infty^k(x)$ coincide com $a_\infty(x)$. Portanto,

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty^k |v|^{p-2} v) = \lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty |v|^{p-2} v) > 0.$$

Seja,

$$E_k(w) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx - \int_\Omega F^k(x,w) dx, \ w \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde,

$$F^k(x,t) = \int_0^t f^k(x,s) ds.$$

Pelas observações feitas acima, seguindo os mesmos passos das demonstrações dos Lemas 2.7, 2.8 e 2.9 para o funcional E_k, concluímos que existe um ponto crítico $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de E_k tal que, $E_k(u_k) = \inf\{E_k(v); v \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$. Além disso, pelo Lema 2.10 a seguir, concluiremos que u_k é solução do problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p v = f^k(x,v) \text{ em } \Omega, \\ v \geq 0, \ v \not\equiv 0, \text{ em } \Omega, \\ v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2-53}$$

Observação 8 *Sejam* $p < q < p^*$, *por (2-52) temos que,*

$$\int_\Omega |f^k(x,u_k)| dx \leq \int_\Omega C(1 + |u_k|^{p-1}) dx.$$

De fato, sejam $\Omega_- = \{x \in \Omega; |u_k(x)| \leq 1\}$ *e* $\Omega_+ = \{x \in \Omega; |u_k(x)| > 1\}$, *assim,*

$$\begin{aligned} \int_\Omega 2C|u_k|^{p-1} dx &\leq \int_{\Omega_+} 2C(1 + |u_k|^{q-1}) dx + \int_{\Omega_-} 2C dx \\ &\leq \int_{\Omega_+} 2C(1 + |u_k|^{q-1}) dx + \int_{\Omega_-} 2C(1 + |u_k|^{q-1}) dx \\ &= \int_\Omega 2C(1 + |u_k|^{q-1}) dx. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} |f^k(x,u_k)|dx \leq \int_{\Omega} 2C(1+|u_k|^{q-1})dx.$$

O próximo Lema é uma particularização do Teorema 3.1 em [18].

Lema 2.10 *A função u_k pertence ao espaço $L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Inicialmente mostraremos que u_k pertence ao espaço $L^\infty_{loc}(\Omega)$. Seja $x_0 \in \Omega$, mostraremos que u_k é limitada em uma bola de centro em x_0. Seja R_0 positivo, de modo que, $B_{R_0}(x_0) \subset \Omega$, para bolas arbitrárias $\overline{B_t}(x') \subset B_s(x') \subset B_{R_0}(x_0)$, com $s-t<1$, seja $\psi \in C^\infty(\Omega)$ uma função, tal que,

$$0 \leq \psi \leq 1,\ supp(\psi) \subset B_s,\ \psi(x) = 1\ \forall x \in B_t,\ |\nabla\psi| \leq \frac{2}{s-t},$$

e dado $1 \leq r \leq p^*$, onde p^* é o expoente crítico de Sobolev, definamos $\phi(x) = \psi^p \max\{u_k(x)-r,0\}$, note que $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como u_k é ponto crítico de E_k, temos,

$$\langle E_k'(u_k),\phi\rangle = 0,$$

em outras palavras,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \nabla\phi dx = \int_{\Omega} f^k(x,u_k)\phi dx,$$

definamos $A_{r,s} = \{x \in B_s(x_0); u_k(x) > r\}$, assim, pela definição de ϕ aplicando a regra da derivação do produto, podemos escrever a igualdade acima como,

$$p\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k\nabla\psi\psi^{p-1}(u_k-r)dx + \int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p\psi^p dx = \int_{A_{r,s}} f^k(x,u_k)\psi^p(u_k-r)dx,$$

ou seja

$$\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p\psi^p dx = \int_{A_{r,s}} f^k(x,u_k)\psi^p(u_k-r)dx - p\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k\nabla\psi\psi^{p-1}(u_k-r)dx,$$

colocando em módulo e usando a desigualdade triangular,

$$\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p\psi^p dx \leq \int_{A_{r,s}} |f^k(x,u_k)|\psi^p(u_k-r)dx + p\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^{p-1}|\nabla\psi|\psi^{p-1}(u_k-r)dx, \tag{2-54}$$

Para simplificar a notação, definamos,

$$Q := \int\limits_{A_{r,s}} \left| \frac{u_k - r}{s-t} \right|^{p^*} dx.$$

Seja $\varepsilon_1 = \left(\frac{p'}{4p}\right)^{\frac{1}{p'}}$, onde p' é o conjugado de p, assim, aplicando a desigualdade de Young (Proposição B.9) na segunda integral ao lado direito da desigualdade (2-54), obtemos,

$$\begin{aligned} p\int\limits_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^{p-1}|\nabla\psi|\psi^{p-1}(u_k-r)dx &= p\int\limits_{A_{r,s}} \left(\varepsilon_1|\nabla u_k|^{p-1}\psi^{p-1}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_1}|\nabla\psi|(u_k-r)\right)dx, \\ &\leq p\left[\frac{1}{p'}\int\limits_{A_{r,s}} \varepsilon_1^{p'}|\nabla u_k|^p\psi^p dx + \frac{1}{p}\int\limits_{A_{r,s}} \frac{1}{\varepsilon_1^p}|\nabla\psi|^p||u_k-r|^p dx\right], \end{aligned} \tag{2-55}$$

analisando a segunda integral em (2-55), pela definição de ψ,

$$\frac{1}{p}\int\limits_{A_{r,s}} \frac{1}{\varepsilon_1^p}|\nabla\psi|^p||u_k-r|^p dx \leq \frac{1}{p}\int\limits_{A_{r,s}} \frac{1}{\varepsilon_1^p}\frac{2^p}{|s-t|^p}|u_k-r|^p dx. \tag{2-56}$$

Sejam $A_{r,s}^+ = \left\{x \in A_{r,s}; \left|\frac{u_k(x)-r}{s-t}\right| > 1\right\}$ e $A_{r,s}^- = \left\{x \in A_{r,s}; \left|\frac{u_k(x)-r}{s-t}\right| \leq 1\right\}$, com isso,

$$\begin{aligned} \frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^p dx &= \frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}^+} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^p dx + \frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}^-} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^p dx \\ &\leq \frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}^+} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^{p^*} dx + \frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}^-} dx, \end{aligned}$$

assim,

$$\frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^p dx \leq \frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}^+} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^{p^*} + 1dx + \frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}^-} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^{p^*} + 1dx$$

ou seja,

$$\frac{2^{p^*}}{p\varepsilon_1^p}\int\limits_{A_{r,s}} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^p dx \leq CQ + C|A_{r,s}|, \tag{2-57}$$

onde $C > 0$ é uma constante real. Pela definição de ε_1 obtemos da desigualdade (2-55), juntamente com (2-57), a seguinte desigualdade,

$$p\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^{p-1}|\nabla\psi|\psi^{p-1}(u_k-r)dx \leq \frac{1}{4}\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p\psi^p dx + CQ + C|A_{r,s}|. \tag{2-58}$$

Além disso, aplicando a desigualdade de Young e a Observação 8 à primeira integral do lado direito da desigualdade (2-54), lembrando que $0 \leq \psi \leq 1$, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{A_{r,s}} |f^k(x,u_k)|\psi^p(u_k-r)dx &\leq \int_{A_{r,s}} (|u_k|^{q-1}+1)\psi^p(u_k-r)dx \\ &\leq \frac{1}{q'}\int_{A_{r,s}} |u_k|^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} |u_k-r|^q dx, \end{aligned} \tag{2-59}$$

somando e subtraindo r e aplicando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'}\int_{A_{r,s}} |u_k|^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} |u_k-r|^q dx &= \frac{1}{q'}\int_{A_{r,s}} |u_k-r+r|^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} |u_k-r|^q dx \\ &\leq \frac{1}{q'}\int_{A_{r,s}} (|u_k-r|+|r|)^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} |u_k-r|^q dx \\ &\leq \frac{C}{q'}\int_{A_{r,s}} |u_k-r|^q+|r|^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} |u_k-r|^q dx, \end{aligned}$$

obtendo,

$$\frac{1}{q'}\int_{A_{r,s}} |u_k|^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} |u_k-r|^q dx \leq \frac{C}{q'}\int_{A_{r,s}} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^q + |r|^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^q dx. \tag{2-60}$$

De (2-59) e (2-60),

$$\int_{A_{r,s}} |f^k(x,u_k)|\psi^p(u_k-r)dx \leq \frac{C}{q'}\int_{A_{r,s}} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^q + |r|^q dx + \left(\frac{1}{q}+1\right)\int_{A_{r,s}} \left|\frac{u_k-r}{s-t}\right|^q dx. \tag{2-61}$$

Repetindo o mesmo argumento feito anteriormente no qual escrevemos $A_{r,s} = A_{r,s}^+ \cup A_{r,s}^-$, e dividimos em duas integrais. Para a desigualdade acima, obtemos,

$$\int_{A_{r,s}} (|u_k|^{q-1}+1)\psi^p(u_k-r)dx \leq CQ + C(r^q+1)|A_{r,s}|. \tag{2-62}$$

Note que, por (2-54) e (2-59), temos,

$$\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p \psi^p dx \leq p \int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^{p-1} |\nabla \psi| \psi^{p-1}(u_k - r) dx + \int_{A_{r,s}} (|u_k|^{q-1} + 1)\psi^p (u_k - r) dx,$$

usando (2-58) e (2-62) em (2-54) concluímos que,

$$\begin{aligned}\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p \psi^p dx &\leq \frac{1}{4}\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p \psi^p dx + CQ + C|A_{r,s}| + CQ + C(r^q+1)|A_{r,s}| \\ &\leq \frac{1}{4}\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p \psi^p dx + CQ + C(r^q+1)|A_{r,s}|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p \psi p dx \leq CQ + C(r^q+1)|A_{r,s}|,$$

além disso, da definição da função ψ temos,

$$\begin{aligned}\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p \psi p dx &\geq \int_{A_{r,t}} |\nabla u_k|^p \psi p dx \\ &= \int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p dx.\end{aligned}$$

A vista disso, concluímos que,

$$\int_{A_{r,s}} |\nabla u_k|^p dx \leq CQ + C(r^q+1)|A_{r,s}|,$$

e assim podemos aplicar o Lema C.11 na bola de centro x_0 e raio R_0, nesse caso observe que as constantes no enunciado deste Lema, satisfazem as seguintes igualdades, $\sigma\rho = s - t$ e $\rho = s$.

Portanto, aplicando Lema C.11 concluímos que u_k é localmente limitada em $B_{R_0}(x_0)$. Como $x_0 \in \Omega$ é arbitrário, $u_k \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.

Agora, resta concluirmos que u_k pertence de fato a $L^\infty(\Omega)$, para tanto, basta aplicarmos o que foi feito em [12] e [13] para regularidade de u_k sobre o bordo de Ω e assim concluímos o resultado.

□

Lema 2.11 *A função u, que minimiza o funcional E, pertence ao espaço $L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração.

Definamos $v(x) := \min\{u(x), u_k(x)\}$. Demonstraremos que $E(v) \leq E(u)$ e com isso concluiremos que $u \in L^\infty(\Omega)$.

Como u_k é solução do problema (2-53) temos que,

$$E_k(u_k) \leq E_k(\phi), \ \forall\ \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

em outras palavras,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx - \int_\Omega F^k(x,u_k)dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla \phi|^p dx - \int_\Omega F^k(x,\phi)dx.$$

Seja $\phi = \max\{u, u_k\}$, assim, particionando Ω em três conjuntos convenientes,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_{[u_k<u]} |\nabla u_k|^p dx - \int_{[u_k<u]} F^k(x,u_k)dx + \frac{1}{p}\int_{[u_k=u]} |\nabla u_k|^p dx - \int_{[u_k=u]} F^k(x,u_k)dx \\
&+\frac{1}{p}\int_{[u_k>u]} |\nabla u_k|^p dx - \int_{[u_k>u]} F^k(x,u_k)dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_{[u_k<u]} |\nabla \phi|^p dx - \int_{[u_k<u]} F^k(x,\phi)dx + \frac{1}{p}\int_{[u_k=u]} |\nabla \phi|^p dx - \int_{[u_k=u]} F^k(x,\phi)dx \\
&+\frac{1}{p}\int_{[u_k>u]} |\nabla \phi|^p dx - \int_{[u_k>u]} F^k(x,\phi)dx,
\end{aligned}$$

substituindo a definição de ϕ na desigualdade acima, obtemos,

$$\int_{[u_k<u]} \left\{\frac{1}{p}|\nabla u_k|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p\right\} dx \leq \int_{[u_k<u]} \left\{F^k(x,u_k) - F^k(x,u)\right\} dx. \tag{2-63}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
E(v) - E(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p dx - \int_\Omega F(x,v)dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \frac{1}{p}\int_{[u_k<u]} |\nabla v|^p dx - \int_{[u_k<u]} F(x,v)dx + \frac{1}{p}\int_{[u_k=u]} |\nabla v|^p dx - \int_{[u_k=u]} F(x,v)dx + \frac{1}{p}\int_{[u_k>u]} |\nabla v|^p dx \\
&- \int_{[u_k>u]} F(x,v)dx - \frac{1}{p}\int_{[u_k<u]} |\nabla u|^p dx + \int_{[u_k<u]} F(x,u)dx - \frac{1}{p}\int_{[u_k=u]} |\nabla u|^p dx + \int_{[u_k=u]} F(x,u)dx \\
&- \frac{1}{p}\int_{[u_k>u]} |\nabla u|^p dx + \int_{[u_k>u]} F(x,u)dx,
\end{aligned}$$

usando a definição de v obtemos,

$$E(v) - E(u) = \int\limits_{[u_k<u]} \left\{ \frac{1}{p}|\nabla u_k|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p - F(x,u_k) + F(x,u) \right\} dx. \tag{2-64}$$

De (2-63) e (2-64) temos que,

$$E(v) - E(u) \leq \int\limits_{[u_k<u]} \left\{ F^k(x,u_k) - F^k(x,u) - F(x,u_k) + F(x,u) \right\} dx.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
&F^k(x,u_k) - F^k(x,u) - F(x,u_k) + F(x,u) \\
&= \left(-\int_0^u f^k(x,t)dt + \int_0^{u_k} f^k(x,t)dt \right) + \left(\int_0^u f(x,t)dt - \int_0^{u_k} f(x,t)dt \right) \\
&= \int_{u_k}^u \left\{ f(x,t) - f^k(x,t) \right\} dt \leq 0 \Rightarrow E(v) \leq E(u).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos $E(v) = \inf\limits_{\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)} \{E(\phi)\}$ desse modo, se $u \notin L^\infty(\Omega)$ podemos escolher a solução v. Assim podemos sempre supor que a solução $u \in L^\infty(\Omega)$. $\square$

CAPÍTULO 3

Desigualdade de Díaz & Saá em $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo veremos uma extensão da Desigualdade de Díaz-Saá. A demonstração será baseada na identidade de Picone que é uma técnica muito utilizada em problemas envolvendo o operador p-Laplaciano. Posteriormente, como aplicação do resultado obtido, apresentaremos algumas propriedades do primeiro autovalor associado a um sistema do tipo (p,q)-Laplaciano.

3.1 Desigualdade de Díaz & Saá

Proposição 3.1 ***(Identidade de Picone)*** *Sejam u, v diferenciáveis, $p > 1$ e $v > 0$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Então, $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$, onde*

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}\nabla u \nabla v |\nabla v|^{p-2}, \\ R(u,v) &= |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{|u|^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v. \end{aligned}$$

Além disso, $L(u,v) = 0 \Rightarrow \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ q.t.p.

Demonstração. Inicialmente mostraremos que $L(u,v) = R(u,v)$. Com essa finalidade, note que,

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{|u|^p}{v^{p-1}}\right) &= \frac{p|u|^{p-2}u\nabla u v^{p-1}}{v^{2(p-1)}} - \frac{(p-1)v^{p-2}\nabla v|u|^p}{v^{2(p-1)}} \\ &= p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}u\nabla u - (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}\nabla v. \end{aligned}$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
R(u,v) &= |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{|u|^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\
&= |\nabla u|^p - \left[p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}u\nabla u - (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}\nabla v\right]|\nabla v|^{p-2}\nabla v \\
&= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}u\nabla u\nabla v|\nabla v|^{p-2} \\
&= L(u,v).
\end{aligned}
$$

Mostraremos em seguida que $L(u,v) \geq 0$, note que,

$$
\begin{aligned}
\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}u\nabla u\nabla v|\nabla v|^{p-2} &\leq \left|\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}u\nabla u\nabla v|\nabla v|^{p-2}\right| \\
&= \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla u\nabla v||\nabla v|^{p-2} \\
&\leq \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla u||\nabla v|^{p-1},
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade acima é consequência da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Assim, multiplicando por p obtemos,

$$
p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}u\nabla u\nabla v|\nabla v|^{p-2} \leq p\frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla u||\nabla v|^{p-1}. \tag{3-1}
$$

Por outro lado, agrupando de forma conveniente e aplicando a desigualdade de Young com as potências p, p' temos,

$$
p\frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla u||\nabla v|^{p-1} \leq (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p + |\nabla u|^p. \tag{3-2}
$$

Multiplicando (3-1) por (-1) e somando com (3-2) concluímos que,

$$
L(u,v) \geq 0.
$$

Suponhamos que $L(u,v) = 0$,

$$
0 \leq |\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p \;=\; p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-1}}u\nabla u\nabla v|\nabla v|^{p-2}.
$$

Assim, por (3-1),

$$
|\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u| \leq 0. \tag{3-3}
$$

Seja,

$$N = \left\{ x \in \Omega; \frac{|u|}{v} |\nabla v| = 0 \right\}.$$

Se $x \in N$, então, por (3-3),

$$|\nabla u|^p \leq 0 \Rightarrow |\nabla u| = 0 \Rightarrow \frac{u}{v} \nabla v = \nabla u = 0.$$

Desse modo,

$$\nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{(\nabla u)v - u(\nabla v)}{v^2} = 0.$$

Se $x \notin N$, então, definamos,

$$Q = \frac{|\nabla u|}{|\nabla v| \dfrac{|u|}{v}},$$

e a seguinte função real,

$$f(t) = t^p - pt + p - 1.$$

Por (3-3),

$$f(Q) = \frac{|\nabla u|^p + (p-1)\dfrac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\dfrac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-1}|\nabla u|}{|\nabla v|^p \dfrac{|u|^p}{v^p}} \leq 0.$$

Portanto $f(Q) = 0$ pois $f(t) \geq 0 \ \forall \ t \geq 0$. Além disso, a desigualdade acima nos diz também que $Q \neq 0$ já que $f(0) = p - 1 > 0$. Note que, $f'(t) = pt^{p-1} - p$ e desse modo, $f'(t) < 0$ se $0 < t < 1$ e $f'(t) > 0$ se $t > 1$ e como $f(1) = 0$, concluímos que $Q = 1$, acarretando que,

$$|\nabla u| = |\nabla v| \frac{|u|}{v} > 0. \tag{3-4}$$

Estamos supondo que $L(u, v) = 0$, assim,

$$|\nabla u|^p + (p-1)\frac{|u|^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{|u|^{p-2}}{v^{p-2}} u \nabla u \nabla v |\nabla v|^{p-1} \frac{1}{v} = 0. \tag{3-5}$$

Substituindo (3-4) na igualdade (3-5) acima obtemos,

$$p|\nabla u|^p - p|\nabla u|^{p-2}\frac{u}{v}\nabla u\nabla v = 0,$$

em outras palavras,

$$p|\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla u|^2 - \frac{u}{v}\nabla u\nabla v\right) = 0.$$

Como $|\nabla u| > 0$, temos,

$$|\nabla u|^2 - \frac{u}{v}\nabla u\nabla v = 0, \tag{3-6}$$

usando (3-4) com (3-6), obtemos,

$$|\nabla v|^2\frac{|u|^2}{v^2} - \frac{u}{v}\nabla u\nabla v = 0. \tag{3-7}$$

Podemos escrever a igualdade (3-7) em notação de produto interno, como segue,

$$\left\langle \frac{u}{v}\nabla v, \frac{u}{v}\nabla v - \nabla u \right\rangle = 0.$$

No entanto, ∇v não pode ser ortogonal a $\frac{u}{v}\nabla v - \nabla u$, pois nesse caso $|\nabla u|$ é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são, $\frac{u}{v}\nabla v$ e $\frac{u}{v}\nabla v - \nabla u$, o que é uma contradição, pois (3-6) nos diz que,

$$\left\langle \nabla u, \nabla u - \frac{u}{v}\nabla v \right\rangle = 0,$$

portanto,

$$\begin{aligned} \nabla u - \frac{u}{v}\nabla v = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\left(\nabla u - \frac{u}{v}\nabla v\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0. \end{aligned}$$

Como queríamos. □

Poderíamos enunciar o resultado que segue (Teorema 3.2) como um Lema pela forma com que é usado na demonstração da Desigualdade de Díaz & Saá (Teorema 3.3). No entanto, devido a sua importância na seção de aplicações que veremos em breve (Seção 3.2) o enunciaremos como Teorema.

Teorema 3.2 *Dado $1 < p < N$. Sejam φ pertencente ao conjunto $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $z \geq 0$ não identicamente nulo, pertencente a $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ambos diferenciáveis. Se $\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}$ pertence a*

$L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) |\varphi|^p dx. \tag{3-8}$$

Além disso, no caso da igualdade, exite $c \in \mathbb{R}$ tal que $z = c\varphi$ em $\mathbb{R}^N$.
Para $p \geq N$. Sejam φ pertencente ao conjunto $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $z \geq 0$ não identicamente nulo, pertencente a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ambos diferenciáveis. Então vale (3-8) se, para $p = N$, existe algum $s > 1$ tal que,

$$\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^s(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

ou para $p > N$,

$$\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, se vale a igualdade em (3-8), então existe $c > 0$ tal que $z = c\varphi$ em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Primeiramente observemos que z é uma solução não trivial para o seguinte problema,

$$(Q) \begin{cases} -\Delta_p v = \left(\dfrac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) v^{p-1} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ v \geq 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

De fato, uma solução v para o problema acima no sentido fraco satisfaz,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^{p-2} \nabla z \nabla \varphi \frac{v^{p-1}}{z^{p-1}} dx, \ \ \forall\, \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Tomando $v = z$ do lado esquerdo da igualdade acima e depois do lado direito, verifica-se que a igualdade acima é de fato satisfeita por z.

Por hipótese $\dfrac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ portanto para cada bola centrada na origem de $\mathbb{R}^N$ podemos aplicar o Teorema C.13, e com isso concluímos que $z > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Nesse caso,

$$\beta(t) = \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} t^{p-1}, \ f \equiv 0.$$

Pelo Teorema C.14, dado $r > 0$ existe $\alpha(r) > 0$ tal que $z \in C^{1,\alpha}(\overline{B_r})$. Em particular, se Ω_0 é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, existe $\alpha_0 > 0$ tal que $z \in C^{1,\alpha_0}(\overline{\Omega_0})$. Argumentando por densidade, podemos tomar uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Para cada n fixado, podemos aplicar a identidade de Picone (Proposição 3.1) para as funções φ_n e z, obtendo,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} L(\varphi_n, z)dx = \int_{\mathbb{R}^N} R(\varphi_n, z)dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\left(\frac{|\varphi_n|^p}{z^{p-1}}\right)|\nabla z|^{p-2}\nabla z dx. \quad (3\text{-}9)$$

Como $\varphi_n \in C_0^\infty$, $z \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)ez > 0$, a função $\dfrac{|\varphi_n|^p}{z^{p-1}}$ pertence a $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, é uma função teste. Integrando a desigualdade (3-9) por partes,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\left(\frac{|\varphi_n|^p}{z^{p-1}}\right)|\nabla z|^{p-2}\nabla z dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}|\varphi_n|^p dx. \quad (3\text{-}10)$$

Como φ_n converge forte para φ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos que, $\varphi_n \to \varphi$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ pelo Teorema C.4 e com isso, $|\varphi_n|^p \to |\varphi|^p$ em $L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, pela desigualdade de Hölder temos,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)\right| dx \leq \left\|\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}\right\|_{\frac{N}{p}} \||\varphi_n|^p - |\varphi|^p\|_{\frac{p^*}{p}},$$

fazendo $n \to +\infty$, segue que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)dx \to 0.$$

De (3-10) temos,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}|\varphi|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}|\varphi_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}|\varphi|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)dx. \end{aligned}$$

Passando a desigualdade anterior ao limite, verificamos a veracidade de (3-8).

Consideremos agora o caso em que vale a igualdade em (3-8). Seja Ω_0 um domínio arbitrário em $\mathbb{R}^N$. Lembremos que a Identidade de Picone (Proposição 3.1) nos diz que $L(\varphi_n, z) \geq 0$, assim,

$$0 \leq \int_{\Omega_0} L(\varphi_n, z)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} L(\varphi_n, z)dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}|\varphi_n|^p dx.$$

O lado direito da expressão acima tende a zero quando n tende ao infinito, já que z é solução de (Q). Por outro lado, Ω_0 é limitado, $z \in C^{1,\alpha_0}(\Omega_0)$ e além disso, $|\nabla\varphi_n|, \varphi_n$ pertencem a $C_0^\infty(\Omega_0)$ e convergem quase todo ponto para as funções $|\nabla\varphi|, \varphi$ respectivamente, pelo Teorema A.5, temos,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_0} L(\varphi_n, z)dx = \int_{\Omega_0} L(\varphi, z)dx.$$

Desse modo $L(\varphi, z) = 0$ em Ω_0. Como Ω_0 é arbitrário, concluímos que $L(\varphi, z) = 0$ $q.t.p.x \in \mathbb{R}^N$. E pela Proposição 3.1 temos,

$$\nabla\left(\frac{\varphi}{z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{z} = c.$$

Portanto $\varphi = cz$, onde c é uma constante real, concluindo assim a demostração do resultado para o caso em que $1 < p < N$. Para os demais casos o início da demostração é análogo, apenas substituindo o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ por $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

No caso $p = N$, como φ_n converge forte para φ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos que, $\varphi_n \to \varphi$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ $\forall\, q \in [p, +\infty)$ pelo Teorema C.5 e com isso, $|\varphi_n|^p \to |\varphi|^p$ em $L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, pela desigualdade de Hölder temos,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)\right| dx \leq \left\|\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}\right\|_s \||\varphi_n|^p - |\varphi|^p\|_q.$$

No caso $p > N$, como φ_n converge forte para φ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos que, $\varphi_n \to \varphi$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pelo Teorema C.2 e com isso, $|\varphi_n|^p \to |\varphi|^p$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, pela desigualdade de Hölder temos,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}(|\varphi_n|^p - |\varphi|^p)\right| dx \leq \left\|\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}}\right\|_1 \||\varphi_n|^p - |\varphi|^p\|_\infty.$$

E com isso podemos concluir o resultado para os demais casos de maneira análoga ao que fizemos. □

O Teorema 3.3 é o resultado principal dessa seção, foi apresentado inicialmente em [8].

Teorema 3.3 ***(Desigualdade de Díaz-Saá)*** *Se, $1 < p < N$. Sejam $z_i \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ diferenciáveis, tais que z_i são ambos não negativos e não identicamente nulos, para $i = 1, 2$. E,* *se além disso,* $\dfrac{\Delta_p z_i}{{z_i}^{p-1}}$ *está definido e satisfaz,*

$$\frac{\Delta_p z_i}{{z_i}^{p-1}} \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

então,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p z_1}{{z_1}^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{{z_2}^{p-1}} \right) ({z_1}^p - {z_2}^p) dx \geq 0. \tag{3-11}$$

Se $p \geq N$. Sejam $z_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ diferenciáveis, tais que z_i são ambos não negativos e não identicamente nulos, para $i = 1, 2$. E, se além disso, $p = N$ e existir algum $s > 1$ tal que,

$$\frac{\Delta_p z_i}{{z_i}^{p-1}} \in L^{s}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

ou, $p > N$ e

$$\frac{\Delta_p z_i}{{z_i}^{p-1}} \in L^{1}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

então, vale a Desigualdade (3-11).

Demonstração. Pelo resultado demonstrado anteriormente (Teorema 3.2), para o par (z_1, z_2) teremos a seguinte desigualdade,

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_1|^p dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\Delta_p z_2}{{z_2}^{p-1}} \right) {z_1}^p dx \tag{3-12}$$

usando o Teorema 3.2 para o par (z_1, z_1) temos $C = 1$ e a seguinte igualdade,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_1|^p dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p z_1}{{z_1}^{p-1}} \right) {z_1}^p dx. \tag{3-13}$$

Somando (3-12) com (3-13) obtemos,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p z_1}{{z_1}^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{{z_2}^{p-1}} \right) {z_1}^p dx \geq 0 \tag{3-14}$$

invertendo z_1 com z_2 em (3-12) e em (3-13), obtemos,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p z_1}{{z_1}^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{{z_2}^{p-1}} \right) (-{z_2}^p) dx \geq 0, \tag{3-15}$$

somando (3-14) com (3-15) obtemos o resultado desejado. Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p z_1}{z_1{}^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{z_2{}^{p-1}} \right) (z_1{}^p - z_2{}^p) dx \geq 0.$$

□

3.2 Um sistema do tipo (p,q)-Laplaciano

Nessa seção aplicaremos os resultados obtidos na seção anterior para demostrar alguns resultados a respeito do primeiro autovalor do seguinte sistema de equações,

$$(S_\lambda) \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda b(x)|u|^\alpha |v|^\beta v \;\; x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v = \lambda b(x)|u|^\alpha |v|^\beta u \;\; x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} v(x) = 0. \end{cases}$$

Consideremos as seguintes hipóteses,

$(\mathcal{H}_1)$ $N > p > 1,\ N > q > 1,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \dfrac{\alpha+1}{p} + \dfrac{\beta+1}{q} = 1$ e $\alpha+\beta+2 < N$;

$(\mathcal{H}_2)$ $b \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ com $\gamma \in (0,1)$, e $b \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $b \geq 0 (\not\equiv 0)$.

O decaimento a zero no infinito do par de autofunções associado ao sistema (S_λ) é consequência do Teorema C.9. A existência do primeiro autovalor para o sistema (S_λ) é garantida pelo seguinte resultado,

Teorema 3.4 *Suponha que as hipóteses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ sejam satisfeitas. Então,*

(i) *O sistema S_λ admite o primeiro autovalor, que é positivo e definido por,*

$$\lambda_1 = \inf_\Gamma \left\{ \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx \right\}, \tag{3-16}$$

onde,

$$\Gamma = \left\{ (u,v) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^\alpha |v|^\beta uv dx = 1 \right\};$$

(ii) *Se $(u,v) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ é um par de autofunções soluções de (S_{λ_1}), então para todo $r > 0$, $u \in C^{1,\rho}(B_r)$ e $v \in C^{1,\gamma}(B_r)$, onde $\rho = \rho(r) > 0$, $\gamma = \gamma(r) > 0$ e B_r*

é a bola de centro na origem e raio r contida em $\mathbb{R}^N$;

(iii) *Existe um par de autofunções de* (S_{λ_1}) *que são positivas em* $\mathbb{R}^N$.

Item (i):

Demonstração.Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como em (C-2) e (C-3), respectivamente. Primeiramente mostraremos que existe $(\overline{u},\overline{v})$ em $D^{1,p(\mathbb{R}^N)}\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ tal que,

$$\mathcal{A}(\overline{u},\overline{v})=\lambda_1.$$

Seja (u_n,v_n) uma sequência minimizante. Por definição,

$$\mathcal{B}(u_n,v_n)=1,\ \forall\ n\in\mathbb{N} \tag{3-17}$$

e

$$\mathcal{A}(u_n,v_n)\to\lambda_1. \tag{3-18}$$

De (3-18) temos de imediato que (u_n,v_n) é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ que por sua vez é um espaço reflexivo, portanto, a menos de uma subsequência (u_n,v_n) converge fraco em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$(u_n,v_n)\rightharpoonup(\overline{u},\overline{v})\ \text{ em }\ D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N),$$

por (3-17) e pelo Teorema C.8, temos que,

$$\mathcal{B}(\overline{u},\ \overline{v})=1. \tag{3-19}$$

Pela semicontinuidade inferior da norma,

$$\mathcal{A}(\overline{u},\overline{v})\leq\liminf_{n\to+\infty}\mathcal{A}(u_n,v_n)=\lambda_1. \tag{3-20}$$

De (3-19) e (3-20) concluímos que,

$$\mathcal{A}(\overline{u},\overline{v})=\lambda_1.$$

Para mostrarmos que λ_1 é de fato autovalor vamos aplicar o Teorema C.6 para as seguintes funções,

$$\mathcal{F}(u,v)=\mathcal{A}(u,v)\quad\mathcal{G}(u,v)=\mathcal{B}(u,v)-1. \tag{3-21}$$

As derivadas de Fréchet de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ em $(\overline{u},\overline{v})$ são dadas por,

$$\mathcal{F}'(\overline{u},\overline{v})(\phi,\psi) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi dx + (\beta+1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{v}|^{q-2}\nabla\overline{v}\nabla\psi dx$$

e

$$\mathcal{G}'(\overline{u},\overline{v})(\phi,\psi) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{u}\psi dx + (\beta+1)\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\phi v dx,$$

qualquer que seja (ϕ,ψ) em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Como $(\overline{u},\overline{v})$ pertence a Γ, pelo Teorema C.8, $\mathcal{G}'(\overline{u},\overline{v}) \not\equiv 0$. Pelo Teorema C.6 existe λ tal que,

$$\mathcal{F}'(\overline{u},\overline{v})(\phi,\psi) = \lambda\mathcal{G}'(\overline{u},\overline{v})(\phi,\psi).$$

Fazendo $\psi\equiv 0$ temos que,

$$\mathcal{F}'(\overline{u},\overline{v})(\phi,0) = \lambda\mathcal{G}'(\overline{u},\overline{v})(\phi,0),$$

disso temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\phi\overline{v} dx,\ \forall\phi\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{3-22}$$

Analogamente, fazendo $\phi\equiv 0$ temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{v}|^{q-2}\nabla\overline{v}\nabla\psi dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{u}\psi dx,\ \forall\psi\in D^{1,q}(\mathbb{R}^N). \tag{3-23}$$

Fazendo $(\phi,\psi) = (\overline{u},\overline{v})$ de (3-22) e (3-23) temos que,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{(\alpha+1)}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{u}|^{p} dx + \frac{(\beta+1)}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\overline{v}|^{q} dx \\
&= \lambda\left(\frac{(\alpha+1)}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{u}\ \overline{v} dx + \frac{(\beta+1)}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{u}\ \overline{v} dx\right),
\end{aligned}$$

como $\dfrac{\alpha+1}{p}$ é conjugado de $\dfrac{\beta+1}{q}$ e $(\overline{u},\overline{v})$ pertence a Γ concluímos que,

$$\lambda = \lambda_1. \tag{3-24}$$

Por (3-16) e (3-24) concluímos que λ_1 é o primeiro autovalor e é positivo. $\square$

Item (ii):

Demonstração.Seja (u,v) pertencente a $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ uma solução para o sistema (S_{λ_1}), então,

$$-\Delta_p u\phi = \lambda_1 b(x)|u|^\alpha |v|^\beta \phi v \tag{3-25}$$

$$-\Delta_q v\psi = \lambda_1 b(x)|u|^\alpha |v|^\beta u\psi. \tag{3-26}$$

As equações (3-25) e (3-26) são do tipo abrangido no Teorema C.14. Mostramos no Teorema C.9 que dado R positivo as funções u e v pertence ao espaço $L^\infty(B_R)$ portanto pelo Teorema C.14 concluímos que existem γ_1,γ_2 no intervalo $(0,1)$ tais que u pertence ao espaço $C^{1,\gamma_1}(\overline{B_R})$ e v pertence ao espaço $C^{1,\gamma_2}(\overline{B_R})$. □

Item (iii):

Demonstração.O Item (i) demonstrado acima garante a existência de (u_1,v_1) pertencente ao espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ tal que,

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1(x) = \lambda_1 b(x)|u_1(x)|^\alpha |v_1(x)|^\beta v_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v_1(x) = \lambda_1 b(x)|u_1(x)|^\alpha |v_1(x)|^\beta u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases}. \tag{3-27}$$

Assim, dado Ω aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, multiplicando a primeira igualdade de (3-27) por u_1 e integrando sobre Ω obtemos,

$$0 \le \int_\Omega |\nabla u_1|^p dx = \lambda_1 \int_\Omega b(x)|u_1|^\alpha |v_1|^\beta u_1 v_1 dx, \tag{3-28}$$

por outro lado, sabemos que,

$$b(x)|u_1(x)|^\alpha |v_1(x)|^\beta \ge 0, \ \text{ para todo } \ x \text{ em } \ \mathbb{R}^N. \tag{3-29}$$

Como Ω é arbitrário, de (3-28) e (3-29) obtemos,

$$u_1(x)v_1(x) \ge 0 \; q.t.p. \; x \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \tag{3-30}$$

com isso, $\mathcal{B}(u_1,v_1) = \mathcal{B}(|u_1|,|v_1|)$ além disso, temos também que $\mathcal{A}(u_1,v_1) = \mathcal{A}(|u_1|,|v_1|)$ assim, podemos supor que $u_1 \ge 0$ e $v_1 \ge 0$ em Ω.

Pelo Item (ii) temos que, existem ρ,γ em $(0,1)$ tais que,

$$u_1 \in C^{1,\rho}(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$$
$$v_1 \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega),$$

disso podemos concluir por (3-27) que,

$$\Delta_p u_1 \in L^\infty(\Omega) \subset L^2_{loc}(\Omega) \;\text{ e }\; \Delta_q v_1 \in L^\infty(\Omega) \subset L^2_{loc}(\Omega).$$

Note que, para qualquer que seja s real,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_1 &\geq -\lambda_1 \|b\|_\infty \|u_1\|_\infty^\alpha \|v_1\|_\infty^{\beta+1} |s|^{p-1} \\ &= -M|s|^{p-1} \end{aligned}$$

definamos, $\Upsilon : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por,

$$\Upsilon(s) = Ms^{p-1},$$

assim,

$$\int_0^1 (\Upsilon(s)s)^{-\frac{1}{p}} ds = +\infty.$$

Pelo Teorema C.13 concluímos que $u_1(x) > 0$, para todo x em Ω. Analogamente, conclui-se que $v_1 > 0$ em Ω. Como Ω é arbitrário, concluímos que u_1 e v_1 são estritamente positivas em $\mathbb{R}^N$. □

Teorema 3.5 *No conjunto das funções contínuas a dimensão do auto-espaço associado ao primeiro autovalor λ_1 é 1.*

Demonstração. Sejam $(u,v) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ uma solução positiva para (S_{λ_1}) cuja existência é garantida pelos itens (i) e (iii) do Teorema 3.4 e $(\phi,\psi) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ solução de (S_{λ_1}), ou seja, (ϕ,ψ) é solução associada ao primeiro autovalor λ_1.

Aplicando o Teorema 3.2 nos pares (ϕ,u) e (ψ,v) temos, respectivamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_p u}{u^{p-1}}\right) |\phi|^p dx \tag{3-31}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^q dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(-\frac{\Delta_q v}{v^{q-1}}\right) |\psi|^q dx. \tag{3-32}$$

Por outro lado, usando que o par (ϕ,ψ) é solução para o sistema (S_{λ_1}), temos que,

$$\begin{aligned} J &:= \frac{\alpha+1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx+\frac{\beta+1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^q dx \qquad (3\text{-}33)\\ &= \lambda_1\frac{\alpha+1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\phi|^\alpha|\psi|^\beta\phi\psi dx+\lambda_1\frac{\beta+1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\phi|^\alpha|\psi|^\beta\phi\psi dx\\ &= \lambda_1\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\phi|^\alpha|\psi|^\beta\phi\psi dx, \end{aligned}$$

com isso, multiplicando e dividindo por $u^{\alpha+1}v^{\beta+1}$, obtemos,

$$\begin{aligned} J &\leq \lambda_1\int_{\mathbb{R}^N}|b(x)|\phi|^\alpha|\psi|^\beta\phi\psi|dx\\ &= \lambda_1\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\frac{|\phi|^{\alpha+1}|\psi|^{\beta+1}}{u^{\alpha+1}v^{\beta+1}}u^{\alpha+1}v^{\beta+1}dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young (Proposição B.9), com as potências $\dfrac{p}{\alpha+1}$ e $\dfrac{q}{\beta+1}$ obtemos,

$$\frac{|\phi|^{\alpha+1}|\psi|^{\beta+1}}{u^{\alpha+1}v^{\beta+1}}\leq\frac{\alpha+1}{p}\frac{|\phi|^p}{u^p}+\frac{\beta+1}{q}\frac{|\psi|^q}{v^q},$$

assim,

$$\begin{aligned} J &\leq \lambda_1\int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^{\alpha+1}v^{\beta+1}\left(\frac{\alpha+1}{p}\frac{|\phi|^p}{u^p}+\frac{\beta+1}{q}\frac{|\psi|^q}{v^q}\right)dx\\ &= \lambda_1\frac{\alpha+1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\frac{u^\alpha v^{\beta+1}}{u^{p-1}}|\phi|^p dx+\lambda_1\frac{\beta+1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\frac{u^{\alpha+1}v^\beta}{v^{q-1}}|\psi|^q dx, \qquad (3\text{-}34) \end{aligned}$$

além isso, supomos inicialmente que $(u,v)\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução positiva para (S_{λ_1}), juntando isso com o que obtivemos em (3-34) podemos concluir que,

$$J\leq\frac{\alpha+1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\Delta_p u}{u^{p-1}}\right)|\phi|^p dx+\frac{\beta+1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\Delta_q v}{v^{q-1}}\right)|\psi|^q dx, \qquad (3\text{-}35)$$

relacionando (3-33), (3-35) e a Desigualdade (3-31), concluímos que,

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha+1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx+\frac{\beta+1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^q dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\Delta_p u}{u^{p-1}}\right)|\phi|^p dx+\frac{\beta+1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\Delta_q v}{v^{q-1}}\right)|\psi|^q dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx+\frac{\beta+1}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\Delta_q v}{v^{q-1}}\right)|\psi|^q dx,
\end{aligned}$$

obtendo assim a desigualdade no sentido oposto a que foi dada em (3-32), portanto vale a igualdade,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^q dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\Delta_q v}{v^{q-1}}\right)|\psi|^q dx.$$

Analogamente, pela definição de J e pela desigualdade (3-32) obtemos a desigualdade no sentido oposto a que foi dada por (3-31), portanto vale a igualdade,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^p dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\Delta_p u}{u^{p-1}}\right)|\phi|^p dx.$$

Desse modo, pelo Teorema 3.2 exitem constantes reais $c,\bar{c}$ tais que, $u=c\phi$ e $v=\bar{c}\psi$. Concluímos então que toda solução (ϕ,ψ) de (S_{λ_1}) é múltiplo de (u,v) ou seja, a dimensão do auto-espaço associado a λ_1 é 1. $\square$

Teorema 3.6 *λ_1 é o único autovalor de (S_{λ_1}) que corresponde a um par de autofunções que não mudam de sinal.*

Demonstração. Sejam, $\lambda\geq\lambda_1$, (ϕ,ψ) uma solução para (S_{λ_1}) e suponha que existe uma solução que não muda de sinal (u,v) para o sistema (S_λ), em particular suponha que as funções u,v sejam não negativas. Analogamente ao que fizemos na demonstração do Teorema 3.5 podemos mostrar que exitem $c,\bar{c}$ tais que $u=c\phi, v=\bar{c}\psi$. Suponha que $\bar{c}>0$, nesse caso, $\psi\geq 0$ em $\mathbb{R}^N$, pois por hipótese, $v\geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Além disso, como o par (ϕ,ψ) é solução de (S_{λ_1}), qualquer que seja o aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, tomando ϕ como função teste em (S_{λ_1}), temos,

$$0\leq\int\limits_{\Omega}|\nabla\phi|^p dx=\lambda_1\int\limits_{\Omega}b(x)|\phi|^\alpha|\psi|^\beta\psi\phi dx,$$

com isso, $\phi \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $c \geq 0$, pois $u = c\phi$ e por hipótese $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Note também que tomando $v = \bar{c}\psi$ como função teste em (S_λ) temos,

$$\begin{aligned}\bar{c}^q \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^q dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|c\phi|^\alpha |\bar{c}\psi|^\beta \bar{c}\psi c\phi dx \\ &= c^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx,\end{aligned}$$

pois (u,v) é solução de (S_λ). E além disso, tomando ψ como função teste em (S_{λ_1}), temos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^q dx &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\phi|^\alpha |\psi|^\beta \psi\phi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx.\end{aligned}$$

Desse modo $c^p = \bar{c}^q$. Portando ϕ e ψ tem o mesmo sinal.

Suponha que $\phi > 0$ e $\psi > 0$. Sejam (u,v) solução de (S_λ) e $c, \bar{c}$ tais que, $u = c\phi, v = \bar{c}\psi$, podemos escrever,

$$\frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla c\phi|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{c}\psi|^q dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x) c^{\alpha+1} \bar{c}^{\beta+1} |\phi|^\alpha |\psi|^\beta dx. \tag{3-36}$$

Note que,

$$c^{\alpha+1} = c^{\frac{\alpha+1}{p}p} = (c^p)^{\frac{\alpha+1}{p}} = (\bar{c}^q)^{\frac{\alpha+1}{p}},$$

e,

$$\bar{c}^{\beta+1} = \bar{c}^{\frac{\beta+1}{q}q} = (\bar{c}^q)^{\frac{\beta+1}{q}} = (c^p)^{\frac{\beta+1}{q}},$$

assim,

$$c^{\alpha+1}\bar{c}^{\beta+1} = (c^p)^{\frac{\alpha+1}{p}} (c^p)^{\frac{\beta+1}{q}} = c^p = \bar{c}^q.$$

Desse modo, cancelando c^p e $\bar{c}^q$dos dois lados da Igualdade (3-36), obtemos a seguinte expressão,

$$\frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^q dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\phi|^\alpha |\psi|^\beta dx.$$

Além disso, como (ϕ,ψ) é um autovetor associado ao autovalor λ_1, concluímos que,

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\phi|^{\alpha}|\psi|^{\beta}dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\phi|^{\alpha}|\psi|^{\beta}dx.$$

E assim obtemos que $\lambda = \lambda_1$, pois $\phi > 0,\ \psi > 0$ e $b \not\equiv 0$. □

Observação 9 *Sejam λ um autovalor qualquer, (u,v) uma solução não trivial para o sistema (S_λ) e*

$$c = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta}uvdx.$$

Definamos,

$$\overline{u} = \frac{u}{c^{\frac{1}{p}}} \quad e \quad \overline{v} = \frac{v}{c^{\frac{1}{q}}}.$$

Observe que $(\overline{u},\overline{v})$ também é solução para o sistema (S_λ). De fato,

$$\begin{aligned} -\Delta_p\overline{u} &= \frac{1}{c^{\frac{p-1}{p}}}(-\Delta_p u) \\ &= \frac{1}{c^{\frac{p-1}{p}}}(\lambda b(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta}v) \\ &= \frac{1}{c^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{1}{q}}}(\lambda b(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta}v), \ \ por \ \ (\mathcal{H}_1) \end{aligned}$$

organizando de forma conveniente obtemos que,

$$-\Delta_p\overline{u} = \lambda b(x)|\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{v}.$$

Analogamente, mostra-se que,

$$-\Delta_q\overline{v} = \lambda b(x)|\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{u}.$$

Portanto, temos que $(\overline{u},\overline{v})$ é de fato solução de (S_λ). Além disso, note que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{u}\,\overline{v}dx = 1. \tag{3-37}$$

Portanto, sempre que for conveniente, podemos supor sem perda de generalidade que vale (3-37) para uma solução (u,v) de (S_λ) qualquer que seja o autovalor λ.

Lema 3.7 *Se λ_0 é um autovalor maior que λ_1, então existe uma constante $C > 0$ independente de $\|v_0^-\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}$ e de $\|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$ tal que*

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)} \geq \frac{C}{\lambda_0}, \tag{3-38}$$

onde,

$$U_0^- = \{x \in \mathbb{R}^N;\ u_0(x) < 0\}, \quad V_0^- = \{x \in \mathbb{R}^N;\ v_0(x) < 0\}.$$

Demonstração. Sejam $\lambda_0 > \lambda_1$ um autovalor e (u_0, v_0) uma solução para o sistema (S_{λ_0}), observe que a nomenclatura λ_0 é um abuso de notação no sentido em que estamos usando o índice 0 para denotar um autovalor maior λ_1, ou seja, é outro termo da sequência de autovalores diferente de λ_1 e não o termo 0 da sequência. Sem perda de generalidade, pela Observação 9 podemos supor que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0|^{\alpha}|v_0|^{\beta}u_0v_0dx = 1.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_0$, pelo Teorema 3.6 temos que ao menos uma das funções u_0, v_0 muda de sinal. Enfatizando que o sistema (S_{λ_0}) é dado por,

$$(S_{\lambda_0})\begin{cases} -\Delta_p u_0 = \lambda b(x)|u_0|^{\alpha}|v_0|^{\beta}v_0 \ \ x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v_0 = \lambda b(x)|u_0|^{\alpha}|v_0|^{\beta}u_0 \ \ x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} u_0(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} v_0(x) = 0, \end{cases}$$

multiplicando a primeira igualdade em (S_{λ_0}) por u_0^- e a segunda por v_0^- obtemos,

$$-\Delta_p u_0 u_0^- = \lambda_0 b(x)|u_0|^{\alpha}|v_0|^{\beta}u_0^- v_0 \ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

e

$$-\Delta_q v_0 v_0^- = \lambda_0 b(x)|u_0|^{\alpha}|v_0|^{\beta}u_0 v_0^- \ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

onde, $u_0^-(x) = \max\{-u_0(x), 0\}$, $u_0^+(x) = \max\{u_0(x), 0\}$, $v_0^-(x) = \max\{-v_0(x), 0\}$, $v_0^+(x) = \max\{v_0(x), 0\}$ e note que $u_0 = u_0^+ - u_0^-$ e $v_0 = v_0^+ - v_0^-$. Integrando a primeira igualdade obtida acima e escrevendo u_0 e v_0 em outros termos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_0^+ - u_0^-)|^{p-2}\nabla(u_0^+ - u_0^-)\nabla u_0^- dx = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^+ - u_0^-|^{\alpha}|v_0^+ - v_0^-|^{\beta}u_0^-(v_0^+ - v_0^-)dx,$$

observe que $u_0^+ > 0$ implica $u_0^- = 0$. Desse modo,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^-|^{p-2}\nabla(-u_0^-)\nabla u_0^- dx = \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^+ - v_0^-|^{\beta} u_0^-(v_0^+ - v_0^-)dx,$$

multiplicando os dois lados da igualdade por (-1),

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^-|^p dx &= \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^+ - v_0^-|^{\beta} u_0^-(v_0^- - v_0^+)dx \\
&= \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^+ - v_0^-|^{\beta} u_0^- v_0^- dx - \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^+ - v_0^-|^{\beta} u_0^- v_0^+ dx \\
&= \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^-|^{\beta} u_0^- v_0^- dx - \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^+|^{\beta} u_0^- v_0^+ dx. \qquad (3\text{-}39)
\end{aligned}$$

Analogamente, multiplicando a segunda igualdade de (S_{λ_0}) por v_0^- e repetindo os mesmos argumentos feitos acima,obtemos,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0^-|^q dx = \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^-|^{\beta} u_0^- v_0^- dx - \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^+|^{\beta} u_0^+ v_0^- dx. \qquad (3\text{-}40)$$

As duas integrais a direita da igualdade (3-39) são não negativas, assim como as duas a direita de (3-40), com isso,

$$\|u_0^-\|^p_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^-|^p dx \le \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^-|^{\beta} u_0^- v_0^- dx \le \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha+1}|v_0^-|^{\beta+1} dx, \qquad (3\text{-}41)$$

e

$$\|v_0^-\|^q_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0^-|^q dx \le \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha}|v_0^-|^{\beta} u_0^- v_0^- dx \le \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^-|^{\alpha+1}|v_0^-|^{\beta+1} dx. \qquad (3\text{-}42)$$

Note que, por $(\mathcal{H}_2), b \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N)$ e pelo Teorema C.5, $(u_0^-)^{\alpha+1} \in L^{\frac{p'}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$, e $(v_0^-)^{\beta+1} \in L^{\frac{q'}{\beta+1}}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, por $(\mathcal{H}_1)$ temos que,

$$\frac{\alpha+\beta+2}{N} + \frac{\alpha+1}{p'} + \frac{\beta+1}{q'} = 1,$$

com isso, notando que a integral acima, a direita das desigualdades (3-41) e (3-42), é nula, quando restrita ao conjunto $\mathbb{R}^N/(U_0^- \cap V_0^-)$ e usando as imersões dadas no Teorema C.4

e a desigualdade de Hölder, obtemos,

$$\begin{aligned}\|u_0^-\|^p_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq \lambda_0\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}\|u_0^-\|^{\alpha+1}_{p'}\|v_0^-\|^{\beta+1}_{q'}\\ &\leq \lambda_0 C\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}\|u_0^-\|^{\alpha+1}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\|v_0^-\|^{\beta+1}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)},\end{aligned} \tag{3-43}$$

agora, elevando os dois lados da desigualdade a $\frac{1}{p}$, obtemos,

$$\|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (\lambda_0 C)^{\frac{1}{p}}\|b\|^{\frac{1}{p}}_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}\|u_0^-\|^{\frac{\alpha+1}{p}}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\|v_0^-\|^{\frac{\beta+1}{p}}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)},$$

multiplicando por $\frac{1}{\|u_0^-\|^{\frac{\alpha+1}{p}}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}}$,

$$\|u_0^-\|^{\frac{\beta+1}{q}}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (\lambda_0 C)^{\frac{1}{p}}\|b\|^{\frac{1}{p}}_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}\|v_0^-\|^{\frac{\beta+1}{p}}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)},$$

elevando a desigualdade a $\frac{1}{\beta+1}$ concluímos que,

$$\|u_0^-\|^{\frac{1}{q}}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (\lambda_0 C)^{\frac{1}{p(\beta+1)}}\|b\|^{\frac{1}{p(\beta+1)}}_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}\|v_0^-\|^{\frac{1}{p}}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \tag{3-44}$$

de modo análogo,

$$\|v_0^-\|^{\frac{1}{p}}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq (\lambda_0 C)^{\frac{1}{q(\alpha+1)}}\|b\|^{\frac{1}{q(\alpha+1)}}_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}\|u_0^-\|^{\frac{1}{q}}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}, \tag{3-45}$$

onde C é a constante de imersão em cada caso. De (3-44) e (3-45) temos,

$$\|u_0^-\|^{\frac{1}{q}}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (\lambda_0 C)^{\frac{1}{p(\beta+1)}}\|b\|^{\frac{1}{p(\beta+1)}}_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}(\lambda_0 C)^{\frac{1}{q(\alpha+1)}}\|b\|^{\frac{1}{q(\alpha+1)}}_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}\|u_0^-\|^{\frac{1}{q}}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)},$$

multiplicando por $\frac{1}{\|u_0^-\|^{\frac{1}{q}}_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}(\lambda_0 C)^{\frac{1}{p(\beta+1)}+\frac{1}{q(\alpha+1)}}}$, e elevando a $\frac{1}{\frac{1}{p(\beta+1)}+\frac{1}{q(\alpha+1)}}$, obtemos,

$$\frac{1}{\lambda_0 C} \leq \|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^-\cap V_0^-)}. \tag{3-46}$$

Em outras palavras, existe uma constante $C > 0$, que é o inverso multiplicativo da constante C encontrada em (3-46), independente de $\|v_0^-\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}$ e de $\|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$, tal que, vale a Desigualdade (3-38) como queríamos. □

Observação 10 *Os mesmos argumentos que fizemos na demonstração do Lema 3.7 para obter (3-38) podem ser adaptados de forma que obtenhamos a seguinte desigualdade,*

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^+\cap V_0^+)} \geq \frac{C}{\lambda_0},$$

onde,

$$U_0^+ = \mathbb{R}^N - U_0^- \;\; e \;\; V_0^+ = \mathbb{R}^N - V_0^-.$$

De fato, basta multiplicarmos a primeira igualdade de (S_{λ_0}) *por* u_0^+*, ao invés de* u_0^-*, a segunda por* v_0^+*, ao invés de* v_0^-*, seguindo as mesmas passagens chegaremos em,*

$$\|u_0^+\|^p_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^+|^{\alpha+1}|v_0^+|^{\beta+1}dx,$$

e,

$$\|v_0^+\|^q_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_0^+|^{\alpha+1}|v_0^+|^{\beta+1}dx.$$

o resto segue de forma análoga, apenas substituindo u_0^- *por* u_0^+ *e* v_0^- *por* v_0^+*.*

Teorema 3.8 λ_1 *é isolado, isto é, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo* $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1+\varepsilon]$ *o sistema* (S_λ) *não possui solução.*

Demonstração. Suponha por contradição que λ_1 não seja isolado, desse modo, existe uma sequência $(\lambda_n, u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\times D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ onde (u_n, v_n) é solução de (S_{λ_n}) para todo $n \in \mathbb{N}$ e (λ_n) converge para λ_1. Suponha que para todo n

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta u_n v_n dx = 1,$$

note que com isso, a sequência (u_n, v_n) é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, pois a sequência (λ_n) é convergente. Para qualquer que seja n natural,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx = \lambda_n \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta u_n v_n dx = \lambda_n$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^q dx = \lambda_n \int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta u_n v_n dx = \lambda_n,$$

com isso, suponhamos que (u_n, v_n) converge fracamente para $(\bar{u}, \bar{v})$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ e suponhamos também que $2\lambda_1 > \lambda_n > \lambda_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina,

$$U_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^N;\ u_n(x) > 0\},\ \ U_n^- = \{x \in \mathbb{R}^N;\ u_n(x) < 0\}$$
$$V_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^N;\ v_n(x) > 0\},\ \ V_n^- = \{x \in \mathbb{R}^N;\ v_n(x) < 0\}.$$

Por (3-38) existe $C > 0$ independente de n tal que,

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_n^- \cap V_n^-)} \geq \frac{C}{\lambda_n} \geq \frac{C}{2\lambda_1} > 0. \tag{3-47}$$

Como $b \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N)$, podemos tomar $R > 0$ tal que

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N/B_R)} < \frac{C}{4\lambda_1},$$

desse modo, pelo que obtivemos em (3-47),

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R \cap U_n^- \cap V_n^-)} \geq \frac{C}{4\lambda_1}.$$

Por outro lado, note que, por $(\mathcal{H}_2)$,

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R \cap U_n^- \cap V_n^-)} \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |B_R \cap U_n^- \cap V_n^-|^{\frac{\alpha+\beta+2}{N}}.$$

Portanto, existe uma constante C independente de n e positiva tal que,

$$|B_R \cap U_n^- \cap V_n^-| \geq \left(\frac{C}{4\lambda_1 \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} \right)^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}} = C. \tag{3-48}$$

De modo análogo podemos mostrar que exite uma constante $C > 0$ que independe de n tal que,

$$|B_R \cap U_n^+ \cap V_n^+| \geq C. \tag{3-49}$$

Desse ponto em diante, sempre que aparecer o símbolo R, estaremos assumindo que ele satisfaz (3-48).

Note que,

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m)(\nabla u_n - \nabla u_m)dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^N} b(x)(\lambda_n|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n - \lambda_m|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m)(u_n-u_m)dx \\
= & \int_{B_R} b(x)(\lambda_n|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n - \lambda_m|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m)(u_n-u_m)dx \\
+ & \int_{(B_R^c)} b(x)(\lambda_n|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n - \lambda_m|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m)(u_n-u_m)dx,
\end{aligned} \tag{3-50}
$$

onde $\mathbb{R}^N \setminus B_R = B_R^c$. Usando que b pertence ao espaço $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, separando os termos λ_n dos λ_m na última integral e depois aplicando a Desigualdade de Hölder juntamente com a Triangular, obtemos,

$$
\begin{aligned}
& \|b\|_{\infty}\int_{B_R} (\lambda_n|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n - \lambda_m|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m)(u_n-u_m)dx \\
+ & \lambda_n \int_{(B_R^c)} b(x)(|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n)(u_n-u_m)dx + \lambda_m \int_{(B_R^c)} b(x)(|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m)(u_m-u_n)dx \\
\leq & \|b\|_{\infty}\|\lambda_n|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n - \lambda_m|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m\|_{L^{p'}(B_R)}\|u_m-u_n\|_{L^p(B_R)} \\
+ & \lambda_n\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)}\|u_n\|^{\alpha}_{L^{p^*}(B_R^c)}\|v_n\|^{\beta+1}_{L^{p^*}(B_R^c)}\left(\|u_n\|_{L^{p^*}(B_R^c)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(B_R^c)}\right) \\
+ & \lambda_m\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)}\|u_m\|^{\alpha}_{L^{p^*}(B_R^c)}\|v_m\|^{\beta+1}_{L^{p^*}(B_R^c)}\left(\|u_n\|_{L^{p^*}(B_R^c)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(B_R^c)}\right),
\end{aligned}
$$

usando que a sequência (u_n, v_n) é uma sequência limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante positiva C tal que,

$$
\begin{aligned}
& \|b\|_{\infty}\|\lambda_n|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n - \lambda_m|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m\|_{L^{p'}(B_R)}\|u_m-u_n\|_{L^p(B_R)} \\
+ & \lambda_n\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)}\|u_n\|^{\alpha}_{L^{p^*}(B_R^c)}\|v_n\|^{\beta+1}_{L^{p^*}(B_R^c)}\left(\|u_n\|_{L^{p^*}(B_R^c)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(B_R^c)}\right) \\
+ & \lambda_m\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)}\|u_m\|^{\alpha}_{L^{p^*}(B_R^c)}\|v_m\|^{\beta+1}_{L^{p^*}(B_R^c)}\left(\|u_n\|_{L^{p^*}(B_R^c)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(B_R^c)}\right) \\
\leq & \|b\|_{\infty}\|\lambda_n|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}v_n - \lambda_m|u_m|^{\alpha}|v_m|^{\beta}v_m\|_{L^{p'}(B_R)}\|u_m-u_n\|_{L^p(B_R)} \\
+ & \lambda_n\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)}C + \lambda_m\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)}C.
\end{aligned} \tag{3-51}
$$

Quanto maior for R menores são as duas últimas parcelas de (3-51), além disso por imersões a primeira parcela tende a zero quando n,m tendem ao infinito.

Prosseguindo com a demonstração, para qualquer que seja $\varepsilon > 0$ podemos tomar

R de forma que vale (3-48) e além disso as duas últimas parcelas em (3-51) sejam menores que ε, já que u_n e v_n pertencem a $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $L^q(\mathbb{R}^N)$, respectivamente. Pela imersão compacta de $W^{1,p}(B_R)$ em $L^p(B_R)$ (Teorema C.3), concluímos que $D^{1,p}(B_R)$ está imerso compactamente em $L^p(B_R)$ e com isso a sequência (u_n) converge forte em $L^p(B_R)$ a menos de uma subsequência. Desse modo, tomando uma subsequência, se necessário, $\|u_n - u_m\|_{L^p(B_R)} \xrightarrow{n} 0,\ m > n$. E note também que $(|u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n)$ é limitada em $L^{p'}(B_R)$ pois,

$$\||u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n\|_{p'} = \left(\int_{B_R} ||u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_{B_R} ||u_n|^{\alpha p'} |v_n|^{(\beta+1)p'}| dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \left(\int_{B_R} |u_n|^p dx\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{B_R} |v_n|^q dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}}.$$

Portanto, juntando as desigualdades (3-50) e (3-51), com o argumento do parágrafo acima, temos que,

$$\lim_{m,n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m\rangle dx = 0. \tag{3-52}$$

Se $p \geq 2$, usando a desigualdade de Simon (Lema C.10) temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m\rangle dx \geq C_p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx \tag{3-53}$$

Se $p < 2$ elevando a Desigualdade de Simon a $\dfrac{p}{2}$ temos,

$$(|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^{\frac{2-p}{2}p} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m\rangle^{\frac{p}{2}} \geq C_p |\nabla u_n - \nabla u_m|^p, \tag{3-54}$$

com isso,

$$\begin{aligned} &C_p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^{\frac{2-p}{2}p} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m\rangle^{\frac{p}{2}} dx, \end{aligned}$$

notando que $\dfrac{p}{2}+\dfrac{2-p}{2}=1$, pela desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
& C_p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx \\
& \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m \rangle dx \right)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}
$$

elevando a $\dfrac{2}{p}$, temos,

$$
\begin{aligned}
& C_p^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \\
\leq \quad & \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m \rangle dx \\
\leq \quad & C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^p dx \right)^{\frac{2-p}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m \rangle dx \\
= \quad & C\,(\lambda_n + \lambda_m)^{\frac{2-p}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m \rangle dx,
\end{aligned}
$$

como (λ_n) é uma sequência convergente e portanto limitada, existe ua constante positiva C tal que,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m, \nabla u_n - \nabla u_m \rangle dx \geq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}. \tag{3-55}
$$

Portanto as desigualdades (3-52), (3-53) e (3-55) nos dizem que (∇u_n) é uma sequência de Cauchy em $(L^p(\mathbb{R}^N))^N$.

O argumento acima pode ser reproduzido para a sequência $(\nabla v_n) \subset (L^q(\mathbb{R}^N))^N$ e de igual forma, podemos concluir que essa sequência também é uma sequência de Cauchy. A vista disso, a sequência $(\nabla u_n, \nabla v_n)$ converge forte em $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^q(\mathbb{R}^N))^N$. Juntando isso ao fato de que $(\nabla u_n, \nabla v_n) \rightharpoonup (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{v})$ em $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^q(\mathbb{R}^N))^N$ concluímos pela unicidade do limite fraco que $(\nabla u_n, \nabla v_n) \to (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{v})$ em $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^q(\mathbb{R}^N))^N$. Em outras palavras, $(u_n, v_n) \to (\bar{u}, \bar{v})$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

Note que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^p dx, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^q dx \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{v}|^q dx,$$

e, pelo Teorema C.8,

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n u_n dx \xrightarrow{n} \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\bar{u}|^\alpha |\bar{v}|^\beta \bar{v}\bar{u} dx$$

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^\alpha |v_n|^\beta u_n v_n dx \xrightarrow{n} \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\bar{u}|^\alpha |\bar{v}|^\beta \bar{u}\bar{v} dx,$$

assim, $(\bar{u},\bar{v})$ é solução para o sistema S_{λ_1}. E como $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$ continuamente, temos que $(u_n,v_n) \to (\bar{u},\bar{v})$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$. Isso acarreta que, ou $(\bar{u},\bar{v}) = (u_1,v_1)$ ou $(\bar{u},\bar{v}) = (-u_1,-v_1)$, onde, fazendo um abuso de notação (u_1,v_1) representa uma solução de S_{λ_1} e não o primeiro elemento da sequência (u_n,v_n). Suponha, por exemplo, que $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v)$

Tendo em mãos a convergência $(u_n,v_n) \to (u_1,v_1)$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, a menos de uma subsequência a convergência vale também em $L^p(B_R) \times L^q(B_R)$, desse modo $(u_n,v_n) \xrightarrow{q.t.p} (u_1,v_1)$ em B_R. Logo, pelo Teorema de Egoroff (Teorema A.6), (u_n,v_n) converge uniformemente para (u_1,v_1) em B_R, a menos de um subconjunto de medida arbitrariamente pequena. Isso significa que para n suficientemente grande u_n e v_n são ambos positivos em B_R, exceto em um conjunto de medida arbitrariamente pequena, isso é uma contradição com (3-48), analogamente, o mesmo argumento vale se tivéssemos considerado o caso em que $(\bar{u},\bar{v}) = (u_1,v_1)$ e U_n^+, V_n^+ ao invés de U_n^-, V_n^-, respectivamente, nesse caso a contradição seria em (3-49). A contradição surgiu em supor que λ_1 não é isolado, portanto, concluímos o resultado. □

APÊNDICE A

Teoria da medida

Nesse apêndice apresentaremos as principais definições e resultados da teoria de Medida e Integração que foram usados durante o todo trabalho.

Definições

No decorrer dessa seção X é um conjunto qualquer.

Definição 1 *Uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de um conjunto X é denominada uma σ-álgebra se,*
(i) $\emptyset \in \mathcal{X}$;
(ii) $\forall\, A \in \mathcal{X} \Rightarrow A^c \in \mathcal{X}$;
(iii) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.
Além disso, se $A \in \mathcal{X}$ dizemos que A é mensurável ou $\mathcal{X}$-mensurável

Definição 2 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é denominada mensurável se, para todo número real α o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ é mensurável.*

Definição 3 *Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{X} \to [0,+\infty]$ tal que,*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos, então,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A função característica de um subconjunto arbitrário $A \subset X$ é definida como

$$\chi_A : X \to \mathbb{R};\ \chi_A(x) = 1,\ \forall x \in A,\ \chi_A(x) = 0,\ \forall x \in X/A.$$

Definição 4 *Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é denominada simples se sua imagem é um conjunto finito. Nesse caso,*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i},$$

onde $\Im(f) = \{a_1, ..., a_n\}$ e $\chi(A_i)$ é a função característica do conjunto A_i.

Observação 11 *Note que há uma diferença sutil entre função simples e função escada pois função escada pode assumir um número infinito de valores.*

Definição 5 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{X}$-mensurável, simples e não negativa, definimos a integral de f como,*

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{X}$-mensurável e não negativa, definimos a integral de f como,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sup \int_X g(x) d\mu(x)$$

onde g é uma função simples não negativa tal que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in X$.

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, definimos a parte positiva e a parte negativa de f como sendo respectivamente, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Note que, nesse caso, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Definição 6 *A coleção $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$ é a coleção das funções reais $\mathcal{X}$-mensuráveis, integráveis definidas em X é o conjunto de todas as funções tais que, ambas as partes positiva e negativa f^+ e f^- possuem integrais finitas. Nesse caso, a integral de f com respeito a μ é obtida por,*

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f^+(x) d\mu(x) - \int_X f^-(x) d\mu(x).$$

A terna $(X, \mathcal{X}, \mu)$ é denominada espaço de medida.

Definição 7 *Dizemos que uma sequência de funções em $\mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$ converge para outra função quase todo ponto, e escrevemos $f_n \xrightarrow{q.t.p.} f$, se existe $M \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(M) = 0$ e dado $\varepsilon > 0$ e $x \in X/M$ existe um número natural $\bar{n}$ dependendo de x e de ε tal que,*

$$n > \bar{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Os espaços de Lebesgue L^p

Definição 8 *Seja V um espaço vetorial sob o corpo dos reais, então uma função $\mathcal{N}: V \to \mathbb{R}$ é denominada uma norma V se,*
$(i)\mathcal{N}(v) \geq 0,\ \forall v \in V;$
$(ii)\mathcal{N}(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0;$
$(iii)\mathcal{N}(\alpha v) = |\alpha|\mathcal{N}(v),\ \forall \alpha \in \mathbb{R};$
$(iv)\mathcal{N}(u+v) \leq \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v).$
Se retirarmos a condição (ii) dizemos que $\mathcal{N}$ é uma pseudo-norma. A condição (iv) é denominada desigualdade triangular.

Definição 9 *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida, duas funções em $\mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$ são ditas μ-equivalentes se são iguais q.t.p. ou seja, se o conjunto onde elas são distintas tem medida nula. A μ-equivalência define uma relação de equivalência em $\mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$, onde a classe de equivalência de uma função $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$ é denotada por $[f]$ e consiste de todas as funções que são μ-equivalentes a função f*

Definição 10 *Se $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço $L^p = L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ como o espaço de todas as classes de μ-equivalência em $\mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$ tais que, a integral de $|f|^p$ com respeito a μ é finita, observe que nesse caso estamos usando a função f como o representante de sua classe $[f]$. Além disso, definimos a seguinte norma em L^p,*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 11 *O espaço $L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$ é o espaço de todas as classes de μ-equivalência em $\mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$ tais que $|f|$ é limitada q.t.p Além disso, se f pertence ao espaço L^∞ e $N \in \mathcal{X}$, com medida nula, $\mu(N) = 0$ seja,*

$$S(N) = sup\{|f(x)|; x \notin N\}$$

assim, definimos a seguinte norma em L^∞,

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(N); N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0\}$$

Teorema A.1 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p, g \in L^q, 1 \leq p \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Demonstração: cf.[4].

O caso em que $p = 1$ ou $q = \infty$ é o mais simples, de fato,

$$\|fg\|_1 = \int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Proposição A.2 ***(Extensão da desigualdade de Hölder)*** *Sejam $p_1, ..., p_k \in (1, +\infty)$ tais que, $f_1 \in L^{p_1}, ..., f_k \in L^{p_k}$, e*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

então, $f_1 \cdot ... \cdot f_k \in L^p$ e além disso, $\|f_1 \cdot ... \cdot f_k\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot ... \cdot \|f_k\|_{p_k}$.

Em particular, se $f \in L^p \cap L^q$ onde $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, então $f \in L^r$, $\forall\, r \in [p, q]$ e se verifica a desigualdade de interpolação,

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha},$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $0 \leq \alpha \leq 1$

Proposições

Muitos resultados de grande importância apresentados em um curso de teoria da medida não serão apresentados aqui pois não cabem no escopo desse trabalho, como por exemplo, o teorema da convergência monótona, desigualdade de Minkovsky, representação de Riesz, entre outros.

Lema A.3 ***(Lema de Fatou)*** *Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções $\mathcal{X}$-mensuráveis não negativas. Então,*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Demonstração: *cf.[4] lema 4.8.*

Observação 12 *Nos casos em que a sequência (f_n) do resultado acima é limitada superiormente por uma função integrável temos um resultado análogo ao anterior substituindo o* $\liminf$ *pelo* $\limsup$*, que garante que,*

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x) \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x),$$

a propósito, a demostração desse resultado pode ser obtida seguindo os passos da demostração do teorema da convergência dominada dada em [4].

Teorema A.4 *Uma função f pertence ao espaço $\mathcal{L}$ definido em (6) se, e somente se, $|f|$ pertence a $\mathcal{L}$, e nesse caso,*

$$\left| \int_X f(x)d\mu(x) \right| \leq \int_X |f(x)|d\mu(x).$$

Demonstração: cf.[4] teorema 5.3

Teorema A.5 ***(Convergência dominada de Lebesgue)****Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase todo ponto para para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $q.t.p.$ para todo n, então f é integrável e,*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: *cf.[4].*

Teorema A.6 ***(Teorema de Egoroff)*** *Sejam Ω um conjunto mensurável de medida finita, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_n(x) \xrightarrow{q.t.p.} f(x)$ em Ω. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ mensurável tal que a medida de $\Omega/\Omega_\varepsilon$ é menor que ε e (f_n) converge uniformemente para f em Ω_ε.*

Demonstração:cf.[4] (Teorema 7.12).

Análise

Teorema B.1 *Sejam $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$, onde (x_n) é uma sequência limitada. Dado qualquer ε positivo, existe n_0 natural de tal forma que se n é maior que n_0, então*

$$a - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon.$$

Demonstração cf.[14].

Definição 12 *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo dos reais, e $\phi : E \to (-\infty, +\infty]$ dizemos que ϕ é convexa se,*

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y),\ \forall x, y \in E, t \in (0,1).$$

Definição 13 *Seja E um espaço vetorial normado, dizemos que E é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy converge em E.*

Observação 13 *Com as normas definidas em (10) e (11), é possível mostrar que os espaços L^p e L^∞ são espaços de Banach, essas demostrações são feitas em [6] teorema 4.8 conhecido como Teorema de Fischer-Riesz*

Topologia fraca: Definição e propriedades

Definição 14 *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ denotamos por E^* e denominamos de espaço dual de E ao espaço de todas os funcionais lineares contínuos em E. A norma dual é definida como,*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|f(x)|; x \in E\}$$

Definição 15 *Seja E um espaço de Banach e E^* seu dual, a topologia fraca denotada por $\sigma(E, E^*)$ é a menor topologia, no sentido em que possui menos abertos, tal que todo elemento de E^* é contínuo.*

Proposição B.2 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, M um subconjunto fechado e convexo de X e $I : M \to \overline{\mathbb{R}}$ um funcional Gâteaux diferenciável, onde $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Denotando por DI a derivada de Gâteaux de I então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *I é convexo sobre M*

(b) $I(u) - I(v) \geq \langle DI(v), u - v \rangle_{X^* \times X}$, $\forall u, v \in M$.

(c) *A primeira derivada de Gâteaux é monotônica, isto é,*

$$\langle DI(u) - DI(v), u - v \rangle_{X^* \times X} \geq 0, \ \forall u, v \in M.$$

(d) *A segunda derivada de Gateâux exite e é não negativa, ou seja,*

$$\langle D^2 I(u) \circ v, v \rangle_{X^* \times X} \geq 0, \ \forall v \in M.$$

Demonstração cf.[2]

Definição 16 *Dizemos que uma sequência (x_n) converge fraco, em relação a topologia fraca de E, para x em E e denotamos por,*

$$x_n \rightharpoonup x$$

se $f(x_n) \to f(x)$ ou $|f(x_n) - f(x)| \to 0$, para todo $f \in E^*$.

Analogamente ao modo como definimos a topologia fraca de E podemos definir a topologia fraca de E^*, denominada topologia $fraca^*$, como é feito em [6]. Essa definição abre caminhos para proposições interessantes sobre espaços de Banach reflexivos que não enunciaremos aqui.

Proposição B.3 *Seja (x_n) uma sequência em E. Então,*
(i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$;
(ii) $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$;
(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ *então,* $(\|x_n\|)$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$;
(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$ *e se* $f_n \to f$ *em* E^*, *então,* $f_n(x_n) \to f(x)$.

Demonstração:cf.[6](proposição 3.5)

Definição 17 *Seja X um espaço vetorial normado, e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que J é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente (f.s.s.c.i.) se para toda sequência (u_n) contida em X tal que $u_n \rightharpoonup u$, tivermos que, $J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$.*

Analogamente, dizemos que J é sequencialmente semicontínuo inferiormente (s.s.c.i.) se, para toda sequência (u_n) contida em X tal que $u_n \to u$, tivermos que, $J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$.

Note que, pela definição acima e o item (iv) da proposição anterior temos que a norma é sempre $f.s.s.c.i.$

Proposição B.4 *Se $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ é convexo e (s.s.c.i.). Então, φ é (f.s.s.c.i.).*

Demonstração:cf.[6](Corolário 3.9)

Definição 18 *Seja X um espaço vetorial normado, e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional, dizemos que J é coercivo se, $\lim_{\|u\|\to+\infty} J(u) = +\infty$.*

Lema B.5 *Seja X um espaço de Banach com respeito a norma $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ se r é um número real positivo, então $\|\cdot\|^r$ é $f.s.s.c.i.$*

Teorema B.6 *Seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional contínuo e convexo em um espaço de Banach X. Então I é $f.s.s.c.i.$*

O resultado enunciado a seguir, é uma espécie de teorema de Weierstrass,

Proposição B.7 *Seja X um espaço de Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional coercivo e fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente (f.s.s.c.i.), então J possui ponto crítico.*

Proposição B.8 *(Desigualdade de Hölder para somas) Sejam $u = (x_1, ..., x_n), v = (y_1, ..., y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$, então,*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

onde, q é o conjugado de p, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Proposição B.9 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam, p, p' pertencentes a $\mathbb{R}$ tais que $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}, \ \forall\, a, b \geq 0$$

Equações elípticas

Espaços de Sobolev

Definição 19 *Dizemos que um vetor* $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^N$ *é um multi-índice e usamos a seguinte notação* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$

cf. [10]

Definição 20 *Sejam,* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, *e* α *um multi-índice. Dizemos que* v *é a derivada parcial fraca de ordem* α *de* u *e escrevemos,*

$$D^\alpha u = v,$$

se

$$\int_\Omega u(D^\alpha \varphi)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

cf. [10].

Definição 21 *Seja* m *um inteiro positivo e* $1 \leq p \leq +\infty$ *definamos,*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{\infty,p} = \max_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

cf. [1].

Definição 22 *O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *é o conjunto de todas as funções* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que para todo multi-índice* α *satisfazendo* $|\alpha| \leq k$, *a derivada* $D^{\alpha}u$ *existe e pertence a* $L^p(\Omega)$.

Observação 14 *Quando* $p = 2$ *temos um caso especial onde o espaço de Sobolev é um espaço de Hilbert e nesse caso denotamos* $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

Observação 15 *Denotamos por* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *ao conjunto de todas as funções que pertencem a* $W^{k,p}(\Omega)$ *e satisfazem* $D^{\alpha}u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ $\forall |\alpha| < k$.

Proposição C.1 ***(Diferenciação de um produto)*** *Sejam* $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}v + u\frac{\partial}{\partial x_i}v, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Demonstração: cf.[6]

Imersões de Sobolev

Definição 23 *O número* $\dfrac{Np}{N - kp}$ *denotado por* p^* *é denominado expoente crítico de Sobolev para as imersões de* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *em* $L^q(\Omega)$.

Teorema C.2 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto, limitado e com bordo suave. Seja* $p > 1$.
Se $p < N$, *então* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [1, p^*]$; *a imersão é compacta para todo* $q \in [1, p^*)$.
Se $p = N$, *então* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [1, +\infty)$; *e a imersão é compacta.*
Se $p > N$, *então* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$; *a imersão é compacta.*

Teorema C.3 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado de classe* $C^{1,\alpha}$.

(i) Se $kp > N$, *então* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ *continuamente, e a imersão é compacta em* $L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [1, p^*)$;

(ii) Se $0 \leq m < k - \frac{N}{p} < m + 1$, *o espaço* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ *continuamente, onde* $\alpha = k - \frac{N}{p} - m$, *e a imersão é compacta em* $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$, *se* $\beta < \alpha$.

cf. [11]

Definição 24 *Dado* $1 \leq p < +\infty$

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N), \ \forall\, i = 1, \ldots, N \right\}$$

cf. [3]

Teorema C.4 *Seja $N \geq 3$. Então,*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ \forall q \in [2, 2^*];$$
$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

As imersões acima não são compactas.

cf. [3]

A seguinte proposição é a junção dos corolários IX.10, IX.11 e IX.12 de [5].

Proposição C.5 *Se $1 \leq p < N$, então,*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ \forall\ q \in [p, p^*].$$

Se $p = N$, então,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),\ \forall\ q \in [p, +\infty).$$

Se $p > N$, então,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Onde p^* é o expoente crítico de Sobolev.

Demonstração: cf.[5].

Resultados utilizados

Teorema C.6 *Seja X um espaço de Banach, $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}, \mathcal{G} = (G_1, ..., G_N) : X \to \mathbb{R}$. Suponha que $\mathcal{F}$ assume máximo ou mínimo local sobre o conjunto,*

$$M = \{x \in X; \mathcal{G}(x) = 0\} \ \text{em}\ \ a \in M.$$

Se a é ponto regular de $\mathcal{G}$ e além disso, existe uma vizinhança U de a em X tal que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ pertencem ao conjunto $C^1(U)$, então existem números reais $\lambda_1, ..., \lambda_N$ tais que,

$$\left(\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_i\right) = 0.$$

Demonstração:[15](Teorema 7.8.2)

Definição 25 ***(Função Carathéodory)*** *Considere os inteiros $j, m_1, ..., m_j$, dizemos que a aplicação $a : \Omega \times \mathbb{R}^{m_1} \times ... \times \mathbb{R}^{m_j}$ é Carathéodory se $a(\cdot, r_1, ..., r_j) : \Omega \to \mathbb{R}^{m_0}$ é mensurável para todo $(r_1, ..., r_j)$ em $\mathbb{R}^{m_1} \times ... \times \mathbb{R}^{m_j}$ e $a(x, \cdot) : \mathbb{R}^{m_1} \times ... \times \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}^{m_0}$ é contínua q.t.p. x em Ω.*

cf.[17]

Definição 26 ***(Operador de Nemytskii)*** *Com as notações estabelecidas pela definição anterior denominamos de Operador de Nemytskii uma aplicação que associa as funções $u_i : \Omega \to \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, ..., j$ a função $\mathcal{N}_a(u_1, ..., u_j) : \Omega \to \mathbb{R}^{m_0}$ definido por,*

$$[\mathcal{N}_a(u_1, ..., u_j)](x) = a(x, u_1(x), ..., u_j(x)).$$

cf.[17]

Teorema C.7 ***(Operador de Nemytskii em Espaços de Lebesgue)*** *Se $a : \Omega \times \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}^{m_0}$ é uma aplicação Carathéodory e as funções $u_i : \Omega \to \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, ..., j$ são mensuráveis, então $\mathcal{N}_a(u_1, ..., u_j)$ é mensurável. Além disso, se a satisfaz a condição de crescimento,*

$$|a(x, r_1, ..., r_j)| \leq \gamma(x) + C\sum_{i=1}^{j} |r_i|^{\frac{p_i}{p_0}} \text{ para algum } \gamma \in L^{p_0}(\Omega). \tag{C-1}$$

com, $1 \leq p_i < +\infty$, $1 \leq p_0 < +\infty$, então $\mathcal{N}_a$ é uma aplicação limitada e contínua de $L^{p_1}(\Omega; \mathbb{R}^{m_1}) \times \cdots \times L^{p_j}(\Omega; \mathbb{R}^{m_j})$ em $L^{p_0}(\Omega; \mathbb{R}^{m_0})$. Se para algum i tivermos $p_i = +\infty$ o mesmo vale se substituirmos o termo $|\cdot|^{\frac{p_i}{p_0}}$ por uma função contínua.

Demonstração:cf.[17](Teorema 1.27)

Para podermos demonstrar o Teorema 3.4 definamos os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como segue,

$$\mathcal{A}(u,v) = \frac{\alpha+1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{\beta+1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx \tag{C-2}$$

$$\mathcal{B}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta} uv dx. \tag{C-3}$$

Assumiremos sem demonstração que os funcionais definidos acima são de classe C^1 e demonstraremos o seguinte Lema sobre a semicontinuidade fraca do funcional B.

Teorema C.8 *Sejam $(u_n, v_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ tal que (u_n, v_n) converge fracamente para (u, v) em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. A menos de uma subsequência $\mathcal{B}(u_n, v_n)$ converge forte para $\mathcal{B}(u, v)$. Além disso, se $B'(u, v) \equiv 0$ então $B(u, v) = 0$.*

Demonstração. Seja R um número remal positivo, podemos escrever B da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u_n,v_n)-\mathcal{B}(u,v)| &= \left|\int_{B_R} b(x)(|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}u_nv_n-|u|^{\alpha}|v|^{\beta}uv)dx\right| \\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^N/B_R} b(x)(|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}u_nv_n-|u|^{\alpha}|v|^{\beta}uv)dx\right|. \end{aligned} \tag{C-4}$$

Trabalhando com a segunda parcela da igualdade acima,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N/B_R} |b(x)|(||u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}u_nv_n|+||u|^{\alpha}|v|^{\beta}uv|)dx \\ \leq &\int_{\mathbb{R}^N/B_R} |b(x)|||u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1}dx+\int_{\mathbb{R}^N/B_R} |b(x)|||u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx \end{aligned}$$

Por hipótese temos que u_n converge fraco para u em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e com isso (u_n) é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, além disso $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ está imerso em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ continuamente acarretando que (u_n) é limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Com um argumento análogo podemos concluir que (v_n) é limitada em $L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$. Com isso em mãos e usando a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N/B_R} |b(x)|||u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1}dx+\int_{\mathbb{R}^N/B_R} |b(x)|||u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx \\ &\leq ||b||_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N/B_R)}||u_n||^{\alpha+1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N/B_R)}||v_n||^{\beta+1}_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N/B_R)} \\ &+||b||_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N/B_R)}||u||^{\alpha+1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N/B_R)}||v||^{\beta+1}_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N/B_R)}. \end{aligned}$$

Além disso dado ε positivo. Do fato de b pertencer ao espaço $L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N)$ é possível tomar R de modo que,

$$\begin{aligned} &||b||_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N/B_R)}||u_n||^{\alpha+1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N/B_R)}||v_n||^{\beta+1}_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N/B_R)} \\ &+||b||_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N/B_R)}||u||^{\alpha+1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N/B_R)}||v||^{\beta+1}_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N/B_R)} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{C-5}$$

Trabalharemos agora com a primeira parcela da igualdade (C-4). O operador restrição de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para $D^{1,p}(B_R)$ é contínuo e a imersão de $D^{1,p}(B_R)$ em $L^p(B_R)$ é compacta, com isso, a menos de uma subsequência (u_n) converge forte para u em $L^p(B_R)$ e analogamente (v_n) converge forte para v em $L^q(B_R)$, assim u em $L^{\alpha+1}(B_R)$ e analogamente (v_n) converge forte para v em $L^{\beta+1}(B_R)$ pois $\alpha+1$ é menor que p e $\beta+1$ é menor que q já que,

$$\frac{\alpha+1}{p}+\frac{\beta+1}{q}=1.$$

Seja $h : B_R \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por,

$$h(x,s,t)=b(x)|s|^{\alpha+1}|t|^{\beta+1}. \tag{C-6}$$

$h(x,\cdot,\cdot)$ é contínua $q.t.p.\ x \in B_R$ e $h(\cdot,s,t)$ é mensurável para todo $(s,t)\in\mathbb{R}^2$. Pelo (C.7) o operador de Nemytskii $\mathcal{N}_h : L^{\alpha+1}(B_R)\times L^{\beta+1}(B_R)\to L^1(B_R)$ está definido e é contínuo, com isso,

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{B_R} b(x)(|u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1}-|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1})dx\right| &= \left|\int\limits_{B_R}(\mathcal{N}_h(u_n,v_n)-\mathcal{N}_h(u,v))dx\right|\\ &\le \|\mathcal{N}_h(u_n,v_n)-\mathcal{N}_h(u,v)\|_{L^1(B_R)}\to 0.\end{aligned}$$

Portanto com um argumento análogo ao que fizemos para a primeira parcela da igualdade (C-4) e para o R fixado anteriormente, existe n_0 natural tal que para todo n maior que n_0 temos que,

$$\left|\int\limits_{B_R} b(x)(|u_n|^{\alpha}|v_n|^{\beta}u_nv_n-|u|^{\alpha}|v|^{\beta}uv)dx\right|\le\frac{\varepsilon}{2}. \tag{C-7}$$

Juntando as desigualdades (C-5) e (C-7) concluímos que,

$$|\mathcal{B}(u_n,v_n)-\mathcal{B}(u,v)|\to 0 \text{ se } n\to+\infty.$$

Suponha que para $(\overline{u},\overline{v})$ tenhamos $B'(\overline{u},\overline{v})\equiv 0$, assim,

$$(\alpha+1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\overline{u}\psi dx+(\beta+1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\overline{u}|^{\alpha}|\overline{v}|^{\beta}\phi v dx=0,\ \ \forall(\phi,\psi)$$

tomando $(\phi,\psi)=(\overline{u},\overline{v})$ temos que,

$$(\alpha+\beta+2)B(\overline{u},\overline{v})=0.$$

□

Nesse ponto note as aplicações definidas em (C-2) e (C-3) satisfazem as condições do Teorema C.6 juntando isso ao resultado provado anteriormente, Teorema C.8, concluímos o item (i) do Teorema 3.4.

Teorema C.9 *Suponha* $(\mathcal{H}_1)$ *e* $(\mathcal{H}_2)$. *Seja* (u,v) *uma solução para* (S_λ). *Então, para todo* x *em* $\mathbb{R}^N$ *e* R *real positivo, existe uma constante* K *dependendo de* p,q,N,λ *e* $\|b\|_\infty$ *tal que,*

$$\|u\|_{L^\infty(B_R)} \leq K(1+R^{p-1})^{\frac{N}{pq}} \max\left\{R^{-N}\|u\|_{L^{p*}(B_{2R})}, R^{-\frac{Nq}{p}}\|v\|_{L^{q*}(B_{2R})}\right\}$$
$$\|v\|_{L^\infty(B_R)} \leq K(1+R^{p-1})^{\frac{N}{q^2}} \max\left\{R^{-\frac{Np}{q}}\|u\|_{L^{p*}(B_{2R})}, R^{-N}\|v\|_{L^{q*}(B_{2R})}\right\}.$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}^N$, $R > 0$. Para $y \in B_{2R}(x)$, qualquer que seja a função $h : B_{2R}(x) \to \mathbb{R}$ definamos,

$$h^*(t) = h(x), \text{ onde, } t = \frac{y-x}{R}.$$

Seja (u,v) uma solução para (S_λ), assim

$$-\Delta_p u = \lambda b(x)|u|^\alpha|v|^\beta v \text{ em } \mathbb{R}^N$$
$$-\Delta_q v = \lambda b(x)|u|^\alpha|v|^\beta u \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Note que,

$$u(x) = u^*\left(\frac{y-x}{R}\right) \text{ e } v(x) = v^*\left(\frac{y-x}{R}\right),$$

substituindo isso nas igualdades anteriores obtemos,

$$-\Delta_p u^* = \lambda R^{p-1} b^*(x)|u^*|^\alpha|v^*|^\beta v^* \tag{C-8}$$
$$-\Delta_p u^* = \lambda R^{p-1} b^*(x)|u^*|^\alpha|v^*|^\beta v^*. \tag{C-9}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $p > q$, por $(\mathcal{H}_1)$, $N > p > q > 1$. Para qualquer que seja a bola B contida em $B_{2R}(0)$, tomando $c = \frac{N}{N-q} > 1$, note que,

$$N-q > N-p \Rightarrow \frac{N}{N-q} < \frac{N}{N-p} \Rightarrow pc < p^* \Rightarrow L^{p^*}(B) \hookrightarrow L^{pc}(B) \text{ continuamente,}$$

portanto, exite uma constante $K > 0$ tal que, para todo $w \in L^{p^*}(B)$ vale a desigualdade $\|w\|_{L^{cp}(B)} \leq K\|w\|_{p^*(B)}$ com isso, por imersões de Sobolev,

$$w \in W_0^{1,p}(B) \Rightarrow \|w\|_{L^{cp}(B)} \leq K\|\nabla w\|_{L^p(B)}. \tag{C-10}$$

Além disso,

$$w \in W_0^{1,q}(B) \Rightarrow \|w\|_{L^{cq}(B)} = \|w\|_{L^{q^*}(B)} \leq K\|\nabla w\|_{L^q(B)}. \tag{C-11}$$

Definamos as seguintes sequências,

$$\begin{aligned} p_n = pc^n \quad & e \quad q_n = qc^n \\ m_n = p(c^n - 1) \quad & e \quad t_n = q(c^n - 1) \end{aligned}$$

e a sequência recursiva,

$$\rho_0 = 2, \ \rho_n = 2 - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{i-1} c^{-\frac{i}{p'}} \text{ para todo} n \geq 1.$$

$$\text{onde, } \sigma = \sum_{i=0}^{\infty} c^{-\frac{i}{p'}}$$

lembremos que,

$$p^* = \frac{pN}{N-p}, \ \ p' = \frac{p}{p-1}.$$

Note que, como foi definido acima, $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$, além disso, $\rho_{n+1} < \rho_n$, $\forall n \geq 1$ com isso, $B_{\rho_{n+1}}(0) \subset B_{\rho_n}(0)$. Usaremos a seguinte notação $B_{\rho_n} = B_{\rho_n}(0)$. Fixado n, seja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo,

$$0 \leq \eta \leq 1, \ \eta \equiv 1 \text{ em } B_{\rho_{n+1}} \text{ e } supp(\eta) \subset B_{\rho_n}.$$

Além disso, suponha também que,

$$|\nabla \eta(x)| \leq Kc^{\frac{n}{p'}} \ \forall x \in B_{\rho_n}. \tag{C-12}$$

Multiplicando (C-8) pela função teste $|u^*|^{m_n}u^*\eta^p|$ e integrando sobre B_{ρ_n}, obtemos,

$$\begin{aligned} (1+m_n)\int_{B_{\rho_n}} \eta^p|u^*|^{m_n}|\nabla u^*|^p dx + p\int_{B_{\rho_n}} \eta^{p-1}\nabla\eta\cdot\nabla u^*|u^*|^{m_n}u^*|\nabla u^*|^{p-2}dx \\ = \lambda R^{p-1}\int_{B_{\rho_n}} b^*(x)|u^*|^{\alpha+m_n}|v^*|^\beta u^* v^* \eta^p dx \end{aligned} \tag{C-13}$$

Sejam,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (1+m_n)\int\limits_{B_{\rho n}} \eta^p |u^*|^{m_n} |\nabla u^*|^p dx \\
I_2 &= p\int\limits_{B_{\rho n}} \eta^{p-1}\nabla\eta\cdot\nabla u^* |u^*|^{m_n} u^* |\nabla u^*|^{p-2} dx \\
I_3 &= \lambda R^{p-1}\int\limits_{B_{\rho n}} b^*(x)|u^*|^{\alpha+m_n}|v^*|^{\beta} u^* v^* \eta^p dx.
\end{aligned}
$$

Definamos,

$$E_n = \max\{\|u^{c^n}\|^p_{L(B_{\rho_n})}, \|v^{c^n}\|^q_{L^q(B_{\rho_n})}\}.$$

Afirmamos que existe uma constante K positiva de tal forma que, $|I_3| \leq R^{p-1}KE_k$. De fato, observe inicialmente que, por $(\mathcal{H}_1)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha+1+m_n}{p_n} + \frac{\beta+1}{q_n} &= \frac{\alpha+1+p(c^n+1)}{pc^n} + \frac{\beta+1}{qc^n} \\
&= \frac{1}{c^n}\left[\frac{\alpha+1}{p} + c^n - 1 + \frac{\beta+1}{q}\right] = 1,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\frac{p_n}{\alpha+1+m_n} \text{ e } \frac{q_n}{\beta+1} \text{ são conjugados.} \tag{C-14}$$

Como por hipótese $0 \leq \eta \leq 1$ temos,

$$|I_3| \leq \lambda R^p \|b^*\|_\infty \int\limits_{B_{\rho n}} |u^*|^{\alpha+m_n+1}|v^*|^{\beta+1} dx \tag{C-15}$$

Usando (C-14) e aplicando a desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_{\rho n}} |u^*|^{\alpha+m_n+1}|v^*|^{\beta+1} dx &\leq \left(\int\limits_{B_{\rho n}} |u^*|^{p_n} dx\right)^{\frac{\alpha+1+m_n}{p_n}} \left(\int\limits_{B_{\rho n}} |v^*|^{q_n} dx\right)^{\frac{\beta+1}{q_n}} \\
&= \|u^*\|^{\frac{\alpha+1+m_n}{c^n}}_{L^p(B_{\rho_n})} \|v^*\|^{\frac{\beta+1}{c^n}}_{L^q(B_{\rho_n})},
\end{aligned}
$$

multiplicando e dividindo os expoentes por p e q respectivamente ganhamos,

$$\begin{aligned}\|u^*\|_{L^p(B_{\rho_n})}^{\frac{\alpha+1+m_n}{c^n}}\|v^*\|_{L^q(B_{\rho_n})}^{\frac{\beta+1}{c^n}} &= \left(\|u^*\|_{L^p(B_{\rho_n})}^{p}\right)^{\frac{\alpha+1+m_n}{pn}}\left(\|v^*\|_{L^q(B_{\rho_n})}^{q}\right)^{\frac{\beta+1}{qn}}\\ &\leq (E_n)^{\frac{\alpha+1+m_n}{pn}}(E_n)^{\frac{\beta+1}{qn}} = E_n.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|I_3| \leq KR^{p-1}E_n, \text{ onde } K = \lambda\|b^*\|_\infty. \tag{C-16}$$

Mostraremos em seguida que existe uma constante positiva K tal que,

$$|I_2| \leq \frac{1}{2}|I_1| + KE_n, \tag{C-17}$$

Note que, $p > 1$ e $c^n > 1$. Assim,

$$c^n < (p-1)(c^n-1) + c^n = p(c^n-1) + 1 = m_n + 1, \tag{C-18}$$

observe também que,

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq p\int_{B_{\rho_n}} \eta^{p-1}|\nabla\eta||\nabla u^*|^{p-1}|u^*|^{m_n+1}dx\\ &= p\int_{B_{\rho_n}} (\eta^{p-1}|\nabla u^*|^{p-1}|u^*|^{(p-1)(c^n-1)})(|u^*|^{c^n}|\nabla\eta|)dx, \quad \text{por (C-18)}.\end{aligned}$$

Seja $s > 0$, tal que $2ps^{p'} \leq p'$. Utilizando a desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}& p\int_{B_{\rho_n}} sc^{\frac{n}{p'}}(\eta^{p-1}|\nabla u^*|^{p-1}|u^*|^{(p-1)(c^n-1)})\frac{1}{sc^{\frac{n}{p'}}}(|u^*|^{c^n}|\nabla\eta|)dx\\ &\leq \frac{ps^{p'}c^n}{p'}\int_{B_{\rho_n}} \eta^p|\nabla u^*|^p|u^*|^{m_n}dx + \frac{1}{s^pc^{n\frac{p}{p'}}}\int_{B_{\rho_n}} |\nabla\eta|^p|u^*|^{pc^n}dx.\end{aligned}$$

Vimos em (C-18) que $c^n < 1 + m_n$, juntando isso a desigualdade (C-12) obtemos,

$$|I_2| \leq \frac{1}{2}|I_1| + \frac{K}{s^pc^p}\int_{B_{\rho_n}} |u^*|^{pc^n}dx \leq \frac{1}{2}|I_1| + KE_n.$$

Agora note que por (C-10),

$$\begin{aligned}
\|\eta u^{*c^n}\|^p_{L^{cp}(B_{\rho_n})} &\leq K\|\nabla(\eta u^{*c^n})\|^p_{L^{cp}(B_{\rho_n})} \\
&= K\int_{B_{\rho_n}} |\nabla\eta u^{*c^n} + \eta c^n u^{*c^n-1}\nabla u^*|^p dx \\
&\leq K\left(\int_{B_{\rho_n}} |\nabla\eta|^p|u^*|^{pc^n}dx + c^{np}\int_{B_{\rho_n}} \eta^p|u^*|^{p(c^n-1)}|\nabla u^*|^p dx\right),
\end{aligned}$$

trabalharemos as duas integrais do parêntese anterior separadamente. Da primeira integral temos,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\rho_n}} |\nabla\eta|^p|u^*|^{pc^n}dx &\leq K^p c^{\frac{np}{p'}}\int_{B_{\rho_n}} |u^*|^{pc^n}dx \text{ por (C-12)} \\
&\leq Kc^{n(p-1)}E_n. \qquad \text{(C-19)}
\end{aligned}$$

Para a segunda integral, vejamos inicialmente que,

$$\frac{c^{np}}{m_n+1} = \frac{c^{np}}{(p-1)(c^n-1)+c^n} \leq \frac{c^{np}}{c^n} = c^{n(p-1)},$$

a vista disso,

$$c^{np}\int_{B_{\rho_n}} \eta^p|u^*|^{p(c^n-1)}|\nabla u^*|^p dx = \frac{c^{np}}{m_n+1}I_1 = c^{n(p-1)}I_1. \qquad \text{(C-20)}$$

Por (C-13), (C-16), (C-17), (C-19) e (C-20) obtemos,

$$\|\eta u^{*c^n}\|^p_{L^{cp}(B_{\rho_n})} \leq (1+R^{p-1})Kc^{n(p-1)}E_n, \qquad \text{(C-21)}$$

pois,

$$|I_1| - \frac{1}{2}|I_1| - KE_n \leq |I_1| - |I_2| \leq |I_3| \leq 2R^{p-1}KE_n.$$

Analogamente, multiplicando (C-9) por $|v^*|^{t_n}v^*\eta^q$ e integrando em B_{ρ_n} obtemos,

$$\|\eta v^{*c^n}\|^q_{L^{cq}(B_{\rho_n})} \leq (1+R^{p-1})Kc^{n(p-1)}E_n. \qquad \text{(C-22)}$$

Considere a sequência $\Theta_n = E_n^{\frac{1}{\rho_n}}$. Observe que, para qualquer n natural,

$$
\begin{aligned}
\Theta_{n+1} &= \max\left\{ \|u^{c^{n+1}}\|_{L^p(B_{\rho_{n+1}})}^{\frac{p}{p_{n+1}}}, \|v^{c^{n+1}}\|_{L^q(B_{\rho_{n+1}})}^{\frac{q}{p_{n+1}}} \right\} \\
&= \max\left\{ \|u^{c^n}\|_{L^{pc}(B_{\rho_{n+1}})}^{\frac{pc}{pc^{n+1}}}, \|v^{c^n}\|_{L^{qc}(B_{\rho_{n+1}})}^{\frac{qc}{pc^{n+1}}} \right\} \\
&= \max\left\{ \|\eta u^{c^n}\|_{L^{pc}(B_{\rho_{n+1}})}^{\frac{p}{p_n}}, \|\eta v^{c^n}\|_{L^{qc}(B_{\rho_{n+1}})}^{\frac{q}{p_n}} \right\}, \text{ pois } \eta \equiv 1 \text{ em } B_{\rho_{n+1}} \\
&\leq \max\left\{ \|\eta u^{c^n}\|_{L^{pc}(B_{\rho_n})}^{\frac{p}{p_n}}, \|\eta v^{c^n}\|_{L^{qc}(B_{\rho_n})}^{\frac{q}{p_n}} \right\} \\
&\leq \{(1+R^{p-1})K\}^{\frac{1}{p_n}} c^{\frac{n(p-1)}{p_n}} \Theta_n, \text{ por (C-21) e (C-22).}
\end{aligned} \tag{C-23}
$$

Além disso,

$$
\|u^*\|_{L^p(B_{\rho_n})} = \|u^{*c^n}\|_{L^p(B_{\rho_n})}^{\frac{1}{c^n}} = \left(\|u^{*c^n}\|_{L^p(B_{\rho_n})}^{p} \right)^{\frac{1}{c^n}} \leq \Theta_n. \tag{C-24}
$$

Por outro lado, aplicando recursivamente (C-23) em (C-24) obtemos,

$$
\begin{aligned}
\|u^*\|_{L^p(B_{\rho_n})} \leq \Theta_n &\leq \{(1+R^{p-1})K\}^{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{pc^i}} c^{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(p-1)}{pc}} \Theta_0 \\
&= \{(1+R^{p-1})K\}^{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{pc^i}} c^{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(p-1)}{pc}} \max\left\{ \|u\|_{L^p(B_2)}, \|v\|_{L^q(B_2)}^{\frac{q}{p}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Note que, pela expressão para soma da PG infinita,

$$
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{pc^i} = \frac{1}{p} \frac{c}{c-1} = \frac{N}{pq}.
$$

Como $\rho_n \to 1$ e $p_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$ concluímos que,

$$
\begin{aligned}
\|u^*\|_{L^\infty(B_1)} &\leq \limsup_{n\to\infty} \|u^*\|_{L^{p_n}(B_{\rho_n})} \\
&\leq K\left(1+R^{p-1}\right)^{\frac{N}{pq}} \max\left\{ \|u\|_{L^p(B_2)}, \|v\|_{L^q(B_2)}^{\frac{q}{p}} \right\} \\
&\leq K\left(1+R^{p-1}\right)^{\frac{N}{pq}} \max\left\{ \|u\|_{L^{p^*}(B_2)}, \|v\|_{L^{q^*}(B_2)}^{\frac{q}{p}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, definindo $\Psi_n = E_n^{\frac{1}{q_n}}$, por (C-21) e (C-22) e usando que $p > q$, temos,

$$
\Psi_{n+1} \leq \left\{(1+R^{p-1})K\right\}^{\frac{1}{q}} c^{\frac{n(p-1)}{q_n}} \Psi_n
$$

e

$$\|v^*\|_{L^\infty(B_1)} \leq K\left(1+R^{p-1}\right)^{\frac{N}{q^2}} \max\left\{\|u\|^{\frac{p}{q}}_{L^{p^*}(B_2)}, \|v\|_{L^{q^*}(B_2)}\right\}.$$

Considere a seguinte mudança de variáveis $h : B_R \to B_1$ definida por,

$$h(x) = \frac{x}{R}.$$

Aplicando o teorema da mudança de variáveis, pelo que fizemos anteriormente temos que,

$$\|u\|_{L^\infty(B_R)} \leq K(1+R^{p-1})^{\frac{N}{pq}} \max\left\{R^{-N}\|u\|_{L^{p*}(B_{2R})}, R^{-\frac{Nq}{p}}\|v\|_{L^{q*}(B_{2R})}\right\}$$
$$\|v\|_{L^\infty(B_R)} \leq K(1+R^{p-1})^{\frac{N}{q^2}} \max\left\{R^{-\frac{Np}{q}}\|u\|_{L^{p*}(B_{2R})}, R^{-N}\|v\|_{L^{q*}(B_{2R})}\right\}.$$

□

Lema C.10 *Seja $p > 1$. Existe uma constante $C_p > 0$ tal que, para todo x, y em $\mathbb{R}^N$,*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y\right\rangle \geq \begin{cases} C_p|x-y|^p, & se \ \ p \geq 2 \\ C_p\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \ \ p < 2 \end{cases} \tag{C-25}$$

Demonstração: cf.[16]

Lema C.11 *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado. Se, para qualquer $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$ com $\rho < R_0$ e $\sigma \in (0,1)$, $k \geq k_0 > 0$,*

$$\int\limits_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |\nabla u|^p dx \leq C\left[\int\limits_{A_{k,\rho}} \left|\frac{u-k}{\sigma\rho}\right|^{p^*} dx + (k^r+1)|A_{k,\rho}|\right]. \tag{C-26}$$

Onde, $0 \leq r \leq p^*$ e $A_{k,\rho} = \{x \in B_\rho(x_0); u(x) > k\}$. Então u é localmente limitada em Ω.

cf. [18] (Lema 3.1)

Lema C.12 *Considere $\mu = \lambda_1(-\Delta_p v - a|v|^{p-2}v)$. Existe uma solução $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para o seguinte problema,*

$$\begin{cases} -\Delta_p\psi - a\psi^{p-1} = \mu\psi^{p-1} \ em \ \Omega \\ \psi > 0 \ em \ \Omega \\ \psi = 0 \ sobre \ \partial\Omega \end{cases} \tag{C-27}$$

Demonstração. Sejam $\Sigma_1 = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega); \|v\|_p^p = 1\}$, e $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por,

$$J(v) = \frac{1}{p}\|v\|^p - \frac{a}{p}\|u\|_p^p, \text{ onde}\|\cdot\|\text{denota a norma usual de} W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observe que, se u satisfaz o problema (C-27), pela definição de μ, concluímos que $J(u) = \inf_{v\in\Sigma_1} J(v)$. Observe também que restrito a Σ_1 o funcional J pode ser escrito como,

$$J(v) = \frac{1}{p}\|v\|^p - \frac{a}{p} \geq -\frac{a}{p}, \tag{C-28}$$

por isso o $\inf_{v\in\Sigma_1} J(v)$ está definido.

Pela caracterização dada em (C-28) vemos que minimizar J restrito ao conjunto Σ_1 é o mesmo que encontrar um elemento de Σ_1 que realize o $m_1 = \inf_{v\in\Sigma_1} \|v\|^p$. Mostraremos que o nível $m1$ é atingindo por uma função não negativa $u \in \Sigma_1$ e com isso concluiremos o resultado.

Seja (u_k) uma sequência minimizante para o nível m_1, ou seja, $\|u_k\|^p \to m_1$, podemos supor que $u_k(x) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \Omega$ pois $(|u_k|)$ também é uma sequência minimizante. Como $\|u_k\|^p$ converge, a sequência (u_k) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que por sua vez é um espaço reflexivo e portanto, a menos de uma subsequência $u_k \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e por imersões de Sobolev $u_k \to u$ em $L^q(\Omega)$, qualquer que seja $1 \leq q < p^*$, em particular em $L^p(\Omega)$, com isso $\|u_k\|_p^p \to \|u\|_p^p$ e isso nos diz que $\|u\|_p^p = 1$. Portanto $u \in \Sigma_1$ acarretando que $\|u\|^p \geq m_1$ e pela semicontinuidade inferior da norma temos a desigualdade no sentido contrário, portanto $\|u\|^p = m_1$ assim, $u(x) \geq 0 q.t.p$ em Ω. Além disso, também pela convergência forte em $L^p(\Omega)$ concluímos que $u_k(x) \to u(x) q.t.p.$ em Ω e com isso $u(x) \geq 0, q.t.p.$ em Ω. $\square$

Teorema C.13 ***(Princípio do máximo forte)*** *Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ limitado com bordo $\partial\Omega$, $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u(x) \geq 0$ $q.t.p.x \in \Omega$, $\Delta_p u(x) \leq \beta(u(x))$ $q.t.p.x \in \Omega$, onde a função β satisfaz, $\beta[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua e não decrescente com $\beta(0) = 0$ e $\beta(s) > 0$ qualquer que seja $s > 0$, além disso,*

$$\int_0^1 (\beta(s)s)^{-\frac{1}{p}} ds = +\infty.$$

Se $u \not\equiv 0$ em Ω, então $u(x) > 0$ qualquer que seja $x \in \Omega$. Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ para x_0 ponto de $\partial\Omega$ que satisfaz a condição da esfera interior e $u(x_0) = 0$, então,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0,$$

onde η é o normal interior a $\partial\Omega$ em x_0.

Demonstração: cf.[20] (Teorema 5).

Regularização de soluções

Nesta seção de regularização vamos enunciar o resultado como feito em [12] e [13], para os espaços de Orlicz-Sobolev (veja [1]), no entanto, vamos aplicar os resultados em operadores sobre os espaços de Sobolev.

Considere a seguinte equação,

$$divA(x,u,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0, \tag{C-29}$$

onde Ω é um domínio regular, $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são tais que, $A \in C^1(\Omega \times (\mathbb{R}^N)) \bigcap C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ e B é Carathéodory.

Definição 27 *Uma solução no sentido fraco para a equação (C-29) é uma função $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que,*

$$\int_\Omega A(x,u,\nabla u)\nabla\phi dx + \int_\Omega B(x,u,\nabla u)\phi dx = 0$$

qualquer que seja ϕ elemento de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Suponha que Φ seja duas vezes diferenciável e que existam $\delta, g_0 > 0$ tais que,

$$\delta \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \quad t > 0, \tag{C-30}$$

onde, $g(t) := \Phi'(t), t \in \mathbb{R}^N$. Além disso, suponha que para todos $x, y \in \Omega, r, s \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{R}^N/0$ sejam verídicos os seguintes itens,

$$\textbf{(i)} \ \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial A_i}{\partial w_j}(x,r,w)\xi_i\xi_j \geq \frac{g(|w|)}{|w|}|\xi|^2, \ \xi \in \mathbb{R}^N;$$

$$\textbf{(ii)} \ \left| \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial A_i}{\partial w_j}(x,r,w) \right| \leq \Lambda \frac{g(|w|)}{|w|};$$

(iii) $|A(x,r,w) - A(y,s,w)| \leq \Lambda_1(1+g(|w|))[|x-y|^{\alpha} + |r-s|^{\alpha}]$;

(iv) $|B(x,r,w)| \leq \Lambda_1 \left(1 + \dfrac{g(|w|)}{|w|}\right)$,

onde, $\Lambda, \Lambda_1 \geq 0$.

Teorema C.14 *Suponha que as condições acima sejam válidas para constantes positivas* $\alpha \leq 1, \Lambda, \Lambda_1$ *sempre que* $x, y \in \Omega, r, s \in [-M, M]$, *para alguma constante positiva* M, *e* $w \in \mathbb{R}^N/0$. *Então, qualquer que seja a solução* $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ *de*

$$divA(x,u(x),\nabla u(x)) + B(x,u(x),\nabla u(x)) = 0, \ \ \Omega,$$

com $|u| \leq M$ *em* Ω, *existe* β *dependendo de* $\alpha, \Lambda, \delta, g_0$ *e* N *tal que* $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$ *e além disso, para qualquer que seja* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *existe* $C(\alpha, \Lambda, \delta, g_0, N, g(1), d(\Omega', \partial\Omega), M)$ *que satisfaz,*

$$|u|_{1+\beta;\Omega'} \leq C.$$

Demonstração: cf.[12] (Teorema 1.7). Veja também [13]

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A; FOURNIER, J. J. F. **Sobolev spaces**, volume 140 de **Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)**. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[2] ANDREW J. KURDILA, M. Z. **Convex Functional Analysis**. Systems & control. Birkhäuser Verlag, 2005.

[3] BADIALE, M; SERRA, E. **Semilinear elliptic equations for beginners**. Universitext. Springer, London, 2011. Existence results via the variational approach.

[4] BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[5] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle**. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[6] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Universitext. Springer, New York, 2011.

[7] BREZIS, H; OSWALD, L. **Remarks on sublinear elliptic equations**. Nonlinear Anal., 10(1):55–64, 1986.

[8] CHAÏB, K. **Extension of díaz-saá's inequality in $\mathbb{R}^N$ and application to a system of p-laplacian**. Publ. Mat., (46):473–488, 2002.

[9] DÍAZ, J. I.; SAÁ, J. E. **Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires**. Acad. Sci. Paris, p. 521–524, 1987.

[10] EVANS, L. C. **Partial differential equations**, volume 19 de **Graduate Studies in Mathematics**. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[11] GILBARG, D; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[12] LIEBERMAN, G. M. **The natural generalization of the natural conditions of ladyzhenskaya and ural'tseva for elliptic equations**. Commun. In Differential Partial Equations, 16(2&3):311–361, 1991.

[13] LIEBERMAN, G. M. **Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations**. Nonlinear Anal., 12(11):1203–1219, 1988.

[14] LIMA, E. L. **Curso de análise. Vol. 1**, volume 1 de **Projeto Euclides [Euclid Project]**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976.

[15] DRÁBEK, P.; MILOTA, J. **Methods of Nonlinear Analysis : Applications to Differential Equations**. Birkhaäuser Advanced Texts Basler Lehrbuücher. Birkhauser, second edition, 2013.

[16] PERAL, I. **Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian**. Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Trieste Italy, 1997.

[17] ROUBÍ ČEK, T. S. **Nonlinear partial differential equations with applications**, volume 153 de **International Series of Numerical Mathematics**. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, second edition, 2013.

[18] TAN, Z; FANG, F. **Orlicz-Sobolev versus Hölder local minimizer and multiplicity results for quasilinear elliptic equations**. J. Math. Anal. Appl., 402(1):348–370, 2013.

[19] TOLKSDORF, P. **Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations**. J. Differential Equations, 51(1):126–150, 1984.

[20] VÁZQUEZ, J. L. **A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations**. Appl. Math. Optim., 12(3):191–202, 1984.