UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

PAULO JÚNIO DE OLIVEIRA

AS BASES DO INTUICIONISMO MATEMÁTICO DE BROUWER

A NATUREZA DO CONTINUUM INTUICIONISTA

GOIÂNIA-GO

2021

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[ ] Dissertação [x] Tese

2. Nome completo do autor

PAULO JÚNIO DE OLIVEIRA

3. Título do trabalho

"AS BASES DO INTUICIONISMO MATEMÁTICO DE BROUWER A NATUREZA DO CONTINUUM INTUICIONISTA"

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **PAULO JÚNIO DE OLIVEIRA**, **Discente**, em 12/05/2021, às 14:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **André Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 12/05/2021, às 14:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador 2063172 e o código CRC A2B3FCD4.

Referência: Processo nº 23070.019410/2021-39 SEI nº 2063172

PAULO JÚNIO DE OLIVEIRA

AS BASES DO INTUICIONISMO MATEMÁTICO DE BROUWER

A NATUREZA DO CONTINUUM INTUICIONISTA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Linha de pesquisa: Lógica e Filosofia da Linguagem.

Orientador: Dr. André da Silva Porto.

GOIÂNIA-GO

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Paulo Júnio de
AS BASES DO INTUICIONISMO MATEMÁTICO DE BROUWER [manuscrito] : A NATUREZA DO CONTINUUM INTUICIONISTA / Paulo Júnio de Oliveira. - 2021.
120 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. André da Silva Porto.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Faculdade de Filosofia (Fafil), Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Goiânia, 2021.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Teoria intuicionista do continuum. 2. Intuicionismo Matemático. 3. Idealismo NeoKantiano. 4. Brouwer. I. Porto, André da Silva, orient. II. Título.

CDU 1

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

FACULDADE DE FILOSOFIA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata Nº 15/2021 da sessão de Defesa de Tese de Paulo Júnio de Oliveira que confere o título de Doutor em Filosofia Programa de Pós-graduação em Filosofia na área do Programa de Pós Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Goiás da Universidade Federal de Goiás, na área de concentrção em Filosofia.

Aos quinze dias do mês de abril do ano de dois mil e vinte e um, a partir das 14:00 horas, na Sala de Defesas da Faculdade de Filosofia, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada "AS BASES DO INTUICIONISMO MATEMÁTICO DE BROUWER A NATUREZA DO CONTINUUM INTUICIONISTA". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor André da Silva Porto (FAFIL/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira (Puc/RJ) membro titular externo, cuja participação ocorreu através de videoconferência; Professor Doutor Abilio Azambuja Rodrigues Filho (UFMG), membro titular externo, cuja participação ocorreu através de videoconferência; Professor Doutor Cristiano Novaes de Rezende (FAFIL/UFG),, membro titular interno, cuja participação ocorreu através de videoconferência; Professor Doutor Hans Christian Klotz (FAFIL/UFG). membro titular Interno, cuja participação ocorreu através de videoconferência. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese tendo sido o candidato aprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor André da Silva Porto, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos quinze dias do mês de abril do ano de dois mil e vinte e um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **André Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 19/04/2021, às 07:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **ABILIO AZAMBUJA RODRIGUES FILHO**, **Usuário Externo**, em 22/04/2021, às 12:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Ghisoni Da Silva**, **Coordenador de Pós-graduação**, em 11/05/2021, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

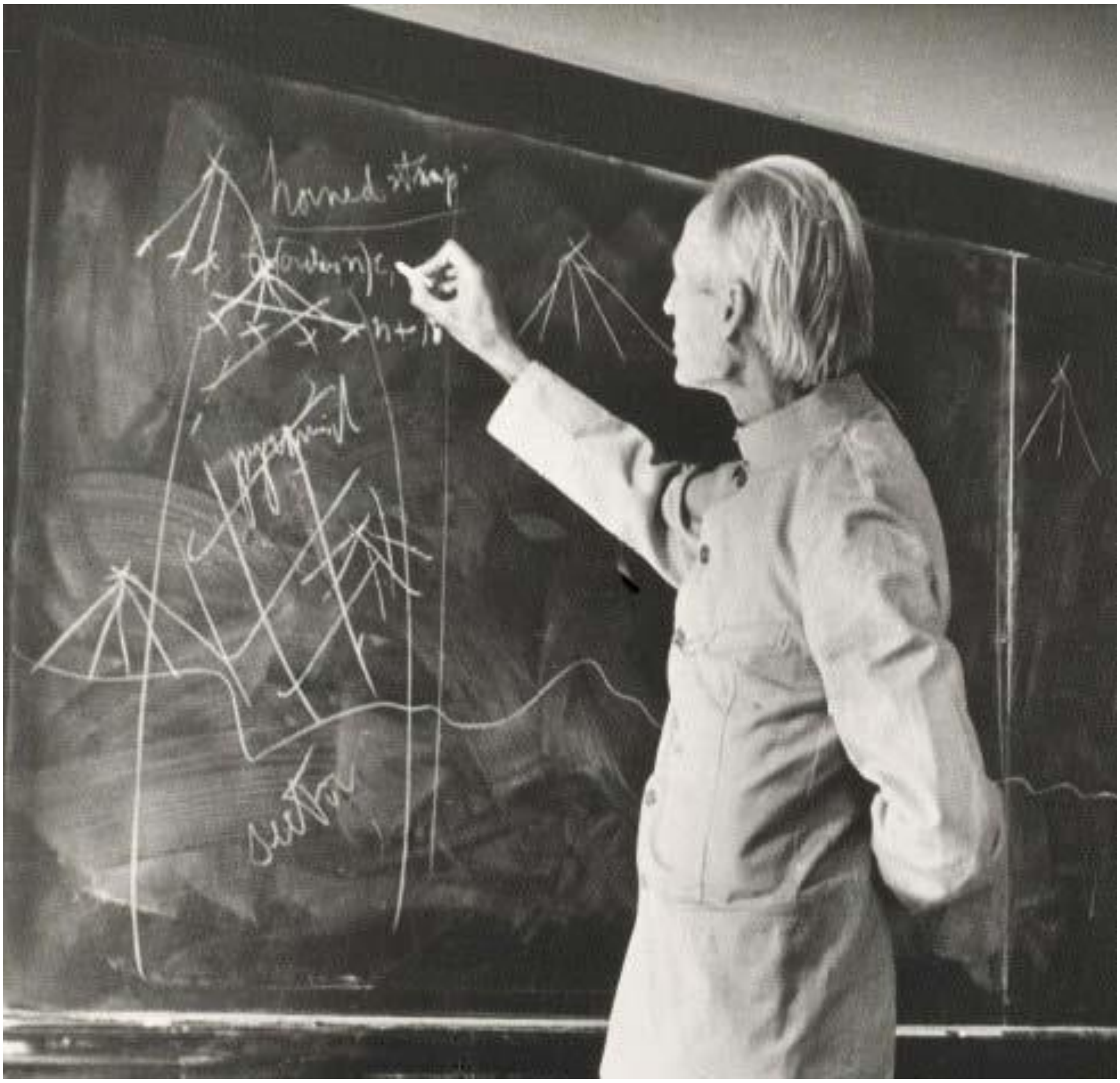
sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Hans Christian Klotz**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/05/2021, às 14:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Cristiano Novaes De Rezende**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/05/2021, às 21:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2009260** e o código CRC **239A3009**.

Referência: Processo nº 23070.019410/2021-39 SEI nº 2009260

(1) Brouwer representando a noção mental de “*spreads*”



Fonte: Van Dalen (2013, p. 795).

Cada uma das minhas realizações positivas ao *Lama*, personificação das 3 Joias.

Agradecimentos

À Mañjuśrī, por estar à frente dos meus passos.

Ao Professor André Porto, pela orientação filosófica minuciosa, pela leitura *pormenorizada* deste trabalho, pelo cuidado, pelo incentivo e carinho.

Ao Professor Guilherme Ghisoni e ao Professor Christian Klotz, pelas sugestões e orientações durante o processo de qualificação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Goiás. À Marlene e a todo o quadro de funcionárias(os).

À Capes, pelo apoio financeiro concedido.

A meus pais, por terem garantido causas e condições necessárias que contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

À Rhaissa Rodrigues, minha noiva e parceira, pelo cuidado carinhoso, pela atenção, pela paciência, pela leitura e discussão deste trabalho.

À Laryssa Sousa, minha amiga e colega, pelo carinho, pela atenção e pela leitura minudente deste trabalho.

A meus amigos, Danillo e Thomé, pelo carinho, pelas frequentes e contínuas discussões filosóficas (algumas delas sobre temas deste trabalho) e pela leitura cautelosa e esforçada desta tese.

Resumo

A investigação desta tese tem como objetivo uma apresentação e uma discussão filosófica da natureza do *continuum* intuicionista de Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) e de suas *bases* filosóficas. Essa concepção da natureza do *continuum* intuicionista levou ao desenvolvimento de uma noção de “números reais” distinta da análise clássica. Tal noção de “números reais” não aceita como *universalmente* válida a lei do terceiro excluído e, em decorrência disso, não seria possível aceitar, por exemplo, a lei da tricotomia. *Essa recusa do terceiro excluído não nasce no vácuo e não é o foco central do intuicionismo matemático*. Ela é, por assim dizer, uma *consequência* da concepção de “*continuum*” intuicionista. Já as noções de “*continuum*” e de “entidade matemática” são, digamos, os focos principais da análise de Brouwer. Do ponto de vista dele, o *continuum* não é uma coleção de pontos discretos *absolutamente individualizados já dados*, os quais poderiam, de alguma forma, ser pinçados e utilizados. Os pontos matemáticos, no intuicionismo, são, por assim dizer, construídos mentalmente como sequências de intervalos infinitamente convergentes entre si. Por conseguinte, nenhum intervalo tem um “limite” absolutamente segmentado, intrinsecamente formado e/ou absolutamente individualizado. Para qualquer “estágio” do intervalo, há *sempre* um espaço de *possibilidades* infinitas de outros intervalos. Assim, não existiria um ponto de *cumulação* infinitamente distante dos intervalos que poderia ser encontrado pelo matemático, como se o *continuum* fosse mapeável como uma cidade é mapeável por um geógrafo. Desse ponto de vista, a perspectiva clássica *precisaria* subscrever, *mesmo que não intencionalmente*, à existência de pontos discretos absolutamente individualizados para poder fazer algum tipo de sentido de sua análise dos números reais, do cálculo, em síntese, da matemática clássica. Essas noções intuicionistas de “*continuum*” e de “números reais” *qua* “intervalos infinitamente convergentes *entre* si” se tornaram possíveis por causa do tipo de bases filosóficas que as antecede. Tais bases foram desenvolvidas através de dois atos fundamentais, que são compreendidos em um contexto de uma filosofia idealista de *inspiração* kantiana. Assim, tais atos são compreendidos a partir de um quadro “neokantiano”, em algum sentido ou, para utilizar a expressão de Brouwer, de um “kantismo atualizado”. Eles são: (i) o ato de *reconhecimento mental* da *distinção* entre entidades matemáticas e entidades linguísticas e (ii) o ato de *reconhecimento mental* da *possibilidade* de *novas* entidades matemáticas. Ambos os atos estão interconectados e pressupõem as mesmas bases. De fato, o primeiro ato está conectado ao aspecto radicalmente intuitivo da construção mental das entidades matemáticas e o segundo ato traz à tona *notas* muito importantes da natureza do *continuum* intuicionista através da possibilidade de sempre *emergirem* novas entidades matemáticas, i.e., o *continuum* é um tipo de entidade que nunca é determinável, nunca tem uma forma absoluta determinada por uma coleção de pontos discretos absolutamente individualizáveis. Desta maneira, o *continuum* é em definitivo indeterminado. Em outras palavras, o segundo ato *reconhece* que entidades matemáticas são “expansíveis” *intensionalmente* através da noção de “sequências de escolha”. Desse modo, essas sequências são fundamentais para o *continuum* intuicionista. Por isso, nesta tese apresentamos essas bases filosóficas nos primeiros capítulos e as aplicamos nos últimos capítulos em alguns contextos matemáticos específicos para tentar elucidar a natureza filosófica e matemática do *continuum* intuicionista e/ou dos números reais através da explicitação das propriedades da coesão, da viscosidade e dos intervalos infinitamente convergentes.

Palavras-chave: teoria intuicionista do *continuum*, intuicionismo matemático, idealismo neokantiano, Brouwer.

Abstract

This dissertation has as its aim the philosophical presentation and discussion of the nature of the intuitionist *continuum* of Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) and of its philosophical *bases*. This conception of the nature of the intuitionist *continuum* led to the development of the notion of “real numbers” distinct from classical analysis. Such a notion of “real numbers” does not accept the principle of excluded middle as *universally* valid and, as a result, it would not be possible to accept, for example, the law of trichotomy. *The refusal of the principle of excluded middle does not arise from vacuum, and it is not the central focus of mathematical intuitionism*. It is, as one would put it, a *consequence* of the conception of intuitionist “*continuum*”. The notions of “*continuum*” and “mathematical entity” are, as one would put it, the main focus of Brouwer’s analysis. From his point of view, the *continuum* is not a collection of *absolutely individualized already given* discrete points, which could in some way be extracted and used. The mathematical points in intuitionism are, so to speak, mentally constructed as sequences of infinitely converging intervals. Thus, no interval has an absolutely segmented, intrinsically formed, and/or absolutely individualized “limit”. For any “stage” of the interval there is *always* a space of infinite *possibilities* of other intervals. Hence there would be no point of infinitely distant *cumulation* of the intervals that could be found by the mathematician, as if the *continuum* were mappable such as a city is mappable by a geographer. From this point of view, the classical perspective would *need* to subscribe, *even if not intentionally*, to the existence of absolutely individualized discrete points in order to be able to make some kind of sense of its analysis of real numbers, of calculus, in short, of classical mathematics. This intuitionist notions of “*continuum*” and “real numbers” *qua* “infinitely converging intervals” became possible because of the type of philosophical bases that precede them. Such bases were developed from two fundamental acts that are understood in the context of an idealistic philosophy of Kantian *inspiration*. Thus, such acts are comprehended from a “Neo-Kantian” framework, in some sense or, more accurately, to use Brouwer’s expression, from an “up-to-date Kantism”. They are: (i) the act of *mental recognition* of the *distinction* between mathematical entities and linguistic entities and (ii) the act of *mental recognition* of the *possibility* of *new* mathematical entities. Both acts are interconnected and presuppose the same bases. In fact, the first act is connected with the radically intuitive aspect of the mental construction of mathematical entities, and the second act brings to light particularly important *notes* of the nature of the intuitionist *continuum* through the possibility of always *emerging* new mathematical entities, i.e., the *continuum* is a type of entity that is never determinable, it does not ever have an absolute form determined by a collection of discrete points that are absolutely individualizable. Therefore, the *continuum* is definitely indeterminate. In other words, the second act *acknowledges* that mathematical entities are *intensionally* “expansible” through the notion of “choice sequences”. Thus, these sequences are fundamental to the intuitionist *continuum*. In this dissertation, we present these philosophical bases in the first chapters and apply them to some specific mathematical contexts in the last chapters so as to try to elucidate the philosophical and mathematical nature of the intuitionist *continuum* and/or real numbers through the explicitness of properties of cohesion, viscosity, and infinitely converging intervals.

Keywords: intuitionist *continuum* theory, mathematical intuitionism, Neo-Kantian idealism, Brouwer.

Lista de figuras

Sumário

[U]ma linha, que é contínua, *não pode constituir-se de pontos.*

Aristotle (2008, p. 138, grifo adicionado)

A matemática intuicionista é uma construção mental, [...] *independente da linguagem. Ela vem a ser através do autodesvelar da intuição*.

Brouwer (1975 [1947], p. 477)

[S]equências infinitas intuicionistas, em particular as sequências infinitas convergentes de números racionais [que são os números reais], não precisam, como aquelas da matemática clássica, ser predeterminadas, mas podem prosseguir com uma quantidade maior ou menor de liberdade.

Brouwer (1975 [1955], p. 554)

Prólogo

Em termos gerais, a *imagem* ordinária do intuicionismo matemático não corresponde, de forma razoável, ao espírito real que subjaz o intuicionismo matemático. Freudenthal (1937, apud VAN ATTEN, 2020d) enfatiza o fato de que a lógica intuicionista infelizmente ganhou um tipo de aceitação que não transmite a visão adequada da matemática intuicionista. De fato, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), conhecido pelas suas realizações como filósofo, matemático, topologista e geômetra, já em 1907, na sua dissertação de doutorado, contrapôs-se *fortemente* ao formalismo de Hilbert (BROUWER, 1975 [1952], 1981; MANCOSU, 1998; VAN DALEN, 1998).

Naquele contexto, o projeto formalista ganhava mais proeminência justamente por conta do aspecto marcadamente formal da matemática. Em contrapartida, o projeto intuicionista matemático não recebia notoriedade, em um primeiro momento, por algumas razões, dentre elas: (i) a preocupação do topologista com o aspecto intuitivo da construção da matemática; e, por conseguinte, (ii) as críticas do intuicionismo ao aspecto nitidamente formal da linguagem do projeto formalista. Uma vez que a preocupação de Brouwer era com a construção da matemática, consequentemente, essas críticas eram feitas com base na ideia de que a construção mental e/ou cognitiva da entidade matemática era ontológica e necessariamente *anterior* ao desenvolvimento da linguagem formal propriamente dita – isto é, a experiência *noética*[1] do cálculo era fundamentalmente anterior à linguagem que tenta descrever tal processo experiencial.

Embora o formalismo de Hilbert tenha sofrido intensas críticas de Brouwer, ainda assim o geômetra holandês não recebia reconhecimento naquele momento. Ademais, apesar das críticas que foram feitas e poderiam ter sido feitas ao projeto formalista, com os teoremas de Gödel, em 1931 – que tornaram o formalismo um projeto insustentável –, o projeto intuicionista do topologista só ganhou destaque, a princípio, com as reflexões preliminares de Troelstra (1969, 1977), dotadas de alguma influência brouweriana, a *análise* desenvolvida por Troelstra e Van Dalen (1988) e, posteriormente, pelo menos com alguma inspiração intuicionista na recusa do terceiro excluído, com Bishop e Bridges (1985). Mesmo antes dos teoremas de Gödel, Brouwer já chamava a atenção para o fato de que uma linguagem formal não poderia fornecer o que era necessário para *apreendermos* a natureza das entidades matemáticas. Tal ponto era tão evidente para Brouwer que ele fez comentários sobre os

[1] Utilizamos a expressão "noética" ao longo desta tese para destacar a "experiência" como um "dado imediato" da consciência.

teoremas de Gödel no sentido de serem obviamente verdadeiros e menos importantes que o desenvolvimento da lógica de Heyting (VAN ATTEN, 2020d).

Desse modo, esse embate histórico entre intuicionismo e formalismo já acontecia, do ponto de vista de Brouwer, pelo menos desde a dissertação do topologista, e se seguiu por décadas ainda com a imagem de que o formalismo se sobressaía no debate, como se os intuicionistas não possuíssem fundamentos suficientemente sólidos para a matemática. Esse não é o caso, uma vez que, por exemplo, *a teoria da análise do cálculo de Bishop e Bridges (1985) é completamente satisfatória do ponto de vista matemático*. Os autores mencionados foram nitidamente inspirados pelas reflexões de Brouwer, especialmente em relação à recusa do terceiro excluído e, de alguma forma, no que concerne ao aspecto *intuitivo* da construção das entidades matemáticas e do *continuum*. Com esse enfoque, Bishop (1985) também desenvolveu várias críticas ao formalismo, chegando até mesmo a acusar tal projeto de ser um dos atributos esquizofrênicos da matemática contemporânea. Essa alegação é embasada no fato de que o formalismo ignorava completamente os papeis da mente e da cognição, e, consequentemente, sentenças matemáticas não teriam realmente sentido.

Essa é a parte sintética, mas muito importante, da cena histórica que serve como anfiteatro para a discussão que se segue nesta tese de doutorado.

Considerações iniciais

Primordialmente, as entidades matemáticas *nascem* do autodesvelar-se da intuição fundamental do tempo. Tempo, aqui, é a *própria* sequencialidade e/ou a *própria* simultaneidade intuída pela natureza da mente dos sujeitos cognoscentes. Isso sintetiza e expressa a natureza fundamental da intuição da matemática. É com essa noção de "intuição primordial" que Luitzen Egbertus Jan Brouwer (VAN ATTEN, 2020c; VAN DALEN, 1999, 2005) compreende a natureza e a origem fundamental do *continuum* matemático e das entidades matemáticas. A partir do ponto de vista do intuicionismo matemático de Brouwer, a existência do *continuum* e das entidades matemáticas é discutida nesta tese.

Uma apresentação filosófica inicial do quadro geral

É comum apresentar o intuicionismo matemático como uma matemática que rejeita o terceiro excluído e, portanto, só aceita noções construtivas de prova matemática. Embora, em certo sentido, isso seja verdade, é uma perspectiva que consideramos inadequada e muito parcial do cenário intuicionista matemático, especialmente do intuicionismo da escola de Brouwer. Como veremos ao longo desta tese, a rejeição da lei do terceiro excluído e aceitação de apenas provas construtivas são *consequências* de uma reflexão filosófica, fenomenológica e, em alguma medida, ontológica. Desse modo, a causa da recusa do terceiro excluído ocorre, entre outras várias razões, devido à rejeição de uma certa concepção de "*continuum*" e da aceitação de uma outra noção de "*continuum*", da recusa de uma certa concepção de "entidade matemática" e da aceitação de uma outra noção de "entidade matemática".

O ponto enfatizado aqui está relacionado ao fato de que essas razões não foram apresentadas com o objetivo de recusar o terceiro excluído. O objetivo central de Brouwer, como veremos, era desenvolver uma concepção de *continuum* matemático de natureza radicalmente diferente daquela da teoria clássica dos conjuntos. Para isso, ele desenvolveu uma concepção de entidade matemática idealista, no sentido de que uma entidade matemática é uma construção mental, uma operação mental. Essa construção mental matemática, deveras, qualquer construção mental, é desenvolvida baseada na intuição básica do tempo, segundo o filósofo e matemático holandês. Essa intuição é a "*ocorrência*" *noética imediata* da consciência do momento presente.

Para Brouwer, em poucas palavras, o ponto não é que o sujeito cognoscente[2] precise escolher construir uma entidade matemática segundo essa intuição para que seja fundamentada nela. A questão é mais profunda e, como será mostrado, tem como pano de fundo um tipo de "argumento transcendental": assim que alguém constrói uma entidade matemática, a estrutura fundamental ali presente já é sequencial, e isso é um reflexo da intuição básica do tempo que opera de forma imediata na natureza da mente do matemático. Dito de outra forma, mesmo que alguém possa atribuir qualquer tipo de predicado não-temporal a entidades matemáticas, há pelo menos um que ele *terá* de admitir, a saber, que toda entidade matemática é *fundamentalmente* sequencial. Nesse sentido específico, Brouwer entende que entidades matemáticas são temporais, e não no sentido em que entidades físicas, como um sofá, são temporais, as quais nascem, envelhecem e morrem.

Essa concepção de "intuição básica do tempo" se encontra em um contexto explicativo ontológico maior em Brouwer. Há uma espécie de estrutura explicativa de como os fenômenos são. Para Brouwer, há o fato da consciência enquanto tal, que ele chama às vezes de *self*, consciência ou mente. Em nenhum momento desta tese argumentamos que, para fazer sentido plausível da posição construtivista-intuicionista e de algum tipo de "idealismo", especialmente para entidades matemáticas, seja realmente necessário se comprometer com a existência do self para explicar e/ou justificar o intuicionismo matemático. Embora aparentemente essa era a opinião de Brouwer (pelo menos na fase "inicial" e menos desenvolvida do seu intuicionismo), na nossa opinião não é necessário fazer esse tipo de comprometimento "metafísico e/ou ontológico" para fundamentar o intuicionismo matemático. Em outras palavras, na nossa opinião, o self absoluto é completamente dispensável. Todavia, não discutimos essa questão em detalhes, pois nosso objetivo é apresentar a filosofia de Brouwer e sua perspectiva. Ademais, apesar de Brouwer (1975 [1905]) utilizar a palavra self com letra maiúscula, consideramos que a ênfase nesse conceito já é suficientemente destacada no primeiro capítulo desta tese, de modo que não é preciso seguir o topologista, nesse caso, para os propósitos do nosso trabalho – especialmente pelo fato de que o aspecto mais importante a ser enfatizado aqui é a consciência enquanto natureza da mente dos sujeitos cognoscentes.

---

[2] Neste texto, utilizamos a expressão "sujeito cognoscente" ao invés de "sujeito criativo", pois objetivamos enfatizar não só o aspecto da "construtibilidade de entidades matemáticas" – denotada pela expressão "sujeito criativo" – como também o aspecto da experiência noética do indivíduo que experiencia intuitivamente o tempo como um dado imediato da consciência. Justificamos que o "sujeito cognoscente" é ontologicamente "anterior" ao "sujeito criativo" e que, portanto, o aspecto noético é condição necessária para o aspecto criativo.

Ainda sobre a mente e a consciência, salientamos que a mente nasce justamente do movimento do momento imediatamente passado para o momento imediatamente presente como em um fluxo de um rio. De acordo com Brouwer, a consciência, ao contrário, não compartilha essa natureza processual da mente, embora a mente tenha sua origem e dependa ontologicamente da consciência. Todas as mentes existem na forma de processo e/ou de fluxo. Embora faça sentido falar de várias mentes, para Brouwer, a pluralidade não se aplicaria para a consciência. Ele tem essa compreensão devido ao fato de que todas as mentes compartilham a mesma natureza fundamental dessa consciência. O que isso significa? Entre outras coisas, que a mente experimenta, conhece, vivencia. Em outras palavras, a mente não tem uma natureza insenciente como a matéria.

É nesse contexto idealista que Brouwer explica a natureza do *continuum* e das entidades matemáticas. No contexto em que todas as mentes existem na forma de um fluxo, de um processo, i.e., na forma de uma sequência de momentos mentais imediatamente passados e do momento imediatamente presente, Brouwer explica a intuição básica do tempo como a fonte das entidades matemáticas. O matemático holandês distingue dois tipos de *continuum* para explicar a natureza dessas entidades matemáticas: o *continuum* intuitivo e o *continuum* matemático. O *continuum* intuitivo é justamente a natureza sequencial da mente que intui sua própria natureza ao experienciar a passagem do momento passado para o momento presente. O *continuum* intuitivo é absolutamente indeterminado e não tem uma forma específica. Uma vez que não tem uma forma específica e determinada, qualquer forma pode ser adotada *provisoriamente* para fins matemáticos.

Desse modo, é aqui que o *continuum* matemático nasce: sob o alicerce do *continuum* intuitivo, que é indeterminado e amorfamente sequencial. Isso se manifesta claramente através daquela noção de “argumento transcendental” que mencionamos, i.e., é impossível construir qualquer entidade matemática não sequencial. Isso significa que a sequencialidade fundamental tem de ser lógica e ontologicamente *anterior* a qualquer forma *específica* de sequência matemática. Uma vez que a sequencialidade fundamental do *continuum* intuitivo tem uma natureza sequencial indeterminada, pois a mente é um fluxo contínuo indeterminado, cada uma das determinações específicas não pode ser dada a princípio, mas deve ser estabelecida sob esse alicerce, através de algum método construtivo ou com a liberdade do sujeito cognoscente. Dessa maneira, não há como aplicar o princípio do terceiro excluído de forma *universal* a essa concepção de *continuum,* em contraste com uma concepção de *continuum* que entende a reta dos reais como um colar de pérolas absolutamente discretas e já dadas. Entretanto, o leitor já poderá observar que a rota de reflexão filosófica intuicionista não tem como objetivo central a recusa do terceiro excluído. A recusa acontece por causa de uma preocupação muito mais fundamental com a natureza do *continuum* e das entidades matemáticas em geral. De toda maneira, essa é uma rota com consequências para a matemática e para os seus fundamentos.

Duas rotas filosóficas para o intuicionismo

De certa perspectiva filosófica-histórica, há pelo menos duas rotas para se chegar à recusa do terceiro excluído: há a rota semântico-epistêmica e há a rota ontológico-fenomenológica. A rota semântica é aquela que ficou mais popularizada pelos trabalhos de Dummett (2000). Não trataremos dessa rota neste trabalho. A rota ontológica, investigada nesta tese, é a rota que analisa e trata da natureza e das concepções de "*continuum* matemático" e de "entidade matemática". Assim, toda a motivação e a estruturação da investigação e o estabelecimento do intuicionismo matemático de Brouwer decorrem de uma preocupação radical com a natureza do *continuum* e com o sentido de "existência" de uma entidade matemática. Essa concepção de "existência" é aquela que é mencionada por nós como idealista.

Brouwer e seu projeto idealista

A característica mais importante e definitória do intuicionismo matemático do filósofo, Brouwer, é o seu idealismo. Embora o discípulo de Brouwer, Heyting (1956), sustente a ideia de que o intuicionismo precisaria subscrever apenas a um tipo de "idealismo epistêmico" em relação às entidades matemáticas, sem uma compreensão adequada do quadro geral idealista que abarca o intuicionismo matemático do topologista, se torna muito difícil ter uma compreensão razoável tanto da teoria do *continuum*, que permeia a análise matemática intuicionista, quanto da rejeição da universalidade de um princípio lógico, como o do terceiro excluído (TROELSTRA; VAN DALEN, 1988). Assim, veremos que o caminho para chegar à rejeição do terceiro excluído é longo, i.e., o intuicionismo matemático de Brouwer não começa na recusa do terceiro excluído *ex nihilo*. Na verdade, como será pontuado, em certo sentido, a rejeição do terceiro excluído acontece em um contexto mais amplo de discussão filosófica sobre a natureza das entidades matemáticas e sobre que tipo de noção de "*continuum*" é sustentada como base para o desenvolvimento do *continuum* matemático intuicionista. Essa noção de "*continuum* matemático" é aquela que é definida através da teoria das sequências de escolha desenvolvidas por Brouwer (1975) e discutidas por Troelstra (1969, 1977, 1983).

O tratamento de Brouwer da natureza das entidades matemáticas e do *continuum* tem origem na argumentação de que só somos capazes de construir entidades matemáticas devido ao fato de sermos *seres temporais*, os quais *experienciam* coisas, de forma sequencial ou simultânea. Nesse sentido, como veremos, Brouwer (1975 [1907]) é um tipo de neokantiano "atualizado". O raciocínio kantiano mais básico por detrás das discussões intuicionistas, tal como o filósofo holandês compreende, é o fato de que as entidades matemáticas são *possíveis* e existem como existem devido a nossa estrutura cognitiva fundamental. Nesse sentido, Brouwer não sustenta que as entidades matemáticas existem independentemente da mente de forma *abstrata*. Veremos que o oponente que sustenta a existência puramente abstrata de entidades matemáticas terá de lidar com grandes desafios para explicar, inclusive, a relação entre o tempo e a matemática e a natureza da geometria e da *análise* dos números reais.

Ora, com isso em mente, o desafio proposto pelo intuicionista não se encontra em tentar argumentar apenas em cima de axiomas formais básicos. Em geral, a argumentação em favor de um realismo de entidades matemáticas puramente abstratas gira em torno da ideia de que parece muito trivial que algumas proposições matemáticas sejam evidentemente verdadeiras, tal como "2+2=4". Nesse sentido, a sequencialidade primordial é uma condição *anterior* a qualquer proposição aritmética *específica*, por mais evidente que ela seja. Por exemplo, o número 2 pressupõe a "conexão" de posterioridade em relação ao número 1, o número 1 em relação ao número 0, e assim sucessivamente. O problema com esse tipo de argumentação, segundo o espírito construtivista-intuicionista, é que essa proposição já oculta e pressupõe muitas questões. Em outras palavras, o intuicionismo de Brouwer sugere que exemplos proposicionais desconsideram que o conteúdo significativo dessas sentenças não se encontra na própria linguagem, ao se referir a um mundo puramente abstrato. Na verdade, o intuicionista instiga o leitor ao desafio de tentar conceber entidades matemáticas à parte do conteúdo *cognitivo* fundamentalmente sequencial que as sustenta.

O traço fundamental dos apontamentos de Brouwer tem como intuito mostrar que a nota definitória fundamental das entidades matemáticas é o fato de elas não existirem de maneira dependente de alguma linguagem. Em outras palavras, a concepção do que seja uma entidade matemática é ontologicamente *anterior* ao *desenvolvimento* de alguma linguagem –

seja formal ou informal. Nesse sentido, o uso de alguma linguagem para expressar entidades matemáticas é acidental à natureza das entidades matemáticas e não definitório delas, embora seja um acidente sempre presente por ser pragmática e comunicativamente necessário.

Com base nessas reflexões, Brouwer desenvolveu o seu primeiro ato fundamental do intuicionismo matemático, a saber, o *ato* de reconhecer entidades matemáticas como independentes da linguagem (BROUWER, 1975 [1912], 1975 [1947], 1975 [1952]; TROELSTRA, 1969; VAN STIGT, 1990). Contudo, isso não significa que Brouwer sustente que entidades matemáticas existem independentemente, de forma puramente abstrata. Pelo contrário, as entidades matemáticas são independentes da linguagem, pois são entidades mentais e não entidades proposicionais. Entidades matemáticas não são asserções sobre uma "realidade" não-noética. Entidades matemáticas são atos mentais que, a princípio, podem ser descritas por alguma linguagem formal ou informal.

Com base nas reflexões que serão apresentadas, o leitor poderá entender a filosofia da matemática de Brouwer *como* um convite a um tipo de exercício da consciência que pode ser comparado, em algum sentido, ao *cogito* cartesiano. Brouwer insinua que só é possível compreender o que ele argumenta através da experiência de primeira pessoa do sujeito cognoscente. É através dessa experiência que *se reconhece* o ato instaurador da existência de uma entidade matemática, que só pode ser uma construção mental. Assim, em termos formais, o quantificador existencial da matemática sempre significará "$\exists_{cm}$", i.e., "existir" = "ser uma construção mental". Em outras palavras, "existir" figura, no contexto de entidades matemáticas, ser *noeticamente* dado na experiência subjetiva do matemático. Esse primeiro ato do intuicionismo é discutido no segundo capítulo desta tese.

A realização do nosso trajeto

Para explicar com mais detalhes o *background* matemático e idealista de Brouwer, a discussão desta tese está dividida em cinco capítulos, além do prólogo e das considerações iniciais e finais. No primeiro capítulo, apresentamos diversas influências que levaram Brouwer a desenvolver seu idealismo. Por exemplo, além das inspirações marcadamente kantiana e pontualmente poincareniana, ele também foi influenciado, em alguma medida, pelo pensamento filosófico-religioso hindu.

Em seguida, no segundo capítulo, exibimos algumas notas definitórias do primeiro ato do intuicionismo e o tratamento que Brouwer oferece à linguagem no contexto da matemática.

Finalizamos esse capítulo com uma apresentação inicial de dois tipos de sequências matemáticas que são consequências dos atos do intuicionismo matemático. Essa finalização desempenha o papel de elo com a discussão seguinte. No terceiro capítulo, apresentamos o segundo ato do intuicionismo, ou seja, tratamos do ato de *reconhecimento* da possibilidade de existência de novas entidades matemáticas. Uma vez que a expressão “nova” é problemática aqui, discutimos minuciosamente o que significa “ser uma nova entidade matemática”.

No início do quarto capítulo, “aplicamos” as reflexões filosóficas intuicionistas discutidas nos capítulos anteriores à teoria dos números reais intuicionistas. Em outras palavras, aplicamos os pressupostos idealistas e os dois atos do intuicionismo para compreender a natureza dos números reais intuicionistas a partir da noção de “sequências de escolha” e “*spreads*” (espalhamentos). Nesse capítulo, em especial, para enfatizar algumas notas da natureza intuicionista dos números reais, lidamos com o problema do *avanço* da matemática, ou seja, tratamos do problema da relação entre a matemática e o tempo a partir de uma reflexão intuicionista desse tópico.

No quinto capítulo, abordamos detalhadamente a teoria do *continuum* matemático intuicionista através da ênfase nas propriedades de coesão, difusão e “viscosidade” do *continuum* intuicionista. Finalizamos este último capítulo com uma reflexão sobre como essas concepções de “entidade matemática” e de “*continuum*” podem responder, de forma nitidamente razoável, à questão da “funcionalidade da matemática” no mundo empírico externo.

Capítulo 1
Idealismo, intuição e convencionalismo: a base da construção do edifício intuicionista

Este capítulo possui os seguintes objetivos: (i) apresentar as principais influências que contribuíram para o desenvolvimento dos fundamentos da matemática de Brouwer e de sua filosofia como um todo; (ii) discutir a natureza radicalmente idealista da filosofia do matemático holandês; e, principalmente, (iii) abordar a relação de Brouwer com o pensamento kantiano na sua obra *On the Foundations of Mathematics* (1975 [1907]).

Em função da realização desses objetivos, este capítulo está dividido em três seções, que contam com subseções nas quais tratamos de aspectos específicos. Na seção 1.1, intitulada "Considerações iniciais sobre a filosofia da matemática de Brouwer", apresentamos um delineamento filosófico geral da discussão. Na seção 1.2, intitulada "As influências hindu-indianas presentes na filosofia de Brouwer", abordamos algumas das perspectivas orientais, especificamente aquelas hindus que influenciaram o trabalho do matemático holandês. Finalmente, na seção 1.3, intitulada "Preliminares sobre *On the Foundations of Mathematics* (1975 [1907]) de Brouwer", nos concentramos na discussão das influências kantianas e poincarenianas que moldaram os fundamentos da matemática do pai do intuicionismo. Além de discutirmos nesta última seção as influências kantianas, também discorremos sobre as críticas de Brouwer à Kant.

1.1 Considerações iniciais sobre a filosofia da matemática de Brouwer

A tese de que uma proposição matemática só é verdadeira quando é possível construir uma prova *formal* para ela é uma ideia comumente atrelada ao intuicionismo matemático, mas que, por ser demasiadamente enfatizada, *ofusca* outras questões de extrema importância que também envolvem o intuicionismo. Essa ideia deu origem a uma "imagem geral" do que seria o intuicionismo, ideia que ainda prevalece em vários círculos intelectuais lógicos, filosóficos e matemáticos. Contudo, essa imagem está muito distante do projeto pensado, criado e desenvolvido pelo fundador dessa escola intuicionista. Para o precursor do intuicionismo matemático, a parte da escrita formal da matemática não é essencial, uma vez que, para ele, entidades matemáticas são "construções mentais". A linguagem formal que *enunciaria* sobre essas construções mentais seria secundária. Já as construções mentais seriam a própria constituição ontológica das entidades matemáticas: *esse est concipi*. É justamente devido à consideração de que uma entidade matemática só pode ser reconhecida *como* uma *entidade matemática legítima* se for, e somente nesse caso, uma construção mental que tornou realizável a revolução lógica intuicionista da rejeição do terceiro excluído como um princípio lógico *universalmente* válido. É por causa dessa ideia, aparentemente tão simples, que o fundador dessa escola causou uma revolução conceitual e estrutural que trouxe à existência toda uma filosofia da matemática e uma prática matemática alternativa à filosofia e matemática clássicas. Além de ter fundado essa escola no século XX, Brouwer também desenvolveu trabalhos relacionados à topologia, à teoria dos conjuntos e à investigação do *continuum*.

Nesta tese de doutorado, o nosso objetivo é apresentar, de maneira clara, a filosofia intuicionista da matemática de Brouwer. Esse desenvolvimento filosófico de Brouwer é um efeito de um trabalho que visava a resgatar a importância de questões filosóficas relacionadas aos conceitos de "*continuum*", de "intuição" e de "consciência". Alinhados ao espírito do intuicionismo do geômetra, buscamos: 1) apresentar a concepção de *continuum* intuicionista; e 2) demonstrar como as noções de "intuição" e de "construção mental" são indispensáveis tanto para entender o *continuum* intuicionista quanto para compreender uma filosofia da matemática intuicionista.

Em sua dissertação de doutorado em matemática, intitulada *On the Foundations of Mathematics* (1975 [1907]), Brouwer demonstra que as questões filosóficas sobre o *continuum* e os fundamentos da matemática são, de fato, sua principal preocupação. Em outras palavras, para a sua filosofia da matemática, uma investigação sobre a natureza do *continuum* implica, em certo sentido, uma análise da natureza das entidades matemáticas. Investigar a natureza delas significa, nesse contexto, que a matemática estuda *determinadas* propriedades de uma certa *experiência*, que, para o topologista, constitui a experiência *noética* do momento presente. É através da experiência intuitiva do tempo que ele extrai toda a sua concepção de *continuum* e, a partir daí, a sua própria matemática.

Como veremos detalhadamente, ao longo da tese, Brouwer explica essa experiência intuitiva do tempo e sua concepção de *continuum* através de uma perspectiva idealista da filosofia. Para ele, tudo que há é consciência – em vários *modos*. Em síntese, ele trata de pelo menos três modos dela: (i) a consciência em seu estado "puro", i.e., consciência enquanto consciência, não definida por algum direcionamento intencional a objetos; (ii) a consciência de sensações uno-múltiplas, isto é, intencionalmente dirigida aos objetos, que ora apreende um objeto, ora apreende outro, e assim sucessivamente; e, a partir disso, (iii) a consciência da duosidade[3] temporal, isto é, da sensação de momento presente e de momento passado, que é a natureza da sucessividade. Cada um desses modos da consciência segue estágios relativamente distintos e devem ser vistos do ponto de vista da experiência *noética* do sujeito cognoscente.

Para Brouwer, somente a partir da experiência intuitiva do tempo da consciência é que faria sentido se referir a entidades matemáticas. Ao considerar esse pressuposto, só seria possível reconhecer entidades matemáticas como *mentalmente* construtíveis. Isso desencadeou algumas consequências para a lógica e a matemática em geral, inclusive a já referida revisão do princípio do terceiro excluído da lógica clássica. Desse modo, através do trabalho filosófico e matemático de Brouwer, a lógica e a matemática sofreram revoluções conceituais em suas estruturas mais fundamentais. Essas revisões conceituais resultaram, algum tempo depois, em toda uma matemática *alternativa* à matemática clássica – a matemática *intuicionista*. Decerto, a razão mais profunda que tornou possível essas revisões em matemática e lógica foi o fato de que o geômetra levou às últimas consequências a ideia de que uma revisão da ontologia de base da matemática implicaria necessariamente uma revisão dos princípios e das leis na atividade matemática.

Como já afirmamos, a base da filosofia de Brouwer é um tipo de idealismo. O matemático holandês se considerava um continuísta de Kant, especialmente no que diz respeito ao tempo como uma das formas *invariáveis* da intuição primordial. Essa concepção de "intuição" é muito importante para toda sua filosofia da matemática. Em decorrência dessa noção de "intuição", Brouwer compreende que toda a matemática possui uma *fonte*, e que, portanto, também o *continuum* intuitivo e matemático possui uma *origem fundamental*. Essa origem fundamental é a própria intuição, que aparece através da relação entre consciência e tempo.

Tentamos investigar e mostrar, ao longo desta pesquisa, que há um tipo de concepção idealista presente em toda a filosofia de Brouwer, apesar de o matemático holandês não utilizar essa terminologia para caracterizá-la. Ao observar a sua obra atentamente, é perceptível o quanto o idealismo de origem kantiana é importante para entender a filosofia da matemática de Brouwer. Nesse contexto, ao compreender intuicionisticamente o *continuum* e a matemática, ele propôs fundamentos originais e revolucionários para a matemática.

[3] Salientamos que quando utilizamos as expressões "uno-duosidade" e "duosidade", elas devem ser sempre compreendidas como termos descritivos da experiência noética temporal do sujeito cognoscente do momento presente.

Para iniciar a discussão da filosofia da matemática do topologista e tratar da sua concepção de *continuum*, apresentamos na próxima seção uma discussão preliminar sobre toda a temática discutida na tese de doutorado do matemático holandês. Em seguida, voltamos o olhar para a base idealista da construção da matemática presente na filosofia de Brouwer.

1.2 As influências hindu-indianas presentes na filosofia de Brouwer

Nesta seção, discutimos algumas ideias filosóficas e religiosas gerais que influenciaram Brouwer ao longo do desenvolvimento de sua obra. Além disso, apresentamos também a distinção entre a mente e a consciência, que consideramos importante.

1.2.1 *Self*, consciência e mente

Um dos motes mais importantes da filosofia da matemática do geômetra é a natureza da consciência. Como veremos ao longo desta tese, a conexão entre a natureza da consciência e os problemas da filosofia da matemática de Brouwer, especialmente o problema do *continuum*, existe devido à compreensão idealista que ele tinha de todos os fenômenos.

A partir dessa perspectiva idealista, o topologista desenvolveu vários pontos de sua obra. Por exemplo, ele discutiu e criticou a concepção de “espaço” de Kant, o formalismo de Hilbert, o logicismo de Russell e desenvolveu toda a sua teoria do *continuum* e seu intuicionismo matemático, baseado em dois atos fundamentais. Contudo, além de identificar a presença do idealismo em seu pensamento, é necessário pontuar a que tipo de idealismo nos referimos quando atribuímos essa posição à Brouwer.

Há dois textos, em especial, que são permeados pelo idealismo do filósofo e matemático holandês. O primeiro texto, *Life, Art and Mysticism* (BROUWER, 1975 [1905]), que mostra um espírito explicitamente idealista, foi um trabalho produzido durante sua juventude, de natureza um pouco “hermética”, no qual Brouwer lista uma série de observações sobre filosofia, sociedade e religião. No segundo texto, *Consciousness, Philosophy and Mathematics* (BROUWER, 1975 [1948]), o topologista discorre, de forma mais elaborada e madura, sobre questões filosóficas com vários pressupostos idealistas subjacentes. Esses pressupostos dizem respeito a tópicos muito importantes que acreditamos serem notas definitórias de sua teoria filosófica. Sabemos que o idealismo dele é diferente do idealismo de Kant e se assemelha a alguns idealistas pós-kantianos.

Apesar de às vezes o matemático holandês utilizar as expressões "consciência" e "mente" como se fossem sinônimos, iremos demonstrar que, ao fazer a distinção entre consciência e mente, vários outros pontos da filosofia da matemática do geômetra e de sua teoria do *continuum* se tornam mais nítidos. Contudo, como há usos ambíguos da expressão "consciência" nos escritos de Brouwer, tentamos desfazer algumas dessas ambiguidades. Antes de discutir especificamente a distinção entre consciência e mente, é necessário abordar brevemente algumas questões relacionadas a ideias de autores e escolas que inspiraram o intuicionista.

1.2.2 As influências filosóficas e religiosas na obra de Brouwer

As ideias que inspiraram Brouwer possuem natureza tanto filosófica quanto religiosa. É possível notar múltiplas influências, de fontes diversas, que levaram o geômetra a formar sua concepção idealista. Ele faz referências frequentes à mente, à consciência, ao *self*, à egoidade, a "Deus" e ao "*karma*", e demonstra uma forte tendência de aproximação da doutrina hindu no que concerne à preexistência da alma, à reencarnação e a questões análogas. Van Stigt (1990, p. 136, grifo no original) comenta sobre esse ponto da seguinte forma: "[f]requentes referências ao 'Karma' em [1905] são evidência de sua simpatia com a crença hindu na reencarnação"[4].

Brouwer inclusive cita, em *Consciousness, Philosophy and Mathematics* (BROUWER, 1975 [1948]), um texto hindu chamado *Bhagavad Gītā* (doravante BG). A escritura oriental mencionada teve um grande impacto nas reflexões desenvolvidas pelo autor, o qual pode ser notado pela relativa absorção de noções advindas da BG em sua obra. Nesse artigo, ele assere um tipo de idealismo no qual se subscreve à consciência enquanto o princípio e a natureza de todos os fenômenos. Podemos notar diversas similaridades e paralelos entre o que Brouwer afirma e o que é explicado, por exemplo, no capítulo 13 da BG. Nesse capítulo, o *self* é identificado várias vezes como o princípio supremo e é compreendido como a "testemunha universal":

> 13.23 Aquele que é a Testemunha, o Permissor, o Sustentador, o Experimentador, o grande Senhor, e a quem também se fala como o Self transcendental, é a Pessoa suprema neste corpo. (BHAGAVAD GITA, 2006, p. 561).

---

[4] Todas as traduções do inglês para o português são de autoria do autor deste texto, com exceção das citações de Molk (1909) e Youschkevitch (1976), feitas do francês e inglês, respectivamente, para o português, que são de autoria de André Porto.

Nessa obra, o experimentador é aquele que testemunha tanto os sentidos perceptuais quanto a mente sequencial, sem ser afetado por eles. Esse princípio é chamado de “sol” como uma *metáfora* para o *self* que ilumina todos os fenômenos, assim como a consciência os apercebe, mas não é identificada sequencialmente com cada um deles, uma vez que “13.34 [e]nquanto o sol [...] ilumina todo o mundo, similarmente, [...] o Conhecedor do campo [dos sentidos] ilumina todo o campo” (BHAGAVAD GITA, 2006, p. 582).

Ora, nesse sistema ontológico da BG, por um lado, há a consciência não-sequencial e, por outro lado, há fenômenos sequenciais. Observamos que essa estrutura se alinha, em alguma medida, com o modo como o topologista concebe seu idealismo – a consciência atemporal, por um lado, e a mente sequencial e seus respectivos fenômenos, por outro lado. Essa distinção hindu entre a consciência como atemporal e a mente como temporal/sequencial é relativamente semelhante à distinção que atribuímos à filosofia brouweriana. Ao considerar tal aspecto, parte da nossa suspeita é que Brouwer foi influenciado por alguns textos desse tipo e, por conseguinte, inseriu um modo de conceituação análoga, por exemplo, ao distinguir consciência de mente em vários contextos, sem citar essa questão diretamente, como fez em *Consciousness, Philosophy, and Mathematics* (BROUWER, 1975 [1948]). Um outro exemplo disso seriam as menções da expressão “karma”, as quais indicam que ele tinha contato com essas perspectivas. Em decorrência de questões como essas, conjecturamos que parte da influência de concepções idealistas que ele desenvolveu se deve a essas fontes de natureza religiosa.

1.2.3 Duas características de similaridades entre Brouwer e noções filosóficas hindus

Há duas características fundamentais da filosofia hindu que acreditamos terem influenciado Brouwer: a rejeição de uma pluralidade de consciências e a crítica do topologista a determinados tratamentos *universalistas* do princípio do terceiro excluído. Primeiramente, discutimos a questão da unicidade da consciência, que é fundamental para compreender a distinção entre a consciência e a mente.

1.2.3.1 Idealismo e a questão da unidade da consciência

Advaita Vedaānta, uma das escolas filosófico-religiosas que tomam a BG como um texto autoritativo, assume uma perspectiva “não-dualista” da consciência. Dessa perspectiva, o mundo material, como independente da consciência, seria uma impossibilidade, uma vez que a cognição está sempre presente não apenas como uma característica epistêmica, mas como uma característica ontológica de todas as entidades. Em um artigo intitulado *Consciousness in the Upanishads*, Khanna (2015, p. 449, grifos no original) assere que,

> [d]e acordo com o *advaita-vedaānta*, ou o sistema do não-dualismo, o mundo inteiro percebido é uma “ilusão” (māyā) e, de fato, apenas a “consciência” (*cit*, *caitanya*, *jñāna*) existe; ao invés de sermos corpos *com* uma consciência, nós somos “consciência” em si mesma, *habitando* um corpo ilusório, devido à falsa identificação (*adhyāsa*) com o mundo ilusório (*saṁsāra*).

Do ponto de vista dessa perspectiva “não-dualista”, existiria apenas uma única consciência, e todos os componentes múltiplos que se manifestam seriam apenas corpos ilusórios que apareceriam para essa única consciência. A ideia fundamental por detrás da perspectiva não-dualista hindu é que há uma consciência absoluta, que é necessariamente única, a qual sob o véu da ilusão pode aparecer como muitas entidades e com muitos “nomes”. Por exemplo, há um verso no *Ṛigveda Samhitā* que assere que

> [e]les dizem que é Indra, Mitra, Varuṇa e Agni, e também é o (pássaro) alado e bem emplumado do céu [= o Sol]. Embora seja Um, os poetas inspirados falam sobre isso de muitas maneiras. Eles dizem que é Agni, Yama e Mātariśvan. (THE RIGVEDA, 2014, p. 359).

Na interpretação da escola em questão, em um contexto não-dualista, a consciência é considerada absoluta, recebe vários nomes divinos e aparece sob várias formas, apesar de se tratar de algo absolutamente único. Em certo sentido, é nota definitória da “consciência absoluta” ser *realmente* uma e *ilusoriamente* muitas. Sustentamos que Brouwer defendeu uma posição similar quando subscreveu à proposição de que há apenas *uma* consciência, e não muitas, e que todo o mundo existe sob a forma e através da consciência.

Quando o matemático holandês subscreve a essa proposição, ele faz um uso ambíguo da expressão “mente”. Por exemplo, considere a seguinte citação: “[u]ma vez que não há pluralidade de mentes, muito menos há uma ciência da mente plural” (BROUWER, 1975 [1948], p. 485). Nesse contexto, ao explicitar a característica da “unicidade”, Brouwer utiliza a expressão “mente”. Contudo, de acordo com a distinção que fazemos, a expressão mais adequada nesse caso deveria ser “consciência”. Essa distinção é feita em decorrência do fato de que é possível atribuir multiplicidade – mesmo que ilusória – à mente, mas não à consciência, uma vez que soaria estranho se referir à consciência de “fulano” ou “ciclano” como *absolutamente* distinta, quando abstraímos suas distinções mentais qualitativas. Esse ponto era muito importante para Brouwer, visto que ele chegou a desenvolver uma espécie de argumento sobre a impossibilidade da pluralidade de consciências (BROUWER, 1975 [1948]).

Exploramos na subseção seguinte o caso da dupla negação e sua conexão com a filosofia indiana. O objetivo é mostrar que Brouwer foi inspirado pela BG, em alguma medida, ao desenvolver algumas das perspectivas de sua filosofia.

1.2.3.2 A questão de a dupla negação não implicar uma afirmação e sua relação com o terceiro excluído

Como é reconhecido em toda a literatura sobre intuicionismo lógico e matemático, uma das grandes contribuições de Brouwer foi sua revolução na lógica subjacente da matemática. Isto é, ele mostrou que o terceiro excluído não é um princípio lógico *universalmente* válido para todos os contextos, especialmente na matemática. É comum nos depararmos com a queixa de que a lógica e a matemática intuicionistas são apenas mais exigentes com a noção de “prova” – ao não aceitar a redução ao absurdo como um método *universal*, por exemplo. Todavia, não se trata *apenas* disso. *Uma das maiores vantagens que o intuicionismo proporcionou ao Ocidente é o fato de que a sua lógica permite a expressão de determinados conteúdos que não podem ser expressos na lógica clássica.*

Um deles é a possibilidade de uma leitura distinta da negação, pois, a partir do intuicionismo, entende-se que nem toda *dupla* negação *implica necessariamente* uma afirmação. Essa distinção é muito importante, porque possibilita uma *capacidade de expressão semântica* de conteúdos cognitivos *sutis* que não são revelados na lógica clássica. Em outras palavras, de uma perspectiva lógica intuicionista, *quando* toda leitura possível da dupla negação é a *equivalência* lógica-semântica de uma afirmação, alguns conteúdos cognitivos se tornam, por assim dizer, obscurecidos e são tratados como impossíveis ou inexistentes. Em síntese, tudo o que a lógica clássica expressa, o intuicionista conseguiria expressar desde que assumisse (A v ~A). Contudo, o contrário não é verdade. A lógica clássica não conseguiria expressar tudo que o intuicionista consegue. Isso significa que há toda uma dimensão semântica que simplesmente escapa à lógica clássica. Do ponto de vista intuicionista, o posicionamento da lógica clássica implica uma “miopia” semântico-cognitiva.

Desse modo, a revolução intuicionista é muito mais profunda que apenas uma exigência mais forte em relação à noção de "provas": a lógica de Heyting permite a expressão de determinados conteúdos cognitivos *sutis*, e até mesmo ontológicos, em alguns casos. Como veremos, há casos de expressões de conteúdos que não estão de acordo com a lógica clássica, mesmo em textos hindus com os quais Brouwer teve contato. Isso, pontuamos, deve ser levado em consideração, pois sugere que os avanços que tivemos em lógica no Ocidente já se encontravam, de alguma forma, em textos orientais, como naqueles que mencionamos.

A questão de a "dupla negação não *implicar* sempre e *necessariamente* uma afirmação" está relacionada a uma leitura *diferente* do terceiro excluído. Entretanto, qual é a relação entre o princípio do terceiro excluído e a dupla negação? Ora, segundo o princípio do terceiro excluído, "'toda proposição é verdadeira ou falsa', e não é possível uma alternativa". Se toda proposição só tem esses dois valores de verdade, ao negar que uma proposição seja verdadeira, teríamos necessariamente a afirmação de sua falsidade. Assim, se alguém afirma "p", então necessariamente negar que "não-p", portanto, "não-não-p" seria *equivalente* a "p" – uma vez que só temos duas alternativas: a verdade de "p" ou a falsidade de "p". Chamaremos isso de "negação implicativa", i.e., toda negação implica alguma afirmação do ponto de vista de uma leitura forte e universalista do terceiro excluído.

No entanto, de um ponto de vista intuicionista, são possíveis negações *não* implicativas. Isso não significa que o intuicionismo se compromete com a ideia de que *toda* negação não implique alguma afirmação de certo tipo, mas apenas que são *possíveis* outros casos. Vejamos um exemplo de uma citação da BG, que foi lida por Brouwer: "13.13 O supremo Brahman não tem começo. Isso é chamado nem ser, nem não-ser" (BHAGAVAD GITA, 2006, p. 539). Nessa citação, temos um exemplo de dupla negação. O leitor pode observar que a *ordem* das razões das negações importa nesse caso: primeiro se nega "ser"; e depois se nega a negação de "ser". O que ocorre aqui não é uma contradição, pois vários comentadores desses textos se defendem da acusação de contradição dessa passagem (BHAGAVAD GITA, 2006). Não é uma contradição, pois não se *afirma* uma conjunção de "nem ser & nem não-ser". O que ocorre aqui também não é uma mudança de ideia, i.e., primeiro se nega "ser" e depois *se rejeita* a "negação do ser". Salientamos que, para essa escola, o objetivo é não sustentar/predicar nenhuma afirmação sobre Brahman. O conteúdo expresso aqui só pode ser entendido se tivermos uma leitura mais *suave* e não universalista do terceiro excluído. Em outras palavras, qualquer que seja o conteúdo expresso nessa passagem, não é um conteúdo cognitivo que pode ser lido através da ideia de que "a dupla negação *sempre* implica alguma afirmação", uma vez que uma proposição fosse verdadeira ou falsa. O que é expresso na passagem citada é, no mínimo, o seguinte: *primeiro* se nega "ser", *depois* se nega a "negação de ser", pois o sujeito lógico não se compromete com alguma afirmação, mesmo que essa afirmação seja uma negação.

Ora, o contato de Brouwer com a BG provavelmente o levou a direcionar sua atenção para esse tipo de expressão "hermética". Talvez ele tenha vislumbrado ali a possibilidade, que provavelmente já indagava, de uma dupla negação não necessariamente implicar uma afirmação. Ele percebeu que há todo um terreno de conteúdos cognitivos *sutis* que podem ser expressos através de um tratamento diferente da negação. No entanto, isso só seria possível por meio de uma revolução da lógica subjacente que rejeitasse a universalidade do terceiro excluído.

Recorremos aos apontamentos e reflexões acima para sinalizar que na filosofia indiana já havia um tipo de uso de dupla negação que não era *necessariamente* equivalente a uma afirmação. Uma vez que o matemático holandês foi influenciado por textos hindus, os quais formam certa parte da filosofia indiana, é provável que ele tenha incorporado, a partir dessas leituras, o uso da dupla negação como "não sendo equivalente a uma afirmação". Isso levou à possibilidade de uma leitura diferente do terceiro excluído que não é nem forte, nem universalista, enquanto princípio válido da lógica. *Se* nossa hipótese for razoável e convincente, indicaremos que pelo menos parte das origens da revolução lógica do intuicionismo matemático do topologista – que ocorreu no Ocidente no século passado –, não veio do Ocidente, mas do Oriente. Assim, ao considerar que Brouwer teve contato com a filosofia hindu, extraímos a proposição de que a influência oriental em sua filosofia é significativamente mais relevante do que se reconhece, em geral.

1.2.4 A distinção (revisitada) entre mente e consciência

Nesta tese de doutorado, uma das questões mais importantes concernentes ao idealismo brouweriano diz respeito à distinção entre a consciência e a mente, de modo que a primeira é constituída não-intencional e não-sequencialmente, e com a segunda ocorre o oposto. Buscamos analisar essa distinção conceitual que há entre elas. Essa distinção é importante para sinalizar a origem da intuição matemática de Brouwer e das entidades matemáticas na dimensão dos próprios fenômenos. Destarte, essa distinção aponta para a ocorrência de que entidades mentais são sequenciais e que a própria consciência (em si mesma) não é. Para o geômetra, as entidades matemáticas são construções mentais e, como tais, são sequenciais. Portanto, de certo modo, entidades matemáticas possuem sua existência instaurada na própria natureza do tempo, uma vez que o tempo em si mesmo é, em algum sentido, a *própria* sequencialidade. No entanto, não se trata do tempo no sentido de eventos ordinários, como, por exemplo, o nascimento e o envelhecimento de uma espécie em extinção. A noção de "temporalidade" aplicada a entidades matemáticas é de uma ordem temporal *relativamente* distinta dessa ordem ordinária do tipo de fenômeno mencionado. Para que isso seja elucidado, é necessário compreender todo o esquema conceitual a que Brouwer subscreve ao longo da sua obra filosófica.

Apesar de acreditarmos que a distinção entre a mente e a consciência esteja presente em toda a filosofia do topologista, tal distinção não aparece da mesma forma em todos os seus escritos. Por exemplo, muitas vezes o filósofo holandês utiliza as expressões "mente" e "consciência" de forma ambígua ou praticamente intercambiável. Isso provavelmente diz respeito ao tipo de leitores a que os textos eram dirigidos. Para fins de esclarecimento filosófico, enfatizamos essa distinção como um *pressuposto* da *nossa* leitura, o qual será usado como uma espécie de lupa para compreender a filosofia da matemática de Brouwer em todos os seus escritos. Para elucidar essa distinção, realizamos a análise dos dois textos de sua autoria mencionados anteriormente.

O raciocínio por detrás desse tipo de distinção, que a justifica/explica, é que a mente sequencial é ciente de suas próprias modificações. Nesse sentido, apenas a consciência não-sequencial, que não se modifica com diferentes cognições sequenciais momentâneas, é capaz de ser ciente dessas modificações. Como é possível perceber, inteirado desse tipo de raciocínio, Brouwer subscreveu a uma distinção entre a consciência e a mente de forma análoga. O matemático holandês entendia que a distinção entre elas aparece mais claramente quando a mente começa a se afastar de sua verdadeira natureza, – "seu lar mais profundo" (BROUWER, 1975 [1948], p. 480) – e, a partir disso, começa a se movimentar e a construir sequências de todo tipo. Apesar desse afastamento, o qual o leitor poderia denominar como "ilusão", a natureza das coisas nunca abandonou a sua identidade, uma vez que "esse mundo dos fenômenos [...] existe apenas através e na forma da consciência intuitiva" (BROUWER, 1975 [1905], p. 4).

Para o autor, todas as aparências espaço-temporais deveriam ser entendidas idealisticamente. Todavia, por assumir um tipo de cognição que existiria de modo atemporal e não-espacial, ele então as entendia como oscilações posteriores. Brouwer (1898 [BMS1 A], 14, apud VAN STIGT, 1990) pontua que o tempo e o espaço pertencem às imagens perceptuais e que a consciência é independente delas.

Essas imagens perceptuais existem de modo sequencial. Contudo, para o geômetra, há um aspecto que não é redutível às imagens perceptuais, embora tenha algo a ver com elas. Tal aspecto, Brouwer trata como consciência. Nesse caso, aqui há uma distinção clara entre o domínio da mente – imagens perceptuais – e o domínio do que não pode ser mental, nesse mesmo sentido. É essencial para a filosofia da matemática do topologista uma distinção entre uma sequência *amorfa* de cognições, e/ou imagens perceptuais, e uma cognição dessa sequência que a reconheça sem "ser tocada" pelo tempo e, portanto, sem ser sequencial. Apesar disso, tanto a sequência de cognições quanto a cognição não-sequencial compartilham a mesma natureza, i.e., ambas compartilham a mesma forma de "ser cognição". Algumas vezes o autor se referiu a isso como "verdadeiro *self*" e, outras vezes, como "consciência". Sobre esse "verdadeiro *self*", Brouwer (1975 [1905], p. 2, grifo no original) afirma que "[o] que esse *[s]elf* é nós não conseguimos mais dizer; nós não podemos nem mesmo argumentar sobre isso, pois – como sabemos – todo falar e argumentar constituem a atenção em grande distância do *[s]elf*".

Na concepção dele, toda a interação que ocorre entre os denominados "mundo interno" e "mundo externo" acontece por causa desse afastamento do ser senciente de seu "verdadeiro *self*". Segundo essa perspectiva, a distinção entre o mundo interior e o mundo exterior não é verdadeira, pois é *causada* devido a uma *falta* de compreensão do "verdadeiro *self*". Nesse sentido, toda a "objetificação" é uma espécie de ignorância sobre a verdadeira natureza de todas as entidades. Essa *verdadeira natureza* diz respeito ao fato que todas elas são meras aparências no "espaço" da consciência. No artigo *Consciousness, Philosophy and Mathematics*, esse "verdadeiro *self*" é transformado conceitualmente em "consciência":

> [a] *consciência* em seu lar mais profundo parece oscilar lentamente, sem vontade e reversivelmente entre a quietude e a sensação. E parece que apenas o status da sensação permite o fenômeno inicial da referida transição. Esse fenômeno inicial é um *movimento do tempo*. Com o passar do tempo, uma sensação presente na consciência cede lugar a uma outra sensação de tal maneira que a consciência retém a primeira como sensação passada. (BROUWER, 1975 [1948], p. 480, grifo no original).

O fato de as entidades aparecerem sequencialmente ocorre em decorrência da atividade da mente que se distancia da consciência. O que provavelmente aconteceu foi que, em um momento *mais maduro* e *elaborado* de sua filosofia, o geômetra passou a compreender o conceito de "verdadeiro *self*" *apenas* e *unicamente* como "consciência" – *sem* o “verdadeiro *self*” –, embora não no sentido de “mente” que seria sequencial e processual (BROUWER, 1981). No mesmo artigo, Brouwer (1975 [1948], p. 480, grifo no original) afirma que

> [c]om o passar do tempo, uma sensação presente na consciência cede lugar a uma outra sensação de tal maneira que a consciência retém a primeira como sensação passada, e, além disso, através dessa distinção entre presente e passado, se afasta de ambos e da quietude, e se torna *mente*.

Em síntese, para finalizarmos, temos dois tipos de cognição: (i) a cognição atemporal e (ii) as sequências de cognições que são reconhecidas por (i). A partir desse esquema, é possível compreender várias noções importantes da filosofia da matemática de Brouwer, como os conceitos de “espaço” e “tempo” e as noções dos “dois atos do intuicionismo” e de “entidade matemática” (que são sequências de cognições reconhecidas pela cognição atemporal dos sujeitos cognoscentes). Na próxima seção, enfocamos a obra *On the Foundations of Mathematics* (1975 [1907]), de Brouwer, e suas conexões filosóficas.

1.3 Preliminares sobre *On the Foundations of Mathematics* (1907) de Brouwer

Em 1905, Brouwer começou a trabalhar na sua dissertação, *On the Foundations of Mathematics*. Naquele momento, ele já estudava fundamentos da geometria, teoria dos números, topologia e teoria dos números transfinitos. As bases da filosofia da matemática de Brouwer foram derivadas de seu estudo do idealismo transcendental de Kant, além das demais influências já mencionadas. Apesar de Russell e Hilbert serem figuras presentes na dissertação, os teóricos que mais influenciaram Brouwer certamente foram Kant e Poincaré. O geômetra se alinhava a Kant em relação à intuição do tempo, embora tenha rejeitado a intuição do espaço no sentido kantiano.

As influências kantianas e poincarenianas aparecem da seguinte maneira: a noção de “intuição” de Kant inspirou as bases idealistas da filosofia da matemática de Brouwer; e as reflexões de Poincaré afetaram consideravelmente a compreensão de espaço e de *continuum* do matemático. Já a reação de Brouwer a Russell é bastante crítica, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da geometria e à noção de “espaço”; e a influência de Cantor, mesmo que inequivocamente presente, é bastante sutil.

Para alcançar os objetivos deste primeiro capítulo, é preciso expor brevemente a base idealista da filosofia da matemática de Brouwer. Em sua dissertação já era possível reconhecer traços idealistas no tratamento que dava à noção de "*continuum*" e a todos os fundamentos da matemática. Isso fica claro, quando observamos que o autor assume que a matemática possui uma fonte – uma *origem*, por assim dizer. A natureza dessa fonte deve ser entendida idealisticamente, ou seja, como *integrada* pela própria consciência, pela estrutura do tempo e pela intuição do tempo.

Na próxima subseção será exposta, de modo breve, essa base idealista da construção da matemática e algumas de suas outras influências.

1.3.1 A base idealista da construção da matemática de Brouwer

Para um entendimento plausível da teoria intuicionista do *continuum*, é preciso apresentar brevemente o tipo de filosofia que fundamenta a perspectiva de Brouwer, que é caracteristicamente idealista. Essa tendência não é algo absolutamente singular na história e na filosofia da matemática. Vejamos a opinião de Bishop e Bridges (1985, p. 6-7) sobre esse tópico específico:

> [a] geometria era altamente idealista desde a época de Euclides e dos antigos até à época de Descartes [...]. Infelizmente, a promessa apresentada para a matemática pela aritmetização do espaço não foi cumprida, em grande parte devido à intervenção, por volta da virada do século, do programa formalista. A formalização bem-sucedida da matemática ajudou a manter a matemática em um curso errado. [...] A matemática torna-se um jogo de conjuntos, o que é um belo jogo até onde consegue ir, com regras admiravelmente precisas. [...] Claro, tendências idealistas estiveram presentes, se não dominantes, na matemática desde os gregos, mas foi necessário todo o florescimento do formalismo para matar o *insight* sobre a natureza da matemática que sua aritmetização poderia ter proporcionado.

De acordo com os autores, apesar de a matemática ser idealista em algum sentido, como exemplificada no caso da geometria, após determinados eventos históricos e certos projetos filosóficos – especialmente, o formalismo –, o *insight* idealista passou a ser despercebido, ignorado ou mesmo subestimado. Todavia, como podemos notar brevemente nessa citação, a matemática tem sua natureza elucidada dessa forma, mais apropriadamente, para explicar a sua inteligibilidade e a sua aplicabilidade, a partir de uma perspectiva idealista.

Entretanto, é preciso considerar que há uma pluralidade de modelos de idealismo, e que Brouwer, de certo modo, formou uma escola própria voltada para a matemática intuicionista. Uma nota definitória dessa sua perspectiva é a ideia de que as coisas que desempenham o papel de "entidades" na ontologia seriam "dependentes de conceitos", dado que a consciência seria aquilo que desempenharia o papel crucial na construção de conceitos matemáticos e científicos.

A principal tese do idealismo do topologista é a de que só podemos asserir a *existência* de algo na medida em que lhe atribuímos um "conteúdo cognitivo"; em outras palavras, não podemos sustentar que algo exista caso não seja construído uma *cognição* para aquilo com bases legítimas. Nesse sentido, para ele, de fato há um *equacionamento* entre a *"realidade"* e a experiência da própria *consciência*. A noção de "verdade" só tem sentido se ela ocorrer *enquanto* experiência da consciência. Podemos compreender o que Brouwer sugere da seguinte forma: a "verdade" só é relevante para nós na medida em que podemos expressar um conteúdo cognitivo não-trivial acerca daquilo que é expresso *como* verdadeiro. O geômetra propõe de forma incisiva que a "verdade está somente na [própria] realidade, i.e., nas experiências passadas e presentes da consciência" (BROUWER, 1975 [1948], p. 488).

A experiência da mente é também a experiência de construção de conceitos. A asserção "a verdade está somente na [própria] realidade, i.e., nas experiências passadas e presentes da consciência" é o fundamento de toda matemática construtiva e/ou de qualquer atividade conceitual, pois é a partir da mente (enquanto "construtora de conceitos") e de sua relação com o tempo que o *continuum* e a intuição da matemática se fundamentam.

É razoável questionar: o que esse idealismo significa do ponto de vista da *atividade* matemática? No que diz respeito a essa atividade e aos fundamentos da matemática em geral (como a *construção* de uma prova matemática, por exemplo), a própria natureza da prova teria de ser necessariamente de "natureza mental". Assim, a construção da prova matemática teria de ser uma construção *mental* e essa, por sua vez, seria *expressa* em signos, em algum tipo de linguagem que teria seu sentido determinado pelas construções conceituais. Segundo o autor, a "[m]atemática intuicionista é uma construção mental, essencialmente *independente* da linguagem" (BROUWER, 1975 [1947], p. 477, grifo adicionado).

Essa construção mental, na opinião do geômetra, não é aquela feita por um sujeito empírico isolado, uma vez que, para ele, não faria sentido, no contexto da construção da matemática, se referir a mentes no plural – "[u]ma vez que não há pluralidade de mentes, muito menos há uma ciência da mente plural" (BROUWER, 1975 [1948], p. 485). Dummett (2000, p. 5, grifo no original) expressa muito bem a visão por detrás desse intuicionismo matemático:

“a única coisa que pode fazer uma declaração matemática verdadeira é uma prova do tipo que podemos oferecer: na verdade, não uma prova em um sistema formal, mas uma prova *intuitivamente* aceitável, isto é, um certo tipo de construção *mental*”.

O que faz uma declaração matemática ser verdadeira não é uma “linguagem” de algum “sistema formal” (para Brouwer, “linguagem” significa “signos e/ou agregados de signos”), nem sua “consistência”, mas sim a sua construção mental. Em síntese, trata-se de uma ontologia que se caracteriza como “mental”, ou seja, é constituída de “conceitos”. Dummett (2000, p. 5) expande esse raciocínio ao afirmar que uma teoria matemática,

> para um intuicionista, se relaciona com as nossas próprias operações mentais: os próprios objetos matemáticos são construções mentais, isto é, [são] objetos do pensamento não meramente no sentido sobre o qual são pensados, mas no sentido que, para eles, *esse est concipi*.

Assim, na perspectiva do autor, o intuicionismo não assere que a matemática realiza construções mentais sobre entidades matemáticas. Isso significaria que a construção mental é uma espécie de linguagem sobre outras entidades. Para o intuicionismo, as entidades matemáticas são, no sentido de identidade, a construção mental da consciência.

Para Dummett, esse idealismo de Brouwer tem um impacto tão profundo nos fundamentos da matemática que é devido a essa ontologia que decorre uma *revisão* e uma recusa do princípio do terceiro excluído como lei lógica válida para a matemática e para a lógica. Nas palavras do filósofo inglês,

> [é] por essa razão que a reconstrução intuicionista da matemática tem até mesmo de questionar a lógica sentencial empregada no raciocínio clássico. [...] O mais renomado princípio subjacente a essa revisão é a rejeição da lei do terceiro excluído: uma vez que não podemos, salvo as declarações mais elementares, garantir que podemos encontrar uma prova ou uma refutação de uma dada declaração, então não temos o direito de assumir, para cada declaração, que ela seja ou verdadeira ou falsa; portanto, nem de oferecer como uma prova de um teorema uma demonstração que é derivável de uma assumpção de verdade ou falsidade de alguma proposição ainda não decidida. (DUMMETT, 2000, p. 5).

Heyting, um discípulo de Brouwer, confirma que é o tratamento das entidades matemáticas enquanto construções mentais que leva o fundador do intuicionismo a perceber a necessidade da rejeição do terceiro excluído no desenvolvimento de uma lógica diferente para alguns objetos matemáticos. Heyting (1956, p. 1) explica

> [a] ideia de que, para a descrição de alguns tipos de objetos, uma outra lógica pode ser mais adequada do que a habitual [...]. Entretanto, foi Brouwer quem descobriu

> um objeto que realmente requer uma diferente forma de lógica, a saber, a construção matemática mental [...]. A razão é que, na matemática, desde o início lidamos com o infinito, enquanto a lógica comum é feita para argumentar sobre coleções finitas.

Podemos ver que há tanto uma identificação da ontologia de "entidades matemáticas" com a ideia de "construção mental", como também uma ideia de que esse tipo de entidade matemática exigiria uma lógica diferente da habitual, à luz do fato de que a infinitude é, justamente, a principal das entidades matemáticas[5]. Dummett confirma que a contribuição mais importante do intuicionismo de Brouwer é justamente o tratamento oferecido por ele à noção de "sequências infinitas", a qual, como veremos, é essencial para o entendimento do *continuum* intuicionista, além de estar profundamente interligada, na ontologia idealista, à rejeição do terceiro excluído. O filósofo inglês afirma que "[a] reconstrução intuicionista não consiste apenas em uma revisão da lógica subjacente: de importância quase equivalente é o tratamento da noção de sequências infinitas" (DUMMETT, 2000, p. 5).

A função desempenhada pelo idealismo, pela percepção de "existência" *como* "*construtibilidade* mental", não pode ser subestimada no intuicionismo de Brouwer. Assim, esse papel da construtibilidade conceitual intuitiva é tão forte na obra do topologista que, como vimos, segundo Heyting, ele *equiparou* "construtibilidade" e "existência". Nesse sentido, só podemos asserir que uma entidade matemática existe se pudermos construi-la. De acordo com Heyting (1956, p. 2),

> [s]e "existir" não significa "ser construído", isso deve ter algum significado metafísico. Não pode ser a tarefa da matemática investigar esse significado ou decidir se é sustentável ou não. [...] [O] programa de Brouwer implica que estudemos a matemática como algo mais simples, mais imediato que a metafísica. No estudo das construções matemáticas mentais "existir" deve ser sinônimo de "ser construído".

Brouwer, segundo Heyting, não estava interessado meramente em refutar entidades matemáticas metafísicas. O ponto do matemático holandês consistia em somente se comprometer com o que fosse necessário para *construir intuitivamente* as entidades matemáticas.

Todo esse fundamento idealista da filosofia brouweriana, que gerou tais consequências para a lógica e para a matemática, é assumido por vários de seus comentadores. Segundo Van Stigt (1990, p. 172),

---

[5] Para uma discussão detalhada sobre o tópico da "infinitude" entre Dummett e Brouwer, ver Oliveira (2019).

> [a] matemática é uma atividade da [m]ente, não com abstrações aristotélicas, mas com elementos recém-criados apenas pela [i]ntuição. Em nenhum estágio da construção matemática elementos podem ser introduzidos, os quais seriam resultados da abstração a partir de um mundo físico e careceriam dessa linhagem puramente intuitiva.

Kuiper (2004) também discute sobre um aspecto do seu entendimento da filosofia de Brouwer, a qual leva em consideração apenas o "*self*". Em suas palavras, "a interpretação de Brouwer desses termos deveria ser entendida do seu ângulo solipsista" (KUIPER, 2004, p. 180). Como foi mencionado anteriormente, *consideramos mais plausível optar pela noção de "consciência" ao invés de "self", visto que, na fase mais madura e elaborada dos fundamentos da matemática de Brouwer, tal como interpretamos, ele abandonou o conceito de "self" e passou a utilizar somente o conceito de "consciência".*

Para Van Stigt (1990), as visões filosóficas do topologista possuem semelhanças com as de alguns outros idealistas. Em suas palavras,

> [a]o analisar as visões filosóficas de Brouwer, o leitor encontra semelhanças impressionantes com a interpretação [...] solipsista de Fichte do subjetivismo de Kant, com o pessimismo de Schopenhauer e com o intuicionismo de Bergson. Ainda assim, a filosofia de Brouwer é única; ao assimilar certas partes de várias formas de idealismo e por impor um papel predominante para a matemática no processo geral do pensamento [...], ele criou uma filosofia que é estritamente própria. (VAN STIGT, 1990, p. 112).

Não é necessário discutir se as terminologias mencionadas, tais como "subjetivismo" e "solipsismo", são adequadas, nas perspectivas de Kuiper e Van Stigt. Ao invés disso, apenas *subscrevemos* à ideia de que, para Brouwer, a "consciência" se tornou o conceito mais apropriado para sustentar os seus fundamentos da matemática. Afinal, para o filósofo holandês, "esse mundo dos fenômenos [...] existe apenas através e na forma da consciência intuitiva" (BROUWER, 1975 [1905], p. 4).

1.3.2 Brouwer sobre Kant na obra *On the Foundations of Mathematics*, de 1907

Apesar da originalidade do idealismo de Brouwer, ele conseguiu desenvolvê-lo graças à influência significativa de vários pensadores. Como já mencionado, o mais importante foi Kant, do qual Brouwer se considerava um "continuísta" em vários aspectos, como no sentido de que aceitava a intuição do tempo como único elemento *a priori* de *toda* a atividade intelectual (BROUWER, 1975 [1907]). Apesar disso, o matemático holandês fez várias críticas a Kant, especialmente em relação ao seu aspecto descontinuísta. Em uma seção da obra *On the Foundations of Mathematics*, intitulada “O ponto de vista de Kant”, o geômetra enfatiza que o principal propósito daquele trabalho seria “retificar o ponto de vista de Kant sobre aprioridade na experiência e atualizá-lo” (BROUWER, 1975 [1907], p. 68). Nesse sentido, é notável que o geômetra concebia como importante o papel que Kant tinha em sua filosofia, em especial em relação à recusa daquilo que é refutável em Kant e à atualização dos pontos redimíveis de sua filosofia.

Apesar de ter aderido à concepção de tempo como forma da intuição, o espaço como forma da intuição foi recusado, e foi nessa recusa que ele entendia estar “atualizando o ponto de vista de Kant”. Em síntese, a crítica do topologista a Kant está profundamente relacionada a dois aspectos de sua estrutura filosófica: (i) à rejeição da ideia kantiana de que o espaço tem status similar no que diz respeito ao papel da intuição do tempo; e (ii) à concepção de “*continuum*” relacionada à noção de “espaço”.

Na obra *On the Foundations of Mathematics* (1975 [1907]), a primeira vez que Brouwer menciona Kant aparece na seção “Problemas do espaço e do tempo”. A reação dele a Kant consiste fundamentalmente em uma recusa da ideia de que o espaço euclidiano seja um atributo invariável na experiência do intelecto. Em suas palavras, Kant defende a seguinte tese sobre o espaço: “[a] percepção de um mundo externo através de um espaço tridimensional euclidiano é um atributo invariável do intelecto [...]; outra percepção de um mundo externo [...] é uma assumpção contraditória” (BROUWER, 1975 [1907], p. 68).

De acordo com o filósofo holandês, Kant demonstra essa tese a partir das seguintes noções: (i) não podemos imaginar experiências externas independentes do espaço e, por conseguinte, (ii) para o conceito de “espaço empírico”, a geometria euclidiana seria a única válida, i.e., seria impossível existir uma outra geometria. Portanto, (iii) “a geometria euclidiana tridimensional é uma condição necessária para todas as experiências externas e o único receptáculo possível para a concepção de mundo externo” (BROUWER, 1975 [1907], p. 68).

Brouwer faz algumas observações *contra* esse argumento. A primeira é uma fortemente fenomenológica: para ele, as experiências ocorrem independente de *qualquer noção* geométrica prévia e conceitualmente adquirida. Desse modo, o entendimento matemático de espaço é conceitualmente *posterior* à experiência *originária* do espaço. O geômetra busca, assim, direcionar o olhar para um aspecto mais intuitivo e originário dessa experiência. Segundo ele, “as classificações matemáticas de grupos de experiências, daí também a criação de uma concepção espacial, são ações livres do intelecto, e podemos arbitrariamente referir nossas experiências a essa catalogação, ou submetê-las de forma não matemática" (BROUWER, 1975 [1907], p. 68).

Dessa perspectiva, o matemático holandês considera que a primeira alegação de Kant não procede. Isto é, é falsa a ideia de que, com base na suposta "aprioridade" da geometria euclidiana, não podemos imaginar nossas experiências externas independentemente de uma concepção espacial euclidiana. De acordo com Brouwer (1975 [1907], p. 68, grifo no original), a primeira premissa

> [de que] nós não podemos imaginar nossas experiências externas conhecidas separadas de nossa concepção espacial é definitivamente falsa. Com isso, a conclusão baseada na *aprioridade* da geometria euclidiana tridimensional [...] também deve ser rejeitada.

O topologista sugere que os corpos rígidos empíricos mais grosseiros são apenas aqueles com os quais estaríamos mais familiarizados devido à proximidade regular com a nossa experiência ordinária. Isso, no entanto, implica que todos os corpos da "realidade" sejam dessa forma. Assumir, a partir disso, que todo o espaço funciona do mesmo modo que o espaço da nossa experiência mais ordinária é apenas uma "suposição" que requer mais justificativas, as quais, seguindo Poincaré (1898), não existem para o matemático holandês. Desse modo, para o filósofo holandês, não deveríamos deduzir a aprioridade e a universalidade – no sentido de invariância universal – da geometria euclidiana, nem a partir da "existência de corpos rígidos mais ou menos estáveis" a partir de nossa experiência, nem a partir de uma espécie de "estrutura" sobreposta, como se ela mesma fosse o próprio espaço definitivo e "acabado".

Na obra *On the Foundations of Mathematics* (1907), no que diz respeito a Kant, Brouwer se concentra apenas em explicar a recusa da "aprioridade do espaço euclidiano como invariante", enquanto forma da intuição, e na atualização de alguns temas de sua perspectiva "neokantiana". Contudo, para *reforçar* a "atualização" de temas neokantianos tal como o geômetra os entende, Kant é utilizado por ele como uma referência "intuicionista" mesmo anos depois. A recusa do topologista e a chamada "atualização" da filosofia kantiana da matemática ficam mais claras ainda em um artigo posterior, de 1912, intitulado *Intuitionism and Formalism*, no qual Brouwer (1975 [1912], p. 125) afirma que "[e]m Kant nós encontramos uma velha forma de intuicionismo, agora quase completamente abandonada, na qual o tempo e o espaço são tomados como formas de concepção inerentes à razão".

Nessa citação, ao se referir a “uma velha forma de intuicionismo” de Kant, o autor sugere que o tempo e o espaço eram concebidos de modo simétrico. Em seguida, ele chama a atenção para o fato de que essa velha forma de intuicionismo quase não existe mais, justamente devido a esse tratamento simétrico. O filósofo holandês acrescenta que,

> [p]ara Kant, os axiomas da aritmética e da geometria eram julgamentos sintéticos a priori, i.e., juízos independentes da experiência [...]; e isso explicava sua exatidão apodítica, tanto no mundo da experiência quanto em abstrato. Para Kant, portanto, a possibilidade de refutar leis geométricas e aritméticas experimentalmente não era apenas excluída por uma crença sólida, mas era inteiramente impensável. (BROUWER, 1975 [1912], p. 125).

Ora, atualmente, devido às geometrias não-euclidianas, e apesar da forte crença kantiana contrária, não é mais possível asserir a invariabilidade universal da concepção euclidiana do espaço. Brouwer (1975 [1912], p. 127) corrobora o ponto que

> [o] golpe mais sério para a teoria kantiana foi a descoberta da geometria não-euclidiana, uma teoria consistente desenvolvida a partir de um conjunto de axiomas que diferem daqueles da geometria elementar apenas no que diz respeito [ao fato] de que o axioma das paralelas foi substituído por sua negação.

Dessa maneira, como é possível notar, o erro de Kant, segundo o geômetra, consistia em considerar apenas o espaço euclidiano como o *único* possível.

Para o topologista, não era somente o espaço euclidiano que não deveria ser tratado como “universalmente invariável”, mas *qualquer* concepção de “espaço”. A posição do matemático holandês em relação ao que é a natureza do espaço é construtivista nesse sentido: *não há uma estrutura essencial, imutável e invariante do espaço*, embora, ainda assim, isso não implique a inexistência do espaço. O ponto do filósofo é que qualquer concepção empírica do espaço é convencionada arbitrariamente de acordo com a geometria escolhida, mas que não há nada na própria experiência que nos obrigue a escolher uma concepção específica em detrimento de outras. Logo, após a discussão com Kant, focada nessa questão, Brouwer (1975 [1907], p. 69, grifos adicionados) declara que “não existe um espaço empírico *definido*: podemos catalogar todos os fenômenos em cada espaço, com *qualquer* número de dimensões, e *curvado* tão grotescamente quanto desejarmos, daí também sem livre mobilidade”.

O espaço empírico, para ele, não é simplesmente definido de antemão, à espera da criação de um sistema matemático ou físico representacional que descreva como o espaço é, de fato. A “indefinibilidade” e a “variabilidade” dos entendimentos espaciais nos permitem compreender o espaço empírico de várias formas, com qualquer número de dimensões e de modo estranhamente curvo. A princípio, não há nada de *substancial* no espaço que impeça que qualquer outra concepção seja possível; por conseguinte, o espaço é "insubstancial". O modo de entender conceitualmente o espaço seria determinado pela escolha de qual matemática é construída para a sua compreensão. Assim, o geômetra pontua que "[c]iências empíricas estão ligadas a matemáticas, mas a experiência não pode nunca nos *compelir* à escolha de um sistema matemático definido" (BROUWER, 1975 [1907], p. 69, grifo adicionado).

Essa posição de Brouwer é muito parecida com a de Poincaré (1898, p. 1), segundo o qual

> [n]ossas sensações não podem nos dar a noção de espaço. Essa noção é construída pela mente a partir de elementos que preexistem nela e, a experiência externa é simplesmente a ocasião para a mente exercer seu poder ou, no máximo, um meio de determinar o melhor modo de exercer isso.

Tanto essa ideia apresentada por Poincaré de que a noção de "espaço" é construída pela mente a partir de elementos preexistentes nela, quanto a ideia de que a experiência externa é uma ocasião, um "palco", possuem reflexos na filosofia de Brouwer – dado que o matemático holandês sustenta que não apenas o espaço, mas todo o mundo externo, são construções da consciência.

No que diz respeito ao tempo, o topologista fez apenas alguns ajustes para que fosse possível uma "nova forma" de intuicionismo: um intuicionismo que se comprometesse apenas com a invariância do tempo na atividade intelectual matemática, tempo entendido como equivalente à própria sequencialidade. Para ele, após a derrocada de suas velhas formas,

> [p]or mais fraca que [tenha sido] a posição do intuicionismo após esse período de desenvolvimento matemático, ele se recuperou ao abandonar a *aprioridade* do espaço de Kant, e, em contrapartida, ao aderir mais resolutamente à *aprioridade* do tempo. (BROUWER, 1975 [1912], p. 127, grifos adicionados).

Ao considerar essas asserções, questionamos: que tipo de papel desempenha essa *aprioridade* do tempo na construção da matemática? A resposta a essa pergunta está profundamente relacionada à noção de "intuição". Discutimos mais sobre isso na próxima subseção.

1.3.3 Elementos fenomenológicos na concepção da “intuição” e a construção matemática

Em filosofia da matemática é comum tratar o “construtivismo” como uma escola de filosofia. Em geral, essa escola é caracterizada em contraposição a “escolas realistas”. Brouwer é conhecido como um filósofo e matemático construtivista. Contudo, no que diz respeito à filosofia do matemático holandês, apenas gostaríamos de restringir o uso do conceito “construtivismo”. Para ele, não é verdade que tudo que pode ser, em algum sentido, chamado de “entidade” pode ser tratado como “construtível”. Quando o geômetra discorre sobre a “construtibilidade” das entidades matemáticas, ele tem em mente que elas são construtíveis *sob* a intuição do tempo, que é a própria *base* sob a qual isso acontece. Nesse sentido, a “intuição do tempo” seria uma entidade não-construída, mas *imediatamente* dada à consciência. Em relação a esse ponto, Kuiper (2004, p. 34, grifos adicionados) declara que

> [n]o início da dissertação de Brouwer, [...] o conceito de intuição *primordial* da matemática é introduzido. Essa intuição primordial é a *última* fundação na qual, nos termos de Brouwer, o edifício matemático é construído e [...] consiste na intuição do fluxo do tempo no qual o indivíduo experiencia percepções de mudança.

O comentador utiliza uma metáfora na qual há dois elementos essenciais: o fundamento e o edifício. Desse modo, o autor expressa muito bem a distinção entre o que existe por ser construtível e o que pressupomos como condição de possibilidade para o que é construtível. O *continuum* do fluxo temporal, tal como é experienciado pela consciência, é dado imediatamente e desempenha o papel daquilo que é considerado como condição de possibilidade para a construção de entidades matemáticas. Kuiper (2004, p. 34) explica que

> [e]sse tempo intuído difere essencialmente do “tempo físico” externo, que pode ser numericamente expressado no *continuum* temporal mensurável, que, por sua vez, é o resultado de uma construção sob o *continuum* temporal intuitivo.

O *continuum* do fluxo temporal experimentado pela consciência é de uma natureza diferente do tempo físico. Esse *continuum* é o fundamento fenomenológico, o alicerce, no qual é construído não apenas todo o edifício matemático como também o *continuum* temporal mensurável. Essa construção mensurável do *continuum* temporal tornaria possível tanto o *continuum* matemático, como cada entidade matemática, em um sentido intuicionista. Dessa forma, o *continuum* temporal seria o “material” sob o qual são construídas as entidades matemáticas.

Discutimos na próxima subseção o que significa exatamente intuição primordial do tempo, para Brouwer. A nossa proposta de entendimento é que a intuição do tempo é o reconhecimento noético do *continuum* entre o imediatamente antes e o imediatamente agora.

1.3.3.1 A fenomenologia do momento presente dual e sua continuidade

No mesmo artigo que mencionamos anteriormente, *Formalism and Intuitionism*, Brouwer (1975 [1912], p. 127) explica como ele pensa que é intuído o tempo:

> [o] novo intuicionismo considera a separação de momentos [...] em partes qualitativamente diferentes –, a serem reunidas apenas enquanto permanecem separadas pelo tempo como fenômeno fundamental do intelecto [...], [assim] passando pela abstração de seu conteúdo emocional para o fenômeno fundamental do pensamento matemático: a intuição da una-duosidade.

A "descrição fenomenológica" apresentada por ele diz respeito a como a intuição do tempo ocorre. A partir do *continuum* intuitivo é possível distinguir momentos temporais experienciados na vida ordinária. O tema do tempo e sua relação de como a consciência experiencia isso é a porta de entrada para o problema do *continuum* em Brouwer. Placek (1999, p. 19, grifos no original) sintetiza o que queremos expressar aqui:

> [o fato de que] a consciência oscile entre a quietude e um fluxo de sensações, e que as sensações estejam passando e sendo substituídas por outras, é possível devido ao tempo, ou mais precisamente, ao que ele chama de 'um movimento do tempo'. No tempo movente, uma sensação dá lugar a outra. A primeira já passou, a última é apenas 'agora'. É assim que, segundo Brouwer, nasce a distinção entre passado e presente. O tempo está associado, no sistema de Brouwer, ao surgimento de outra faculdade, a qual ele chama de *atenção temporal*.

Os dois momentos qualitativamente diferentes, tal como a consciência os reconhece, são o momento do "imediatamente agora" e o do "imediatamente antes" ou "*quase* agora". Esses dois momentos são percebidos como fenomenologicamente distintos. Contudo, estão ligados por um *elo coeso*. Então, o tempo é, assim, intuído. Brouwer (1975 [1912], p. 128, grifo adicionado) discorre que

> essa intuição básica da matemática, na qual o conectado e o separado, o contínuo e o discreto são unidos, faz nascer imediatamente a intuição do *continuum* linear, i.e., do "entremeio"[6], daquilo que *não é exaurível pela interposição de novas unidades* e que, portanto, não pode ser pensado nunca como uma mera coleção de unidades.

---

[6] O autor desta tese agradece a sugestão, feita por Laryssa Sousa, da expressão "*entremeio*" nesta citação.

Isto posto, a possibilidade de intervalos intermediários *ad infinitum* tornará possível a construção de sequências de intervalos matemáticos infinitamente convergentes entre si. Assim, por meio dessa intuição de "*dois momentos discretos reunidos por um elo contínuo*", toda a matemática é construída:

> [a] partir dessa intuição do tempo, independente da experiência, todos os sistemas matemáticos, incluindo espaços com suas geometrias, têm sido construídos, e subsequentemente alguns desses sistemas são *escolhidos* para catalogar os vários fenômenos da experiência. Aqui tem de ser observado que, a fim de catalogar essas sequencias de fenômenos, que são sempre finitos, na sua maior parte, os sistemas matemáticos infinitos são aplicados, nos quais as sequências finitas são estendidas através da indução. (BROUWER, 1975 [1909], p. 116, grifos adicionados).

Essa intuição do tempo existe de forma independente da experiência de entidades externas. Trata-se de algo que depende fundamentalmente da "interioridade" da ocorrência noética do tempo subjetivo. Para o filósofo, essa ocorrência não é algo que acontece vez ou outra, i.e., ela *sempre* está presente e, se não a notamos é devido à falta do exercício de observação adequada da interioridade. Placek (1999, p. 18, grifo adicionado) explica isso da seguinte forma: "[a] característica marcante da consciência, como diz Brouwer, é que ela *vivencia* sensações. No entanto, elas se manifestam de uma forma que parece ser mais característica do [estado de] sonho ou de semi-vigília do que do estado de completa vigília".

Uma questão importante sobre essa noção de "experiência da consciência" é o fato de que ela não deve ser compreendida como uma "crença", a qual pode ter ou não justificativas de vários tipos. Isto é, *não é um mero estado epistêmico de apenas acreditar que se experiencia algo*. Enfatizamos que se trata da ocorrência noética do tempo subjetivo na consciência. Ora, aqui, não está em jogo se essa ocorrência é real ou não, se é fictícia ou não; o ponto é que o fato da vivência da consciência não pode ser negado sem, ao mesmo tempo, experiencia-lo. O raciocínio do topologista aqui não é apenas um raciocínio *descritivo*. Trata-se, de fato, de um tipo de diretriz, de um raciocínio-guia, para que o leitor possa experienciar por si mesmo o que o filósofo propõe. Em outras palavras, *sem voltar realmente a atenção para a experiência ocorrente da sensação – no momento que ocorre –, não é possível compreender o que Brouwer sugere sobre "movimento do tempo"*. Desse ponto de vista, o que o filósofo propõe é algo que pode ser razoavelmente compreendido através da *percepção direta* de uma sensação, quando experienciada e, por conseguinte, ao permitir espaço para outra.

De certa forma, embora não notemos esse "movimento do tempo", para o geômetra, ele é condição de possibilidade de todo tipo de cognição que venhamos a ter. Expresso de outra maneira, uma vez que todas as nossas cognições experienciadas – enquanto sensações – são cognições sequenciais, então o tempo é tomado aqui como necessário. Placek (1999, p. 19, grifo no original) sintetiza essa ideia da seguinte forma: "[é] importante enfatizar que 'um movimento do tempo' é, para Brouwer, a fonte de todas as atividades cognitivas do sujeito que conhece".

A necessidade da intuição do tempo surge a partir do papel que a consciência desempenha. Em outros termos, não é possível intuir qualquer coisa sem pressupor um papel muito importante para a consciência. Para o filósofo holandês, não seria possível se referir de forma realmente *significava* à intuição do tempo a partir de uma perspectiva que não atribua algum tipo de *"realidade"* à consciência.

É com essa compreensão do panorama idealista ligado aos fundamentos da matemática que o matemático holandês propõe seu entendimento do *continuum* do tempo. Esse *continuum* se caracteriza na sua forma puramente intuitiva e, portanto, indivisível e indeterminada, e na sua forma matemática construtível e, por conseguinte, mensurável. Essa parte mensurável, por consequência, é a parte *construída mentalmente*, e *não o continuum do tempo enquanto tal – essa basicamente é apenas a experiência fenomenológica do "imediatamente agora" e do "imediatamente antes" e do elo indiferenciado entre eles*.

As entidades matemáticas são construtíveis a partir da estrutura intuitiva contínua do elo entre a experiência fenomenológica do "imediatamente agora" e do "imediatamente antes". Assim, o *continuum* do tempo enquanto tal é um *continuum* coeso, não-composto, primário e "percebido diretamente" na intuição do elo entre o momento presente e o momento imediatamente passado. É com base na natureza intuitiva do tempo, que são derivadas as ideias de "sequencialidade" e de "composicionalidade", dentre outras noções que são indispensáveis para a construção dos sistemas matemáticos.

1.3.3.1.1 A intuição primordial da "duosidade" e da "multiplicidade" e o *continuum*

A intuição primordial do *continuum* é a intuição do *continuum* coeso, indiferenciado, não-segmentado, indefinido, indivisível e primitivo, i.e., "a intuição da continuidade, da 'fluidez', é tão primitiva quanto daquelas várias coisas concebidas como formadoras de uma unidade" (BROUWER, 1975 [1907], p. 17, grifo no original).

Em um primeiro momento, intuímos o *continuum* como irredutível a um conjunto de pontos. O *continuum* não possui segmentação, nem separação. Ao considerar o *continuum* com essas propriedades, o filósofo holandês entende que o melhor exemplo seria o tempo, por ser indiferenciado, sem partes, não-segmentado e primitivo. Se trata de uma espécie de “fluxo” sem um “começo” e sem um “fim”; consequentemente, também não faria sentido pensar em um intervalo de um ponto intermediário absoluto ou discreto.

Esse seria o *continuum* primordial, no sentido fenomenológico do termo, que o topologista distingue de um segundo, entidade de uma ‘intuição secundária’, que seria o *continuum matemático.* Essa última intuição pode ser chamada de intuição da duosidade, pois envolve necessariamente um intervalo e uma possibilidade infinita de interpolação de “indivíduos”.

Kuiper elencou algumas características para o *continuum* intuitivo e para o *continuum* mensurável, a partir da perspectiva de Brouwer, de modo que o primeiro fosse tratado como o *continuum* “real”, não-construído, não-composto, em contraposição ao segundo, que seria fictício, construtível, composto. Essa distinção já aparece claramente desde a dissertação do geômetra. Segundo Kuiper (2004, p. 84),

> Brouwer distinguiu o *continuum* intuitivo (intuitivamente dado através apenas da intuição primordial, não construído, não composto de pontos) do *continuum* matemático (ou *continuum* definível, ou *continuum* fictício), que consiste em pontos, construídos sob o *continuum*.

A relação entre ambos diz respeito especialmente ao fato de que o primeiro desempenha o papel de condição de possibilidade para poder pensar em “pontos matemáticos”. Kuiper (2004, p. 75), por exemplo, afirma que “uma sequência de pontos [...] pode ser construída sob o *continuum* intuitivo por meio da intuição primordial da duosidade”. O *continuum* intuitivo é tomado como base, enquanto a intuição da duosidade é necessária para explicar a ideia de “intervalos” e de possibilidades de inserção de nova “segmentação”, sem a qual não é possível tratar da construtibilidade de entidades e de estruturas matemáticas. O “construtivismo” matemático de Brouwer só se sustenta a partir desse “segundo” nível, depois da intuição da duosidade, na medida em que ela é a condição de possibilidade para o *continuum* matemático.

Essa concepção do *continuum* leva o topologista a rejeitar várias noções do que é o “espaço”. Por exemplo, a ideia de “um espaço com uma *única* estrutura matemática possível” é rejeitada, uma vez que, com base no *continuum* intuitivo, é possível construir vários modelos espaciais com *n* estruturas. Em sua dissertação, o principal alvo de críticas, no que concerne a concepções espaciais, é o filósofo inglês Russell. Para o último, é filosoficamente necessário pressupor uma certa concepção de "espaço" para, então, tratar de "experiências externas". Como resposta a isso, Brouwer concentra suas críticas na ideia de que *o* "espaço externo" é *a condição* de possibilidade para experiências espaciais.

1.3.3.2 A intuição primordial do *continuum* como fonte da matemática na obra *On the Foundations of Mathematics*

Brouwer consegue demonstrar que sua matemática intuicionista é possível de ser desenvolvida sem fazer fortes compromissos ontológicos para além da noção de "intuição", por exemplo, sem recorrer à noção de "axiomas lógicos". Contudo, essa noção de "intuição" é acompanhada de sua dosagem própria de noções "ontológicas" discutidas nas seções anteriores.

A primeira vez que a palavra "intuição" ocorre na dissertação do geômetra se encontra em uma seção intitulada "O *continuum*". Nessa seção, Brouwer (1975 [1907], p. 17, grifo no original) afirma que objetiva

> examinar posteriormente a intuição básica da matemática (e de toda a atividade intelectual) como o *substratum*, despojado de toda qualidade, de qualquer percepção de mudança, uma unidade de continuidade e discretude, uma possibilidade de pensar conjuntamente várias unidades, conectadas por um "entre", que nunca é exaurida pela inserção de novas entidades.

Todo o acesso intelectual ao *continuum*, em Brouwer, ocorre através da intuição. Essa intuição é entendida como uma espécie de "substrato", sem nenhuma qualidade empírica de mudança, uma espécie de "unidade" entre o contínuo e o discreto, baseado na possibilidade de conceber "aninhadamente" as várias entidades conectadas por um elo "intermediário". Essa possibilidade é infinita no sentido de que é *sempre possível* a inserção de *novos* intervalos; isto é, como dito no final da citação anterior, não faria sentido se referir a um *fim* com a possibilidade de inserção de novas entidades. Expresso de outra maneira, como discutimos em mais detalhes nos capítulos quatro e cinco, dado que é sempre possível a inserção de novos intervalos, não faz sentido tratar de um "ponto de cumulação lá dado", no qual sequências matemáticas convergem.

Apesar das possibilidades de inserção de novas entidades construídas sob o *continuum* serem *necessariamente* infinitas, o *continuum* é manifestado através da intuição "de um só golpe”, pois os *possíveis* pontos matemáticos enquanto *individuais* não podem ser construídos em sua totalidade. Brouwer (1975 [1907], p. 45) explica que “[o] *continuum* como um todo foi dado a nós através da intuição; uma construção para isso, uma ação que poderia criar da intuição matemática “todos” os seus pontos como individuais, é inconcebível e impossível”. Uma vez que o *continuum* primitivo é condição de inteligibilidade *anterior* para poder expressar pontos matemáticos, os pontos *possíveis* enquanto individuais são potencialmente infinitos e não podem ser construídos como uma totalidade através da atividade matemática.

Em suma, a partir do intuicionismo, podemos compreender a noção de “*continuum*” de modo duplo: (i) o *continuum* intuitivo, base da própria intuição primordial; e (ii) o *continuum* matemático, que é construído a partir do *continuum* intuitivo. Uma vez que as origens do *continuum* intuitivo são a consciência e a sua experiência originária do tempo, então o material dos quais são feitas as entidades matemáticas é mental e, portanto, não pode ser linguístico. Isso levou Brouwer a formular o primeiro ato fundamental do intuicionismo. Veremos mais sobre esse tópico no próximo capítulo.

Capítulo 2
O primeiro ato do intuicionismo:
o desenvolvimento da primeira coluna do edifício do intuicionismo filosófico

Neste capítulo, temos três objetivos: (i) apresentar e discutir o segundo ato do intuicionismo de Brouwer; (ii) mostrar que nesse ato já germinava uma consequência muito importante para o intuicionismo matemático, a qual ganhou forma definitiva no segundo ato do intuicionismo – i.e., introduzir os dos tipos de sequências matemáticas: legiformes e não-legiformes; e (iii) tratar, de forma razoável, de como o primeiro ato do intuicionismo implica uma forma própria de filosofia da linguagem concebida dentro do *background* idealista de Brouwer.

Para alcançar nossos objetivos, começamos, na seção 2.1, intitulada "Considerações introdutórias sobre o primeiro ato", com a apresentação de considerações filosóficas gerais sobre o que se segue. Na seção 2.2., intitulada "O primeiro ato do intuicionismo: a separabilidade entre as entidades matemáticas e a linguagem matemática", discutimos diretamente o primeiro ato. Na seção 2.3, intitulada "As diretrizes da matemática intuicionista e as sequências de escolha enquanto entidades matemáticas", apresentamos diretrizes da matemática intuicionista que sucedem o primeiro ato do intuicionismo e a consequência matemática que nos leva ao terceiro capítulo, a saber, sequências de escolha (*choice sequences*) enquanto entidades matemáticas *legítimas*, que se tornam possíveis também por causa do segundo ato do intuicionismo.

2.1 Considerações introdutórias sobre o primeiro ato

Primeiramente, é necessário fazer uma distinção entre dois níveis basilares: o nível de "entidades matemáticas-*qua*-construções-mentais" e o nível de uma "linguagem mental" que se refere às entidades matemáticas, i.e., a metamatemática.

Segundo Brouwer, a matemática não é uma ciência sobre entidades físicas ou entidades abstratas. Na verdade, a matemática-*qua*-ciência é uma investigação de um *fluxo contínuo* ou/e de "construções matemáticas da mente", no sentido em que a mente existe como um fluxo contínuo temporal. A metamatemática, por outro lado, seria uma ciência sobre a "linguagem que descreve esse fluxo". Como poderá ser visto ao longo desta tese, a ação matemática é fundamentalmente dupla e, portanto, composta de dois atos. Aqui tomamos cada um desses dois atos como “atos constitutivamente mentais e/ou cognitivos”.

Para o topologista, a matemática é “noeticamente constitutiva” no sentido de como experienciamos fenomenologicamente o tempo e, com essa condição atendida, a matemática se torna dependente de *alguma* linguagem *somente* quando ocorre a necessidade de ser *expressa* para fins secundários, como no caso da comunicação e da memorização. O primeiro ato intuicionista, portanto, é justamente reconhecer a distinção entre as entidades matemáticas e a linguagem que é utilizada para enunciar sobre elas. Discutimos detalhadamente sobre esse tópico nas próximas seções.

2.2 O primeiro ato do intuicionismo: a separabilidade entre as entidades matemáticas e a linguagem matemática

A primeira vez que Brouwer realmente definiu *explicitamente* o que seria o primeiro ato do intuicionismo foi em um artigo de 1952, intitulado *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism*. Embora o leitor pudesse alegar que, de certo modo, o primeiro ato do intuicionismo já se encontrava presente no início de sua obra *On The Foundations of Mathematics* (1975 [1907]), o geômetra só ofereceu uma definição *precisa* 45 anos mais tarde. Nesse artigo, o filósofo holandês assere que

> o primeiro ato do intuicionismo separa completamente a matemática da linguagem matemática, em particular dos fenômenos da linguagem que são descritos pela lógica teórica, *e reconhece que a matemática intuicionista é uma atividade essencialmente sem linguagem da mente, com sua origem na percepção do movimento do tempo*. (BROUWER, 1975 [1952], p. 510, grifo adicionado).

É importante notar que Brouwer utiliza a expressão “ato”, e não “axioma” ou “princípio”, para se referir a uma das principais bases de seu intuicionismo, justamente devido ao fato de que ele considerava as entidades matemáticas como ações mentais, as quais tinham sua origem na percepção do movimento do tempo. Dito de outra forma, em certo sentido, o status de ciência só é conferido à matemática no caso de quando uma linguagem matemática é desenvolvida para *expressar* as entidades matemáticas-*qua*-construções mentais. Em outras palavras, a ciência trataria dos signos construídos que pretendem descrever as construções mentais e não *diretamente* delas.

A principal caraterística do primeiro ato do intuicionismo é estabelecer um “ato cognitivo” que realiza uma *distinção* entre a linguagem e as próprias entidades matemáticas.

Essa distinção existe devido à intuição do tempo discutida no final do primeiro capítulo. Uma vez que uma entidade matemática é aquela que existe enquanto construção mental baseada no *continuum* do tempo, então, de modo diferente de uma posição formalista, as entidades matemáticas não poderiam ser *somente* um conjunto de signos fundamentado em axiomas ou definições assumidas, isto é, como *puramente* formais, tal como supõe o formalismo. Assim, as entidades matemáticas também não são entidades independentes da mente em um "espaço abstrato", no qual o trabalho do matemático seria apenas o de "vasculhar" tal espaço e encontrar ou descobrir tais entidades.

Para Brouwer, não seria um problema assumir a possibilidade de várias linguagens matemáticas expressarem a mesma entidade matemática, visto que não haveria nenhum tipo de "essencialismo" na linguagem que a *impediria* de ser reconfigurada de tal modo que pudesse expressar qualquer entidade matemática. Todavia, essa linguagem não é uma entidade matemática no sentido *primário*, embora possa sê-lo em outros sentidos, por exemplo, como no sentido "metamatemático". Isto é, uma linguagem, no sentido daquilo que expressamos ou simbolizamos informal ou formalmente, não é um tipo de entidade *diretamente* construída a partir do *continuum* intuitivo do tempo no sentido em que seriam, a título de exemplo, os números naturais e as sequências de escolha e, portanto, os números reais.

Esse primeiro ato do intuicionismo é imperativo. Em outras palavras, para Brouwer, é como se ele fosse uma ação que informasse que não podemos *tornar equivalentes* as entidades matemáticas às linguagens (signos) que as descrevem.

A definição do que seria o primeiro ato do intuicionismo continua a mesma em um outro artigo de 1954. Nesse texto, intitulado *Points and Spaces*, Brouwer (1975 [1954], p. 523) reitera que "[o] primeiro ato do intuicionismo separa a matemática da linguagem matemática completamente, em particular dos fenômenos da linguagem, os quais são descritos pela lógica teórica".

O geômetra *não* nega a existência da linguagem matemática. O que ele nega é que as linguagens formais ou informais constituam a "natureza" ou a "existência" das entidades matemáticas. Dessa maneira, o filósofo compreende que a linguagem tem outro papel: comunicar, expressar ou auxiliar no exercício da memorização de entidades matemáticas. Assim, a partir dessa distinção entre "linguagem matemática" e "entidade matemática", apresentamos brevemente nas próximas seções algumas noções sobre a natureza das "entidades matemáticas". Na subseção seguinte, tratamos um pouco mais da filosofia da linguagem do filósofo holandês.

2.2.1 A natureza da linguagem em Brouwer

Uma vez que a natureza ontológica das entidades matemáticas é puramente mental, que papel teria a linguagem – no sentido de sinais escritos e falados – na construção das entidades matemáticas? No artigo chamado *Intuitionism and Formalism* (1975 [1912], p. 128), escrito alguns anos depois da obra *On the Foundations of Mathematics*, o filósofo intuicionista nos responde essa pergunta do seguinte modo:

> na construção desses conjuntos, nem a linguagem ordinária, nem qualquer linguagem simbólica, pode ter qualquer outro papel senão aquele de servir como um auxílio não-matemático, a fim de auxiliar a memória matemática ou capacitar diferentes indivíduos a construir o mesmo conjunto.

Dessarte, a linguagem desempenha o papel de auxiliar a memória na atividade matemática e/ou comunicar, entre diferentes sujeitos cognoscentes, a mesma entidade matemática. Também no artigo *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism*, Brouwer (1975 [1952], p. 510, grifos adicionados) afirma algo similar ao que foi afirmado no artigo mencionado anteriormente:

> [n]o edifício do pensamento matemático erguido, a linguagem não desempenha outro papel senão o de uma técnica eficiente, mas *nunca infalível ou exata*, para *memorizar* construções matemáticas e *sugeri-las a outros*; de modo que *a linguagem matemática por si só nunca pode criar novos sistemas matemáticos*.

Podemos afirmar que certamente a opinião de Brouwer sobre a natureza da linguagem, no que diz respeito ao seu papel na construção da matemática, não mudou desde 1912 a 1952.

Como vimos, para o topologista, as entidades matemáticas possuem um status ontológico "próprio" explicado e sustentado a partir de uma perspectiva idealista. Essas entidades existem independentemente da linguagem que é utilizada para enunciar sobre elas e/ou memorizá-las. Em um artigo de 1947, intitulado *Guidelines of Intuitionistic Mathematics* (1975 [1947], p. 477, grifos no original), o filósofo holandês ratifica exatamente esse ponto:

> [p]or conta do fato de que a matemática é independente da linguagem, a palavra *símbolo* (*Zeichen*) e, em particular, a expressão *complexo de dígitos*

> (*Ziffernkomplex*) devem ser entendidas, nessa definição, no sentido de *símbolos mentais*, consistindo em conceitos matemáticos previamente obtidos.

Aqui fica claro o que o filósofo entende por linguagem. Além do mais, fica nítido que mesmo a nossa linguagem, um complexo de dígitos, também deve ser entendida, em algum sentido, como dotada de uma natureza mental fundamentada em conceitos matemáticos que foram *adquiridos* anteriormente. Brouwer também se refere diretamente a "conceitos matemáticos", que devem ser entendidos como construções mentais – nesse caso, construções feitas *anteriormente*, baseadas na intuição primordial da sequencialidade temporal.

A partir dessa clarificação sobre as entidades matemáticas-*qua*-construções mentais e sobre o papel da linguagem na atividade matemática, tratamos de como as entidades matemáticas independentes da linguagem devem ser compreendidas. Na próxima subseção, discutimos como intuicionisticamente os números naturais devem ser compreendidos. Dessa forma, é apresentado o primeiro exemplo fundamental de entidades matemáticas, que são os números naturais. Depois disso, vemos como a partir dos números naturais (assim compreendidos) é possível construir entidades matemáticas mais complexas, tais como, por exemplo, as sequências de escolha (*choice sequences*).

2.2.2 A construção dos números naturais e o papel da "indução matemática intuicionista"

Como vimos anteriormente, uma entidade matemática não é um "fato" no mesmo sentido que os "fatos físicos". Em outras palavras, entidades matemáticas, uma vez que são *construções* mentais, e não entidades estáticas com identidades absolutamente fixas, possuem em sua natureza uma certa dinamicidade e *indeterminabilidade* fundamental. Dado que são ações mentais, "atribuir ou negar propriedades a entidades matemáticas" significa "atribuir ou negar propriedades de construções mentais". Brouwer dá um exemplo de como as entidades matemáticas, especificamente os números naturais, são construídas intuicionisticamente no início da sua dissertação. Nessa obra, ele inicia uma parte chamada "A Construção da Matemática" com uma observação que está profundamente ligada à ideia de "intuição primordial" e a suas consequências filosóficas:

> '[u]m, dois, três,...', nós sabemos do fundo do coração a sequência desses sons – (os números ordinais falados) – como uma reta sem fim; isso significa dizer, continuar para sempre de acordo com uma lei, conhecida como fixa. (BROUWER, 1975 [1907], p. 15).

O termo “intuitivamente” não deve ser subestimado aqui. O que significa ser “intuitivo” nesse contexto? O autor começou assim: *contar* deve ser algo *intuitivamente* claro.

Desse ponto de vista, as expressões “intuitivamente claro” e “nós sabemos do fundo do coração” indicam algo *certo* ou *seguro,* i.e., uma vivência noética ocorrente na mente do sujeito cognoscente. Em outras palavras, se ele decidisse seguir, por exemplo, a regra “+1”, a princípio, poderia contar para *sempre*: “1, 2, 3, *n*...”.

Segundo Kuiper (2004, p. 35, grifos no original), “a partir desse ‘contar intuitivo’, o ‘principal teorema’ da aritmética […] pode ser deduzido”. O que o filósofo chama de “principal teorema” é entendido como válido sem recorrer à ideia de “prova” no sentido não intuicionista. O que é tratado como um teorema “dedutível” do “contar intuitivo”, nesse contexto, é o fato de que não faria sentido negar que é possível, a princípio, *continuar* a contagem. Nas palavras de Kuiper (2004, p. 35), “[n]a verdade, o teorema é mencionado sem uma prova, isto é, meramente tornado plausível por meio de um exemplo, o que sugere que a prova deveria ser completada pela indução”.

Nesse caso, o exemplo apresentado é o dos números naturais positivos, e a “completa indução”, à qual Brouwer se refere, não é entendida em um sentido tradicional. A “completa indução” é tomada como uma “*ação* mental”, e não como um “axioma”, i.e., é simplesmente encarada como o *ato* de *poder continuar* a contagem e, portanto, não pode ser entendida no sentido argumentativo de indução. Desse modo, para Kuiper (2004, p. 35, grifo adicionado), no intuicionismo matemático de Brouwer, o princípio da indução seria “um corolário natural do modo de *geração* dos números naturais”.

Para o geômetra, gerar os números naturais é o ato cognitivo e/ou mental de contar. Em outras palavras, números não são gerados a partir do resultado do “ato de contar”, mas são gerados a partir do *próprio processo mental e intuitivo* de contar. Além disso, contamos fenômenos de um determinado modo, pois os experienciamos como uma sequência temporal e, como vimos, a fonte dessa experiência é a intuição do tempo. Trata-se aqui, evidentemente, de um raciocínio de inspiração kantiana.

É desse modo que Brouwer explica brevemente como funcionam outras propriedades aritméticas muito básicas, como a adição, a multiplicação, a exponenciação e a subtração. Todas essas operações matemáticas são delineadas a partir da ideia do “contar intuitivo” e, por conseguinte, a partir da ideia de “repetição contínua”. Nas palavras de Kuiper (2004, p. 35-36, grifo no original), “[o] fato de que essas operações possam ser *provadas* decorre diretamente da intuição primordial e do status do princípio da completa indução como um ato natural". Em vista disso, o leitor pode observar que as operações aritméticas não são justificadas e não possuem sua validade demonstrada a partir de axiomas formais. Toda a base de tais operações e o princípio da indução são por Brouwer explicados com uma rogativa à ideia de "intuição"[7].

A partir do ato de "contar intuitivamente", o principal "teorema" da aritmética é definido e explicado através da ideia de "continuação", de "repetição", de "possibilidade de continuar a *fazer* uma indução". Esse "teorema", em certo sentido, será considerado o que chamamos de "base da aritmética". O que é relevante é o tipo de procedimento filosófico idealista que o topologista faz. Ele não tem interesse em *estabelecer* suas reflexões na forma de argumentos baseados em axiomas. O ponto dele é descrever o que fazemos quando contamos e mostrar, com isso, que é desse modo *intuitivo* que os números *emergem*.

O geômetra também explica algumas operações aritméticas, a partir de seu intuicionismo, do seguinte modo: com base na construção de números naturais, de operações aritméticas entre esses números e as construções de sequências, é possível construir toda a matemática. As construções de sequências de números naturais, com o auxílio de funções, criam um tipo específico de sequências de escolha (BROUWER, 1975 [1907]).

Na próxima seção, discutimos brevemente a natureza dessas sequências de escolha. Explicamos tanto aquelas constituídas de números *e* regras (legiformes), quanto aquelas *sem* regras (não-legiformes). Essa explicação confere o embasamento necessário para o desenvolvimento mais detalhado e conceitual dessas sequências nos próximos capítulos. De um ponto de vista *geral*, tentamos explicar brevemente a legitimidade de sequências de escolha *enquanto* entidades matemáticas. Em seguida, nas outras seções, de um ponto de vista mais *específico*, tentamos explicar os dois tipos de sequências de escolha mencionados anteriormente. Assim, buscamos mostrar com clareza que esses tipos de sequências são consequências plausíveis do primeiro ato do intuicionismo, i.e., o fato de que entidades matemáticas, por serem construções mentais e independentes da linguagem, são sequências de escolha mentais.

2.3 As diretrizes da matemática intuicionista e as sequências de escolha enquanto entidades matemáticas

[7] Isso é desenvolvido detalhadamente em capítulos posteriores da obra *On the Foundations of Mathematics* e em artigos tardios.

Em um pequeno artigo de 1947, chamado *Guidelines of Intuitionistic Mathematics*, Brouwer nos oferece as diretrizes fundamentais para a matemática intuicionista. O filósofo holandês também afirma que, desde sua origem, a orientação intuicionista da matemática é o trabalho *criativo* do sujeito cognoscente. Em certo sentido, *isso é uma outra forma de expressar o primeiro ato do intuicionismo*. Afinal, uma vez que entidades matemáticas são independentes da linguagem por serem construções mentais, também se constituem, desse modo, como o trabalho *criativo* do matemático. A noção de "criativo" e de "construção mental" possuem uma clara conexão ontológica do ponto de vista idealista. Em outras palavras, são noções interdependentes. De acordo com o topologista, "desde sua origem, a orientação intuicionista do pensamento primariamente buscou uma nova prática de trabalho matemático criativo" (BROUWER, 1975 [1947], p. 477).

Já a segunda diretriz é buscar uma formulação mais adequada na linguagem para esse tipo de trabalho. A primeira diretriz, segundo o geômetra, é a mais fácil de atingir, pois se trata de um trabalho *intuitivo*. A segunda diretriz é mais difícil, pois, como vimos, a linguagem matemática sempre tem um papel *secundário* na construção das entidades matemáticas. Nas palavras de Brouwer (1975 [1947], p. 477),

> no que diz respeito à maneira intuicionista de pensar, a linguagem matemática não pode desempenhar outro papel senão o de um instrumento para manter na memória construções matemáticas ou para sugeri-las a outras pessoas; apesar de sua eficiência, nunca pode nos proteger completamente de mal-entendidos.

O autor confirma mais uma vez aqui o uso do primeiro ato do intuicionismo e de sua origem idealista como fundamentais para a construção da matemática intuicionista. Podemos até inferir que ele não reconheceria uma matemática como intuicionista se esse ato não tivesse sido utilizado na construção do edifício das entidades matemáticas e, como veremos no próximo capítulo, isso se aplicaria para o segundo ato do intuicionismo também.

No artigo referido, o geômetra sintetiza essas diretrizes e suas consequências, de modo que tenta revelar de forma cristalina o "coração" do intuicionismo matemático concebido por ele. Além disso, nesse mesmo artigo, o matemático holandês apresenta dois tipos gerais de entidades matemáticas intuicionistas, que são discutidas sempre a partir da base intuicionista. Brouwer (1975 [1947], p. 477, grifos no original) sintetiza essas questões da seguinte forma:

> [a] matemática intuicionista é uma construção mental, essencialmente independente da linguagem. Ela surge através do autodesvelamento da intuição básica da matemática, que consiste na abstração da duosidade. Esse autodesvelar-se nos permite, em primeiro lugar, realizar um levantamento, em um único ato, não apenas

> de uma sequência infinita de sistemas matemáticos, mas também de uma sequência infinitamente procedente, *definida por uma lei*, de sistemas matemáticos previamente definidos por indução. Contudo, no segundo caso, nos permite também criar uma sequência de sistemas matemáticos que infinitamente prossegue *com toda a liberdade ou está sujeita a restrições que podem variar no decurso do progresso da sequência*.

Nesse fragmento, o filósofo holandês sintetiza todos os resultados de sua matemática intuicionista. Na primeira frase da passagem citada se encontra tanto o idealismo quanto o primeiro ato do intuicionismo, que são *relacionados* de modo *necessário*. Da segunda frase em diante, orientado pela matriz de influência kantiana, Brouwer explica como ocorre o nascimento das entidades matemáticas a partir da intuição do tempo, explicado como o desdobramento da sequencialidade fundamental do tempo, baseado na duosidade de dois intervalos temporais. Por fim, o matemático holandês apresenta os dois tipos fundamentais de entidades matemáticas já mencionados.

Troelstra (1969, 1977, 1983, 1985) e Troelstra e Van Dalen (1988) realizaram várias apresentações filosóficas e matemáticas da noção de "sequências de escolha" ao longo de várias de suas obras. Em seu livro *Choice Sequences*, Troelstra (1977, p. 1-2, grifos no original) explica o ponto de vista intuicionista de forma bem sintética e que *explicita* o que temos apresentado até agora:

> [n]ossa interpretação de "intuicionístico" implica que nós devemos adotar a visão subjetivista da verdade matemática: o que é verdadeiro é, para o matemático idealizado, o que ele pode estabelecer para si mesmo por meio de reflexões (mentais) sobre suas próprias construções [...]. Linguagem matemática é secundária; em particular, objetos matemáticos não são necessariamente apresentados em um quadro linguístico. [...] 'Secundária' significa aqui apenas que o uso da linguagem é *matematicamente* irrelevante para nossos objetos de estudo, não que isso em geral não seja importante: na prática, linguagem é uma ferramenta indispensável, [...] porque nós mesmos não somos matemáticos idealizados com uma memória ilimitada.

Nessa citação, é possível notar a presença dos dois elementos principais já discutidos nesta tese: o pressuposto idealista, na linguagem de Troelstra "subjetivista", e o fato de a linguagem matemática ter um papel secundário devido ao fato de sermos sujeitos *com memória limitada*, e não sujeitos cognoscentes *idealizados*.

Uma vez que as sequências de escolha são baseadas na construção matemática da experiência intuitiva do contínuo temporal da consciência, então, em certo sentido, não é possível, para Brouwer, uma análise do *continuum* intuitivo sem recorrer à noção de "sequência de escolha". Assim, nesse caso, trata-se necessariamente não apenas de sequências de escolha regidas por uma lei, como também de sequências de escolha sem nenhum tipo de restrição.

Em seguida, abordamos brevemente dois tipos gerais de sequências de escolha como consequências *necessárias* do primeiro ato do intuicionismo. Isso é feito para preparar o terreno filosófico e matemático para a discussão dos outros capítulos.

2.3.1 Dois tipos gerais de sequências de escolha: legiformes e não-legiformes

Segundo Brouwer, há pelo menos dois tipos de sequências de escolha: (i) aquelas que são construídas através de um método, tal como o de Arquimedes e (ii) aquelas *construídas com liberdade*. A "identidade" desses dois tipos de sequências é garantida através da escolha mental e intuitiva do sujeito cognoscente. No primeiro tipo de sequência, a principal característica é o fato de que sua "identidade" é garantida *enquanto* o sujeito cognoscente *decide* aplicar essa lei. Em relação a essas sequências regidas por uma lei, Troelstra (1977, p. 2, grifo no original) pontua que "[u]m objeto matemático irá ser chamado "legiforme" se for uma construção concluída, [i.e.,] algo que podemos descrever completamente (para nós mesmos)".

Intuicionisticamente, isso significa que podemos saber – ter uma lei ou um método – que possa nos informar, de alguma maneira, qual será o próximo elemento da sequência devido à escolha previamente realizada pelo sujeito cognoscente. Desse modo, embora, em um sentido empírico, ela não possa realmente ser completada, ainda assim, nós podemos *descrevê-la intensionalmente* através da decisão do sujeito criativo. Ou seja, para o topologista, não faz sentido se referir a uma entidade matemática que seja gerada de forma independente da mente e que, uma vez construída, continue a existir "automaticamente".

O exemplo mencionado por Troelstra (1977, p. 2) de sequências de escolha legiformes consiste em números naturais e em funções realizadas com números naturais: "[o]s dois principais tipos de objetos regidos por uma lei (*lawlike*) que nós temos de considerar são os objetos naturais e as funções de números naturais regidas por lei (*lawlike*)". Uma vez que a construção dos números naturais é a menos difícil, se comparada à construção dos números reais, então é natural e esperado pensar que as sequências de números naturais são os melhores exemplos de sequências legiformes. Uma lei matemática, no contexto dos números naturais é, em certo sentido, também uma entidade matemática que traz consigo, de modo claro, a sua *regência*: "[t]al lei é dada de modo que torna claro que a lei é aplicável a cada número natural, i.e., uma prova que o valor que é sempre definido é implícito" (TROELSTRA, 1977, p. 3).

Na teoria das sequências de escolha, o domínio das funções regidas por leis, como no caso da sequência dos números naturais, é restrito. Em outras palavras, fica claro que, como essa lei é apresentada *intuitivamente*, ela deveria ser aplicada para cada número natural. Entretanto, mesmo no contexto dos números naturais e de suas leis, um ponto intuicionista deve ser *explicitado*: essa lei não se apresenta apenas na forma de um "gráfico", ou seja, *não* é apenas um conjunto de signos, verbais ou escritos, que formam a entidade matemática. Nas palavras de Troelstra (1977, p. 3), "[u]ma função regida por uma lei (*lawlike*) não pode certamente ser especificada simplesmente ao apresentar seu gráfico – essa é demasiadamente uma ideia platônica". Esse ponto está ligado diretamente ao primeiro ato do intuicionismo, que discutimos neste capítulo, e a sua fonte idealista.

Troelstra, inspirado por Brouwer, explicita de modo sintético uma aplicação matemática e filosófica do primeiro ato do intuicionismo. Dito de outro modo, quando Troelstra nega que uma função regida por uma lei, como o exemplo de sequências de escolha legiformes, não pode realmente ser especificada apenas por um gráfico ou "signos" (verbais ou escritos), o que ele faz é justamente distinguir a "entidade matemática" da "linguagem matemática". *Por si só, isso é a natureza própria do primeiro ato do intuicionismo*.

O segundo tipo de sequências de escolha é caracterizado pelo fato de que o próximo elemento é escolhido *sem* a existência de uma lei matemática de qualquer tipo. Isto é, a escolha deve ser completamente *fortuita*, baseada na liberdade do sujeito cognoscente. Nesse caso, a característica principal da escolha *determinante* é justamente a ausência de qualquer regra conhecida e estabelecida pelo sujeito cognoscente. Isso só é possível graças ao apelo que o intuicionismo matemático faz à noção de "liberdade do sujeito criativo".

Dito de outra maneira, no contexto das sequências de escolha legiformes, *o primeiro ato do intuicionismo é visto através de uma explicação de como os números naturais e suas funções se apresentam de modo mental e/ou noético, e não apenas através de signos escritos ou falado*s, uma vez que tais signos, em si mesmos nada *diriam* se não fosse pela natureza noética e mental para a qual eles *apontam*. Já no contexto das sequências de escolha não-legiformes, a liberdade do sujeito cognoscente é *enfatizada* em seu estado mais *puro*, i.e., no estado de exercício de *liberdade*, que é possível devido à natureza *indeterminada* da consciência e do *continuum*. De todo modo, mesmo o caso das sequências de escolha regidas por lei só é possível porque o sujeito cognoscente decidiu construir aquela sequência com alguma lei. Assim, para Brouwer, a restrição via leis matemáticas ou a não-restrição delas podem ser impostas ou revogadas em *qualquer* estágio da construção matemática.

Ademais, Troelstra (1977, p. 11) também chama a atenção para o seguinte ponto: "[a] admissão de sequências sem lei como objetos matemáticos implica a negação da tese de que todas as entidades matemáticas deveriam ser dadas via representação linguística". Essa citação poderia ser entendida do seguinte modo: *a admissão da existência de sequências não-legiformes só é possível se, e somente se, há aceitação do primeiro ato do intuicionismo, isto é, se há a aceitação de que as entidades matemáticas são distintas de sua representação linguística.*

Troelstra (1977, p. 11-12) apresenta um exemplo do que seria uma sequência não-legiforme (com números naturais):

> [s]equências não-legiformes oferecem o mais simples exemplo de um conceito de sequências onde as sequências não são pensadas como completamente determinadas antecipadamente por uma lei. Pensamos em uma a sequência não-legiforme (de números naturais) como um processo (não uma lei!) de atribuir valores aos argumentos [...]; para qualquer estágio, apenas muitos valores finitos (i.e., um segmento inicial) da sequência são conhecidos; em nenhum estágio impomos restrições sobre futuras possibilidades ao especificar valores para os argumentos (exceto, nesse caso, a restrição geral a priori que todos os valores serão números naturais).

Diferentemente da sequência legiforme, as sequências não-legiformes não geram os números naturais de um modo preestabelecido. Embora nem todos os elementos são determinados e não podem ser, mesmo aqueles que são determinados, constituem-se dessa forma apenas em um sentido *intensional*. Desse modo, não se trata de uma sequência completa, mas sempre necessariamente incompleta. Assim é entendido, pois em qualquer estágio do processo de construção dessa sequência se conhece apenas um segmento com um número finito de elementos, devido ao fato de que os próximos elementos serão construídos com liberdade pelo sujeito criativo; ou mesmo, em qualquer estágio, o sujeito criativo poderá impor alguma restrição. Dessa forma, a identidade das sequências nunca estará garantida em um sentido absolutamente determinado.

Na citação de Troelstra, apesar de se tratar de uma sequência sem lei, vemos um exemplo em que se impõe, ainda assim, uma restrição geral: os únicos elementos que vão aparecer nessa sequência não-legiforme são os números naturais. Nesse caso, com exceção dessa restrição, um aspecto definitório *geral* de sequências não-legiformes é que não se impõe nenhum outro tipo de restrição (até o presente momento) sobre as futuras possibilidades de elementos que *podem* aparecer na sequência. No caso em que isso é restrito a números naturais, não haverá nenhum tipo de restrição em relação a como esses elementos irão aparecer ao longo de todo o processo de construção da sequência. A ideia é como se um matemático idealizado realizasse esse processo de "olhos vendados".

Ao compreender as diferenças entre "sequências legiformes" e "sequências não-legiformes", é possível entender como as sequências podem ser mutáveis, como há *sempre* a *possibilidade* de próximos elementos que nunca poderão ser fixados absoluta e determinadamente nas próprias sequências.

Para finalizar, o leitor poderia objetar que não há necessidade da existência de tais sequências não-legiformes. No entanto, asseveramos que, se o leitor alega tal coisa, por conseguinte, não houve um entendimento adequado do *continuum* intuitivo do tempo pressuposto na construção da matemática intuicionista. Em outras palavras, o idealismo e seus pressupostos discutidos no final do primeiro capítulo seriam indispensáveis para o entendimento mais adequado da posição intuicionista de Brouwer, no que diz respeito à noção de "entidades matemáticas".

O horizonte *sempre* aberto das sequências é garantido pela liberdade conferida ao sujeito, imerso na experiência da sequencialidade temporal através da intuição do tempo. Esse horizonte sempre aberto é justamente a expressão das infinitas possibilidades de formas do *continuum* intuitivo através do *continuum* matemático. Dito de outro modo, não há a matemática do *continuum* sem o *continuum* intuitivo, pois ao descrevermos as propriedades do *continuum*, Brouwer alegaria, estaríamos justamente nos fundamentando na ideia de "sequências não-legiformes" originadas no *continuum* intuitivo.

Em suma, deve ser enfatizado que as sequências não-legiformes garantem, via primeiro ato do intuicionismo, que possamos tratar do *continuum* intuitivo e do *continuum* matemático, uma vez que descrever essas propriedades implicaria garantir infinitas possibilidades expressas metafórica e poeticamente na "liberdade do sujeito", sustentada na natureza indeterminada da consciência e da experiência da temporalidade realizada por ela.

Uma vez que o sujeito *pode* construir diferentes sequências de escolha, também com seus respectivos horizontes sempre abertos, então, se cria a possibilidade *sempre presente* de novas entidades matemáticas. Essas possibilidades definem o segundo ato do intuicionismo de Brouwer, o qual é discutido no próximo capítulo.

Uma observação relevante em relação ao próximo capítulo é o fato de que há uma espécie de "via de mão dupla" de consequências filosóficas e matemáticas entre o primeiro e o segundo atos do intuicionismo. Em poucas palavras, para o topologista, de certa forma, os dois atos não são independentes, mas relativamente interdependentes. *Através do primeiro ato do intuicionismo, fica explicado e justificado que a identidade absolutamente provisória das sequências de escolha – enquanto sequências legiformes ou não-legiformes – é estabelecida pela liberdade do sujeito criativo, uma vez que sequências de escolha são construções mentais independentes da linguagem* e, isso, de certa forma, leva à sucessão do segundo ato, que revela que são sempre possíveis novas entidades matemáticas. Com base nisso, no terceiro capítulo, veremos que só é possível a emergência de *novas* entidades-*qua*-sequências de escolha em decorrência da possibilidade sempre presente de *novas* construções mentais.

Capítulo 3
O segundo ato do intuicionismo:
o desenvolvimento da segunda coluna do intuicionismo filosófico

Neste capítulo, enfocamos o segundo ato do intuicionismo. Temos três objetivos principais: (i) discutir diretamente o segundo ato do intuicionismo; (ii) discorrer sobre suas principais consequências; e (iii) problematizar a questão da natureza modal das entidades matemáticas, ou seja, desenvolver uma tentativa de compreensão de aspectos modais do segundo ato do intuicionismo.

Para alcançar nossos objetivos neste capítulo, primeiramente apresentamos considerações filosóficas gerais na seção 3.1, intitulada "Considerações introdutórias sobre o segundo ato". Em seguida, na seção 3.2, intitulada "As causas e as motivações do segundo ato", abordamos algumas de suas consequências filosóficas.

3.1 Considerações introdutórias sobre o segundo ato

Primeiramente, é plausível enfatizar que o segundo ato do intuicionismo não deve ser compreendido sem pressupor o contexto idealista no qual ele foi desenvolvido. Ademais, o fato de ele ser considerado um ato que sucede o primeiro ato não deve ser subestimado, na medida em que é entendido como uma consequência *necessária* para o projeto intuicionista de Brouwer. O autor compreendia que esses dois atos formam uma "unidade" dentro de seu quadro filosófico e matemático.

Explicado de forma breve, "[o] segundo ato de intuicionismo reconhece a possibilidade de gerar *novas* entidades matemáticas" (BROUWER, 1975 [1954], p. 523, grifo adicionado). A expressão "novas" é profundamente relevante e, por isso, discutimos suas consequências tanto neste capítulo quanto no quarto e no quinto capítulos. Esse segundo ato é muito importante para a descrição da noção de "entidade matemática" intuicionista. Em particular, esse ato é indispensável também para a definição de um tipo específico de entidade matemática no que concerne à discussão sobre *continuum*. Referimo-nos obviamente ao conceito de "número real".

Para tratar do segundo ato do intuicionismo, é necessário acompanhar uma breve discussão sobre as causas e as motivações que levaram ao intuicionismo do matemático holandês. Essa discussão é importante para entender o panorama filosófico e histórico no qual surgiu o segundo ato.

Diferente do primeiro ato, o qual, de alguma forma, já estava presente na obra *On the Foundations of Mathematics* (1975 [1907]), o segundo ato foi desenvolvido posteriormente, em um contexto histórico-filosófico peculiar, como consequência do primeiro ato e de outras diretrizes do intuicionismo.

Após a apresentação das causas e das motivações que levaram ao intuicionismo, discutimos brevemente o segundo ato e algumas de suas consequências. A partir disso, partimos para o quarto capítulo, no qual tratamos diretamente da teoria intuicionista do *continuum* e de sua concepção de "número real".

3.2 As causas e as motivações do segundo ato

Brouwer, em seu artigo *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism* (1975 [1952]), discute as causas e motivações históricas e filosóficas que levaram ao nascimento e ao desenvolvimento do seu intuicionismo. Para o filósofo e matemático holandês, a história das mudanças do pensamento matemático está profundamente conectada a dois tipos de "ideias filosóficas": o primeiro diz respeito à investigação sobre a origem da "certeza matemática"; e o segundo está relacionado à investigação sobre o que delimita o domínio de "objetos matemáticos" (BROUWER, 1975 [1952]).

Para o filósofo intuicionista, essas investigações motivaram o surgimento de vários tipos de escolas de fundamentos da matemática, tais como o realismo e o formalismo. O realismo garantia um certo status para a "certeza matemática", mas o fato de entendermos as verdades matemáticas como necessariamente inteligíveis e/ou cognoscíveis seria algo completamente acidental, uma vez que a matemática enunciaria sobre *outro* mundo diferente deste e das mentes. Em outras palavras, o realismo garantiria a certeza das verdades matemáticas, pois estaríamos nos referindo a um mundo abstrato eterno. Esse ponto é importante para a perspectiva idealista, pois uma perspectiva que não explica o *porquê* de as entidades matemáticas serem inteligíveis e/ou cognoscíveis falha em *realmente* explicar a natureza dessas entidades. Já o formalismo afirmaria que as verdades matemáticas seriam aquelas *escritas* de modo axiomático no "papel"; isto é, o fato de signos estarem organizados de determinada forma garantiria o sentido e a verdade na matemática. Assim, o formalismo garantiria o escopo do domínio de entidades matemáticas ao afirmar que algo é legitimamente uma entidade matemática se for definido e estruturado de acordo com axiomas lógicos. Essas são duas caracterizações *gerais* de escolas de filosofia da matemática. Há várias outras que podem (ou não) ser uma espécie de subcategorias dessas. Apesar de não tratarmos delas detalhadamente, pois esse não é um dos nossos focos, as mencionamos, pois Brouwer se contrapõe a elas a partir de duas motivações filosóficas das quais ele parte. No quarto capítulo, discutimos em mais detalhes algumas notas definitórias dessas posições filosóficas, em especial aquelas da posição realista.

Para o intuicionismo, não faz sentido falar de entidades matemáticas como independentes da mente, uma vez que tudo que constitui a "natureza" ou a "existência" de uma entidade matemática é uma construção mental. Em outras palavras, o "existir" de uma entidade matemática é um ou vários *atos* mentais. Essa reação diz respeito tanto ao realismo quanto ao formalismo. Trata-se de uma reação ao realismo, pois o intuicionismo afirma que as entidades matemáticas existem *qua* entidades mentais; e trata-se de uma reação ao formalismo, pois o intuicionismo assevera que as entidades matemáticas são o que são, *porque* são entidades mentais e não *porque* podem ser expressas em alguma linguagem formal ou informal. Brouwer definitivamente não aceitaria que a linguagem *por si só* pudesse instaurar a "existência" ou mesmo explicar a "natureza" de entidades matemáticas. Desse modo, o intuicionismo seria também uma posição radical e profundamente antiformalista.

Apesar dessa discordância entre intuicionistas e formalistas, segundo o matemático holandês, eles concordavam que "leis da matemática não são leis da natureza já dadas". O filósofo afirma explicitamente que

> eles chegaram a um acordo quanto a isso, que a validade exata das leis matemáticas enquanto leis da natureza está fora de questão. A questão sobre onde existe a exatidão matemática é respondida de maneira diferente pelos dois lados; o intuicionista diz: no intelecto humano, o formalista diz: no papel. (BROUWER, 1975 [1907], p. 125).

Apesar de o acordo sobre as leis da matemática não serem leis da natureza, formalistas e intuicionistas discordam sobre o *lócus* "onde" acontece a "exatidão matemática". Para o filósofo intuicionista, isso é verificável através de um exercício *meditativo* de *introspecção* que acontece na mente. Ora, essa posição do intuicionismo está relacionada com o seu primeiro ato, segundo o qual as entidades matemáticas são *distintas* da linguagem e possuem uma existência matemática *qua* construção mental.

Neste terceiro capítulo, investigamos uma das consequências mais insólitas do intuicionismo: o tipo de entidades matemáticas derivadas do segundo ato, as quais são sempre necessárias e *intensionalmente* incompletas, uma vez que a base da qual o matemático tira o “material” para a construção de entidades matemáticas é (também *intensionalmente*) infinita.

3.2.1 Sequências não-legiformes, sequências incompletas e o terceiro excluído

O tipo de entidade matemática necessária e *intensionalmente* incompleta só é possível graças ao quadro conceitual de Brouwer (1975 [1912], 1975 [1947], 1975 [1948], 1975 [1952], 1981). De fato, para o filósofo, não é possível discutir o intuicionismo sem subscrever à existência desse tipo de entidade. Ao acompanhar o raciocínio do topologista, vemos que, em síntese, o princípio do terceiro excluído é válido construtivamente para entidades matemáticas finitas. Esse tipo específico de entidades matemáticas é aquele para o qual o sujeito cognoscente decidiu impor uma restrição específica através de algum algoritmo, método ou lei determinados, tal como o algoritmo Pi, por exemplo. Para exemplificar, ao questionar se “o número A ou B está presente na casa decimal x ou y?”, a resposta *sempre* será “depende”. Afinal, se o sujeito cognoscente *decidiu* construir *aquela* sequência *de acordo* com o algoritmo Pi até *aquela* casa decimal x ou y, logo a resposta poderá ser dada por meio de uma negativa *ou* de uma positiva em relação à questão de se número A ou B estará presente nessa casa ou não.

Em síntese, para o geômetra, se o sujeito cognoscente aceita apenas sequências que são construídas de acordo com algum método, lei ou algoritmo, então ele não tem razões suficientes para *rejeitar* o princípio do terceiro excluído. Esse ponto era tão forte que ele utilizava a expressão “sujeito criativo” como elemento fundamental nos seus contraexemplos ao terceiro excluído (BROUWER, 1975 [1948A]; VAN ATTEN, 2020b, 2020c). Dito de outra maneira, do ponto de vista do intuicionismo de Brouwer, não se conclui a recusa do terceiro excluído ao sustentar que entidades matemáticas sejam apenas aquelas legiformes. Desse modo, o princípio do terceiro excluído só poderá ser rejeitado via um tipo diferente de existência de sequências matemáticas, que *pudesse* ter sua “identidade” dinamizada em qualquer estágio de sua construção pelo sujeito cognoscente. Resumidamente, trata-se da noção de “sequências não-legiformes”, ou seja, sequências que não *precisam* funcionar ou existir de acordo com alguma lei, método ou algoritmo.

O leitor pode observar que esse tipo de sequência só é possível devido à tese filosófica brouweriana de que entidades matemáticas não são imutáveis ou abstratas, uma vez que são construções mentais.

Nas próximas seções, tentamos discutir em detalhe o tipo de motivação filosófica e argumentação que sustentam a existência das sequências matemáticas não-legiformes. Para o matemático, há vários sentidos para uma entidade matemática ser considerada uma *nova* entidade. Um desses sentidos é o de construção de um *novo* algoritmo – por exemplo, o algoritmo de Arquimedes quando *inventado* por ele; e um outro sentido é o de construção de uma "nova" entidade matemática *sempre* que ela tem sua "identidade" ou "natureza" transformada por alguma *nova* decisão de restrição ou liberdade tomada pelo sujeito cognoscente.

Em outras palavras, Brouwer se distanciaria da posição que afirma que tudo que fazemos é descobrir "novas" propriedades de eternamente "velhas" substâncias matemáticas abstratas, no sentido de que antes não reconhecíamos a sua existência, mas supostamente sempre estiveram *lá*. Esse seu distanciamento ocorreria não apenas devido a sua não concordância com essa distinção realista entre propriedades e substâncias, mas também por causa de sua recusa da noção de "entidade matemática-*qua*-substância abstrata".

Na próxima subseção exploramos um pouco mais o tópico da possibilidade sempre presente de novas entidades matemáticas, em um sentido idealista.

3.2.2 O segundo ato do intuicionismo: a possibilidade sempre presente de novas entidades matemáticas

Embora a ideia de "*novas* entidades matemáticas" possa ser *deduzida* ao longo de todo o trabalho de Brouwer, o segundo ato do intuicionismo só apareceu com uma definição explícita no artigo de 1952, intitulado *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism.* De acordo com o filósofo, o segundo ato do intuicionismo é definido justamente como o ato que reconhece a *possibilidade* de *novas* entidades matemáticas. Em outras palavras, o segundo ato reconhece a possibilidade de gerar entidades matemáticas que *até então* não existiam e, então, passaram a existir. O matemático holandês define o segundo ato explicitamente da seguinte forma:

> [o] *segundo ato do intuicionismo* reconhece a possibilidade de gerar novas entidades matemáticas: primeiro, na forma de sequências de processo infinito cujos termos *são escolhidos mais ou menos livremente das entidades matemáticas previamente adquiridas*; de tal maneira que a liberdade existente na primeira escolha talvez possa ser irrevogavelmente sujeita, repetidas vezes, a restrições progressivas nas escolhas subsequentes, enquanto todas essas intervenções restritivas, bem como as próprias escolhas, podem, a qualquer momento, ser feitas a depender de possíveis

> experiências matemáticas futuras do sujeito criativo. (BROUWER, 1975 [1954], p. 523, grifos no original).

É muito importante notar o papel que a liberdade mental do sujeito cognoscente desempenha, pois é a partir dessa liberdade – e, claro, da identificação entre a entidade matemática e a construção mental, tal como feita pelo primeiro ato – que se constitui a condição de possibilidade de geração de *novas* entidades matemáticas.

Em outras palavras, a possibilidade de gerar novas entidades matemáticas é sustentada *na ideia da possibilidade de sempre gerar novas construções mentais absolutamente livres do sujeito criativo* ou *de construções restringidas por escolhas previamente estabelecidas pelo sujeito cognoscente*. Brouwer (1975 [1954], p. 523-524, grifos adicionados) repete sua definição do segundo ato em outros lugares da mesma forma:

> [n]o edifício do pensamento matemático baseado no primeiro e no segundo atos do intuicionismo, a linguagem não desempenha um papel senão o de uma técnica eficiente, mas nunca infalível ou exata, para memorizar construções matemáticas e sugeri-las a outros; de modo que a redação de um teorema matemático não faz sentido a menos que indique a construção de uma entidade matemática real ou de uma incompatibilidade (por exemplo, a identidade da duosidade vazia com uma unidade vazia) de alguma condição construtiva imposta a uma sistema matemático hipotético. Assim, *a linguagem matemática, em particular a lógica, nunca pode, por si só, criar novas entidades matemáticas, nem deduzir um estado matemático das coisas*.

O autor enfatiza novamente o papel secundário da linguagem e a identificação entre o "existir" de uma entidade matemática e o "existir" de uma construção mental. Como visto, a linguagem matemática por si só é simplesmente incapaz de criar novas entidades, pois sem o trabalho da mente e da liberdade criativa do sujeito cognoscente, nenhuma entidade pode "vir a existir", uma vez que é com base na experiência temporal do sujeito cognoscente que há o "material" disponível para o trabalho de construção de novas entidades matemáticas.

Ademais, Brouwer também explica o que é o segundo ato do intuicionismo a partir da ideia de *como* as novas entidades matemáticas *surgem*. Tais entidades não estavam no extremo do "não-existir", i.e., não eram um "puro nada". Contudo, só é conferida uma identidade *definida* provisoriamente a tais entidades a partir do fluxo *contínuo* do tempo experienciado pelo sujeito cognoscente. A própria sequencialidade básica e sem forma do tempo é o "material" que é utilizado pelo sujeito para construir entidades matemáticas com formas *específicas*. Desse modo, enfatizamos que sustentar o fato de que as entidades matemáticas surgem *de alguma forma* não significa sustentar que elas surgem *ex nihilo*. Em outras palavras, o tempo que é noeticamente vivenciado através da intuição não tem uma forma específica, i.e., é o fato de ele ser sem forma que torna possível sequências de vários tipos restringidas ou não por um método, uma lei ou um algoritmo. Ademais, Brouwer (1975 [1952], p. 511) também explica que um certo tipo de novas entidades matemáticas surge, mais ou menos, do seguinte modo: "primeiramente na forma de sequências infinitamente intermináveis p1, p2... cujos termos são escolhidos mais ou menos livremente a partir de entidades matemáticas anteriormente adquiridas".

Essas *novas* entidades são justamente o tipo de sequência matemática que é gerada a partir do ato do sujeito cognoscente. Salientamos que não é possível compreender a liberdade desse ato sem pressupor o papel fundamental que a mente desempenha nesse contexto. A razão para isso é que as sequências legiformes também estão sob a regência do terceiro excluído, na medida em que um sujeito decide que a construção dessas sequências, em particular, seja efetuada de modo restringido por uma lei ou um método, enquanto a construção das sequências não-legiformes seria efetuada com liberdade.

Uma consequência importante para esse tipo de entendimento é que uma sequência matemática legiforme não é *absolutamente* legiforme, mas é legiforme *na medida em que um sujeito decide construir uma sequência de modo adscrito por uma lei, um método ou um algoritmo*. De maneira similar, uma sequência matemática não-legiforme não é *absolutamente* não-legiforme, mas é não-legiforme *enquanto* o sujeito cognoscente decide a construir assim. Brouwer (1975 [1952], p. 512, grifo adicionado) explicita que o sujeito pode impor restrições futuras ou mesmo revogá-las: "todas essas intervenções, em virtude do segundo ato de intuicionismo, podem, *em qualquer estágio*, depender de possíveis experiências matemáticas futuras do sujeito criativo". Além disso, ele enfatiza que

> a liberdade existente talvez na primeira escolha possa ser irrevogavelmente sujeita, repetidas vezes, a restrições progressivas nas escolhas subsequentes, enquanto todas essas intervenções restritivas, bem como as próprias escolhas, podem, a qualquer momento, ser feitas para depender de possíveis experiências matemáticas futuras do sujeito criativo. (BROUWER, 1975 [1954], p. 523).

Um desfecho muito significativo de restrições poderem ser impostas ou mesmo retiradas pelo sujeito cognoscente é o fato de que sequências não-legiformes podem, a qualquer momento, se *tornar* sequências legiformes, bem como sequências legiformes podem, a qualquer momento, se *tornar* sequências não-legiformes.

Na próxima subseção investigamos detalhadamente a relação entre a "experiência-temporal-*qua*-material-construtivo" e a liberdade do sujeito cognoscente de impor ou retirar restrições à construção de entidades matemáticas específicas.

3.2.3 Aspectos modais do segundo ato do intuicionismo: o "estado de existência" das entidades matemáticas "antes" de serem construídas

De uma certa perspectiva, a sempre *presente experiência* do tempo, dada através da experiência intuitiva do sujeito cognoscente, é uma condição necessária para a construção de novas entidades matemáticas. Uma outra forma de elucidar a intuição do tempo é explanar o fato de que experienciamos uma sequencialidade muito básica e sem forma do momento presente. O filósofo holandês discorre sobre isso em termos relativamente fenomenológicos e profundamente atualistas.

Ao experienciar distintas sensações e, especificamente, a sensação do momento presente e do momento imediatamente passado (uno-duosidade), a consciência se torna *mente, i.e., a mente é temporal e, portanto, através dela, qualquer sequência matemática, restrita por qualquer método ou algoritmo, é possível*. Brouwer (1975 [1948], p. 480, grifo no original) assere que

> [a]través de um movimento do tempo, uma sensação presente dá lugar a outra sensação presente de tal forma que a consciência retém a anterior como uma sensação passada e, além disso, por meio dessa distinção entre presente e passado, se afasta de ambos e da quietude, e se torna *mente*.

Ao se tornar mente, passa a desempenhar o papel do sujeito que experiencia momentos atuais relativamente distintos e, a partir disso, passa a ser capaz do *processo cognitivo de reiteração*:

> [c]omo mente, toma a função de um sujeito que experiencia as sensações do presente e do passado como objeto. Pela reiteração desse fenômeno da duosidade, o objeto pode se estender a um mundo de sensações de pluralidade heterogênea. (BROUWER, 1975 [1948], p. 480).

Justamente na capacidade de *reiterar* o fenômeno da uno-duosidade se encontra todo o material adequado para a construção de entidades matemáticas. Assim, *toda a existência de sequências matemáticas é um processo mental-cognitivo de reiteração da experiência temporal sequencial entre o momento presente e o momento imediatamente passado*. Destarte, para além desses dois momentos, experienciados mentalmente pelo sujeito, não há um tipo de passado ou de futuro *distantes* que existam. É nesse tipo de compreensão ontológica e fenomenológica que o segundo ato do intuicionismo e sua base temporal se fundamentam.

O que o leitor pode observar é o fato de que o topologista enfatiza a ideia de que não teria sentido pensar que entidades matemáticas existam para seres que não conhecem, em absoluto, nenhum tipo de processo de reiteração, repetição ou sequencialidade de qualquer tipo. Em síntese, o tempo é uma condição necessária de possibilidade para entidades matemáticas e reconhecemos isso através da intuição.

A partir de seus pressupostos idealistas, Brouwer (1975 [1948], p. 480, grifos adicionados) desenvolve um pouco mais essa questão da seguinte maneira:

> [n]o mundo da sensação experienciado pela mente, ocorre o fenômeno da livre vontade da *atenção causal*. Realiza identificações de diferentes sensações e de diferentes complexos de sensações e, dessa forma, em uma atmosfera de antecipação, cria *complexos interativos de sensações*. Um complexo interativo de sensações [...] é chamado uma *sequência causal*. [...] Como mente, toma a função de um sujeito que experiencia as sensações do presente e do passado como objeto. Pela reiteração desse fenômeno de duosidade, o objeto pode se estender a um mundo de sensações de pluralidade heterogênea.

Tais declarações expressam um tipo de pensamento que é um reflexo das bases kantianas e poincarenianas discutidas no primeiro capítulo. O "fenômeno livre da vontade da atenção causal" a que o geômetra se refere diz respeito a um corolário do idealismo brouweriano. Uma vez que a consciência do sujeito é tomada como pressuposto em toda atividade intelectual, então ela é a razão da cognoscibilidade de qualquer entidade. O "fenômeno da vontade causal" passa a existir quando a consciência deixa de dar atenção apenas a si mesma e a sua natureza e passa a experienciar a ilusão da "exterioridade", de modo que constrói diferentes tipos de fenômenos. Tais fenômenos são vivenciados pela consciência, através da mente, como sensações. Essas sensações se tornam múltiplas e, portanto, complexas. A partir da experiência dessas sensações enquanto fenômenos que sucedem um *depois* do outro ou, um *simultaneamente* com o outro, i.e., enquanto sensações temporais, a mente possibilita a utilização desse processo como *material* para o processo cognitivo de *reiteração* mencionado anteriormente.

De outro modo, no fenômeno da vontade da atenção causal, a mente é capaz de identificar diferentes tipos de sensações e complexos de sensações. A partir disso, ela também é capaz de desenvolver vários tipos complexos e construções de interações. Nesse nível, a mente, baseada na sua experiência da duosidade, i.e., na sua experiência do momento presente e do momento *imediatamente* passado, é capaz de construir processos *interativos* de sensações. Assim, através da reiteração cognitiva vivenciada pelo sujeito cognoscente, que experiencia noeticamente o momento presente, ele é capaz de construir uma pluralidade de sequências matemáticas.

Ora, na próxima seção, uma vez que entendemos a base do aspecto temporal do segundo ato do intuicionismo, explicitamos brevemente mais detalhadamente a “semântica” das expressões “nova” de “nova entidade matemática” sustentadas no segundo ato do intuicionismo.

3.2.4 O status de uma demonstração matemática quando deixa de existir signologicamente: a prova matemática apagada do quadro negro

Para discutirmos o sentido da possibilidade de novas entidades matemáticas em Brouwer, consideramos uma situação hipotética mencionada por Wittgenstein (1976, p. 78):

> [e]m ambos os casos, ele produz uma figura no quadro negro. Contudo, se alguém apagasse o desenho de um pentágono, essa pessoa teria apagado o que tinha produzido; se alguém apagasse a construção de um heptadecágono não teria apagado aquilo que tinha descoberto – não se apagaria a prova.

Segundo o filósofo austríaco, se um sujeito cognoscente realiza uma prova em um quadro negro e depois a apaga, em tal caso não faria sentido alegar que a prova também foi apagada. Para isso, segundo o intuicionismo de Brouwer, haveria duas saídas: (i) admitir o primeiro ato do intuicionismo ou (ii) considerar um tipo de realismo abstrato. Recorremos à situação hipotética mencionada para tentar entender isso a partir da perspectiva do intuicionismo brouweriano, a fim de esclarecer em que sentido a prova matemática não é apagada quando o que está escrito no quadro negro é apagado.

O cenário hipotético de Wittgenstein pode ser compreendido a partir dos dois atos do intuicionismo de Brouwer. Do ponto de vista do primeiro ato, a prova matemática *não* aconteceu *no* quadro negro. Na verdade, a prova matemática aconteceu na mente do sujeito cognoscente, pois a prova *é* uma construção mental. O que aconteceu no quadro foi apenas uma *expressão* ou descrição, talvez até mesmo falível, segundo o geômetra, do que aconteceu na mente. Assim, apagar uma descrição do quadro negro não significa apagar a prova matemática. De certo modo, só faria sentido declarar que a prova deixou de existir quando mais nenhum sujeito cognoscente for, a princípio, capaz de construir a entidade matemática em sua mente. O papel que os signos-*qua*-prova no quadro desempenha é apenas o de auxiliar os outros sujeitos a experienciar *noeticamente* a “mesma prova”.

Já do ponto de vista do segundo ato do intuicionismo, se o que foi feito no quadro negro for a construção de uma entidade matemática que *não tenha sido construída* ainda, então, em algum sentido, se trata de uma *nova* entidade matemática. Contudo, ela não é uma nova entidade matemática *quando é escrita* no quadro negro, mas *quando é construída mental* e intuitivamente pelo sujeito cognoscente em sua mente. Além disso, é plausível lembrar que, a partir de uma outra perspectiva, as entidades matemáticas não passam a existir do nada, mas possuem sua existência prefigurada na natureza absolutamente indeterminada e sem forma do *continuum* do tempo.

Essa sequência matemática, construída mentalmente pelo sujeito cognoscente e expressa signologicamente no quadro, pode ser intensionalmente infinita, com ou sem nenhuma restrição, em qualquer um dos estágios da construção dela. Com base nesses sentidos intuicionistas de que uma entidade matemática pode ser uma *nova* entidade matemática, em relação ao segundo ato do intuicionismo e a sua conexão com a teoria do *continuum* intuicionista, Brouwer (1975 [1952], p. 511, grifos no original) afirma que “[o] segundo ato do intuicionismo cria a possibilidade de introduzir o *continuum intuicionista* como a espécie das sequências infinitas convergentes de números racionais *que procedem mais ou menos livremente*”. O *continuum* intuicionista só é possível por causa dos dois atos do intuicionismo e, em especial, por causa do segundo ato, pois é através dele que é possível definir sequências infinitas convergentes de números racionais.

Uma provocação mais fundamental dos dois atos e do raciocínio do topologista em relação à natureza das entidades matemáticas é a indagação de qual seria o sentido da existência de entidades matemáticas na situação hipotética na qual não existem seres cognoscentes de nenhum tipo. Ainda que o leitor dissesse que, nessa situação hipotética, “2+2” não deixaria de ser “4”, ele só seria capaz de reconhecer essa verdade por causa da sua mente. Desse modo, o ponto fundamental, para Brouwer, é que tal situação não é sequer possível, pois se há entidades matemáticas, há inteligibilidade de algum tipo e, portanto, há sempre consciência de alguma forma. Se entidades matemáticas são necessárias em qualquer situação hipotética, então também a consciência é necessária em qualquer situação hipotética. Nas palavras de Poincaré (2011, p. 9), “sem dúvida é impossível uma realidade completamente independente do espírito que a concebe, vê ou sente. Um mundo assim tão exterior, se acaso existisse, ser-nos-ia para sempre inacessível”.

Isto posto, como é discutido no próximo capítulo, é com base na construção de sequências de números racionais que é possível construir sequências potencialmente infinitas e convergentes. Através dessa noção de “sequências potencialmente infinitas de intervalos convergentes”, Brouwer explica o que ele entende por número real e, assim, fundamenta sua teoria do *continuum*.

As reflexões apresentadas até esse momento delineiam o “caminho” para chegar às considerações e às conclusões mais importantes desta tese, as quais são abordadas no quarto e quinto capítulos, respectivamente. As discussões seguintes constituem o âmago desta tese.

Capítulo 4

A teoria intuicionista do *continuum* ou a estrutura do intuicionismo matemático: a construção dos números reais, a questão dos avanços matemáticos ou o problema da temporalidade e a noção de "generalidade matemática"

Neste capítulo, temos os seguintes objetivos: (i) discutir a teoria do *continuum* intuicionista de Brouwer a partir dos dois atos do intuicionismo; (ii) tratar da problemática do avanço da matemática na história; e (iii) apresentar algumas dificuldades em torno da definição da noção de "função". Ao alcançarmos esses objetivos, o leitor poderá reconhecer e avaliar as razões matemáticas que explicam o porquê, em alguns contextos, de o terceiro excluído não poder ser aplicado irrestritamente. Em outras palavras, poderá avaliar como o terceiro excluído nem sempre poderá ser aplicado universalmente, justamente em contextos que envolvam a noção do *continuum*.

Na seção 4.1, intitulada "Considerações iniciais sobre a natureza do *continuum*", fazemos uma discussão geral do que sucede. Na seção 4.2, intitulada "Os dois atos do intuicionismo e suas consequências filosóficas para a concepção de 'número real'", discorremos sobre as consequências filosóficas e matemáticas dos dois atos. Nessa seção, mostramos que tipo de noção de "número real" os dois atos do intuicionismo acarretam. Na seção 4.3, intitulada "O problema da existência de funções intrinsecamente incognoscíveis", desenvolvemos o problema das entidades intrinsecamente incognoscíveis e a relação desse problema com a questão do tempo, i.e., com a questão dos avanços da matemática.

4.1 Considerações iniciais sobre a natureza do *continuum*

Como temos visto nesta tese, Brouwer considera os dois atos *necessários* para o estabelecimento de uma posição filosófica *legitimamente* intuicionista. Neste quarto capítulo, mostramos que é possível extrair várias consequências filosóficas dos dois atos e, finalmente, apresentamos a concepção intuicionista brouweriana de "número real" como sequências de intervalos infinitamente convergentes.

Primeiramente, discutimos duas notas: de que *não há algo como entidades matemáticas abstratas* e de que *entidades matemáticas são essencialmente dinâmicas*. Ambas as notas filosóficas, extraídas dos dois atos do intuicionismo, são justificadas pelo fato de que entidades matemáticas *são* as *próprias* construções mentais.

4.2 Os dois atos do intuicionismo e suas consequências filosóficas para a concepção de "número real"

A primeira nota filosófica diz respeito ao fato de como Brouwer concebe que números reais *não* podem ser entidades abstratas. Dessa forma, proposições matemáticas não são tornadas verdadeiras por "fatos" matemáticos abstratos que existem numa realidade platônica. Entidades matemáticas são o que *engendramos cognitivamente* como seres que experienciam os fenômenos temporalmente. Assim, *qualquer que seja a natureza daquilo que chamamos de "necessidade matemática", para o topologista, deveria ser entendida como explicada simplesmente pelo fato de que somos seres temporais*.

Em vista disso, qualquer que seja a construção matemática que fazemos, ela *não poderá* escapar do fato de que experienciamos o tempo de forma semelhante, e é dessa "realidade" temporal que extraímos – e não de um mundo de entidades abstratas – o "caráter necessário" dos resultados matemáticos. Essa nota filosófica está conectada ao primeiro ato do intuicionismo, o qual afirma que entidades matemáticas são independentes da linguagem, uma vez que são construções mentais. Assim, a instauração da "existência" das entidades matemáticas ocorre no terreno intuitivo e cognitivo do espaço mental.

A segunda nota filosófica diz respeito ao fato de que entidades matemáticas, uma vez que são construções mentais, não podem ser imutáveis. Nesse sentido, apoiamo-nos, em parte, no raciocínio de Van Atten (2007) para mostrar a razoabilidade de que entidades matemáticas são dinâmicas, mutáveis e, portanto, em certo sentido, temporais.

Ora, essas duas notas filosóficas servem como *base* para sustentar uma discussão sobre avanços matemáticos-*qua*-avanços cognitivos e sobre o *continuum* e os números reais. Desse modo, no lugar de compreender avanços matemáticos como descobertas de novas propriedades sobre entidades matemáticas *eternas e imutáveis*, compreendemos o avanço matemático como uma alteração na *forma* que construímos as entidades matemáticas. Do ponto de vista do intuicionismo de Brouwer, não existe uma "identidade" da sequência matemática *fixada do lado da própria entidade*.

Assim, do ponto de vista da questão dos avanços matemáticos, algumas construções passam a ser entendidas *como* "obsoletas" diante de construções matemáticas "novas" e "melhores". Desse modo, *avanços matemáticos são explicados em termos de melhores* *construções e não em termos de novas descobertas matemáticas.*[8] Isso implica obviamente uma reformulação geral não apenas das bases lógicas da matemática, como também da forma de conceber e compreender o que são teoremas, conjecturas e provas matemáticas.

Salientamos que a posição de Brouwer não é razoável apenas do ponto de vista dos fundamentos da matemática, da análise dos números reais, mas também do ponto de vista do *poder explicativo* dos avanços científicos na *história* da matemática.

Para alcançar nossos objetivos, é necessário apresentar brevemente um posicionamento *contrário* ao de Brouwer com o intuito de analisar a posição do intuicionismo sobre números reais através de um *contraste* filosófico. Assim, discutimos o que acontece com uma filosofia da matemática que possui uma característica de assumir que entidades matemáticas sejam independentes da mente e que existam atemporal e imutavelmente. Essa posição desencadeia *atitudes* filosóficas estranhas, pois implicam a existência necessária de entidades que seriam absolutamente incognoscíveis. Exploramos um pouco melhor esse ponto na próxima seção.

4.3 O problema da existência de funções intrinsecamente incognoscíveis

Em oposição ao "senso comum", as coisas não estiveram sempre "prontas" e "já dadas" na matemática. A história da matemática revela que as estruturas mais fundamentais da "rainha da racionalidade" *titubearam*. Ao longo do tempo, inúmeras vezes o que foi considerado o alicerce mais fundamental da matemática deixou de ser a sua base mais sólida e se tornou apenas mais um "capítulo" de sua história.

Nesse momento, nos concentramos em alguns personagens importantes do fim do século XVIII e do início do século XIX. Nesse período, surgiu a necessidade de construir um conceito *suficientemente geral e único* de "função". Com isso, um dos problemas que surgiu nesse período foi o de que uma função só poderia ser *reconhecida* como entidade *existente caso houvesse* uma expressão analítica que a descrevesse ou, de alguma forma, a identificasse. Para o nosso modesto objetivo de apresentar a posição intuicionista, é relevante mencionar brevemente como Euler, Lobachevsky, Dirichlet e Cantor respondiam a essa questão.

Inicialmente, segundo Euler, uma função é definida justamente como uma expressão analítica na medida em que "[u]ma função de uma quantidade variável é uma expressão

[8] Nosso raciocínio aqui é inspirado em Porto (2015, 2020).

analítica composta, de alguma forma, a partir dessa quantidade variável e de números ou quantidades constantes" (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 61). Nesse sentido, *não poderia existir*, pela própria definição, uma função que não correspondesse a uma expressão analítica. Todavia, já com o aparecimento de funções com comportamentos e natureza estranhos, Lobachevsky (1834, apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 77, grifo adicionado) assume uma posição distinta:

> [a] concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número, o qual é dado para cada x e que muda gradualmente junto com x. O valor da função poderia ser dado por uma expressão analítica ou por uma condição que oferece um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou, por último, a dependência *pode* existir, mas permanecer desconhecida.

Em outras palavras, Lobachevsky introduz a possibilidade de distinguir entre a "existência da expressão analítica" e a "existência da função". Nesse caso, a existência de funções ocorreria de uma maneira completamente independente de uma expressão analítica que a designasse e mesmo de um método que nos permitisse calcular, ou pelo menos aproximar, o seu valor para cada argumento. Isto é, em um raciocínio caracteristicamente clássico, a *totalidade* das funções *já* estaria dada, quer tenhamos ou não uma forma de identificá-las através de uma expressão analítica. Mesmo que não tenhamos uma expressão analítica ou um método de testagem "em mãos", ainda assim Lobachevsky compreende que qualquer função poderia, pelo menos, ser representada por uma função analítica. Em suas palavras,

> [p]arece impossível duvidar da verdade de que tudo no mundo poderia ser expresso por números ou da correção [do julgamento] de que qualquer mudança e relação nele é representada por uma função analítica. (LOBATCHEVSKY, 1834, apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 77).

Essa posição do autor ainda assim não leva às mesmas consequências peculiares da posição de Cantor, que aparece um pouco depois. Diferente da posição de Lobachevsky, Cantor se posiciona de modo um pouco mais radical e parece dar um passo adiante que nem mesmo Lobachevsky pensava ser possível. Na segunda metade do século XIX, em relação a uma consequência de seu argumento da diagonal, Cantor defende que não só *poderia*, mas *teria de haver* funções de reais em reais que jamais *poderiam* ser nomeáveis por nenhuma expressão analítica. Assim, de acordo com esse argumento, a totalidade das funções não seria enumerável. Por conseguinte, de uma perspectiva cantoriana, *necessariamente* haveria mais funções do que expressões analíticas para designá-las.

É nesse contexto que se introduz um "novo" conceito peculiar de "existência", justamente por causa da independência existencial das funções, tanto em relação a expressões analíticas que as nomeiem quanto em relação a métodos que nos permitem calcular, ainda que aproximativamente, seus resultados. Além disso, com Cantor, acessamos um tipo curioso e surpreendente de entidades matemáticas *que permanecem sempre, e necessariamente, para além de qualquer cognoscibilidade*. Tais entidades aparecem com um novo conceito peculiar de "existência". Esse conceito de "existência" clássico teria de ser completamente abstrato, segundo uma perspectiva intuicionista.

Dito de outra maneira, isso não é algo que seria decidido do lado do sujeito cognoscente que realiza construções matemáticas, mas trata-se de algo que já estaria eternamente decidido *do lado da entidade matemática e de sua natureza enquanto entidade eterna, abstrata e imutável*. Para essa posição, portanto, por exemplo, alguns números reais seriam esse tipo de entidade *necessariamente* incognoscível. Podemos fazer essa afirmação com base em argumentos que envolvem os números transcendentais de Cantor. Além disso, também podemos afirmar que essa seria a posição adequada para esse tipo de postura clássica por causa de teoremas como os de Gödel.

Na próxima seção introduzimos o problema que está implicado na relação entre o tempo e a matemática, quando vista a partir de uma posição clássica, como as de Lobachevsky e Cantor.

4.3.1 A reação construtivista e o problema do tempo levantado por Brouwer

Segundo Lobachevsky, não é necessário ter uma expressão analítica ou um método de cálculo, entendido construtivamente, para se referir à existência de funções. Por conta disso, mencionamos posições como as de Lobachevsky, Dirichlet e Cantor, no contexto da nossa discussão, uma vez que já na época dos dois primeiros, no século XIX, havia reações críticas de tipo construtivista as suas posições. Por exemplo, um construtivista como Molk (1909, p. 22, grifos no original), discípulo de Kronecker, afirma que,

> quando dizemos, como G. Lejeune Dirichlet, que uma variável (real) y é uma *função unívoca* (real) de uma variável (real) x, em um domínio (x), quando para cada valor de x pertencente ao domínio (x) corresponda um valor *determinado* y, não podemos

> prescindir que esse valor determinado de y, seja *definido*, direta ou indiretamente, por meio do valor correspondente de x por meio de algum *método de cálculo*.

A reação de Molk caracteriza bem aquela que um construtivista teria, e sua ideia central é a de que um método de cálculo é necessário para poder se referir *existencialmente* a uma entidade matemática. Nesse sentido, a "existência de uma função" é tomada pelo autor como idêntica à "posse de um método" para, pelo menos, aproximar arbitrariamente o resultado. Portanto, a noção de "função" *é identificada* com a noção de "método de *construção*". Foi nesse terreno da discussão que Molk e outros construtivistas não se deram conta de um problema que Brouwer posteriormente confronta: a questão do *futuro* da matemática, pois se "funções" são identificadas com "métodos" e "novos métodos" *realmente surgem*, então "novas funções" surgem e podem continuar a surgir sempre.

Ora, o problema das "novas funções que passam a existir" envolve também aquelas funções de R→R, as quais incluíam também, evidentemente, os números irracionais. Uma das prováveis preocupações centrais de Lobachevsky e Dirichlet era justamente a compreensão adequada dos números da análise – os números irracionais. Em outras palavras, como todo construtivista, Molk entendia que a noção de "função" está fundamentalmente identificada com a noção de "método de obtenção". No entanto, Molk não parecia perceber que isso leva necessariamente ao problema do surgimento de *novos* métodos.

Assim, esse problema pode ser sintetizado da seguinte forma: se só temos a existência de um número real *quando temos diretamente um número racional ou, pelo menos, temos em mãos a posse efetiva de um método que nos permita aproximar arbitrariamente o valor pretendido*, então como compreender o surgimento de *novos* métodos construtivos? Por exemplo, se só temos o número real quando temos a posse efetiva de um método, então quando Arquimedes estabeleceu seu método, que até então *não existia*, teríamos de dizer que esse método e, portanto, o número real "Pi", *passou realmente* a existir? Um clássico, como Lobachevsky e Dirichlet, diria que o número Pi – enquanto entidade *puramente abstrata* – e o método, em algum sentido, *já* existiam e apenas os *descobrimos*. Contudo, se entendemos que só podemos afirmar a existência de Pi se e, somente se, temos a posse *efetiva* de um método, como Molk parece sugerir, então a questão se torna mais complexa, uma vez que haveria necessariamente uma questão temporal envolvida.

A ideia central de Brouwer é que se alguém é realmente construtivista, se o sujeito cognoscente realmente tem uma noção construtivista de "função", i.e., se ele entende realmente o número real como posse *efetiva* em mãos de um método, então temos de realmente rejeitar o princípio do terceiro excluído no contexto da matemática. *Dessa forma, para Brouwer, não é pela razão de rejeitar o terceiro excluído que só aceitamos uma noção de "prova construtiva", mas pela razão de só aceitarmos entidades matemáticas-qua-construções-mentais que temos de rejeitar o terceiro excluído.*

Ora, sabemos que novos métodos, novas funções de R→R e, até mesmo, novas aproximações racionais de certas medidas geométricas, de fato, *surgem na matemática*, de tempos em tempos. Se o "número real" é, em algum sentido, identificado com algum tipo de "método de aproximação", então também os próprios novos números reais *surgem* em um sentido muito mais forte do que o de *descoberta de velhas entidades matemáticas eternas e puramente abstratas* (como diria o clássico).

Com base no raciocínio de que se números reais são métodos e que novos métodos surgem, no lugar de asserir ou negar propriedades sobre uma *mesma* existência matemática *pretérita*, uma substância matemática eternamente velha, Brouwer afirma a *possibilidade* do *surgimento* de *novas* entidades matemáticas através do seu segundo ato do intuicionismo. De acordo com o topologista,

> [o] *segundo ato do intuicionismo* reconhece a possibilidade de gerar novas entidades matemáticas: primeiro, na forma de sequências de processo infinito cujos termos *são escolhidos mais ou menos livremente das entidades matemáticas previamente adquiridas*; de tal maneira que a liberdade existente na primeira escolha talvez possa ser irrevogavelmente sujeita, repetidas vezes, a restrições progressivas nas escolhas subsequentes, enquanto todas essas intervenções restritivas, bem como as próprias escolhas, podem, a qualquer momento, ser feitas a depender de possíveis experiências matemáticas futuras do sujeito criativo. (BROUWER, 1975 [1954], p. 523, grifos no original).

Em contraste com a posição clássica que não aceita apenas verdades potenciais que sejam já dadas, bem como também aceita verdades que já estão dadas, mas nunca serão descobertas, o segundo ato introduziu a ideia de "entidades" necessariamente *dinâmicas* que permanecem em estado de *indeterminação*. Como o próprio Brouwer (1992, p. 71, apud VAN ATTEN, 2007, p. 12) afirma,

> [p]ara nós, um ponto e, portanto, também os pontos de um conjunto são sempre inacabados e, de maneira frequente, objetos indeterminados permanentemente. Isso contrasta com a concepção clássica, na qual um ponto é tanto determinado quanto acabado.

A noção de "entidades matemáticas" em "estado de vir a existir" e de "indeterminação" é justamente a ideia de "sequências de escolha" que os construtivistas preintuicionistas não percebiam, justamente pela razão de eles não se darem conta do problema dos avanços cognitivos-epistêmicos na história da matemática. O ponto central, segundo Brouwer, é que se o sujeito cognoscente aceita que métodos matemáticos, uma vez *identificados* com funções, podem vir a existir, então ele terá de se comprometer necessariamente com a ideia de “sequências de escolha”. Ademais, isso inclui obviamente o surgimento de novos números irracionais e de novos métodos de aproximação. Dessa forma, o surgimento de novos números irracionais se torna um problema, devido à questão dos avanços epistêmicos, e não há forma de compreender todos os números irracionais como *já determinados* e existentes de alguma forma, se são identificados com métodos de obtenção.

Ao considerar o que foi discutido, é plausível acreditar que uma das conclusões desse raciocínio é o fato de que números irracionais já não podem ser concebidos existencialmente como já *determinados* e dados, uma vez que o construtivista não deseja se comprometer com a noção de “entidades puramente abstratas”. Em outras palavras, se a “existência das funções” é realmente identificada com a “posse de um método”, então a questão da temporalização aparece necessariamente, uma vez que o estado de “posse de um método”, “posse em mãos”, ocorre sempre no presente. Assim, o segundo ato não implicaria apenas a descoberta de novas propriedades, como também podemos descobrir novas casas decimais em uma sequência potencialmente infinita, já que ela está sempre em um estado de construção, incompletude e indeterminação, no *sentido intuicionista* desses termos. Brouwer (1975 [1955], p. 554) afirma que

> sequências infinitas intuicionistas, em particular as sequências infinitas convergentes de números racionais [que são os números reais], não precisam, como aquelas da matemática clássica, ser predeterminadas, mas podem prosseguir com uma quantidade maior ou menor de liberdade.

Isto é, sequências infinitas intuicionistas *não* são e não podem ser sequências *predeterminadas*, como os pontos do *continuum* clássico.

Nas próximas subseções, exploramos em mais detalhe essa ideia.

4.3.2 A questão brouweriana do tempo e as novas construções matemáticas

Diante das questões levantadas nas seções e subseções anteriores, enfatizamos a genialidade de Brouwer ao assinalar o problema da temporalização (PORTO, 2020), o qual outros não haviam percebido anteriormente.

Em outras palavras, os construtivistas não-intuicionistas não se atentaram ao fato de que a questão seria absurdamente mais complexa e que, com isso, surgiriam problemas com uma lei lógica *tratada* como fundamental – o surgimento de uma série de problemas no contexto da aplicação universal do princípio do terceiro excluído e com a noção de "existência" (i.e., "posse em mãos") e a "demonstração genérica de que nem todos podem falhar". Essas questões são absolutamente fundamentais na matemática, pois o pedágio que se pagava com uma noção *realmente* construtivista de entidades matemáticas era o problema da introdução do tempo no contexto da disciplina considerada a "rainha da racionalidade" – a ciência entendida ordinariamente como a mais "estável" de todas.

Obviamente, Brouwer era construtivista, em certo sentido. No entanto, já havia vários outros construtivistas, tais como Kronecker, Poincaré e Borel. O ponto que os construtivistas não entendiam, segundo o topologista, era notar o fato de que para viabilizar a concepção construtivista é necessário lidar com o problema da temporalidade. Por exemplo, o método de aproximação de Pi, de Arquimedes, não existia e depois *passou* a existir e, a partir disso, passamos a ter uma determinação das casas decimais de Pi. Há outros exemplos, pois matemáticos, mesmo atualmente, constroem, de tempos em tempos, um algoritmo de aproximação de certas proporções geométricas, novos métodos de aproximação que geram sequências de números racionais, i.e., "números irracionais".

Dito de outro modo, o construtivismo teria de necessariamente *nos levar* ao intuicionismo, se formos realmente coerentes com uma noção construtivista de "entidade matemática" e não aceitarmos entidades abstratas que não sejam nem mentais, nem físicas. Em relação a métodos ainda não "inventados", teríamos de afirmar que eles "ainda não existem", mas poderiam "passar a existir" (PORTO, 2020).

Um matemático clássico diria que todas as entidades têm de ser vistas *apenas* a partir de um ponto de vista *sub species aeternitatis*. Ou seja, a questão da temporalidade é completamente descartada ou ignorada. Um construtivista insistiria, contudo, na tese de que só temos uma entidade matemática quando temos a *posse* de um método "em mãos". Desse modo, a "existência de funções" é identificada com a "posse efetiva em mãos" – no momento *presente* – de algum algoritmo.

De outra maneira, diante da pergunta "*quando* uma entidade matemática existe?", Brouwer responderia que "existe no momento que 'temos em mãos' uma construção mental". Se uma entidade matemática é, então, identificada com a "posse em mãos" de um algoritmo (como um construtivista diria), então o problema do tempo é inserido necessariamente. Nesse contexto, o segundo ato já pode ser visto como diretamente conectado ao tema discutido no início dessa tese – à intuição do tempo. Assim, para um construtivista, o método é construído e, portanto, "existe" quando um matemático tem no *presente* sua "posse em mãos". Nesse sentido, é razoável concluir que houve métodos que não tínhamos e passamos a ter, que foram construídos e, então, "passaram a existir". Nesse sentido,

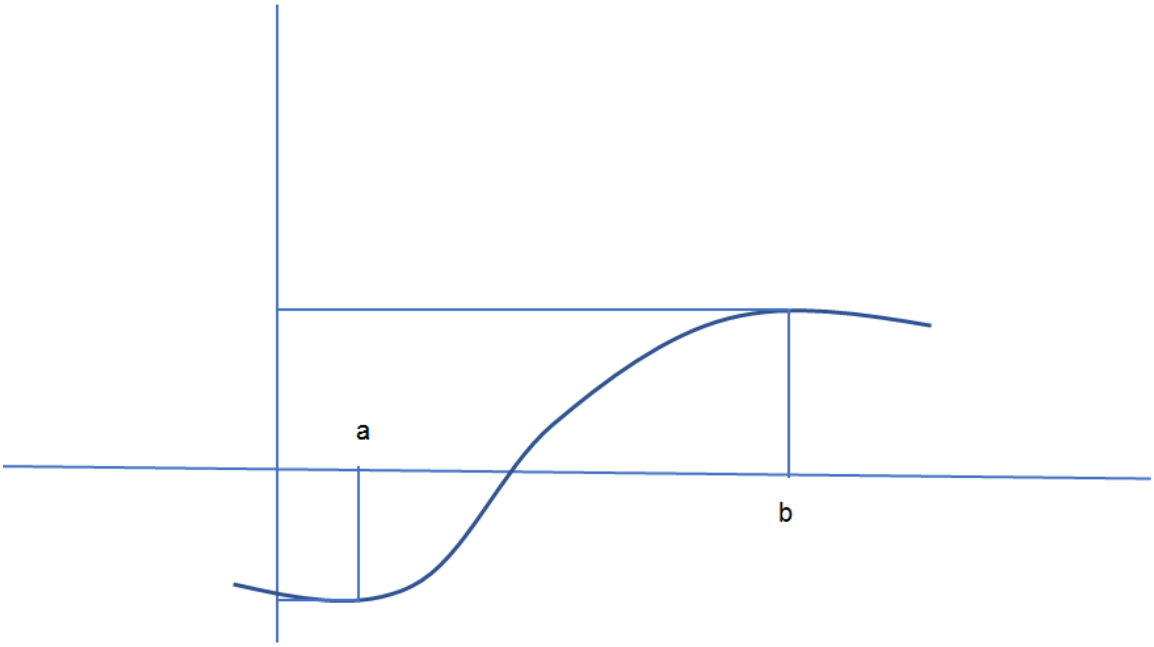
> [o] *segundo ato do intuicionismo* reconhece a possibilidade de gerar novas entidades matemáticas: primeiro, na forma de sequências de processo infinito cujos termos *são escolhidos mais ou menos livremente das entidades matemáticas previamente adquiridas*; de tal maneira que a liberdade existente na primeira escolha talvez possa ser irrevogavelmente sujeita, repetidas vezes, a restrições progressivas nas escolhas subsequentes, enquanto todas essas intervenções restritivas, bem como as próprias escolhas, podem, a qualquer momento, ser feitas a depender de possíveis experiências matemáticas futuras do sujeito criativo. (BROUWER, 1975 [1954], p. 523, grifos no original).

A questão da "posse em mãos" é intimamente conectada ao tempo, e isso é consequência direta do segundo ato. Contudo, para que isso fique mais evidente, na próxima subseção, aplicamos um exemplo para compreendermos, de modo mais adequado, as consequências intuicionistas ao adotar uma posição realmente construtivista de função.

4.3.3 Um exemplo: o teorema do valor médio

Como temos visto, se o sujeito cognoscente realmente adota uma perspectiva construtiva de função ou subscreve realmente ao segundo ato do intuicionismo, então será necessário distinguir dois elementos: as concepções de "falha de generalidade" e de "existência de singularidade". Essa distinção *precisa* acontecer, do ponto de vista intuicionista, pois embora possamos ter construções mentais de determinadas funções, isso não implica que tenhamos todas as funções em um determinado cenário. Isso é explicitado, a seguir, com um exemplo. Vejamos como essa distinção é estabelecida ao utilizar o teorema do valor médio. Considere a imagem abaixo:

(2) Teorema do valor médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Consideremos o exemplo acima. Na imagem (2), temos uma função contínua, com um ponto negativo "a" e um ponto positivo "b". Um clássico entenderia a imagem (2) da seguinte forma:

f(a) < 0 *f(b)* > 0 Contínua(f) ――――――――――― ∃x(f(x)=0)

Isto é, um clássico concluiria que uma vez que *f(a)* é menor que 0 e *f(b)* é maior que 0, portanto, há um *f(x)* que seria idêntico a 0. Ora, um intuicionista não assumiria essa conclusão, embora concordasse com as premissas. De uma perspectiva intuicionista, o raciocínio seria o seguinte:

f(a) < 0 *f(b)* > 0 *Contínua(f)* ―――――――――――

$$\boxed{\neg\forall x\ (f(x)\neq 0)}$$

Ou seja, quando consideramos uma caracterização geométrica desse tipo, de um ponto de vista intuicionista, não temos como extrair sempre e para *todos* os casos um algoritmo ou uma construção cognitiva para efetivamente podermos encontrar um método de cálculo daquele valor específico ou, pelo menos, de um método de aproximação. Embora em alguns contextos possamos encontrar uma função tal como essa, contudo, isso não implica que seja assim para todos os casos. Em outras palavras, o intuicionista brouweriano só aceita asserir "$\exists x\ (f(x)=0)$" se existir (i.e., se ele "tiver em mãos") uma construção cognitiva-matemática completamente geral para encontrar a aproximação daquele valor "c" tal que "$(f(c)=0)$".

$$\boxed{\exists x\ (f(x)=0) \equiv\text{def } \exists f \exists c\ (f(c)=0)}$$

Isso significa que o intuicionista teria de "ter em mãos" uma função construtiva "f" e um argumento "c" para os quais ele pudesse "rodar" a função construtiva "f" (sobre o argumento "c") e finalmente *efetivamente* obter, ou pelo menos aproximar, um resultado f(c) tal que f(c)=0.

Dito de outro modo, $\neg\forall x\ (f(x)\neq 0)$ significa que temos em mãos uma construção mental matemática de que, para todos os argumentos possíveis "x", se esses argumentos tivessem a propriedade de "f(x)=0", conseguiríamos extrair uma contradição. Isto é:

$$\boxed{[\forall x(f(x)\neq 0)] \rightarrow \bot}$$

Contudo, há alguns comentários importantes de serem feitos aqui sobre esse ponto. O que estamos afirmando é que a refutação da possibilidade "f(x)=0" nos levaria ao absurdo. Isso está relacionado à noção de "negação" intuicionista:

$$\boxed{\neg P \equiv [P] \rightarrow \bot}$$

Essa afirmação deve ser entendida da seguinte forma: "P" ser falso significa que "P" afirmado leva ao absurdo. Além disso:

$$\boxed{\neg\neg P \equiv \{([P] \rightarrow \bot)\rightarrow \bot\}}$$

Ou seja, a absurdidade da absurdidade de P significa que a conexão hipotética entre [P] e absurdo é absurda. Todavia, isso, do ponto de vista intuicionista, de maneira nenhuma significa por si só a afirmação [P].

Ora, se isso, a absurdidade da absurdidade de [P], levasse por si só a [P], então, no caso da falha de generalidade, $\neg\forall x\neg Px$, a qual, do ponto de vista clássico, por si só, levaria a existência de uma singularidade, $\exists xPx$, – quer ou não tenhamos construções mentais para todos os casos –, teríamos de concordar com o clássico que, mesmo quando não "temos em mãos" um método de aproximação, os argumentos já existem de antemão. Como é possível ver, isso não pode ser asserido pelo construtivista e nem pelo intuicionista. Todavia, o ponto mais importante ainda, a partir da perspectiva brouweriana, é o fato de que, de certo modo, o construtivismo necessariamente desencadeia o segundo ato do intuicionismo, i.e., *novas* entidades matemáticas têm de *poder* surgir.

Dito de outro modo, a visão *sub species aeternitatis* e a visão "presentista" de posse em mãos têm consequências lógicas muito importantes. A visão *sub species aeternitatis* das entidades matemáticas se comprometeria com um seguinte tipo de afirmação para todo contexto de entidades matemáticas possíveis:

$$\boxed{\neg\forall x\neg Px = \exists xPx}$$

Em outras palavras, de um certo ponto de vista, como vimos no exemplo, para um clássico, a demonstração genérica de que nem todos podem falhar em ter a propriedade P, *por si só*, seria equivalente a "ter em mãos" um método (construtivo, é claro) que nos permitisse encontrar um exemplo de uma entidade que satisfaça P. De uma perspectiva intuicionista, haveria uma diferença sutil, mas muito importante, entre "$\neg\forall x\neg Px$" e "$\exists xPx$". Para o clássico, essa distinção desaparece completamente, pois ele toma as entidades matemáticas como uma existência abstrata, paralela, imutável. Para ele, qualquer demonstração geral de que nem todos os "objetos" poderiam falhar em ter a propriedade "P" já estabeleceria uma espécie de "existência abstrata" de um exemplo *específico*, quer ou não conheçamos um método para encontrar tal contraexemplo.

Em síntese, no contexto de Brouwer, nem toda falha de generalidade matemática implica por si só a *existência* de uma singularidade, e isso é possível, pois como e*ntidades matemáticas estão sempre em constante estado de alguma indeterminação e construção*, então, sem a construção da entidade matemática, a sua existência não é estabelecida.

Assim, para mantermos a associação que o construtivista deseja, entre as noções de "função" e de "posse *presente* de um algoritmo", é necessário distinguir entre mera "subsistência genérica" e "existência presente em mãos" (PORTO, 2020). Entretanto, para isso, é preciso recusar o princípio do terceiro excluído. Destarte, para continuar sendo construtivistas, precisamos virar intuicionistas, ou seja, é necessário recusarmos a lei do terceiro excluído. Nesse sentido, nem toda generalidade, nem toda singularidade de entidades matemáticas já é *determinada* de antemão. Isto é, a recusa do terceiro excluído feita por Brouwer está essencialmente conectada ao fato de que nem todas as entidades matemáticas já são existencialmente determinadas. Ademais, segundo o matemático holandês, *toda a determinabilidade matemática é provisória e não existe em si mesma, na medida em que depende de seres cognoscentes e temporais para existir. Ou seja, a fixação da natureza de uma entidade matemática nunca acontece do lado da própria entidade matemática. Por assim dizer, ela tem sua existência "emprestada" pelo trabalho dos sujeitos cognoscentes sencientes e pela experiência temporal deles*.

No próximo capítulo, enfocamos como essa noção de "entidade matemática", fixada pela experiência temporal de um ser senciente, só poderia levar à noção de "número real" enquanto "sequência de intervalos" (não necessariamente predeterminados), selecionados arbitrariamente por um sujeito cognoscente. Desse modo, tratamos detalhadamente dessa relação entre os dois atos do intuicionismo, suas consequências e a noção de "número real" enquanto "sequência de intervalos *infinitamente convergentes*".

Capítulo 5

A teoria do *continuum* ou a estrutura do edifício do intuicionismo matemático: as noções de "pontos", "sequências" e "números reais" e a questão da "aplicabilidade da matemática"

Neste capítulo, discutimos a recusa intuicionista da noção de "ponto" como fundamento para a noção de "*continuum*". No caso de um *continuum* não puntiforme, há várias consequências lógicas e matemáticas. A partir da explicitação da recusa da noção "puntiforme de *continuum*", exploramos em mais detalhes as consequências matemáticas dessa concepção não puntiforme.

Assim, temos três objetivos: (i) explorar detalhadamente a noção de "número real" como "sequências de intervalos infinitamente convergentes entre si"; (ii) enfatizar a característica "viscosa" e/ou "coesa" do *continuum* intuicionista; e (iii) mostrar, após toda a discussão realizada, como o intuicionismo matemático pode ser uma alternativa razoável para lidar com o problema da aplicabilidade[9] matemática.

Na seção 5.1, intitulada "Considerações iniciais sobre a teoria dos números reais", fazemos uma apresentação sintética da discussão filosófica que segue. Na seção 5.2, intitulada "Números reais enquanto sequência de intervalos", discorremos sobre a noção de "número real" e, portanto, a noção de "*continuum* matemático", enquanto sequências de escolha. Na seção 5.3, intitulada "Sequências de intervalos difusos: o exemplo do número Pi", salientamos a característica intrínseca da difusidade das sequências de intervalos através do exemplo do número Pi. Na seção 5.4, intitulada "A noção de 'número real' enquanto '*spreads*' (espalhamentos)", desenvolvemos a abordagem da noção de "número real" através da noção definitória de "espalhamento". Na seção 5.5, "O *continuum* 'viscoso' brouweriano e a lei da tricotomia rejeitada", elucidamos a característica da viscosidade do *continuum* intuicionista e mostramos como isso significa, por exemplo, que a lei matemática da tricotomia não pode ser universalmente estabelecida. Na seção 5.6, intitulada "O *continuum* 'coeso' brouweriano: a lei da tricotomia rejeitada", salientamos um pouco mais a característica da "viscosidade", mas dessa vez sob a forma do predicado de "coesidade", e enfatizamos como essa noção torna não aplicável universalmente a lei da tricotomia à reta dos reais. Finalmente, na seção 5.7,

[9] Embora Brouwer se contrapunha à questão da "aplicabilidade da matemática", o nosso objetivo é analisar essa problemática sob a perspectiva intuicionista, e não exatamente apresentar uma "exegese" de como o topologista concebia a questão. Com o intuito de evitar esse conflito, apesar de inicialmente termos decidido utilizar a expressão "funcionalidade" ao invés de "aplicabilidade", observamos que a expressão "funcionalidade" poderia causar confusões conceituais desnecessárias. Desse modo, decidimos optar pelo termo "aplicabilidade".

intitulada “A natureza idealista do *continuum* e dos números reais: a questão da aplicabilidade da matemática”, problematizamos a questão da “aplicabilidade da matemática”. Nessa seção, finalizamos a questão da “aplicabilidade da matemática” de modo que a conectamos com a natureza da “necessidade matemática” através da elucidação e da ênfase da noção de “entidades matemáticas enquanto sequências”. Em outras palavras, a questão da necessidade matemática estaria, para nós, conectada à questão do “porquê a matemática é aplicável”.

5.1 Considerações iniciais sobre a teoria dos números reais

Para finalizar essa tese, neste capítulo, exploramos brevemente a noção de “número real” como “sequências de intervalos aninhados” e, além disso, também exploramos a noção de “necessidade matemática” brouweriana enquanto “necessidade sequencial ou temporal”. A razão de discutir essas duas noções é o fato de acreditarmos que elas estão essencialmente conectadas.

A noção de “necessidade matemática” enquanto “necessidade sequencial” é derivada do fato de que toda a fonte “normativa” da matemática está na experiência temporal da mente. Nesse caso, acreditamos que a filosofia de Brouwer propõe uma espécie de “argumento transcendental” que explica a “normatividade” e a noção de “necessidade matemática”. Esse argumento poderia ser sintetizado pelo fato de que é justamente por sermos seres temporais que fazemos matemática, uma vez que, segundo o geômetra, é da natureza da matemática a investigação de entidades sequenciais ou simultâneas, em seu aspecto puramente mental. Nesse sentido, esse argumento responderia por quais razões há entidades matemáticas legiformes, como o Pi, e entidades matemáticas não-legiformes que se sustentam apenas na liberdade do matemático. Para explicar brevemente as noções de “número real” e de “necessidade matemática”, abordamos como as sequências de intervalos não são, a princípio, necessariamente predeterminadas. Nesse caso, pontuamos a conexão entre a noção de “número real” enquanto “sequência de intervalos” e a noção de “necessidade matemática” apenas enquanto “necessidade sequencial ou temporal”.

5.2 Números reais enquanto sequência de intervalos

Para Brouwer, uma das maiores conclusões de seu intuicionismo matemático é o fato de que não há totalidades *intrinsecamente* acabadas, pois uma vez que são construídas mentalmente, estão em estado de existência apenas enquanto construções. Assim, é também possível construir *novas* sequências e novos *métodos*. É nesse contexto que Brouwer define o que é um número real. Segundo Van Atten (2007), Brouwer analisa o *continuum* intuitivo ao utilizar a noção de "sequências de escolha". Uma sequência de escolhas é potencialmente infinita e o sujeito cognoscente escolhe os elementos ou, as restrições, um após o outro; e, nesse sentido, o sujeito cognoscente desfruta da liberdade, inclusive da liberdade de *impor* restrições (VAN ATTEN, 2007). De certo modo, isso significa que não há sentido se referir a "restrições normativas" sem a escolha de "restrições".

Ora, a noção "tradicional" de "pontos" afirma justamente a existência de algo que não tem extensão, o qual quando unido com outros forma totalidades, como em um "colar de pérolas" (PORTO, 2020). Se todas as entidades matemáticas são construções mentais, então até mesmo a noção de "ponto" pode ser tratada como algo da mesma natureza, i.e., para Brouwer, tudo que um ponto poderá ser só é possível na medida em que for construtível cognitivo-mentalmente. Nesse sentido, ele caracteriza ponto da seguinte forma: "[é] evidente por essa definição que o *continuum* consiste em pontos sem nitidez" (BROUWER, 1975 [1955], p. 558), isto é, pontos pelos quais apenas um segmento inicial da sequência é conhecido.

A noção de "ponto" brouweriana é a maneira do filósofo e matemático holandês rejeitar em absoluto a noção tradicional de "pontos" como algo sem extensão. Isso é explicitado pelo fato de que a sua definição de "pontos" enquanto "pontos sem nitidez" está relacionado com a ideia de que um "ponto" é sempre uma sequência de intervalos e, portanto, nunca é algo sem extensão, sem partes internas etc. Nesse sentido, Brouwer se alinha a uma escola filosófica que tem origem em Aristóteles, para o qual o *continuum* não é constituído de pontos. Nas palavras do filósofo grego, "uma linha, que é contínua, não pode constituir-se de pontos" (ARISTOTLE, 2008, p. 138).

Um ponto, para o topologista, já é algo, por si só, "difuso", "indeterminado", sem fronteiras claras. A noção de "ponto", por assim dizer, em Brouwer, se torna algo "relativo", determinado pela construtibilidade cognitiva de um sujeito cognoscente. Desse modo, faria sentido, para ele, por exemplo, tratar Curitiba e Goiânia como "pontos matemáticos", na medida em que é possível realizar cálculos de distância entre esses dois "pontos". Contudo, ainda assim, tanto Curitiba quanto Goiânia possuem extensão e complexidade interna. Do mesmo modo, um "ponto" é apenas um segmento inicial de uma sequência. A noção de "ponto" enquanto "segmento inicial" de uma sequência é justamente a definição de "número real” enquanto “sequência de intervalos aninhados”. Como Brouwer (1992, apud VAN ATTEN, 2007, p. 12) declara,

> [c]hamamos essa sequência indefinidamente procedente de intervalos λ aninhados de ponto P ou número real P. Devemos enfatizar que, para nós, o ponto P é a sequência (1) λ(v1), λ(v2), λ(v3) em si mesma, e não algo como “o ponto limite para o qual, de acordo com a concepção clássica, os intervalos λ convergem, e que poderia, de acordo com essa concepção, ser definido como o único ponto de acumulação dos pontos médios desses intervalos”.

Brouwer faz uma distinção entre os “pontos” concebidos intuicionisticamente como a própria sequência e os “pontos clássicos”, para os quais a sequência converge. Intuicionisticamente, não faria sentido se referir a um ponto determinado para o qual a sequência convergisse. Assim, se existisse um ponto de acumulação para o qual sequências convergem, esse ponto *teria de ser* absolutamente individualizado. De acordo com o geômetra, não há tal coisa. Em outras palavras, do ponto de vista clássico, o “ponto” *infinitamente distante* se encontra lá, dado, intrinsecamente determinado, e as sequências convergem *sobre ele*. Para o topologista, as próprias sequências *são* os pontos e, nesse sentido, são enquanto tais intervalos, e não há uma parte, algum limite não difuso ou absolutamente determinado no seu *continuum*.

O raciocínio do matemático holandês propõe que, devido à própria natureza das sequências infinitas, elas não terminam. Dessa maneira, não faz sentido enunciar que há um ponto determinado para o qual a sequência converge. Assim, o que há são intervalos nos quais até mesmos suas fronteiras são difusas e nunca intrinsecamente determinadas, i.e., os limites dos intervalos também não são absolutamente definidos, mas determinações gerais difusas.

5.3 Sequências de intervalos difusos: o exemplo do número Pi

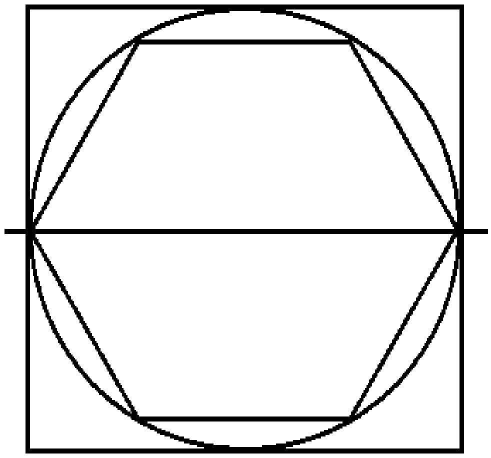
As sequências, sobre as quais Brouwer discorre, são justamente os intervalos racionais aninhados. Com o exemplo do número Pi, podemos compreender melhor o que são esses intervalos racionais aninhados. Consideremos o esquema de “cotas inferiores” e “cotas superiores” de intervalos gerados, digamos, pelo método de aproximação de Pi inventado por Arquimedes no século (II AC):

[3 < Pi < 4]
[3,1 < Pi < 3,2]

[3,14 < Pi < 3,15]

Para saber a primeira cota, não precisamos do método de Arquimedes, uma vez que, através de argumentos geométricos gerais, sabemos que Pi tem de ser maior que 3, e menor que 4, dado que, por exemplo, 3 é o número de lados da metade do hexágono inscrito e 4 é o número de lados do quadrado subscrito. Para compreender de forma mais intuitiva esse argumento, apresentamos a seguinte imagem:

(3) Círculo com polígono subscrito e quadrado sobrescrito



Fonte: Elaborado pelo autor.

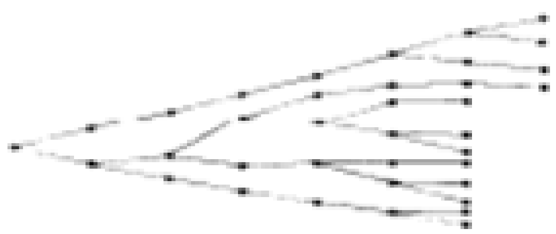
Quando um matemático constrói as sequências de intervalos do Pi, da perspectiva de Brouwer, ele não obtém um número infinitamente distante – o qual seria o ponto de acumulação intrinsecamente determinado. Na verdade, o que é gerado são sempre sequências de intervalos que vão se "fechando" ou, para utilizar a terminologia de Brouwer, vão se *aninhando* infinitamente.

As cotas são geradas através da escolha feita pelo matemático de construir uma sequência guiada pelo método de Arquimedes, *nesse caso*. Embora os métodos distintos possam fornecer sequências de cotas distintas, os métodos que são tidos como geradores da sequência do Pi convergem *entre si*. De certo modo, cada cota já é uma escolha, uma decisão matemática. Cada cota se origina em um galho ou em um ramo de galhos, e cada cota origina outro galho ou outro ramo de galhos, e assim por diante. Todavia, as escolhas já eram logicamente possíveis e, conforme o método é aplicado, as cotas vão se restringindo no espalhamento como em uma árvore.

Nesse sentido, os galhos podem ser vistos como *possibilidades* de escolha, as quais são restringidas ou não restringidas. Para formular a sua definição essencial de "*continuum* matemático", Brouwer apresenta a noção fundamental de "espalhamento" (*spreads*). Há pelo menos dois conceitos fundamentais que são herdeiros, de certo modo, da noção clássica de "conjunto": "espalhamento" e "espécie". Neste texto, tratamos apenas do conceito de "espalhamento", que não é como a noção clássica de "conjunto", entendida como a "extensão de qualquer propriedade". No entanto, não abordamos o conceito de "espécie", que corresponderia à noção de "domínio" do intuicionismo contemporâneo.

5.4 A noção de "número real" enquanto "*spreads*" (espalhamentos)

A noção de "espalhamento" (*spreads*) é o ápice do *continuum* matemático de Brouwer. Não há número real, segundo o autor, que não seja resultado de um processo de restrição de algum tipo de "espalhamento". Um espalhamento é sempre uma sequência de intervalos essencialmente difusa e nunca intrinsecamente determinada por uma coleção de pontos absolutamente discretos. Na verdade, o número real é resultado de restrições do espalhamento, uma vez que ele já tem de ser logicamente anterior para que isso seja o caso. Portanto, essa noção de "número real" enquanto "sequência de intervalos" é vista pelo topologista exatamente como um tipo de escolha de restrição de alguma parte do espalhamento. Segundo o próprio Brouwer (1975 [1907], p. 45-46),

> uma investigação mais detalhada mostra que a última distinção funciona da seguinte forma: se aproximamos o conjunto por uma escala dual densa que foi construída no segmento em consideração como um segmento de unidade, na determinação de cada dígito dual, os precedentes o determinam ou deixam em aberto a escolha entre dois dígitos; no último caso, o próximo dígito é novamente determinado ou pode ser escolhido a partir de dois dígitos etc. Isso pode ser ilustrado por um desenho da forma:
>
> 
>
> e assim por diante.

Cada lado da sequência de intervalos do Pi seria um galho distinto com possibilidades *inesgotáveis* de outros galhos. O matemático que construísse uma sequência, através do algoritmo de Arquimedes, adotaria uma certa direção, um determinado "ramo/galho", por assim dizer.

Do ponto de vista da "estrutura" dos espalhamentos, é intrínseco à noção de "um espalhamento a partir de um determinado estágio" a possibilidade intrínseca de uma "escolha" distinta. Há aqui, contudo, uma conexão entre a "escolha de restrição" e o "espalhamento": a escolha precisa ser a restrição de algum espalhamento. De toda maneira, a noção de "escolha livre" ganha um "primado" para definir os "intervalos infinitamente aninhados", uma vez que é da própria natureza fundamental do "ponto brouweriano" não ter nitidez, ser difuso; e isso significa ter sempre uma parte conhecida e outra não conhecida da sequência. Em outras palavras, a natureza essencialmente difusa é omnipresente no sentido de que as sequências continuam necessariamente a intervalar em toda(s) (as) parte(s). O matemático holandês afirma que

> [o] intuicionismo tem uma influência radical na teoria das funções descontínuas, principalmente porque considera o *continuum* como um espalhamento (*spreads*) e, portanto, considera um ponto do *continuum* como uma sequência fundamental de intervalos-λ aninhados, gerada por *escolhas livres*. (BROUWER, 1975 [1955], p. 558, grifos no original).

Essa noção de "número" enquanto "sequências de intervalos" leva Brouwer a afirmar que o *continuum* é constituído de "pontos *sem nitidez*". Em outras palavras, uma vez que as sequências podem, a princípio, ser sempre *incompletas* e, portanto, sempre parcialmente desconhecidas, então o *continuum* não pode ser meramente compreendido como um colar de pontos intrinsecamente discretos. A incompletude, contudo, não fornece o caráter radicalmente não "puntiforme" do *continuum*. Na verdade, a incompletude é derivada justamente da natureza omnipresente intervalar do *continuum*. Em outras palavras, é como se as fronteiras entre os intervalos do *continuum* fossem sempre intrinsecamente "difusas" e indeterminadas. Assim, qualquer restrição de limite de um intervalo, i.e., de uma "fronteira", é sempre "provisória" e nunca fixada do lado da própria "entidade matemática" inerente e independentemente de qualquer construção mental dele. Mesmo com um método e com leis específicas, o *continuum* continua sempre a intervalar. Isto é, não existe algo que seja o "fim do método", o "objeto-ponto" onde acumula-se infinitamente *lá na reta.*

Desse modo, se a compreensão do *continuum* não for como a de uma totalidade de pontos, então a compreensão do número Pi não poderá ser como um ponto entre outros em uma fileira ou, para utilizar os termos de Porto (2020), o Pi não poderá ser uma pérola entre pérolas em um colar de pérolas. O Pi seria a *própria* sequência de intervalos, sem um ponto de cumulação de convergência “infinitamente distante” *lá* na reta.

O fato de o *continuum* não ser constituído discretamente de pontos dados está relacionado à apresentação da natureza do *continuum* brouweriano como um *continuum* “fluído” ou “viscoso”. Esse predicado do *continuum* brouweriano explica e sintetiza mais algumas das razões que levam o matemático intuicionista a rejeitar tanto a lei do terceiro excluído, como uma lei universal válida, quanto a lei da tricotomia. Discutimos isso com mais detalhes na próxima seção.

5.5 O *continuum* “viscoso” brouweriano e a lei da tricotomia rejeitada

O *continuum*, tal como proposto por Brouwer, é diferente do tipo de *continuum* a que nos referimos nesta tese, a saber, o *continuum* puntiforme. De certo modo, podemos afirmar que são duas concepções “opostas” de *continuum*, i.e., o *continuum* viscoso não tem e não pode ter pontos inerentemente individualizados, e já o *continuum* puntiforme os tem.

Para discutir com maior detalhamento a noção de “*continuum* viscoso”, é necessário analisar alguns contraexemplos a lei do terceiro excluído. Brouwer listou vários contraexemplos em seus trabalhos (BROUWER, 1975 [1948A]; VAN ATTEN, 2020a). Além do contraexemplo de Brouwer, neste capítulo, lidamos também com a recusa da lei da tricotomia, a qual pode ser vista como uma extensão da recusa do terceiro excluído. Antes de lidarmos diretamente com a rejeição da lei da tricotomia, fornecemos esse outro exemplo tratado por Brouwer, e explicado por Van Atten, para termos uma ideia do cenário da discussão seguinte.

Ora, o contexto dos contraexemplos de Brouwer precisa ser compreendido dentro do quadro geral do raciocínio intuicionista. Se não entendemos os números reais, i.e., o *continuum* matemático como uma coleção de “pontos inerentemente discretos”, mas como sequências infinitamente convergentes (entre si), então algumas proposições teriam de ser válidas. Por exemplo, Brouwer (1928A2, apud VAN ATTEN, 2020a, on-line) fornece o seguinte contraexemplo:

$$\boxed{\neg\forall x \in \text{Reais}(\text{Rac}(x) \lor \neg\text{Rac}(x))}$$

Se tomamos os Reais como “sequências infinitamente convergentes [entre si]”, e “Rac(x)” como “x é racional”, então, de fato, nem todo x que pertence aos reais ou, bem é racional ou, bem não é racional, dado que isso não está determinado independentemente de qualquer construção mental provisória que a mente de algum matemático venha a estabelecer. Van Atten (2020a, on-line) nos explica nitidamente a razão pela qual essa sentença seria válida:

> o contínuo não pode ser dividido, ou seja, não existem espalhamentos não vazios A e B tais que $A \cup B = R$ e $A \cap B = \emptyset$. Para supor que existem, então a função f: $R \rightarrow R$ definida por f(x) = {(0 if x∈A) & (1 if x∈B)} é total e, portanto, pelo teorema da continuidade de Brouwer (generalizado de [0,1] para R), contínuo. Mas então f deve ser constante, então A ou B é igual a R, e o outro *spread* deve ser vazio. Isso, entretanto, contradiz a suposição de que A e B não são vazios. Do fato de que o contínuo não pode ser dividido, segue-se que $\forall$ x $\in$ R (P (x) $\vee$ $\neg$ P (x)) é falso. Pois se fosse verdade, poderíamos obter uma divisão do contínuo deixando f atribuir 0 aos números reais racionais (A) e 1 aos irracionais (B); mas isso é impossível, como acabamos de mostrar. Portanto, $\neg$ $\forall$ x $\in$ R (P (x) $\vee$ $\neg$ P (x)). Brouwer estabeleceu que R não pode ser dividido.

Van Atten (2020a, 2020b) discorre tanto sobre os contraexemplos fortes quanto sobre os contraexemplos fracos apresentados por Brouwer em relação ao princípio do terceiro excluído. Ademais, o intérprete explica o fato de que o *continuum* viscoso não pode ser “cortado” como, por exemplo, acontece com o *continuum* clássico. Contudo, “não pode ser cortado” precisa ser compreendido da seguinte forma: o *continuum* não é formado por pontos *absolutamente individualizados* que podem ser “pinçados” de tal forma que, diante de uma função, como a de Dirichlet, não é possível tomar como determinado que para uma função x, 0 se x é racional ou 1 se x é irracional. Ou seja, em outras palavras, uma vez que o *continuum* é de natureza intrinsecamente indeterminada, esses objetos só podem ser decididos construtivamente. Vejamos abaixo a indivisibilidade do *continuum* em linguagem matemática para lançar luz sobre isso:

Cobertura $A \cup B = R$
Disjunção $A \cap B = \emptyset$

Enfatizamos que, além do contraexemplo mencionado, há vários outros contraexemplos que Brouwer aponta, os quais poderiam ser compreendidos a partir de uma concepção viscosa de *continuum*. Van Atten (2020a, on-line) sintetiza:

> Brouwer estabeleceu que R *não* pode ser dividido em 1927, na nota de rodapé 10 de “Sobre os domínios da definição de funções”. Outros contraexemplos fortes que Brouwer concebeu são:
> 1. $\neg\forall x \in R\ (\neg\neg\ x < 0 \rightarrow x < 0)$ (Brouwer, 1949A)
> 2. $\neg\forall\ x \in R\ (x \neq 0 \rightarrow x < 0 \lor x > 0)$ (Brouwer, 1949B).

De todo modo, acreditamos que o exemplo mencionado é suficiente para o leitor ter em mente o tipo de raciocínio empregado nesse contexto do *continuum*.

As propriedades matemáticas de “cobertura” e “disjunção” mencionadas evidenciam, de forma muito plausível, que o *continuum* matemático “viscoso” e/ou fluído do geômetra não aceita um “corte” (BROUWER, 1928A2, apud VAN ATTEN, 2020a). Na verdade, um *continuum* fluído desse tipo nos fornece o que, na literatura contemporânea, é chamado de “*continuum* viscoso” ou de “espaço coeso”. Posy (2008, p. 22-23, 25, grifo no original) sintetiza a explicação da natureza do *continuum* brouweriano ao atribuir o predicado de “viscosidade” a ele:

> Brouwer, ao contrário, favorece o que chamo de *continuum* viscoso, o qual não pode ser assim dividido. Ou, de forma mais geral, Brouwer sustentou que não há par de conjuntos não-vazios disjuntos A e B tais que: $R = A \cup B$ [...]. Além disso, entendemos o *continuum* como “viscoso”, não-separável. E Brouwer aqui usa a noção de “fluidez” para representar o que chamei de viscosidade.

Isso que Posy chama de “viscoso” ganha em Bell (2008) uma caracterização lógica-formal e matemática bastante *precisa*, especialmente com a propriedade matemática de “coesão”, a qual foi previamente discutida na sua forma “cognitiva”. Assim, enfatizamos que, segundo o intuicionismo de Brouwer e a análise de Bell (2008, 2014, 2019), o intuicionismo não contém apenas um componente “negativo” de mera rejeição de uma lei lógica (e, por consequência, uma rejeição de várias leis matemáticas clássicas como as mencionadas). Isto é, não tem apenas uma noção mais restritiva de “prova matemática”. De fato, há vários componentes positivos próprios na análise intuicionista, como a noção de “espaço coeso” mencionada. Dito de outra maneira, a análise clássica é incapaz de expressar várias informações relevantes, ou conteúdos sutis, como o espaço coeso não-trivial mais forte, o qual a análise intuicionista não é só capaz de expressar, como também é impossível expressar essa noção de “espaço coeso” sem subscrever a uma noção de “ponto” tal como o intuicionista subscreve.

Ora, apenas um *continuum*, que leva as noções de “indeterminação” e “indefinitude” como parte de sua natureza inerente, explicaria de forma adequada como se chega à recusa de leis matemáticas clássicas como as já mencionadas. Dito de forma alternativa, enfatizamos a ideia de que apenas um *continuum* entendido como um "colar de pérolas inerentes discretas", intrinsecamente definidas, ou seja, um *continuum* atomista, poderia ser capaz de explicar por qual razão tais leis são tomadas como "provadas" ou mesmo "autoevidentes". Isto é, sem pressupor essa noção atomista de "*continuum*", o qual Brouwer rejeita antes mesmo de rejeitar essas leis, e recusa essas leis porque recusa esse *continuum*, é impossível explicar, justificar ou mesmo aceitar como demonstráveis ou autoevidentes tais leis. Em outras palavras, na análise intuicionista do *continuum*, não é possível "pinçar" os racionais – como se fossem "pedrinhas" – dos reais, i.e., não faz sentido segregar, cortar, decompor etc., ou individualizar os "pontos" racionais e os "pontos" irracionais. O que o topologista sugere pode ser expresso da seguinte forma: é como se esses números fossem intrinsecamente "misturados", ou seja, a menor coisa que sempre se é capaz de "pinçar" já é um intervalo, e mesmo esse intervalo não é esgotável em outros pontos, e muito menos não culmina em um ponto limite infinitamente distante.

Com essa discussão em mente, a seguir detalhamos um pouco mais as razões da recusa intuicionista da lei da tricotomia. Ressaltamos que essa recusa ganhou precisão lógica no cálculo suave infinitesimal.

5.6 O *continuum* "coeso" brouweriano: a lei da tricotomia rejeitada

Vejamos agora, especificamente, a rejeição da lei da tricotomia. A natureza radicalmente "fluída" do *continuum* brouweriano ou, segundo a terminologia de Posy (2008), a natureza viscosa do *continuum* tem consequências tanto filosóficas quanto matemáticas, afinal é justamente esse predicado do *continuum* brouweriano que justifica plausivelmente a rejeição intuicionista da lei da tricotomia. Em linguagem lógica isso significaria:

$$\boxed{\neg\forall xy \in R\ [(x<y) \vee (x>y) \vee (x=y)]}$$

Com isso, o ponto que gostaríamos de salientar é que, de acordo o filósofo e matemático holandês, não é possível subscrever a uma lei como a da tricotomia sem pressupor uma concepção de "*continuum*" que subscreve que todos os pontos sejam individualizáveis e estejam lá dados discretamente, como na metáfora de um colar de pérolas (PORTO, 2020). Ora, do ponto de vista do *continuum* coeso, não é possível dividir e esgotar todo o *continuum* em pontos que possam ser utilizados para determinar entre si de antemão, na sua própria natureza individualizada, ou bem, se, para todo x e y, se x é maior que y, ou bem, se x é menor ou igual a y (BROUWER, 1975 [1948A]).

Em outras palavras, se o sujeito cognoscente não aceita que os números reais não são "pontos absolutamente individualizados" e separados, como em "um colar de pérolas", então, surge a questão da "indistinguibilidade entre números reais a e b". Em termos formais, do ponto de vista intuicionista, faria sentido afirmar que "$\neg\forall ab \in R\ [\neg\neg(a=b) \rightarrow a=b]$". Assim, além de casos de "a=b" e de "a≠b", teria de haver uma outra categoria aqui – a categoria da "indistinguibilidade", i.e., "$\neg\neg(a=b)$". *Dado que não existiriam "pontos absolutamente individualizados" para torná-las distinguíveis por suas próprias naturezas, então seriam possíveis essas entidades indistinguíveis*. Não há uma regra universal para decidir todos esses casos de um só golpe. Enfatizamos que a ordem das razões nessa problemática é importante, dado que nesse contexto não surge um caso de indistinguibilidade apenas porque o terceiro excluído não é aceito como uma regra *dessa* matemática. Em contrapartida, a ordem das razões deve ser compreendida do seguinte modo: o terceiro excluído não é aceito, pois temos o caso de "indistinguibilidade", e temos o caso de "indistinguibilidade" porque o "*continuum* dos números reais" é entendido como "sequências infinitamente convergentes", e não como "uma coleção de pontos absolutamente individualizados". Ou seja, a rejeição do terceiro excluído é uma "conclusão" que decorre a partir de casos gerados, como os mencionados, através de uma certa concepção de "*continuum*".

Nesse sentido, os fundamentos da matemática têm consequências diretas no próprio cálculo. Isso significa que não é apenas a filosofia do cálculo que é alterada, de maneira que deixa, assim, o cálculo "imutável", como se os pressupostos de seus fundamentos não alterassem todo o edifício do cálculo. Em outras palavras, a partir de uma perspectiva intuicionista, a filosofia construtivista da matemática não é apenas uma forma de compreender uma matemática que continuará da mesma maneira independentemente de qual seja sua lógica ou seus fundamentos intrínsecos. A estrutura filosófica da ciência matemática em questão terá consequências diretas na construção da matemática-*qua*-ciência, de seus princípios e resultados.

Assim, a matemática do intuicionismo é necessariamente diferente da matemática clássica, uma vez que as leis e os fundamentos de uma não se aplicariam à outra. Isso não se manifesta apenas de forma geral, mas é também visto em casos concretos bem específicos, como nesse da lei da tricotomia. Ou seja, o intuicionista chama a atenção para o fato de que não é possível subscrever à lei da tricotomia sem, de antemão, subscrever a um certo tipo de ontologia. A escolha do matemático clássico, nesse sentido, não é e não pode ser ontologicamente neutra, se ele se compromete realmente com as “teses” com as quais alega se comprometer. Dito de outro modo, o matemático clássico não estabelece suas posições apenas com o “ato de calcular”, como o leitor poderia pensar, i.e., a assumpção de uma série de leis do cálculo é, *ab initio*, determinada também por uma ontologia pressuposta (inconsciente ou conscientemente). Nesse sentido, a lei da tricotomia não é estabelecida meramente por meio do “ato de cálculo”, mas por causa de uma série de pressupostos ontológicas, metafísicos e filosóficos em geral. Em certo sentido, o matemático clássico não realiza a atividade matemática como o sujeito cognoscente intuicionista realiza, uma vez que, no lugar de começar com um dado imediato da consciência, ele parte “cegamente” de um pressuposto, como se fosse incapaz de compreender outra alternativa de matemática sem o terceiro excluído.

Desse modo, observamos que a questão não é apenas “ter uma prova” ou “não ter uma prova”, como se a noção de “prova matemática”, nesses casos complexos, nascesse em um vácuo ontológico próprio. A noção de “prova matemática” já assume uma série de pressupostos que só se sustentam por causa da ontologia subscrita. Nesse sentido, o intuicionista tem boas razões para reclamar de que o clássico toma uma série de “teses” como “evidentes” por causa da ontologia pressuposta, das quais ele, muitas vezes, não está nem sequer consciente e, assim, por não estar consciente desses pressupostos ontológicos, toma algumas de suas leis como autoevidentes. É por essa e por outras razões que um matemático clássico pode estranhar bastante a rejeição da lei do terceiro excluído ou da lei da tricotomia. Esse estranhamento surge em decorrência do fato de que a única ontologia que ele conhece para seu *continuum* não é realmente um *continuum*, mas uma construção em cima de “pontos” pressupostos como intrinsecamente discretos. Nesse sentido, do ponto de vista intuicionista, o clássico não parece ser capaz de se sustentar como clássico sem ter um “*continuum* discreto”. Isso é possível, pois, do ponto de vista de Brouwer, o clássico não é capaz de conhecer as noções de “indeterminação” e “indefinitude”, as quais são essenciais para definir um *continuum* realmente fluído, viscoso e/ou coeso.

Essa noção de “indeterminação”, segundo o topologista, é razoavelmente compreensível do ponto de vista do seu idealismo “neokantiano”. A partir desse ponto de vista, i.e., de seu idealismo e de sua noção de “*continuum* coeso”, o topologista também consegue explicar de maneira muito plausível o porquê de a matemática necessariamente ser aplicável.

Para finalizar nossa tese, tratamos da questão da "aplicabilidade da matemática" na próxima seção.

5.7 A natureza idealista do *continuum* e dos números reais: a questão da aplicabilidade da matemática

Brouwer compreende que é preciso renunciar à noção de "ponto prévia e absolutamente determinado" que sustenta as noções de "*continuum*" e de "discretude" clássica. Dessa maneira, é impossível compreender a noção de "número real" ao associar número real com um ponto para o qual as sequências infinitamente convergem em uma "distância infinita".

Essa noção de "ponto" não é satisfeita por nada na "realidade", na perspectiva brouweriana, uma vez que, na "própria realidade", os fenômenos não podem ter essa "natureza determinada de modo discreto", como se todas as coisas fossem "um conjunto de pontos lá fora já dados", prontos para serem descobertos, como se isso fosse, por exemplo, o trabalho de um geógrafo que mapeia um país.

Isso nos leva à discussão inicial da nossa tese – o tema do idealismo brouweriano. Dado que o *continuum* "real" é, antes de qualquer coisa, o *continuum* intuitivo, não há um *continuum* discreto no "mundo empírico" composto de pontos e o *continuum* matemático que "fazemos dentro de nossas mentes". Essa "separação" entre o "dentro nas nossas mentes subjetivas" e o "*fora* no mundo empírico" não existe na visão de mundo brouweriana. Isto é, o fato da "aplicabilidade matemática" dos cálculos que realizamos nas "nossas mentes" acontecer realmente no "mundo empírico" é uma demonstração de que o mundo "objetivo" não pode ser noeticamente vazio ou cognoscente apenas por acidente ou contingência. Isso significa justamente que a "realidade das nossas mentes" e a "realidade do mundo empírico" têm a "cognição" como um elemento em comum.

Desse modo, o *continuum* "real" é o *continuum* "ideal" (noético), na medida em que um dos aspectos da realidade também é a consciência (em um sentido irredutível a elementos não intrinsecamente noéticos). Por essa razão, não faz sentido pensar em um *continuum* constituído de "pontos absolutamente discretos" determinados "lá fora", independentes da consciência. É nesse contexto que compreendemos a afirmação de Brouwer (1992, p. 71) de que

> um ponto e, portanto, também os pontos de um conjunto são sempre inacabados e, de maneira frequente, objetos indeterminados permanentemente. Isso contrasta com a concepção clássica, na qual um ponto é tanto determinado quanto acabado.

Como salientamos, sem as noções de "indeterminado" e de "difuso", ou sem a noção de "pontos sem nitidez", não é possível compreender razoavelmente bem a noção de "*continuum* intuicionista" e muito menos compreender algumas das maiores e mais influentes consequências do intuicionismo de Brouwer: a recusa da lei do terceiro excluído como uma lei lógica, universalmente válida, e a recusa da lei da tricotomia como universalmente válida.

Assim, ao invés de compreender esse *continuum* como algo que só existe na "nossa mente", é preciso compreender idealisticamente como constitutivo da natureza de todos os fenômenos, i.e., de todas as aparências, uma vez que idealisticamente não podem ser entendidas como distintas da consciência e, portanto, não podem ser estabelecidas como distintas das mentes dos sujeitos cognoscentes. O fato das construções matemáticas e dos fenômenos "externos" compartilharem exatamente a mesma natureza da consciência, e também serem estruturados a partir da intuição fundamental do tempo, é a fonte da natureza da necessidade matemática enquanto natureza sequencial. Exploramos em mais detalhes esse tópico na próxima subseção.

5.7.1 A noção de "necessidade matemática" ou "normatização matemática" da perspectiva do intuicionismo idealista de Brouwer

Para finalizar esta tese de doutorado, gostaríamos de apontar a conexão que há entre o "idealismo brouweriano" e a noção de "necessidade matemática".

A noção de "necessidade matemática" aqui é a noção de que "os cálculos *corretos* que fazemos *têm* de ser aplicável", i.e., a noção de "necessidade matemática" subscrita aqui não é a noção abstrata de "entidade enquanto proposição matemática" que seria sempre verdadeira ou que seria verdadeira em todos os mundos possíveis. Isto é, não é a noção *extensional* de "necessidade matemática" que abordamos. Não se trata de uma entidade proposicional atemporal também. O que é atemporal das entidades matemáticas, como vimos, em certo sentido, *é o próprio tempo*, o qual, por ser *fundamentalmente* indeterminado, não tem início, meio e fim.

Em outras palavras, a noção de "necessidade matemática" que abordamos aqui é a noção "impositiva" que faz um *ultimato* do seguinte tipo: há uma conexão essencial de algum tipo entre os "cálculos intuitivos que fazemos mentalmente" e o "mundo empírico". Isto é, o fechamento desta tese pode ser visto como uma tentativa de resposta brouweriana para a pergunta: "por qual razão necessariamente a matemática *é aplicável*?". Essa questão é importante e entendemos que, até o momento, não foi oferecida uma resposta satisfatória a ela na literatura existente, talvez devido ao fato da diminuição da influência kantiana na literatura de fundamentos da matemática após a Segunda Guerra Mundial. Na verdade, essa questão é, em grande parte, *ignorada*. Do ponto de vista intuicionista, contudo, o fato dos cálculos serem aplicáveis exige uma resposta que explique o porquê são aplicáveis e, dado que a matemática funciona, tem de ser explicada a conexão entre os "cálculos que fazemos mentalmente" e o "mundo empírico". Esse ponto deve ser enfatizado.

Geralmente, temos duas vias em filosofia da matemática: há aqueles que compreendem entidades matemáticas como entidades que existem em um "mundo abstrato" de algum tipo e há aqueles que compreendem que tudo que temos é baseado em uma linguagem formal. O problema para a primeira posição é: como explicar o fato de entidades abstratas normatizarem entidades não-abstratas, fenomênicas ou empíricas, por assim dizer? O problema da posição que explica toda a natureza das entidades matemáticas através da noção de uma "linguagem formal" é semelhante: como signos no papel são capazes de explicar a normatização que entidades matemáticas *impõem* – simultaneamente – tanto na "mente" do sujeito cognoscente quanto no "mundo empírico"? Por exemplo, a necessidade matemática de um "cálculo geométrico *mental*" feito por um pedreiro para colocar adequadamente azulejos é a mesma necessidade que *normatiza* os próprios azulejos.

Um dos pontos principais do idealismo de Brouwer é chamar a atenção para a noção de "entidades mentais", como já apontamos. Isto é, *antes* de entidades matemáticas serem qualquer outra coisa – por exemplo, em um mundo abstrato, nem mental, nem material ou signos no papel –, entidades matemáticas são construídas mentalmente de alguma forma. Esse ponto é impossível de evitar mesmo que o leitor considerasse que entidades mentais fossem ficções, pois a questão poderia ser colocada de outra forma: como entidades fictícias, como entidades de um sonho, são capazes de *normatizar* equações, as quais, por exemplo, são capazes de levar o ser humano à lua?

Embora Brouwer trabalhe com a noção de "entidades matemáticas-*qua*-construções mentais", como vimos ao longo desta tese, vale lembrar que não é apenas isso. O fato de o matemático holandês apontar para a intuição primordial demonstra a profundidade da filosofia intuicionista em colocar as questões da forma mais adequada possível: a intuição primordial do tempo explicaria, aos moldes de um tipo de argumento transcendental, a aplicabilidade necessária das entidades matemáticas tanto na mente de sujeitos cognoscentes quanto no mundo empírico. Essa é a chave que explica a conexão entre os “sujeitos cognoscentes” e o “mundo empírico”. Ambos compartilham a mesma natureza do seguinte modo: além do aspecto da “cognoscibilidade básica”, o *continuum* real, o intuitivo, é a natureza sequencial indeterminada básica de todas as coisas e, portanto, tanto das mentes dos sujeitos cognoscentes quanto do “mundo empírico”.

A indeterminabilidade é, por conseguinte, ontologicamente anterior à determinabilidade, e só assim é capaz de explicar as determinações que obtemos na matemática e nas ciências em geral. Ora, uma vez que os fenômenos são entendidos como não distintos da natureza da consciência, como poderia a necessária aplicabilidade da matemática ser diferente tanto no “mundo interno” das mentes dos sujeitos cognoscentes quanto no “mundo empírico”? Isso nos é *dado* transcendentalmente através da natureza das nossas mentes, que é, em algum sentido, a mesma das aparências que experienciamos “exteriormente”. Essa natureza não pode ser apenas acidentalmente noética ou cognitiva. Em outras palavras, é essencial tanto das nossas mentes quanto das aparências que surgem serem essencialmente cognoscíveis.

Nesse sentido, Brouwer se oporia radicalmente à ideia de que os fenômenos são explicados apenas materialmente, no sentido de que as aparências seriam apenas conjuntos de átomos que, em algum ponto, seriam inerentemente estabelecidos discretamente. Podemos ver que a reflexão sobre o *continuum* matemático não é separada ou distante de uma reflexão sobre a natureza das aparências: assim como não tem sentido um *continuum* matemático, a princípio, determinado por pontos inerentemente discretos, também os fenômenos, por assim dizer, as aparências, não são constituídas por um conjunto de átomos inerentemente discretos. A própria “realidade” empírica “externa” a nós é também atestada, quando analisada, como sem nitidez, indeterminada e sem pontos absolutamente individualizáveis. Isto é, as aparências, que são a base da investigação da física, não seguem uma “lógica” diferente da intuicionista. Por fim, do ponto de vista da consciência enquanto tal, não há uma distinção absoluta entre o *continuum* analisado pelas nossas construções mentais e o *continuum* da “realidade” empírica “externa” a nós.

Nesse contexto, vale relembrar duas citações apresentadas no início desta tese: "esse mundo dos fenômenos [...] existe apenas *através* e na *forma* de consciência intuitiva" (BROUWER, 1975 [1905], p. 4, grifos adicionados); e "sem dúvida é impossível uma realidade completamente independente do espírito que a concebe, vê ou sente. Um mundo assim tão exterior, se acaso existisse, ser-nos-ia para sempre inacessível" (POINCARÉ, 2011, p. 9). Essas citações sintetizam o que tentamos concitar no leitor ao longo desta tese: a impossibilidade de compreender razoavelmente a questão do *continuum* sem realmente considerar a questão da consciência e da aplicabilidade da matemática de um ponto de vista idealista de algum tipo.

Nesse momento da nossa discussão, resgatamos o tópico do idealismo, especialmente, o "idealismo kantiano atualizado" por Brouwer (1975 [1907]). A nossa tentativa de resolução da questão do "por quê a matemática é aplicável" é de inspiração kantiana (KANT, 1912). O "estar presente" e "ser dado a nós" só são possíveis por causa da consciência e da natureza essencialmente noética de todos os fenômenos. Ou seja, apesar das diferenças entre os idealismos kantiano e brouweriano, eles concordam que nenhuma entidade será manifestada a nós de modo independente da nossa estrutura cognitiva. Isso, obviamente, se aplica às entidades matemáticas.

Contudo, esse é só o ponto inicial da tentativa de resolução da questão do "por quê a matemática é aplicável". Isso apenas nos informa como uma entidade é dada a nós, mas não nos explica como algo apresentado a nós – através da nossa estrutura cognitiva – desempenha um poder causal no mundo empírico, como a matemática desempenha, por exemplo, de modo necessariamente aplicável.

A tentativa de resolução da questão da "aplicabilidade da matemática" decorre da base da nossa discussão sobre a noção de "intuição". Ora, segundo Kant, as intuições, pelas quais a matemática extrai seus fundamentos e poder apodítico, são o espaço e o tempo (KANT, 1912). Como vimos no primeiro capítulo, Brouwer não aceita o espaço como uma das formas da intuição. Contudo, o tempo, enquanto experiência interna da mente, necessariamente continua estabelecido.

Desse ponto de vista, para Brouwer, o tempo (como a forma da intuição), experienciado pela mente, é tal como as entidades aparecem para nós, a forma não só das entidades internas, dos cálculos executados por nós, como também a forma "externa" das entidades do mundo empírico. Nesse sentido, pelo menos no idealismo do topologista, há uma espécie de *continuum* entre o mundo empírico e a nossa experiência interna, que só pode ser explicado através do que chamamos de “característica essencial noética de todos os fenômenos”. Isso foi expresso nas palavras do geômetra por meio da asserção: “esse mundo dos fenômenos [...] existe apenas *através* e na *forma* de consciência intuitiva” (BROUWER, (1975 [1905], p. 4, grifos adicionados).

Nesse sentido, a matemática se torna uma questão-chave para uma perspectiva idealista de todos os fenômenos, dado que, para explicarmos o “porquê” de a matemática funcionar, de maneira que assumimos as entidades como essencialmente noéticas, precisaríamos subscrever a algum tipo de continuidade, mesmo que relativa, entre a nossa experiência mental interna e o mundo empírico “lá fora”.

Em outras palavras, para finalizar, a conexão entre as entidades matemáticas e os objetos empíricos, fenomênicos – as aparências, por assim dizer, em Brouwer – é muito mais próxima do que em geral se concebe. O que isso significa? A distinção entre entidades matemáticas e entidades “empíricas” é relativa e convencional, desse ponto de vista, uma vez que ambos têm a natureza explicada através da mesma fonte, i.e., a intuição primordial do tempo dada a nós através da natureza da nossa mente, ou seja, a consciência enquanto tal.

Em síntese, à pergunta “sobre o que a matemática é?”, o intuicionista brouweriano responderia que é sobre um certo tipo de experiência do tempo sem forma, intuído pela mente. Nesse sentido, há também algum tipo de “alinhamento” entre Kant e Brouwer na medida em que as proposições que expressam as entidades matemáticas, seriam, em algum sentido, “a priori”, mas dependeriam de algum tipo de trabalho de “síntese” realizado pela mente (GEORGES, 2020; KANT, 2004) e, portanto, seriam “proposições sintéticas a priori”.

Consideramos um ganho compreender a importância da consciência e do tempo na discussão sobre a filosofia e os fundamentos da matemática e como, muitas vezes, ela tem sido subestimada. Enfatizamos a conexão profunda que há entre a “filosofia da matemática” de Brouwer e a sua “filosofia da mente idealista” e, assim, realizamos e fechamos com uma resposta a esse desafio da “aplicabilidade da matemática”, através da conexão do problema central do *continuum*.

Considerações finais

Os objetivos desta tese se concentraram em expressar a natureza do intuicionismo de Brouwer, do seu tratamento das entidades matemáticas e do *continuum*. A natureza desse intuicionismo é elucidada pela perspectiva idealista de tratamento das entidades matemáticas. Desse modo, vimos que entidades matemáticas, quando entendidas intuitivamente, são compreendidas como possuidoras de uma origem fundamental. Primordialmente, as entidades matemáticas nascem dessa origem. Referimo-nos aqui, evidentemente, à intuição do tempo. A partir de uma discussão sobre esse tópico, apresentamos e tratamos dos dois atos fundamentais do intuicionismo: o ato de *reconhecimento* noético da distinguibilidade entre "entidades matemáticas" e "entidades linguísticas"; e o ato de *reconhecimento* noético da existência da *possibilidade* de novas entidades matemáticas surgirem.

Com base na discussão sobre a intuição e sobre os dois atos fundamentais noéticos, esta tese tentou mostrar que não é possível realmente colocar seriamente as questões que o intuicionismo matemático propõe e, simultaneamente, assumir uma perspectiva clássica em matemática. Vimos que essas questões nascem de uma discussão sobre a natureza do *continuum*, sobre a noção de "indeterminação", e que não é possível colocá-las de maneira que se subestime a importância da questão da consciência e dos eventos mentais temporais. Ao considerar a natureza indeterminada do *continuum*, realizamos uma distinção entre a mera "subsistência genérica" e a "existência singular", que foi elucidada através da aplicação matemática do "teorema do valor médio". A partir dessa elucidação, é possível inferir diversas consequências desse tipo de abordagem intuicionista para vários princípios lógicos e matemáticos, como, por exemplo, para a lei da tricotomia.

Ao discutir a natureza da consciência, do *continuum* e da indeterminação, propomos uma espécie de tentativa de um processo de "desubstancialização" de entidades matemáticas. Em outras palavras, através das reflexões de Brouwer sobre o *continuum*, este trabalho se configurou como uma oportunidade de um exercício de "desreificação" de entidades matemáticas como entidades separadas, absolutamente discretas, independentes da consciência. Como esse hábito de reificação está arraigado em nossas mentes, continuamente, inventamos argumentos para justificar isso de "forma proposicional", de modo que ignoramos o processo mental interno envolvido nisso.

Também foi discorrido sobre como é comum a abordagem do intuicionismo através da *mera* apresentação da recusa do terceiro excluído. Tentamos mostrar que a situação é muito mais complexa do que esse tipo de abordagem tende a sugerir. Isto é, como foi discutido, essa recusa não nasce no vácuo conceitual e/ou filosófico. Salientamos que a recusa intuicionista do terceiro excluído nasce através de uma certa divagação sobre a natureza do *continuum*. Assim, explicitamos as razões intuicionistas da recusa do terceiro excluído que tornam razoável a própria rejeição desse princípio. Consideramos isso um dos principais avanços propostos nesta tese, não em decorrência da recusa do terceiro excluído, mas porque consideramos o *continuum* apresentado como filosoficamente superior ao *continuum* clássico. Nesse sentido, a teoria do *continuum* intuicionista, aliado ao princípio de indeterminação idealista por detrás dela, é um dos grandes ganhos desta tese.

Essa vantagem filosófica implica vários aspectos, que foram discutidos nesta tese. São eles: (i) a importância do idealismo para todo o projeto intuicionista; (ii) a recusa de alguns princípios lógicos e matemáticos como consequências de uma revisão de pressupostos ontológicos; (iii) a questão da temporalidade e dos avanços matemáticos; e, por fim, (iv) a questão da aplicabilidade da matemática.

Lembramos que, por uma série de razões, após a Segunda Guerra Mundial, os projetos filosóficos de inspiração kantiana, neokantiana e idealistas, em geral, foram abandonados. Houve uma virada “realista” e “anti-idealista” nos projetos de fundamentos filosóficos para a matemática. Contudo, é a nossa opinião de que esse abandono não foi justificado, dado que os desafios que os projetos kantianos e neokantianos lançaram permanecem incólumes. Assim, nesta tese, o leitor pode observar uma série de *insights* que nos levam a refletir sobre a importância do projeto idealista não apenas para os fundamentos da matemática, como também para a filosofia como um todo.

Uma crença comum, que consideramos infundada, é a de que mesmo quando os fundamentos da matemática são alterados, o cálculo permanece intacto. Esse tipo de atitude não-revisionista não é compatível com os fundamentos intuicionistas da matemática. Assim, essa crença comum carrega a noção segundo a qual “o ato de calcular” é “suficiente” para resolver todos os problemas tanto dos fundamentos da matemática quanto dela mesma, noção que consideramos implausível. A verdade é que, do ponto de vista intuicionista de Brouwer, Heyting, Troelstra, dentre outros, essa imagem é completamente enganosa. O cálculo clássico não surge em um vácuo filosófico. A compreensão de seus pressupostos determina, pelo menos em alguma medida, seus resultados.

Tentamos mostrar que não faz sentido acreditar simultaneamente na ocorrência de mudanças da ontologia de base da matemática e na inalteração de todos os princípios lógicos, os quais subjazem os fundamentos da matemática. Em outras palavras, uma revisão da ontologia da matemática teria de implicar necessariamente uma revisão de sua lógica subjacente.

Um outro tópico muito importante discutido foi a questão da temporalidade e do avanço da matemática. Ora, tentamos direcionar a atenção do leitor para o fato de que o modo de conceber ontologicamente as entidades matemáticas desencadeia consequências diretas não só para a lógica subjacente da matemática, quanto também para o modo de compreender avanços do conhecimento matemático. Como vimos, as entidades matemáticas são "dinamizáveis", na medida em que as construções mentais obtêm seu avanço epistêmico através da intuição básica do tempo. Assim, embora muitas notas importantes de entidades matemáticas são dinamizáveis, seu aspecto essencial não se altera.

Outra questão importante que salientamos é a do primado da indeterminabilidade. Como vimos, apenas uma noção de "determinação completa e absoluta" poderia explicar a assumpção universal e irrestrita do princípio do terceiro excluído. Contudo, essa noção não explica plausivelmente a natureza do *continuum*, do ponto de vista intuicionista, e, por conta disso, vimos que é necessário compreender a natureza do *continuum* como intrinsecamente difusa e indeterminada. Em síntese, uma entidade indeterminada como o *continuum* não pode ser divisível e segmentada em pontos absoluta e intrinsecamente individualizáveis.

A questão da aplicabilidade matemática se tornou um "quarto escuro" que os filósofos contemporâneos clássicos em geral evitam. Essa "evasiva" acontece, pois não é possível lidar com essa problemática sem, de alguma forma, se comprometer com proposições colocadas por uma filosofia idealista de algum tipo. Torna-se meramente acidental que a matemática seja, ao mesmo tempo, cognoscível e aplicável. Uma vez que entendemos, a partir da perspectiva intuicionista, que as entidades matemáticas são intrinsecamente noéticas, concluímos que não é possível ser meramente acidental que elas sejam cognoscíveis. Uma vez que elas são intrinsecamente cognoscíveis e aplicáveis, é preciso explicar como o cálculo que realizamos mentalmente é necessariamente aplicável ao mundo empírico. A nossa explicação, proveniente de Brouwer, teve inspiração nitidamente kantiana. Ou seja, o mundo empírico, tal como apresentado a nós, tem também a forma da consciência.

Ao lidar com a questão da aplicabilidade da matemática, também nos deparamos com questão "sobre o que a matemática é?". Essa questão está conectada à aplicabilidade da matemática, pois a resposta para a pergunta "sobre o que a matemática é?" nos explica o porquê de a matemática *ser aplicável*.

Em outras palavras, dado que a investigação matemática é baseada na intuição primordial do tempo e que todas as entidades se manifestam através de tal intuição, entendemos o porquê de a matemática necessariamente ser aplicável. Concluímos com a ênfase de que a matemática *enuncia* sobre as mesmas coisas que *explicam* sua aplicabilidade – em síntese, a consciência e o tempo! Assim, tempo, aqui, não pode ser o tempo construído por teorias da física, mas aquele que intuímos pela mente – em certo sentido também o experienciamos noeticamente – especificamente, o tempo interno que nos acompanha necessariamente em cada uma de nossas experiências.

Com base em toda a nossa discussão, a noção de "liberdade criativa" do sujeito cognoscente mencionada por Brouwer é comparável ao trabalho do artista plástico, pois aquilo sobre o qual a matemática é, é invariável e "objetivo", na medida em que não depende da liberdade do sujeito cognoscente, como a "argila" é para o "artista plástico". Por outro lado, os outros aspectos não essenciais, acidentais/contingentes, por assim dizer, dependem relativamente da liberdade criativa do sujeito, embora também necessariamente estejam sob o reinado do tempo intuído pela mente. Nesse sentido, a argila utilizada pelo artista é, digamos, a "matéria" pela qual ele realiza sua arte, ao criar esculturas. Ao lançar mão dessa metáfora no contexto da filosofia intuicionista da matemática do topologista, a "argila" estaria para o "tempo" como o "artista" estaria para o "matemático". O matemático constrói entidades matemáticas a partir da "matéria" do tempo, na medida em que ele é a fonte tanto da própria existência das entidades matemáticas quanto também do poder apodítico das proposições que *falam* sobre tais entidades e, além disso, por consequência, também a fonte da explicação da aplicabilidade das entidades matemáticas.

(4) Brouwer esculpido por Wertheim

Fonte: Van Dalen (2013, p. 818).

Referências

ARISTOTLE. *Aristotle*: Physics. Trans. Robin Waterfield. New York: Oxford University Press, 2008.

BELL, J. L. *A Primer of Infinitesimal Analysis*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

BELL, J. L. *Intuitionistic Set Theory*. United States: College Publications, 2014.

BELL, J. L. The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics. Switzerland: Springer, 2019.

BISHOP, E. Schizophrenia in contemporary mathematics. In: ROSENBLATT, M. (Ed.). *Errettt Bishop*: Reflections on Him and His Research. Providence: American Mathematical Society, 1985. p. 1-32.

BISHOP, E.; BRIDGES, D. *Constructive Analysis.* Berlin: Springer-Verlag, 1985.

BROUWER, L. E. J. Life, Art and Mysticism. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1905]. p. 1-10.

BROUWER, L. E. J. On the Foundations of Mathematics. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1907]. p. 13-101.

BROUWER, L. E. J. The Nature of Geometry. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1909]. p. 112-120.

BROUWER, L. E. J. Intuitionism and Formalism. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1912]. p. 123-138.

BROUWER, L. E. J. Guidelines of Intuitionistic Mathematics. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1947]. p. 477-479.

BROUWER, L. E. J. Consciousness, Philosophy, and Mathematics. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1948]. p. 480-494.

BROUWER, L. E. J. Essentially negative properties. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1948A]. p. 478-479.

BROUWER, L. E. J. Historical Background, Principles, and Methods of Intuitionism. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1952]. p. 508-515.

BROUWER, L. E. J. Points and Spaces. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1954]. p. 522-538.

BROUWER, L. E. J. The effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic. In: BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975 [1955]. p. 551-554.

BROUWER, L. E. J. *Collected Works 1*. Philosophy and Foundations of Mathematics. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975.

BROUWER, L. E. J. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

BROUWER, L. E. J. *Intuitionismus*. Mannheim: Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, 1992.

DUMMETT, M. *Elements of Intuitionism*. 2nd ed. Oxford: Claredon University Press, 2000.

BHAGAVAD GITA. *Srimad Bhagavad Gita*: English Translation of Sri Sankaracharya's Sanskrit Commentary. Trans. Swami Gambhirananda. Source: Project Gutenberg, 2006.

GEORGES, R. The Analytic/Synthetic Distinction. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2020. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/analytic-synthetic/>. Acesso em: 25 de dez. 2020.

HEYTING, A. *Intuitionism*: an Introduction. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1956.

KANT, I. *Prolegomena to any future metaphysics*: That Will Be Able to Come Forward as Science with Selections from the Critique of Pure Reason. Translated and Edited by Gary Hatfield. New York: Cambridge University Press, 2004.

KHANNA, V. Consciousness in Upanishads. *Prabuddha Bharata*, v. 120, n. 7, p. 449-455, 2015.

KUIPER, J, J, C. *Ideas and Explorations*: Brouwer's Road to Intuitionism. 2004. 353p. Dissertation (PhD in Philosophy) – Utrecht University, Netherlands, 2004.

MANCOSU, P. *From Brouwer to Hilbert:* The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford: Oxford University Press, 1998.

MOLK, J. *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*. Tome II. Volume 1. Functions de variables reeles. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1909.

OLIVEIRA, P. J. Considerações de Brouwer sobre espaço e infinitude: o idealismo de Brouwer diante do problema apresentado por Dummett quanto à possibilidade teórica de uma infinitude espacial. *Kínesis*, v. 11, n. 30, p. 94-108, 2019.

PLACEK, T. *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity*. A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

POINCARÉ, H. On The Foundations of Geometry. *The Monist*, v. 9, n. 1, p. 1-43, 1898.
POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. Trad. Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2011.

PORTO, A. Semantical mutations, algorithms and programs. *Dissertatio*: Revista de Filosofia, v. s1, p. 44-76, 2015.

PORTO, A. *Mathematics and Time*. 2020. Unpublished manuscript.

POSY, C. Brouwerian infinity. In: VAN ATTEN, M. BOLDINI, P. BORDEAU, M. HEINZMANN, G. (Ed.). *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007)*. Berlin: Birkhäuser Verlag AG, 2008. p. 21-36.

THE RIGVEDA: *The Earliest Religious Poetry of India*. Oxford: Oxford University Press, 2014.

TIESZEN, R. L. Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge. *Husserl Studies*, v. 10, n. 3, p. 249-252, 1994.

TROELSTRA, A. S. *Principles of Intuitionism*. Berlin: Springer-Verlag, 1969.

TROELSTRA, A. S. *Choice Sequences*. A Chapter of Intuitionistic Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 1977.

TROELSTRA, A. S. Analysing Choice Sequences. *Journal of Philosophical Logic*, v. 12, n. 2, p. 197-260, 1983.

TROELSTRA, A. S. Choice Sequences and Informal Rigour. *Synthese*, v. 62, n. 2, p. 217-227, 1985.

TROELSTRA, A. S; VAN DALEN, D. *Constructivism in Mathematics:* An Introduction. Volume I. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1988.

VAN ATTEN, M. *Brouwer meets Husserl*: On the Phenomenology of Choice Sequences. Dordrecht: Springer, 2007.

VAN ATTEN, M.; Luitzen Egbertus Jan Brouwer. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edward N. Zalta (Ed.), 2020a. Disponível em: < https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/brouwer/index.html>. Acesso em: 25 de dez. 2020.

VAN ATTEN, M. Luitzen Egbertus Jan Brouwer. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edward N. Zalta (Ed.), 2020b. Disponível em: < https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/brouwer/weakcounterex.html >. Acesso em: 25 de dez. 2020.

VAN ATTEN, M. Luitzen Egbertus Jan Brouwer. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edward N. Zalta (Ed.), 2020c. Disponível em: < https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/brouwer/ >. Acesso em: 25 de dez. 2020.

VAN ATTEN, M. The Development of Intuitionistic Logic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edward N. Zalta (Ed.), 2020d. Disponível em: < https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/intuitionistic-logic-development >. Acesso em: 25 de dez. 2020.

VAN DALEN, D. From a Brouwerian Point of View. *Philosophia Mathematica*, v. 6, n. 2, p. 209-226, 1998.

VAN DALEN, D. *Mystic, Geometer, and Intuitionist*: The Life of L. E. J. Brouwer. Volume 1: The Dawning Revolution. Oxford: Clarendon Press, 1999.

VAN DALEN, D. *Mystic, Geometer, and Intuitionist*: The Life of L. E. J. Brouwer. Volume 2: Hope and Disillusion. Oxford: Clarendon Press, 2005.

VAN DALEN, D. *L. E. J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher*: How Mathematics is Rooted in Life. London: Springer, 2013.

VAN STIGT, W. *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland, 1990.

WITTGENSTEIN, L. *Wittgenstein's Lectures*: on the Foundations of Mathematics – Cambridge, 1939. New York: Cornell University Press, 1976.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 16, p. 37-85, 1976.