UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

JEFERSON ARLEY POVEDA CONTRERAS

Um Estudo dos Ciclos Limites de Campos Suaves por Partes no Plano

Goiânia
2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Jeferson Arley Poveda Contreras

Título do trabalho: Um Estudo dos Ciclos Limites de Campos Suaves por Partes no Plano

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Jeferson Poveda

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2] Data: 26 /03 /20

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

JEFERSON ARLEY POVEDA CONTRERAS

Um Estudo dos Ciclos Limites de Campos Suaves por Partes no Plano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemáticas.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Durval José Tonon

Goiânia
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Poveda Contreras, Jeferson Arley
Um Estudo dos Ciclos Limites de Campos Suaves por Partes no Plano [manuscrito] / Jeferson Arley Poveda Contreras. - 2018.
LXXII, 72 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2018.
Bibliografia.

1. Campos suaves por partes. 2. ciclos limite. 3. campos de Filippov. 4. método do Averaging. 5. campos de vetores Hamiltonianos. I. Tonon, Durval José , orient. II. Título.

CDU 517.938

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE JEFERSON ARLEY POVEDA CONTRERAS – Aos sete dias do mês de março do ano de dois mil e dezoito (07/03/2018), às 10 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Durval José Tonon - Orientador, Prof. Rodrigo Donizete Euzébio, e Prof. Claudio Gomes Pessoa, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na Sala de Aula do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **"Um Estudo dos Ciclos Limites de Campos Suaves por Partes no Plano"**, em nível de Mestrado, área de concentração em Sistemas Dinâmicos, de autoria de Jeferson Arley Poveda Contreras, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Durval José Tonon, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Sistemas Dinâmicos, pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Flávia Magalhães Freire, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Durval José Tonon
Presidente - IME/UFG

Prof. Dr. Rodrigo Donizete Euzébio
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Cláudio Gomes Pessoa
Membro – Ibilce/Unesp

JEFERSON ARLEY POVEDA CONTRERAS

UM ESTUDO DOS CICLOS LIMITES DE CAMPOS SUAVES POR PARTES NO PLANO

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 07 de março de 2018, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rodrigo Donizete Euzébio
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Unesp

Jeferson Arley Poveda Contreras

Graduou-se em Matemáticas na UDFJC- Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colômbia. Durante sua graduação, participou de um grupo de iniciação cientifica SOAM de otimização e análise matemática, e desenvolveu o trabalho de grau “Transporte Paralelo no hiperbolóide de $\mathbb{R}^n$” na área da geometria.

Para minha família, incluindo a Laika

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a toda minha família, aos meus pais pela confiança e a dedicação nos meus estudos durante toda minha vida, a minha irmã, que sempre acreditou em mim, e em geral, a todos meus familiares. Agradeço seguidamente a todas as pessoas que estão comigo nas matemáticas, a meus amigos, professores e companheiros. Agradeço imensamente à Universidade Federal de Goiás, ao estado de Goiás e ao Brasil mesmo, por ser minha casa e me deixar compartir minha vocação. Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e pela confiança no meu trabalho. Agradeço também a meu orientador Prof Durval José Tonon pela confiança e a permanente colaboração. Por último agradeço a meu país e a sua universidade distrital que vão ser sempre a base de minha curiosidade matemática.

“O pensamento é apenas um lampejo entre duas longas noites, mas este lambejo é tudo”

Henri Poincaré

La valeur de la science - página 276, Henri Poincaré - E. Flammarion, 1904 - 278 páginas

Resumo

Poveda.J. **Um Estudo dos Ciclos Limites de Campos Suaves por Partes no Plano**. Goiânia, 2018. 68p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O objetivo deste trabalho é estudar ciclos limite de campos de vetores suaves por parte. Os principais artigos estudados foram [6], [3] e [13]. Primeiro apresentaremos a teoria básica, passando pelas áreas de análise, teoria qualitativa das equações diferenciais e álgebra. Apresentamos também conceitos básicos de campos de Filippov, os quais são imprescindíveis para o estudo dos campos suaves por partes. No capítulo dois, o qual está baseado em [6] como tópico principal, será descrito um método geral para encontrar ciclos limite; em [3] são encontrados ciclos limites em um campo de vetores suave por partes com um centro não degenerado sendo perturbado por um polinômio. No quarto capítulo estudaremos os ciclos limites de campos de vetores Hamiltonianos por parte.

Palavras–chave

Campos suaves por partes, ciclos limite, campos de Filippov, função de Melnikov, método do Averaging, campos de vetores Hamiltonianos

Abstract

Poveda.J. **A Study of the Limit Cycles of Piecewise Vector Fields in the Plane** . Goiânia, 2018. 68p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The goal of this work is study limit cycles of piecewise smooth vector fields. The main articles studied were [6], [3] and [13]. First, we present the basic theory, passing through the areas of analysis, qualitative theory of differential equations and algebra. We also present basic concepts of Filippov fields, which are indispensable for the study of piecewise smooth fields. In chapter two, which is based on [6] as the main topic, a general method for finding limit cycles will be described; in [3] limit cycles are found in a piecewise smooth vector field with non-degenerate center being perturbed by a piecewise polynomial vector field. In the fourth chapter, we study limit cycles in piecewise smooth Hamiltonian fields.

Keywords

Piecewise smooth vector field, limit cycles, Filippov vector fields, Melnikov function, Averaging method, Hamiltonian vector fields

Sumário

Introdução

Nesta dissertação apresentaremos alguns conceitos da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos, os quais são uma recompilação de alguns métodos que recentemente foram aplicados para encontrar ciclos limite.

Desde o começo da teoria de sistemas dinâmicos com as primeiras definições de Poincaré, passando pelos estudos de Liapunov e Birkhoff e até os dias de hoje, o estudo de ciclos limite é um foco principal em pesquisas não somente na matemática, chegando em muitos lugares e diversas áreas da ciência. A importância dos ciclos limite e sua complexidade fazem que este seja ainda um dos tópicos mais importantes, atualmente, estando presente em problemas muito complexos, como o 16° problema de Hilbert.

Historicamente a quantidade de trabalhos sobre ciclos limites é muito grande, mas no contexto de ciclos limite em campos suaves por partes ainda esta, como toda a teoria, no início. Os estudos começarem com a definição de órbita periódica por parte de Poincaré em [18]. No começo do século XX os trabalhos de Liénard [11] e Andronov [1] introduziram conceitos fundamentais como o da estabilidade estrutural, e a partir daí trabalhos como os de Peixoto [16], Smale [19], Grobman [7] e Hartman [9] impulsionarem o estudo até a atualidade. Hoje o estudo é muito amplo e importante, tendo diversas pesquisas interessantes, das quais escolhemos algumas para apresentar neste trabalho.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo detalhado da obtenção de ciclos limite em campos suaves por partes no plano. Pretende-se otimizar a informação classificando alguns métodos de obtenção de ciclos limite que possam servir na generalização dos resultados obtidos na área.

No primeiro capítulo apresentaremos a teoria matemática preliminar, para que o leitor interessado possa entender ou referenciar este trabalho. Apresentaremos alguns aspectos da teoria básica de Análise, teoria básica de álgebra e álgebra linear, teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e teoria básica de campos de Fillipov.

No segundo capítulo estudaremos o artigo de Emilio Freire, Enrique Ponce e Francisco Torres [6] onde vamos entender os conceitos básicos dos campos suave por partes.Basado neste trabalho desenvolveremos um mecanismo geral para obter 3 ciclos limites. Para encontrar os três ciclos limite dividiremos o estudo em três partes. Primeiro, estudaremos a forma canônica de Liénard, uma forma que faz nosso sistema mais simples, sem perder nenhuma propriedade no caso onde as trajetórias cruzam a região de descontinuidade, em particular as órbitas periódicas. Segundo, estudaremos a aplicação de Poincaré, ferramenta que é de fundamental importância na obtenção de ciclos limite. Nesta seção estudaremos de maneira independente do tempo, sendo umas das caracterizações mais interessantes deste trabalho. Já na terceira e última parte, através dos resultados previamente obtidos, encontremos os três ciclos limite.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo do artigo [3] de Tiago de Carvalho, Jaume libre e Durval José Tonon. Neste capítulo, além de estudar os resultados anteriores, obtidos por [6], para o contexto de campos suaves por partes, fazemos uma coleção de tópicos com o objetivos de entender o comportamento dos ciclos limites nos campos suaves por partes. Para o desenvolvimento deste capítulo apresentaremos inicialmente a caracterização do campo suave por partes e do tipo de perturbações que vão atuar nele. Depois, utilizaremos uma das ferramentas mais interessantes: a teoria de Averaging. Encontraremos uma função que, juntamente com resultados clássicos fornecem o resultado principal: uma cota para o número de ciclos limites em campos polinomiais por partes.

O quarto capítulo é baseado no trabalho de Xia Liu e Maoan Han [13]. Nosso foco será em campos Hamiltonianos suaves por partes. A estratégia no capítulo será, primeiro, fazer uma pequena e geral descrição dos campos Hamiltonianos suaves por partes, apresentar algumas propriedades e resultados. Depois, na segunda parte apresentaremos o método de Melnikov de maneira geral. Na terceira parte desenvolveremos a função de Melnikov de maneira pontual (na vizinhança da origem). Na última parte, baseados nos resultados obtidos daremos uma cota para o número de ciclos limite de campos Hamiltonianos suaves por partes.

Finalmente, no último capítulo apresentaremos a conclusão do trabalho, a qual junta as consequências de cada capítulo, compilando alguns resultados sobre ciclos limite de campos suaves por partes.

CAPÍTULO 1

Teoria básica

Este capítulo será dedicado a alguns aspectos da teoria matemática básica, que vai ser uma introdução para os capítulos posteriores deste trabalho. Daremos ferramentas necessárias que junto com alguns conceitos básicos darão ao trabalho uma maior e melhor compreensão, estando dessa forma acessível a um público maior.
Todas as referências da teoria básica podem ser encontradas nas referências bibliográficas, para o leitor interessado que queira se aprofundar no tema.

1.1 Conceitos preliminares de análise

Este trabalho, como muitos outros na área de sistemas dinâmicos, tem como base teoremas e conceitos de análise. Apresentaremos aqui alguns que serão úteis no desenvolvimento do trabalho. As referências principais para este item são os livros [12] e [15].

Definição 1.1 *Dados dois conjuntos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, um* ***homeomorfismo*** *entre U e V é uma bijeção contínua $f : U \to V$, cuja inversa $f^{-1} : V \to U$ também é contínua.*

Definição 1.2 *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}$ subconjuntos abertos. Uma função diferenciável $f : U \to V$ com inversa diferenciável $f^{-1} : V \to U$ é chamada* ***difeomorfismo****.*

Teorema 1.3 ***(Teorema da função inversa):*** *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^r, $r \geq 1$. Se $df(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então f é um difeomorfismo local de classe C^r em $p \in U$. Em outras palavras, existem vizinhanças $V \subset U$ de p, $W \subset \mathbb{R}^m$ de $f(p)$ e uma aplicação C^r $g : W \to V$ tal que $g \circ f = I_V$ e $f \circ g = I_W$, onde I_V denota a identidade em V e I_W a identidade em W.*

Teorema 1.4 ***(Teorema da função implícita):*** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^r, $r \geq 1$, $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ e $c = f(z_0)$. Suponha que a derivada parcial, em relação à segunda variável $\partial_2 f(z_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, seja um isomorfismo. Então existem abertos $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo z_0, tais que, para cada $x \in V$, existe um único $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$, com $(x, \xi(x)) \in W$ e $f(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi : V \to \mathbb{R}^n$, assim definida, é de classe C^r e sua respectiva derivada é dada por $d\xi(x) = -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x))$.*

1.2 Conceitos preliminares da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias

Apresentaremos aqui todos os conceitos de sistemas dinâmicos que sejam importantes para o desenvolvimento do trabalho.

As referências bibliográficas onde o leitor pode encontrar os resultados aqui enunciados, são [15], [17] e [20]

Definição 1.5 *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade diferenciável. Um* ***campo de vetores*** *de classe C^r em M é uma aplicação de classe C^r $X : M^m \to \mathbb{R}^k$ que, a cada ponto $p \in M^m$, associa um vetor $X(p) \in T_pM$.*

Ao conjunto de todos os campos de vetores de classe C^r em M denotamos por $\mathfrak{X}^r(M)$.

Definição 1.6 *Uma* ***curva integral*** *de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação de classe $C^{r+1}, \alpha : I \to M$ onde I é um intervalo contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha^{'}(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$. A imagem da curva integral é a* ***trajetória*** *passando pelo ponto $p \in M$.*

Teorema 1.7 ***(Teorema de existência e unicidade)****: Seja X um campo de classe $C^r, r \geq 1$, em um um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $p \in U$. Existe uma curva integral de $X, \alpha : I \to U$, com $\alpha(0) = p$. Se $\beta : J \to U$ é outra curva integral de X com $\beta(0) = p$, então $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I \cap J$.*

Definição 1.8 *Um fluxo local de X em $p \in U$ é uma aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_p \to U$, V_p uma vizinhança de p em U, tal que , para cada $q \in V_p$, a aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, definida por $\varphi_q(t) = \varphi(t,q)$, é uma curva integral passando por q; isto é, $\varphi(0,q) = q$ e $(\partial/\partial t)\varphi(t,p) = X(\varphi(t,p))$.*

Definição 1.9 *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $X_t t \in \mathbb{R}$, o fluxo de X. A* ***órbita*** *de X por $p \in M$ é o conjunto $o(p) = \{X_t(p); t \in \mathbb{R}\}$. Se $o(p)$ não é biunívoca então dizemos que a órbita é fechada.*

Definição 1.10 *O* ***ω-limite*** *de um ponto $p \in M$, $\omega(p)$, é o conjunto dos pontos $q \in M$ tais que exite uma sequência $\{t_n\} \to \infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ satisfazendo $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(p) = q$. Analogamente, definimos o* ***α-limite*** *de p, $\alpha(p) = \{q \in M;\ \text{existe}\ \ t_n \to -\infty\ \text{com}\ X_{t_n} \to q\}$.*

Definição 1.11 *Dizemos que $\Sigma \subset M$ é um* ***ciclo limite*** *se é uma órbita periódica isolada.*

1.3 Conceitos preliminares de álgebra e álgebra linear

Vamos apresentar alguns resultados básicos de álgebra e álgebra linear, encontrados em [17] e [3].

Denotamos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.12 ***(Forma canônica de Jordan):*** *Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, existe uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz de L tem a forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigcirc & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ \bigcirc & & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix},$$

onde

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & & & & \bigcirc & \\ 1 & \lambda_i & & & & & \\ & & \lambda_i & 0 & & & \\ & & 1 & \lambda_i & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & \bigcirc & & & \ddots & \lambda_i & 0 \\ & & & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad i = 1, \cdots, r \qquad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & & \bigcirc \\ I & C_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & I & C_j \end{pmatrix},$$

$$C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

As submatrizes $A_1, \ldots, A_r$ e $B_1, \ldots, B_s$ são univocamente determinadas a menos da ordem.

Teorema 1.13 *(Teorema de Descartes): Consideremos o polinômio real $p(x) = a_{i_1}x^{i_1} + a_{i_2}x^{i_2} + \cdots + a_{i_r}x^{i_r}$ com $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ e $a_{ij} \neq 0$ reais constantes para $j \in \{0, 1, 2, \cdots, r\}$. Quando $a_{ij}a_{ij+1} < 0$ dizemos que a_{ij} e a_{ij+1} tem uma variação de sinal. Se o número de variações de sinal é m, então $p(x)$ tem ao máximo m raízes positivas. Além disso, é possível escolher os coeficientes de $p(x)$ tal que $p(x)$ tenha exatamente r* *raízes reais.*

Podemos encontrar uma demonstração do teorema no livro [21].

1.4 Conceitos preliminares sobre campos de Filippov

Muitos dos conceitos na dinâmica geral dos sistemas de equações diferencias não podem ser aplicados em sistemas suaves por partes,no entanto, trabalhos como o de A. F. Filippov fornecem uma convenção, com a qual podemos trabalhar de forma análoga aos campos de vetores suaves . Estes conceitos preliminares foram nos apresentados no trabalho [8] e são introdutórios, mas os conceitos específicos podem se encontrar no livro [4].

Vamos primeiro assumir que a região descontinuidade seja uma sub-variedade a qual denotamos por Σ, que pode ser escrita como $\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$ onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^r com $r > 1$ a qual tem 0 como valor regular e U é um conjunto aberto. Assim então a curva Σ divide o conjunto aberto U em dois conjuntos abertos:

$$\Sigma^+ = \{(x,y) \in U : f(x,y) \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad \Sigma^- = \{(x,y) \in U : f(x,y) \leq 0\}.$$

Definição 1.14 *Um* ***campo de vetores suave por partes*** *é um campo $Z : U \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$Z(x,y) = \begin{cases} X^+(x,y), & se \quad (x,y) \in \Sigma^+, \\ X^-(x,y), & se \quad (x,y) \in \Sigma^-, \end{cases} \tag{1-1}$$

onde X^+ e $X^- \in \mathfrak{X}^r(U)$.

Definição 1.15 *A* ***derivada de Lie*** *de f em relação ao campo vetorial $X^\pm$ é dada por $X^\pm f(p) = \langle X^\pm(p), \nabla f(p)\rangle$ e $(X^\pm)^i f(p) = \left\langle X^\pm(p), \nabla (X^\pm)^{i-1} f(p)\right\rangle$ para $i \geq 2$ inteiro.*

Definição 1.16 *Considerando o campo (1-1)e assumindo que $\nabla f(p) \in \Sigma^+$, definimos as seguintes regiões em Σ:*

1. ***Região de costura:*** *$\Sigma^c = \{p \in \Sigma | (X^+ f(p))(X^- f(p)) > 0\}$. Veja Figura 1.1.*

2. ***Região de deslize***: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma | (X^+ f(p)) < 0 \quad e \quad (X^- f(p)) > 0\}$. *Veja Figura 1.3.*

3. ***Região de escape***: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma | (X^+ f(p)) > 0 \quad e \quad (X^- f(p)) < 0\}$. *Veja Figura 1.2.*

Também as três regiões acima são abertas em Σ

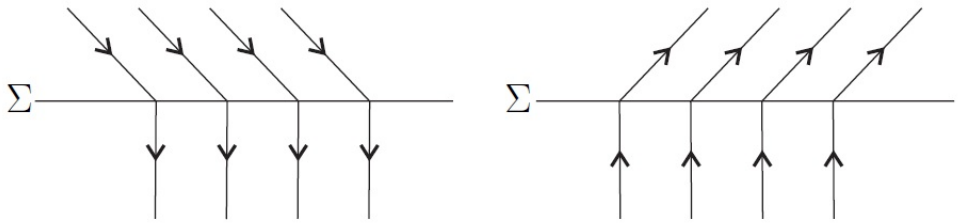

Figura 1.1: *Região de costura.*

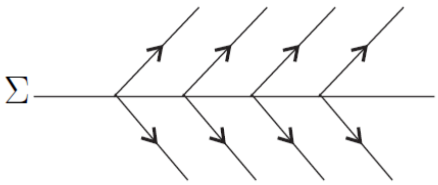

Figura 1.2: *Região de escape.*

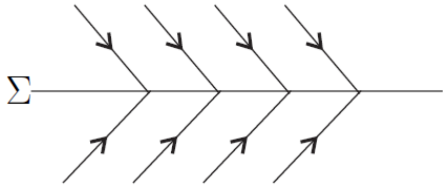

Figura 1.3: *Região de deslize.*

Definição 1.17 *Um ponto* $p \in \Sigma$ *é* ***ponto de tangência*** *se* $X^+ f(p) = 0$ *ou* $X^- f(p) = 0$. *Dizemos que* $p \in \Sigma$ *é* ***ponto de dobra*** *de* X *se* $X^+ f(p) = 0$ *e* $(X^+)^2 f(p) \neq 0$. *Dizemos que* X *tem* ***tangência cúbica*** *com* Σ *no ponto* p *se* $(X^+) f(p) = 0$, $(X^+)^2 f(p) = 0$ *e* $(X^+)^3 f(p) \neq 0$. *Veja figuras 1.4 e 1.5.*

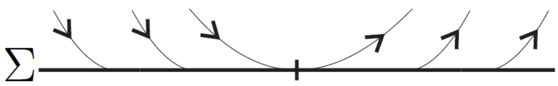

Figura 1.4: *Tangência quadrática.*

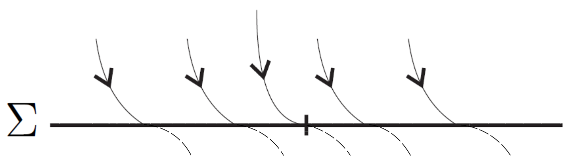

Figura 1.5: *Tangência cúbica.*

Definição 1.18 *Seja* $p \in \Sigma$ *ponto de tangência. Se existe uma órbita* γ *do campo* X^+ *(respectivamente* X^-*) que passa por* p *após um tempo finito* t_0 *de tal forma que* γ

*permanece em Σ^+ (respectivamente em Σ^-) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, esta tangência é chamada **tangência visível de X** (respectivamente de X^-). Analogamente, se $\gamma \subset \Sigma^-$ (respectivamente $\gamma \in \Sigma^+$) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, dizemos que p é **tangência invisível de** X^+ (respectivamente de $X-$).*

Ao longo da região de deslize podemos definir um campo de vetores, que será chamado campo deslizante ou campo de Filippov. Este campo é dado por $Z^s(p) = q - p$, onde q é um ponto que pertence ao segmento que contém os pontos $p + X^+(p)$ e $p + X^-(p)$, de tal forma que o segmento que contem p e q seja tangente à região de deslize Σ^s no ponto p.

Como o vetor ∇f é ortogonal à curva de nível da função f, então o campo Z^s é ortogonal à ∇f em p. Logo, $\langle Z^s(p), \nabla f(p) \rangle = 0$.

A equação vetorial da reta que passa pelos pontos $p + X^+(p)$ e $p + X^-(p)$ é dada por $r(\lambda) = (p + X^+(p) + \lambda(X^+(p) - X^-(p))$ $0 \leq \lambda \geq 1$. Assim, como $q \in r$ e $\langle q - p, \nabla f(p) \rangle = 0$, então temos

$$\begin{aligned}
\langle (p + X^+(p)) + \lambda(X^+(p) - X^-(p)) - p, \nabla f(p) \rangle &= 0\\
\langle X^+(p), \nabla f(p) \rangle + \lambda \langle X^+(p), \nabla f(p) \rangle - \lambda \langle X^-(p), \nabla f(p) \rangle &= 0\\
X f(p) + \lambda(X^+ f(p) - X^- f(p)) &= 0.
\end{aligned}$$

De onde obtemos

$$\lambda = \frac{X^+ f(p)}{X^- f(p) - X^+ f(p)}.$$

Como $Z^s(p) = q - p$ obtemos a expressão do campo deslizante:

Definição 1.19 *O campo $Z^s : \Sigma^s \to \Sigma^s$ é dado por*

$$Z^s(p) = \frac{1}{X^- f(p) - X^+ f(p)} (X^- f(p) X^+(p) - X^+ f(p) X^-(p))$$

*e é chamado de **campo deslizante**. Se $p \in \Sigma^e$ então $p \in \Sigma^s$ para o campo $(-Z)$. Dessa forma definimos **campo de escape** $Z^e : \Sigma^e \to \Sigma^e$ por $Z^e(p) = -(-Z)^s(p)$.*

Para campos suaves por partes temos a seguinte definição de trajetória local:

Definição 1.20 *A **trajetória local** $\varphi_Z(t, p)$ de (1-1) é obtida pela concatenação dos fluxos dos campos X^+, X^- e Z^s.*

Definição 1.21 *A órbita local de um ponto $p \in U$ é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) | t \in I\}$.*

O foco deste trabalho é estudar os ciclos limite, que são órbitas periódicas isoladas. A seguir apresentaremos alguns conceitos sobre campos suaves por partes que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.22 *A **separatriz instável de p** é a variedade instável invariante $W^u(p)$ dada por*

$$W^u(p) = \{q \in U | \varphi_Z(t,p) \text{ é bem definido em } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t\to-\infty} \varphi_Z(t,q) = p\}.$$

Analogamente, pode se definir a separatriz estável.

Definição 1.23 *Uma **órbita periódica regular** é uma órbita $\gamma = \{\varphi_Z(t,p) | t \in \mathbb{R}\}$ que pertence à $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ tal que $\varphi_Z(t+T,p) = \varphi_Z(t,p)$, para algum $T > 0$.*

Definição 1.24 *Um **ciclo periódico deslizante** é o fecho de um conjunto finito e ordenado de órbitas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tal que γ_{2k} é um pedaço de uma órbita deslizante, γ_{2k+1} é uma órbita regular e os pontos de partida e chegada de γ_{2k+1} pertencem à $\overline{\gamma_{2k}}$ e $\overline{\gamma_{2k+1}}$ respectivamente. Veja Figura 1.6.*

Definição 1.25 *O **período de um ciclo** é a soma dos tempos que são gastos para percorrer cada uma das órbitas γ_i, com $i = 1, \ldots, n$.*

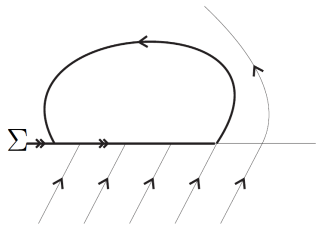

Figura 1.6: *exemplo de ciclo periódico suave por partes*

Definição 1.26 *Sejam $Z : U \to \mathbb{R}^2$ e $\tilde{Z} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^2$ campos suaves por partes, onde $U, \tilde{U}$ são abertos e $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ são as curvas de descontinuidade. Dizemos que Z e $\tilde{Z}$ são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : U \to \tilde{U}$ que preserva orientação, leva órbitas de Z em órbitas de $\tilde{Z}$ e $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$.*

CAPÍTULO 2

Análise de ciclos limite de campos lineares por partes no plano

Neste capítulo vamos fazer um estudo baseado nos artigos [5] e [6]. Nosso objetivo será exibir os métodos que foram usados nos artigos base para encontrar ciclos limites. Apresentaremos para campos lineares por partes no plano o teorema e sua demonstração que determina os 3 ciclos limites.

Para começar, vamos assumir, que Σ é uma reta, isto é uma variedade de dimensão 1 que define duas regiões no plano, qeu são os semi-planos esquerdo e direito, respectivamente:

$$\Sigma^- = \{(x,y) : x \leq 0\} \qquad \Sigma^+ = \{(x,y) : x \geq 0\},$$

com $x = 0$ como a linha de separação, i.é, o sistema de estudo será :

$$\dot{p} = Z(p) = \begin{cases} X^-(p) & \text{se } p \in \Sigma^- \\ X^+(p) & \text{se } p \in \Sigma^+, \end{cases} \tag{2-1}$$

onde $X^{\pm}(p) = A^{\pm}p + b^{\pm}$ e $p = (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, $A^- = (a_{ij}^-)$, $A^+ = (a_{ij}^+)$ são matrizes 2×2 com, $b^- = (b_1^-, b_1^-)^T$, $b^+ = (b_1^+, b_1^+)^T$ vetores constantes.

2.1 Forma canônica de Liénard

O mecanismo geral tem como primeiro objetivo desenvolver um método que permita o estudo do campo $Z(p)$ de maneira fácil e ótima. O primeiro passo é explicitar a forma canônica de Liénard, que é uma forma mais simples de representar o campo, preservando a maioria da suas propriedades topológicas.

Antes de continuar, vamos apresentar um resultado que fornece um campo suave por partes topologicamente equivalente ao campo original apresentando menos parâmetros.

Proposição 2.1 *Assumimos que $a_{12}^{+}a_{12}^{-} > 0$ no sistema (2-1). Então o homeomorfismo por partes $\tilde{p} = h(p)$ dado como:*

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^{-} & -a_{12}^{-} \end{pmatrix} p - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^{-} \end{pmatrix}, \qquad se\ p \in \Sigma^{-}$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{a_{12}^{+}} \begin{pmatrix} a_{12}^{-} & 0 \\ a_{12}^{-}a_{22}^{+} & -a_{12}^{-}a_{22}^{+} \end{pmatrix} p - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^{-} \end{pmatrix}, \quad se\ p \in \Sigma^{+}$$

transforma o sistema (2-1) na forma canônica

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}} &= \begin{pmatrix} T^{-} & -1 \\ D^{-} & 0 \end{pmatrix} \tilde{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^{-} \end{pmatrix} \text{se } \tilde{p} \in \Sigma^{-} \\ \dot{\tilde{p}} &= \begin{pmatrix} T^{+} & -1 \\ D^{+} & 0 \end{pmatrix} \tilde{p} - \begin{pmatrix} -b \\ a^{+} \end{pmatrix} \text{se } \tilde{p} \in \Sigma^{+}, \end{aligned} \tag{2-2}$$

onde $\tilde{p} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, $a^{-} = a_{12}^{-}b_2^{-} - a_{22}^{-}b_1^{-}$ e $b = \frac{a_{12}^{-}}{a_{12}^{+}}b_1^{+} - b_1^{-}$, $a^{+} = \frac{a_{12}^{-}}{a_{12}^{+}}\left(a_{12}^{+}b_2^{+} - a_{22}^{+}b_1^{+}\right)$. e os termos $T^{\pm}$ e $D^{\pm}$ são respectivamente o traço e o determinante das matrizes dos campos acima.

Prova. Segue da aplicacao da forma canônica de Jordan no Teorema 1.12 e aplicando o homeomorfismo $h(p)$ ao sistema (2-1).

Vamos demostrar para a zona esquerda, o processo para a zona direita é análogo.

De fato, seja o homeomorfismo

$$\tilde{p} = h(p) = Rp + c, \qquad \forall p \in \Sigma^{-}, \tag{2-3}$$

com

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^{-} & -a_{12}^{-} \end{pmatrix}, \qquad c = -\begin{pmatrix} 0 \\ b_1^{-} \end{pmatrix}.$$

Seja também o campo $X^-(p) = A^- p + b^-$ para $p \in \Sigma^-$ de 2-1, com

$$A^- = \begin{pmatrix} a_{11}^- & a_{12}^- \\ a_{21}^- & a_{22}^- \end{pmatrix}, \qquad b^- = \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_2^- \end{pmatrix},$$

podemos ter de (2-3) que

$$p = R^{-1}(\tilde{p} - c), \tag{2-4}$$

e

$$\dot{\tilde{p}} = R\dot{p}, \tag{2-5}$$

a partir de (2-5) junto com o campo $X^-(p) = \dot{p}$ de (2-1) temos

$$\dot{\tilde{p}} = R(A^- p + b^-),$$

e com isso

$$\dot{\tilde{p}} = RA^- p + Rb^-,$$

substituindo (2-4) temos

$$\dot{\tilde{p}} = RA^-(R^{-1}(\tilde{p} - c)) + Rb^-,$$

assim

$$\dot{\tilde{p}} = RA^- R^{-1}\tilde{p} - RAR^{-1}c + Rb^-, \tag{2-6}$$

obtemos que

$$RA^- R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^- & a_{12}^- \\ a_{21}^- & a_{22}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} & \frac{1}{a_{12}^-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^- + a_{22}^- & -1 \\ a_{12}^- a_{21}^- - a_{22}^- a_{11}^- & 0 \end{pmatrix},$$

em (2-6) temos então

$$\dot{\tilde{p}} = \begin{pmatrix} a_{11}^- + a_{22}^- & -1 \\ a_{12}^- a_{21}^- - a_{22}^- a_{11}^- & 0 \end{pmatrix} \tilde{p} - \begin{pmatrix} a_{11}^- + a_{22}^- & -1 \\ a_{12}^- a_{21}^- - a_{22}^- a_{11}^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1^- \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_2^- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^- + a_{22}^- & -1 \\ a_{12}^- a_{21}^- - a_{22}^- a_{11}^- & 0 \end{pmatrix} \tilde{p} - \begin{pmatrix} b_1^- \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_1^- a_{22}^- - a_{12}^- b_2^- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^- + a_{22}^- & -1 \\ a_{12}^- a_{21}^- - a_{22}^- a_{11}^- & 0 \end{pmatrix} \tilde{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12}^- b_2^- - b_1^- a_{22}^- \end{pmatrix}$$

e isso é

$$\dot{\tilde{p}} = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \tilde{p} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix}$$

onde $a^- = a_{12}^- b_2^- - a_{22}^- b_1^-$ e os termos T^- e D^- são respectivamente o traço e o determinante da matriz A^-.

A demonstração para os $p \in \Sigma^+$ é como comentamos no começo, análoga. Assim temos demonstrado o resultado. □

Nosso objetivo a seguir é apresentar uma forma mais regular de apresentar o campo suave por partes.

Considerando os sinais dos discriminantes $\Delta^{\pm} = (T^{\pm})^2 - 4D^{\pm}$ das respectivas matrizes características em (2-2), podemos agora introduzir os parâmetros modais $m_{\{R,L\}} \in \{i, 0, 1\}$ definido para as zonas R e L denominadas, direita e esquerda, respectivamente.
Temos que:

$$m_{\{R,L\}} = \begin{cases} i, & \text{se } T^2 - 4D < 0, \\ 0, & \text{se } T^2 - 4D = 0, \\ 1, & \text{se } T^2 - 4D > 0. \end{cases}$$

Proposição 2.2 *A forma canônica (2-2) pode-se escrever como:*

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ \gamma_L^2 - m_L^2 & 0 \end{pmatrix} p - \begin{pmatrix} 0 \\ a_L \end{pmatrix} \text{ se } p \in S^- \tag{2-7}$$

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ \gamma_R^2 - m_R^2 & 0 \end{pmatrix} p - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix} \text{se } p \in S^+$$

onde os novos termos constantes são:$a_{\{R,L\}} = \frac{a^{\pm}}{\omega_{\{R,L\}}}$, $\gamma_{\{R,L\}} = \frac{T\pm}{2\omega_{\{R,L\}}}$, *sendo* $\omega_{\{R,L\}} = 1$ *para* $m_{\{R,L\}} = 0$, *enquanto* $\omega_{\{R,L\}} = \sqrt{\left|\frac{(T^{\pm})^2}{4} - D^{\pm}\right|}$ *se* $m_{\{R,L\}} \neq 0$.

Prova. Vamos considerar somente a zona à esquerda pois o processo é análogo para a zona à direita.

Tomando em (2-2) a seguinte mudança de variáveis

$$(x,y,t) \mapsto \left(\frac{\hat{x}}{\omega_L}, \hat{y}, \frac{\hat{t}}{\omega_L}\right),$$

cujos diferenciais são dados por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\hat{x}}{dt}\frac{1}{\omega_L}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d\hat{y}}{dt} \quad \text{e} \quad dt = d\hat{t}\frac{1}{\omega_L},$$

substituindo no sistema (2-2) temos que

$$\begin{aligned} \tfrac{d\hat{x}}{dt}\tfrac{1}{\omega_L} &= T^-\left(\tfrac{\hat{x}}{\omega_L}\right) - \hat{y}, \\ \tfrac{d\hat{y}}{dt} &= D^-\left(\tfrac{\hat{x}}{\omega_L}\right) - a^-, \end{aligned}$$

diferenciando com relação ao tempo $\hat{t}$, temos

$$\begin{aligned} \tfrac{d\hat{x}}{d\hat{t}}\tfrac{\omega_L}{\omega_L} &= T^-\left(\tfrac{\hat{x}}{\omega_L}\right) - \hat{y}, \\ \tfrac{d\hat{x}}{d\hat{t}} &= T^-\left(\tfrac{\hat{x}}{\omega_L}\right) - \hat{y}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tfrac{d\hat{y}}{d\hat{t}}\omega_L &= D^-\left(\tfrac{\hat{x}}{\omega_L}\right) - a^-, \\ \tfrac{d\hat{y}}{d\hat{t}} &= D^-\left(\tfrac{\hat{x}}{\omega_L^2}\right) - \tfrac{a^-}{\omega_L}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{T^-}{\omega_L} & -1 \\ \frac{D^-}{\omega_L^2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a^-}{\omega_L} \end{pmatrix}.$$

Agora tendo em conta as constantes do sistema (2-2) e a relação $4m_L^2\omega_L^2 = (T^-)^2 - 4D^-$, obtemos

$$\omega_L^2 - m_L^2 = \frac{(T^-)^2}{4\omega_L^2} - m_L^2 = \frac{D^-}{\omega_L^2},$$

substituindo no sistema (2-2) obtemos o resultado. □

Na Figura 2.1 apresentamos o exemplo para campo onde $\gamma_L > 0$ e $m = i$

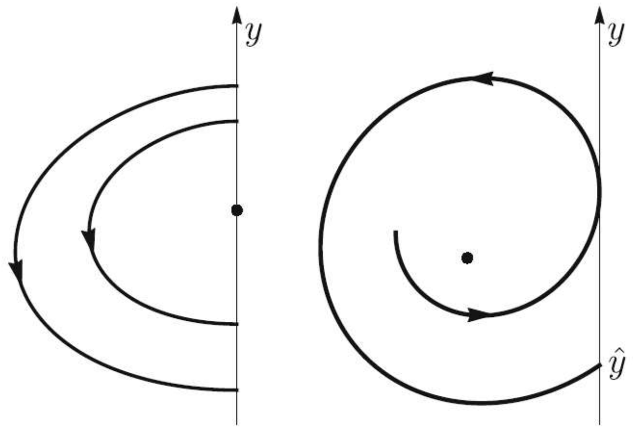

Figura 2.1: *Na esquerda temos a configuração para $a_L = 0$ e na direita temos para $a_L < 0$.*

Resumidamente temos as seguintes dinâmicas:

Para $m = i$ temos um foco; para $m = 0$ temos um nó impróprio; quando $m = 1$ temos um nó se $|\omega| \geq 1$ e uma sela se $|\omega| < 1$. Note que a condição $\omega^2 - m^2 < 0$ é para o caso sela.

2.2 Aplicação de Poincaré para campo de vetores lineares por partes

Nosso objetivo nesta seção é explicitar a aplicação de primeiro retorno para o campo Z.

Começamos esta seção com a expressão da matriz exponencial e^{tA} onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - m^2 & 0 \end{pmatrix},$$

e definimos as seguintes funções:

$$C_m(t) = cosh(mt), \, S_m(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(mt)}{m} & \text{se } m \neq 0, \\ t & \text{se } m = 0. \end{cases}$$

Note que $C_0 \equiv 1$ e para $m = i$ temos:

$$C_i(t) = cosh(it) = cos(t), \qquad S_i(t) = \frac{senh(it)}{t} = sen(t)$$

satisfazendo a identidade trigonométrica hiperbólica

$$C_m^2(t) - m^2 S_m(t) = 1 \tag{2-8}$$

derivando temos

$$2C_m C_m^{'} m = m^3 2 S_m S_m^{'}$$

daí temos que

$$C_m^{'}(t) = m^2 S_m(t) \quad \text{e} \quad S_m^{'}(t) = C_m(t). \tag{2-9}$$

Assim diagonalizando A e deixando as funções exponenciais en termos de $cosh(m)$ e $senh(m)$ temos que:

$$e^{tA} = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} C_m(t) + \gamma S_m(t) & -S_m(t) \\ \left(\gamma^2 - m^2\right) S_m(t) & C_m(t) + \gamma S_m(t) \end{pmatrix}. \tag{2-10}$$

Consideramos o sistema:

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ \gamma^2 - m^2 & 0 \end{pmatrix} p - a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2-11}$$

A seguir apresentaremos a expressão paramétrica da aplicação de Poincaré à esquerda P_L como $y_1 = P_L(y)$ com $P_L(0) =$ŷ onde $P_L : I \subset \Sigma \mapsto \Sigma$ e $y \to P_L(y) = y_1$.
Denotamos $\mathbf{e_1} = (1,0)^T$ e $\mathbf{e_2} = (0,1)^T$

Parametrizando a função P_L em termos do tempo de retorno temos:

$$\begin{aligned} y_1 \mathbf{e_2} &= e^{tA} \left(y\mathbf{e_2} - a \int_0^t e^{-As} \mathbf{e_2} ds \right) \\ y_1 \mathbf{e_2} &= y e^{tA} \mathbf{e_2} - aV(t) \mathbf{e_2}. \end{aligned} \tag{2-12}$$

onde a matriz função $V(t)$ é a matriz primitiva exponencial para $t = 0$, definida como

$$\begin{aligned} V(t) &= e^{tA} \int_0^t e^{-sA} ds = \int_0^t e^{(t-s)A} ds \\ &= \int_0^t e^{uA} du. \end{aligned} \tag{2-13}$$

Lema 2.3 *A matriz função $V(t)$ satisfaz $V(-t) = -e^{-tA}V(t)$ e suas k primeiras derivadas são $V(t)^{(k)} = e^{tA}A^{k-1}$ para $k \geq 1$.*

Prova. De (2-13) temos que

$$V(-t) = \int_0^{-t} e^{uA}du = -\int_0^{t} e^{-uA}du = -e^{-tA}V(t),$$

também, derivando (2-13) e pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$V'(t) = e^{-tA},$$

derivando dai temos

$$V^{(k)}(t) = e^{tA}A^{k-1} \quad \text{particularmente} \quad V^{(k)}(0) = A^{k-1}.$$

$\square$

No que foi feito acima podemos definir a função escalar,

$$f(t) = \mathbf{e_1}^T V(t)\mathbf{e_2}, \tag{2-14}$$

a qual satisfaz $f(0) = 0$ e suas primeiras derivadas são

$$f^{(k)} = \mathbf{e_1}^T e^{tA}A^{k-1}\mathbf{e_2} \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Então para $t = 0$ obtemos:

$$f'(0) = 0, \;\; f''(0) = -1, \;\; f^{(k)} = \mathbf{e_1}^T A^{k-1}\mathbf{e_2}, \;\; k \geq 3.$$

Para minimizar os cálculos apresentaremos uma função auxiliar;

$$\Psi_{\gamma,m}(t) = 1 - e^{\gamma t}\left[C_m(t) - \gamma S_m(t)\right]$$

e com a identidade geométrica das funções hiperbólicas (2-8) e as derivadas das funções C_m e S_m em (2-9) temos

$$\begin{aligned}
\Psi'_{\gamma,m}(t) &= -e^{\gamma t}\gamma[C_m(t) - \gamma S_m(t)] - e^{\gamma t}[C'_m(t) - \gamma S'_m(t)] \\
&= -e^{\gamma t}\gamma[C_m(t) - \gamma S_m(t)] - e^{\gamma t}[m^2 S_m(t) - \gamma C_m(t)] \\
&= \cancel{-\gamma e^{\gamma t} C_m(t)} + e^{\gamma t}\gamma^2 S_m(t) - e^{\gamma t} m^2 S_m(t) + \cancel{\gamma e^{\gamma t} C_m(t)}
\end{aligned}$$

Assim derivada é dada por:

$$\Psi'_{\gamma,m}(t) = \left(\gamma^2 - m^2\right) S_m(t) e^{\gamma t}. \tag{2-15}$$

A função $\Psi_{\gamma,m}$ se reduz a:

$$\Psi_{\gamma,m}(t) = \begin{cases} 1 - e^{\gamma t}(cos(t) - \gamma sen(t)), & \text{se } m = i \\ 1 - e^{\gamma t}(1 - \gamma t), & \text{se } m = 0 \\ 1 - e^{\gamma t}(cosh(t) - \gamma senh(t)), & \text{se } m = 1. \end{cases}$$

Podemos notar que a função tem a seguintes propriedades de simetria:

$$\Psi_{\gamma,m}(-t) = \Psi_{-\gamma,m}(t), \text{ e } \Psi'_{\gamma,m}(-t) = \Psi'_{-\gamma,m}(t).$$

Proposição 2.4 *Consideremos a restrição do sistema (2-11) à região $x \leq 0$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $a = 0$ a aplicação de Poincaré só existe quando a dinâmica do sistema é de tipo foco e temos que $P_L(y) = -e^{\gamma\pi}y$ para toda $y \geq 0$.*

2. *Assuma que $a \neq 0$ e $\gamma^2 - m^2 \neq 0$. Se adicionalmente assumimos que $a > 0$ para o caso que não é foco ($m \neq i$) então a aplicação à esquerda de Poincaré é dada nesse domínio por:*

$$y = a\frac{\Psi_{\gamma,m}(t)}{\Psi'_{\gamma,m}(t)} = a\frac{1 - e^{\gamma t}\left[C_m(t) - \gamma S_m(t)\right]}{(\gamma^2 - m^2)S_m(t)e^{\gamma t}},$$

$$P_L(y) = a\frac{\Psi_{\gamma,m}(-t)}{\Psi'_{\gamma,m}(-t)} = a\frac{1 - e^{-\gamma t}\left[C_m(t) + \gamma S_m(t)\right]}{(\gamma^2 - m^2)S_m(t)e^{-\gamma t}}.$$

3. *Se $|\gamma| = m = 1$ e $a > 0$ então a aplicação à esquerda de Poincaré é dada por:*

$$y = a\frac{e^{2\gamma t} - 1 - 2\gamma t}{2\gamma(e^{-2\gamma t} - 1)}, \quad P_L(y) = a\frac{e^{-2\gamma t} - 1 + 2\gamma t}{2\gamma(e^{2\gamma t} - 1)}.$$

4. *Se $\gamma = 0$ e adicionalmente assumimos que $a > 0$ para os casos que não são foco ($m \neq i$), então temos que $P_L = -y$ no seu domínio.*
5. *A primeira derivada da função de Poincaré é dada por*

$$P'_L(y) = \frac{y}{P_L(y)}e^{2\gamma t} < 0, \tag{2-16}$$

e quando $a\gamma \neq 0$ a segunda derivada satisfaz

$$\gamma P''_L(y) < 0.$$

Prova. Tomando a equação (2-12) e multiplicando ela por $\mathbf{e_1^T}$ e $\mathbf{e_2}$, respectivamente, obtemos

$$0 = y_1\mathbf{e_1^T}\mathbf{e_2} = y\mathbf{e_1^T}e^{tA}\mathbf{e_2} - a\mathbf{e_1^T}V(t)\mathbf{e_2} \tag{2-17}$$

e

$$y_1\mathbf{e_1^T}e^{-tA}\mathbf{e_2} = y\mathbf{e_1^T}e^{-tA}e^{tA}\mathbf{e_2} - a\mathbf{e_1^T}e^{-tA}V(t)\mathbf{e_2},$$

$$y_1\mathbf{e_1^T}e^{-tA}\mathbf{e_2} = y\mathbf{e_1^T}\mathbf{e_2} - a\mathbf{e_1^T}e^{-tA}V(t)\mathbf{e_2}$$

e com o fato de $\mathbf{e_1^T}\mathbf{e_2} = 0$, temos

$$y_1\mathbf{e_1^T}e^{-tA}\mathbf{e_2} = -a\mathbf{e_1^T}e^{-tA}V(t)\mathbf{e_2}. \tag{2-18}$$

Podemos ver que quando $a = 0$ a aplicação de Poincaré só existe se p é ponto de equilíbrio de tipo foco, pois se for uma sela ou um nó a variedade invariante associada à origem impede a existência da aplicação de retorno.

Tomando $m = i$ e das equações (2-10) e (2-17) temos que

$$\mathbf{e_1^T}e^{tA}\mathbf{e_2} = (1,0)\cdot e^{\gamma t}\begin{pmatrix} C_i(t)+\gamma S_i(t) & -S_i(t) \\ (\gamma^2+1)\,S_i(t) & C_i(t)+\gamma S_i(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e_1^T}e^{tA}\mathbf{e_2} = -e^{\gamma t}S_i(t) = -e^{\gamma t}sen(t) = 0,$$

assim como $e^{\gamma t} \neq 0$ então temos que $t = \pi$. Então de (2-12) temos

$$y_1\mathbf{e_2} = ye^{A\pi}\mathbf{e_2},$$

$$y_1\mathbf{e_2} = ye^{\gamma\pi}\begin{pmatrix} C_i(\pi)+\gamma S_i(\pi) & -S_i(\pi) \\ (\gamma^2+1)\,S_i(\pi) & C_i(\pi)+\gamma S_i(\pi)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$y_1\mathbf{e_2} = ye^{\gamma\pi}\begin{pmatrix} -S_i(\pi) \\ C_i(\pi)+\gamma S_i(\pi)\end{pmatrix},$$

assim então multiplicando por $\mathbf{e_2}^T$ temos

$$y_1 = ye^{\gamma\pi}\left(C_i(\pi) + \gamma S_i(\pi)\right),$$

$$= ye^{\gamma\pi}\left(cos(\pi) + \gamma sen(\pi)\right),$$

$$= P(y) = -ye^{\gamma\pi}$$

e com isto demostramos o item 1.

Quando $a \neq 0$ a origem é um ponto de tangência invisível para $a < 0$. Como expressamos anteriormente, necessitamos $a > 0$ para que no caso nó possamos garantir a existência da aplicação de primeiro retorno.

Calculando independentemente do tempo, podemos deixar só y da equação (2-17)

$$y = \frac{\mathbf{e_1^T} V(t)\mathbf{e_2}}{\mathbf{e_1^T} e^{tA}\mathbf{e_2}}$$

da mesma maneira podemos de (2-18) deixar só $P_L(y)$

$$P_L(y) = -a\frac{\mathbf{e_1^T} V(-t)}{\mathbf{e_1^T} e^{-tA}\mathbf{e_2}}$$

isto sempre que $\mathbf{e_1^T} e^{tA}\mathbf{e_2} \neq 0$.

Considerando o Lema 2.3 e utilizando a função f na equação (2-14), podemos reescrever as expressões anteriores como

$$y = a\frac{f(t)}{f'(t)}, \qquad P_L(y) = -a\frac{f(-t)}{f'(-t)}, \tag{2-19}$$

assim das equações (2-13) e (2-15) temos que

$$f(t) = \mathbf{e_1^T} V(t)\mathbf{e_2}$$

$$= \int_0^t \mathbf{e_1^T} e^{uA}\mathbf{e_2} du$$

$$= \int_0^t -S_m(u)du = -\int_0^t S_m(u)du.$$

Assim, pelos distintos valores de m, obtemos:

$$f(t)=\begin{cases} -\frac{\Psi_{\gamma,m}}{\gamma^2-m^2}, & \text{se} \quad \gamma^2\neq m^2 \\ \\ -\frac{e^{2\gamma t}-1-2\gamma t}{4}, & \text{se} \quad |\gamma|=m=1 \\ \\ -\frac{t^2}{2}, & \text{se} \quad \gamma=m=0 \end{cases}$$

e $f^{'}(t)=\mathbf{e_1^T}e^{tA}\mathbf{e_2}=-e^{\gamma t}S_m(t)$.

Temos então que para o Item 2 da Proposição 2.4, $\gamma^2-m^2\neq 0$ que junto com a descrição da função f nos dá a demonstração do Item 2

$$y=a\frac{\Psi_{\gamma,m}(t)}{\Psi'_{\gamma,m}(t)}=a\frac{1-e^{\gamma t}\left[C_m(t)-\gamma S_m(t)\right]}{(\gamma^2-m^2)S_m(t)e^{\gamma t}}$$

$$P_L(y)=a\frac{\Psi_{\gamma,m}(-t)}{\Psi'_{\gamma,m}(-t)}=a\frac{1-e^{-\gamma t}\left[C_m(t)+\gamma S_m(t)\right]}{(\gamma^2-m^2)S_m(t)e^{-\gamma t}};$$

Da mesma maneira agora no Item 3, temos $|\gamma|=m=1$ e de novo junto como e expressão acima

$$y=a\frac{e^{2\gamma t}-1-2\gamma t}{2\gamma(e^{-2\gamma t}-1)}, \quad \text{e} \quad P_L(y)=a\frac{e^{-2\gamma t}-1+2\gamma t}{2\gamma(e^{2\gamma t}-1)}.$$

Agora quando $\gamma=0$ e $m\neq 0$ temos que se $a=0$ pelo Item 1:

$$P_L(y)=-y,$$

da mesma forma fazendo o cálculo no Item 2, quando $a>0$ temos o mesmo resultado, provamos assim o Item 4.

Para mostrar o Item 5, quando $a\neq 0$ e $\gamma^2-m^2\neq 0$ fazendo o cálculo direto do Item 2, temos

$$\frac{dy}{dt}=a\frac{1-e^{-\gamma t}[C_m(t)+\gamma S_m]}{(\gamma^2-m^2)S_m^2(t)}=\frac{y}{S_m(t)}e^{-\gamma t}$$

e

$$\frac{dP_L}{dt}=-a\frac{1-e^{\gamma t}[C_m(t)-\gamma S_m(t)]}{\gamma^2-m^2)S_m^2(t)}=\frac{y}{S_m}e^{\gamma t},$$

e substituindo nas equações obtemos o resultado.

Analogamente, podemos fazer com o casso $a>0$ e $\gamma^2-m^2=0$ que resulta dos Itens 1 e 4.

Assim então a segunda derivada será

$$P_L^{''}(y) = \begin{cases} 2a^2 \frac{senh(\gamma t) - \gamma S_m(t)}{(\gamma^2 - m^2) P_L^3(y)} e^{3\gamma t}, & \text{se} \quad \gamma^2 \neq m^2 \\ \\ a^2 \gamma \frac{tcosh(t) - semh(t)}{P_L^3(y)} e^{3\gamma t}, & \text{se} \quad |\gamma| = m = 1 \end{cases} \tag{2-20}$$

e vemos que para todos os casos com $a\gamma \neq 0$ então $P_L^{''}(y) < 0$ e a prova está completa. □

Definindo particularmente para $m = i$ a função φ_γ como $\varphi_\gamma(t) = \Psi_{\gamma,i}(t) = 1 - e^{\gamma t}(cos(t) - \gamma sen(t))$ temos a seguinte proposição

Proposição 2.5 *(A Aplicação de Poincaré no caso foco instavél) Considerando (2-7) as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Quando $a_L = 0$ a aplicação de Poincaré é definida para $y \geq 0$ como*

$$P_L = -e^{\gamma L \pi} y.$$

2. *Assumindo que $a_L < 0$ e $\gamma_L > 0$, a aplicação esquerda de Poincaré P_L está bem definida para $y \geq 0$ e é dada pela expressão:*

$$y = a_L \frac{\varphi_L(t)}{\varphi_L^{'}(t)} = a \frac{1 - e^{\gamma_L t}(cos(t) - \gamma_L sen(t))}{(\gamma_L^2 + 1) sen(t)} e^{\gamma_L t},$$

$$P_L(y) = a_L \frac{\varphi_L(t)}{\varphi_L^{'}(t)} = -a_L \frac{1 - e^{-\gamma_L t}(cos(t) + \gamma_L sen(t))}{(\gamma_L^2 + 1) sen(t)} e^{-\gamma_L t},$$

onde $\pi < t \leq \hat{t}$ sendo $\hat{t}$ o único valor em $(\pi, 2\pi)$ tal que $\varphi_{\gamma_L}(\hat{t}) = 0$.

Em particular, temos que $P_L(0) = a_L \alpha_0$ onde:

$$\alpha_0 = \frac{cos(\hat{t}) + \gamma_L sen(\hat{t}) - e^{\gamma_L \hat{t}}}{(\gamma^2 + 1) sen(\hat{t})} = -e^{\gamma_L \hat{t}} sen(\hat{t}) > 0. \tag{2-21}$$

Além disso, as primeiras duas derivadas da aplicação à esquerda de Poincaré P_L satisfaz:

$$P_L^{'}(0) = 0, \quad P_L^{''}(0) = \frac{e^{2\gamma_L \hat{t}}}{a_L \alpha_0}, e \quad \lim_{y \to \infty} P_L^{'}(y) = -e^{\gamma_L \pi},$$

Prova. Os Itens 1 e 2 foram, demonstrados na Proposição 2.4. Para mostrar a que $P_L(0) = a_L \alpha_0$ só falta multiplicar os dois termos da fração (2-21) por $cos(t) - \gamma sen(t) = e^{-\gamma t}$.

Agora de (2-16) obtemos que $P_L'(0) = 0$. Rescrevendo (2-16) temos $P_L(y)P_L'(y) = ye^{\gamma_L t}$. Assim

$$P_L'(y)P_L'(y) + P_L(y)P_L''(y) = e^{2\gamma_L t} + 2\gamma_L y e^{2\gamma_L t}\frac{dt}{dy},$$

e tomando $y = 0$ assim alcançamos a expressão desejada.

Por último de (2-16) temos

$$\lim_{y\to\infty}\left(P_L'(y)\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\varphi_{\gamma,L}(t)}{\varphi_{\gamma,L}(-t)} = -e^{\gamma_L \pi}.$$

Assim a Proposição está demostrada. □

A respeito do fluxo na zona à direita para $a_R < 0$ percorrendo o sistema X^+ na zona S^+ partindo do ponto $(0,z)$ com $z \leq b$, chegando em um ponto $(0,z_1)$ depois de um tempo t com $z_1 \geq b$. Podemos definir assim a aplicação de Poincaré na direita como $z_1 = P_R(z)$ com $P_R(b) = b$. Como $a_R < 0$, o ponto $(0,b)$ é uma tangência invisível e assim não teremos ponto de equilíbrio no bordo. Para o sistema à direita podemos repetir passo a passo o desenvolvimento da aplicação de Poincaré na zona à esquerda. Assim então com os mesmos cálculos e a mesma representação paramétrica de (2-19), podemos escrever

$$\begin{aligned} z - b &= \frac{a_R}{S_{m,R}e^{\gamma_R t}}\int_0^t S_{m,R}(u)e^{\gamma_R u}du, \\ P_R(z) - b &= \frac{a_R}{S_{m.R}(-t)e^{-\gamma_R t}}\int_0^{-t} S_{m,R}(u)e^{\gamma_R u}du. \end{aligned} \tag{2-22}$$

Com esta representação podemos obter as mesmas propriedades da aplicação de Poincaré à esquerda. Lembramos que nos casos $(m \neq i)$ a variedade invariante intersecta o eixo y nos pontos $(0,z_-)$ e $(z_+,0)$, onde:

$$z_- = b + \tfrac{a_R}{\gamma_R + m_R}, \qquad z_+ = b + \tfrac{a_R}{\gamma_R - m_R}.$$

Proposição 2.6 *(Propriedades globais para a função direita de retorno) Assumimos $a_R < 0$ e $\gamma_L < 0$ no sistema (2-7) A aplicação P_R satisfaz as seguintes afirmações:*

1. *Se é o caso foco* $(m = i)$ *então a aplicação* P_R *definida em* $z \leq b$ *com* $P_R \geq b$ *é:*

$$z = b + a_R \frac{1 - e^{\gamma_R t}\,(cos(t) - \gamma_R sen(t))}{(\gamma_R^2 + 1)sen(t)} e^{\gamma_R t},$$

$$P_R(z) = b - a_R \frac{1 - e^{-\gamma_R t}\,(cos(t) + \gamma_R sen(t))}{(\gamma_R^2 + 1)sen(t)} e^{-\gamma_R t},$$

onde $t \in (0, \pi)$ *e sua primeira derivada satisfaz* $\lim_{z \to -\infty} P_R^{'}(z) = e^{\gamma R \pi}$.

2. *Se* $m_R \in \{0, 1\}$ *e* $\gamma_R^2 - m_R^2 \neq 0$ *então a apliação* P_R *é definida para todo* $z \geq b$ *no caso nó* $(\gamma_R < -m_R)$*, e somente para* $z_- < z \leq b$*. No caso sela* $(m_R = 1,\ -1 < \gamma_R < 0)$*, a aplicação sempre é limitada. Mais precisamente* $b \leq P_R(z) < z_+$ *e sua expressão paramétrica é:*

$$z = b + a_R \frac{e^{-\gamma_R t} - C_{m_R}(t) - \gamma S_{m_R}(t)}{(\gamma_R^2 - m_R^2) S_{m_R}(t)}$$

$$P_R(z) = b - a_R \frac{e^{\gamma t} - C_{m_R}(t) + \gamma S_{m_R}(t)}{(\gamma_R^2 - m_R^2) S_{m_R}(t)},$$

onde a primeira derivada o satisfaz

$$\lim_{z \to z_-} P_R^{'}(z) = 0, \quad \textit{e no casso sela} \quad \lim_{z \to \infty} P_R^{'}(z) = 0.$$

3. *Se* $m_R = -\gamma = 1$*, então a aplicação* P_R *é definida para toda* $z \leq b$ *e limitada, a saber* $b \leq P_R(z) < z_+$ *e sua expressão paramétrica é*

$$z = b - a_R \frac{e^{2t} - 1 + 2t}{2(e^{-2t} - 1)}, \quad P_R(z) = b - a_R \frac{e^{2t} - 1 - 2t}{2(e^{2t} - 1)},$$

onde a primeira derivada da aplicação é $\lim_{z \to -\infty} P_R^{'}(0) = 0$.
Em todos os casos a segunda derivada da aplicacão de retorno é definida como $P_R^{''}(0) < 0$.

Prova. Tendo em mente a consideração feita anteriormente e a equação (2-22) temos que os Itens 1, 2, 3 se deduzem da Proposição 2.4. Assim nos resta mostrar as afirmações referentes à segunda derivada. Logo por (2-20), temos

$$P_R^{''}(z) = \frac{2a_R e^{3\gamma t}}{(P_R(z) - b)^3} = \frac{sinh(\gamma_R t) - \gamma_R S_{m,R}(t)}{\gamma_R^2 - m_R^2} < 0,$$

isto por que com as condições do Item 5, o numerador da fracão é sempre negativo. $\square$

Proposição 2.7 *(Propriedades locais da aplicação direita de Poincaré) Assumindo que $a_R < 0$ e $\gamma_R < 0$ no sistema (2-7) existe um $\varepsilon > 0$ tal que P_R está bem definida para $z \in (b-\varepsilon, b]$. Em particular temos que $P_R(b) = b$, assim as primeiras quatro derivadas da aplicação no ponto $y = b$ são*

$$P_R^{'}(b) = -1, \quad P_R^{''}(b) = -\frac{8\gamma_R}{3a_R}, \quad P_R^{'''}(b) = -\frac{32\gamma_R^2}{3a_R^2}, \quad P_R^{(IV)}(b) = -32\gamma_R\frac{79\gamma_R^2+9m_R^2}{45a_R^3}.$$

Prova. Para minimizar a notação vamos introduzir variáveis auxiliais $u = z-b$ e $v = P_R(z)-b$. De (2.3) e das equações paramétricas de P_R, temos que

$$\frac{u}{a_R} = \frac{t}{2} + \frac{\gamma_R}{6}t^2 + \frac{\gamma_R^2-m_R^2}{24}t^3 - \frac{\gamma_R(7m_R^2-3\gamma_R^2)}{360}t^4 + \mathcal{O}(t^5) \tag{2-23}$$

e

$$\frac{v}{a_R} = -\frac{t}{2} + \frac{\gamma_R}{6}t^2 - \frac{\gamma_R^2-m_R^2}{24}t^3 - \frac{\gamma_R(7m_R^2-3\gamma_R^2)}{360}t^4 + \mathcal{O}(t^5), \tag{2-24}$$

organizando a serie em (2-23)

$$\frac{t}{2} = \frac{u}{a_R} + \frac{2\gamma_R}{3a_R^2}u^2 + \frac{3m_R^2+5\gamma_R^2}{9a_R^3} + \frac{4\gamma_R(27m_R^2+17\gamma_R^3)}{135a_R^2}u^4 + \mathcal{O}(u^5),$$

substituindo em (2-24) temos

$$v = -u - \frac{4\gamma_R}{3a_R}u^2 - \frac{16\gamma_R^2}{9a_R^2}u^3 - \frac{4\gamma_R(27m_R^2+17\gamma_R^3)}{135a_R^2}u^4 + \mathcal{O}(u^5).$$

Substituindo em $P_R(z)$ obtemos o resultado. $\square$

A seguir apresentaremos o teorema principal deste capítulo, onde apresenta-se três ciclos limites para campos suaves por partes no plano.

Teorema 2.8 *Assuma que $a_R < 0$, $\gamma_R < 0$ e $m_R \in \{i, 0, 1\}$ no sistema (2-7). Então existe $\gamma_L > 0$, $\xi > 0$ e duas funções contínuas η_1, η_2, satisfazendo $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$, $\eta_1(\varepsilon) < \eta_2(\varepsilon) < 0$ para $-\xi < \varepsilon < 0$, tal que para $-\xi < a_L < 0$ e $\eta_1(a_L) < b < \eta_2(a_L)$ o sistema (2-7) tem ao menos três órbitas periódicas.*

2.3 Prova do Teorema 2.8

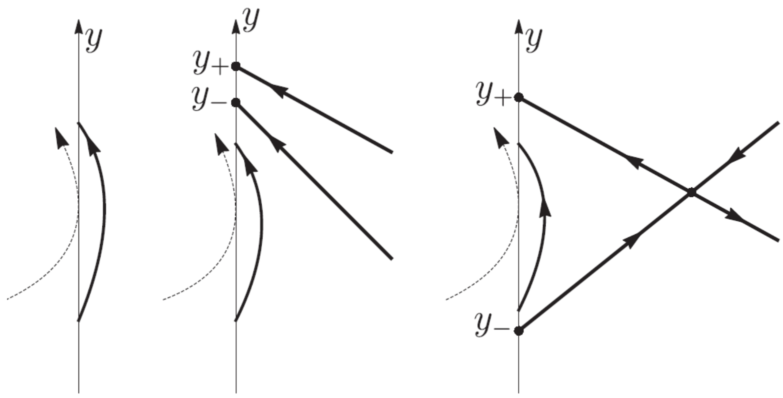

Figura 2.2: *As três configurações da zona direita na demonstração da Proposição 2.9*

Proposição 2.9 *Assuma que $a_L = 0$ (um foco na origem), $b = 0$, $a_L < 0$, $\gamma_R < 0$ no sistema (2-7). Tome $m_R \in \{i, 0, 1\}$. Então existe $\gamma_L > 0$ tal que no sistema (2-7) tem uma órbita periódica hiperbólica em torno da origem.*

Prova. Para provar a Proposição 2.9 vamos considerar a aplicação de Poincaré $P = P_R \circ P_L$ e estudar seus pontos fixos. Pela Proposição 2.5 sabemos que a aplicação de Poincaré à esquerda é $P_L(y) = -e^{\gamma_L \pi} y$, a qual é uma função linear e assim $P_L^{''}(y) = 0$ para todo y e como vimos no último item da Proposição 2.6 em todos os casos a derivada da função de Poincaré pela direita é negativa $P_R < 0$, assim

$$P^{'}(y) = P_R^{'}(P_L(y))P_L^{'}(y),$$

$$P^{''}(y) = P_R^{''}(P_L(y))(P_L^{'}(y))^2 + P_R(P_L(y))P_L^{''},$$

daí temos que

$$P^{''}(y) = P_R^{''}(P_L(y))(P_L^{'}(y))^2 < 0.$$

Lembrando que $P(0) = 0$, vamos mostrar a seguir que a aplicação de Poincaré tem ao menos um ponto fixo não trivial, o qual será um ciclo limite.
Podemos ver também que

$$P^{'}(0) = P_R^{'}(P_L(0))P_L^{'}(0) = P_R^{'}(0)(-e^{\gamma_L \pi}).$$

Pelo primeiro item da Proposição 2.7 temos que

$$P^{'}(0) = (-1)(-e^{\gamma_L \pi}) = e^{\gamma_L \pi} > 1.$$

Agora vamos estudar os diferentes casos nas duas zonas, para encontrar os ciclos limites.

Se a dinâmica na zona direita é um foco estável, isto é $m_R = i$ com $\gamma_R < 0$, a aplicação de Poincaré está definida para $y \in (0, \infty)$ e pelas Proposições 2.6 e 2.5, temos

$$\lim_{y \to \infty} P'(y) = e^{(\gamma_L + \gamma_R)\pi}.$$

Tomando $\gamma_L > 0$ de tal maneira que $\gamma_L + \gamma_R < 0$ então existe um valor $y_f > 0$ tal que o gráfico de $P(y)$ satis faz que $P'(y) < 1$ para todo $y > y_f$. Assim o gráfico vai intersectar a diagonal. Em outras palavras, existe algum $y_0 \in (y_f, 0)$ onde $P'(y_0) = 1$. Por tanto a aplicação tem um ponto fixo e o sistema tem um ciclo limite.

Se a dinâmica na zona à direita é um nó estável, vamos ter $m_R = 1$ em $\gamma_R \leq -1$, ou $m_R = 0$. Agora utilizando os últimos dois itens da Proposição 2.6, a aplicação de Poincaré fica e limitada e definida em $(0, \infty)$ como

$$P'(y) = P_R'(-e^{\gamma_L \pi}) P_L'(y),$$

e pelos últimos itens da Proposição 2.6 ($\lim_{z \to -\infty} P_R' = 0$), temos que

$$\lim_{y \to \infty} P'(y) = 0.$$

Assim, da mesma maneira que na dinâmica anterior temos que existe $y_0 \in (y_f, 0)$ onde $P'(y_0) = 1$. Então a aplicação tem um ponto fixo e o sistema tem um ciclo limite.

Se a dinâmica na zona à direta é do tipo sela, isto é $m_R = 1$ em $-1 < \gamma_R < 0$, podemos a partir do sistema (2-7) encontrar a aplicação de retorno.
Primeiro encontraremos os pontos de sela

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \frac{a_R}{\gamma_R^2 - 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\gamma_R \end{pmatrix}.$$

Os vetores próprios do sistema (2-7) são dados como

$$\mathbf{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_R \mp m \end{pmatrix}.$$

A existência da aplicação de retorno é determinada pela interseção com o eixo-y das linhas que conformam a variedade invariante da sela. Sendo denotadas como $z_{\pm}$, vão ser calculadas resolvendo μ na seguinte equação

$$\frac{a_R}{\gamma_R^2-1}\begin{pmatrix}1\\2\gamma_R\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\\gamma_R\mp\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y_\pm\end{pmatrix}.$$

assim temos que a variedade invariante da sela é dada por

$$z_\pm=\frac{2a_R\gamma_R}{\gamma_R^2-1}-\frac{a_R(\gamma_R\mp 1)}{\gamma_R^2-1}=a_R\frac{\gamma\pm 1}{\gamma_R^2-1}=\frac{a_R}{\gamma_R\mp 1}$$

separadamente temos

$$z_+=\frac{a_R}{\gamma_R-1}>0 \qquad \text{e} \qquad z_-=\frac{a_R}{\gamma_R+1}<0.$$

Portanto a aplicação de retorno à direita pode ser definida como a inversa da função pela esquerda e fica definida pelas variedade instável da sela

$$0\le y<P_L^{-1}(z_-)=-e^{-\gamma_L\pi}\frac{a_R}{\gamma_R+1},$$

do mesmo modo podemos ver que o gráfico esta limitado, onde, tem seu ponto final em $(P_L(z_-,z_+))$, assim, como $P^{'}(0)>1$ quando $\gamma_L>0$, temos um ponto fixo, e com isso um ciclo limite. Isto sempre que o ponto final este embaixo da diagonal o que é

$$\frac{a_R}{\gamma_R-1}<-e^{-\gamma_L\pi}\frac{a_R}{\gamma_R+1}$$

Já que ditos pontos fixos satisfazem que $P(y)=P_L(P_R(y))=y$ ou equivalente $P_R(y)=P_L^{-1}(y)$, encontramos então em todos os casos um conjunto de values γ_L onde temos uma orbita periódica. Com todo isso em todas as dinâmicas (Veja Figura 2.2) encontramos um ciclo limite e assim temos a demonstração do teorema, veja figura 2.3, os casos quando intersectam a diagonal. $\square$

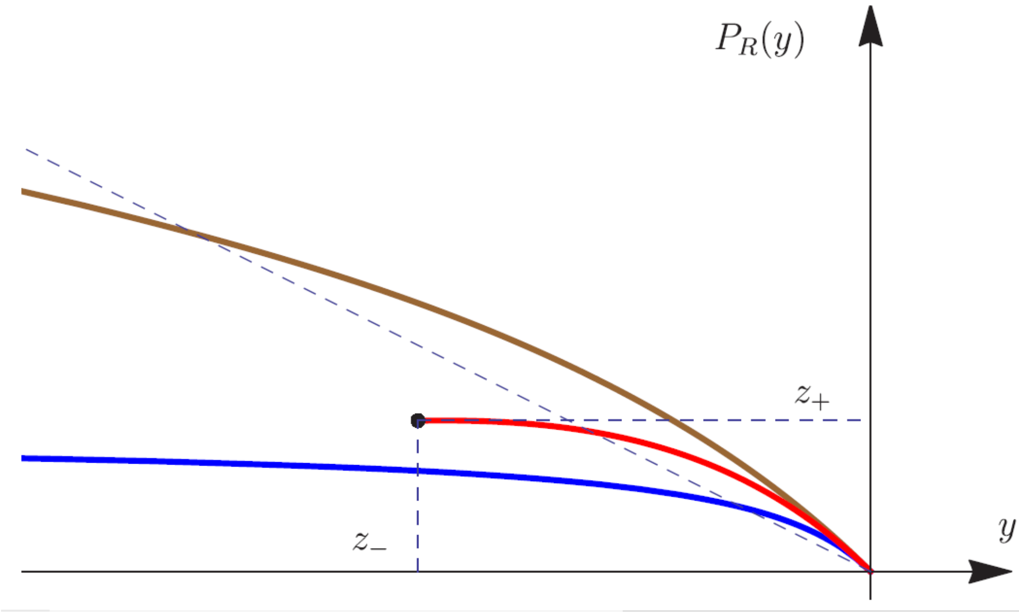

Figura 2.3: *Grafico da aplicação de Poincaré $P_R(y)$ quando $b = 0$ e $\gamma_R < 0$ para o tipo nó (azul), o tipo sela (vermelho) e tipo foco (marrom).*

Proposição 2.10 *Assumindo que $\gamma_L > 0$, $a_R < 0$, $\gamma_R < 0$ e tomando $m_R \in \{i, 0, 1\}$ no sistema (2-7), então existe $\xi > 0$ e duas funções contínuas η_1, η_2 satisfazendo $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$ e $\eta_1(\varepsilon) < \eta_2(\varepsilon) < 0$ para $-\xi < \varepsilon < 0$ tal que para o parâmetro do setor definido por $-\xi < a_L < 0$ e $\eta_1(a_L) < b < \eta_2(a_L)$ o sistema (2-7) tem ao menos duas órbitas periódicas de costura para todas as possíveis dinâmicas da zona à direita.*

Prova. Suponha que $y > 0$, $a_L < 0$ e $b < 0$. Definimos a função

$$Q(y) = P_L(y) - P_R^{-1}(y),$$

onde os zeros desta função correspondem às órbitas periódicas. Assim, estudaremos a função

$$Q(y; a_L, b) = P_L(y : a_L) - P_R^{-1}(y; b) = 0 \tag{2-25}$$

com $y > 0$.

Da Proposição 2.7, as derivadas da função à direita de Poincaré $P_R(y)$ satisfazem as seguintes relações

$$P_R(b) = b, \quad P_R'(b) = -1, \quad P_R''(b) = -\frac{8\gamma_R}{3a_R} = -2\beta_2,$$

onde assumimos que a constante $\beta_2 > 0$ e utilizando o fato involutivo da aplicação de

Poincaré P_R desenvolvida em [8] e fazendo uma expansão de Taylor temos

$$P_R^{-1}(y;b) = b - (y-b) - \beta_2(y-b)^2 + \mathcal{O}(y-b)^3.$$

Para estudar as soluções em (2-25) vamos fazer o “blow-up”

$$a_L = -\varepsilon, \quad y = \varepsilon Y, \quad b = \varepsilon B.$$

Aplicando estes parâmetros na aplicação P_L da Proposição 2.5 no Item 2, temos que

$$P_L(\varepsilon Y; -\varepsilon) = \varepsilon P_L(Y; -1),$$

assim a equação (2-25) depois do “blow-up” toma-se

$$\varepsilon[F(Y;B) + \varepsilon G(Y,\varepsilon;B)] = 0, \tag{2-26}$$

onde

$$F(Y;B) = P_L(Y;-1) + Y - 2B$$

recolhe todos os termos de primeira ordem de ε de (2-26), e a função analítica $G(Y,\varepsilon;B)$ coleta as funções de ordem superior de ε de P_R^{-1}, com

$$G(Y,0;B) = \beta_2(Y-B)^2.$$

Vemos que da equação (2-26) para $\varepsilon \neq 0$ temos

$$F(Y;B) + \varepsilon G(Y,\varepsilon;B) = 0 \tag{2-27}$$

assim, se conhecemos os zeros da F também poderemos conhecer os zeros da função (2-26) da seguinte maneira: seja a equação

$$F(Y;B) = -\varepsilon G(Y,\varepsilon;B).$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita em Y e ε poderemos encontrar uma família de soluções $Y(\varepsilon;B)$ de (2-27) onde particularmente $Y(0,B) = \overline{Y_i}$, sendo $\overline{Y_i}$ $\;i = 1,2$ os zeros da função F. Para determinar os zeros de F definimos a função

$$H(Y) = P_L(Y;-1) + Y.$$

Podemos, da Proposição 2.4 no Item 5, saber que $H''(0) < 0$ em todo o domínio, e pela

Proposição 2.5 sabemos que

$$H(0) = -\alpha_0 < 0, \qquad H^{'}(0) = 1,$$

e

$$\lim_{Y\to\infty} H^{'}(Y) = 1 - e^{\gamma_L \pi} < 0.$$

Por tanto, a função H é uma função de valor real que começa com valores negativos, logo incrementa até um máximo e decresce até $-\infty$ quando $Y \to \infty$. De fato podemos calcular o valor máximo. Vemos que o único valor que $H^{'}(Y) = 0$ é $P_L^{'}(Y;-1) = -1$. De (2-16) podemos obter

$$P_L(Y;-1) = -Ye^{2\gamma_L t},$$

assim quando t representa o tempo de retorno, do item 2 da Proposição 2.5 temos que

$$\varphi_{\gamma_L}(t) = \varphi_{\gamma_L}(-t).$$

Desta maneira temos que

$$\begin{aligned}
1 - e^{\gamma_L t}(cos(t) - \gamma_L sen(t)) &= 1 - e^{-\gamma_L t}(cos(-t) - \gamma_L sen(-t)) \\
1 - e^{\gamma_L t}(cos(t) - \gamma_L sen(t)) &= 1 - e^{-\gamma_L t}(cos(t) + \gamma_L sen(t)) \\
cos(t)(e^{\gamma_L t} - e^{-\gamma_L t}) &= \gamma sen(t)(e^{\gamma_L t} + e^{-\gamma_L t}) \\
\frac{e^{\gamma_L t} - e^{-\gamma_L t}}{e^{\gamma_L t} + e^{-\gamma_L t}} &= \gamma_L \frac{sen(t)}{cos(t)} \\
tanh(\gamma_L t) &= \gamma_L tan(t)
\end{aligned}$$

a equação acima só tem solução em $(\pi, 2\pi)$ e é $t_M < 3\pi/2$. Substituindo este tempo na equação paramétrica de P_L na Proposição 2.5 temos

$$\max_{Y\geq 0} H(Y) = \frac{2\gamma_L}{\gamma_L^2 + 1}\left(\frac{senh(\gamma_L t_M)}{\gamma_L sen(t_M)} - 1\right) < 0.$$

Já que $F(Y;B) = H(Y) - 2B$, e com α_0 como acima, definimos

$$B_0 = -\frac{\alpha_0}{2}, \quad B_M = \frac{\gamma_L}{\gamma_L^2 + 1}\left(\frac{senh(\gamma_L t_M)}{\gamma_L sen(t_M)} - 1\right).$$

Assim podemos assegurar que para $B = (B_0, B_M)$ a função tem exatamente dois zeros $0 < \overline{Y_1} < \overline{Y_2}$ com

$$0 < H^{'}(\overline{Y_1}) < 1$$

e
$$1-e^{\gamma_L t} < H^{'}(\overline{Y_2}) < 0.$$

Além disso,
$$\frac{\partial F}{\partial Y}(\overline{Y_i};B) = H^{'}(\overline{Y_i}) \neq 0, \quad i=1,2,$$
então escolhendo $B \in (B_0, B_M)$, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita à equação (2-27), e assim concluir a existência de duas funções $Y_i(\varepsilon;B)$ com $Y_i(0;B)=\overline{Y_i}$, $i=1,2$ as quais definem a família de soluções propostas em (2-26) e (2-27).

Desfazendo o "blow up" concluirmos que equação (2-25) tem duas soluções de b é dizer $b=\eta_i(a_L)$, $i=1,2$ onde

$$\eta_1(a_L) = -B_0 a_L + \mathcal{O}(a_L^2),$$
$$\eta_2(a_L) = -B_M a_L + \mathcal{O}(a_L^2).$$

Assim, consequentemente, temos que a aplicação de Poincaré tem dois pontos fixos que são $y_1 = a_L\overline{Y_1}$ e $y_2 = a_L\overline{Y_2}$. Veja a Figura 2.4.

Por último concluímos que a estabilidade das órbitas periódicas depende de $H^{'}(\overline{Y_1})$, $i=1,2$, pois $Q^{'}(y)>0$ ($Q^{'}(y)<0$) em alguma solução de (2-25) teremos que $P^{'}(y)<1$ ($P^{'}(y)<1$) em alguma solução de (2-25) e estas dependem de $H^{'}$.

Com isto concluímos a demostração da Proposição. □

Prova.[Teorema2.8]
Da Proposição 2.9, para $a_L=b=0$ existe $\gamma_L>0$ tal que o sistema (2-7) tenha uma orbita periódica.

Agora uma vez selecionado o valor de $\gamma_L>0$ e de acordo com a Proposição 2.10 perturbando o valor a_L sobas condições $-\xi<a_L<0$ e $\eta_1(a_L)<b<\eta_2(a_L)$ o sistema (2-7) tem agora mais duas orbitas periódicas. Logo, o sistema perturbado tem ao minimo três ciclos limite. □

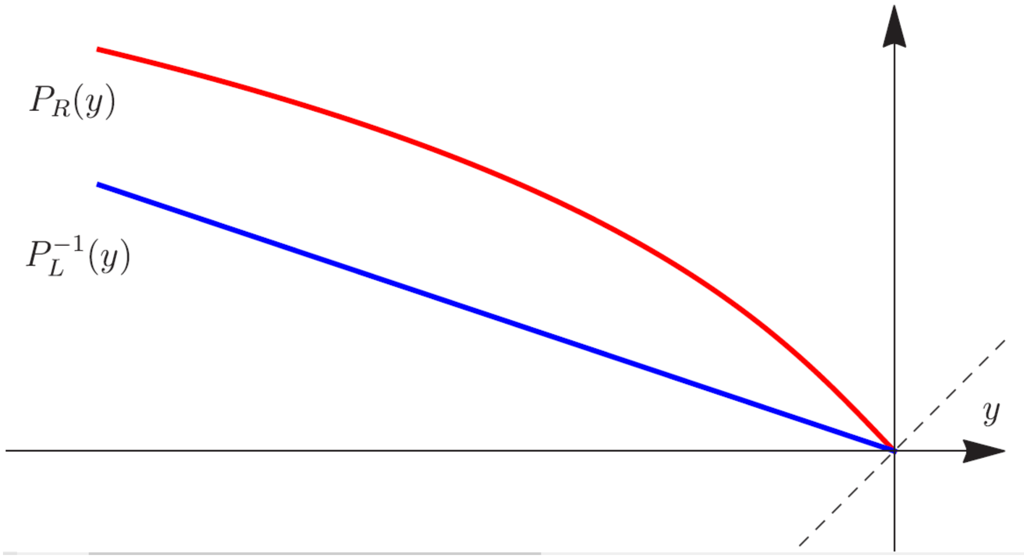

Figura 2.4: *Os dois pontos fixos da função $P(y)$ depois da perturbação que dão os dois ciclos limite.*

É importante saber que os três ciclos limites encontrados aqui não são uma cota superior para a quantidade de ciclos limites que podem se encontrar em um campo definido desta maneira. Encontrar uma quantidade maior ou provar que esta cota é máxima, é ainda um dos grandes problemas atualmente e, é de suma importância encontrar caminhos para resolvê-los. Nos seguintes capítulos vamos expor alguns caminhos que possam no futuro ser base para a resolução deste problema.

CAPÍTULO 3

Ciclos limites de campos polinomiais por parte

Nesse capítulo tralhamos em campos polinomiais por partes, definidos em muitas zonas. Os campos polinomiais são perturbações de um centro linear. Os resultados aqui expostos forem baseados no artigos [3], [10] e [2].

3.1 Introdução

É um fato já conhecido a importância de encontrar ciclos limite de um campo de vetores, muitas técnicas são utilizadas nesse intuito, uma das estratégias mais comuns nesse sentido é de perturbar um centro e estimar quantos ciclos limite podem surgir dessas perturbações.

Considere o campo polinomial

$$\chi(x,y) = (-y + \varepsilon P(x,y,\varepsilon), x + \varepsilon Q(x,y,\varepsilon)),$$

onde P e Q são polinômios e ε é suficientemente pequeno.

Buică, Giné e Libre em [2] estudarem o mesmo problema que Ilev em [10] para campos de vetores polinomiais, só que de esta vez os ciclos limites bifurcam-se de um centro não linear.

3.2 Ciclos limite de campo de vetores polinomiais por partes bifurcando de um centro descontínuo

O objetivo principal desta seção é estudar a quantidade de ciclos limite que podem se bifurcar do centro

$$\dot{x} = -y\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^m, \quad \dot{y} = x\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^m,$$

o qual é perturbado dentro da classe de campos de vetores polinomiais por partes de grau n em k partes sendo m o grau do centro

Mais precisamente vamos considerar o campo de vetores linear polinomial.

$$X = X(x,y) = \left(-y\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^m, x\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^m\right)$$

Se $m = 0$ temos um centro linear. Se $m \neq 0$ (m positivo centro não linear), temos um centro degenerado. Consideramos o campo suave por partes

$$X_\varepsilon = X_\varepsilon(x,y) = X(x,y) + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \chi_{S_i}(x,y)(P_i(x,y), Q_i(x,y)), \tag{3-1}$$

onde P_i, Q_i são polinômios de grau no máximo n, χ_K a função característica do conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ definida como:

$$\chi_K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in K \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin K, \end{cases}$$

e os conjuntos $S_1, \ldots, S_k$ satisfazem $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i} = \mathbb{R}^2$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Os conjuntos S_i satisfazem: para um número positivo k consideramos k ângulos $0 \leq \theta_1 < \ldots < \theta_k < 2\pi$. O conjunto de descontinuidade Σ para o campo de vetores polinomiais por partes X_ε é $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} L_i$ onde L_i é o raio começando da origem e passando pelo ponto $(cos(\theta_i), sen(\theta_i))$ para $i = 1, \cdots, k$. Veja na Figura 3.1.

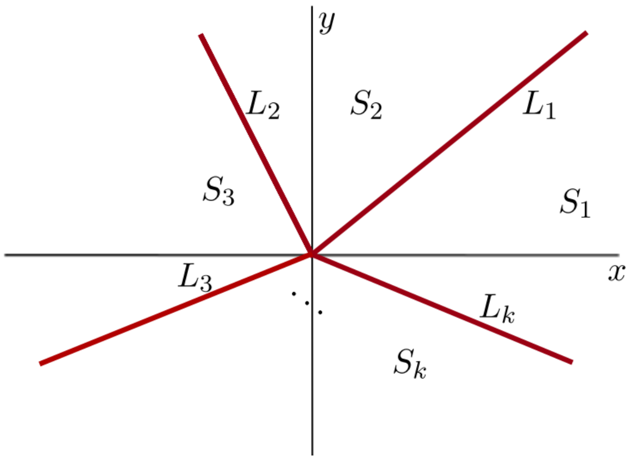

Figura 3.1: *S_i são respectivamente os interiores dos setores com fronteira nos raios L_{i-1} e L_i que vão de L_{i-1} até L_i no sentido anti-horário. Figura tomada de [3]*

A seguir apresentamos o principal resultado desse capítulo, que fornece uma cota inferior para o número máximo de ciclos limite para o campo suave por partes (3-1). Para demonstrar este resultado vamos precisar da teoria do Averaging que apresentaremos posteriormente ao Teorema.

Teorema 3.1 *: Assuma que a função de Averaging (3-2) (que se definirá posteriormente) de primeira ordem associada ao campo de vetores de polinômios descontinuo χ_ε é não nula. Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o máximo número de ciclos limite é n. Além disso esse limite é atingido.*

3.3 Teoria do Averaging em coordenadas polares

Vamos ver aqui a aplicação da teoria do Averaging para campos suaves por partes escrito em coordenadas polares. No mesmo contexto aplicaremos para (3-1). No entanto tais resultados são válidos para qualquer campo em $\mathbb{R}^2$.
Consideremos o seguinte campo suave por partes:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \chi(\theta,\rho) = \varepsilon F(\theta,\rho) + \varepsilon^2 R(\theta,\rho,\varepsilon),$$

onde $\rho \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ e

$$F(\theta,\rho) = \sum_{i=0}^{k} \chi_{s_i}(\theta) F_i(\theta,\rho),\ R(\theta,\rho,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(\theta) R_i(\theta,c,\varepsilon),$$

com $F_i : \mathbb{S}^1 \times D \to \mathbb{R}^2$, $R_i : \mathbb{S}^1 \times D \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \to \mathbb{R}^2$ para $i = 1,\dots,k$ são funções contínuas, de período 2π na variável θ, onde D é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.
Neste caso temos que S_i são os conjuntos abertos sobre os intervalos (θ_i,θ_{i+1}) para $i = 1,\dots,k$ e $0 \le \theta_i < \dots < \theta_k < 2\pi \le \theta_{k+1} = \theta_1 + 2\pi$ assim definimos;

$$D_\rho F(\theta,\rho)=\sum_{i=1}^{k}\chi_{s_i}(\theta,\rho)D_\rho F_i(\theta,\rho).$$

Então a função de Averaging $f : D \to \mathbb{R}^2$ é definida por:

$$f(\rho)=\int_0^T F(\theta,\rho)d\theta. \tag{3-2}$$

Recordemos que se $\rho(\theta,\rho_0)$ é a solução do campo de vetores $\chi(\theta,\rho)$ tal que $\rho(0,\rho_0)=\rho_0$ então temos que

$$\rho(2\pi,\rho_0)-\rho_0=\varepsilon=f(\rho)+\mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

O Teorema 3.2 a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [14], nos diz que considerando $\varepsilon>0$, suficientemente pequeno, os zeros simples da função Averaging $f(\rho)$ fornece ciclos limites do campo de vetores $\chi(\theta,\rho)$.

Teorema 3.2 *Assuma as seguintes hipóteses sobre o campo suave por partes* $\chi(\theta,\rho)$:

1. *para* $i=1,\dots,k$ *as funções* $F_i(\theta,\rho)$ *e* $R_i(\theta,\rho)$ *são localmente Lipschitzianas com respeito a* ρ*, e além disso são* $2\pi-$*periódicas com respeito a* θ.

2. *Seja* $\bar{\rho}\in D$ *um equilíbrio simples da função Averaging* $f(\rho)$.

Então para $\varepsilon>0$ *suficientemente pequeno, existe uma solução* $2\pi-$*periódica* $\rho(\theta,\varepsilon)$ *do campo de vetores* $\chi(\theta,\rho)$ *tal que* $\rho(0,\varepsilon)\to\bar{\rho}$ *quando* $\varepsilon\to 0$.

A seguir apresentaremos um exemplo da aplicação do Teorema 3.2.

Exemplo 3.3 *Consideremos a equação diferencial de Van der Pol*

$$\dot{x}+x=\varepsilon(1-x^2)\dot{x},$$

a qual podemos escrever como um campo de vetores suave

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x+\varepsilon(1-x^2)y.\end{cases}$$

Da mesma maneira podemos escrever o sistema em coordenadas polares (ρ,θ)*:*

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\varepsilon\rho(1-\rho^2cos^2(\theta))sen^2(\theta)\\ \dot{\theta}=-1+\varepsilon\theta(1-\rho^2cos^2(\theta))sen(\theta).\end{cases}$$

Agora escrevendo de novo a equação diferencial em termos da variável independente θ *e com a expansão de Taylor, temos:*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\varepsilon\rho(1-\rho^2 cos^2(\theta))sen^2(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Vemos que a fórmula acima está na forma padrão e podemos utilizar o Teorema 3.2. Tomando $x = r$, $t = \theta$, $T = 2\pi$ *e* $F(\rho,\theta) = -\rho(1-\rho^2 cos^2(\theta))sen^2(\theta)$, *temos que:*

$$f_1(\rho) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho(1-\rho^2 cos^2(\theta))sen^2(\theta)d\theta = \frac{1}{8}\rho(\rho^2-4).$$

Vemos que a única raiz positiva de $f_1(\rho)$ *é* $\rho = 2$, *assim pela afirmação do teorema se segue que o campo tem, para* $|\varepsilon| \neq 0$ *suficientemente pequeno, um ciclo limite bifurcando da orbita periódica de raio 2 do sistema não perturbado com* $\varepsilon = 0$.

3.4 Prova do Teorema 3.1

Os polinômios P_i e Q_i que aparecem na definição do campo de vetores χ_ε são dados por

$$P_i(x,y) = \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=s}^{n} a^i_{s,j-s}x^s y^{j-s}; \quad Q_i(x,y) = \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=s}^{n} b^i_{s,j-s}x^s y^{j-s}$$

para $i = 1,\ldots,k$. Fazendo a mudança de variáveis $(x,y) \mapsto (\theta,\rho)$, onde (θ,ρ) são as coordenadas polares $x = \rho cos(\theta)$ e $y = \rho sen(\theta)$ com $\rho > 0$. Assim a equação diferencial associada ao sistema χ_ε pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(cos(\theta)(\chi_{S_i}P_i)(\rho cos(\theta),\rho sen(\theta)) + sen(\theta)(\chi_{S_i}Q_i)(\rho cos(\theta),\rho sen(\theta)))\right] \\ \dot{\theta} = \dfrac{\rho^{2m}}{2^m} + \dfrac{\varepsilon}{\rho}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(cos(\theta)(\chi_{S_i}Q_i)(\rho cos(\theta),\rho sen(\theta)) - sen(\theta)(\chi_{S_i}P_i)(\rho cos(\theta),\rho sen(\theta))). \end{cases}$$

Tomando θ como uma variável independente, a equação acima, se escreve como:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon F(\theta,\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

onde $F(\theta,\rho)$ é dado por:

$$F(\theta,\rho) = \tfrac{2^m}{\rho^{2m}}\textstyle\sum_{i=1}^{k}(cos(\theta)(\chi_{S_i}P_i)(\rho cos(\theta),\rho sen(\theta)) + sen(\theta)(\chi_{S_i}Q_i)(\rho cos(\theta),\rho sen(\theta))).$$

Utilizando teoria da função Averaging temos a equação diferencial na forma requerida, e assim também temos que a função Averaging. É dada por:

$$f_n(\rho) = \int_0^{2\pi} F(\theta,\rho)d\theta$$

$$= \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (cos(\theta)P_i(\rho cos(\theta), \rho sen(\theta)) + sen(\theta)Q_i(\rho cos(\theta), \rho sen(\theta)))d\theta$$

$$= \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (cos(\theta) \sum_{s=0} \sum_{j=s} a^i_{s,j-s} \rho^j cos^s(\theta) sen^{j-s}(\theta)$$

$$+ sen(\theta) \sum_{s=0} \sum_{j=s} b^i_{s,j-s} \rho^j cos^s(\theta) sen^{j-s}(\theta))d\theta.$$

No seguinte lema provamos que a função de Averaging $f_n(\rho)$ é em geral uma combinação de funções linearmente independentes.

Lema 3.4 : *A função $f_n(\rho)$ é uma combinação linearmente independente de funções do conjunto $\mathcal{F} = \{\rho^{-2m}, \rho^{-2m+1}, \cdots, \rho^{-2m+n}\}$. Mais precisamente, $f_n(\rho) = \sum_{r=0}^{n} 2^m A_r \rho^{-2m+r}$ onde*

$$A_r = \sum_{i=1}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{s=0}^{r} (a^i_{s,r-s} cos^{s+1}(\theta) sen^{r-s}(\theta) + b_{s,r-s} cos^s(\theta) sen^{r+1-s}(\theta))d\theta,$$

para $r = 0, 1, \ldots, n$.

Prova. Note que $\mathcal{F}_n$ é um conjunto de funções linearmente independente. Vamos provar por indução sobre n, que a função $f_n(\rho)$ é uma combinação linearmente independente de funções do conjunto $\mathcal{F}_n$.

De fato se $n = 1$ temos que:

$$f_1(\rho) = 2^m \rho^{-2m}[A_0 + \rho A_1],$$

onde

$$A_0 = \sum_{i=0}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (a^i_{0,0} cos(\theta) + b^i_{0,0} sen(\theta))d\theta,$$

$$A_1 = \sum_{i=0}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (cos(\theta)(a^i_{0,1} sen(\theta) + a^i_{0,1} cos(\theta)) + sen(\theta)(b^i_{0,1} sen(\theta) + b^i_{0,1} cos(\theta)))d\theta.$$

Pela hipótese de indução temos que a função $f_{n-1}(\rho)$ é uma combinação linear de funçoẽs em $\mathcal{F}_{n-1}$. É dizer:

$$f_{n-1}(\rho) = \sum_{r=0}^{n-1} 2^m A_r \rho^{-2m+r},$$

onde

$$A_r = \sum_{i=1}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{s=0}^{r} (a^i_{s,r-s} cos^{s+1}(\theta) sen^{r-s}(\theta) + b_{s,r-s} cos^s(\theta) sen^{r+1-s}(\theta)) d\theta,$$

para $r = 0, 1, \ldots, n$. Agora para n, temos a função $f_n(\rho)$ desta maneira:

$$f_n(\rho) = \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (cos(\theta) \Sigma_{s=0} \Sigma_{j=s} a^i_{s,j-s} \rho^j cos^s(\theta) sen^{j-s}(\theta)$$

$$+ sen(\theta) \sum_{s=0} \sum_{j=s} b^i_{s,j-s} \rho^j cos^s(\theta) sen^{j-s}(\theta)) d\theta$$

$$f_n(\rho) = \frac{2^m}{\rho^{2m}} \sum_{i=1}^{k} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{j=s}^{n-1} a^i_{s,j-s} \rho^j cos^{s+1}(\theta) sen^{j-s}(\theta)$$

$$+ \sum_{s=0}^{n-1} a^i_{s,n-i} \rho^n cos^{s+1}(\theta) sen^{n-s}(\theta)$$

$$+ \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{j=s}^{n-1} b^i_{s,j-s} \rho^j cos^s(\theta) sen^{j-s+1}(\theta)$$

$$+ \sum_{s=0}^{n} b^i_{s,n-i} \rho^n cos^s(\theta) sen^{n+1-s}(\theta)) d\theta$$

$$= f_{n-1}(\rho) + \frac{2^m}{\rho^{2m-n}} \sum_{i=1}^{k} (\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\sum_{s=0}^{n} a^i_{s,n-s} cos^{s+1}(\theta) sen^{n-s}(\theta)$$

$$+ \sum_{s=0}^{n} b^i_{s,n-s} cos^s(\theta) sen^{n+1-s}(\theta)) d\theta)$$

$$= f_{n-1}(\rho) + 2^m \rho^{-2m+n} A_n.$$

Aplicando a hipótese de indução o Lema 3.4 fica demonstrado. □

Utilizando o Teorema de Descartes (Teorema 1.13), mostrado na teoria básica, temos que $f_n(\rho)$ pode ter ao máximo n zeros simples, e assim para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno χ_ε pode ter ao máximo n ciclos limites utilizando a teoria do Averaging. Além disso, novamente pelo Teorema de Descartes (Teorema 1.13) temos que existe uma escolha de coeficientes de maneira que $f_n(p)$ tenha exatamente n zeros simples, concluindo assim a prova do teorema.

3.5 Exemplos

Exemplo 3.5 *Consideramos inicialmente $m = 1$ e $n = 2$ no campo de vetores de polinômios por partes $\chi_\varepsilon(x,y)$ definido como:*

$$\left(-\frac{y}{2}(x^2+y^2), \frac{x}{2}(x^2+y^2)\right) + \begin{cases} (\varepsilon(1-x^2-xy+y^2), -\varepsilon y^2) & se\ (x,y) \in S_1 \\ \\ \left(-2\varepsilon y, -\varepsilon y\left(\frac{10}{3\pi}+\frac{3x}{2}\right)\right) & se\ (x,y) \in S_2. \end{cases} \tag{3-3}$$

Então a função de Averaging é $f_2(\rho) = (2\rho^2 - 10\rho + 12)/(3\rho^2)$, que tem dois zeros simples e positivos, 2 e 3. Assim temos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o campo de vetores descontinuo χ_ε tem dois ciclos limites $(x_i(t,\varepsilon), y_i(t,\varepsilon))$ para $i = 1, 2$ tal que eles tendem aos círculos de raio 2 e 3 quando $\varepsilon \to 0$.
Podemos ver o gráfico da função de Averaging f_2 na Figura 3.2.

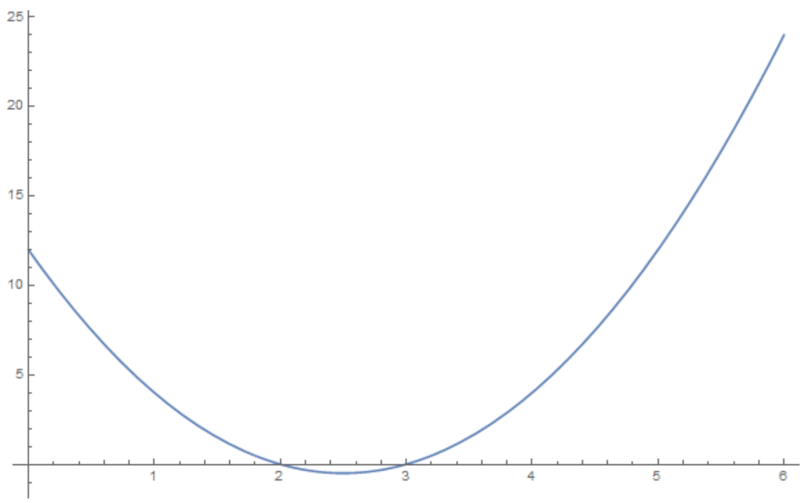

Figura 3.2: *Podemos ver que $\rho = 2$ e $\rho = 3$ são raízes simples de $f_2(\rho) = 2\rho^2 - 10\rho + 12$, os quais apresentam ciclos limite do campo (3-3)*

Exemplo 3.6 *Para $n = 3$ e $m = 1$ vamos considerar o campo de vetores de polinômios descontinuo $\chi_\varepsilon(x,y)$ definido como:*

$$\left(-\frac{y}{2}(x^2+y^2), \frac{x}{2}(x^2+y^2)\right) + \begin{cases} (\varepsilon(2+4xy+y^3), -4\varepsilon x) & se\ (x,y) \in S_1 \\ \left(6\varepsilon y, \varepsilon\left(-\frac{26y}{3\pi} - \frac{9xy}{4} - \frac{4x^2y}{3\pi}\right)\right) & se\ (x,y) \in S_2. \end{cases} \tag{3-4}$$

Então a função de Averaging é $f_3(\rho) = (-\rho^3+9\rho^2-26\rho+24)/(3\rho^2)$, que tem três zeros simples e positivos, 2, 3 e 4. Assim temos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o campo de vetores descontinuo χ_ε tem três ciclos limites $(x_i(t,\varepsilon), y_i(t,\varepsilon))$ para $i = 1,2,3$ tal que eles tendem aos círculos de raio 2, 3 e 4 quando $\varepsilon \to 0$.
Podemos ver função de Averaging f_3 na Figura 3.3.

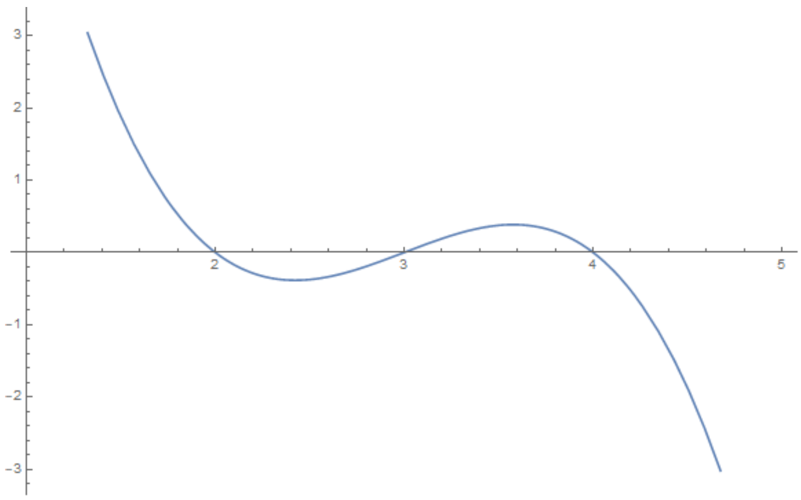

Figura 3.3: *Podemos ver que $\rho = 2,3,4$ são raízes simples de $f_3(\rho) = -\rho^3+\rho^2-26\rho+24$, os quais apresentam ciclos limite do campo (3-4).*

No capítulo seguinte trataremos de estudar ciclos limite para campos suaves por parte em um certo sentido mais geral. Assumimos que o campo é Hamiltoniano por partes e buscamos os ciclos limite. A principal técnica nesse casso são as funções de Melnikov.

CAPÍTULO 4

Campos de vetores Hamiltonianos por partes

Neste capítulo vamos estudar a teoria da bifurcação para campos Hamiltonianos, mais precisamente vamos definir os campos Hamiltonianos por partes e o sistema perturbado.

Consideramos o seguinte campo Hamiltoniano por partes:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \dot{x} = H_y^+(x,y) \\ \dot{y} = -H_x^+(x,y) \end{cases} \quad x \geq 0 \\
&\begin{cases} \dot{x} = H_y^-(x,y) \\ \dot{y} = -H_x^-(x,y) \end{cases} \quad x \leq 0
\end{aligned}
\tag{4-1}
$$

onde $H^{\pm} \in C^{\infty}$. Chamamos (4-1) de campos de vetores Hamiltoniano por partes (CHP) com a função Hamiltoniana:

$$
H(x,y) = \begin{cases} H^+(x,y), & x \geq 0 \\ H^-(x,y) & x \leq 0 \end{cases}
$$

Consideramos o campo de vetores Hamiltoniano por partes (4-2) perturbado, definido como:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \dot{x} = H_y^+(x,y) + \varepsilon f^+(x,y) \\ \dot{y} = -H_x^+(x,y) + \varepsilon g^+(x,y) \end{cases} \quad x \geq 0 \\
&\begin{cases} \dot{x} = H_y^-(x,y) + \varepsilon f^-(x,y) \\ \dot{y} = -H_x^-(x,y) + \varepsilon g^+(x,y) \end{cases} \quad x \leq 0
\end{aligned}
\tag{4-2}
$$

onde as funções $f^{\pm}, g^{\pm} \in C^{\infty}$ e são definidas da seguinte forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} f^+(x,y), & x \geq 0 \\ f^-(x,y) & x \leq 0, \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} g^+(x,y), & x \geq 0 \\ g^-(x,y) & x \leq 0. \end{cases}$$

Para poder fazer o estudo dos ciclos limite no campo de vetores Hamiltoniano por partes perturbado (4-2) é importante supor que o sistema (4-1) tem uma família de órbitas periódicas em uma vizinhança da origem. Dessa forma, assumimos que

1. Existe um intervalo J e dois pontos $A(n) = (0, a(n))$ e $A_1(h) = (0, a_1(h))$ de tal forma que:

$$H^+(A(h)) = H^+(A_1(h)) = h,$$
$$H^-(A(h)) = H^-(A_1(h))$$

   onde $a(h) \neq a_1(h)$.

2. O Sistema (4-1) para $x \geq 0$ tem um arco orbital L_h^+ começando em $A(h)$ e terminando em $A_1(h)$. Este arco orbital está definido pelo nível de energia da função Hamiltoniana $H^+(x,y) = h$ na região $x \geq 0$. Também para $x \leq 0$ o sistema (4-1) tem um arco orbital L_h^- começando em $A_1(h)$ e terminando em $A(h)$ definido por $H^-(x,y) = H^-(A_1(h))$, isto, na região $x \leq 0$.

Com as considerações acima sabemos que o sistema (4-1) tem uma família de órbitas periódicas $L_h = L_h^+ \cup L_h^-$ para $h \in J$. Cada uma das órbitas fechadas L_h é suave por partes. Podemos dizer sem perda de generalidade que L_h está orientada no sentido horário.

Definimos agora a função bifurcação $F(h,\varepsilon)$ associada ao sistema (4-2) da seguinte forma: considerando as órbitas do sistema começando em $A(h)$ e terminando em A_ε a qual denota a primeira interseção da curva no eixo y-negativo. Seja também B_ε a primeira interseção da curva começando em A_ε e terminando no eixo y-positivo, $A_\varepsilon = (0, a_\varepsilon(h)) e B_\varepsilon = (0, b_\varepsilon(h))$. Veja Figura 4.1

Através dos níveis de energia da função hamiltoniana e pela definição das funções $f^\pm, g^\pm$ e os pontos A_ε e B_ε, definimos a função de Poincaré dependendo dos níveis de energia:

$$H^+(B_\varepsilon) - H^+(A) = \varepsilon F(h,\varepsilon), \tag{4-3}$$

onde a função $F(h,\varepsilon)$ é também suave. Além disso, temos que o sistema (4-2) tem uma órbita periódica perto de L_{n_0} para $h_0 \in J$ se e somente se $B_\varepsilon = A$ para (h,ε) perto de $(h_0,0)$. Temos então que esta órbita isolada é então um ciclo limite no sistema.

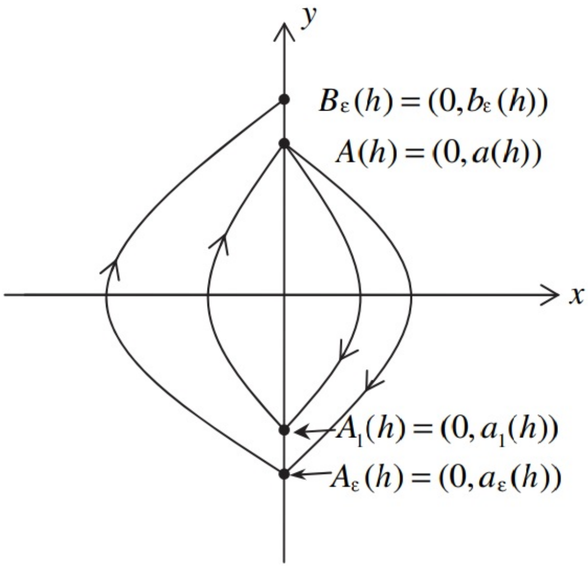

Figura 4.1: *Descrição do sistema de orbitas periódicas para o campo Hamiltoniano perturbado*

Podemos assumir isso no seguinte resultado:

Lema 4.1 *Para $|\varepsilon|$ pequeno e $h \in J, F \in C^\infty$, o sistema (4-2) tem uma solução periódica perto de L_{h_0} para $h_0 \in J$ se e somente se F tem um zero em h perto de h_0.*

4.1 Expressão geral da função de Melnikov

Depois da caracterização do campo de vetores hamiltonianos suaves por partes e da descrição de como encontrar ciclos limites, encontramos como ferramenta principal a função de Melnikov. Agora, nesta seção mostramos a expressão geral para esta função

Teorema 4.2 *Assumimos que o sistema (4-2) satisfaça as condições 1. e 2. Assim então a função de Melnikov associada é*

$$M(h) = \frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)} \left[\frac{H_y^-(A_1)}{H_y^+(A_1)} \int_{\widehat{AA_1}} g^+dx - f^+dy + \int_{\widehat{A_1A}} g^-dx - f^-dy \right],$$

onde $M : J \to J$. Além disso, se $M(h_0) = 0$ e $M^{'}(h_0) \neq 0$ para algum $h_0 \in J$, então para $|\varepsilon|$ pequeno o sistema (4-2) tem um único ciclo limite perto de L_{h_0}. Se h_0 é um zero de

$M(h)$ tendo uma multiplicidade impar, então para $|\varepsilon|$ pequeno o sistema (4-2) tem ao menos um ciclo limite perto de L_{h_0}.

Prova. Considere (4-3). Podemos sem perder generalidade reescrever a função em quatro partes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H^+(B_\varepsilon) - H^+(A) =& [H^+(B_\varepsilon) - H^-(B_\varepsilon)] + [H^-(B_\varepsilon) - H^+(a_\varepsilon)] \\ &+ [H^-(A_\varepsilon) - H^+(A_\varepsilon)] + [H^+(A_\varepsilon) - H^-(A)] \\ &\equiv l_1 + l_2 + l_4 + l_4. \end{aligned}$$

Pelo Teorema fundamental do Cálculo temos que

$$\begin{aligned} l_4 =& [H^+(A_\varepsilon) - H^+(A)] \\ =& \int_{\widehat{AA_\varepsilon}} dH^+ \\ =& \int_{\widehat{AA_\varepsilon}} H_x^+ dx + H_y^+ dy. \end{aligned}$$

Do sistema (4-2) onde $\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ podemos trocar dx e dy na equação acima, e assim obtemos:

$$l_4 = \int_{\widehat{AA_\varepsilon}} [H_x^+(H_y^+ + \varepsilon f^+) + H_y^+(-H_x^+ + \varepsilon g^+)]dt$$

$$= \int_{\widehat{AA_\varepsilon}} \varepsilon [H_x^+ f^+ + H_y^+ g^+] dt.$$

Do sistema (4-2) podemos também resolver H_x^+ e H_y^+

$$l_4 = \int_{\widehat{AA_\varepsilon}} \varepsilon \left[\left(\varepsilon g^+ - \frac{dy}{dt} \right) + \left(\frac{dx}{dt} - f^+ \right) \right] dt$$

$$= \varepsilon \left[\int_{\widehat{AA_\varepsilon}} g^+ dx - f^+ dy \right].$$

Dividindo as integrais podemos fazer

$$l_4 = \varepsilon \left[\int_{\widehat{AA_\varepsilon}} g^+ dx - f^+ dy + \mathcal{O}(\varepsilon) \right].$$

Logo, temos que,

$$\left. \frac{\partial l_4}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\widehat{AA_\varepsilon}} g^+ dx - f^+ dy. \tag{4-4}$$

Por outro lado temos que $H^+(A_\varepsilon) - H^+(A)$ e $A_\varepsilon = (0, a_\varepsilon(h)) = (0, a_1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$. Assim obtemos,

$$\frac{\partial l_4}{\partial \varepsilon} = H_y^+(A_\varepsilon)\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}H^+(A) = H_y^+((0, a_1(h) + \mathcal{O}(\varepsilon)))\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}.$$

Logo, fazendo $\varepsilon = 0$

$$\left.\frac{\partial l_4}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = H_y^+(A_1)\left.\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Então pela equação (4-4) temos que,

$$\left.\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\int_{\widehat{AA_\varepsilon}} g^+ dx - f^+ dy}{H_y^+(A_1)}. \tag{4-5}$$

Da mesma forma que para l_4 fazemos para l_2,

$$\begin{aligned} l_2 &= [H^-(B_\varepsilon) - H^-(A_\varepsilon)] \\ &= \int_{\widehat{A_\varepsilon B_\varepsilon}} dH^- \\ &= \int_{\widehat{A_\varepsilon B_\varepsilon}} H_x^- dx + H_y^- dy \\ &= \varepsilon\left[\int_{\widehat{A_1 A}} g^- dx - f^- dy + O(\varepsilon)\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left.\frac{\partial l_2}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{\widehat{A_1 A}} g^- dx - f^- dy. \tag{4-6}$$

Igualmente tendo $H^-(B_\varepsilon) - H^-(A_\varepsilon)$, com $A_\varepsilon = (0, a_\varepsilon) = (0, a_1 + \mathcal{O}(\varepsilon))$ e $B_\varepsilon = (0, b_\varepsilon) = (0, a + \mathcal{O}(\varepsilon))$ temos

$$\left.\frac{\partial l_2}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = H_y^-(A)\left.\frac{\partial b_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} - H_y^-(A_1)\left.\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Das equações (4-5) e (4-6) temos

$$\left.\frac{\partial b_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{H_y^-(A)}\int_{\widehat{A_1 A}} g^- dx - f^- dy + \frac{H_y^-(A_1)}{H_y^-(A)H_y^+(A_1)}\int_{\widehat{AA1}} g^+ dx - f^+ dy. \tag{4-7}$$

Também por $l_3 = H^+(A_\varepsilon) - H^+(B_\varepsilon)$, e como $A_\varepsilon = (0, a_\varepsilon)$ por (4-5),

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial l_3}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= [H_y^-(A_1) - H_y^+(A_1)] \left.\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left(\frac{H_y^-(A_1)}{H_y^+(A_1)} - 1\right) \int_{\widehat{AA_1}} g^+ dx - f^+ dy. \end{aligned} \tag{4-8}$$

Agora então, por $l_1 = H^+(B_\varepsilon) - H^-(B_\varepsilon)$ temos

$$\left.\frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = [H_y^+(A) - H_y^-(A)] \left.\frac{\partial b_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Pela equação (4-7) temos,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \left(\frac{H_y^+}{H_y^-} - 1\right) \int_{\widehat{A_1A}} g^- dx - f^- dy \\ &+ \left(\frac{H_y^+(A)H_y^-(A_1)}{H_y^-(A)H_y^+(A_1)} - \frac{H_y^-(A_1)}{H_y^+(A_1)}\right) \int_{\widehat{AA_1}} g^+ dx - f^+ dy. \end{aligned} \tag{4-9}$$

Assim pela equação (4-3) temos que:

$$H^+(B_\varepsilon) - H^+(A) = (M(h) + \mathcal{O}(\varepsilon)),$$

isto também pelo fato de que $M(h) = F(h, 0)$. Derivando temos que

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(H^+(B_\varepsilon) - H^+(A)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = M(h).$$

Assim substituindo (4-4), (4-6), (4-8) e (4-9) temos

$$M(h) = \sum_{j=1}^{4} \left.\frac{\partial l_j}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

como

$$\left.\left(\frac{\partial l_3}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial l_4}{\partial \varepsilon}\right)\right|_{\varepsilon=0} = \frac{H_y^-(A_1)}{H_y^+(A_1)} \left[\int_{\widehat{AA_1}} g^+ dx - f^+ dy\right]$$

e

$$\left(\frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial l_2}{\partial \varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)}\int_{\widehat{AA_1}} g^-dx-f^-dy$$

$$+\left(\frac{H_y^+(A)H_y^-(A_1)}{H_y^-(A)H_y^+(A_1)}-\frac{H_y^-(A_1)}{H_y^+(A_1)}\right)\int_{\widehat{AA_1}} g^+dx-f^+dy,$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} M(h)=\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial l_j}{\partial \varepsilon}&=\frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)}\int_{\widehat{AA_1}} g^-dx-f^-dy+\frac{H_y^+(A)H_y^-(A_1)}{H_y^-(A)H_y^+(A_1)}\int_{\widehat{AA_1}} g^+dx-f^+dy\\ &=\frac{H_y^+(A)}{H_y^-(A)}\left[\frac{H_y^-(A_1)}{H_y^-(A_1)}\int_{\widehat{AA_1}} g^+dx-f^+dy+\int_{\widehat{A_1A}} g^-dx-f^-dy\right], \end{aligned} \tag{4-10}$$

que é a expressão da função de Melnikov nesse casso. □

Agora se aplicamos a fórmula de Green temos:

$$\int_{\widehat{A_1A}} g^+dx-f^+dy=\iint_{int(\widehat{AA_1}\cup\overrightarrow{A_1A})}(f_x^+ +g_y^+)dxdy+\int_{\overrightarrow{A_1A}} f^+(0,y)dy\equiv M^+(h).$$

$$\int_{\widehat{A_1A}} g^-dx-f^-dy=\iint_{int(\widehat{A_1A}\cup\overrightarrow{AA_1})}(f_x^- +g_-^{\pm})dxdy+\int_{\overrightarrow{AA_1}} f^-(0,y)dy\equiv M^-(h).$$

Daí, temos que a equação (4-10) pode ser escrita como:

$$M(h)=\frac{H_y^+}{H_y^-}\left[\frac{H_y^-}{H_y^+}M^+(h)+M^-(h)\right]. \tag{4-11}$$

No Teorema 4.2 podemos ver de forma geral o desenvolvimento da função $M(h)$. A seguir apresentaremos a expansão de $M(h)$ em série de potencias em uma vizinhança da origem. Fazemos isso com o intuito de estudar os zeros da função. Para isto vamos considerar que o sistema (4-1) que tem um centro elementar na origem, i.e, suponhamos que:

$$\begin{aligned} &H_x^{\pm}(0,0)=H_y^{\pm}=0,\\ &det\frac{\partial(H_y^{\pm},-H_x^{\pm})}{\partial(x,y)}(0,0)>0. \end{aligned} \tag{4-12}$$

4.2 Expressão pontual da função de Melnikov

Já tendo a expressão geral da função de Melnikov e com a intenção de encontrar ciclos limites a partir da perturbação de campos Hamiltonianos, se faz indispensável o desenvolvimento da função $M(h)$ no ponto $h = 0$. Assim então temos:

Teorema 4.3 *Assumimos que $f^{\pm}(0,0) = g^{\pm} = 0$,em (4-2) e as hipóteses dadas em (4-12), as considerações (1), (2) feitas acima, e com equação (4-12) com $J = (0,\beta)$, $\beta > 0$. Então existe uma C^{∞} função $N(r) = r\mathcal{O}(r)$ para $0 < r \ll 1$ tal que $M(h) = N(\sqrt{h})$. formalmente $M(h) = \sqrt{h}\sum_{j\leq 1} b_i h^{\frac{1}{2}}$, onde os b_i são coeficientes independentes de h.*

Prova.
Seja $A(h) = (0, a(h)) = (0, y_0)$ como nas definições anteriores, e com $y_0 > 0$, com $J = (0,\beta)$ e com a condição (4-12) temos que as funções $H^{\pm}$ são positivas perto da origem. Então tendo $H^+(A(h)) = h$ temos pela expansão de Taylor que

$$H^+(0,y_0) = H_y^+(0,0)y_0 + \frac{H_{yy}^+(0,0)}{2!}y_0^2 + \frac{H_{yyy}^+(0,0)}{3!}y_0^3 + \cdots$$

Fazendo $\frac{H_{yy}^+(0,0)}{2!} = b$, e como $H^+(0,0) = 0$ e $H_y^+(0,0) = 0$ podemos rescrever a função como

$$H^+(0,y_0) = by_0^2 + \sum_{j\geq 3} h_{0j}^+ y_0^j = h \quad b > 0.$$

Fatorando temos

$$y_0\left(1 + \frac{1}{b}\sum_{j\geq 3} h_{0j}^+ y_0^{j-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{h}{b}}.$$

Desta forma podemos rescrever a função

$$f(\sqrt{h},y_0) = y_0\left(1 + \frac{1}{b}\sum_{j\geq 3} h_{0j}^+ y_0^{j-2}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{h}{b}} = 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita e com $\frac{d}{dy_0}f(\sqrt{h},y_0)$. Podemos obter uma função $\phi_0(\sqrt{h})$ tal que $f(h,\phi_0(\sqrt{h}) = 0$. Utilizando a expansão de Taylor podemos escrever esta função como

$$y_0 = \phi_0(\sqrt{h}) = \sqrt{\frac{h}{b}} + \sum_{i\geq 2} e_i h^{\frac{i}{2}}, \tag{4-13}$$

onde os coeficientes e_i dependem somente de h_{0j}^+ e b.

Fazendo o mesmo processo com os pontos $A_\varepsilon(h)$ e B_ε podemos obter respectivamente as funções $\phi(y_0,\varepsilon)$ e $\psi(y_0,\varepsilon)$ e assim então $a_\varepsilon(h) = \phi(y_0,\varepsilon)$ e $b_\varepsilon(h) = \psi(y_0,\varepsilon)$. Daí, temos que $\phi(y_0,0) = y_0$ pois $a_\varepsilon(h)|_{\varepsilon=0} = a(h)$. Assim podemos introduzir a seguinte função de distancia:

$$d(y_0,\varepsilon) = \psi(y_0,\varepsilon) - y_0 = \varepsilon\bar{d}(y_0,\varepsilon),$$

onde $\bar{d}$ é C^∞ em (y_0,ε) para $|\varepsilon|+|y_0|$ pequeno. Assim, seja

$$H^+(0,\psi(y_0),\varepsilon)-H^+(0,y_0).$$

Pelo Teorema do Valor Médio

$$H^+(0,\psi(y_0),\varepsilon)-H^+(0,y_0)=\int_0^1 H_y^+(0,y_0+s\varepsilon\bar{d}(y_0,\varepsilon))ds\varepsilon\bar{d}(y_0,\varepsilon)$$

Assim pelas equações (4-3) e (4-13) temos que

$$\varepsilon F(h,\varepsilon)=\varepsilon\int_0^1 H_y^+(0,y_0+s\varepsilon\bar{d}(y_0,\varepsilon))ds\bar{d}(y_0,\varepsilon)$$

$$F(h,\varepsilon)=\int_0^1 H_y^+(0,y_0+s\varepsilon\bar{d}(y_0,\varepsilon))ds\bar{d}(y_0,\varepsilon)$$

$$\equiv\hat{F}(y_0,\varepsilon).$$

obtemos da equação anterior e de (4-3) que

$$M(h)=F(h,0)=\hat{F}(y_0,0)$$

$$=H_y^+(0,y_0)\bar{d}(y_0,0)\equiv\phi(\bar{y}_0).$$

Substituindo (4-13) na equação anterior temos que

$$M(h)=\bar{\phi}(\phi_0(\sqrt{h})),$$

de onde consideramos que $M(h)$ é uma expanção de Taylor da forma (4-13), na ordem de h,

$$M(h)=N(\sqrt{h})$$

onde N é C^∞. □

4.3 Exemplos

Exemplo 4.4 *Considere o seguinte campo polinomial por partes*

$$\begin{cases} \dot{x} = b^+ y + \varepsilon \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}^+ x^i y^j, \\ & x > 0. \\ \dot{y} = -b^+ x + \varepsilon \sum_{i+j}^{n} b_{ij}^+ x^i y^j,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = b^- y + \varepsilon \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}^- x^i y^j, \\ & x \leq 0. \\ \dot{y} = -b^- x + \varepsilon \sum_{i+j}^{n} b_{ij}^- x^i y^j \end{cases}$$

onde $b^{\pm} >$. Então a maior quantidade de zeros da função de Melnikov $M(h)$ é n para $n \neq 0$.

De fato, temos $H^+(x,y) = \frac{b^+(x^2+y^2)}{2}$ para $x > 0$ e $H^-(x,y) = \frac{b^-(x^2+y^2)}{2}$ para $x \leq 0$. Pela hipótese 2 do inicio, temos que, $A(h) = (0, \sqrt{\frac{2h}{b^+}})$ e $A_1 = (0, -\sqrt{\frac{2h}{b^+}})$ assim então segue se do Teorema 4.2 que

$$M(h) = \int_{\widehat{AA_1}} \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij}^+ x^i y^j dx - \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}^+ x^i y^j dy + \frac{b^+}{b^-} \int_{\widehat{A_1A}} \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij}^- x^i y^j dx - \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}^- x^i y^j dy.$$

Sendo $x = \sqrt{\frac{2h}{b^+}} cos(\theta)$, $y = \sqrt{\frac{2h}{b^+}} sen(\theta)$, temos

$$M(h) = \sum_{i+j=0}^{n} \left(\frac{2h}{b^+}\right)^{\frac{i+j+1}{2}} \left[\left(-b_{ij}^+ + (-1)^{i+j} \frac{b^+}{b^-} b_{ij}^-\right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} cos^i(\theta) sen^{j+1}(\theta) d\theta \right.$$
$$\left. - \left(a_{ij}^+ + (-1)^{i+j+1} \frac{b^+}{b^-} a_{ij}^-\right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} cos^{i+1}(\theta) sen^j(\theta) d\theta \right].$$

Desta forma, fazendo os cálculos obtemos

$$M(h) = \sqrt{h}(A_0 + A_1\sqrt{h} + A_2(\sqrt{h})^2 + \ldots + A_n(\sqrt{h})^n),$$

onde A_i depende dos coeficientes do sistema acima. Vemos então que com o Teorema de Descartes podemos, escolhendo adequadamente os coeficientes ter ao máximo n ciclos limite.

Exemplo 4.5 *Considere um sistema suave por partes com uma perturbação linear por* *partes da seguinte forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon P_1(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \geq 0, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon P_2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \leq 0, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

onde

$$p_1(x) = \begin{cases} 5x & x \in (0,1], \\ 5x-4 & x \in (0,\infty), \end{cases}$$

e

$$p_2(x) = 2 - x,$$

Então o sistema admite três ciclos limite para $\varepsilon > 0$

De fato, quando $\varepsilon = 0$*, a função Hamiltoniana do sistema é*

$$x^2 + y^2 = 2h.$$

Seja $A = (0, \sqrt{2h})$ *e* $A_1 = (0, -2\sqrt{2h})$ *para* $\sqrt{2h} \leq 1$*, usando*

$$x = \sqrt{2h}cos(\theta), \qquad y = \sqrt{2h}sen(\theta),$$

obtemos

$$\begin{aligned} M(h) &= -\int_{\widehat{AA_1}} p_1(x)dy - \int_{\widehat{A_1A}} p_2(x)dy. \\ &= -\int_{\sqrt{2h}}^{-\sqrt{2h}} 5xdy - \int_{-\sqrt{2h}}^{\sqrt{2h}} (2-x)dy \\ &= \int_{-\sqrt{2h}}^{\sqrt{2h}} 5\sqrt{2h-y^2} - \int_{-\sqrt{2h}}^{\sqrt{2h}} (2 + \sqrt{2h-y^2}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$M(h) = 4(\pi h - \sqrt{2h}). \tag{4-14}$$

Para $\sqrt{2h} > 1$, *seja* $\theta_1 = (0, \pi/2)$ *com* $cos(\theta_1) = 1/\sqrt{2h}$. *Temos*

$$M(h) = -\int_{\widehat{AA_1}} p_1(x)dy - \int_{\widehat{A_1A}} p_2(x)dy$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2h}cos(\theta)p_1(\sqrt{2h}cos(\theta))d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2h}cos(\theta)p_2(\sqrt{2h}cos(\theta))d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2h}cos(\theta)p_1(\sqrt{2h}cos(\theta))d\theta - \pi h - 4\sqrt{2h}$$

$$= 2\left[\int_0^{\theta_1} \sqrt{2h}cos(\theta)(5\sqrt{2h}cos(\theta)-4)d\theta + 5\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} 2hcos^2(\theta)d\theta\right]$$

$$= 2\left[5\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2hcos^2(\theta)d\theta - 4\int_0^{\theta_1} \sqrt{2h}cos(\theta)d\theta\right] - \pi h - 4\sqrt{2h}$$

$$M(h) = 4(\pi h - 2\sqrt{2h-1} - \sqrt{2h}). \tag{4-15}$$

De (4-14) e (4-15), temos

$$M(h) = \begin{cases} 4(\pi h - \sqrt{2h}), & 0 < h \le \frac{1}{2}, \\ \\ 4(\pi h - 2\sqrt{2h-1} - \sqrt{2h}), & h > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Com ajuda do software Maple, encontramos que a função $M(h)$ *tem três zeros positivos* $h_1 \in (0, \frac{1}{2})$ *e* $h_2.h_3 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ *com*

$$h_1 = \frac{1}{\pi^2} \approx 0.2026423672, \quad h_2 = 0.5623206104, \quad h_3 = 1.359655126.$$

Dessa forma temos também três os ciclos limites.

CAPÍTULO 5

Conclusões

Esta dissertação foi motivada pela investigação atual em sistemas dinâmicos do 16° Problema de Hilbert. Este problema que foi proposto em 1900 e que questiona sobre a quantidade máxima de ciclos limites em sistemas diferenciais polinomiais no plano, motiva pesquisas na identificação e caracterização de ciclos limites agora, em campos suaves por partes. Atualmente as pesquisas estão se particularizando a diferentes sistemas suaves por partes e gerando múltiplos resultados. É como objetivo geral deste trabalho de dissertação o estudo da obtenção de ciclos limites em campos suaves por partes, particularmente em três trabalhos [6], [3] e [13], e tem como objetivos específicos descrever e especificar cada método, provendo assim informação útil no estudo das cotas dos ciclos limites em campos suaves por partes.

Para cumprir o objetivo desta dissertação estudamos diferentes artigos, livros e publicações que conforme ao desenvolvimento do trabalho forem citados e que são um contexto geral do tema encontrada na bibliografia do trabalho. Além disso, a partir deste trabalho participamos na IX Oficina de Sistemas Dinâmicos (UFABC, São Bernardo do Campo) e forem apresentados alguns resultados também no grupo de pesquisa de sistemas dinâmicos na UFG.

No Capítulo 2 foi desenvolvido um mecanismo geral para encontrar ciclos limites em campos suaves por partes. Aí, o primeiro enfoque foi a caracterização das duas zonas no plano através da forma canônica de Liénard e da forma canônica normalizada. A forma canônica de Liénard fornece um homeomorfismo muito interessante entre o sistema original (2-1) e um sistema com menos parâmetros (2-2), o que é, para fins práticos, uma excelente ferramenta. Além disso, este sistema é uma equivalência topológica para todos os pontos dos campos suaves, menos, nos pontos de deslize entre os pontos (o,b) e $(0,0)$, sendo um problema ao querer utilizar este homeomorfismo neste conjunto. A forma canônica normalizada é, por outro lado uma continuação do sistema anterior no qual se preservam as propriedades anteriormente mencionadas, tendo como objetivo principal a caracterização das zonas com cinco variáveis principais: m, $a_{R,L}$ e $\gamma_{R,L}$, as quais descrevem perfeitamente o tipo de zona desejada, fazendo deste, um resultado importante para os objetivos de nosso trabalho. No segundo enfoque deste capítulo o objeto de estudo foi a aplicação de Poincaré. Neste caso, a partir dos resultados prévios se descreveu a aplicação de primeiro retorno de todas as configurações nas duas zonas suaves. Uma das grandes vantagens desta descrição foi a caracterização independente do tempo. Muitos resultados das Proposições 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 forem encontrados sem precisar do cálculo do tempo, isto é uma descrição que para pesquisas nesse tema pode ser uma fermenta importante. É preciso ressaltar também a quantidade de propriedades descritivas obtidas da função de Poincaré com suas derivadas, isto para fins praticoss pode ser também de grande importância. No último tópico se juntarem todos os resultados principais para encontrar na Proposição 2.9 e na Proposição 2.10 um e dois ciclos limite respectivamente, que no teorema principal obtemos 3 ciclos limite. Cabe ressaltar que estes 3 ciclos limite não são uma cota máxima para este tipo de campo suave por parte.

O terceiro capítulo se estuda partindo de um contexto histórico muito importante: encontrar ciclos limites em campos suaves perturbando um centro por polinômios. Começa em 1999 com [10], onde um centro linear é perturbado, e continua com o estudo de [2] em 2010 que perturba um centro não linear também com polinômios. É até o desenvolvimento da teoria dos campos suaves por partes no trabalho [3] onde se estuda os ciclos limite em campos suaves por partes de um centro não linear sendo perturbado por polinômios.

Na primeira parte do capítulo fazemos uma descrição do campo definindo as k- partes suaves que vão ser perturbadas e como os resultados vão se manter, para a descrição utilizamos as coordenadas polares. Na segunda parte do capítulo descrevemos o sistema de forma que podamos utilizar a teoria de Averaging ou promédio para assim encontrar os ciclos limite. Para este fim utilizamos um dos resultados mais interessantes do capítulo, o Lema 3.4, aí reescreveremos a função do promédio descrita em termos de coordenadas polares como uma função de n partes onde n é o grau maior dos polinômios de perturbação. Assim podemos encontrar n ciclos limite, fazendo uso da teoria do Averaging. Cabe ressaltar que o resultado mais surpreendente deste capítulo é conhecer que a quantidade de ciclos limites que se bifurcam da perturbação de um centro não linear não depende da quantidade de regiões escolhidas, senão depende do maior grau do polinômio de perturbação, isto com fins investigativos é muito importante em nosso trabalho.

No quarto capítulo estudamos no trabalho [13] os campos Hamiltonianios suaves por partes e a bifurcação de ciclos limite. Na primeira parte do capítulo descrevemos os campos Hamiltonianos em campos suaves por partes e a perturbação por quaisquer função $C^r, r \geq 1$. Esta definição generaliza um pouco os campos suaves por parte sendo de muita importância ao nosso objetivo. Na segunda parte do capítulo descrevemos a função de Melnikov do sistema Hamiltoniano suave por partes e introduzimos uma caracterização geral da função de Melnikov. Na última parte mostramos uma descrição pontual da função de Melnikov para $h = 0$ onde mostramos o desenvolvimento da função em termos de funções linearmente independentes que junto com o Teorema de Descartes proposto na teoria básica nos fornece ciclos limite. Ressaltamos deste capítulo o fato de que podemos tirar muitas generalizações, as quais são de fundamental importância nas motivações do trabalho, também como nos capítulos anteriores, este método não fornece cotas superiores, mas introduze generalizações de campos que podem ser um ponto de partida para o estudo.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRONOV, A. **Les cycles limites de poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues**. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189:559–561, 1929.

[2] BUICĂ, A.; GINÉ, J.; LIBRE, J. **Bifurcation of limit cycles from a polynomial degenerate center**. *Adv. Nonlinear Stud.*, 10(3):597–609, 2010.

[3] DE CARVALHO, T.; LLIBRE, J.; TONON, D. J. **Limit cycles of discontinuous piecewise polynomial vector fields**. *Science Direct*, 449:572–579, 2010.

[4] FILIPPOV, A. **Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht,, 1988.

[5] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. **Canonical discontinuous planar piecewise linear systems**. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11:181–211, 2014.

[6] FREIRE, E.; PONCE, E.; TORRES, F. **A general mechanism to generate three limit cycles in planar filippov systems with two zones**. *Springer Science*, 78:251–263, 2014.

[7] GROBMAN. **Homeomorphisms of systems of differential equations**. *Dokl. Akad. Nauk*, 128, 1959.

[8] GUÁRDIA, M.; SEARA, T.; TEIXEIRA, M. A. **Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems**. *Science Direct*, 250:1967–2023, 2011.

[9] HARTMAN, P. **A lemma in the theory structural stability of differential equations**. *Amer. Math Soc*, 11, 1960.

[10] ILIEV, I. **The number of limit cycles due to polynomial perturbations of the harmonic oscillator**. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 127(2):317–322, 1999.

[11] LIÉNARD, A. **Etude des oscillations entretenues**. *Rev. Gén. électrl*, 23:901–912, 1928.

[12] LIMA, E. L. **Curso de Analise Vol 2**. Sosiedade Matematica Brasileira, Rio de Janeiro, 1979.

[13] LIU, X.; HAN, M. **Bifurcation of limit cycles by perturbing piecewise hamiltonian systems**. *World Scientific*, 20:1379–1390, 2010.

[14] LLIBRE, J.; MEREU, A.; NOVAES, D. **Averaging theory for discontinuous piecewise differential systems**. *J. Differential Equations*, 258:4007–4032, 2015.

[15] PALIS, J.; DE MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, 1978.

[16] PEIXOTO, M. C.; PEIXOTO, M. **Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions**. *Acad. Bras. das Ciências*, 31, 1959.

[17] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer, Pasadena, 2000.

[18] POINCARÉ, H. **Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle**. *Math. Pures Appl*, 7:375–422, 2014.

[19] SMALE, S. **Differentiable dynamical systems**. *Amer. Math Soc*, 73, 1967.

[20] SOTOMAYOR, J. **Liçoes de equações diferenciais ordinárias**. Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[21] ZHIDKOV, B. **Computing Methods**. Pergamon Press, Oxford, 1964.