



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARCELO BEZERRA BARBOZA

Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias

Goiânia
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☐ Dissertação ☒ Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

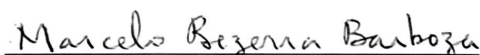
Nome completo do autor: Marcelo Bezerra Barboza

Título do trabalho: Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias

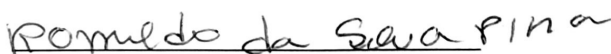
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 02 / 05 / 2019

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

MARCELO BEZERRA BARBOZA

Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Professor Dr. Romildo da Silva Pina

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Barboza, Marcelo Bezerra
Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias [manuscrito] / Marcelo
Bezerra Barboza. - 2019.
lxxi, 71 f.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2019.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui gráfico, algoritmos.

1. Equação de Einstein. 2. Fluido Perfeito. 3. Variedade Estática. 4.
Simetria. I. Pina, Romildo da Silva, orient. II. Título.

CDU 514.77



UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.

Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TESE DE MARCELO BEZERRA BARBOZA – Ao vigésimo quinto dia do mês de abril do ano de dois mil e dezenove (25/04/2019), às 14:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Romildo da Silva Pina - Orientador, Prof. Benedito Leandro Neto, Prof. Armando Mauro Vasquez Corro, Prof. Fernando Manfio, e Prof. Marcus Antônio Mendonça Marrocos, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de tese intitulada: **“Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias”**, em nível de Doutorado, área de concentração em Geometria, de autoria de Marcelo Bezerra Barboza, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Romildo da Silva Pina que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da tese que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas às correções recomendadas, a tese foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **DOCTOR EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Geometria pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da tese, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:30 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de tese e para constar eu, Flávia Magalhães Freire, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Romildo da Silva Pina

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Presidente - IME/UFG

Armando Mauro Vasquez Corro
Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Membro – IME/UFG

Benedito Leandro Neto
Prof. Dr. Benedito Leandro Neto
Membro – IME/UFG

Fernando Manfio
Prof. Dr. Fernando Manfio
Membro – ICMC/USP

Marcus Antonio Mendonça Marrocos
Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos
Membro – CMCC/UFABC

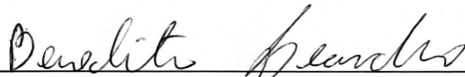
MARCELO BEZERRA BARBOZA

Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 25 de abril de 2019, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



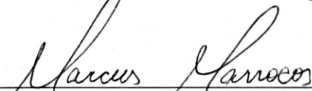
Prof. Dr. Benedito Leandro Neto
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Fernando Manfio
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP



Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos
Centro de Matemática, Computação e Cognição - UFABC

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e orientador.

Marcelo Bezerra Barboza

Bacharel (2007) e Mestre (2015) em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, é Professor do Instituto Federal Goiano desde 2014.

À Poliana e Betânia,
com todo o meu amor.

Agradecimentos

Agradeço!

A Deus porque nEle e por Ele posso ser.

À família por ser o meu sustentáculo em tão vasto mundo.

A meu orientador e amigo, Romildo, por seus numerosos ensinamentos, nem todos sobre matemática, os quais me acompanharão por toda a vida.

A Armando Corro, Benedito Leandro, Fernando Manfio e Marcus Marrocos, membros da banca, que, por sua leitura cuidadosa do manuscrito, me ajudaram a tornar o texto mais claro e mais preciso onde isso se fazia necessário, sempre com muito bom humor e a mais fina educação que se pode ter.

A meus Professores, Abiel Macedo, Durval José Tonon, Levi Rosa, Jefferson Gonçalves, Kaye Oliveira e Marcos Leandro pelo esmero no ensino das disciplinas. Sinto-me honrado por ter sido seu aluno.

Ao Glaydston Bento, exemplo de pessoa, pelo empenho em me ajudar. Quando eu não vi alternativas, você apareceu (e se ofereceu).

Aos técnicos administrativos do IME que sempre me foram da maior presteza possível, nas várias vezes que necessitei, enquanto aluno, de seu tão importante serviço.

A meus amigos de trabalho, no Instituto Federal Goiano, por seu apoio incondicional, pelo bom ambiente de trabalho, pela amizade. Estamos, enfim, de regresso e com enorme vontade de trabalhar!

A meus amigos. É, para mim, algo realmente emocionante reviver pela memória os vários momentos que passamos juntos. Desde a graduação, na UFG, perpassando pela inconclusa pós-graduação na UnB e, finalmente, na pós-graduação, agora na UFG, se passaram incríveis 14 anos. Em todos eles vocês estiveram, se fizeram presentes. Fico feliz porque quando nos revemos, simplesmente continuamos a conversa do ponto exato em que havíamos parado. O tempo, como me parece nestas ocasiões, espera por nós.

Desenho

Traça a reta e a curva,
a quebrada e a sinuosa.
Tudo é preciso.
De tudo viverás.

Cuida com exatidão da perpendicular
e das paralelas perfeitas.
Com apurado rigor.
Sem esquadro, sem nível, sem fio de prumo,
traçarás perspectivas, projetarás estruturas.
Número, ritmo, distância, dimensão.
Tens os teus olhos, o teu pulso, a tua memória.

Construirás os labirintos impermanentes
que sucessivamente habitarás.

Todos os dias estarás refazendo o teu desenho.
Não te fatigues logo. Tens trabalho para toda a vida.
E nem para o teu sepulcro terás a medida certa.

Somos sempre um pouco menos do que pensávamos.
Raramente, um pouco mais.

Cecília Meireles,
Uma antologia poética.

Resumo

Barboza, Marcelo Bezerra. **Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias**. Goiânia, 2019. 71p. Tese de Doutorado. Insituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho apresenta um procedimento em duas etapas com o qual é virtualmente possível que se produzam a uma infinidade de soluções exatas para a equação de Einstein de um fluido perfeito em uma variedade estática. Essas etapas poderiam, a grosso modo, ser descritas como: 1) a classificação das simetrias da referida equação que a convertem em uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem de natureza muito específica – cujas soluções são muito mais fáceis de serem encontradas do que as do problema original, e 2) a resolução desta equação ordinária – o que explica a necessidade pela palavra ‘virtualmente’ acima, já que nem todas as soluções desta equação ordinária são conhecidas em forma exata. Finalmente, no último capítulo, utilizamos um Teorema devido a Liouville para determinar os movimentos rígidos de métricas Riemannianas no espaço euclidiano as quais admitem simetrias em um grupo de translações e que, também, pertencem à classe de equivalência conforme da métrica plana.

Palavras-chave

Equação de Einstein, Fluido Perfeito, Variedade Estática, Simetria

Abstract

Barboza, Marcelo Bezerra. **Static Perfect Fluids with Symmetries**. Goiânia, 2019. 71p. PhD. Thesis. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This work presents a two step procedure that is virtually capable of producing an infinite number of exact solutions to Einstein's equation of a perfect fluid on a static manifold. These steps could roughly be described as: 1) classifying the symmetries of the referred equation that convert it into a second order non linear ordinary differential equation of very specific nature – whose solutions are a whole lot easier to come up with than those of the original problem, and 2) solving this ordinary equation – which quite explains the need for the word ‘virtually’ above, since not all solutions of the ordinary equation are known to its exact form. Finally, in the last chapter, we utilize a Theorem due to Liouville to determine the rigid motions of Riemannian metrics on euclidean space that do admit symmetries in a translational group and also belong to the conformal class of the flat metric.

Keywords

Einstein Equation, Perfect Fluid, Static Manifold, Symmetry

Conteúdo

1	Introdução	13
2	Preliminares	19
2.1	Métricas semi-Riemannianas	19
2.2	Métricas Produto Torcido	21
2.3	Métricas Conformemente Equivalentes	25
2.4	Ações de Grupos	28
3	Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias	32
3.1	Variedades Estáticas	32
3.2	Fluidos Perfeitos	33
3.3	Fluidos Perfeitos Estáticos	34
3.4	Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias	35
4	Exemplos de Fluidos Perfeitos Estáticos	39
4.1	Simetrias Compatíveis	39
4.1.1	O Caso Hiperbólico	40
4.1.2	O Caso Euclidiano	41
4.1.3	O Caso Esférico	43
4.2	Funções Admissíveis	44
4.2.1	O Caso Hiperbólico - Continuação	44
4.2.2	O Caso Euclidiano - Continuação	46
4.2.3	O Caso Esférico - Continuação	48
5	Isometrias de Métricas Conformemente Planas no Espaço Euclidiano	51
5.1	O Teorema de Liouville	51
5.2	Isometrias	59
5.2.1	O Caso $\varepsilon = 0$	59
5.2.2	O Caso $\varepsilon = 2$	61
6	Considerações Finais	65
	Bibliografia	67
A	Rotinas em Python Para o Cálculo da Curvatura	69

Capítulo 1

Introdução

Entre 1887 e 1905 foram feitas várias tentativas, com importantes contribuições do físico holandês Hendrik Lorentz, de se explicar o resultado do experimento de Michelson-Morley¹ em que objetos se contraíam e relógios desaceleravam quando movidos através do éter². Contudo, num famoso artigo de 1905, um até então desconhecido funcionário do escritório suíço de patentes, Albert Einstein, afirmou não ser necessária qualquer menção ao éter, desde que se esteja disposto a abrir mão da ideia de um tempo absoluto. Algo semelhante foi dito pelo matemático francês Henri Poincaré apenas algumas semanas mais tarde. O argumento de Einstein era, no entanto, mais próximo da Física do que aquele utilizado por Poincaré, o qual encarava este como um problema puramente matemático. A Einstein é geralmente atribuído o crédito pela nova teoria, mas Poincaré tem seu nome vinculado a importantes partes desta.

O postulado fundamental da Teoria da Relatividade Geral, como é conhecida, é o de que todos os sistemas de coordenadas são em princípio equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza. O raciocínio com o qual se obtém, sob a influência de tal sorte de ideias, a equação que será objeto de nossa atenção ao longo dos próximos capítulos é melhor explicado nas palavras do próprio Einstein, como assim o fez em uma de suas palestras em Princeton, no ano de 1921:

If there is an analogue of Poisson's equation in the general theory of relativity, then this equation must be a tensor equation for the tensor $g_{\mu\nu}$ of the gravitational potential; the energy tensor of matter must appear on the right-hand side of this equation. On the left-hand side of the equation there must be a differential tensor in the $g_{\mu\nu}$. We have to find this differential tensor. It is completely determined by the following three conditions:

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley_experiment

²https://en.wikipedia.org/wiki/Aether_theories

1. It may contain no differential coefficients of the $g_{\mu\nu}$ higher than the second.
2. It must be linear in these second differential coefficients.
3. Its divergence must vanish identically.

O tensor de Einstein,

$$G = ric_g - \frac{scal_g}{2}g, \quad (1-1)$$

de uma variedade semi-Riemanniana (M, g) satisfaz a todas as três condições acima e fica, em certo sentido, por elas determinado. A equação de Einstein é, então, a seguinte equação:

$$ric_g - \frac{scal_g}{2}g = T, \quad (1-2)$$

em que o lado direito é ocupado pelo tensor de energia da matéria, o qual deve ter, por razões comuns à Física, nula a sua divergência. Segundo a teoria da relatividade geral, as propriedades geométricas do espaço não são independentes, mas sim determinadas pela matéria. Por isso, só se pode concluir algo sobre a estrutura geométrica do universo quando se pressupõe o estado da matéria conhecido. No vácuo, por exemplo, não há matéria, significando que $T = 0$ e, assim, obtém-se:

$$ric_g - \frac{scal_g}{2}g = 0, \quad (1-3)$$

com a consequência de que o universo seja, neste caso, Ricci flat: $ric_g = 0$. Neste trabalho estuda-se a equação de Einstein de um fluido perfeito sobre uma variedade Lorentziana $(\bar{M}, \bar{g})$, ou seja,

$$ric_{\bar{g}} - \frac{scal_{\bar{g}}}{2}\bar{g} = (\mu + \nu)\bar{g}(\cdot, X) \otimes \bar{g}(\cdot, X) + \nu\bar{g}, \quad (1-4)$$

em que funções $\mu, \nu \in \mathfrak{D}(\bar{M})$ medem cada uma a um certo aspecto do fluido, como densidade de energia no caso de μ e pressão no de ν , enquanto $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ é um campo vetorial cujo fluxo representa a dinâmica do fluido e que deve cumprir

$$\bar{g}(X, X) = -1,$$

ao longo do toda $\bar{M}$. A definição de um fluido perfeito não ensina a construir o modelo de um, razão por que se houve de ficar com as ditas variedades estáticas para a obtenção de exemplos (já que, por serem estáticas, elas são também mais simples de se manipular). Diz-se que $(\bar{M}, \bar{g})$ seja estática se existirem uma variedade Riemanniana (M, g) e uma função diferenciável $f : M \rightarrow (0, \infty)$ com que se possa

escrever

$$\begin{cases} \bar{M} = M \times \mathbb{R}, \\ \bar{g} = x^*g - f(x)^2 dt^2, \end{cases} \quad (1-5)$$

onde

$$\begin{array}{ccc} x : \bar{M} & \longrightarrow & M \quad \text{e} \quad t : \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, t) & \longmapsto & x \quad \quad \quad (x, t) \longmapsto t, \end{array}$$

são as projeções naturais. Escreve-se, neste caso,

$$(\bar{M}, \bar{g}) = (M, g) \times_f (\mathbb{R}, -dt^2), \quad (1-6)$$

para indicar os ingredientes, a saber, (M, g) e $f : M \longrightarrow (0, \infty)$, que compõem $(\bar{M}, \bar{g})$. Sabe-se que (1-4) seja, sob (1-6), equivalente a (veja [10])

$$ric_g - \frac{scal_g}{n}g = \frac{1}{f} \left(\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right), \quad (1-7)$$

em (M, g) , com relações

$$\mu = \frac{scal_g}{2} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{n-1}{n} \frac{\Delta f}{f} - \frac{n-2}{n} \mu.$$

Em [1] considerou-se a equação de Einstein de fluidos perfeitos em variedades estáticas no caso em que (M, g) não apenas pertença à classe de equivalência conforme do espaço Euclidiano, mas também goze de invariância por algumas das translações de $\mathbb{R}^n$. Especificamente, para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ arbitrariamente fixado, define-se

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \langle x, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

e, então, admite-se a existência de funções $\varphi, f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ de classe C^∞ com as quais se definem novas funções (mas mantendo-se a notação atual, com a finalidade de simplificar aos vários cálculos que se terá de fazer!), a saber, $\varphi, f : \xi^{-1}(a, b) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, \infty)$, pela exigência de que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \xi^{-1}(a, b) & & \xi^{-1}(a, b) \\ \downarrow \xi & \searrow \varphi \equiv \varphi \circ \xi & \downarrow \xi \\ (a, b) & \dashrightarrow \varphi & (0, \infty) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \xi^{-1}(a, b) & & \xi^{-1}(a, b) \\ \downarrow \xi & \searrow f \equiv f \circ \xi & \downarrow \xi \\ (a, b) & \dashrightarrow f & (0, \infty) \end{array}$$

sejam ambos comutativos. Pôde-se, assim, observar que f é uma solução de (1-7)

em $(M, g) = (\xi^{-1}(a, b), \varphi^{-2}\langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica Euclidiana usual de $\mathbb{R}^n$, se, e somente se, ocorre

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - 2\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} - \frac{f''}{f} = 0, \quad (1-8)$$

ao longo de $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Densidade de energia e pressão são, aqui, dadas por

$$\mu = \frac{(n-1)\|\alpha\|^2\varphi^2}{2} \left[2\frac{\varphi''}{\varphi} - n\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 \right]$$

e

$$\nu = \frac{(n-1)\|\alpha\|^2\varphi^2}{n} \left[\frac{f''}{f} - (n-2)\frac{f'}{f}\frac{\varphi'}{\varphi} \right] - \frac{n-2}{n}\mu,$$

respectivamente. Após alguma experimentação percebeu-se aquela que é a essência mesma da situação acima. Tem-se a conformidade local entre a geometria de (M, g) e aquela de um espaço de curvatura seccional constante, ao passo que tanto (M, g) quanto φ, f possuem simetrias que se harmonizam com a equação (1-7). A seguinte construção foi, então, natural. Seja (M_κ^n, g_κ) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e geodesicamente completa, de curvatura seccional constante $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$. Admita a existência de funções de classe C^∞

$$\xi : M_\kappa^n \longrightarrow (a, b) \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma, \tau : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty),$$

com as quais se definem novas funções $\sigma, \tau : M_\kappa^n \longrightarrow (0, \infty)$ ao se exigir que

$$\begin{array}{ccc} M_\kappa^n & & M_\kappa^n \\ \xi \downarrow & \searrow \sigma \equiv \sigma \circ \xi & \searrow \tau \equiv \tau \circ \xi \\ (a, b) & \dashrightarrow_{\sigma} & (0, \infty) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M_\kappa^n & & M_\kappa^n \\ \xi \downarrow & \searrow \tau \equiv \tau \circ \xi & \searrow \tau \equiv \tau \circ \xi \\ (a, b) & \dashrightarrow_{\tau} & (0, \infty) \end{array}$$

sejam diagramas comutativos. Pode-se, enfim, enunciar aquele que é o resultado principal deste trabalho.

Teorema 1.1 *Com as considerações acima vê-se que, se, em cada ponto do domínio de uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n(\kappa)$ com a qual se tenha verificado que*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \rho^{-2} \delta_{ij},$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e alguma função $\rho > 0$, não for apenas verdade que

$$\xi_{,ij} - \frac{\Delta \xi}{n} \delta_{ij} + \xi_{,i} \frac{\rho_{,j}}{\rho} + \frac{\rho_{,i}}{\rho} \xi_{,j} - \frac{2}{n} (\nabla \xi \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}) \delta_{ij} = 0,$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, mas também que

$$\xi_{,k}\xi_{,l} - \frac{\|\nabla\xi\|^2}{n}\delta_{kl} \neq 0,$$

para certos $k, l \in \{1, \dots, n\}$, então $\tau(\xi)$ é uma solução de (3-10) em

$$(M, g) = (M^n(\kappa), \sigma\xi^{-2}\langle \cdot, \cdot \rangle),$$

se, e apenas se, ocorre que

$$(n-2)\frac{\ddot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} - 2\frac{\dot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)}\frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} - \frac{\ddot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} = 0,$$

ao longo de $\xi(x(U)) = \{\xi(p) : p \in x(U)\} \subset (a, b)$. Densidade de energia e pressão do fluido perfeito são, neste caso, respectivamente dadas por

$$\mu(\xi) = \frac{n-1}{2} [\kappa n \sigma(\xi)^2 + 2\sigma(\xi)(\Delta\sigma(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle} - n\|(\nabla\sigma(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle}\|^2],$$

e

$$\nu(\xi) = \frac{n-1}{n} \frac{\sigma(\xi)^2}{\tau(\xi)} [(\Delta\tau(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle} - (n-2)\langle (\nabla\tau(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle}, (\nabla\log\sigma(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \rangle] - \frac{n-2}{n}\mu(\xi).$$

Se a expressão local de uma função $\xi : M^n(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$\xi_{,ij} - \frac{\Delta\xi}{n}\delta_{ij} + \xi_{,i}\frac{\rho_{,j}}{\rho} + \frac{\rho_{,i}}{\rho}\xi_{,j} - \frac{2}{n}(\nabla\xi \cdot \frac{\nabla\rho}{\rho})\delta_{ij} = 0,$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ em cada um dos pontos do domínio de uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n(\kappa)$ tal que

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \rho^{-2}\delta_{ij},$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, onde

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{em } U = \mathbb{R}^n \text{ se } \kappa = 0, \\ x_n & \text{em } U = \mathbb{H}^n \text{ se } \kappa = -1, \\ \frac{1+r}{2} & \text{em } U = \mathbb{R}^n \text{ se } \kappa = 1, \end{cases}$$

em que r é uma abreviação³ para

$$r : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty), \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

então, deve-se, necessariamente, ter:

1. $\kappa = 0$:

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right),$$

onde $a, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ são constantes;

2. $\kappa = -1$:

$$\xi : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{1}{x_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right),$$

onde $a, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ são constantes;

3. $\kappa = 1$:

$$\xi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \longmapsto x_{n+1},$$

se se admite a existência de certos

$$a < 0 \quad \text{e} \quad \xi : (a, \infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty),$$

tais que

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = \xi(r(x_1, \dots, x_n)),$$

em $U = \mathbb{R}^n$.

Uma vez em posse das ferramentas adequadas à tarefa, dá-se exemplos em quantidade considerada suficiente de soluções da equação de Einstein de fluidos perfeitos sobre variedades estáticas.

Finalmente, considera-se, no último capítulo, o problema de se calcular ao grupo das isometrias de algumas das variedades (M, g) utilizadas na construção de fluidos perfeitos estáticos, como são chamadas as soluções que se obteve para a equação de Einstein. As variedades de que aqui se fala pertencem à classe conforme de subvariedades abertas de $\mathbb{R}^n$ dotadas da métrica euclidiana usual sendo, todas elas, invariantes pela ação de um grupo de translações em $\mathbb{R}^n$. Observamos que tais variedades apareceram em trabalhos como, por exemplo, [1]. O grupo de isometrias encontrado injeta-se no grupo de isometrias da variedade maior (estática).

³pode o leitor, no Capítulo 4, encontrar significado para a notação aqui utilizada

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo se abordam alguns dos tópicos essenciais à compreensão de todo o texto, como: métricas semi-Riemannianas, métricas produto torcido, equivalência conforme entre métricas e isometrias. Tal abordagem, todavia, não se encerra em si, isto é, não suprime a necessidade de consulta a bons livros ou artigos em Geometria Riemanniana, principalmente no que toca a certas demonstrações daqui omitidas por falta de ocasião e/ou espaço.

2.1 Métricas semi-Riemannianas

Definição 2.1 *Uma métrica em uma variedade diferenciável M é um $(0, 2)$ -tensor simétrico e não-degenerado g , de índice constante.*

Tem-se, assim, uma família

$$g = \{g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R} : p \in M\},$$

de aplicações com índices em M e que se caracterizam por suas propriedades de:

1. bilinearidade:

$$g_p(x + \alpha z, y) = g_p(x, y) + \alpha g_p(z, y), \quad g_p(x, y + \alpha z) = g_p(x, y) + \alpha g_p(x, z),$$

sempre que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in T_p M$;

2. simetria:

$$g_p(x, y) = g_p(y, x),$$

sempre que $x, y \in T_p M$;

3. não degenerescência: dentre todos os $x \in T_p M$, apenas para $x = 0$ se tem

$$\{g_p(x, y) : y \in T_p M\} = \{0\};$$

4. equidade de índices: o índice de g_p , o qual se define como sendo o número

$$\nu_p = \max \{ \dim W : W \leq T_p M, x \in W \setminus \{0\} \implies g_p(x, x) < 0 \},$$

tem, a despeito de $p \in M$, sempre o mesmo valor. Por esta razão, à constante $\nu(M, g) = \nu_p \in \{0, 1, \dots, \dim M\}$ se dá o nome de índice de (M, g) .

5. diferenciabilidade em p (*no sentido de que*): se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$X \cdot Y : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto g_p(X_p, Y_p),$$

é uma função diferenciável.

Definição 2.2 *Uma variedade semi-Riemanniana é um par ordenado (M, g) , em que M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica sobre M .*

Destacam-se os casos:

1. Riemanniano, em que $\nu(M, g) = 0$, e
2. Lorentziano, para o qual se deve ter $\dim M \geq 2$ e $\nu(M, g) = 1$.

Se (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana arbitrária, então sua métrica converte a cada um dos espaços tangentes a M em espaço pseudo-euclidiano de mesmas dimensão e índice que a própria (M, g) .

Exemplo 2.1 *A esfera euclidiana n -dimensional é a variedade*

$$\mathbb{S}^n = \left\{ p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 1 \right\},$$

com a métrica que a mesma herda de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é,

$$g_p(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i = \langle u, v \rangle,$$

para todos $p \in \mathbb{S}^n$ e $u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$, $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in T_p \mathbb{S}^n$, onde

$$T_p \mathbb{S}^n = \{ w \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle w, p \rangle = 0 \}.$$

Definição 2.3 *Uma isometria entre variedades semi-Riemannianas (M, g_M) e (N, g_N) é um difeomorfismo $\phi : M \longrightarrow N$ para o qual se tenha:*

$$\forall x \in M, \forall u, v \in T_x M : \quad (g_N)_{\phi(x)}(d\phi_x u, d\phi_x v) = (g_M)_x(u, v).$$

Diz-se que variedades (M, g_M) e (N, g_N) sejam isométricas uma à outra caso exista uma isometria $\phi : M \longrightarrow N$. Do ponto de vista da Geometria semi-Riemanniana, tais objetos são indiscerníveis.

Um objeto preservado, através de *pullbacks* por exemplo, por *todas* as isometrias de uma variedade semi-Riemanniana é dito *um invariante geométrico*. A *Geometria semi-Riemanniana* é tradicionalmente descrita como o estudo de tais invariantes.

A situação é análoga à da Geometria Riemanniana: se definem conexões afim e de Levi-Civita, transporte paralelo, símbolos de Christoffel, geodésicas, tensor curvatura (de Riemann), curvatura seccional, tensor de Ricci, curvatura escalar, enfim, exatamente como se faz em Geometria Riemanniana.

2.2 Métricas Produto Torcido

Definição 2.4 *O produto torcido de variedades semi-Riemannianas (B, g_B) e (F, g_F) segundo uma função diferenciável $f > 0$ sobre B , o qual se denota por $(M, g) = (B, g_B) \times_f (F, g_F)$, é o espaço produto $B \times F$ munido da métrica*

$$g = x^*g_B + f(x)^2y^*g_F,$$

em que $x : M \longrightarrow B$ e $y : M \longrightarrow F$ são as projeções naturais.

Os objetos B , F e f se dizem base, fibra e torção de

$$(M, g) = (B, g_B) \times_f (F, g_F),$$

nesta ordem. Naturalmente, o produto torcido é um reflexo das variedades (B, g_B) e (F, g_F) sob alguma influência de $f > 0$. Casos triviais de produtos torcidos incluem os já conhecidos produtos semi-Riemannianos (usuais), para os quais se tem $f \equiv 1$.

Exemplo 2.2 *Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera euclidiana n -dimensional como no exemplo (2.1). Faça*

$$\mathbb{R}^n = \{p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : p_{n+1} = 0\},$$

e, também,

$$\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^n.$$

Observe que as aplicações

$$\begin{cases} X : (0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}, e_{n+1}\} \\ (\theta, v) \longmapsto \sin(\theta)v + \cos(\theta)e_{n+1}, \\ \\ Y : \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}, e_{n+1}\} \longrightarrow (0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1} \\ p \longmapsto \left(\arccos(\langle p, e_{n+1} \rangle), \frac{p - \langle p, e_{n+1} \rangle e_{n+1}}{\sqrt{1 - \langle p, e_{n+1} \rangle^2}} \right), \end{cases}$$

são mutuamente inversas uma à outra. Como ambas são diferenciáveis, elas são ainda difeomorfismos e, assim, as variedades $\mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}, e_{n+1}\}$ e $(0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1}$ são difeomorfas entre si. Finalmente, pelo uso das coordenadas

$$v : \mathbb{R}_\varepsilon^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-\varepsilon e_n\}, \quad x \longmapsto v = v_\varepsilon(x) = \frac{2}{1+r}x + \varepsilon \frac{1-r}{1+r}e_n,$$

de $\mathbb{S}^{n-1}$, em que

$$\begin{cases} \varepsilon = \pm 1, \quad \mathbb{R}_\varepsilon^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0 \text{ e } x_n = \varepsilon\}, \\ r : \mathbb{R}_\varepsilon^{n-1} \longrightarrow [0, \infty), \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon, 0) \longmapsto r = r(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2, \end{cases}$$

se consegue mostrar que o pullback da métrica de $\mathbb{S}^n$ através de X assume, nas coordenadas $(\theta, x_1, \dots, x_{n-1})$ de $(0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1}$ acima descritas, a seguinte expressão:

$$d\theta^2 + \sin(\theta)^2 \sum_{i,j=1}^{n-1} \left[\left(\frac{1+r}{2} \right)^{-2} \delta_{ij} \right] dx_i \otimes dx_j.$$

Consequentemente,

$$X(\theta, v_\varepsilon(x_1, \dots, x_{n-1})) = \sin(\theta)v_\varepsilon(x_1, \dots, x_{n-1}) + \cos(\theta)e_{n+1},$$

fornece uma parametrização de $\mathbb{S}^n$ em que sua métrica se decompõe num produto torcido, o qual é aqui esquematicamente representado por:

$$g^{(n)} = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 g^{(n-1)},$$

onde $g^{(k)}$ aqui denota a métrica da esfera euclidiana k -dimensional.

O cálculo diferencial em $B \times F$ relaciona-se com aquele de seus fatores, B e F , da mesma forma que o de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relaciona-se com o de $\mathbb{R}$. Pelo uso de

coordenadas do tipo (produto)

$$\begin{aligned} x \times y : U \times V \subset B \times F &\longrightarrow x(U) \times y(V) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (p, q) &\longmapsto \begin{cases} (x \times y)(p, q) = \\ = (x_1(p), \dots, x_m(p), y_1(q), \dots, y_n(q)), \end{cases} \end{aligned}$$

em que

$$\begin{cases} x : U \subset B \longrightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m, & p \longmapsto x(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p)), \\ y : V \subset F \longrightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n, & q \longmapsto y(q) = (y_1(q), \dots, y_n(q)), \end{cases}$$

são coordenadas sobre as variedade B e F , nesta ordem, pode-se provar que:

1. as projeções

$$\begin{cases} x : B \times F \longrightarrow B, & (p, q) \longmapsto p, \\ y : B \times F \longrightarrow F, & (p, q) \longmapsto q, \end{cases}$$

são aplicações diferenciáveis – de fato, submersões;

2. Uma função $\phi : P \longrightarrow B \times F$, em que P seja uma variedade diferenciável, é uma função diferenciável se, mas apenas se, as aplicações $x \circ \phi : P \longrightarrow B$ e $y \circ \phi : P \longrightarrow F$ são ambas diferenciáveis;
3. Os conjuntos

$$\begin{cases} B \times q = \{(r, q) : r \in B\}, \\ p \times F = \{(p, r) : r \in F\}, \end{cases}$$

são, para cada $(p, q) \in B \times F$, subvariedades de $B \times F$;

4. São difeomorfismos, as funções

$$\begin{cases} x|_{B \times q} : B \times q \longrightarrow B, & (r, q) \longrightarrow r, \\ y|_{p \times F} : p \times F \longrightarrow F, & (p, r) \longrightarrow r, \end{cases}$$

assim definidas para arbitrários $p \in B$ e $q \in F$.

Conclui-se, assim, que ambos

$$T_{(p,q)}B := T_{(p,q)}(B \times q) \quad \text{e} \quad T_{(p,q)}F := T_{(p,q)}(p \times F),$$

são, para cada $(p, q) \in B \times F$, subespaços vetoriais de $T_{(p,q)}(B \times F)$.

Lema 2.5 $T_{(p,q)}(B \times F)$ é a soma direta de seus subespaços $T_{(p,q)}B$ e $T_{(p,q)}F$, ou seja, cada elemento de $T_{(p,q)}(B \times F)$ pode ser escrito na forma de uma soma

$$u + v, \quad u \in T_{(p,q)}B, \quad v \in T_{(p,q)}F,$$

de uma única maneira.

Levantamentos de funções, vetores tangentes e campos vetoriais são artifícios matemáticos a propiciarem o estudo do cálculo diferencial em $B \times F$ por meio de conhecimento previamente adquirido acerca dos fatores B e F .

Definição 2.6 *Define-se o levantamento:*

1. de $f \in \mathfrak{D}(B)$ a $B \times F$ pela regra $\bar{f} = f \circ x \in \mathfrak{D}(B \times F)$;
2. de $x \in T_p B$ a $T_{(p,q)} B$ ao se exigir que $\bar{x} \in T_{(p,q)} B$ e $dx_{(p,q)}(\bar{x}) = x$, quaisquer que sejam os elementos $p \in B$ e $q \in F$;
3. de $X \in \mathfrak{X}(B)$ a $B \times F$ ao se exigir que $\bar{X}_{(p,q)} \in T_{(p,q)} B$ e $dx_{(p,q)}(\bar{X}_{(p,q)}) = X_p$, para todo $(p, q) \in B \times F$.

Coordenadas produto podem ser utilizadas também para demonstrar que $\bar{X}$ é diferenciável. Denota-se por

$$\mathfrak{L}(B) = \{X \in \mathfrak{X}(B \times F) : dx(X) \in \mathfrak{X}(B), dy(X) = 0\},$$

à totalidade dos levantamentos a $B \times F$ de campos vetoriais sobre B . Perceba que tudo quanto acima se definiu utilizando-se de B aplica-se também a F .

Muito embora $\mathfrak{L}(B)$ e $\mathfrak{L}(F)$ sejam subespaços vetoriais de $\mathfrak{X}(B \times F)$ com a propriedade de que

$$\mathfrak{L}(B) \cap \mathfrak{L}(F) = \{0\},$$

são se pode com eles gerar a $\mathfrak{X}(B \times F)$ utilizando-se apenas de ‘escalares reais’. Basta ver que o campo $(x+y)\frac{\partial}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ não se escreve jamais como combinação linear (real) de levantamentos de campos em $\mathbb{R}$.

No estabelecimento dos fatos acima se utilizou de notação elaborada porém necessária à correta compreensão dos fatos narrados. Na prática, o Lema (2.5) é utilizado ao se escrever

$$T_{(p,q)}(B \times F) = T_p B \oplus T_q F.$$

Omite-se, quase sempre, a barra ($\bar{}$) por que se denotam os levantamentos.

As Proposições 2.7 e 2.8 abaixo, cujas demonstrações se pode encontrar em [13], apresentam caráter duplamente interessante: se por um lado dão a conhecer aos objetos ‘conexão de Levi-Civita’ e ‘tensor de Ricci’, respectivamente, de produtos torcidos $(M, g) = (B, g_B) \times_f (F, g_F)$, por outro explicitam as relações entre estes e aqueles de mesmo nome sobre os fatores, tanto B quanto F , sempre em função de algumas das derivadas de f .

Proposição 2.7 *Em $(M, g) = (B, g_B) \times_f (F, g_F)$, se $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F)$, tem-se que:*

1. $(\nabla_X Y)_g$ é o levantamento a M de $(\nabla_X Y)_{g_B}$;
2. $(\nabla_X V)_g = (\nabla_V X)_g = (X \log f)V$;
3. $\text{nor}(\nabla_V W)_g = -g(V, W)(\nabla \log f)_{g_B}$;
4. $\text{tan}(\nabla_V W)_g$ é o levantamento a M de $(\nabla_V W)_{g_F}$.

Proposição 2.8 *Em $(M, g) = (B, g_B) \times_f (F, g_F)$, se $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F)$, tem-se que:*

1. $\text{ric}_g(X, Y) = \text{ric}_{g_B}(X, Y) - (d/f)(\nabla^2 f)_{g_B}(X, Y)$;
2. $\text{ric}_g(X, V) = 0$;
3. $\text{ric}_g(V, W) = \text{ric}_{g_F}(V, W) - g_F(V, W)f^\#$,

onde $d = \dim F$ e $f^\# f^2 = f(\Delta f)_{g_B} + (d-1)\|(\nabla f)_{g_B}\|^2$.

2.3 Métricas Conformemente Equivalentes

Definição 2.9 *Diz-se que variedades semi-Riemannianas (M, g) e (N, h) pertençam à mesma classe de equivalência conforme, caso se tenha*

$$f^*h = e^{2\phi}g,$$

para certos difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ e função $\phi \in \mathfrak{D}(M)$.

Como se sabe, esta é uma relação de equivalência na categoria de todas as variedades semi-Riemannianas. Neste sentido, a próxima definição configura conceito menos restritivo.

Definição 2.10 *Sejam (M, g) , (N, h) duas variedades semi-Riemannianas. Diz-se que a geometria de (M, g) está em conformidade local àquela de (N, h) caso exista uma família*

$$\mathfrak{F} = \{(U, V, f, \phi)_p : p \in M\},$$

de quádruplas ordenadas com índices em M e das quais se exige que:

1. $p \in U \subset M$ e $V \subset N$ sejam conjuntos abertos;
2. $f : U \longrightarrow V$ seja um difeomorfismo;
3. $\phi \in \mathfrak{D}(U)$;
4. $f^*h|_V = e^{2\phi}g|_U$,

a fim de que se tenha $(U, V, f, \phi)_p \in \mathfrak{F}$.

Exemplo 2.3 *Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera euclidiana n -dimensional como no exemplo (2.1). Em coordenadas*

$$x_\varepsilon : \mathbb{R}_\varepsilon^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{-\varepsilon e_{n+1}\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \longmapsto \frac{2}{1+r}x + \varepsilon \frac{1-r}{1+r}e_{n+1},$$

onde

$$\varepsilon = \pm 1 \quad e \quad r : \mathbb{R}_\varepsilon^n \longrightarrow [0, \infty), \quad x \longmapsto r = r(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

se encontra o seguinte:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left(\frac{1+r}{2} \right)^{-2} \delta_{ij},$$

para todo $x \in \mathbb{R}_\varepsilon^n \equiv \mathbb{R}^n$. Obtém-se, assim, a família

$$\mathfrak{F} = \{(x_{-1}(\mathbb{R}_{-1}^n), \mathbb{R}_{-1}^n, x_{-1}, \log \left(\frac{2}{1+r} \right)), (x_1(\mathbb{R}_1^n), \mathbb{R}_1^n, x_1, \log \left(\frac{2}{1+r} \right))\},$$

a cumprir o que se pede em (2.10), de sorte que se observa a conformidade local entre a geometria de $\mathbb{S}^n$ e aquela de $\mathbb{R}^n$.

Prefere-se, quase sempre, $\varphi^{-1} = e^\phi$ à própria ϕ nas definições (2.9) ou (2.10) acima, pelo efeito que tal mudança de variáveis causa nas equações diferenciais estudadas.

Proposição 2.11 *Sejam (M, g) uma variedade semi-Riemanniana e $\varphi \in \mathfrak{D}(M)$ uma função positiva. Com respeito à métrica $\bar{g} = \varphi^{-2}g$, pode-se dizer que:*

1. $(\nabla_X Y)_{\bar{g}} = (\nabla_X Y)_g - \varphi^{-1} [X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - g(X, Y)(\nabla \varphi)_g];$
2. $ric_{\bar{g}} = ric_g - \varphi^{-2} \{(n-2)\varphi(\nabla^2 \varphi)_g + [\varphi(\Delta \varphi)_g - (n-1)\|(\nabla \varphi)_g\|^2]g\};$
3. $scal_{\bar{g}} = \varphi^2 scal_g + (n-1)[2\varphi(\Delta \varphi)_g - n\|(\nabla \varphi)_g\|^2];$
4. $ric_{\bar{g}} - (scal_{\bar{g}}/n)\bar{g} = [ric_g - (scal_g/n)g] - (n-2)\varphi^{-1}\{(\nabla^2 \varphi)_g - [(\Delta \varphi)_g/n]g\}.$

Prova. Encontra-se em [2] uma boa demonstração deste fato. □

Proposição 2.12 *Sejam (M, g) uma variedade semi-Riemanniana e $\varphi \in \mathfrak{D}(M)$ uma função positiva. Com respeito à métrica $\bar{g} = \varphi^{-2}g$, pode-se dizer que as*

derivadas de funções escalares $f \in \mathfrak{D}(M)$ têm o seguinte comportamento:

1. $(\nabla f)_{\bar{g}} = \varphi^2(\nabla f)_g$;
2. $(\nabla^2 f)_{\bar{g}} = (\nabla^2 f)_g + df \otimes d \log \varphi + d \log \varphi \otimes df - g((\nabla f)_g, (\nabla \log \varphi)_g)g$;
3. $(\Delta f)_{\bar{g}} = \varphi^2 [(\Delta f)_g - (n-2)g((\nabla f)_g, (\nabla \log \varphi)_g)]$;
4. $(\nabla^2 f)_{\bar{g}} - ((\Delta f)_{\bar{g}}/n)\bar{g} = (\nabla^2 f)_g - [(\Delta f)_g/n]g + df \otimes d \log \varphi + d \log \varphi \otimes df - \frac{2}{n}g(\nabla f, \nabla \log \varphi)g$

Prova. Demonstrar-se-ão aos dois primeiros itens, deixando-se os demais a cargo do leitor. Observe que

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathfrak{X}(M) : \quad \bar{g}(X, (\nabla f)_{\bar{g}} - \varphi^2(\nabla f)_g) &= \bar{g}(X, (\nabla f)_{\bar{g}}) - \varphi^2 \bar{g}(X, (\nabla f)_g) \\ &= X(f) - g(X, (\nabla f)_g) \\ &= X(f) - X(f) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, desta forma, que se tem

$$(\nabla f)_{\bar{g}} = \varphi^2(\nabla f)_g,$$

o que prova a 1. No que se segue, tome a X, Y por dois arbitrários campos diferenciáveis de vetores tangentes a M . Note que

$$\begin{aligned} (\nabla_X(\nabla f)_{\bar{g}})_{\bar{g}} &= (\nabla_X \varphi^2(\nabla f)_g)_{\bar{g}} \\ &= X(\varphi^2)(\nabla f)_g + \varphi^2(\nabla_X(\nabla f)_g)_{\bar{g}} \\ &= 2\varphi X(\varphi)(\nabla f)_g + \varphi^2 \left((\nabla_X(\nabla f)_g)_g \right. \\ &\quad \left. - \varphi^{-1} [X(\varphi)(\nabla f)_g + (\nabla f)_g(\varphi)X - g(X, (\nabla f)_g)(\nabla \varphi)_g] \right), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)_{\bar{g}}(X, Y) &= \bar{g}((\nabla_X(\nabla f)_{\bar{g}})_{\bar{g}}, Y) \\ &= 2\frac{X(\varphi)}{\varphi}Y(f) + (\nabla^2 f)_g(X, Y) - \frac{X(\varphi)}{\varphi}Y(f) \\ &\quad - g((\nabla f)_g, (\nabla \varphi)_g)g(X, Y) + X(f)\frac{Y(\varphi)}{\varphi} \\ &= (\nabla^2 f)_g(X, Y) + X(f)\frac{Y(\varphi)}{\varphi} + \frac{X(\varphi)}{\varphi}Y(f) - g((\nabla f)_g, \frac{(\nabla \varphi)_g}{\varphi})g(X, Y) \\ &= \left((\nabla^2 f)_g + df \otimes d \log \varphi + d \log \varphi \otimes df \right. \\ &\quad \left. - g((\nabla f)_g, (\nabla \log \varphi)_g)g \right)(X, Y), \end{aligned}$$

o que termina por demonstrar o item 2. $\square$

2.4 Ações de Grupos

Definição 2.13 *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação de G à esquerda de M é uma aplicação diferenciável*

$$G \times M \longrightarrow M, \quad (g, x) \longmapsto gx,$$

tal que

1. $1_G \cdot x = x$ para todo $x \in M$.
2. $g \cdot hx = gh \cdot x$ para todos $g, h \in G$ e $x \in M$;

Distinguem-se, para cada $x \in M$, a órbita de x através de G ou G -órbita de x ,

$$G \cdot x = \{gx : g \in G\} \subseteq M,$$

e, também, o estabilizador de x em G ou G -estabilizador de x ,

$$G_x = \{g \in G : gx = x\} \subseteq G.$$

Órbita e estabilizador se relacionam pelo fato de que

$$G/G_x \longrightarrow G \cdot x, \quad gG_x \longmapsto gx,$$

é uma bijeção, independentemente de $x \in M$. O kernel da ação é o subgrupo (normal) de G

$$N = \bigcap_{x \in M} G_x = \{g \in G : x \in M \implies gx = x\}.$$

A ação se diz efetiva caso se tenha $N = \{1_G\}$. Observe que

$$G/N \times M \longrightarrow M, \quad (gN, x) \longmapsto gx,$$

é uma ação do grupo quociente G/N sobre M , pois

$$gN = hN \iff h^{-1}gN = N \implies h^{-1}g \cdot x = x \iff gx = hx,$$

quaisquer que sejam os elementos $g, h \in G$ e $x \in M$, sendo esta uma ação efetiva,

já que

$$(\forall x \in M : gx = x) \iff g \in \bigcap_{x \in M} G_x = N \iff gN = N (= 1_{G/N}).$$

Como

$$\begin{aligned} G/N \cdot x &= \{(gN)x : g \in G\} \\ &= \{gx : g \in G\} \\ &= G \cdot x, \end{aligned}$$

não se altera, ao se passar de G a G/N , a órbita de um ponto $x \in M$. Quanto a estabilizadores, muito embora

$$\begin{aligned} (G/N)_x &= \{gN \in G/N : gNx = x\} \\ &= \{gN : g \in G_x\} \\ &= G_x/N, \quad N \subset G_x, \end{aligned}$$

o índice de $(G/N)_x = G_x/N$ em G/N é, ainda, igual àquele de G_x em G , visto que

$$(G/N)/(G_x/N) \longrightarrow (G/N) \cdot x = G \cdot x, \quad gN(G_x/N) \longmapsto (gN)x = gx,$$

é, também aqui, uma bijeção. Não se perde muito, portanto, em se supor que uma ação seja efetiva pois, caso contrário, pode-se sempre passar a uma que o seja e com propriedades bem próximas à da primeira.

No que se segue, seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana. Dadas funções diferenciáveis $\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ sujeitas à condição de que

$$\text{Im } \xi = \{\xi(x) : x \in M\} \subset (a, b),$$

pode-se formar a composta

$$\phi \circ \xi : M \longrightarrow (0, \infty), \quad x \longmapsto \phi(\xi(x)),$$

e com esta, a métrica

$$\forall x \in M, \forall u, v \in T_x M : \quad \bar{g}_x(u, v) = \phi(\xi(x))^{-2} g_x(u, v),$$

a qual pertence à classe conforme de g . Denotando-se por $Iso(M, g)$ ao grupo de todas as isometrias de (M, g) segundo a operação de composição de funções, pode-se definir de forma sucinta a

$$G = \{f \in Iso(M, g) : \xi \circ f = \xi\},$$

um dos subgrupos de $Iso(M, g)$. Afirma-se que G age de forma isométrica sobre M , ação esta induzida por aquela de $Iso(M, g)$. Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} \forall x \in M, \forall u, v \in T_x M : \quad \bar{g}_{f(x)}(df_x u, df_x v) &= \phi(\xi(f(x)))^{-2} g_{f(x)}(df_x u, df_x v) \\ &= \phi(\xi(x))^{-2} g_x(u, v) \\ &= \bar{g}_x(u, v), \end{aligned}$$

exatamente como se afirmou. Como exemplo cita-se aqui apenas o caso em que (M, g) é a esfera euclidiana n -dimensional $\mathbb{S}^n$ e também, em que

$$\xi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \longmapsto \langle p, e_{n+1} \rangle = p_{n+1}.$$

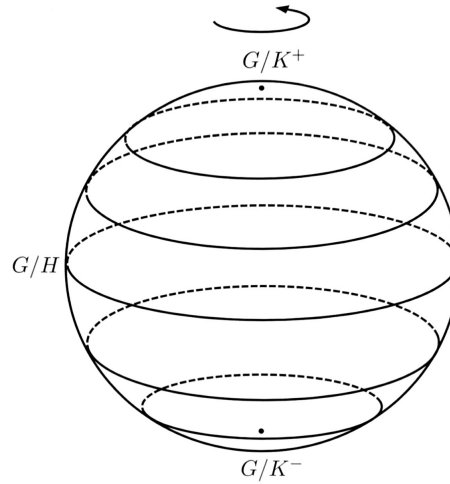
Tem-se que

$$Iso(\mathbb{S}^n) = O(n, \mathbb{R}) = \{B \in GL(n, \mathbb{R}) : B^t B = I\},$$

onde I é a matriz identidade de ordem n . Cálculos simples mostram que

$$\begin{aligned} G &= \{B \in O(n, \mathbb{R}) : \xi \circ B = \xi\} \\ &= \{B \in O(n, \mathbb{R}) : p \in \mathbb{S}^n \implies \langle Bp, e_{n+1} \rangle = \langle p, e_{n+1} \rangle\} \\ &= \{B \in O(n, \mathbb{R}) : Be_{n+1} = e_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Abaixo se tem uma figura da situação:



$K^+ = G = K^-$ são os estabilizadores dos pontos e_{n+1} e $-e_{n+1}$, respectivamente. Já o subgrupo H de G representa, de modo genérico, ao estabilizador de qualquer ponto em uma órbita não unitária da ação de G sobre $\mathbb{S}^n$. Percebe-se claramente a partir da figura que se tem

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n / G &= \{G \cdot x : x \in \mathbb{S}^n\} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Foi esta a figura que nos motivou a elaborar o Teorema (3.1) em continuação a [1]. Neste sentido, [6] se verifica em valiosa referência.

Capítulo 3

Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias

Neste capítulo se definem variedades estáticas e fluidos perfeitos. De modo bastante intuitivo se atribui o nome de ‘fluido perfeito estático’ a uma determinada combinação destes conceitos. Propriedades e alternativas (formas equivalentes) comuns a tais objetos são discutidas antes de efetivamente abordá-los, já na última seção, com ferramentas adequadas à minuciosa tarefa de explicitá-los: simetrias. O Teorema 3.1 encerra o capítulo com uma classificação das funções que se pode utilizar a fim de que se tenha em certa equação diferencial ordinária (veja [1]) o crivo pelo qual obter-se-ão novos fluidos perfeitos estáticos.

3.1 Variedades Estáticas

Diz-se *estática* (cf. [4], [10]) de toda variedade Lorentziana $(\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$ que se possa decompor como um produto torcido do tipo

$$(\bar{M}, \bar{g}) = (M, g) \times_f (\mathbb{R}, -dt^2), \quad (3-1)$$

em que (M, g) é uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow (0, \infty)$ é uma função diferenciável. Tem-se que

$$\begin{cases} \bar{M} = M \times \mathbb{R}, \\ \bar{g} = x^*g - f(x)^2 dt^2, \end{cases} \quad (3-2)$$

onde

$$\begin{cases} x : \bar{M} \rightarrow M, & (x, t) \mapsto x, \\ t : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}, & (x, t) \mapsto t, \end{cases} \quad (3-3)$$

denotam as projeções naturais de $\bar{M}$ sobre seus fatores, M e $\mathbb{R}$.

Note que o tensor de Ricci da variedade que se desenha em (3-1) é, pela

Proposição 2.8, dado por

$$\begin{cases} ric_{\bar{g}}(X, Y) = ric_g(X, Y) - f^{-1}(\nabla^2 f)_g(X, Y), \\ ric_{\bar{g}}(X, \partial_t) = 0, \\ ric_{\bar{g}}(\partial_t, \partial_t) = -f(\Delta f)_g, \end{cases} \quad (3-4)$$

para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{L}(M)$ e, consequentemente, que

$$scal_{\bar{g}} = scal_g - 2f^{-1}(\Delta f)_g, \quad (3-5)$$

como se comprova em qualquer sistema de coordenadas locais de $\bar{M} = M \times \mathbb{R}$. Observe-se pela completa ausência de t nas equações que compõem tanto a (3-4) quanto (3-5).

3.2 Fluidos Perfeitos

Define-se *fluido perfeito* (cf. [4], [10], [13]) ao longo de uma variedade Lorentziana arbitrária, a qual se haverá aqui de grafar como $(\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$, como um $(0, 2)$ -tensor simétrico de tipo seguinte:

$$T = (\mu + \nu)\bar{g}(\cdot, X) \otimes \bar{g}(\cdot, X) + \nu\bar{g}, \quad (3-6)$$

em que funções $\mu, \nu \in \mathfrak{D}(\bar{M})$ descrevem duas das características de um fluido, energia e pressão, com energia a cargo de μ e pressão às custas de ν , enquanto $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ se trata de campo vetorial com o qual se verifica que

$$\bar{g}(X, X) = -1,$$

e cujo papel é o de indicar, através do fluxo a ele associado, o modo de escoar do próprio fluido em si.

Com o intuito de manter-se a presente exposição tão simples quanto possível lhe seja, considerar-se-ão tão somente aqueles fluidos perfeitos para os quais se tenha $X = f(x)^{-1}\partial_t$ e, assim, dado que agora vigora a relação $\bar{g}(\cdot, X) = -f(x)dt$, (3-6) reescreve-se à forma de

$$T = \nu x^*g + \mu f(x)^2 dt^2, \quad (3-7)$$

em que f e x, t são como em (3-1) e (3-3), respectivamente.

3.3 Fluidos Perfeitos Estáticos

Chamam-se *fluidos perfeitos estáticos* às soluções da *Equação de Campos de Einstein*, a saber,

$$ric_{\bar{g}} - \frac{scal_{\bar{g}}}{2}\bar{g} = T, \quad (3-8)$$

em que

$$(\bar{M}^{n+1}, \bar{g}) = (M^n, g) \times_f (\mathbb{R}, -dt^2),$$

é uma variedade estática e, além disso,

$$T = \nu x^*g + \mu f(x)^2 dt^2,$$

é um fluido perfeito sobre $(\bar{M}, \bar{g})$. Tradicionalmente, esta equação é apresentada com uma constante, cuja magnitude não nos é agora de interesse, a multiplicar T . Deve-se observar que o tensor à esquerda em (3-8) tem, como aliás o tem o tensor de Einstein de uma variedade semi-Riemanniana qualquer, nula a sua divergência e, desta forma, que $div_{\bar{g}}(T) = 0$ se verifica dentre aquelas que são as condições necessárias à existência de soluções da referida equação.

Ao tensor de Ricci de um fluido perfeito estático cabe cumprir, como deriva de (3-1), (3-7) e (3-8), à identidade

$$ric_{\bar{g}} = \left(\nu + \frac{scal_{\bar{g}}}{2}\right)x^*g + \left(\mu - \frac{scal_{\bar{g}}}{2}\right)f(x)^2 dt^2,$$

de onde se avanta a existência de não mais que dois distintos autovalores de $ric_{\bar{g}}$, com multiplicidades n e 1, para cada ponto de $\bar{M}$. Outra interessante característica dos fluidos perfeitos estáticos é a de que (3-8) se traduz (cf. [10]), face a (3-4), (3-5) e (3-7), em

$$\begin{cases} ric_g - f^{-1}(\nabla^2 f)_g - \frac{scal_g - 2f^{-1}(\Delta f)_g}{2}g = \nu g, \\ f(\Delta f)_g - \frac{scal_g - 2f^{-1}(\Delta f)_g}{2}(-f^2) = \mu f^2, \end{cases} \quad (3-9)$$

o que se molda em

$$\begin{cases} ric_g - \frac{scal_g}{n}g = \frac{1}{f} \left((\nabla^2 f)_g - \frac{(\Delta f)_g}{n}g \right), \\ \mu = \frac{scal_g}{2}, \quad \nu = \frac{n-1}{n} \left(\frac{(\Delta f)_g}{f} - \frac{n-2}{2(n-1)}scal_g \right), \end{cases} \quad (3-10)$$

mediante apropriada manipulação algébrica das partes que o compõem, sendo o último preferível a seu anterior por ser este de mais fácil memorização.

3.4 Fluidos Perfeitos Estáticos com Simetrias

Formas espaciais são (cf. [3]) variedades Riemannianas geodesicamente completas, de curvatura seccional constante. Toma-se

$$(M^n(\kappa), \langle \cdot, \cdot \rangle), \quad (3-11)$$

por arbitrária forma espacial de dimensão $n \geq 3$ e curvatura seccional $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$. Neste contexto funções diferenciáveis

$$\xi : M^n(\kappa) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma, \tau : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad (3-12)$$

sujeitas à condição de que

$$\text{Im } \xi = \{\xi(x) : x \in M^n(\kappa)\} \subset (a, b), \quad (3-13)$$

se unem para que venha à luz certa variedade estática, a saber,

$$\begin{cases} \bar{M} = M^n(\kappa) \times \mathbb{R}, \\ \bar{g} = \sigma(\xi(x))^{-2} x^* \langle \cdot, \cdot \rangle - \tau(\xi(x))^2 dt^2, \end{cases} \quad (3-14)$$

em que $x : \bar{M} \longrightarrow M^n(\kappa)$ e $t : \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ desempenham aqui o mesmo papel que seus análogos em (3-3). À guisa de economia faz-se

$$(M, g) = (M^n(\kappa), \sigma(\xi)^{-2} \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

para que, então, (3-14) se escreva como

$$(\bar{M}, \bar{g}) = (M, g) \times_{\tau(\xi)} (\mathbb{R}, -dt^2). \quad (3-15)$$

Perceba que

$$G = \{q \in \text{Iso}(M^n(\kappa), \langle \cdot, \cdot \rangle) : \xi \circ q = \xi\},$$

é um grupo com respeito à operação de composição de funções. Dado um $q \in G$ qualquer, faça

$$\bar{q} : \bar{M} \longrightarrow \bar{M}, \quad (x, t) \longmapsto (qx, t),$$

para que ao se tomarem elementos

$$(x, t) \in \bar{M} \quad \text{e} \quad v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2 \in T_{(x,t)} \bar{M} = T_x M^n(\kappa) \oplus \mathbb{R},$$

arbitrários em seus respectivos domínios, se verifiquem com estes as seguintes

identidades:

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{\bar{q}(x,t)}(d\bar{q}_{(x,t)}v, d\bar{q}_{(x,t)}w) &= \bar{g}_{(qx,t)}(dq_x v_1 + v_2, dq_x w_1 + w_2) \\
 &= \sigma(\xi(qx))^{-2} \langle dq_x v_1, dq_x w_1 \rangle_{qx} - \tau(\xi(qx))^2 v_2 w_2 \\
 &= \sigma(\xi(x))^{-2} \langle v_1, w_2 \rangle_x - \tau(\xi(x))^2 v_2 w_2 \\
 &= \bar{g}_{(x,t)}(v, w),
 \end{aligned}$$

de onde se segue que $\bar{q} \in Iso(\bar{M}, \bar{g})$. É possível mostrar que

$$G \longrightarrow Iso(\bar{M}, \bar{g}), \quad q \longmapsto \bar{q}, \quad (3-16)$$

é um homomorfismo injetor de G em $Iso(\bar{M}, \bar{g})$. O grupo das isometrias de (3-15) é, portanto, no mínimo tão grande quanto o próprio G , motivo por que se houve de acrescentar ‘simetrias’ ao título desta seção.

Diz-se *fluido perfeito estático com simetrias* de qualquer das soluções de (3-10) de tipo (3-14).

Deve-se, quando em busca de fluidos perfeitos estáticos com simetrias, observar pela validade das seguintes relações:

$$ric_g - \frac{scal_g}{n}g = \frac{n-2}{\sigma(\xi)} \left((\nabla^2 \sigma(\xi))_{\langle, \rangle} - \frac{(\Delta \sigma(\xi))_{\langle, \rangle}}{n} \langle, \rangle \right), \quad (3-17)$$

e

$$\left. \begin{aligned}
 (\nabla^2 \tau(\xi))_g - \frac{(\Delta \tau(\xi))_g}{n}g &= (\nabla^2 \tau(\xi))_{\langle, \rangle} - \frac{(\Delta \tau(\xi))_{\langle, \rangle}}{n} \langle, \rangle \\
 &\quad + d\tau(\xi) \otimes d \log \sigma(\xi) + d \log \sigma(\xi) \otimes d\tau(\xi) \\
 &\quad - \frac{2}{n} \langle (\nabla \tau(\xi))_{\langle, \rangle}, (\nabla \log \sigma(\xi))_{\langle, \rangle} \rangle \langle, \rangle,
 \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

as quais se devem, respectivamente, às Proposições (2.11) e (2.12). Produzem-se, portanto, em decorrência de (3-10) e pela adoção de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $M^n(\kappa)$ com as quais se verifique que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \rho(x)^{-2} \delta_{ij}, \quad (3-19)$$

para alguma função $\rho = \rho(x) > 0$, as seguintes equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} \frac{n-2}{\sigma(\xi)} \left(\sigma(\xi)_{,ij} - \frac{\Delta(\sigma(\xi))}{n} \delta_{ij} + \sigma(\xi)_{,i} \frac{\rho_{,j}}{\rho} + \frac{\rho_{,i}}{\rho} \sigma(\xi)_{,j} - \frac{2}{n} \left(\nabla(\sigma(\xi)) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \delta_{ij} \right) \\ = \frac{1}{\tau(\xi)} \left(\tau(\xi)_{,ij} - \frac{\Delta(\tau(\xi))}{n} \delta_{ij} + \tau(\xi)_{,i} \frac{\rho_{,j}}{\rho} + \frac{\rho_{,i}}{\rho} \tau(\xi)_{,j} - \frac{2}{n} \left(\nabla(\tau(\xi)) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \delta_{ij} \right. \\ \left. + \tau(\xi)_{,i} \frac{\sigma(\xi)_{,j}}{\sigma(\xi)} + \frac{\sigma(\xi)_{,i}}{\sigma(\xi)} \tau(\xi)_{,j} - \frac{2}{n} \left(\nabla(\sigma(\xi)) \cdot \frac{\nabla \tau(\xi)}{\tau(\xi)} \right) \delta_{ij} \right), \end{cases}$$

com assegurada validade para todos os índices $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Salienta-se o caráter euclidiano das várias operações envolvidas no sistema acima, tanto de derivação quanto de produto interno (o ponto ‘.’). Através das relações

$$\begin{cases} \sigma(\xi)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma(\xi)) = \frac{d\sigma}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \dot{\sigma}(\xi) \xi_{,i}, \\ \sigma(\xi)_{,ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(\sigma(\xi)) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{\sigma}(\xi) \xi_{,i}) = \ddot{\sigma}(\xi) \xi_{,i} \xi_{,j} + \dot{\sigma}(\xi) \xi_{,ij}, \end{cases} \quad (3-20)$$

em que se emprega a notação

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(\xi) = \frac{d\sigma}{d\xi}(\xi), & \ddot{\sigma}(\xi) = \frac{d^2\sigma}{d\xi^2}(\xi), & \dots, \\ \xi_{,i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, & \xi_{,ij} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j}, & \dots, \end{cases} \quad (3-21)$$

se chega, por aplicação do agora já mencionado resultado (2.12), às identidades:

$$\begin{cases} (\nabla \sigma(\xi))_{\langle, \rangle} = \rho^2 \dot{\sigma} \nabla \xi, \\ (\nabla^2 \sigma(\xi))_{\langle, \rangle} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \ddot{\sigma}(\xi) \xi_{,i} \xi_{,j} + \dot{\sigma}(\xi) \xi_{,ij} + \dot{\sigma}(\xi) \xi_{,i} \rho_{,j} \\ \quad + \dot{\sigma} \rho_{,i} \xi_{,j} - \dot{\sigma}(\xi) (\nabla \xi \cdot \nabla \rho) \delta_{ij}, \\ (\Delta \sigma(\xi))_{\langle, \rangle} = \ddot{\sigma}(\xi) \|\nabla \xi\|^2 + \dot{\sigma}(\xi) \Delta \xi - (n-2) \dot{\sigma}(\xi) \nabla \xi \cdot \nabla \rho, \end{cases} \quad (3-22)$$

em que se escrevem

$$\begin{cases} \nabla \xi = \sum_{k=1}^n \xi_{,k} \frac{\partial}{\partial x_k}, & \nabla \rho = \sum_{k=1}^n \rho_{,k} \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ \|\nabla \xi\|^2 = \sum_{k=1}^n \xi_{,k}^2, & \nabla \xi \cdot \nabla \rho = \sum_{k=1}^n \xi_{,k} \rho_{,k}, \\ \Delta \xi = \sum_{k=1}^n \xi_{,kk}. \end{cases} \quad (3-23)$$

A equação

$$\begin{aligned} & \left[\xi_{,i} \xi_{,j} - \frac{\|\nabla \xi\|^2}{n} \delta_{ij} \right] \left[(n-2) \frac{\ddot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} - 2 \frac{\dot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} \frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} - \frac{\ddot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} \right] \\ &= - \left[(n-2) \frac{\dot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} - \frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} \right] \left[\xi_{,ij} - \frac{\Delta \xi}{n} \delta_{ij} + \xi_{,i} \frac{\rho_{,j}}{\rho} + \frac{\rho_{,i}}{\rho} \xi_{,j} - \frac{2}{n} (\nabla \xi \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}) \delta_{ij} \right], \end{aligned}$$

figura-se, desta forma, em direta consequência de (3-10) conforme se conclui pelos itens (3-17) a (3-23).

Teorema 3.1 *Com as considerações acima vê-se que, se, em cada ponto do domínio de uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n(\kappa)$ com a qual se tenha verificado que*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \rho^{-2} \delta_{ij},$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e alguma função $\rho > 0$, não for apenas verdade que

$$\xi_{,ij} - \frac{\Delta \xi}{n} \delta_{ij} + \xi_{,i} \frac{\rho_{,j}}{\rho} + \frac{\rho_{,i}}{\rho} \xi_{,j} - \frac{2}{n} (\nabla \xi \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}) \delta_{ij} = 0,$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, mas também que

$$\xi_{,k} \xi_{,l} - \frac{\|\nabla \xi\|^2}{n} \delta_{kl} \neq 0,$$

para certos $k, l \in \{1, \dots, n\}$, então $\tau(\xi)$ é uma solução de (3-10) em

$$(M, g) = (M^n(\kappa), \sigma(\xi)^{-2} \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

se, e apenas se, ocorre que

$$(n-2) \frac{\ddot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} - 2 \frac{\dot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} \frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} - \frac{\ddot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} = 0,$$

ao longo de $\xi(x(U)) = \{\xi(p) : p \in x(U)\} \subset (a, b)$. Densidade de energia e pressão do fluido perfeito são, neste caso, respectivamente dadas por

$$\mu(\xi) = \frac{n-1}{2} \left[\kappa n \sigma(\xi)^2 + 2 \sigma(\xi) (\Delta \sigma(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle} - n \|(\nabla \sigma(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle}\|^2 \right],$$

e

$$\nu(\xi) = \frac{n-1}{n} \frac{\sigma(\xi)^2}{\tau(\xi)} \left[(\Delta \tau(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle} - (n-2) \langle (\nabla \tau(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle}, (\nabla \log \sigma(\xi))_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \rangle \right] - \frac{n-2}{n} \mu(\xi).$$

Capítulo 4

Exemplos de Fluidos Perfeitos Estáticos

O presente capítulo se encontra dividido em duas partes. Na primeira, com o nome de ‘simetrias compatíveis’, se busca por soluções de determinada equação diferencial parcial, a qual é parte integrante do Teorema 3.1 e que se modifica de acordo com o valor da curvatura seccional da forma espacial lá utilizada. Estas soluções determinam, em cada caso, quais simetrias se deve utilizar (e, conseqüentemente, quais não). Na segunda parte, intitulada ‘funções admissíveis’, se busca por fluidos perfeitos estáticos com as simetrias agora já especificadas. É nesta parte que se pode devidamente apreciar as qualidades da estratégia adotada.

4.1 Simetrias Compatíveis

Os fluidos perfeitos estáticos com simetrias impostas por meio de função $\xi : M^n(\kappa) \longrightarrow \mathbb{R}$ com que se verifiquem as equações:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \xi_{,ij} - \frac{\Delta \xi}{n} \delta_{ij} + \xi_{,i} \frac{\rho_{,j}}{\rho} + \frac{\rho_{,i}}{\rho} \xi_{,j} - \frac{2}{n} (\nabla \xi \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}) \delta_{ij} = 0, \quad (4-1)$$

em coordenadas

$$x : U \subset M^n(\kappa) \longrightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n, \quad p \longmapsto x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)),$$

de $M^n(\kappa)$ com as quais se escreva

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \rho(x)^{-2} \delta_{ij},$$

para alguma função $\rho = \rho(x) > 0$, caracterizam-se (confira (3.4)) como soluções da seguinte equação diferencial ordinária:

$$(n-2) \frac{\ddot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} - 2 \frac{\dot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} \frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} - \frac{\ddot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} = 0, \quad (4-2)$$

em que $\xi \in \xi(U) = \{\xi(x) : x \in U\} \subset (a, b)$.

A seguir se determinam soluções de (4-1) conforme se tenha, nesta ordem, $\kappa = -1, 0, 1$, para enfim combiná-las a certas soluções de (4-2). Feito isto, se terá resolvido ao Problema (3-10) ou como que lhe é equivalente, ao Problema (3-8).

4.1.1 O Caso Hiperbólico

Seja $M^n(-1)$ o espaço hiperbólico, o qual se tem aqui representado pelo conjunto

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$

aberto em $\mathbb{R}^n$ e dotado da métrica Riemanniana

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = x_n^{-2} \delta_{ij},$$

assim expressa nas coordenadas

$$x : \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n, \quad (p_1, \dots, p_n) \longmapsto (p_1, \dots, p_n),$$

de $\mathbb{H}^n$. Reescreve-se, portanto, (4-1) da maneira seguinte:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \xi_{,ij} - \frac{\Delta \xi}{n} \delta_{ij} + \xi_{,i} \frac{\delta_{jn}}{x_n} + \frac{\delta_{in}}{x_n} \xi_{,j} - \frac{2}{n} \frac{\xi_{,n}}{x_n} \delta_{ij} = 0. \quad (4-3)$$

Restringindo-se os índices i, j ao caso em que $1 \leq i \leq n-1$ e $j = n$, obtém-se

$$\xi_{,in} + \frac{\xi_{,i}}{x_n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\xi_{,i} \cdot x_n)_{,n} = 0,$$

de onde se conclui que

$$\xi_{,i} = \frac{F_i}{x_n},$$

para alguma função $F_i = F_i(x_1, \dots, x_{n-1})$, $i = 1, \dots, n-1$. Como se tem

$$\xi_{,ij} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{F_{i,j}}{x_n} = 0,$$

sempre que $1 \leq i \neq j \leq n-1$, ocorre ainda que $F_i = F_i(x_i)$ também para $i = 1, \dots, n-1$. Se agora se faz $1 \leq i = j \leq n-1$, obtém-se

$$\xi_{,ii} - \frac{\Delta \xi}{n} - \frac{2}{n} \frac{\xi_{,n}}{x_n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_{,ii} = \frac{\Delta \xi}{n} + \frac{2}{n} \frac{\xi_{,n}}{x_n},$$

e, assim, que

$$\frac{F'_i}{x_n} = \xi_{,ii} = \frac{\Delta \xi}{n} + \frac{2}{n} \frac{\xi_{,n}}{x_n} = \xi_{,jj} = \frac{F'_j}{x_n},$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, $i \neq j$. Deve, deste modo, existir $a \in \mathbb{R}$ com o qual se verifique que

$$F'_i = a \iff F_i(x_i) = ax_i + b_i,$$

qualquer que seja $i = 1, \dots, n-1$, de onde segue que

$$\xi = \frac{1}{x_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right) + G(x_n).$$

Finalmente, quando $i = j = n$, tem-se

$$\xi_{,nn} - \frac{\Delta \xi}{n} + \frac{2(n-1)}{n} \frac{\xi_{,n}}{x_n} = 0 \iff \xi_{,nn} + 2 \frac{\xi_{,n}}{x_n} = \frac{\Delta \xi}{n} + \frac{2}{n} \frac{\xi_{,n}}{x_n} \left(= \xi_{,ii} = \frac{a}{x_n} \right),$$

e, portanto, que

$$(\xi_{,n} \cdot x_n^2)_{,n} \frac{1}{x_n^2} = \frac{a}{x_n} \iff (\xi_{,n} \cdot x_n^2)_{,n} = ax_n.$$

Chega-se, desta forma, à conclusão de que

$$[G' \cdot x_n^2]_{,n} = \left[\left(-\frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right) + G' \right) \cdot x_n^2 \right]_{,n} = ax_n,$$

de modo que

$$G = \frac{a}{2} x_n + \frac{c_n}{x_n} + b_n.$$

Tem-se, em resumo, a função

$$\xi = \frac{1}{x_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right).$$

4.1.2 O Caso Euclidiano

Os cálculos são sensivelmente mais simples no caso presente, a saber, em que $\kappa = 0$. Toma-se $M^n(0)$ pelo já tão familiar espaço

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

de todas as n -uplas ordenadas de números reais, aqui acompanhado da métrica euclidiana tradicional

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij},$$

comum ao estudo da Geometria Analítica. Deste modo, (4-1) molda-se à maneira de:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \xi_{,ij} - \frac{\Delta \xi}{n} \delta_{ij} = 0.$$

Tem-se, para $1 \leq i \neq j \leq n$, que

$$\xi_{,ij} = 0,$$

pelo que se aventa ser

$$\xi = \sum_{i=1}^n F_i(x_i).$$

Ao se tomar $1 \leq i = j \leq n$ descobre-se que

$$F_i'' - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F_j'' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (n-1)F_i'' = \sum_{j \neq i} F_j'',$$

e daí, que

$$F_i'' = a_i \quad \text{é uma constante,}$$

a qual, em princípio, depende de $i \in \{1, \dots, n\}$ porém, como

$$\begin{cases} (n-1)a_i = \sum_{k \neq i} a_k = -a_i + \sum_{k=1}^n a_k, \\ (n-1)a_j = \sum_{k \neq j} a_k = -a_j + \sum_{k=1}^n a_k, \end{cases}$$

implica em se ter

$$(n-1)(a_i - a_j) = a_j - a_i \quad \Longleftrightarrow \quad n(a_i - a_j) = 0,$$

enxerga-se que tal dependência é apenas aparente. Se $a \in \mathbb{R}$ denota o valor comum, isto é, se

$$a = a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

então

$$\xi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right).$$

4.1.3 O Caso Esférico

Seja $M^n(1)$ a esfera euclidiana n -dimensional, isto é,

$$\mathbb{S}^n = \left\{ p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, p \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 1 \right\},$$

vista enquanto subvariedade Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Em coordenadas

$$x_\varepsilon : \mathbb{R}_\varepsilon^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{-\varepsilon e_{n+1}\}, \quad x \longmapsto \frac{2}{1+r}x + \varepsilon \frac{1-r}{1+r}e_{n+1},$$

dadas pelo inverso da projeção estereográfica de $\mathbb{S}^n$ em relação a $\varepsilon e_{n+1} \in \mathbb{S}^n$, onde

$e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ são os vetores canônicos de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon = \pm 1$,

$$\begin{cases} \mathbb{R}_\varepsilon^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = \varepsilon\} \\ \equiv \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases}$$

e

$$r : \mathbb{R}_\varepsilon^n \longrightarrow [0, \infty), \quad x = (x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \longmapsto r(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

obtém-se

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left(\frac{1+r}{2} \right)^{-2} \delta_{ij},$$

para todo $x \in \mathbb{R}_\varepsilon^n \equiv \mathbb{R}^n$, quer seja $\varepsilon = 1$ ou -1 . Desta feita, (4-1) reestrutura-se do modo seguinte:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \xi_{,ij} - \frac{\Delta \xi}{n} \delta_{ij} + \xi_{,i} \frac{2x_j}{1+r} + \frac{2x_i}{1+r} \xi_{,j} - \frac{2}{n} (\nabla \xi \cdot \frac{2x}{1+r}) \delta_{ij} = 0.$$

Como esta é uma equação difícil de se resolver em toda a sua generalidade, supõe-se tacitamente que

$$\xi(x) = \xi(r(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Vigora, portanto, as identidades

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \xi_{,i} = \xi' 2x_i \quad \text{e} \quad \xi_{,ij} = \xi'' 4x_i x_j + \xi' 2\delta_{ij},$$

no que toca às derivadas parciais de primeira e segunda ordens de ξ , das quais

$$\nabla \xi = 2\xi' x \quad \text{e} \quad \Delta \xi = \xi'' 4r + \xi' 2n,$$

são, então, um corolário. Tem-se, enfim, que

$$\begin{cases} \xi'' 4x_i x_j + \xi' 2\delta_{ij} - \frac{\xi'' 4r + \xi' 2n}{n} \delta_{ij} + \xi' \frac{4x_i x_j}{1+r} + \xi' \frac{4x_i x_j}{1+r} - \frac{2}{n} \xi' \frac{4r}{1+r} \delta_{ij} = 0 \\ \iff 4 \left(\xi'' + \frac{2}{1+r} \xi' \right) \left(x_i x_j - \frac{r}{n} \delta_{ij} \right) = 0. \end{cases}$$

Observe que a função

$$\xi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \longmapsto \langle p, e_{n+1} \rangle = p_{n+1},$$

possui a seguinte expressão em coordenadas

$$x_\varepsilon : \mathbb{R}_\varepsilon^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{-\varepsilon e_{n+1}\}, \quad x \longmapsto x_\varepsilon(x) = \frac{2}{1+r}x + \varepsilon \frac{1-r}{1+r}e_{n+1},$$

de $\mathbb{S}^n$:

$$\begin{cases} \xi(x) = \xi \circ x_\varepsilon(x) = \langle x_\varepsilon(x), e_{n+1} \rangle = \varepsilon \frac{1-r}{1+r} = \varepsilon \frac{[2 - (1+r)]}{1+r} \\ \quad = \frac{2\varepsilon}{1+r} - \varepsilon, \end{cases}$$

com que se verificam

$$\xi' = -\frac{2\varepsilon}{(1+r)^2} \quad \text{e} \quad \xi'' = \frac{4\varepsilon}{(1+r)^3},$$

e, portanto, que

$$\xi'' + \frac{2}{1+r} \xi' = 0,$$

em todo o $\mathbb{R}^n$, ou melhor, para todo $r \in \{r(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = [0, \infty)$.

4.2 Funções Admissíveis

4.2.1 O Caso Hiperbólico - Continuação

Sabe-se que $\xi : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é de natureza tal que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n : \quad \xi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right),$$

em que $a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes (de integração). O conjunto imagem de uma função como esta é, exceto pelas funções constantes, sempre um intervalo ilimitado de números reais. É sabido que o intervalo (a, b) , o mesmo em que se definem as funções $\sigma, \tau : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ com que se pretende resolver a

(4-2), deve conter a todo o conjunto imagem $\text{Im } \xi = \xi(\mathbb{H}^n)$, de sorte que deve ser ele próprio um intervalo ilimitado de números reais. Devidamente motivados, escolhemos $\sigma(\xi) = e^{\lambda\xi}$ esperançosos de que as soluções por vir estejam definidas em toda a reta real e que, desta forma, se abarque com um só exemplo a todas as possíveis configurações de $\xi(\mathbb{H}^n)$ a depender dos vários parâmetros $a, b_1, b_2, \dots$.

Decorre de (4-2), agora que se supõe que

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto e^{\lambda\xi},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante, que

$$\begin{cases} (n-2) \frac{\lambda^2 e^{\lambda\xi}}{e^{\lambda\xi}} - 2 \frac{\lambda e^{\lambda\xi}}{e^{\lambda\xi}} \frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} - \frac{\ddot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} = 0 \\ \iff (n-2)\lambda^2 \tau(\xi) - 2\lambda \dot{\tau}(\xi) - \ddot{\tau}(\xi) = 0. \end{cases}$$

Como esta é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes, deve-se buscar resolvê-la na forma de

$$\tau : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto e^{r\xi},$$

o que, na prática, equivale a se determinar aos possíveis valores de $r \in \mathbb{R}$. Ora, tem-se que

$$(n-2)\lambda^2 e^{r\xi} - 2\lambda r e^{r\xi} - r^2 e^{r\xi} = 0 \iff (n-2)\lambda^2 - 2\lambda r - r^2 = 0,$$

de forma que se chega em $r = -\lambda \pm |\lambda|\sqrt{n-1}$. Em resumo, a variedade $\mathbb{H}^n$ munida da métrica

$$g_{ij} = (x_n e^{\lambda\xi})^{-2} \delta_{ij}, \quad \xi = \frac{1}{x_n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right),$$

assim expressa em coordenadas

$$x : \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (p_1, \dots, p_n) \longmapsto (p_1, \dots, p_n),$$

de $\mathbb{H}^n$ resolve, acompanhada de

$$\tau = e^{r\xi}, \quad r = -\lambda \pm |\lambda|\sqrt{n-1},$$

ao Problema (3-10), para toda escolha dos parâmetros $a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b, c, \lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.2 O Caso Euclidiano - Continuação

O trabalho que ora tens em mão se inicia com o término mesmo de [1], com o intuito de estender os resultados lá contidos. Em [1], como também aqui, se propõe o estudo de fluidos perfeitos estáticos com simetrias. Lá, porém, se parte de $M^n(0) = \mathbb{R}^n$ com uma métrica conformemente plana de tipo

$$g_{ij} = \varphi(\xi)^{-2} \delta_{ij},$$

onde

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \xi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ são constantes não simultaneamente nulas. Descobriu-se, assim, que os objetos procurados deveriam, para surpresa dos envolvidos, obedecer à seguinte equação diferencial ordinária:

$$(n-2) \frac{\ddot{\varphi}(\xi)}{\varphi(\xi)} - 2 \frac{\dot{\varphi}(\xi)}{\varphi(\xi)} \frac{\dot{f}(\xi)}{f(\xi)} - \frac{\ddot{f}(\xi)}{f(\xi)} = 0,$$

aqui conhecida na forma de (4-2). Buscou-se, basicamente, por respostas a 3 fundamentais questões, não necessariamente disjuntas, a nos guiarem ao longo destas notas. São elas:

1. Até onde se pode seguir resolvendo à Equação de Einstein na pessoa de, por assim dizer, tão singela equação diferencial ordinária?
2. Já que a Equação de Einstein nada diz acerca da topologia da variedade subjacente à métrica, será que esta mesma equação diferencial ordinária poderia fornecer um crivo à existência de fluidos perfeitos estáticos em topologias distintas da euclidiana como, por exemplo, espaços compactos?
3. Mostrou-se que uma ξ linear do tipo acima pode ser utilizada na construção de soluções do referido problema mas como é o conjunto das funções ξ com que se chegaria, findo o processo, à já referida equação?

Com um pouco de abstração e alguma experimentação captou-se aquilo que é a essência de [1]. O restante são adaptações necessárias à classificação das funções ξ que conduzem a (4-2). Pois bem, sabe-se que para $M^n(0) = \mathbb{R}^n$ deve-se ter

$$\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \xi(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{2} x_i^2 + b_i x_i + c_i \right),$$

onde $a, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ são constantes (de integração). Escolha, por exemplo, $a = 2$, $b_1 = \dots = b_n = 0$ e $c_1 = \dots = c_n = 1/n$, para que se chegue em

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \xi(x_1, \dots, x_n) = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 + r, \quad r = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

e, neste caso, já que $\text{Im } \xi = [1, \infty)$, faça

$$\sigma : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto \xi.$$

Tem-se, assim, que (4-2) se reduz a

$$-\frac{2}{\xi} \frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} - \frac{\ddot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{\tau}(\xi) + \frac{2}{\xi} \dot{\tau}(\xi) = 0,$$

de onde se vê que

$$\tau : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto b - \frac{a}{\xi},$$

para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ próprias para que $b\xi > a$, sempre que $\xi > 1/2$. Tome $a = 1$, $b = 2$. Veja que a variedade $\mathbb{R}^n$ munida da métrica

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad g_{ij} = (1 + r)^{-2} \delta_{ij},$$

assim expressa nas coordenadas

$$x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n),$$

de $\mathbb{R}^n$, onde

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad r = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

resolve, quando acompanhada de

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \tau = 2 - \frac{1}{1 + r},$$

ao Problema (3-10). Perceba a simetria das funções acima com respeito à ação de $O(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$. Note que todos os 5 exemplos em [1] se aplicam também aqui sem a necessidade de quaisquer adaptações.

4.2.3 O Caso Esférico - Continuação

A este ponto já sabe o leitor que, caso se tenha $M^n(1) = \mathbb{S}^n$, a função

$$\xi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \longmapsto \langle p, e_{n+1} \rangle = p_{n+1},$$

conduz a simples porém elegante solução de (4-1). Tome

$$\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto \cosh(\xi),$$

para ver que

$$\begin{cases} (n-2) \frac{\ddot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} - 2 \frac{\dot{\sigma}(\xi)}{\sigma(\xi)} \frac{\dot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} - \frac{\ddot{\tau}(\xi)}{\tau(\xi)} = 0 \\ \iff \ddot{\tau}(\xi) + 2 \tanh(\xi) \dot{\tau}(\xi) - (n-2) \tau(\xi) = 0, \end{cases}$$

de onde se tem que

$$\tau(\xi) : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto ae^{-\sqrt{n-1}\xi} \operatorname{sech}(\xi) + b \frac{e^{\sqrt{n-1}\xi} \operatorname{sech}(\xi)}{\sqrt{n-1}},$$

para quaisquer constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\tau(\xi) > 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Consegue-se, assim, uma solução de (3-10) em que $M^n(1) = \mathbb{S}^n$ está equipada com a métrica Riemanniana

$$g = \cosh(\xi)^{-2} \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica usual da esfera e

$$\xi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \longmapsto \langle p, e_{n+1} \rangle = p_{n+1},$$

e, também, acompanhada da função

$$\tau(\xi) = ae^{-\sqrt{n-1}\xi} \operatorname{sech}(\xi) + b \frac{e^{\sqrt{n-1}\xi} \operatorname{sech}(\xi)}{\sqrt{n-1}},$$

para a qual $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes, por exemplo, positivas.

Para um novo exemplo poderia-se, a exemplo do que foi feito acima, escolher

$$\sigma : \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto \cos(\xi),$$

já que

$$\xi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \longmapsto \langle p, e_{n+1} \rangle,$$

e, como tal, que

$$\text{Im } \xi = \xi(\mathbb{S}^n) = [-1, 1] \subset \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

relembrando que

$$\xi \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \implies \cos(\xi) > 0.$$

Deste modo, obtém-se a equivalência entre (4-2) e a equação

$$-\ddot{\tau}(\xi) + 2 \tan(\xi) \dot{\tau}(\xi) - (n-2)\tau(\xi) = 0,$$

de que

$$\tau : \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad \xi \longmapsto ae^{-\sqrt{n-1}\xi} \sec(\xi) + b \frac{e^{\sqrt{n-1}\xi} \sec(\xi)}{\sqrt{n-1}},$$

também aqui para constantes $a, b \in \mathbb{R}$ próprias para que $\tau(\xi) > 0$ sempre que $\xi \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, são as únicas soluções viáveis ao problema. Obtém-se, finalmente, uma solução de (3-10) em que $M^n(1) = \mathbb{S}^n$ se encontra munida da métrica

$$g = \cos(\xi)^{-2} \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica usual da esfera, e

$$\xi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \longmapsto \langle p, e_{n+1} \rangle,$$

e, claro, amparada pela função

$$\tau(\xi) = ae^{-\sqrt{n-1}\xi} \sec(\xi) + b \frac{e^{\sqrt{n-1}\xi} \sec(\xi)}{\sqrt{n-1}},$$

para a qual $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes, por exemplo, positivas. O fluido perfeito estático encontrado é, então, dado pelo tensor métrico

$$\bar{g} = \sec^2(\xi(x)) \left[x^* g_1 - \left(e^{-\xi(x)\sqrt{n-1}} \right)^2 dt^2 \right],$$

sobre a variedade diferenciável

$$\bar{M} = \mathbb{S}^n \times \mathbb{R},$$

ao lado de

$$\begin{aligned} T &= (\mu + \nu)\bar{g}(\cdot, X) \otimes \bar{g}(\cdot, X) + \nu\bar{g} \\ &= \sec^2(\xi(x)) \left[\nu(\xi(x))x^*\langle \cdot, \cdot \rangle + \mu(\xi(x)) \left(e^{-\xi(x)\sqrt{n-1}} \right)^2 dt^2 \right], \end{aligned}$$

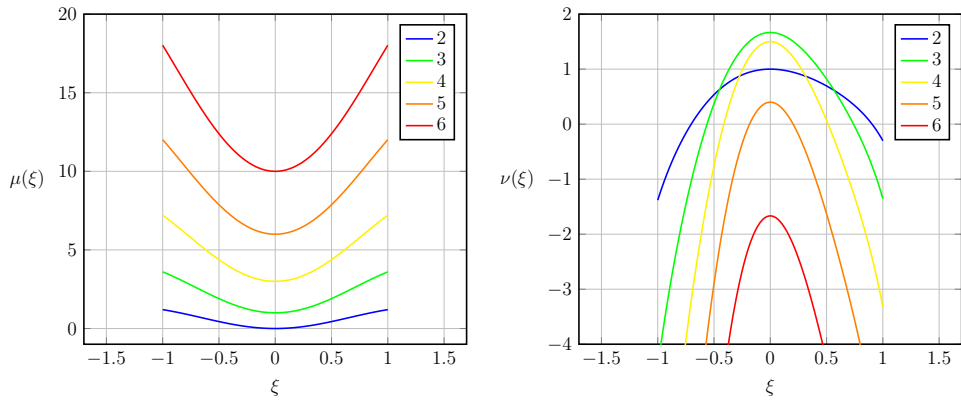
em que

$$\begin{aligned} \mu(\xi) &= \frac{(n-1)}{n} \left\{ n \cos^2(\xi) + 2 \cos(\xi) [-(1-\xi^2) \cos(\xi) + n\xi \sin(\xi)] \right. \\ &\quad \left. - n(1-\xi^2) \sin^2(\xi) \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nu(\xi) &= \frac{(n-1) \cos^2(\xi)}{n} \left\{ (1-\xi^2) [(\tan(\xi) - \sqrt{n-1})^2 + \sec^2(\xi)] \right. \\ &\quad \left. - n\xi(\tan(\xi) - \sqrt{n-1}) + (n-2)(1-\xi^2) \tan(\xi)(\tan(\xi) - \sqrt{n-1}) \right\} \\ &\quad - \frac{n-2}{n} \mu(\xi), \end{aligned}$$

são, respectivamente, densidade de energia e pressão do fluido, sendo que o campo X foi tomado por $X = \tau(x)^{-1} \partial_t$ onde, como de costume, $x : \bar{M} \rightarrow \mathbb{S}^n$ e $t : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ denotam as projeções naturais. A seguir plotamos, nas dimensões $n = 2, 3, 4, 5$ e 6 , os gráficos de ambas μ e ν enquanto funções, que são, da variável ξ .



Capítulo 5

Isometrias de Métricas Conformemente Planas no Espaço Euclidiano

Ter de se resolver a um sistema de equações diferenciais parciais elípticas e não-lineares é a moeda de troca, por assim dizer, na obtenção de novos exemplos em Geometria Diferencial, pelo menos no que concerne a problemas de curvatura prescrita. Neste sentido, simetrias constituem um poderoso recurso à mão dos pesquisadores. Como os objetos encontrados por este caminho possuem simetrias *a priori*, se fazem pertinentes as seguintes perguntas: “o objeto obtido possui simetrias outras que não aquelas de que se utilizou para encontrá-lo? Qual a estrutura do grupo de suas isometrias?” Responder a tais perguntas é justamente o propósito deste capítulo. Bem, ao menos no caso de variedades Riemannianas pertencentes à classe de equivalência conforme do espaço euclidiano, com simetrias em um grupo de translações.

5.1 O Teorema de Liouville

Lema 5.1 *Se uma transformação linear $B \in GL(n, \mathbb{R})$ é tal que*

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \implies \quad \langle Bu, Bv \rangle = 0,$$

então, deve-se ter

$$B = \beta O,$$

para certos $\beta \in \mathbb{R}$ e $O \in O(n, \mathbb{R})$.

Prova. Sejam

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni}),$$

os vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$, com os quais então se escreve

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

no sentido de que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad Be_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}e_i.$$

Observe que $B^t B$ é uma matriz simétrica (B^t indica a matriz transposta de B). Desta forma, tem-se que:

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \langle Be_i, Be_j \rangle &= \langle \sum_k B_{ki}e_k, \sum_l B_{lj}e_l \rangle \\ &= \sum_{k,l} B_{ki}B_{lj} \langle e_k, e_l \rangle \\ &= \sum_{k,l} B_{ki}^t B_{lj} \delta_{kl} \\ &= \sum_k B_{ki}^t B_{kj} \\ &= (B^t B)_{ij} \\ &= (B^t B)_{ji} \\ &= \sum_k B_{jk}^t B_{ki} \\ &= \sum_{k,l} B_{lk}^t B_{ki} \delta_{lj} \\ &= \sum_{k,l} B_{lk}^t B_{ki} \langle e_l, e_j \rangle \\ &= \langle \sum_l (\sum_k B_{lk}^t B_{ki}) e_l, e_j \rangle \\ &= \langle B^t Be_i, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Sabe-se, por hipótese, que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \implies \quad \langle B^t Bu, v \rangle = \langle Bu, Bv \rangle = 0.$$

Fixando-se $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e fazendo-se variar $v \in [u]^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, u \rangle = 0\}$, chega-se à conclusão de que existe um certo $\lambda(u) \in \mathbb{R}$ para o qual $B^t Bu = \lambda(u)u$. Afirma-se que a função

$$\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \begin{cases} \lambda(u), & \text{tal que } B^t Bu = \lambda(u)u, \text{ se } u \neq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0 \end{cases}$$

é uma função constante. Com efeito, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, tem-se que:

1.

$$\begin{cases} \alpha \lambda(u)u = \alpha B^t Bu = B^t B(\alpha u) = \lambda(\alpha u)\alpha u = \alpha \lambda(\alpha u)u \\ \implies \alpha [\lambda(u) - \lambda(\alpha u)]u = 0, \end{cases}$$

de onde se vê que λ é constante em cada direção de $\mathbb{R}^n$;

2.

$$\begin{cases} \lambda(u+v)(u+v) = B^t B(u+v) = B^t Bu + B^t Bv = \lambda(u)u + \lambda(v)v \\ \implies [\lambda(u+v) - \lambda(u)]u = [\lambda(v) - \lambda(u+v)]v, \end{cases}$$

ao que se conclui que $\lambda(u) = \lambda(u+v) = \lambda(v)$ no caso de os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ serem linearmente independentes (o caso linearmente dependente foi abordado no item 1 acima).

Estabelece-se, assim, a constância de $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em todo o $\mathbb{R}^n$. Por recordar-se uma vez mais de como λ foi primeiramente concebida, enxerga-se a validade da equação

$$B^t B = \lambda I,$$

em que $I = (\delta_{ij})$ é a matriz identidade e λ é, como agora se sabe, uma constante. Deste modo, tem-se que

$$\det(B)^2 = \lambda^n,$$

e, portanto, que

$$\lambda = \det(B)^{\frac{2}{n}}.$$

Logo,

$$\frac{B^t}{\sqrt{\lambda}} \frac{B}{\sqrt{\lambda}} = \frac{B^t B}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda I}{\lambda} = I,$$

a que então se segue

$$B = \beta O,$$

com $\beta = \sqrt{\lambda}$ e $O = \frac{B}{\sqrt{\lambda}} \in O(n, \mathbb{R})$. □

Dadas uma direção $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e uma função diferenciável $\varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, define-se

$$\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle x, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

para que, então, se forme a variedade

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \alpha \rangle \in (a, b)\} = \xi^{-1}(a, b),$$

em que haverá de se considerar a métrica Riemanniana

$$g_x(u, v) = \varphi(\xi(x))^{-2} \langle u, v \rangle,$$

assim definida para todos $x \in M$ e $u, v \in T_x M \equiv \mathbb{R}^n$. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é uma isometria de (M, g) se, e somente se,

$$\forall x \in M, \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad g_{f(x)}(df_x u, df_x v) = g_x(u, v).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \forall x \in M, \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad \langle df_x u, df_x v \rangle &= \frac{\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2}{\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2} \langle df_x u, df_x v \rangle \\ &= \varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2 g_{f(x)}(df_x u, df_x v) \\ &= \varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2 g_x(u, v) \\ &= \frac{\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2}{\varphi(\langle x, \alpha \rangle)^2} \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

e, portanto, que

$$\forall x \in M, \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad \langle u, v \rangle = 0 \quad \implies \quad \langle df_x u, df_x v \rangle = 0.$$

Segue do Lema 5.1 que

$$\forall x \in M : \quad (df_x)^t df_x = \det(df_x)^{\frac{2}{n}} I, \quad (5-1)$$

onde $I = (\delta_{ij})$ é a matriz identidade de ordem n . A equação (5-1) é conhecida pelo nome de *Equação de Cauchy-Riemann* na literatura que trata sobre o assunto, claramente em alusão ao caso $n = 2$ quando a referida equação se escreve exatamente como as equações de mesmo nome na Teoria das Funções de Uma Variável Complexa. O próximo Teorema, devido ao matemático Liouville, qualifica as soluções de (5-1).

Teorema 5.2 *Toda solução $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , da Equação de Cauchy-Riemann, a saber,*

$$\forall x \in \Omega : \quad (df_x)^t df_x = \det(df_x)^{\frac{2}{n}} I,$$

em que Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $r \geq 3$ e $\det(df_x)$ não muda de sinal em Ω , é da forma

$$\forall x \in \Omega : \quad f(x) = b + \lambda A \frac{x - a}{\|x - a\|^\varepsilon},$$

para certas constantes $\varepsilon \in \{0, 2\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $A \in O(n, \mathbb{R})$.

Prova. A prova aqui apresentada pode também ser encontrada em [9]. Considere

$$G(x) = (df_x)^t df_x = \det(df_x)^{\frac{2}{n}} I = J(x, f)^{\frac{2}{n}} I, \quad \forall x \in \Omega, \quad (5-2)$$

onde I denota a matriz identidade de ordem n e $J(x, f) = \det(df_x)$, para todo $x \in \Omega$. Observe que G é uma função duas vezes continuamente diferenciável, de Ω no espaço das matrizes $n \times n$ reais simétricas e positivas definidas (porquê, já que $\det(df_x)$ não muda de sinal em Ω , podemos supor, sem perda de generalidade, que $J(x, f) = \det(df_x) > 0$ em Ω). Ao enxergarmos em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável e em $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma de suas cartas locais (em verdade, neste caso, tal carta se encontra globalmente definida), somos capazes de reconhecer em $G(x) = [g_{ij}(x)]$ ao *pullback* da métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Com efeito,

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= J(x, f)^{2/n} \delta_{ij} \\ &= \langle J(x, f)^{2/n} I e_i, e_j \rangle \\ &= \langle (df_x)^t df_x e_i, e_j \rangle \\ &= \langle df_x e_i, df_x e_j \rangle, \end{aligned}$$

para todos $x \in \Omega$ e $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Como

$$df_x G^{-1}(x) (df_x)^t = df_x (J(x, f)^{-2/n} I) (df_x)^t = I, \quad \forall x \in \Omega, \quad (5-3)$$

onde $G^{-1}(x) = [g^{ij}(x)]$ é a matriz inversa de $G(x)$, tem-se, pelas equações (5-2) e (5-3), que

$$g_{ij} = \sum_k f_i^k f_j^k \quad \text{e} \quad \delta_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} f_k^i f_l^j,$$

respectivamente, onde

$$\begin{cases} f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, & f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, & f_{ijk} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, & \text{etc.,} \\ f_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}, & f_{jk}^i = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_j \partial x_k}, & f_{jkl}^i = \frac{\partial^3 f^i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}, & \text{etc.,} \end{cases}$$

sempre que $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$. Em particular, conclui-se que

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \sum_l (f_{ji}^l f_k^l + f_j^l f_{ki}^l) \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} = \sum_l (f_{kj}^l f_i^l + f_k^l f_{ij}^l) \\ -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \sum_l (f_{ik}^l f_j^l + f_k^l f_{ij}^l), \end{cases}$$

de onde segue que

$$2 \sum_l f_{ij}^l f_k^l = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k},$$

e, daí, que

$$\begin{aligned}
\sum_k \Gamma_{ij}^k f_k &= \sum_k \Gamma_{ij}^k (\sum_l f_k^l e_l) \\
&= \sum_l (\sum_k \frac{1}{2} (\sum_m (\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}) g^{mk}) f_k^l) e_l \\
&= \sum_l (\sum_k \frac{1}{2} (\sum_m 2 (\sum_n f_{ij}^n f_m^n) g^{mk}) f_k^l) e_l \\
&= \sum_l (\sum_n f_{ij}^n (\sum_{k,m} g^{mk} f_m^n f_k^l)) e_l \\
&= \sum_l (\sum_n f_{ij}^n \delta_{nl}) e_l \\
&= \sum_l f_{ij}^l e_l \\
&= f_{ij},
\end{aligned}$$

com a consequência de que

$$\begin{aligned}
f_{ijk} &= \sum_l (\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} f_l + \Gamma_{ij}^l f_{lk}) \\
&= \sum_l \frac{\Gamma_{ij}^l}{\partial x_k} f_l + \sum_l \Gamma_{ij}^l (\sum_m \Gamma_{lk}^m f_m) \\
&= \sum_m \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x_k} f_m + \sum_m (\sum_l \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m) f_m \\
&= \sum_m (\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x_k} + \sum_l \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m) f_m.
\end{aligned}$$

Uma vez que $f \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$, permutações dos índices i, j, k não alteram o valor de f_{ijk} (Teorema de Schwarz) e, então, obtém-se a identidade

$$\begin{aligned}
0 &= f_{ijk} - f_{ikj} \\
&= \sum_m (\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x_j} + \sum_l (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m)) f_m \\
&= \sum_m R_{ikj}^m f_m,
\end{aligned}$$

em que

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l},$$

são as componentes do Tensor Curvatura (de Riemann) de (Ω, G) . Logo,

$$R_{ikj}^m = 0,$$

quaisquer que sejam $i, j, k, m \in \{1, \dots, n\}$, já que

$$\left\{ f_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = df_x e_i \right\}_{i=1}^n,$$

é uma base (ortogonal) de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in \Omega$. Deste modo, vê-se que são igualmente nulas as quantidades

$$R_{ij} = \sum_k R_{ikj}^k \quad (\text{Tensor de Ricci}) \quad \text{e} \quad R = \sum_{ij} g^{ij} R_{ij} \quad (\text{Curvatura Escalar}).$$

A métrica $G = G(x)$ pertence à classe de equivalência conforme da métrica Euclidiana se existe uma função escalar $\lambda = \lambda(x)$ tal que $g_{ij}(x) = e^\lambda(x)\delta_{ij}$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Neste caso, tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} 4R_{ijk}^l = \begin{cases} 2\lambda_{ik}\delta_{jl} - 2\lambda_{il}\delta_{jk} + 2\lambda_{jl}\delta_{ik} - 2\lambda_{jk}\delta_{il} + \\ + \lambda_i\lambda_j\delta_{jk} - \lambda_i\lambda_k\delta_{jl} + \lambda_j\lambda_k\delta_{il} - \lambda_j\lambda_l\delta_{ik} + \\ + |\nabla\lambda|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \end{cases} \\ 4R_{ik} = 2(n-2)\lambda_{ik} - (n-2)\lambda_i\lambda_k + (n-2)\delta_{ik}|\nabla\lambda|^2 + 2\delta_{ik}\Delta\lambda, \\ \frac{4e^\lambda}{n-1}R = 4\Delta\lambda + (n-2)|\nabla\lambda|^2. \end{array} \right.$$

Suponha que $J(x, f) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ e tome Ω^+ como uma das componentes conexas do conjunto $\{x \in \Omega : J(x, f) > 0\}$. Queremos mostrar que $J(x, f) = r^{2n}|x - a|^{-2n}$ em Ω^+ , de onde seguiria então que Ω^+ é tanto aberto quanto fechado em Ω e, assim, que $\Omega = \Omega^+$ por questão de conexidade. Seja

$$\lambda(x) = \frac{2}{n} \log J(x, f) \quad (x \in \Omega^+).$$

Perceba que

$$G(x) = (df_x)^t df_x = J(x, f)^{\frac{2}{n}} I = e^{\lambda(x)} I \quad (x \in \Omega^+),$$

e, portanto, que

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 0 \quad \implies \quad 4\Delta\lambda = (2-n)|\nabla\lambda|^2, \\ 8R_{ik} = (n-2)\{4\lambda_{ik} - 2\lambda_i\lambda_k + \delta_{ik}|\nabla\lambda|^2\}, \end{array} \right.$$

de onde segue que

$$4\lambda_{ik} = 2\lambda_i\lambda_k - \delta_{ik}|\nabla\lambda|^2,$$

para todos $i, k \in \{1, \dots, n\}$. Seja

$$P(x) = J(x, f)^{-1/n} = e^{-\lambda(x)/2} \quad (x \in \Omega^+).$$

Derive P e use as relações já encontradas sobre as derivadas de λ para concluir que

$$2PP_{ij} = \delta_{ij}|\nabla P|^2,$$

e, desta forma, que $P \in C^3(\Omega^+)$. Derive esta última equação com respeito a x_k para

descobrir que

$$P^2 P_{ijk} = 0,$$

para todos $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, de onde se conclui que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} = c_{ij} = c \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

onde $c \geq 0$ é uma constante. Distingue-se, aqui, entre dois casos:

1. $c = 0$:

$$|\nabla P|^2 = |\nabla P|^2 \delta_{ii} = 2P P_{ii} = 2P c \delta_{ii} = 0 \quad \implies \quad P \equiv \text{cte};$$

2. $c > 0$: escreva $c = 2r^{-2}$. Deste modo, tem-se que

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = 2r^{-2}(x_i - a_i) \quad \iff \quad \nabla P = 2r^{-2}(x - a) \quad (x \in \Omega^+),$$

onde $a \in \mathbb{R}^n$ é uma constante (de integração). Mas, então,

$$P(x) = r^{-2}|x - a|^2 \quad (x \in \Omega^+),$$

e, como $P(x) > 0$ em Ω^+ , vê-se que $a \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^+$. Finalmente, pode-se dizer que

$$J(x, f) = P(x)^{-n} = \frac{r^{2n}}{|x - a|^{2n}} \quad (x \in \Omega^+).$$

Obsevações finais:

- (a) $J(x, f) \equiv 0 \implies f \equiv \text{cte};$
- (b) $J(x, f) \equiv J_0 > 0$ (constante) $\implies f(x) = b + \alpha A(x);$
- (c) Escreva $f = F \circ g$, onde

$$g : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} a + \frac{r^2(x-a)}{\|x-a\|^2} & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}, \\ \infty & \text{se } x = a, \\ a & \text{se } x = \infty, \end{cases}$$

é a inversão de $\mathbb{R}^n$ com respeito à esfera $S^{n-1}(a, r)$. Não é difícil ver que F satisfaz à equação de Cauchy-Riemann com Jacobiano constante em Ω , de forma que $F(x) = b + \alpha A(x)$ pelo caso anterior.

□

5.2 Isometrias

Suponha, agora, que $\varphi' \neq 0$ em todo o intervalo (a, b) e, também, que $s \neq t$ implique em se ter $\varphi'(s) \neq \varphi'(t)$.

5.2.1 O Caso $\varepsilon = 0$

Tem-se que

$$\begin{aligned} \forall x \in M : \quad f(x) &= b + \lambda A(x - a) \\ &= (b - \lambda Aa) + \lambda Ax \\ &= \tilde{b} + \lambda Ax, \quad \tilde{b} = b - \lambda Aa, \end{aligned}$$

de modo que se supõe, sem perda de generalidade, que $a = 0$.

Segue de

$$\forall x \in M, \forall u \in \mathbb{R}^n : \quad df_x u = \lambda Au,$$

que

$$\begin{aligned} \forall x \in M, \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad \lambda^2 \langle u, v \rangle &= \langle \lambda Au, \lambda Av \rangle \\ &= \langle df_x u, df_x v \rangle \\ &= \frac{\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2}{\varphi(\langle x, \alpha \rangle)^2} \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

e daí, que

$$\forall x \in M, \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad (\lambda^2 \varphi(\langle x, \alpha \rangle)^2 - \varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2) \langle u, v \rangle = 0.$$

Logo, se conclui que

$$\forall x \in M : \quad \varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) = |\lambda| \varphi(\langle x, \alpha \rangle).$$

Obtém-se, por derivação da expressão acima, que

$$\forall x \in M, \forall u \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle) \langle \lambda Au, \alpha \rangle = |\lambda| \varphi'(\langle x, \alpha \rangle) \langle u, \alpha \rangle,$$

e, assim, que

$$\forall x \in M, \forall u \in \mathbb{R}^n : \quad \langle u, \lambda \varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle) A^t \alpha - |\lambda| \varphi'(\langle x, \alpha \rangle) \alpha \rangle = 0.$$

Deste modo se conclui que

$$\forall x \in M : \quad A^t \alpha = \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)}{\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)} \alpha,$$

e, ainda, que

$$\forall x \in M : \quad \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)}{\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)} = \pm 1 = \tau,$$

pois os autovalores de uma matriz ortogonal são todos iguais a 1 ou -1 . Como por hipótese φ' não troca de sinal, chega-se à conclusão de que

$$\frac{|\lambda|}{\lambda} = \tau = \pm 1 \quad \text{e} \quad \frac{\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)}{\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)} = 1,$$

para todo $x \in M$. É de hipótese que φ' seja injetiva, a que então se deve a conclusão de que

$$\forall x \in M : \quad \langle f(x), \alpha \rangle = \langle x, \alpha \rangle.$$

Derivando uma vez mais obtém-se

$$\begin{aligned} \forall x \in M, u \in \mathbb{R}^n : \quad \langle u, \alpha \rangle &= \langle df_x u, \alpha \rangle \\ &= \langle \lambda A u, \alpha \rangle \\ &= \lambda \langle u, A^t \alpha \rangle \\ &= \lambda \langle u, \tau \alpha \rangle \\ &= \lambda \tau \langle u, \alpha \rangle, \end{aligned}$$

de forma que

$$(\forall u \in \mathbb{R}^n : \quad \langle u, (1 - \lambda \tau) \alpha \rangle = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - \lambda \tau) \alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \tau = 1.$$

Como $|\lambda| = \lambda \tau = 1$, tem-se $\lambda = \tau = \pm 1$ com a interpretação de que

$$\forall x \in M : \quad f(x) = b + \tau A x,$$

onde $\tau = \pm 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $A\alpha = \tau\alpha$. Finalmente, veja que

$$\begin{aligned} \forall x \in M : \quad \langle x, \alpha \rangle &= \langle f(x), \alpha \rangle \\ &= \langle b + \tau A x, \alpha \rangle \\ &= \langle b, \alpha \rangle + \tau \langle x, A^t \alpha \rangle \\ &= \langle b, \alpha \rangle + \tau \langle x, \tau \alpha \rangle \\ &= \langle b, \alpha \rangle + \tau^2 \langle x, \alpha \rangle \\ &= \langle b, \alpha \rangle + \langle x, \alpha \rangle, \end{aligned}$$

implica que $\langle b, \alpha \rangle = 0$. Em resumo, conclui-se que

$$Iso(M, g) = \{f(x) = b + \tau Ax : b \in \mathbb{R}^n \text{ e } \langle b, \alpha \rangle = 0, \tau = \pm 1, A \in O(n, \mathbb{R}) \text{ e } A\alpha = \tau\alpha\},$$

nos casos em que $\varepsilon = 0$ no Teorema 5.2 como ocorre se, por exemplo, se tem $(a, b) = \mathbb{R}$ em $\varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, desde que se atenda às hipóteses de que $\varphi' \neq 0$ em (a, b) e, também, de que $s \neq t$ implique em $\varphi'(s) \neq \varphi'(t)$.

5.2.2 O Caso $\varepsilon = 2$

Tem-se que

$$\forall x \in M : \quad f(x) = b + \lambda A \frac{x - a}{\|x - a\|^2},$$

e, como tal, que

$$\begin{aligned} \forall x \in M, \forall u \in \mathbb{R}^n : \quad df_x u &= \frac{\lambda A}{\|x - a\|^4} \left(\|x - a\|^2 u - 2\langle u, x - a \rangle (x - a) \right) \\ &= \frac{\lambda A}{\|x - a\|^2} \left(u - 2\langle u, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \frac{x - a}{\|x - a\|} \right). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \forall x \in M, \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad \frac{\lambda^2}{\|x - a\|^4} \langle u, v \rangle &= \frac{\lambda^2}{\|x - a\|^2} \left(\langle u, v \rangle - 4\langle u, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \langle v, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \right. \\ &\quad \left. + 4\langle u, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \langle v, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \frac{\|x - a\|^2}{\|x - a\|^2} \right) \\ &= \left\langle \frac{\lambda A}{\|x - a\|^2} \left(u - 2\langle u, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \frac{x - a}{\|x - a\|} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda A}{\|x - a\|^2} \left(v - 2\langle v, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \frac{x - a}{\|x - a\|} \right) \right\rangle \\ &= \langle df_x u, df_x v \rangle \\ &= \frac{\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2}{\varphi(\langle x, \alpha \rangle)^2} \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

e, portanto, que

$$\forall x \in M, \forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad (\lambda^2 \varphi(\langle x, \alpha \rangle)^2 - \|x - a\|^2 \varphi(\langle f(x), \alpha \rangle)^2) \langle u, v \rangle = 0,$$

de onde se conclui que

$$\forall x \in M : \quad \|x - a\|^2 \varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) = |\lambda| \varphi(\langle x, \alpha \rangle).$$

Derivando-se a expressão acima se chega em

$$\begin{aligned} |\lambda|\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)\langle u, \alpha \rangle &= 2\langle u, x - a \rangle\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) \\ &\quad + \|x - a\|^2\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)\langle df_x u, \alpha \rangle \\ &= 2\langle u, x - a \rangle\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) \\ &\quad + \|x - a\|^2\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)\langle \frac{\lambda A}{\|x - a\|^2} \left(u - 2\langle u, \frac{x - a}{\|x - a\|} \rangle \frac{x - a}{\|x - a\|} \right), \alpha \rangle, \end{aligned}$$

e, então, após algumas manipulações algébricas, em

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u, 2\left(\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) - \varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)\langle f(x) - b, \alpha \rangle\right)(x - a) \\ &\quad + \lambda\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)A^t\alpha - |\lambda|\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)\alpha \rangle, \end{aligned}$$

para todos $x \in M$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Sendo assim, ocorre que

$$0 = 2\left(\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) - \varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)\langle f(x) - b, \alpha \rangle\right)(x - a) + \lambda\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)A^t\alpha - |\lambda|\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)\alpha,$$

ou ainda que

$$2\left(\varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) - \varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)\langle f(x) - b, \alpha \rangle\right)(x - a) = -\lambda\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)A^t\alpha + |\lambda|\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)\alpha,$$

para todo $x \in M$. Observe que, em se variando o ponto $x \in M$, se altera a direção do vetor à esquerda na identidade acima, diferentemente do que acontece com o lado direito, em que a direção permanece inalterada (o módulo, sim, varia com x , mas não a direção). Como $M = \xi^{-1}(a, b)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, isto nos diz que

$$\begin{cases} -\lambda\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)A^t\alpha + |\lambda|\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)\alpha = 0, \\ \varphi(\langle f(x), \alpha \rangle) - \varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)(\langle f(x), \alpha \rangle - \langle b, \alpha \rangle) = 0, \end{cases}$$

para todo $x \in M$. Da primeira equação se deduz que

$$A\alpha = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{\varphi'(\langle f(x), \alpha \rangle)}{\varphi'(\langle x, \alpha \rangle)}\alpha,$$

da segunda, que

$$\varphi(t) - \varphi'(t)(t - k) = 0,$$

onde $t = \langle f(x), \alpha \rangle$ e $c = \langle b, \alpha \rangle$, de onde segue, então, que

$$\varphi(t) = C|t - k|,$$

para alguma constante positiva e todo $t \in \{\langle f(x), \alpha \rangle : x \in M\}$ que, no caso de φ acima, só pode ser $t \in (k, \infty)$ ou $t \in (-\infty, k)$.

Tome, por exemplo, o caso de

$$\varphi : (k, \infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad t \longmapsto C(t - k),$$

em que $C, k \in \mathbb{R}$ e $C > 0$. Tem-se que

$$M = \xi^{-1}(k, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \alpha \rangle = \xi(x) > k\},$$

e, também, que

$$\varphi \circ \xi : M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, \infty), \quad x \longmapsto \varphi(\xi(x)) = C(\langle x, \alpha \rangle - k).$$

Em coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ segundo uma base ortonormal

$$e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \frac{\alpha}{\|\alpha\|},$$

de $\mathbb{R}^n$ se nota que

$$\begin{aligned} \varphi \circ \xi(x) &= C(\langle x, \alpha \rangle - k) \\ &= C(\|\alpha\| \langle x, e_n \rangle - k) \\ &= C(\|\alpha\| x_n - k), \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$. Considere

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$

munido de sua métrica usual

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{x_n^2} \delta_{ij},$$

assim expressa nas coordenadas de que acima se falou. Veja que

$$\phi : \mathbb{H}^n \longrightarrow M, \quad x \longmapsto \frac{x}{C\|\alpha\|} + \frac{k}{\|\alpha\|},$$

é diferenciável, de fato, um difeomorfismo cujo inverso é

$$\psi : M \longrightarrow \mathbb{H}^n, \quad x \longmapsto C(\|\alpha\|x - k),$$

com o qual se verifica que

$$\forall x \in \mathbb{H}^n, \forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad d\phi_x e_i = \frac{e_i}{C\|\alpha\|},$$

e, portanto, que

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{H}^n, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad (\phi^* g)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= g_{\phi(x)} (d\phi_x e_i, d\phi_x e_j) \\
 &= \frac{1}{\left\{ C \left[\|\alpha\| \left(\frac{x_n}{C\|\alpha\|} + \frac{k}{\|\alpha\|} \right) - k \right] \right\}^2} \left\langle \frac{e_i}{C\|\alpha\|}, \frac{e_j}{C\|\alpha\|} \right\rangle^{\mathbb{R}^n} \\
 &= \frac{1}{x_n^2} \frac{\delta_{ij}}{C^2 \|\alpha\|^2} \\
 &= \frac{\delta_{ij}}{C^2 \|\alpha\|^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_x^{\mathbb{H}^n}.
 \end{aligned}$$

Conclui-se, desta forma, a respeito de

$$(M, g) = (\xi^{-1}(a, b), \frac{1}{\varphi(\xi)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}^n}),$$

em que $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é o domínio de $\varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, que só podem existir isometrias de (M, g) do tipo

$$\forall x \in M : \quad f(x) = b + \lambda A \frac{x - a}{\|x - a\|^2},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $A \in O(n, \mathbb{R})$, caso (M, g) seja uma variedade Riemanniana homotética ao espaço hiperbólico n -dimensional. Basta uma (única) dessas isometrias para que se conclua por uma homotetia entre estes espaços. São, desta forma, idênticos os seus grupos de isometrias.

Considerações Finais

Neste trabalho estudou-se a equação de Einstein de fluidos perfeitos sobre variedades estáticas (equação (3-8) ou de forma equivalente, equação (3-10)), especificamente no caso em que a base da variedade estática pertença à classe de equivalência conforme de um espaço de curvatura seccional constante e, além disso, possua simetrias com que se simplifiquem a tal equação. As simetrias de que se fala foram classificadas em sua totalidade nos casos hiperbólico e euclidiano, enquanto que no caso esférico apenas uma classe de simetrias foi aqui apresentada. A equação diferencial ordinária a que então se chega por este processo (equação (4-2)), por se tratar de uma (única) equação contendo a duas funções incógnita, pôde enfim ser resolvida, para cada exemplo de fluido perfeito estático encontrado, mediante cuidadosa escolha de uma destas funções e correspondente determinação da remanescente (através da própria equação). Finalmente, no Capítulo 5, considerou-se o problema de determinar a todas as isometrias de métricas Riemannianas que porventura pertençam à classe de equivalência conforme da métrica euclidiana usual, em subvariedades abertas de $\mathbb{R}^n$. Novamente aqui se utilizou de simetrias: somente métricas invariantes pela ação de um grupo de translações em $\mathbb{R}^n$ foram consideradas (muito embora seja, talvez, possível de se aplicar a mesma técnica a outras ações como, por exemplo, a do grupo ortogonal). O Teorema de Liouville (o Teorema (5.2)) é a égide, por assim dizer, sob a qual se apoia todo este capítulo. Conclui-se, aqui, algo muito interessante: é suficiente que uma das variedades de tipo especificado admita uma isometria (basta uma) de certo tipo, a saber, do tipo que se encontra em (5.2.2), para que se conclua por uma homotetia entre a mesma e o espaço hiperbólico (suas geometrias são, portanto e para todos os efeitos, a mesma geometria). Gostaríamos de acrescentar, a este ponto, que nossa discussão acerca de isometrias se encontra com aquela em torno de fluidos perfeitos estáticos tão logo se constate que as variedades estáticas em consideração tenham sua base na lista das variedades que tiveram suas isometrias calculadas aqui (o que, de fato, se faz em, por exemplo, [1]), já que deste modo se conhece a uma porção do grupo das isometrias da variedade maior (estática).

Ainda há, no entanto, muito a se fazer. As geometrias associadas às métricas que encontramos sempre possuem, além de sua conformidade local à geometria euclidiana tradicional de $\mathbb{R}^n$, alguma sorte de simetria. Como todas as soluções do problema em questão nos são de grande interesse, gostaríamos de conhecer respostas para algumas, senão todas, das perguntas seguintes:

1. Devido às não lineares da equação, simetrias se tornam ferramentas realmente úteis à obtenção de explícitas soluções. Como, no entanto, abordar ao problema sem utilizar de simetrias? Lembramos aqui que soluções para a equação de Einstein são tão melhores quanto mais verossímeis elas forem. Tome como exemplo a solução de Schwarzschild que, devido à sua importância, continua sendo estudada por pesquisadores ainda nos dias atuais (mesmo sendo conhecida desde meados de 1916). Muito embora tal solução apresente um modelo de universo nas imediações de um buraco negro, não é consenso de todos que ela modele ao universo como um todo (já que o universo pode não ser, em toda a sua vastidão, rotacionalmente simétrico).
2. A escolha de métricas cuja geometria esteja em conformidade local àquela de $\mathbb{R}^n$ (com a métrica euclidiana usual) foi outra constante em nossas considerações. O que acontece se, em vez disso, nós escolhermos variedades estáticas cuja base não seja (localmente) conformemente plana?
3. Possíveis continuações podem ter início com a escolha de outros tensores que não o fluido perfeito como, por exemplo, o campo eletromagnético. Seguindo-se esta mesma linha de raciocínio, seria válido considerar variedades que não sejam estáticas. Existem muitas ideias possíveis e todas se mostram muito interessantes. Citamos o trabalho [7] em que o autor busca por fluidos perfeitos na classe de equivalência conforme da parte exterior da solução de Schwarzschild (pode-se pensar num mecanismo que converta entre os distintos tipos de solução da equação).
4. Uma vez encontradas, quais são as peculiaridades de tais geometrias? Como são suas geodésicas, suas isometrias? Pode-se, rapidamente, tornar esta em uma lista bastante extensa.

Tem-se, como se vê, muito a se fazer.

Bibliografia

- [1] BARBOZA, M.; LEANDRO, B.; PINA, R. **Invariant solutions for the Einstein field equation**. *Journal of Mathematical Physics*, 59(6):062501, June 2018.
- [2] BESSE, A. L. **Einstein Manifolds: reprint of the 1987 edition, with 22 figures**. Classics in mathematics. Springer, Berlin ; New York, "reprint of the 1987 edition.-- t.p edition, 2008. OCLC: ocn183259557.
- [3] CARMO, M. P. D. **Riemannian geometry**. Mathematics. Theory & applications. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [4] CHOQUET-BRUHAT, Y. **General relativity and the Einstein equations**. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, Oxford ; New York, 2009. OCLC: ocn209815586.
- [5] EINSTEIN, A. **The meaning of relativity**. Número 1921 em The Stafford Little lectures. Princeton University Press, Princeton, expanded princeton science library ed. with a new introduction by brian greene, 2005 edition, 2005.
- [6] GALAZ-GARCÍA, F.; ZAREI, M. **Cohomogeneity one topological manifolds revisited**. *Mathematische Zeitschrift*, 288(3-4):829–853, Apr. 2018.
- [7] HANSRAJ, S. **Perfect fluid metrics conformal to the schwarzschild exterior spacetime**. *General Relativity and Gravitation*, 44(1):125–138, 2012.
- [8] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The large scale structure of space-time**. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 21. printing edition, 2008. OCLC: 552219048.
- [9] IWANIEC, T.; MARTIN, G. **Geometric Function Theory and Nonlinear Analysis**. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, Oxford ; New York, 2001.
- [10] KOBAYASHI, O.; OBATA, M. **Conformally-Flatness and Static Space-Time**. In: Hano, J.-i.; Morimoto, A.; Murakami, S.; Okamoto, K.; Ozeki, H., editors, *Manifolds and Lie Groups*, p. 197–206. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1981.

- [11] KÜHNEL, W.; HUNT, B. **Differential geometry: curves, surfaces, manifolds.** Número volume 77 em Student mathematical library. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, third edition edition, 2015.
- [12] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**, volume 218 de **Graduate Texts in Mathematics**. Springer New York, New York, NY, 2012.
- [13] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity.** Número 103 em Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, 1983.
- [14] TOKURA, W.; ADRIANO, L.; PINA, R.; BARBOZA, M. **On warped product gradient Yamabe solitons.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 473(1):201–214, May 2019.

Rotinas em Python Para o Cálculo da Curvatura

```
#!/usr/bin/env python3
```

```
import sympy
```

```
x_0 = sympy.Symbol('x_0')
```

```
x_1 = sympy.Symbol('x_1')
```

```
x = (x_0, x_1)
```

```
def r(x_0, x_1):
```

```
    return x_0 ** 2 + x_1 ** 2
```

```
def xi(x_0, x_1):
```

```
    return -1 + 2 / (1 + r(x_0, x_1))
```

```
def sigma(x_0, x_1):
```

```
    return sympy.cos(xi(x_0, x_1))
```

```
def delta(i, j):
```

```
    if i in range(2) and j in range(2):
```

```
        if i == j:
```

```
            return 1
```

```
        else:
```

```
            return 0
```

```
def G(x_0, x_1, i, j):
```

```
    return (1 + r(x_0, x_1) * sigma(x_0, x_1) / 2) ** 2 * delta(i, j)
```

```

def g(x_0, x_1):
    return sympy.Matrix(
        [
            [
                G(x_0, x_1, i, j) for j in range(2)
            ] for i in range(2)
        ]
    )

def h(x_0, x_1):
    return g(x_0, x_1) ** -1

# Christoffel
def Gamma(x_0, x_1, i, j, k):
    gamma = 0
    for l in range(2):
        gamma += 1/2 * (
            + sympy.diff(g(x_0, x_1)[j, l], x[i])
            + sympy.diff(g(x_0, x_1)[l, i], x[j])
            - sympy.diff(g(x_0, x_1)[i, j], x[l])
        ) * h(x_0, x_1)[l, k]
    return sympy.simplify(gamma)

# Rm_{i, j, k}^l
def Rm1(x_0, x_1, i, j, k, l):
    rm1 = (
        + sympy.diff(Gamma(x_0, x_1, i, k, l), x[j])
        - sympy.diff(Gamma(x_0, x_1, j, k, l), x[i])
    )
    for m in range(2):
        rm1 += (
            + Gamma(x_0, x_1, i, k, m) * Gamma(x_0, x_1, m, j, l)
            - Gamma(x_0, x_1, j, k, m) * Gamma(x_0, x_1, m, i, l)
        )
    return sympy.simplify(rm1)

# Rm_{i, j, k, l}

```

```

def Rm2(x_0, x_1, i, j, k, l):
    rm2 = 0
    for m in range(2):
        rm2 += Rm1(x_0, x_1, i, j, k, l) * g(x_0, x_1)[m, l]
    return sympy.simplify(rm2)

# Sectional
def K(x_0, x_1, i, j):
    if i != j:
        k = Rm2(x_0, x_1, i, j, i, j) * (
            g(x_0, x_1)[i, i] * g(x_0, x_1)[j, j] - g(x_0, x_1)[i, j] ** 2
        ) ** -1
    return sympy.simplify(k)

# Ricci
def Rc(x_0, x_1, i, j):
    rc = 0
    for k in range(2):
        rc += Rm1(x_0, x_1, i, k, j, k)
    return sympy.simplify(rc)

# Scalar
def scal(x_0, x_1):
    scal = 0
    for i in range(2):
        for j in range(2):
            scal += h(x_0, x_1)[i, j] * Rc(x_0, x_1, i, j)
    return sympy.simplify(scal)

```