UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

STEFFÂNIO MORENO DE SOUSA

Existência e Regularidade de Soluções Positivas de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Goiânia
2017

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Steffânio Moreno de Sousa

Título do trabalho: Existência e Regularidade de Soluções Positivas de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Steffânio Moreno de Sousa
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 09 /03 /2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

STEFFÂNIO MORENO DE SOUSA

Existência e Regularidade de Soluções Positivas de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Moreno de Sousa, Steffânio
Existência e Regularidade de Soluções Positivas de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais Elípticas [manuscrito] / Steffânio Moreno de Sousa. - 2017.
CXVII, 117 f.

Orientador: Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia. Apêndice.

1. Sistemas Elípticos Não-Lineares. 2. Método de Galerkin. 3. Sub e Super-Soluções. 4. Minimização. 5. Princípios de Máximo. I. Abreu Gonçalves, José Valdo, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE STEFFÂNIO MORENO DE SOUSA – Aos três dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (03/03/2017), às 10:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. José Valdo Abreu Gonçalves - Orientador, Prof. Marcos Leandro Mendes Carvalho, e Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na Sala de Aula do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **"Existência e Regularidade de Soluções Positivas de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais Elípticas"**, em nível de Mestrado, área de concentração em Análise, de autoria de Steffânio Moreno de Sousa, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. José Valdo Abreu Gonçalves, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1403 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Análise, pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12:30 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves
Presidente - IME/UFG

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos
Membro – DM/UnB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Steffânio Moreno de Sousa

Graduou-se em Bacharelado em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante a graduação participou de projetos de iniciação científica. No Mestrado desenvolveu um trabalho teórico em Equações Diferenciais Parciais e foi bolsista CNPq.

Este trabalho é dedicado à minha esposa Greyce, à minha filha Steffany Natielle. E aos meus pais, Carlos Alberto e Vanda.

.

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa Greyce Natielle por ter me mostrado um novo caminho em minha vida. Pois ela influenciou-me na escolha do curso de graduação em matemática. E também por ter me dado a minha maior felicidade, que é minha filha Steffany.

Aos meus pais que estiveram presente acreditando em meu potencial, quando até eu mesmo não mais acreditava.

Agradeço ao meu orientador professor José Valdo Abreu Gonçalves pelo tempo, dedicação e estímulo. E por sempre me dar um norte nos problemas estudados.

Aos professores Carlos Alberto Pereira dos Santos e Marcos Leandro Mendes Carvalho por aceitarem o convite para participar da banca e pelas críticas e sugestões que enriquecerão este trabalho.

À todos os amigos do IME-UFG meus sinceros agradecimentos pela grande amizade demonstrada que suavizou o caminho árduo que tinha para ser percorrido.

Aos professores da Pós Graduação do IME-UFG por terem contribuído de forma majestosa para nossa formação, sendo seus ensinamentos indispensáveis para o sucesso deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Meus interesses e motivações são puramente matemáticos. Mesmo quando trabalho com problemas originados na física, não me importo com possíveis aplicações."

Artur Avila,

..

Resumo

Moreno, Steffanio. **Existência e Regularidade de Soluções Positivas de Sistemas de Equações Diferenciais Parciais Elípticas**. Goiânia, 2017. 116p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudaremos existência e regularidade de soluções positivas de sistemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u,v), \ -\Delta_q v = g(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ \\ u,v > 0 \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

onde $1 < p,q < N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, e f, g são do tipo convexo-singular ou $\Omega = \mathbb{R}^N$ e f, g são do tipo côncavo-convexo. No caso Ω limitado encontraremos soluções que se anulam em $\partial\Omega$, enquanto que, no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ as soluções em $C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. No caso f, g singulares utilizaremos o método de Galerkin e princípio de comparação. No caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ utilizaremos o método de sub e super-soluções, métodos variacionais e princípios de máximo.

Palavras–chave

Sistemas Elípticos Não-Lineares,Método de Galerkin, Sub e Super-Soluções, Minimização, Princípios de Máximo.

Abstract

Moreno, Steffanio. **Existence and Regularity of Positive Solution of Systems of Elliptic Partial Differential Equations**. Goiânia, 2017. 116p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we study existence and regularity of non-negative solution of elliptical systems of the type

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u,v), \ -\Delta_q v = g(x,u,v) \text{ in } \Omega, \\ \\ u,v > 0 \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

where $1 < p,q < N$, $\Omega \subset I\!R^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, and f,g are of the type singular-convex or $\Omega = I\!R^N$ and f,g are concave-convex. In case Ω we will find solutions that cancel out $\partial\Omega$ while in the case $\Omega = I\!R^N$ solutions in $C^1(I\!R^N) \cap L^\infty(I\!R^N)$.We will use the Galerkin method and the comparison principle. In case $\Omega = I\!R^N$ we will use the method of sub and super solutions, variational methods and principles of maximum.

Keywords

Nonlinear Eliptics Systems, Sub and Super Solutions, Galerkin Method, Minimization, Maximum Principles.

Sumário

Lista de Símbolos e Notações **10**

1 Introdução **11**

2 Sistemas Não-Cooperativos
Domínio Limitado **15**

3 Sistemas Cooperativos
Domínio Limitado **31**

4 Sistemas com Termo Não-Homogêneo
Domínio Limitado **44**

5 Sistemas com Termo Côncavo-Convexo
Domínio Não Limitado **58**

A Espaços de Lebesgue e de Sobolev **85**

B Resultados de Regularidade **90**

C Princípio de Comparação e de Máximo **98**

D Minimização de Funcionais Energia **103**

E Resultados de Análise Funcional **111**

Referências Bibliográficas **113**

Lista de Símbolos e Notações

Notações Gerais

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	Conjunto aberto, conexo e limitado de $\mathbb{R}^N$ (Domínio limitado)
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω
$\|\Omega\|$	Medida do conjunto Ω
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradiente da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$
$\Delta_p u = div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u)$	p-Laplaciano de u
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$\overset{cont}{\hookrightarrow}$	Imersão contínua
$\overset{cpt}{\hookrightarrow}$	Imersão compacta
u^+	$max\{u, 0\}$
u^-	$max\{-u, 0\}$
q.t.p.	quase todo ponto

Espaços de Funções

$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\int_\Omega \|u\|^p < \infty, 1 \leq p < \infty\}$
$L^p := L^p(\mathbb{R}^N)$	$\{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\int \|u\|^p < \infty, 1 \leq p < \infty\}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\|u(x)\| \leq C$ q.t.p. em Ω, $C > 0$ constante$\}$
$L^\infty := L^\infty(\mathbb{R}^N)$	$\{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\|u(x)\| \leq C$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, $C > 0$ constante$\}$
$W^{1,p}(\Omega)$	$\left\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^p(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i\right\}$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$
$\|\cdot\|_p$	Norma no espaço $L^p(\Omega)$
$\|\cdot\|_\infty$	Norma no espaço $L^\infty(\Omega)$
$\|\cdot\|$	Norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$
$\|\cdot\|_{1,p}$	Norma no espaço $W^{1,p}(\Omega)$

CAPÍTULO 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar existência e regularidade de soluções positivas de sistemas do tipo

$$(S) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u,v), \ -\Delta_q v = g(x,u,v) \text{ em } \Omega \\ u,v > 0 \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular ou $\Omega = I\!R^N$, $1 < p,q < N$ e $f,g : \Omega \times (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow I\!R$ são funções dadas e

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Nos capítulos 2, 3 e 4 estudamos sistemas singulares em domínio limitado, motivados pelos trabalhos [2] e [24], onde o primeiro destes utiliza o método de Galerkin para o operador Laplaciano e o outro usa o método de Galerkin generalizado para o Φ-Laplaciano. No Capítulo 2 dizemos que o sistema é cooperativo, isto é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,u,v) > 0 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial u}(x,u,v) > 0 \quad \text{em } \ \Omega \times I\!R_+^* \times I\!R_+^*.$$

No entanto, o sistema que consideramos no Capítulo 3 dizemos que é não-cooperativo, isto é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,u,v) < 0 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial u}(x,u,v) < 0 \quad \text{em } \ \Omega \times I\!R_+^* \times I\!R_+^*.$$

O capítulo 5 foi motivado pelo trabalho [11] onde utilizamos o método de sub e super-soluções combinado com métodos variacionais para $\Omega = I\!R^N$.

No Capítulo 2, tomamos $\Omega \subset I\!R^N$ domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular e

$$f(x,u,v) = \frac{a_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\beta_{\gamma_1}}} + u^{\beta_1}, \qquad g(x,u,v) = \frac{a_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + u^{\beta_2} \quad u,v > 0$$

onde a_1 e a_2 são funções dadas. Neste caso o sistema (S) se reescreve na seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{a_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}} + u^{\beta_1}, \ -\Delta_q v = \frac{a_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}} + v^{\beta_2} \text{ em } \Omega \\ \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1-1}$$

Para enunciar o Teorema principal do Capítulo 2 consideramos as seguintes hipóteses:

(H_0) $a_i : \Omega \longrightarrow (0, +\infty)$ e $a_i \in L^\infty(\Omega)$;
(H_1) $0 < \beta_1 < p-1$ e $0 < \beta_2 < q-1$;
(H_2) $0 < \alpha_i, \gamma_i < 1$;
(H_3) $0 < \alpha_i + \gamma_i < 1$;
(H_4) $\frac{a_1}{d^{\alpha_1+\gamma_1}} \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{a_2}{d^{\alpha_2+\gamma_2}} \in L^{q'}(\Omega)$;

para $i = 1, 2$.

Teorema 1.1 *Suponha $(H_0), (H_1), (H_3)$ e (H_4). Então existem $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$, satisfazendo o problema (1-1) no sentido fraco. Além disso, se existir $C > 0$ tal que*

$$(I) \qquad a_i(x) \leq Cd(x), \quad x \in \Omega$$

então, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$.

A demonstração do Teorema 1.1 utiliza método de Galerkin, princípio de Máximo e Comparação.

No Capítulo 3, fazendo

$$f(x,u,v) = \frac{1}{u^{\alpha_1}} + v^{\beta_1}, \quad g(x,u,v) = \frac{1}{v^{\alpha_2}} + u^{\beta_2}, \quad u, v > 0$$

onde o sistema (S) se reescreve na seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{1}{u^{\alpha_1}} + v^{\beta_1}, \ -\Delta_q v = \frac{1}{v^{\alpha_2}} + u^{\beta_2} \text{ em } \Omega \\ \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1-2}$$

Acrescentando ao conjunto de hipóteses o

(H_5) $0 < \beta_i + 1 < \min\{p, q\}$.

O principal resultado do Capítulo 3 é

Teorema 1.2 *Suponha $(H_2), (H_5)$. Então o problema (1-2) tem uma solução fraca positiva (u, v).*

A demonstração do Teorema 1.2 utiliza método de Galerkin, princípio de Máximo e Comparação.

No capítulo 4 faremos

$$f(x,u,v)=\frac{a_1(x)}{u^{\alpha_1}v^{\gamma_1}}+h_1(x,u,v)+f_1(x),\quad g(x,u,v)=\frac{a_2(x)}{u^{\alpha_2}v^{\gamma_2}}+h_2(x,u,v)+f_2(x),\quad u,v>0$$

onde a_1,a_2,h_1,h_2,f_1,f_2 são funções dadas. Neste caso o sistema (S) se reescreve como

$$\begin{cases} -\Delta_p u=\frac{a_1(x)}{u^{\alpha_1}v^{\gamma_1}}+h_1(x,u,v)+f_1(x), \text{ em } \Omega \\ -\Delta_q v=\frac{a_2(x)}{u^{\alpha_2}v^{\gamma_2}}+h_2(x,u,v)+f_2(x) \text{ em } \Omega \\ u,v>0 \text{ em } \Omega,\ u=v=0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1-3}$$

onde,

$$\begin{aligned} f_1 &\in W^{1,p'}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \\ f_2 &\in W^{1,q'}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \end{aligned} \tag{1-4}$$

f_1,f_2 são não-negativas e $f\not\equiv 0$. Suporemos também h_i são Caracthéodory e tem a seguinte condição de crescimento

$$\begin{aligned} 0\le h_1(x,u,v)&\le b_{11}(x)|u|^{\sigma_1}+b_{12}(x)|v|^{\sigma_2} \\ 0\le h_2(x,u,v)&\le b_{21}(x)|u|^{\beta_1}+b_{22}(x)|v|^{\beta_2} \end{aligned} \tag{1-5}$$

onde $b_{ij}\in L^\infty(\Omega)$, $b_{ij}>0$.

$(H_6)\quad 0<\beta_i+1<\min\{p,q\}$ e $0<\sigma_i+1<\min\{p,q\}$.

O principal resultado do Capítulo 4 é o seguinte

Teorema 1.3 *Suponha $(H_0),(H_2),(H_3)$, (H_4) e (H_6). Então o problema (1-3) tem uma solução fraca positiva (u,v).*

A demonstração do Teorema 1.3 utiliza método de Galerkin, princípio de Máximo e Comparação.

No Capítulo 5 fazemos $\Omega=\mathbb{R}^N$ e consideramos o seguinte sistema

$$(*)_\lambda \qquad \begin{cases} -\Delta_p u+V(x)u^{p-1}=\lambda u^{\alpha_1}+v^{\beta_1} \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v+V(x)v^{q-1}=\lambda v^{\alpha_2}+u^{\beta_2} \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u,v>0 \quad em \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $\quad 0<\alpha_i<\beta_i<\infty$ para $i=1,2$ e $V:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ satisfaz

(V_0) $V(x) \geq \delta_0$, quando $|x| \geq R_0$, para algum $\delta_0, R_0 > 0$;
(V_1) $V(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

O principal resultado do Capítulo 5 é

Teorema 1.4 *Suponha que* $0 < \alpha_1 < p-1 < \beta_1$ *e* $0 < \alpha_2 < q-1 < \beta_2$. *Se além disso* $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* V *satisfaz* $(V_0), (V_1)$, *então existe* $\Lambda > 0$ *tal que para cada* $\lambda \in (0,\Lambda)$ *o problema* $(*)_\lambda$ *admite uma solução* $u \equiv u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, *e* $v \equiv v_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, *satisfazendo*

$$0 < u \leq \lambda^{\frac{1}{\beta_1-\alpha_1}} \left(\frac{(p-1)-\alpha_1}{\beta_1-(p-1)} \right)^{\frac{1}{\beta_1-\alpha_1}} \equiv M_\lambda^1$$

$$0 < v \leq \lambda^{\frac{1}{\beta_2-\alpha_2}} \left(\frac{(q-1)-\alpha_2}{\beta_2-(q-1)} \right)^{\frac{1}{\beta_2-\alpha_2}} \equiv M_\lambda^2.$$

A demonstração do Teorema 1.4 usa o método de sub e super-soluções combinado com método variacionais e resultados de regularidade.

Nos apêndices A,B,C,D e E relembramos as definições e propriedades dos Espaços de Sobolev, resultados de regularidade para equações quase-lineares, princípios de comparação e de máximo, minimização de funcionais energia e resultados básicos de Análise Funcional.

CAPÍTULO 2

Sistemas Não-Cooperativos
Domínio Limitado

Temos na literatura o estudo do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{\alpha_1} v^{\beta_1}, \quad -\Delta_q v = u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u, v > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = v = 0 \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2-1}$$

$\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $1 < p, q < \infty$, $\alpha_i + \beta_i < 0$. Giacomoni, Schindler e Takác, e Moussaoui (cf. [22]) usaram métodos monótonos para mostrar a existência de uma única solução (positiva) do problema (2-1). de regularidade para soluções do problemas acima. Onde a solução do sistema 2-1 é $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Referimos o leitor à [2, 3, 11, 20, 21, 24, 28] para resultados relacionados.

Para estudar (1-1), investigaremos a existência de solução da seguinte família de sistemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{a_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1} + \varepsilon} + u^{\beta_1}, \ -\Delta_q v = \frac{a_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2} + \varepsilon} + v^{\beta_2} \ \text{em } \Omega \\ \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \qquad u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2-2}$$

onde $\varepsilon > 0$. Para iniciarmos, estabeleceremos o seguinte conjunto de notações e definição de solução fraca para o problema (1-1) e de base de Schauder.

Considere o espaço vetorial $E = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ com a norma

$$\|z\| = \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,q},$$

onde $z = (u, v)$ e $\|..\|_{1,p}$ é a norma usual de $W_0^{1,p}(\Omega)$. E é um espaço de Banach.

Denotaremos por $\|.\|_p$ a norma usual em $L^p(\Omega)$ for $p > 1$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Pelo artigo de Hamid Bellout [7] temos garantida a existência de uma Base de Schauder para $W_0^{1,p}(\Omega)$. O que nos permite dar a seguinte definição

Definição 2.1 *Uma sequência* $(e_n)_{n\geq 1}$ *é dito uma base de Schauder para* $W_0^{1,t}(\Omega)$*, se para todo* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *existe uma única sequência de* $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in I\!R$ *tal que* $u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Observe que a defínção (2.1) é equivalente à

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

onde está convergência é dada na norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definição 2.2 *Uma solução fraca de (1-1) é um par de funções* $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *positivas e satisfaz*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}}\phi dx + \int_\Omega u^{\beta_1}\phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$
$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}}\psi dx + \int_\Omega v^{\beta_2}\psi dx, \quad \forall \psi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

O resultado a seguir trata-se da existência de solução de (2-2).

Lema 2.3 *Suponha* $(H_0),(H_1),(H_2)$ *e* $\varepsilon > 0$*. Então para cada* $\varepsilon > 0$*, o problema (2-2) possui uma solução positiva* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in E \cap C^{1,\alpha}(\Omega) \times C^{1,\beta}(\Omega)$*, onde* $\alpha, \beta \in (0,1)$.

Demonstração: Afim de aplicar o Lema fundamental (ver Teorema C.10) fixemos duas bases de Schauder $\Sigma = \{w_1, w_2, ...\}$ e $\Sigma = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ...\}$, respectivamente, bases de $W_o^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,q}(\Omega)$. Logo $(u,v) \in E$ temos,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i w_i = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i \ \text{ e } \ v = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \phi_j = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \eta_j w_j, \ \ \xi_i, \eta_j \in I\!R.$$

Ou equivalentemente,

$$\|u - \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i\|_{1,p} \longrightarrow 0 \ \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega) \ \text{ e } \ \|v - \sum_{i=1}^{k} \eta_i w_i\|_{1,q} \longrightarrow 0 \ \text{ em } W_0^{1,q}(\Omega)$$

sejam

$$\mathcal{F} = \left\{ W \mid W \text{ é um subespaço de } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } 0 < \dim W < \infty \right\}$$

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ \overline{W} \mid \overline{W} \text{ é um subespaço de } W_0^{1,q}(\Omega) \text{ e } 0 < \dim \overline{W} < \infty \right\}$$

denotemos por $W_m = [w_1, ..., w_m]$ e $W_k = [\overline{w}_1, ..., \overline{w}_k]$, onde se $(u,v) \in E_{m,K} = W_m \times W_k$

$$u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i \ \text{ e } \ v = \sum_{j=1}^{k} \eta_j w_j, \quad \xi_i, \eta_j \in I\!R.$$

Defina em $E_{m,k}$ a seguinte norma

$$\|z\|_{m,k} = \sum_{i=1}^{m} |\xi_i| + \sum_{j=1}^{k} |\eta_i| = \|u\|_m + \|v\|_k = |\xi| + |\eta|$$

onde $|.|$ é a norma da soma em $I\!R^m$; observe que para cada $s \in I\!N$, temos que $(W_s, \|.\|_s)$ é isomorfo e isométrico a $(I\!R^s, |.|)$, através da aplicação natural

$$T : W_s \to I\!R^s$$

dada por,

$$u = \sum_{i=1}^{s} \xi_i w_i \mapsto T(u) = (\xi_1, ..., \xi_s) = \xi$$

assim, conseguimos obter que $(E_m \times E_k, \|.\|_{m,k})$ é isomorfo e isométrico a $(I\!R^m \times I\!R^k)$. Queremos mostrar que para cada $m, k \in I\!N$ existe $(u_m, v_k) \in E_{m,k}$ e $\varepsilon > 0$ fixado, verificando a seguinte igualdade

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_i dx = \int_\Omega \frac{a_1(x) w_i}{|u_m|^{\alpha_1} |v_m|^{\gamma_1} + \varepsilon} dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_1} w_i dx, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k \nabla \overline{w}_j dx = \int_\Omega \frac{a_2(x) \overline{w}_j}{|u_m|^{\alpha_2} |v_m|^{\gamma_2} + \varepsilon} dx + \int_\Omega (v_m^+)^{\beta_2} \overline{w}_j dx \end{cases} \tag{2-3}$$

para cada $i = 1, ..., m$. Defina $F : I\!R^m \times I\!R^k \to I\!R^m \times I\!R^k$ dada por

$$F(\xi, \eta) = (F_1(\xi, \eta), ..., F_m(\xi, \eta), G_1(\xi, \eta), ..., G_k(\xi, \eta))$$

onde

$$F_i(\xi, \eta) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w_i - \int_\Omega \frac{a_1(x) w_i}{|u|^{\alpha_1} |v|^{\gamma_1} + \varepsilon} - \int_\Omega (u^+)^{\beta_1} w_i$$

e

$$G_j(\xi, \eta) = \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \overline{w}_j - \int_\Omega \frac{a_2(x) \overline{w}_j}{|u|^{\alpha_2} |v|^{\gamma_2} + \varepsilon} - \int_\Omega (v^+)^{\beta_2} \overline{w}_j,$$

para cada i=1,...,m e j=1,...,k. Relembremos que podemos usar a identificação $(u,v) \leftrightarrow (\xi, \eta)$. Queremos mostrar

i) Existe $r > 0$ tal que $\langle F(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle \geq 0$ para todo (ξ, η) satisfazendo $|(\xi, \eta)| = r$;

ii) $F : I\!R^m \times I\!R^k \to I\!R^m \times I\!R^k$ é contínua.

Observe o seguinte

$$\langle F_i(\xi,\eta),\xi_i\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(\xi_i w_i)dx - \int_\Omega \frac{a_1(x)(\xi_i w_i)}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx - \int_\Omega (u^+)^{\beta_1}(\xi_i w_i)dx$$

e

$$\langle G_i(\xi,\eta),\eta_j\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla(\eta_i \overline{w}_j)dx - \int_\Omega \frac{a_2(x)(\eta_i \overline{w}_j)}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx - \int_\Omega (v^+)^{\beta_2}(\eta_i \overline{w}_j)dx$$

$$\begin{aligned}\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle &= \sum_{i=1}^m \langle F_i(\xi,\eta),\xi_i\rangle + \sum_{i=1}^m \langle G_j(\xi,\eta),\eta_j\rangle = \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q - \int_\Omega \frac{a_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}+\varepsilon} \\ &\quad - \int_\Omega \frac{a_2(x)v}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx - \int_\Omega (u^+)^{\beta_1}udx - \int_\Omega (v^+)^{\beta_2}vdx.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder (cf. Teorema A.4) e imersão contínua de Sobolev (cf. Teorema A.13), Segue que

$$\int_\Omega \frac{a_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx \le \frac{1}{\varepsilon}\|a_1\|_\infty\|u\|_p \le \frac{C_1}{\varepsilon}\|h_1\|_\infty\|u\|_{1,p},$$

$$\int_\Omega (u^+)^{\beta_1}udx \le \|u\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1} \le C_1\|u\|^{\beta_1+1} \le C_2\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1}$$

$$\int_\Omega \frac{a_2(x)v}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx \le \frac{1}{\varepsilon}\|a_2\|_\infty\|v\|_p \le \frac{C_3}{\varepsilon}\|h_2\|_\infty\|v\|_{1,q},$$

$$\int_\Omega (v^+)^{\beta_2}vdx \le \|v\|_{\beta_2+1}^{\beta_2+1} \le C_4\|v\|^{\beta_2+1} \le C_4\|v\|_{1,q}^{\beta_2+1}$$

Donde,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \ge \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q - C_1\|u\|_{1,p} - C_2\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1} - C_3\|v\|_{1,q} - C_4\|v\|_{1,q}^{\beta_2+1}$$

Devemos nos atentar que as constantes, acima, C_i dependem de ε. Assim, pela equivalência de normas $\|.\|_{1,p}, \|.\|_m$ e $\|.\|_{1,q}, \|.\|_k$, respectivamente,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \ge C_5\|u\|_m^p + C_6\|v\|_k^q - C_1\|u\|_m - C_2\|u\|_m^{\beta_1+1} - C_3\|v\|_k - C_4\|v\|_k^{\beta_2+1}$$

fazendo $\|(u,v)\|_{m,k} = r = \|u\|_m + \|v\|_k$, onde $\|u\|_m = r_1$, $\|v\|_k = r_2$.
Considere,

$$g_1^\varepsilon(r_1) = C_5 r_1^p - C_1 r_1 - C_2 r_1^{\beta_1+1}$$

e

$$g_2^{\varepsilon}(r_2) = C_6 r_2^q - C_3 r_2 - C_4 r_2^{\beta_2+1}$$

Segue que

$$\lim_{r\to\infty} g_i^{\varepsilon}(r_i) = +\infty \tag{2-4}$$

pois, por hipótese $\beta_1 + 1 < p$, $\beta_2 + 1 < q$ e

$$g_1^{\varepsilon}(r_1) = r_1^p \left(C_5 - C_1 r_1^{1-p} - C_2 r_1^{\beta_1+1-p} \right)$$

e

$$g_2^{\varepsilon}(r_2) = r_2^q \left(C_6 - C_3 r_2^{1-q} - C_4 r_2^{\beta_2+1-q} \right).$$

Implicando (2-4). Logo, existem $\alpha_i > 0$ e $\overline{r}_i > 0$ tal que $g_i(\overline{r}_i) \geq \alpha$. Portanto,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \geq 0 \quad \text{se} \quad \|(u,v)\|_{m,k} = r_0 = \overline{r}_1 + \overline{r}_2$$

Devido a isometria entre $E_{m,k}$ e $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, isto implica que

$$\|(u,v)\|_{m,k} = |(\xi,\eta)| = r_0.$$

Mostraremos que F é contínua. Considere

$$u_n = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^n w_i \text{ e } u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i$$

$$v_n = \sum_{j=1}^{k} \eta_j^n \overline{w}_j \text{ e } v = \sum_{j=1}^{k} \eta_j \overline{w}_j$$

onde, tendo em mente a isometria já supracitada;

$$\xi_n = (\xi_1^n, \ldots, \xi_m^n) \longrightarrow \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$$

$$\eta_n = (\eta_1^n, \ldots, \eta_k^n) \longrightarrow \xi = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$$

Logo,

$$u_n \longrightarrow u$$

$$v_n \longrightarrow v$$

isto é,

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u,v) \text{ em } E_{m,k}. \tag{2-5}$$

Como $E_{m,k}$ tem dimensão finita, as normas $\|.\|$ e $\|.\|_m$ são equivalentes em $E_{m,k}$. Donde;

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\| \longrightarrow 0 \text{ em } E.$$

Observe que para mostrar que F é contínua, basta mostrar que as F_i e G_j são contínuas.

Assim, utilizando a convergência acima e pelo teorema (A.3) temos que, a menos de uma subsequência,

$$\begin{cases} \|\nabla u_n - \nabla u\|_p \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega) \\ \nabla u_{n_k}(x) \longrightarrow \nabla u(x) \text{ q.t.p } em \ \Omega \\ |\nabla u_{n_k}| \leq g \text{ onde } g \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{2-6}$$

e da desigualdade de Poincaré (cf. Teorema A.8) e pelo teorema (A.3)

$$\begin{cases} \|u_n - u\|_p \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega) \\ \|v_n - v\|_q \longrightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega) \\ u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p em } \Omega \\ v_{n_k}(x) \longrightarrow v(x) \text{ q.t.p em } \Omega \\ |u_{n_k}| \leq \bar{g} \text{ onde } \bar{g} \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{2-7}$$

Segue que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i \longrightarrow |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_i \text{ q.t.p em } \Omega.$$

$$||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i| \leq g^{p-1}|\nabla w_i|$$

Como

$$g \in L^p(\Omega) \Rightarrow |g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\nabla w_i \in L^p(\Omega) \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

Pela desigualdade de Holder (cf. Teorema A.4), obtemos que $|g|^{p-1}|w_i| \in L^1(\Omega)$. Portanto, utilizando o Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_i dx \tag{2-8}$$

De (3-6) temos

$$\frac{a_1(x)w_i}{|u_n|^{\alpha_1}|v_n|^{\gamma_1} + \varepsilon} \longrightarrow \frac{a_1(x)w_i}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \varepsilon} \text{ q.t.p } \Omega,$$

$$|\frac{a_1(x)w_i}{|u_n|^{\alpha_1}|v_n|^{\gamma_1} + \varepsilon}| \leq \frac{a_1(x)w_i}{\varepsilon} \in L^p(\Omega)$$

e

$$u_n(x)^+ w_i \longrightarrow u^+(x) w_i \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

Por hipótese $1 < p - \beta_1$, isto implica que

$$N - p < N(p - \beta_1) \Longrightarrow \frac{p}{p - \beta_1} < \frac{Np}{N - p}$$

e pelas Imersões compactas (cf. Teorema A.14) temos que

$$w_i \in L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < \frac{Np}{N - p}.$$

Logo,

$$w_i \in L^{\frac{p}{p-\beta_1}}(\Omega)$$

Como,

$$\bar{g}^{\beta_1} \in L^{\frac{p}{\beta_1}}(\Omega) \;\text{ e }\; \frac{\beta_1}{p} + \frac{p - \beta_1}{p} = 1. \tag{2-9}$$

Pela desigualdade de Holder (cf. Teorema A.4),

$$|(u_n^+)^\beta w_i| \leq |\bar{g}^\beta||w_i| \in L^1(\Omega).$$

Donde, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2)

$$\int_\Omega \frac{a_1(x)(w_i)}{|u_n|^{\alpha_1}|v_n|^{\gamma_1} + \varepsilon} dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{a_1(x)(w_i)}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \varepsilon} dx \tag{2-10}$$

e

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\beta_1} w_i dx \longrightarrow \int_\Omega (u^+)^{\beta_1} w_i dx \tag{2-11}$$

De (2-8),(2-10) e (2-11); obtemos

$$F_i(\xi_{n_k}, \eta_{n_k}) \longrightarrow F_i(\xi, \eta) \quad \text{quando} \quad (\xi_n, \eta_n) \longrightarrow (\xi, \eta).$$

Agora, suponhamos que não tenhamos

$$F_i(\xi_n, \eta_n) \longrightarrow F_i(\xi, \eta)$$

então existe $\varepsilon_0 > 0$ e $F_i(\xi_{n_j}, \eta_{n_j})$ onde

$$|F_i(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}) - F_i(\xi, \eta)| \geq \varepsilon_0, \;\; \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2-12}$$

Utilizando os mesmos argumentos feitos anteriormente, conseguimos mostrar que existe

uma subsequência $\{F_i(\xi_{n_{j_k}},\eta_{n_{j_k}})\} \subseteq \{F_i(\xi_{n_j},\eta_{n_j})\}$ tal que

$$F_i(\xi_{n_{j_k}},\eta_{n_{j_k}}) \longrightarrow F_i(\xi,\eta) \ \ em \ \ I\!R^m.$$

Logo, existe $n_{j_0} \in I\!N$ tal que

$$|F_i(\xi_{n_{j_k}},\eta_{n_{j_k}}) - F_i(\xi,\eta)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \ \ \forall n_{j_k} \geq n_{j_0}.$$

Contrariando (2-12). Portando, segue que F_i são contínuas.

De forma totalmente análoga, podemos obter que

$$G_i(\xi_n,\eta_n) \longrightarrow G_i(\xi_n,\eta_n) \ \ \text{quando} \ \ (\xi_n,\eta_n) \longrightarrow (\xi,\eta).$$

Portanto pela Lema fundamental (cf. Teorema C.10) , existe $(\xi_m,\eta_k) \in I\!R^m \times I\!R^k$ com $|(\xi_m,\eta_k)| \leq r_0$ tal que $F(\xi_m,\eta_k) = 0$. Pela identificação isométrica, $E_m \times E_k$ entre $I\!R^m \times I\!R^k$, temos que existe $(u_m,v_k) \in E_m \times E_k$ tal que

$$\|(u_m,v_k)\|_{m,k} \leq r_0, \forall m,k \in I\!N \text{ e } F_i(\xi_m,\eta_k) = G_i(\xi_m,\eta_k) = 0$$

implicando que, $\forall \ i = 1,...,m$ e $j = 1,...,k$,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla w_i dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)w_i}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_1} w_i dx \tag{2-13}$$

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla \overline{w}_j dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)\overline{w}_j}{|u_m|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (v_k^+)^{\beta_2} \overline{w}_j dx \tag{2-14}$$

Multiplicando cada F_i e G_i por escalares α_i e γ_i, respectivamente, e somando-as, obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)\phi}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_1} \phi dx, \ \text{para todo } \phi \in W_m. \tag{2-15}$$

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla \psi dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)\psi}{|u_m|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (v_k^+)^{\beta_2} \psi dx, \ \text{para todo } \psi \in W_k. \tag{2-16}$$

Como $E_{m,k} \subseteq E$ logo existe $C > 0$, que depende da dimensão de $E_{m,k}$, tal que $\|(u_m,v_k)\| \leq C\|(u_m,v_k)\|_{m,k} \leq r$. Observe que desta desigualdade não podemos concluir

que u_m, v_k são limitadas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega)$, respectivamente.

Mas, fazendo $\phi = u_m$ em (2-15), combinando as desigualdades de Hölder e de Poincaré (cf. Teoremas A.4 e A.8) temos que,

$$\begin{aligned}
\|u_m\|^p &= \int_\Omega |\nabla u_m|^p dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)u_m}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon} dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_1+1} dx \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega a_1 u_m dx + \int_\Omega u_m^{\beta_1+1} dx \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon}\|a_1\|_\infty \|u_m\|_p + C_1\|u_m\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1} \\
&\leq C_2\|u_m\| + C_3\|u_m\|^{\beta_1+1}
\end{aligned}$$

então,

$$\|u_m\|^p \leq C_2\|u_m\| + C_3\|u_m\|^{\beta_1+1}.$$

De forma análoga,

$$\|v_k\|^q \leq C_4\|v_k\| + C_5\|v_k\|^{\beta_1+1}$$

Por (H_1), temos então que (u_m) e (v_k) são limitadas, respectivamente, em $W_0^{1,p}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega)$. Sendo $(W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega))$ reflexivo, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_m \rightharpoonup u_\varepsilon \;\text{ em }\; W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$v_k \rightharpoonup v_\varepsilon \;\text{ em }\; W_0^{1,q}(\Omega)$$

Pelas imersões compactas de Sobolev (cf. Teorema A.14) e pelo Teorema A.3 obtemos,

$$\begin{aligned}
&u_m \to u_\varepsilon \text{ e } v_k \to v_\varepsilon \text{ em } L^p(\Omega), L^q(\Omega) \\
&u_m(x) \longrightarrow u_\varepsilon(x) \;\; q.t.p \;\text{ em }\; \Omega \\
&v_k(x) \longrightarrow v_\varepsilon(x) \;\; q.t.p \;\text{ em }\; \Omega. \\
&|u_m| \leq \overline{g}_1, \;\; onde \;\; \overline{g}_1 \in L^s(\Omega) \; 1 \leq s < \tfrac{Np}{N-p} \\
&|v_k| \leq \overline{g}_2, \;\; onde \;\; \overline{g}_2 \in L^{\overline{s}}(\Omega) \; 1 \leq \overline{s} < \tfrac{Nq}{N-q}
\end{aligned} \tag{2-17}$$

Observemos que, pelas convergências acimas

$$\tfrac{a_1(x)\phi}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon} \longrightarrow \tfrac{a_1(x)\phi}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}|v_\varepsilon|^{\gamma_1}+\varepsilon} \;\; \text{q.t.p} \;\; \Omega,$$

$$(u_m)^+\phi \longrightarrow (u_\varepsilon)^+\phi \;\; \text{q.t.p} \;\; \Omega,$$

$$\left|\frac{a_1(x)\phi}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}|a_1(x)\phi| \in L^1(\Omega).$$

De (2-9) e (2-17) segue,

$$|(u_m^+)^{\beta_1}\phi| \leq \overline{g}^{\beta_1}\phi \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), segue que

$$\int_\Omega \frac{a_1(x)\phi}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx+\int_\Omega (u_m^+)^{\beta_1}\phi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{a_1(x)\phi}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}|v_\varepsilon|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx+\int_\Omega (u_\varepsilon^+)^{\beta_1}\phi dx. \quad (2\text{-}18)$$

Utilizando as convergências obtidas em (2-17), e argumentando de forma análoga, ao que foi feito acima, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{a_2(x)\psi}{|u_m|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx+\int_\Omega (v_m^+)^{\beta_2}\psi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{a_2(x)\psi}{|u_\varepsilon|^{\alpha_2}|v_\varepsilon|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx+\int_\Omega (v_\varepsilon^+)^{\beta_2}\psi dx. \quad (2\text{-}19)$$

Para concluirmos que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é solução fraca de 2-2, falta mostrar

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla\phi dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{q-2}\nabla v_\varepsilon \nabla\psi dx.$$

Antes de iniciarmos, devo alerta que os argumentos feitos a seguir podem ser feito, também, para a sequência (v_k). Onde bastará trocar p, m, respectivamente, por q e k.

Para tal, definamos o seguinte funcional; $-\Delta_p u_m : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow I\!R$, dada por

$$\langle -\Delta_p u_m, \phi\rangle = \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi dx$$

temos que $\Delta_p u_m \subset (W_0^{1,p}(\Omega))'$. Pois, de fato;

$$|\langle -\Delta_p u_m, \phi\rangle| = |\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi| dx \leq \int_\Omega |\nabla u_m|^{p-1}|\nabla\phi| dx \leq \|\nabla u_m\|_{\frac{p}{p-1}}^{p-1}\|\nabla\phi\|_p$$

a última desigualdade foi obtida pela Desigualdade de Hölder (cf. Teorema A.4), tendo em vista que

$$|\nabla u_m| \in L^p(\Omega) \Rightarrow |u_m|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

$$\phi \in L^p(\Omega) \text{ e } \frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1.$$

Como u_m é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$|\langle -\Delta_p u_m, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_p.$$

Donde;

$$\| -\Delta_p u_m\| = \sup_{\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)} \langle -\Delta_p u_m, \phi\rangle| \leq C, \quad \text{para } \|\phi\| \leq 1.$$

Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (cf. Teorema E.5), se $-\Delta_p u_m$ é limitado, a menos de uma subsequência, logo

$$-\Delta_p u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \text{ em } (W_0^{1,p}(\Omega))^*$$

equivalentemente,

$$\langle -\Delta_p u_m, \psi\rangle \longrightarrow \langle \chi, \psi\rangle \quad , \psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2-20}$$

da desigualdade de Simmons (cf. Teorema A.15). Segue que

$$\int_\Omega (|\nabla u_m^{p-2}|u_m - |\nabla\psi|^{p-2}\psi)(\nabla u_m - \nabla\psi])dx \geq 0, \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2-21}$$

Por simplicidade, definamos como sendo

$$f_1(x, u_m, v_k) := \frac{a_1(x)}{|u|_m^{\alpha_i}|v_k|^{\gamma_i} + \varepsilon} + (u^+)^{\beta_1}, \text{ para } i = 1, 2.$$

Como,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi dx = \int_\Omega f_1(x, u_m, v_k)\phi dx, \text{ para todo } \phi \in W_m, \tag{2-22}$$

fazendo $\phi = u_m$, de (2-22) obtemos,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^p dx = \int_\Omega f_1(x, u_m, v_k)u_m dx. \tag{2-23}$$

De (2-21) segue que,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^p dx - \langle -\Delta_p u_m, \psi\rangle - \langle -\Delta_p \psi, u_m\rangle + \langle -\Delta_p \psi, \psi\rangle \geq 0$$

implicando de (2-22),

$$\int_\Omega f_1(x, u_m, v_m)u_m dx - \langle -\Delta_p u_m, \psi\rangle - \langle -\Delta_p \psi, u_m\rangle + \langle -\Delta_p \psi, \psi\rangle \geq 0.$$

Consequentemente, quando $m, k \to \infty$ e de (2-18) e (2-20)

$$\int_\Omega f_1(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon)u_\varepsilon dx - \langle \chi, \psi\rangle - \langle -\Delta_p \psi, u_\varepsilon\rangle + \langle -\Delta_p \psi, \psi\rangle \geq 0, \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2-24}$$

De (2-22), quando $m, k \to \infty$, temos

$$\langle \chi, \phi\rangle = \int_\Omega f_1(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon)\phi dx, \quad \phi \in W_m. \tag{2-25}$$

Em particular,

$$\langle \chi, u_m \rangle = \int_\Omega f_1(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon) u_m dx$$

Como $u_m \rightharpoonup u_\varepsilon$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que implica

$$\langle \chi, u_m \rangle \longrightarrow \langle \chi, u_\varepsilon \rangle$$

portanto,

$$\langle \chi, u_\varepsilon \rangle = \int_\Omega f_1(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon) u_\varepsilon dx.$$

Substituindo a igualdade obtida em (2-24)

$$\langle \chi, u_\varepsilon \rangle - \langle \chi, \psi \rangle - \langle -\Delta_p \psi, u_\varepsilon \rangle + \langle -\Delta_p \psi, \psi \rangle \geq 0, \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Segue que,

$$\langle \chi - (-\Delta_p \psi), u_\varepsilon - \psi \rangle \geq 0, \quad \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tomando $\psi = u_\varepsilon - \lambda w$, $\lambda \geq 0$ e $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Donde,

$$\langle \chi - (-\Delta_p(u_\varepsilon - \lambda w)), \lambda w \rangle \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \text{ e } w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ou seja,

$$\langle \chi - (-\Delta_p(u_\varepsilon - \lambda w)), w \rangle \geq 0$$

Como $-\Delta_p$ é um operador contínuo, fazendo $\lambda \to 0$ temos

$$\langle \chi - (-\Delta_p(u_\varepsilon), w \rangle \geq 0, \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$$\langle \chi - (-\Delta_p(u_\varepsilon), -w \rangle = -\langle \chi - (-\Delta_p(u_\varepsilon), w \rangle \leq 0$$

Portanto,

$$\langle \chi - (-\Delta_p(u_\varepsilon), w \rangle = 0, \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Segue que,

$$\chi = -\Delta_p u_\varepsilon.$$

E obtemos o que queríamos

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla \phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla \phi dx.$$

Donde, utilizando os mesmos argumentos conseguimos mostrar que

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k \nabla \phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{q-2} \nabla v_\varepsilon \nabla \phi dx.$$

Observação 2.4 *Observe que cada $\phi \in E_m$, pode ser escrito como*

$$\phi = \sum_{i=0}^{m} \xi_i w_i$$

Donde,

$$\lim_{m\to\infty} \phi = \lim \sum_{i=0}^{m} \xi_i w_i = w, \ \ para \ \ algum \ \ w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim, com a convergência forte,acima, em $W_0^{1,p}(\Omega)$ podemos proceder de forma análoga ao que foi feito para mostrar que F era contínua, e obter as funções teste em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ou seja $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = \frac{a_1(x)}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}|v_\varepsilon|^{\gamma_1}+\varepsilon} + (u_\varepsilon^+)^{\beta_1}, \ -\Delta_q v_\varepsilon = \frac{a_2(x)}{|u_\varepsilon|^{\alpha_2}|v_\varepsilon^{\gamma_2}+\varepsilon} + (v_\varepsilon^+)^{\beta_2} \ \text{in } \Omega \\ \\ u = v = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2-26}$$

Sendo

$$f_1(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \frac{a_1(x)}{|u|_\varepsilon^{\alpha_1}|v|_\varepsilon^{\gamma_1}+\varepsilon} + (u_\varepsilon^+)^{\beta_1}$$

donde, como ε está fixado

$$|f_1(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon}|a_1| + |u_\varepsilon|^{\beta_1} \leq C(1 + |u_\varepsilon|^{\beta_1})$$

como por hipótese (H_1) pelo Teorema C.11, segue que $u \in L^\infty(\Omega)$. Donde, utilizando o Teorema de regularidade do Lieberman (cf. Teorema B.1 temos $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

A positividade segue pelo Teorema C.5, pois a solução trivial não satisfaz a igualdade dada em (2-26). Assim pelo Teorema C.5, $u_\varepsilon > 0$. De forma análoga, segue que $v_\varepsilon \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ positiva.

Portanto, $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in E \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ positiva para cada $\varepsilon > 0$. $\square$

Observação 2.5 *Queremos agora fazer $\varepsilon \longrightarrow 0$ para obter a solução de (1-1). Por questão de comodidade denotaremos, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, logo $(u_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) = (u_n, v_n)$, então temos das solução obtidas do Teorema 2.3 que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \frac{a_1(x)}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1}+\frac{1}{n}} + (u_n)^{\beta_1}, \ -\Delta_q v_n = \frac{a_2(x)}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2}+\frac{1}{n}} + (v_n)^{\beta_2} \ \ in \ \Omega \\ \\ u_n, v_n > 0, \qquad em \quad \Omega \qquad e \qquad u_n = v_n = 0 \ \ sobre \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2-27}$$

consideremos $w,z \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *soluções positivas dos seguintes problemas (cf. Lema D.3).*

$$-\Delta_p w = w^{\beta_1} \qquad em\ \Omega, \quad w = 0 \qquad sobre\ \partial\Omega$$

e

$$-\Delta_q z = z^{\beta_2} \qquad em\ \Omega, \quad z = 0 \qquad sobre\ \partial\Omega.$$

Como,

$$-\Delta_p u_n \geq u_n^{\beta_1} \qquad e \qquad -\Delta_q v_n \geq v_n^{\beta_1}.$$

Assim, pelo Teorema da Comparação (cf. Teorema C.9)

$$u_n(x) \geq w(x) \qquad e \qquad v_n(x) \geq z(x) \qquad q.t.p\ \ em\ \Omega \tag{2-28}$$

pelo Lema B.3 existem constantes $C, K > 0$ *tais que*

$$Cd(x) \leq w(x) \qquad e \qquad Kd(x) \leq z(x) \qquad em\ \Omega. \tag{2-29}$$

De (2-28), (2-29) e (H_4),

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1}} &\leq \frac{h_1}{w^{\alpha_1} z^{\gamma_1}} \leq \frac{a_1}{d(x)^{\alpha_1+\gamma_1}} \in L^{p'}(\Omega), \\ \frac{a_2}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2}} &\leq \frac{a_2}{w^{\alpha_2} z^{\gamma_2}} \leq \frac{a_2}{d(x)^{\alpha_2+\gamma_2}} \in L^{q'}(\Omega). \end{aligned} \tag{2-30}$$

Demonstração do Teorema 1.1: Seja (u_n, v_n) a sequência de soluções fracas, definidas anteriormente, do problema (2-2). Então, fazendo $\phi = u_n$, combinando as desigualdades de Hölder e de Poincaré (cf. Teoremas A.4 e A.8) com (2-30) temos que,

$$\begin{aligned} \|u_n\|^p &= \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx = \int_\Omega \frac{a_1(x) u_n}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega u_n^{\beta_1+1} dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{a_1}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1}} u_n dx + \int_\Omega u_n^{\beta_1+1} dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{a_1}{d(x)^{\alpha_1+\gamma_1}} u_n dx + \int_\Omega u_n^{\beta_1+1} dx \\ &\leq \left\| \frac{a_1}{d(x)^{\alpha_1+\gamma_1}} \right\|_{p'} \|u_n\|_p + C_1 \|u_n\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1} \\ &\leq C_2 \|u_n\| + C_3 \|u_n\|^{\beta_1+1} \end{aligned}$$

então,

$$\|u_n\|^p \leq C_2 \|u_n\| + C_3 \|u_n\|^{\beta_1+1}.$$

De forma análoga,

$$\|v_n\|^p \leq C_4\|v_n\| + C_5\|v_n\|^{\beta_2+1}.$$

Utilizando a hipótese (H_1), tem-se então que (u_n, v_n) é limitada em E. Sendo E reflexivo, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$v_m \rightharpoonup v \text{ in } W_0^{1,q}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev (cf. Teorema A.14) e pelo Teorema (A.3) obtemos,

$$\begin{array}{l} u_n \to u \text{ e } v_n \to v \text{ em } L^p(\Omega) \\ u_n(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p \;\; \text{em } \Omega. \\ v_n(x) \longrightarrow v(x) \;\; q.t.p \;\; \text{em } \Omega. \\ |u_n| \leq \overline{g}_1, \;\; onde \;\; \overline{g}_1 \in L^s(\Omega) \; 1 \leq s < \frac{Np}{N-p} \\ |v_n| \leq \overline{g}_2, \;\; onde \;\; \overline{g}_2 \in L^{\overline{s}}(\Omega) \; 1 \leq \overline{s} < \frac{Nq}{N-q} \end{array}$$

Observemos que, pelas convergências acimas

$$\frac{a_1(x)\phi}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \varepsilon} \longrightarrow \frac{a_1(x)\phi}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1} + \varepsilon} \;\; \text{q.t.p} \;\; \Omega$$

$$(u_n)\phi \longrightarrow (u)\phi \;\; \text{q.t.p} \;\; \Omega$$

$$\left| \frac{a_1}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} \phi \right| \leq \left| \frac{a_1}{d(x)^{\alpha_1+\gamma_1}} \right| |\phi| \in L^1(\Omega)$$

De (2-9) segue,

$$|(u_m)^{\beta_1}\phi| \leq \overline{g}^{\beta_1}\phi \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), segue que

$$\int_\Omega \frac{a_1\phi}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega (u_n)^\beta \phi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{a_1\phi}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega (u)^\beta \phi dx. \tag{2-31}$$

Utilizando as convergências obtidas em (2-31), e argumentando de forma análoga, ao que foi feito acima, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{a_2\psi}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2} + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega (v_n)^\beta \psi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{a_2\psi}{u^{\alpha_2} v_\varepsilon^{\gamma_2} dx + \frac{1}{n}} + \int_\Omega (v)^\beta \psi dx. \tag{2-32}$$

E fazendo os mesmos argumentos feitos no Lema 2.3 conseguimos mostrar que,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n \nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\psi dx. \end{cases} \tag{2-33}$$

Como,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)\phi}{u_n^{\alpha_1}v_n^{\gamma_1}+\frac{1}{n}}dx + \int_\Omega (u_n)^{\beta_1}\phi dx \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n \nabla\psi dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)\psi}{u_n^{\alpha_2}v_n^{\gamma_1}+\frac{1}{n}}dx + \int_\Omega (v_n)^{\beta_2}\phi dx \end{cases} \tag{2-34}$$

para toda $\phi,\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donde quando $n \to \infty$, por (2-31), (2-32) e (2-33);

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)\phi}{u^{\alpha_1}v^{\gamma_1}}dx + \int_\Omega (u)^{\beta_1}\phi dx \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\psi dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)\psi}{u^{\alpha_2}v^{\gamma_1}}dx + \int_\Omega (v)^{\beta_2}\phi dx. \end{cases} \tag{2-35}$$

De (2-35) obtemos que o par (u,v) solução fracas positivas de (1-1) . □

Observação 2.6 *E supondo que exista $C > 0$ tal que*

$$a_i(x) \leq Cd(x),$$

então,

$$\frac{a_i(x)}{u^{\alpha_i}v^{\gamma_i}} \leq \overline{C}\frac{d(x)}{d(x)^{\alpha_i+\gamma_i}} = \overline{C}d(x)^{1-(\alpha_i+\gamma_i)} = K$$

donde, pelo Teorema C.11 $u,v \in L^\infty(\Omega)$. Assim, utilizando o Teorema de regularidade do Hai (cf. Teorema B.2) temos $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$.Pois,

$$|f_i(x,u,v)| = \left|\frac{a_i}{u^{\alpha_i}v^{\gamma_i}} + u^{\beta i}\right| \leq \overline{K}.$$

Portanto $(u,v) \in E \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ é solução positiva de (1-1), onde $\alpha,\beta \in (0,1)$. □

finalizamos aqui o Capítulo 2.

CAPÍTULO 3

Sistemas Cooperativos
Domínio Limitado

Um Problema bem semelhante à (1-2) foi estudado por Kodja e Moussaoui (cf. [28]) onde eles consideraram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{\alpha_1} + v^{\beta_1} & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta_q v = u^{\alpha_2} + \lambda v^{\beta_2} & \text{em} \quad \Omega \\ u, v > \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u, v = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-1}$$

Onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado com fronteira $C^{1,\alpha}(\Omega)$, para $\alpha \in (0,1)$, $1 < p, q \leq N$. E, ainda, $\lambda > 0$, $-1 < \alpha_1, \beta_2 < 0$, $\alpha_2 > q-1$ e $\beta_1 > p-1$.

Eles utilizaram o método de sub e super-solução para mostrar que (3-1) tem uma solução positiva $(u,v) \in C_0^{1,\gamma} \times C_0^{1,\gamma}$, para algum $\gamma \in (0,1)$.

Assim, utilizando as mesmas notações do capítulo anterior, estudaremos o sistema perturbado de (1-2), isto é;

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{1}{u^{\alpha_1+\varepsilon}} + v^{\beta_1}, \ -\Delta_q v = \frac{1}{v^{\alpha_2+\varepsilon}} + u^{\beta_2} \ \text{em } \Omega \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-2}$$

Definição 3.1 *Uma solução fraca de (1-2) é um par de funções* $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *positivas e satisfaz*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{1}{u^{\alpha_1}} + \phi dx + \int_\Omega v^{\beta_1} \phi dx, \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$
$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega \frac{1}{v^{\alpha_2}} + \psi dx + \int_\Omega u^{\beta_2} \psi dx, \quad \psi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Lema 3.2 *Suponha* $(H_2)e(H_5)$. *Então para cada* $\varepsilon > 0$ *fixado, problema (3-2) possui uma solução fraca positiva* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$.

Demonstração: Com o mesmo propósito que nos fez utilizar o Lema Fundamental (cf. Teorema C.10) fixemos duas bases de Schauder $\Sigma = \{w_1, w_2, ...\}$ e $\Sigma = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ...\}$,

respectivamente, de $W_o^{1,p}(\Omega)$ e W_0. Logo $(u,v) \in E$ temos,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i w_i = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i \ \text{ e } \ v = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \phi_j = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \eta_j w_j, \ \ \xi_i, \eta_j \in I\!R.$$

Defina em $E_{m,k}$ a seguinte norma

$$\|z\|_{m,k} = \sum_{i=1}^{m} |\xi_i| + \sum_{j=1}^{k} |\eta_i| = \|u\|_m + \|v\|_k = |\xi| + |\eta|$$

onde $|.|$ é a norma da soma em $I\!R^m$; observe que para cada $s \in I\!N$, temos que $(W_s, \|.\|_s)$ é isomorfo e isométrico a $(I\!R^s, |.|)$, (Como já foi feito no Capítulo 2). Onde conseguimos obter que $(E_m \times E_k, \|.\|_{m,k})$ é isomorfo e isométrico a $(I\!R^m \times I\!R^k)$.

Queremos mostrar que para cada $m,k \in I\!N$ existe $(u_m, v_k) \in E_{m,k}$ e $\varepsilon > 0$ fixado, verificando a seguinte igualdade

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_i dx = \int_\Omega \frac{w_i}{|u_m|^{\alpha_1} + \varepsilon} dx + \int_\Omega (v_k^+)^{\beta_1} w_i dx, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k \nabla \overline{w}_j dx = \int_\Omega \frac{\overline{w}_j}{|v_k|^{\alpha_2} + \varepsilon} dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_2} \overline{w}_j dx \end{cases} \tag{3-3}$$

para cada $i = 1, ..., m$.

Defina $F : I\!R^m \times I\!R^k \to I\!R^m \times I\!R^k$ dada por

$$F(\xi,\eta) = (F_1(\xi,\eta), ..., F_m(\xi,\eta), G_1(\xi,\eta), ..., G_k(\xi,\eta))$$

onde

$$F_i(\xi,\eta) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w_i dx - \int_\Omega \frac{w_i}{|u|^{\alpha_1} + \varepsilon} dx - \int_\Omega (v^+)^{\beta_1} w_i dx$$

e

$$G_j(\xi,\eta) = \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \overline{w}_j dx - \int_\Omega \frac{\overline{w}_j}{|v|^{\alpha_2} + \varepsilon} dx - \int_\Omega (u^+)^{\beta_2} \overline{w}_j dx$$

para cada i=1,...,m e j=1,...,k. Relembremos que podemos usar a identificação $(u,v) \leftrightarrow (\xi,\eta)$. Queremos mostrar

i) Existe $r > 0$ tal que $\langle F(\xi,\eta), (\xi,\eta) \rangle \geq 0$ para todo (ξ,η) satisfazendo $|(\xi,\eta)| = r$,

ii) $F : I\!R^m \times I\!R^k \to I\!R^m \times I\!R^k$ é contínua.

Observe o seguinte Observe o seguinte

$$\langle F_i(\xi,\eta),\xi_i\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(\xi_i w_i)dx - \int_\Omega \frac{(\xi_i w_i)}{|u|^{\alpha_1}+\varepsilon}dx - \int_\Omega (v^+)^{\beta_1}(\xi_i w_i)dx$$

e

$$\langle G_i(\xi,\eta),\eta_j\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla(\eta_i \overline{w}_j)dx - \int_\Omega \frac{(\eta_i \overline{w}_j)}{|v|^{\alpha_2}+\varepsilon}dx - \int_\Omega (u^+)^{\beta_2}(\eta_i \overline{w}_j)dx$$

$$\begin{aligned}\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle &= \sum_{i=1}^m \langle F_i(\xi,\eta),\xi_i\rangle + \sum_{i=1}^m \langle G_i(\xi,\eta),\eta_i\rangle = \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^p - \int_\Omega \frac{u}{|u|^{\alpha_1}+\varepsilon}dx \\ &\quad - \int_\Omega \frac{v}{|v|^{\alpha_2}+\varepsilon}dx - \int_\Omega (v^+)^{\beta_1}u dx - \int_\Omega (u^+)^{\beta_2}v dx.\end{aligned}$$

Pela imersão contínua de Sobolev (cf. Teorema A.13) e pela Desigualdade de Hölder (c.f Teorema A.4), segue que

$$\int_\Omega \frac{u}{|u|^{\alpha_1}+\varepsilon}dx \le \frac{1}{\varepsilon}C_1\|u\|_p \le \frac{1}{\varepsilon}C_1\|u\|_{1,p},$$

$$\int_\Omega \frac{v}{|v|^{\alpha_2}+\varepsilon}dx \le \frac{1}{\varepsilon}C_2\|v\|_p \le \frac{1}{\varepsilon}C_2\|v\|_{1,q}.$$

Como,

$$(v^+)^{\beta_1}u \le |v|^{\beta_1}|u| \le (|v|+|u|)^{\beta_1+1} \le 2^{\beta_1+1}(|v|^{\beta+1}+|u|^{\beta+1}),$$

donde, a majoração feita acima servirá para majorar as desigualdades abaixo,

$$\int_\Omega (v^+)^{\beta_1}u dx \le C_3(\|u\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1} + \|v\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1}) \le C_3(\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1} + \|v\|_{1,q}^{\beta_1+1})$$

$$\int_\Omega (u^+)^{\beta_2}v dx \le C_4(\|u\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1} + \|v\|_{\beta_1+1}^{\beta_1+1} \le C_4(\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1} + \|v\|_{1,q}^{\beta_1+1}).$$

Assim,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \ge \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q - C_1\|u\|_{1,p} - C_5\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1} - C_2\|v\|_{1,q} - C_6\|v\|_{1,q}^{\beta_2+1}$$

pela equivalência de normas $\|.\|_{1,p}, \|.\|_m$ e $\|.\|_{1,q}, \|.\|_k$, respectivamente;

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \ge \overline{C}\|u\|_m^p + \overline{C}\|v\|_k^q - C\|u\|_m - C\|u\|_m^{\beta_1+1} - C\|u\|_m^{\beta_2+1} - C\|v\|_k - C\|u\|_m^{\beta_1+1} - C\|v\|_k^{\beta_2+1}$$

fazendo $\|(u,v)\|_{m,k} = r = \|u\|_m + \|v\|_k$, onde $\|u\|_m = r_1$, $\|v\|_k = r_2$. Considere,

$$g_1^\varepsilon(r_1) = \overline{C}r_1^p - Cr_1 - Cr_1^{\beta_1+1} - Cr_1^{\beta_2+1}$$

e

$$g_2^{\varepsilon}(r_2) = \overline{C}r_2^q - Cr_2 - Cr_2^{\beta_1+1} - Cr_2^{\beta_2+1}.$$

Segue que

$$\lim_{r\to\infty} g_i^{\varepsilon}(r_i) = +\infty$$

pois, por hipótese $\beta_i + 1 \leq p$ e

$$g_1^{\varepsilon}(r_1) = r_1^p \left(C_5 - C_3 r_1^{1-p} - C_1 r_1^{\beta_1+1-p} - C_2 r_1^{\beta_2+1-p}\right)$$

e

$$g_2(r_2) = r_2^p \left(C_5 - C_3 r_2^{1-p} - C_1 r_2^{\beta_1+1-p} - C_2 r_2^{\beta_2+1-p}\right).$$

Logo, existem $\alpha_i > 0$ e $\overline{r}_i > 0$ tal que $g_i(\overline{r}_i) \geq \alpha$. Portanto,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \geq 0 \text{ se } \|(u,v)\|_{m,k} = r_0 = \overline{r}_1 + \overline{r}_2.$$

Devido a isometria entre $E_{m,k}$ e $I\!R^m \times I\!R^k$, isto implica que

$$\|(u,v)\|_{m,k} = |(\xi,\eta)| = r_0.$$

Mostraremos que F é contínua. Considere

$$u_n = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ni} w_i \text{ e } u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i$$

$$v_n = \sum_{j=1}^{k} \eta_{nj} \overline{w}_j \text{ e } v = \sum_{j=1}^{k} \eta_j \overline{w}_j$$

onde, tendo em mente a isometria já supracitada;

$$\xi_n = (\xi_{1n}, ..., \xi_{mn}) \longrightarrow \xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$$

$$\eta_n = (\eta_{1n}, ..., \eta_{kn}) \longrightarrow \xi = (\eta_1, ..., \eta_k)$$

logo,

$$u_n \longrightarrow u$$

$$v_n \longrightarrow v$$

isto é,

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u,v) \text{ em } E_{m,k} \tag{3-4}$$

Como $E_{m,k}$ tem dimensão finita, as normas $\|.\|$ e $\|.\|_m$ são equivalentes em $E_{m,k}$. Donde;

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\| \longrightarrow 0 \text{ em } E.$$

Observe que para mostrar que F é contínua, basta mostrar que as F_i e G_j são contínuas; isto é

Da convergência acima e pelo teorema (A.3) temos que, a menos de uma subsequência,

$$\begin{cases} \|\nabla u_n - \nabla u\|_p \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega), \\ \nabla u_{n_k}(x) \longrightarrow \nabla u(x) \text{ q.t.p } em \ \Omega, \\ |\nabla u_{n_k}| \leq g \text{ onde } g \in L^p(\Omega), \end{cases} \tag{3-5}$$

e da desigualdade de Poincaré (cf. Teorema A.8) e pelo teorema A.3

$$\begin{cases} \|u_n - u\|_p \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega), \\ \|v_n - v\|_q \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega), \\ u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p em } \ \Omega, \\ v_{n_k}(x) \longrightarrow v(x) \text{ q.t.p em } \ \Omega, \\ |u_{n_k}| \leq \bar{g} \text{ onde } \bar{g} \in L^p(\Omega). \end{cases} \tag{3-6}$$

Segue que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i \longrightarrow |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_i \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

$$||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i| \leq g^{p-1}|\nabla w_i|$$

Como

$$g \in L^p(\Omega) \Rightarrow |g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$$

e

$$\nabla w_i \in L^p(\Omega) \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1,$$

pela desigualdade de Hölder (cf. Teorema A.4), obtemos que $|g|^{p-1}|w_i| \in L^1(\Omega)$. Portanto utilizando o Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_i dx. \tag{3-7}$$

De (3-6) temos

$$\frac{w_i}{|u_n|^{\alpha_1} + \varepsilon} \longrightarrow \frac{w_i}{|u|^{\alpha_1} + \varepsilon} \text{ q.t.p } \ \Omega,$$

$$\left| \frac{w_i}{|u_n|^{\alpha_1} + \varepsilon} \right| \leq \frac{w_i}{\varepsilon} \in L^p(\Omega)$$

e

$$v_n(x)^+ w_i \longrightarrow v^+(x) w_i \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

Temos,

$$(v_n^+)^{\beta_1} w_i \leq |v_n|^{\beta_1} |w_i| \leq (|v_n| + |w_i|)^{\beta_1+1} \leq 2^{\beta_1+1}(|v_n|^{\beta+1} + |w_i|^{\beta+1})$$

donde,

$$|(v_n^+)^{\beta} w_i| \leq 2^{\beta_1+1}(|v_n|^{\beta+1} + |w_i|^{\beta+1}) \leq 2^{\beta_1+1}(\overline{h}^{\beta+1} + |w_i|^{\beta+1}) \in L^1(\Omega),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2)

$$\int_\Omega \frac{w_i}{|u_n|^{\alpha_1} + \varepsilon} dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{w_i}{|u|^{\alpha_1} + \varepsilon} dx, \tag{3-8}$$

$$\int_\Omega (v_n^+)^{\beta_1} w_i dx \longrightarrow \int_\Omega (v^+)^{\beta_1} w_i dx. \tag{3-9}$$

De (3-7), (3-8) e (3-9); obtemos

$$F_i(\xi_{n_k}, \eta_{n_k}) \longrightarrow F_i(\xi, \eta) \quad \text{quando} \quad (\xi_n, \eta_n) \longrightarrow (\xi, \eta).$$

Assim, como foi feito no Capítulo 2, mostramos que F_i são contínuas. De forma análoga, podemos obter que as G_i são contínuas. Implicando que F é contínua. Portanto pela Lema fundamental (cf. Teorema C.10) , existe $(\xi_m, \eta_k) \in I\!R^m \times I\!R^k$ com $|(\xi_m, \eta_k)| \leq r_0$ tal que $F(\xi_m, \eta_k) = 0$. Pela identificação isométrica, $E_m \times E_k$ entre $I\!R^m \times I\!R^k$, temos que existe $(u_m, v_k) \in E_m \times E_k$ tal que

$$\|(u_m, v_k)\|_{m,k} \leq r_0, \forall m, k \in I\!N \text{ e } F_i(\xi_m, \eta_k) = G_i(\xi_m, \eta_k) = 0$$

implicando que, $\forall \ i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, k$,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla w_i dx = \int_\Omega \frac{w_i}{|u_m|^{\alpha_1} + \varepsilon} dx + \int_\Omega (v_k^+)^{\beta_1} w_i dx, \tag{3-10}$$

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2} \nabla v_k \nabla \overline{w} j dx = \int_\Omega \frac{\overline{w} j}{|v_k|^{\alpha_2} + \varepsilon} dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_2} \overline{w} j dx, \tag{3-11}$$

multiplicando cada F_i e G_i por escalares α_i e γ_i, respectivamente, e somando-as, obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{\phi}{|u_m|^{\alpha_1} + \varepsilon} dx + \int_\Omega (v_k^+)^{\beta_1} \phi dx, \text{ para todo } \phi \in W_m. \tag{3-12}$$

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla\psi dx = \int_\Omega \frac{\psi}{|v_k|^{\alpha_2}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_2}\psi dx, \text{ para todo } \psi \in W_k. \tag{3-13}$$

Afirmamos que u_m, v_k são limitadas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega)$, respectivamente. Pois, fazendo $\phi = u_m$ em (3-12), combinando as desigualdades de Holder e de Poincaré (cf. Teoremas A.4 e A.8) temos que,

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{1,p}^p &= \int_\Omega |\nabla u_m|^p dx = \int_\Omega \frac{u_m}{|u_m|^{\alpha_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (v_k^+)^{\beta_1} u_m dx \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_m dx + \int_\Omega |v_k|^{\beta_1}|u_m| dx \;\leq\; C_1\left(\|u_m\|_{1,p} + \|u_m\|_{1,p}^{\beta_{1+1}} + \|v_k\|_{1,q}^{\beta+1}\right)
\end{aligned}$$

então,

$$\|u_m\|_{1,p}^p \leq C_1\left(\|u_m\|_{1,p} + \|u_m\|_{1,p}^{\beta_1+1} + \|v_k\|_{1,q}^{\beta_1+1}\right)$$

de forma análoga, obtemos

$$\|v_k\|_{1,q}^q \leq C_1\left(\|v_k\|_{1,q} + \|v_k\|_{1,q}^{\beta_2+1} + \|u_m\|_{1,p}^{\beta_2+1}\right).$$

Um fato interessante deste problema, é o "entrelaçamento"de informação, um deles é que (u_m) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, (v_k) é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Assim, se supormos que (u_m) é ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ teremos que (v_k) será ilimitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Então podemos supor sem perda de generalidade que $\|u_m\|_{1,q}, \|v_k\|_{1,q} > 1$

$$\|u_m\|_{1,p}^p + \|v_k\|_{1,q}^q \leq C\left(\|u_m\|_{1,p} + \|u_m\|_{1,p}^{\beta_1+1} + \|v_k\|_{1,q}^{\beta_1+1} + \|v_k\|_{1,q} + \|v_k\|_{1,q}^{\beta_2+1} + \|u_m\|_{1,p}^{\beta_2+1}\right). \tag{3-14}$$

Como $1 < \beta_i + 1 < p, q$, temos que

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}}{\|u_m\|_{1,p}^p} \longrightarrow 0 \quad \frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p} \longrightarrow 0, \quad \textit{quando } \|u_m\|_{1,p} \longrightarrow \infty \tag{3-15}$$

de forma análoga,

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}}{\|u_k\|_{1,k}^q} \longrightarrow 0 \quad \frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|v_k\|_{1,q}^q} \longrightarrow 0, \quad \textit{quando } \|v_k\|_{1,q} \longrightarrow \infty \tag{3-16}$$

e

$$\|u_m\|_{1,p}^p < \|u_m\|_{1,p}^p + \|v_k\|_{1,q}^q \Longrightarrow \frac{1}{\|u_m\|_{1,p}} > \frac{1}{\|u_m\|_{1,p}^p + \|v_k\|_{1,q}^q}$$

assim,

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}<\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}}.$$

De (3-15) tem-se,

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0,\quad quando\ \ \|u_m\|_{1,p}\longrightarrow\infty \tag{3-17}$$

e também,

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}<\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|v_k\|_{1,q}^q}.$$

De (3-16) obtemos

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0,\quad quando\ \ \|v_k\|_{1,q}\longrightarrow\infty \tag{3-18}$$

portanto,

$$1<C\frac{\left(\|u_m\|_{1,p}+\|u_m\|_{1,p}^{\beta_1+1}+\|v_k\|_{1,q}^{\beta_1+1}+\|v_k\|_{1,q}+\|v_k\|_{1,q}^{\beta_2+1}+\|u_m\|_{1,p}^{\beta_2+1}\right)}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q} \tag{3-19}$$

Logo, utilizando o que obtemos em (3-17),(3-18) e fazendo $\|u_m\|_{1,p}$,$\|v_k\|_{1,q}\longrightarrow\infty$ em (3-19), chegamos a uma contradição. Portanto, (u_m) e (v_k) são limitadas, respectivamente, em $W_0^{1,p}(\Omega)$,$W_0^{1,q}(\Omega)$. Sendo estes espaços reflexivos, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_m\rightharpoonup u_\varepsilon\ \text{ em }\ W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$v_k\rightharpoonup v_\varepsilon\ \text{ em }\ W_0^{1,q}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev (cf. Teorema A.14) e pelo Teorema (A.3) obtemos,

$$\begin{cases} u_m\to u_\varepsilon \quad \text{em } L^p(\Omega),\\ v_k\to v_\varepsilon \quad \text{em } L^q(\Omega),\\ u_m(x)\longrightarrow u_\varepsilon(x)\ \ q.t.p\ \text{ em }\ \Omega,\\ v_k(x)\longrightarrow v_\varepsilon(x)\quad \text{q.t.p em }\ \Omega,\\ |u_m|\le \overline{g}_1,\quad \text{onde }\ \overline{g}_1\in L^s(\Omega)\ 1\le s<\frac{Np}{N-p},\\ |v_k|\le \overline{g}_2,\quad \text{onde }\ \overline{g}_2\in L^{\overline{s}}(\Omega)\ 1\le \overline{s}<\frac{Nq}{N-q}. \end{cases} \tag{3-20}$$

Observemos que, pelas convergências acimas

$$\frac{\phi}{|u_m|^{\alpha_1}+\varepsilon}\longrightarrow\frac{\phi}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}+\varepsilon}\ \ \text{q.t.p}\ \ \Omega,$$

$$(v_k)^+\phi \longrightarrow (v_\varepsilon)^+\phi \ \text{ q.t.p } \ \Omega$$

e

$$\left|\frac{\phi}{|u_m|^{\alpha_1}+\varepsilon}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}|\phi| \in L^1(\Omega).$$

De (3-20) segue,

$$|(v_k^+)^{\beta_1}\phi|2^{\beta_1+1}(|v_n|^{\beta+1}+|w_i|^{\beta+1}) \leq 2^{\beta_1+1}(\overline{g}^{\beta+1}+|w_i|^{\beta+1}) \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), segue que

$$\int_\Omega \frac{\phi}{|u_m|^{\alpha_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (v_k^+)^{\beta_1}\phi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{\phi}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^{\beta_1}\phi dx \tag{3-21}$$

Utilizando as convergências obtidas em (3-20), e argumentando de forma análoga, ao que foi feito acima, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{\psi}{|v_k|^{\alpha_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (u_m^+)^{\beta_2}\psi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{\psi}{|v_\varepsilon|^{\alpha_2}+\varepsilon}dx + \int_\Omega (v_\varepsilon^+)^{\beta_2}\psi dx \tag{3-22}$$

Como já foi feito no capítulo 2, segue a seguinte convergência

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla\phi dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{q-2}\nabla v_\varepsilon \nabla\psi dx.$$

Ou seja $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = \frac{1}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}+\varepsilon} + (v_\varepsilon^+)^{\beta_1}, \ -\Delta_q v_\varepsilon = \frac{1}{|v_\varepsilon|^{\alpha_2}+\varepsilon} + (u_\varepsilon^+)^{\beta_2} \ \text{ in } \Omega \\ \\ u_\varepsilon = v_\varepsilon = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-23}$$

Afirmamos que $u_\varepsilon,\ v_\varepsilon \geq 0$ e $u_\varepsilon,\ v_\varepsilon \not\equiv 0$. De fato, observe que a solução nula não satisfaz o sistema (3-23) e na formulação fraca do problema perturbado utilizando a função $\phi = -u_\varepsilon^-$,

$$\|-u_\varepsilon\|^p = \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla(-u_\varepsilon^-)dx = -\int_\Omega \frac{u_\varepsilon^-}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}+\varepsilon} + v_\varepsilon^+ u_\varepsilon^- dx \leq 0$$

ou seja, como

$$\|u_\varepsilon^-\| = \|-u_\varepsilon^-\| = 0.$$

Segue que $u_\varepsilon \geq 0$ em Ω. De forma análoga, tomando $\psi = -v_\varepsilon^-$, obtemos que $v_\varepsilon \geq 0$.

A positividade de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ segue do fato

$$-\Delta_p u_\varepsilon \geq \frac{1}{(u_\varepsilon+1)^{\alpha_1}} \quad \text{em } \Omega.$$

Considerando que w é solução fraca, dada pelo Lema D.5, do

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \frac{1}{(w+1)^{\alpha_1}} & \text{em } \Omega, \\ w > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3-24}$$

como,

$$0 \leq \frac{w}{u_\varepsilon+\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} w \quad \in L^\infty(\Omega)$$

temos que w e u_ε são respectivamente satisfazem as hipóteses do Teorema C.12 para cada $\varepsilon > 0$ fixado. Logo pelo Teorema C.12 segue que

$$u_\varepsilon \geq w > 0, \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega. \tag{3-25}$$

E de forma análoga, considerando

$$\begin{cases} -\Delta_q z = \frac{1}{(z+1)^{\beta_1}} & \text{em } \Omega, \\ z > 0 & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-26}$$

temos,

$$v_\varepsilon \geq w > 0 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega. \tag{3-27}$$

□

Observação 3.3 *Agora vamos fazer $\varepsilon \longrightarrow 0$ para obter a solução de (1-2). Usando a mesma notação feito no Capítulo 2, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, logo $(u_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) = (u_n, v_n)$, então temos das solução obtidas do Teorema 3.2 que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \frac{1}{u_n^{\alpha_1}+\frac{1}{n}} + (v_n)^{\beta_1}, \ -\Delta_q v_n = \frac{1}{v_n^{\alpha_2}+\frac{1}{n}} + (u_n)^{\beta_2} \ \textit{em } \Omega \\ \\ u_n, v_n > 0, \qquad \textit{em} \quad \Omega \qquad \textit{e} \qquad u_n = v_n = 0 \ \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-28}$$

De (3-25) e (3-27)) segue que

$$u_n(x) + \frac{1}{n} \geq w(x) \qquad e \qquad v_n(x) + \frac{1}{n} \geq z(x) \qquad q.t.p \ \textit{em } \Omega \tag{3-29}$$

Pelo observação D.6 segue que w, $z \in C^1(\overline{\Omega})$, do Lema C.6 tem-se $\frac{\partial u_n}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v_n}{\partial \eta} < 0$, então pelo Lema B.3 existem constantes $C, K > 0$ tais que

$$Cd(x) \leq w(x) \qquad e \qquad Kd(x) \leq z(x) \qquad em\ \Omega \tag{3-30}$$

De (3-29), (3-30)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} &\leq \frac{1}{w^{\alpha_1}} \leq \frac{1}{d(x)^{\alpha_1}}, \\ \frac{1}{(v_n + \frac{1}{n})^{\alpha_2}} &\leq \frac{1}{z^{\alpha_2}} \leq \frac{1}{d(x)^{\alpha_2}}. \end{aligned} \tag{3-31}$$

Demonstração do Teorema 1.2: Seja (u_n, v_n) a sequência de soluções fracas, definidas anteriormente, do problema (2-2). Então, fazendo $\phi = u_n$, utilizando as desigualdades de Hölder, Hardy e de Poincaré (cf. Teoremas (A.4),(A.8) e (A.9)) com (3-31) temos que,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{1,p}^p &= \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx = \int_\Omega \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}} u_n dx + \int_\Omega v_n^{\beta_1} u_n dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{d(x)^{\alpha_1}} u_n dx + \int_\Omega v_n^{\beta_1} u_n dx \\ &= \int_\Omega \frac{u_n}{d(x)} \frac{1}{d(x)^{\alpha_1 - 1}} dx + \int_\Omega v_n^{\beta_1} u_n dx \\ &= \int_\Omega \frac{u_n}{d(x)} d(x)^{1-\alpha_1} dx + \int_\Omega v_n^{\beta_1} u_n dx \\ &\leq \|d(x)\|_\infty^{1-\alpha} \left\| \frac{u_n}{d(x)} \right\|_p + C\left(\|v_n\|_{1,q}^{\beta_1+1} + \|u_n\|_{1,p}^{\beta_1+1} \right) \\ &\leq C\left(\|u_n\|_p + \|v_n\|_{1,q}^{\beta_1+1} + \|u_n\|_{1,p}^{\beta_1+1} \right) \end{aligned}$$

então,

$$\|u_m\|_{1,p}^p \leq C\left(\|u_n\|_p + \|v_n\|_{1,q}^{\beta_1+1} + \|u_n\|_{1,p}^{\beta_1+1} \right)$$

e da mesma forma,

$$\|v_k\|_{1,q}^q \leq C\left(\|u_n\|_p + \|v_n\|_{1,q}^{\beta_1+1} + \|u_n\|_{1,p}^{\beta_1+1} \right).$$

Utilizando os mesmo argumentos feitos, anteriormente em (3-14), temos então que (u_m) e (v_k) são limitadas, respectivamente, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,q}(\Omega)$. Sendo estes espaços reflexivos, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } W_0^{1,q}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev (cf. Teorema A.14) e pelo Teorema A.3 obtemos,

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ e } v_n \to v \text{ em } L^p(\Omega), L^q(\Omega), \\ u_n(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ v_n(x) \longrightarrow v(x) \;\; q.t.p \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ |u_n| \leq \overline{g}_1, \;\; onde \;\; \overline{g}_1 \in L^s(\Omega) \; 1 \leq s < \frac{Np}{N-p}, \\ |v_n| \leq \overline{g}_2, \;\; onde \;\; \overline{g}_2 \in L^{\overline{s}}(\Omega) \; 1 \leq \overline{s} < \frac{Nq}{N-q}. \end{cases} \tag{3-32}$$

Observemos que, pelas convergências acimas

$$\frac{\phi}{|u_n|^{\alpha_1} + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{\phi}{|u|^{\alpha_1}} \;\; \text{q.t.p} \;\; \Omega,$$

$$(v_n)^+\phi \longrightarrow (v)^+\phi \;\; \text{q.t.p} \;\; \Omega$$

e

$$\left| \frac{\phi}{|u_n|^{\alpha_1} + \frac{1}{n}} \right| \leq \left| \frac{\phi}{d(x)^{\alpha_1}} \right| \in L^1(\Omega)$$

De (3-32) segue,

$$|(v_n^+)^{\beta_1}\phi| \leq 2^{\beta_1+1}(|v_n|^{\beta+1} + |\phi|^{\beta+1}) \leq 2^{\beta_1+1}(\overline{g}^{\beta+1} + |\phi|^{\beta+1}) \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), segue que

$$\int_\Omega \frac{\phi}{|u_n|^{\alpha_1} + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega (v_n^+)^{\beta_1}\phi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{\phi}{|u|^{\alpha_1}} dx + \int_\Omega (v^+)^{\beta_1}\phi dx. \tag{3-33}$$

Utilizando as convergências obtidas em (3-32), e argumentando de forma análoga, ao que foi feito acima, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{\psi}{|v_n|^{\alpha_2} + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega (u_n^+)^{\beta_2}\psi dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{\psi}{|v|^{\alpha_2}} dx + \int_\Omega (u^+)^{\beta_2}\psi dx. \tag{3-34}$$

Como já foi feito no capítulo 2, segue a seguinte convergência

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_k \nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla\psi dx.$$

Ou seja (u,v) é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{1}{|u|^{\alpha_1}} + (v^+)^{\beta_1}, \ -\Delta_q v = \frac{1}{|v|^{\alpha_2}} + (u^+)^{\beta_2} \text{ in } \Omega \\ \\ u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-35}$$

A positividade segue de (3-29) e (3-32), $u,\ v > 0$. Portanto (u,v)é solução fraca de (1-2).

$\square$

E finalizamos aqui o Capítulo 3.

CAPÍTULO 4

Sistemas com Termo Não-Homogêneo *Domínio Limitado*

Agora iremos considerar a seguinte família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{a_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}+\varepsilon} + h_1(x,u,v) + f_1(x), \text{ em } \Omega \\ -\Delta_q v = \frac{a_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}+\varepsilon} + h_2(x,u,v) + f_2(x) \text{ em } \Omega \\ u,v > 0 \text{ em } \Omega, \quad u = v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-1}$$

Definição 4.1 *Uma solução fraca de (1-2) é um par de funções* $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *positivas e satisfaz*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)}{u^{\alpha_1} v^{\gamma_1}}\phi dx + \int_\Omega h_1(x,u,v)\phi dx + \int_\Omega f_1(x)\phi dx, \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$
$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)}{u^{\alpha_2} v^{\gamma_2}}\psi dx + \int_\Omega h_2(x,u,v)\psi dx + \int_\Omega f_2(x)\psi dx, \quad \psi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Lema 4.2 *Suponha* (H_0), (H_2), (H_6) *e (1-4), (1-5). Então o problema (4-1) tem solução fraca positiva para cada* $\varepsilon > 0$.

Demonstração: Fixemos duas bases de Schauder $\Sigma = \{w_1, w_2, ...\}$ e $\Sigma = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ...\}$, respectivamente, de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega)$. Logo $(u,v) \in E$ temos,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i w_i = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i \text{ e } v = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \phi_j = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \eta_j w_j, \ \ \xi_i, \eta_j \in I\!R.$$

Defina em $E_{m,k}$ a seguinte norma

$$\|z\|_{m,k} = \sum_{i=1}^{m} |\xi_i| + \sum_{j=1}^{k} |\eta_i| = \|u\|_m + \|v\|_k = |\xi| + |\eta|$$

onde $|.|$ é a norma da soma em $I\!R^m$; onde $s \in I\!N$, temos que $(W_s, \|.\|_s)$ é isomorfo e isométrico a $(I\!R^s, |.|)$. Assim, queremos obter para cada $m,k \in I\!N$ existe $(u_m, v_k) \in E_{m,k}$

e $\varepsilon > 0$ fixado, verificando a seguinte igualdade

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla w_i dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)w_i}{|u_m|^{\alpha_1}|v_m|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega h_1(x,u,v)w_i + \int_\Omega f_1(x)w_i dx, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla \overline{w}_j dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)\overline{w}_j}{|u_m|^{\alpha_2}|v_m|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx + + \int_\Omega h_2(x,u,v)w_j + \int_\Omega f_{2(x)} w_j dx \end{cases} \tag{4-2}$$

para cada $i = 1,...,m$ e $j = 1,...,k$. Defina $F : I\!R^m \times I\!R^k \to I\!R^m \times I\!R^k$ dada por

$$F(\xi,\eta) = (F_1(\xi,\eta),...,F_m(\xi,\eta),G_1(\xi,\eta),...,G_k(\xi,\eta))$$

onde

$$F_i(\xi,\eta) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_i dx - \int_\Omega \frac{a_1(x)w_i}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx - \int_\Omega h_1(x,u,v)w_i dx - \int_\Omega f_1(x)w_i dx$$

e

$$G_j(\xi,\eta) = \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \overline{w}_j dx - \int_\Omega \frac{a_2(x)\overline{w}_j}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx - \int_\Omega h_2(x,u,v)\overline{w}_j dx - \int_\Omega f_2(x)\overline{w}_j dx$$

para cada i=1,...,m e j=1,...,k. E temos identificação $(u,v) \leftrightarrow (\xi,\eta)$. Queremos mostrar

i) Existe $r > 0$ tal que $\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \geq 0$ para todo (ξ,η) satisfazendo $|(\xi,\eta)| = r$,

ii) $F : I\!R^m \times I\!R^k \to I\!R^m \times I\!R^k$ é contínua.

Daí,

$$\begin{aligned} \langle F_i(\xi,\eta),\xi_i\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(\xi_i w_i)dx - \int_\Omega \frac{a_1(x)(\xi_i w_i)}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx - \int_\Omega h_1(x,u,v)(\xi_i w_i)dx \\ &- \int_\Omega f_1(x)(\xi_i w_i)dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle G_i(\xi,\eta),\eta_j\rangle &= \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla(\eta_i \overline{w}_j)dx - \int_\Omega \frac{a_2(x)(\eta_i \overline{w}_j)}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx - \int_\Omega h_2(x,u,v)(\eta_j \overline{w}_j)dx \\ &- \int_\Omega f_2(x)(\eta_j \overline{w}_j)dx, \end{aligned}$$

logo,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle = \sum_{i=1}^m \langle F_i(\xi,\eta),\xi_i\rangle + \sum_{i=1}^m \langle G_i(\xi,\eta),\eta_i\rangle = \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^p - \int_\Omega \frac{a_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_\Omega \frac{a_2(x)v}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx - \int_\Omega h_1(x,u,v)udx - \int_\Omega f_1(x)udx \\
&- \int_\Omega h_2(x,u,v)vdx - \int_\Omega f_2(x)vdx.
\end{aligned}
$$

Pela imersão de contínua de Sobolev (cf. Teorema A.13) e pela Desigualdade de Hölder (cf A.4), segue que

$$\int_\Omega \frac{a_1(x)u}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\|a_1\|_\infty\|u\|_p \leq C_1\|u\|_{1,p},$$

$$\int_\Omega \frac{a_2(x)v}{|u|^{\alpha_2}|v|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\|a_2\|_\infty\|v\|_p \leq C_2\|v\|_{1,q},$$

$$\int_\Omega f_1(x)udx \leq \|f_1\|_\infty\|u\|_p \leq C_3\|u\|_{1,p}$$

e

$$\int_\Omega f_2(x)vdx \leq \|f_2\|_\infty\|v\|_q \leq C_4\|v\|_{1,q}$$

como,

$$
\begin{aligned}
|v||u|^{\beta_1} &\leq (|v|+|u|)^{\beta_1+1} \leq 2^{\beta_1+1}\left(|v|^{\beta_1+1}+|u|^{\beta_1+1}\right), \\
|u||v|^{\sigma_2} &\leq (|v|+|u|)^{\sigma 1+1} \leq 2^{\sigma_2+1}\left(|v|^{\sigma_2+1}+|u|^{\sigma_2+1}\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\int_\Omega |v||u|^{\beta_1}dx \leq \int_\Omega (|v|+|u|)^{\beta_1+1} \leq 2^{\beta_1+1}\int_\Omega \left(|v|^{\beta_1+1}+|u|^{\beta_1+1}\right)dx \leq C_5\left(\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1}+\|v\|_{1,q}^{\beta_1+1}\right),$$

$$\int_\Omega |u||v|^{\sigma_2}dx \leq \int_\Omega (|v|+|u|)^{\sigma 1+1}dx \leq 2^{\sigma_2+1}\int_\Omega \left(|v|^{\sigma_2+1}+|u|^{\sigma_2+1}\right) \leq C_6\left(\|u\|_{1,p}^{\sigma_2+1}+\|v\|_{1,q}^{\sigma_2+1}\right).$$

Donde,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega h_1(x,u,v)udx &\leq \int_\Omega b_{11}(x)|u|^{\sigma_1+1}dx + \int_\Omega b_{12}(x)|u||v|^{\sigma_2}dx \\
&\leq C_7\|u\|_{1,p}^{\sigma_1+1} + C_6\left(\|u\|_{1,p}^{\sigma_2+1}+\|v\|_{1,q}^{\sigma_2+1}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega h_2(x,u,v)vdx &\leq \int_\Omega b_{21}(x)|v||u|^{\beta_1}dx + \int_\Omega b_{22}(x)|v|^{\beta_2+1}dx \\
&\leq C_5\left(\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1}+\|v\|_{1,q}^{\beta_1+1}\right) + C_8\|v\|_{1,q}^{\beta_2+1}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle \geq \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^p - C_1\|u\|_{1,p} - C_2\|v\|_{1,q} - C_5\left(\|u\|_{1,p}^{\beta_1+1}+\|v\|_{1,q}^{\beta_1+1}\right)$$

$$- \quad C_6\left(\|u\|_{1,p}^{\sigma_2+1}+\|v\|_{1,q}^{\sigma_2+1}\right)-C_7\|u\|_{1,p}^{\sigma_1+1}-C_8\|v\|_{1,q}^{\beta_2+1}.$$

Pela equivalência de normas $\|.\|_{1,p}, \|.\|_m$ e $\|.\|_{1,q}, \|.\|_k$, respectivamente,

$$\begin{aligned}\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle &\geq C_9\|u\|_m^p+C_{10}\|v\|_k^q-C_3\|u\|_m-C_4\|v\|_k-C_5\left(\|u\|_m^{\beta_1+1}+\|v\|_k^{\beta_1+1}\right)\\ &- C_6\left(\|u\|_m^{\sigma_2+1}+\|v\|_k^{\sigma_2+1}\right)-C_7\|u\|_m^{\sigma_1+1}-C_8\|v\|_k^{\beta_2+1}\end{aligned}$$

fazendo $\|(u,v)\|_{m,k}=r=\|u\|_m+\|v\|_k$, onde $\|u\|_m=r_1$, $\|v\|_k=r_2$.
Considere,

$$g_1^{\varepsilon}(r_1)=C_5r_1^p-C_3r_1-C_1r_1^{\beta_1+1}-C_2r_1^{\sigma_1+1}-Cr_1^{\sigma_2+1}$$

e

$$g_2^{\varepsilon}(r_2)=C_6r_2^q-C_3r_2-C_1r_2^{\beta_1+1}-C_2r_2^{\beta_2+1}-Cr_2^{\sigma_2+1}.$$

Por hipótese, de (H_6), tem-se

$$\lim_{r\to\infty} g_i^{\varepsilon}(r_i)=+\infty.$$

Logo, existem $\alpha_i>0$ e $\overline{r}_i>0$ tal que $g_i(\overline{r}_i)\geq\alpha$. Portanto,

$$\langle F(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle\geq 0 \text{ se } \|(u,v)\|_{m,k}=r_0=\overline{r}_1+\overline{r}_2.$$

Devido a isometria entre $E_{m,k}$ e $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$, isto implica que

$$\|(u,v)\|_{m,k}=|(\xi,\eta)|=r_0.$$

Mostraremos que F é contínua. Considere

$$u_n=\sum_{i=1}^{m}\xi_{ni}w_i \text{ e } u=\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i$$

$$v_n=\sum_{j=1}^{k}\eta_{nj}\overline{w}_j \text{ e } v=\sum_{j=1}^{k}\eta_j\overline{w}_j$$

onde,

$$\xi_n=(\xi_{1n},\ldots,\xi_{mn})\longrightarrow\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$$

$$\eta_n=(\eta_{1n},\ldots,\eta_{kn})\longrightarrow\xi=(\eta_1,\ldots,\eta_k)$$

logo,

$$(u_n,v_n)\longrightarrow(u,v) \text{ em } E_{m,k}. \tag{4-3}$$

Como $E_{m,k}$ tem dimensão finita, as normas $\|.\|$ e $\|.\|_m$ são equivalentes em $E_{m,k}$. Donde;

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\| \longrightarrow 0 \text{ em } E.$$

Da convergência acima e pelo teorema (A.3) temos que, a menos de uma subsequência,

$$\begin{cases} \|\nabla u_n - \nabla u\|_p \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega), \\ \nabla u_{n_k}(x) \longrightarrow \nabla u(x) \text{ q.t.p } em \ \Omega, \\ |\nabla u_{n_k}| \leq g \text{ onde } g \in L^p(\Omega), \end{cases} \tag{4-4}$$

e da desigualdade de Poincaré (cf. Teorema A.8) e pelo teorema (A.3)

$$\begin{cases} \|u_n - u\|_p \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega), \\ \|v_n - v\|_q \longrightarrow 0 \text{ em } L^p(\Omega), \\ u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ v_{n_k}(x) \longrightarrow v(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |u_{n_k}| \leq \bar{g} \text{ onde } \bar{g} \in L^p(\Omega). \end{cases} \tag{4-5}$$

Segue que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i \longrightarrow |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_i \text{ q.t.p em } \Omega,$$

$$||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i| \leq g^{p-1}|\nabla w_i|,$$

como

$$g \in L^p(\Omega) \Rightarrow |g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$$

e

$$\nabla w_i \in L^p(\Omega) \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1.$$

Pela desigualdade de Hölder (cf. Teorema A.4), obtemos que $|g|^{p-1}|w_i| \in L^1(\Omega)$. Portanto utilizando o Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w_i dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_i dx. \tag{4-6}$$

De (4-5) temos

$$\frac{a_1(x)w_i}{|u_n|^{\alpha_1}|v_n|^{\gamma_1} + \varepsilon} \longrightarrow \frac{a_1(x)w_i}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \varepsilon} \text{ q.t.p } \Omega,$$

$$\left| \frac{a_1(x)w_i}{|u_n|^{\alpha_1}|v_n|^{\gamma_1} + \varepsilon} \right| \leq \frac{a_1(x)w_i}{\varepsilon} \in L^p(\Omega),$$

h_1 sendo Caracthéodory, temos

$$h_1(x, u_n, v_n)w_i \longrightarrow h_1(x, u, v)w_i \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Por hipótese $1 < p - \sigma_i$, isto implica que

$$N - p < N(p - \sigma_i) \Longrightarrow \frac{p}{p - \sigma_i} < \frac{Np}{N - p}$$

e pelas Imersões compactas (cf. Teorema A.14) temos que

$$w_i \in L^s(\Omega), \;\; 1 \leq s < \frac{Np}{N - p}$$

logo,

$$w_i \in L^{\frac{p}{p-\sigma_i}}(\Omega)$$

como,

$$\bar{g}^{\beta_1} \in L^{\frac{p}{\beta_1}}(\Omega) \;\text{ e }\; \frac{\beta_1}{p} + \frac{p - \beta_1}{p} = 1. \tag{4-7}$$

Pela desigualdade de Holder (cf. Teorema A.4),

$$|u_n|^{\sigma_1} w_i| \leq |\bar{g}_1^{\beta}||w_i| \in L^1(\Omega),$$

$$|v_n|^{\sigma_2} w_i| \leq |\bar{g}_2^{\beta}||w_i| \in L^1(\Omega),$$

pela condição de crescimento da h_1 e das desigualdades acima,

$$|h_1(x, u_n, v_n) w_i| \leq b_{11}(x)|\bar{g}_1^{\beta}||w_i| + b_{12}(x)|\bar{g}_2^{\beta}||w_i| \in L^1(\Omega).$$

Donde, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2)

$$\int_\Omega \frac{a_1(x)(\xi_i w_i)}{|u_n|^{\alpha_1}|v_n|^{\gamma_1} + \varepsilon} dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{a_1(x)(\xi_i w_i)}{|u|^{\alpha_1}|v|^{\gamma_1} + \varepsilon} dx \tag{4-8}$$

e

$$\int_\Omega h_1(x, u_n, v_n) w_i dx \longrightarrow \int_\Omega h_1(x, u, v) w_i dx. \tag{4-9}$$

De (4-6), (4-8) e (4-9), obtemos

$$F_i(\xi_{n_k}, \eta_{n_k}) \longrightarrow F_i(\xi, \eta) \;\; \text{quando} \;\; (\xi_n, \eta_n) \longrightarrow (\xi, \eta).$$

Assim as F_i são contínuas. De forma análoga, podemos obter que as G_i são contínuas. Implicando que F é contínua.

Portanto pela Lema fundamental (cf. Teorema C.10) , existe $(\xi_m, \eta_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ com $|(\xi_m, \eta_k)| \leq r_0$ tal que $F(\xi_m, \eta_k) = 0$. Pela identificação isométrica, $E_m \times E_k$ entre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, temos que existe $(u_m, v_k) \in E_m \times E_k$ tal que

$$\|(u_m, v_k)\|_{m,k} \leq r_0, \forall m, k \in \mathbb{N} \text{ e } F_i(\xi_m, \eta_k) = G_i(\xi_m, \eta_k) = 0$$

implicando que, $\forall\ i = 1,...,m$ e $j = 1,...,k$,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla w_i dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)w_i}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega h_1(x,u_m,v_k)w_i dx + \int_\Omega f_1(x)w_i dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla \overline{w} j dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)\overline{w} j}{|u_m|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx + \int_\Omega h_2(x,u_m,v_k)\overline{w}_j dx + \int_\Omega f_2(x)\overline{w}_j dx.$$

Multiplicando cada F_i e G_i por escalares α_i e γ_i, respectivamente, e somando-as, obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)\phi}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega h_1(x,u_m,v_k)\phi dx + \int_\Omega f_1(x)\phi dx, \quad \phi \in W_m. \tag{4-10}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla \psi dx = \int_\Omega \frac{a_2(x)\psi}{|u_m|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2}+\varepsilon}dx + \int_\Omega h_2(x,u_m,v_k)\psi dx + \int_\Omega f_2(x)\psi dx, \quad \psi \in W_k. \tag{4-11}$$

fazendo $\phi = u_m$ em (4-10), combinando as desigualdades de Hölder, de Poincaré (cf. Teoremas A.4 e A.8) e a condição de crescimento (H_4) temos que,

$$\begin{aligned}
\|u_m\|^p &= \int_\Omega |\nabla u_m|^p dx = \int_\Omega \frac{a_1(x)u_m}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}dx + \int_\Omega h_1(x,u_m,v_k)u_m + \int_\Omega f_1(x)u_m \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega a_1(x)u_m dx + \int_\Omega b_{11}(x)|u_m|^{\sigma_1+1}dx + \int_\Omega b_{12}(x)|u_m||v_k|^{\sigma_2}dx + \int_\Omega f_1(x)u_m \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\|a_1\|_\infty \|u_m\|_p + C_1\|b_{11}\|_\infty \|u_m\|_{\sigma_1+1}^{\sigma_1+1} + C_2\|b_{12}\|_\infty \left(\|u_m\|_p^{\sigma_2+1} + \|v_m\|_q^{\sigma_2+1}\right) + \|f_1\|_\infty \|u_m\|_p \\
&\leq C_2\|u_m\|_{1,p} + C_1\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_1+1} + C_3\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_2+1} + C_4\|v_m\|_{1,q}^{\sigma_2+1}
\end{aligned}$$

então,

$$\|u_m\|_{1,p}^p \leq C_2\|u_m\|_{1,p} + C_1\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_1+1} + C_3\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_2+1} + C_4\|v_m\|_{1,q}^{\sigma_2+1}.$$

De forma análoga,

$$\|v_k\|_{1,q}^q \leq C_5\|v_k\|_{1,q} + C_6\|v_k\|_{1,q}^{\beta_1+1} + C_7\|v_k\|_{1,q}^{\beta_2+1} + C_8\|u_m\|_{1,p}^{\beta_2+1}.$$

(u_m) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, (v_k) é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Assim, se supormos que (u_m) é ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ teremos que (v_k) será ilimitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Então podemos supor sem perda de generalidade que $\|u_m\|_{1,q}, \|v_k\|_{1,q} > 1$

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{1,p}^p + \|v_k\|_{1,q}^q &\leq C\left(\|u_m\|_{1,p} + \|u_m\|_{1,p}^{\sigma_1+1} + \|u_m\|_{1,p}^{\sigma_2+1} + \|u_m\|_{1,p}^{\beta_2+1}\right) \\
&+ C\left(\|v_k\|_{1,q} + \|v_k\|_{1,q}^{\beta_1+1} + \|v_k\|_{1,q}^{\beta_2+1} + \|v_m\|_{1,q}^{\sigma_2+1}\right),
\end{aligned} \tag{4-12}$$

como $1<\sigma_i+1<p,q$ e $1<\beta_i+1<p,q$ temos que

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}}{\|u_m\|_{1,p}^p}\longrightarrow 0 \quad \frac{\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p}\longrightarrow 0 \quad \frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p}\longrightarrow 0, \quad desde \ \|u_m\|_{1,p}\longrightarrow\infty \tag{4-13}$$

de forma análoga,

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}}{\|u_k\|_{1,k}^q}\longrightarrow 0 \quad \frac{\|v_k\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0 \quad \frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0, \quad desde \ \|v_k\|_{1,q}\longrightarrow\infty \tag{4-14}$$

e

$$\|u_m\|_{1,p}^p<\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q \Longrightarrow \frac{1}{\|u_m\|_{1,p}}>\frac{1}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}.$$

Assim,

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}<\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}}$$

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}<\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}}.$$

De (4-13) tem-se,

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0, \quad quando \ \|u_m\|_{1,p}\longrightarrow\infty \tag{4-15}$$

e

$$\frac{\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0, \quad quando \ \|u_m\|_{1,p}\longrightarrow\infty \tag{4-16}$$

analogamente,

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}<\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|v_k\|_{1,q}^q}$$

e

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}<\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|v_k\|_{1,q}^q}$$

De (4-14) obtemos

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0, \quad quando \ \|v_k\|_{1,q}\longrightarrow\infty \tag{4-17}$$

$$\frac{\|v_k\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|u_m\|_{1,p}^p+\|v_k\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0, \quad quando \ \|v_k\|_{1,q}\longrightarrow\infty \tag{4-18}$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
1 &< C\frac{\left(\|u_m\|_{1,p}+\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_1+1}+\|u_m\|_{1,p}^{\sigma_2+1}+\|u_m\|_{1,p}^{\beta_2+1}\right)}{\|u_m\|_{1,p}^{p}+\|v_k\|_{1,q}^{q}} \\
&+ \frac{\|v_k\|_{1,q}+\|v_k\|_{1,q}^{\beta_1+1}+\|v_k\|_{1,q}^{\beta_2+1}+\|v_m\|_{1,q}^{\sigma_2+1}}{\|u_m\|_{1,p}^{p}+\|v_k\|_{1,q}^{q}}. \qquad (4\text{-}19)
\end{aligned}
$$

Logo, utilizando o que obtemos em (4-15), (4-16), (4-17), (4-18) e fazendo $\|u_m\|_{1,p},\|v_k\|_{1,q} \longrightarrow \infty$ em (4-19), chegamos a uma contradição.

Portanto, (u_m) e (v_k) são limitadas, respectivamente, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,q}(\Omega)$. Sendo estes espaços reflexivos, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_m \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$v_k \rightharpoonup v_\varepsilon \text{ em } W_0^{1,q}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev (cf. Teorema A.14) e pelo Teorema (A.3) obtemos,

$$
\begin{cases}
u_m \to u_\varepsilon \text{ e } v_k \to v_\varepsilon \text{ em } L^p(\Omega),\ L^q(\Omega), \\
u_m(x) \longrightarrow u_\varepsilon(x) \ \ q.t.p \ \text{ em } \ \Omega, \\
v_k(x) \longrightarrow v_\varepsilon(x) \ \ q.t.p \ \text{ em } \ \Omega, \\
|u_m| \leq \overline{g}_1, \ \ onde \ \ \overline{g}_1 \in L^s(\Omega) \ 1 \leq s < \frac{Np}{N-p}, \\
|v_k| \leq \overline{g}_2, \ \ onde \ \ \overline{g}_2 \in L^{\overline{s}}(\Omega) \ 1 \leq \overline{s} < \frac{Nq}{N-q}.
\end{cases} \qquad (4\text{-}20)
$$

Observemos que, pelas convergências acimas

$$\frac{a_1(x)\phi}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon} \longrightarrow \frac{a_1(x)\phi}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}|v_\varepsilon|^{\gamma_1}+\varepsilon} \ \text{ q.t.p } \ \Omega,$$

$$f(x,u_m,v_k)\phi \longrightarrow f(x,u_\varepsilon,v_\varepsilon)\phi \ \text{ q.t.p } \ \Omega$$

e

$$\left|\frac{a_1(x)\phi}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}|a_1(x)\phi| \in L^1(\Omega)$$

como,

$$\phi \in L^{\frac{p}{p-\sigma_i}}(\Omega)$$

e

$$\bar{g}^{\sigma_1} \in L^{\frac{p}{\sigma_1}}(\Omega) \ \text{ e } \ \frac{\sigma_1}{p}+\frac{p-\sigma_1}{p}=1. \qquad (4\text{-}21)$$

Pela desigualdade de Hölder (cf. Teorema A.4),

$$|u_m|^{\sigma_1}\phi| \leq |\bar{g}_1^{\sigma_1}||\phi| \in L^1(\Omega),$$

$$|v_n|^{\sigma_2}\phi| \leq |\bar{g}_2^{\beta}||\phi| \in L^1(\Omega).$$

De (4-20) e (1-5) segue,

$$|h_1(x,u_m,v_k)\phi| \leq b_{11}(x)|\bar{g}_1^{\beta}||\phi| + b_{12}(x)|\bar{g}_2^{\beta}||\phi| \in L^1(\Omega)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), segue que

$$\int_\Omega \left(\frac{a_1(x)}{|u_m|^{\alpha_1}|v_k|^{\gamma_1}+\varepsilon} + h_1(x,u_m,v_k) + f_1(x) \right)\phi \longrightarrow \int_\Omega \left(\frac{a_1}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}|v_\varepsilon|^{\gamma_1}+\varepsilon} + h_1(x,u_\varepsilon,v_\varepsilon) + f_1(x) \right)\phi \tag{4-22}$$

Utilizando as convergências obtidas em (4-20), e argumentando de forma análoga, ao que foi feito acima, obtemos que

$$\int_\Omega \left(\frac{a_2(x)}{|u_m|^{\alpha_2}|v_k|^{\gamma_2}+\varepsilon} + h_2(x,u_m,v_k) + f_2(x) \right)\psi \longrightarrow \int_\Omega \left(\frac{a_2(x)}{|u_\varepsilon|^{\alpha_2}|v_\varepsilon|^{\gamma_2}+\varepsilon} + h_2(x,u_\varepsilon,v_\varepsilon) + f_2(x) \right)\psi \tag{4-23}$$

Como já estamos ambientados, do capítulo 2, com a seguinte convergência

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla\phi dx$$

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^{q-2}\nabla v_k \nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^{q-2}\nabla v_\varepsilon \nabla dx$$

temos que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = \frac{a_1(x)}{|u_\varepsilon|^{\alpha_1}|v_\varepsilon|^{\gamma_1}+\varepsilon} + h_1(x,u_\varepsilon,v_\varepsilon) + f_1(x) & \text{em } \Omega \\ -\Delta_q v_\varepsilon = \frac{a_2(x)}{|u_\varepsilon|^{\alpha_2}|v_\varepsilon|^{\gamma_2}+\varepsilon} + h_2(x,u_\varepsilon,v_\varepsilon) + f_2(x) & \text{em } \Omega \\ u_\varepsilon = v_\varepsilon = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-24}$$

Considerando $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $z \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ soluções únicas positivas dos seguintes problemas (cf. Teorema B.6 e a observação B.7 apêndice).

$$-\Delta_p w = f_1 \qquad em\ \Omega, \quad w = 0 \quad sobre\ \partial\Omega$$

e

$$-\Delta_q z = f_2 \qquad em\ \Omega, \quad z = 0 \quad sobre\ \partial\Omega.$$

Como,

$$-\Delta_p u_\varepsilon \geq f_1 \qquad e \qquad -\Delta_q v_\varepsilon \geq f_2$$

Assim, pelo Teorema da Comparação Fraca (cf. Teorema C.7)

$$u_n(x) \geq w(x) > 0 \qquad e \qquad v_n(x) \geq z(x) > 0 \qquad q.t.p\ em\ \Omega \tag{4-25}$$

portanto $u_\varepsilon, v_\varepsilon > 0$. E (u,v) é solução fraca de (4-1). $\square$

Observação 4.3 *Agora faremos* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *para obter a solução de (1-3). Da mesma forma que já fizemos anteriormente denotaremos,* $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, *para cada* $n \in I\!N$, *logo* $(u_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) = (u_n, v_n)$, *então temos das solução obtidas do Lema 4.2 que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \frac{a_1(x)}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} + h_1(x,u_n,v_n) + f_1(x) \ \ em\ \Omega \\ -\Delta_q v_n = \frac{a_2(x)}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2} + \frac{1}{n}} + h_2(x,u_n,v_n) + f_2(x) \ \ em\ \Omega \\ u_n, v_n > 0, \qquad em \quad \Omega \qquad e \qquad u_n = v_n = 0 \ \ sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-26}$$

pelo Lema B.3 existem constantes $C, K > 0$ *tais que*

$$Cd(x) \leq w(x) \qquad e \qquad Kd(x) \leq z(x) \qquad em\ \Omega. \tag{4-27}$$

De (4-25), (4-27) e (H_4),

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1}} &\leq \frac{a_1}{w^{\alpha_1} z^{\gamma_1}} \leq \frac{a_1}{d(x)^{\alpha_1+\gamma_1}} \in L^{p'}(\Omega), \\ \frac{a_2}{u_n^{\alpha_2} v_n^{\gamma_2}} &\leq \frac{a_2}{w^{\alpha_2} z^{\gamma_2}} \leq \frac{a_2}{d(x)^{\alpha_2+\gamma_2}} \in L^{q'}(\Omega). \end{aligned} \tag{4-28}$$

Demonstração do Teorema 1.3: $\phi = u_n$, combinando as desigualdades de Hölder e de Poincaré (cf. Teoremas A.4 e A.8) com (4-28) temos que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx &= \int_\Omega \frac{a_1(x) u_n}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1} + \frac{1}{n}} dx + \int_\Omega h_1(x,u_n,v_n) u_n dx + \int_\Omega f_1(x) u_n dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{a_1}{u_n^{\alpha_1} v_n^{\gamma_1}} u_n dx + \int_\Omega h_1(x,u_n,v_n) u_n + \int_\Omega f_1(x) u_n dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{a_1}{d(x)^{\alpha_1+\gamma_1}} u_n dx + \int_\Omega b_{11}(x) |u_n|^{\sigma_1+1} dx \\ &+ \int_\Omega b_{12}(x) |u_n| |v_n|^{\sigma_2} dx + \int_\Omega f_1(x) u_n dx \\ &\leq \left\| \frac{a_1}{d(x)^{\alpha_1+\gamma_1}} \right\|_{p'} \|u_n\|_p + C_1 \|b_{11}\|_\infty \|u_n\|_{\sigma_1+1}^{\sigma_1+1} \\ &+ C_2 \|b_{12}\|_\infty \left(\|u_n\|_p^{\sigma_2+1} + \|v_n\|_q^{\sigma_2+1} \right) + \|f_1\|_\infty \|u_n\|_p \\ &\leq C_3 \|u_n\|_{1,p} + C_4 \|u_n\|_{1,p}^{\sigma_1+1} + C_5 \|u_n\|_{1,p}^{\sigma_2+1} + C_6 \|v_n\|_{1,q}^{\sigma_2+1} \end{aligned}$$

então,

$$\|u_n\|^p \leq C_3 \|u_n\|_{1,p} + C_4 \|u_n\|_{1,p}^{\sigma_1+1} + C_5 \|u_n\|_{1,p}^{\sigma_2+1} + C_6 \|v_n\|_{1,q}^{\sigma_2+1}$$

De forma análoga,

$$\|v_n\|_{1,q}^q \leq C_5\|v_n\|_{1,q} + C_6\|v_n\|_{1,q}^{\beta_1+1} + C_7\|v_n\|_{1,q}^{\beta_2+1} + C_8\|u_n\|_{1,p}^{\beta_2+1}$$

Assim, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, (v_n) é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Assim, se supormos que (u_n) é ilimitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ teremos que (v_n) será ilimitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Então podemos supor sem perda de generalidade que $\|u_n\|_{1,q}, \|v_n\|_{1,q} > 1$

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q &\leq C\left(\|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,p}^{\sigma_1+1} + \|u_n\|_{1,p}^{\sigma_2+1} + \|u_n\|_{1,p}^{\beta_2+1}\right) \\ &+ C\left(\|v_n\|_{1,q} + \|v_n\|_{1,q}^{\beta_1+1} + \|v_n\|_{1,q}^{\beta_2+1} + \|v_n\|_{1,q}^{\sigma_2+1}\right) \end{aligned} \tag{4-29}$$

Como de (H_6) ,temos que

$$\frac{\|u_n\|_{1,p}}{\|u_n\|_{1,p}^p} \longrightarrow 0 \quad \frac{\|u_n\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p} \longrightarrow 0 \quad \frac{\|u_n\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p} \longrightarrow 0, \quad desde \ \|u_n\|_{1,p} \longrightarrow \infty \tag{4-30}$$

de forma análoga;

$$\frac{\|v_n\|_{1,q}}{\|v_n\|_{1,q}^q} \longrightarrow 0 \quad \frac{\|v_n\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|v_n\|_{1,q}^q} \longrightarrow 0 \quad \frac{\|v_n\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|v_n\|_{1,q}^q} \longrightarrow 0, \quad desde \ \|v_n\|_{1,q} \longrightarrow \infty \tag{4-31}$$

e;

$$\|u_n\|_{1,p}^p < \|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q \Longrightarrow \frac{1}{\|u_n\|_{1,p}} > \frac{1}{\|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q}.$$

Assim,

$$\frac{\|u_n\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q} < \frac{\|u_n\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}}$$

e

$$\frac{\|u_n\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q} < \frac{\|u_n\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}}.$$

De (4-30) tem-se,

$$\frac{\|u_n\|_{1,p}^{\beta_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q} \longrightarrow 0, \quad quando \ \|u_n\|_{1,p} \longrightarrow \infty \tag{4-32}$$

$$\frac{\|u_n\|_{1,p}^{\sigma_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q} \longrightarrow 0, \quad quando \ \|u_n\|_{1,p} \longrightarrow \infty \tag{4-33}$$

analogamente,

$$\frac{\|v_n\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p + \|v_n\|_{1,q}^q} < \frac{\|v_n\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|v_n\|_{1,q}^q}$$

$$\frac{\|v_n\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p+\|v_n\|_{1,q}^q}<\frac{\|v_n\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|v_n\|_{1,q}^q}.$$

De (4-31) obtemos

$$\frac{\|v_n\|_{1,q}^{\beta_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p+\|v_n\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0,\quad quando\ \|v_n\|_{1,q}\longrightarrow\infty \tag{4-34}$$

$$\frac{\|v_n\|_{1,q}^{\sigma_i+1}}{\|u_n\|_{1,p}^p+\|v_n\|_{1,q}^q}\longrightarrow 0,\quad quando\ \|v_n\|_{1,q}\longrightarrow\infty \tag{4-35}$$

logo, utilizando o que obtemos em (4-32),(4-33),(4-34), (4-35) e fazendo $\|u_n\|_{1,p},\|v_n\|_{1,q}\longrightarrow\infty$ em (4-19),chegamos a uma contradição.

Portanto, (u_n) e (v_n) são limitadas, respectivamente, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,q}(\Omega)$. Sendo estes espaços reflexivos, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_n\rightharpoonup u\ \text{ em }\ W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$v_n\rightharpoonup v\ \text{ em }\ W_0^{1,q}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev (cf. Teorema A.14) e pelo Teorema (A.3) obtemos,

$$\begin{cases} u_n\to u \text{ e } v_n\to v \text{ em } L^p(\Omega),L^q(\Omega),\\ u_n(x)\longrightarrow u(x)\ \ q.t.p\ \text{ em }\ \Omega,\\ v_n(x)\longrightarrow v(x)\ \ q.t.p\ \text{ em }\ \Omega,\\ |u_n|\le\overline{g}_1,\ \ onde\ \ \overline{g}_1\in L^s(\Omega)\ 1\le s<\frac{Np}{N-p},\\ |v_n|\le\overline{g}_2,\ \ onde\ \ \overline{g}_2\in L^{\overline{s}}(\Omega)\ 1\le\overline{s}<\frac{Nq}{N-q}. \end{cases} \tag{4-36}$$

Observemos que, pelas convergências acimas

$$\frac{h_1(x)\phi}{u_n^{\alpha_1}v_n^{\gamma_1}+\frac{1}{n}}\longrightarrow\frac{h_1(x)\phi}{u^{\alpha_1}v^{\gamma_1}+\frac{1}{n}}\ \text{ q.t.p }\ \Omega,$$

$$f(x,u_n,v_n)\phi\longrightarrow f(x,u,v)\phi\ \text{ q.t.p }\ \Omega$$

e

$$\left|\frac{h_1\phi}{u_n^{\alpha_1}v_n^{\gamma_1}+\frac{1}{n}}\right|\le\frac{1}{\varepsilon}|h_1\phi|\in L^1(\Omega).$$

Como,

$$\phi\in L^{\frac{p}{p-\sigma_i}}(\Omega)$$

e

$$\overline{g}^{\beta_1}\in L^{\frac{p}{\beta_1}}(\Omega)\ \text{ e }\ \frac{\sigma_1}{p}+\frac{p-\sigma_1}{p}=1. \tag{4-37}$$

Pela desigualdade de Hölder (cf. Teorema A.4),

$$|u_n|^{\sigma_1}\phi| \leq |\bar{g}_1^{\beta}||\phi| \in L^1(\Omega),$$

$$|v_n|^{\sigma_2}\phi| \leq |\bar{g}_2^{\beta}||\phi| \in L^1(\Omega).$$

De (4-20) segue,

$$|f(x,u_n,v_n)\phi| \leq a_{11}(x)|\bar{g}_1^{\beta}||\phi| + a_{12}(x)|\bar{g}_2^{\beta}||\phi| \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (cf. Teorema A.2), segue que

$$\int_\Omega \frac{h_1\phi}{u_n^{\alpha_1}v_n^{\gamma_1}+\varepsilon} + \int_\Omega f(x,u_n,v_n)\phi + \int_\Omega f_1(x)\phi \longrightarrow \int_\Omega \frac{h_1\phi}{u^{\alpha_1}v^{\gamma_1}} + \int_\Omega f(x,u,v)\phi + \int_\Omega f_1(x)\phi \tag{4-38}$$

Utilizando as convergências obtidas em (4-36), e argumentando de forma análoga, ao que foi feito acima, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{h_2\psi}{u_n^{\alpha_2}v_n^{\gamma_2}+\frac{1}{n}} + \int_\Omega g(x,u_n,v_n)\psi + \int_\Omega f_2(x)\psi \longrightarrow \int_\Omega \frac{h_2\psi}{u^{\alpha_2}v^{\gamma_2}} + \int_\Omega g(x,u,v)\psi + \int_\Omega f_2(x)\psi \tag{4-39}$$

Do que já foi feito no Capítulo 2 temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n \nabla\psi dx, \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla\psi dx.$$

Temos que (u,v) é solução fraca de (1-3).

A positividade de (u,v) segue de (4-25), (4-36). E Portanto (u,v) é solução do problema (1-3). □

Finalizamos aqui o Capítulo 4.

CAPÍTULO 5

Sistemas com Termo Côncavo-Convexo *Domínio Não Limitado*

Nos artigos [11, 12] os autores estudaram o problema $(*)_\lambda$ para uma equação e utilizaram os mesmos métodos que iremos apresentar a seguir. Antes de demonstrar o Teorema principal do Capítulo vamos enunciar e demonstrar resultados que iram nos auxiliar na demonstração do Teorema 1.4.

Definição 5.1 *Uma solução fraca de $(*)_\lambda$ é um par de funções $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ positivas que satisfaz*

$$\int_{I\!R^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + V(x)u^{p-1}\phi dx = \int_{I\!R^N} \lambda u^{\alpha_1}\phi + v^{\beta_1}\phi dx \quad \phi \in C_0^\infty(I\!R^N),$$
$$\int_{I\!R^N} |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \psi + V(x)v^{q-1}\psi dx = \int_{I\!R^N} \lambda v^{\alpha_2}\psi + u^{\beta_2}\psi dx \quad \psi \in C_0^\infty(I\!R^N).$$

Lema 5.2 *Seja $\Omega \subset I\!R^N$ domínio limitado. Se $V : \Omega \to I\!R$ e $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ não-negativas tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla \phi + V(x)u_1^{p-1}\phi dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla \phi + V(x)u_2^{p-1}\phi dx$$

Então, $u_1 \leq u_2$ em Ω.

Demonstração: Seja $\phi = (u_1 - u_2)^+$

Por hipótese teremos,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2)^+ + V(x)(u_1^{p-1} - u_2^{p-1})(u_1-u_2)^+ dx \leq 0$$

Segue que,

$$\int_{u_1>u_2} (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2) + V(x)(u_1^{p-1} - u_2^{p-1})(u_1-u_2) dx \leq 0$$

Daí, pela desigualdade acima e pelo teorema (A.15)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{u_1>u_2} (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \\ &\leq \int_{u_1>u_2} (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2) + V(x)(u_1^{p-1}-u_2^{p-1})(u_1-u_2)dx \leq 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{u_1>u_2} (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2)dx = 0. \tag{5-1}$$

Definamos, $\Omega_0 = \{x \in \Omega \ / u_1(x) > u_2(x)\}$, assim como já definimos o operador $-\Delta_p u$, pelo Teorema B.4 este é estritamente monótono e de (5-1) tem-se

$$\langle -\Delta_p u_1 - (-\Delta_p u_2), u_1 - u_2 \rangle = 0, \ \text{ em } \ \Omega_0$$

Assim, temos que em Ω_0 é tal que $\nabla u_1 = \nabla u_2$.

Afirmamos que $\Omega_0 = \emptyset$, pois se supormos ao contrário, temos que

$$\nabla(u_1-u_2)^+ = 0, \ \text{ em } \ \Omega, \tag{5-2}$$

pois,

$$\nabla(u_1-u_2)^+ = 0, \ \text{ em } \ \Omega_0^c, \tag{5-3}$$

logo, como Ω é um domínio limitado

$$(u_1-u_2)^+ = c, \ \text{ em } \ \Omega \tag{5-4}$$

onde c um constante. Como $(u_1-u_2)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que $c = 0$, contrariando o fato de Ω_0 ser não-vazio. Portanto, $u_1 \leq u_2, \ \text{ em } \ \Omega$. □

Referimos o leitor à [19] para resultados relacionados de Princípio de Máximo e Comparação.

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = f(x,u,v) & em \quad \Omega, \\ -\Delta_q v + V(x)v^{q-1} = g(x,u,v) & em \quad \Omega, \\ u,v \geq 0 \quad \text{em } \Omega & u,v = 0 \quad em \quad \partial.\Omega \end{cases} \tag{5-5}$$

Onde ,

(F_0) $\quad f(x,\cdot,v), \ f(x,u,\cdot), \ g(x,\cdot,v), \ g(x,u,\cdot)$ são não-decrescentes,

(F_1) $\quad f,g$ são Caracthéodory,

(F_2) $\quad f(.,u(.),v(.)),g(.,u(.),v(.)) \in L^\infty(\Omega)$, quando $u,v \in L^\infty(\Omega)$,

Definiremos a seguir o que entendemos por sub e super-solução do problema (5-5).

Definição 5.3 *Um par* $(\underline{u},\underline{v}),(\overline{u},\overline{v}) \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *de funções não-negativas diz-se que é uma sub e super-solução de (5-5), se satisfaz respectivamente*

$$\begin{cases} -\Delta_p\overline{u}+V(x)\overline{u}^{p-1} \geq f(x,\overline{u},v), & v\in[\underline{v},\overline{v}],\\ -\Delta_q\underline{v}+V(x)\underline{v}^{q-1} \geq g(x,u,\overline{v}), & u\in[\underline{u},\overline{u}],\\ -\Delta_p\underline{u}+V(x)\underline{u}^{p-1} \leq f(x,\underline{u},v), & v\in[\underline{v},\overline{v}],\\ -\Delta_q\underline{v}+V(x)\overline{v}^{q-1} \leq g(x,u,\underline{v}), & u\in[\underline{u},\overline{u}]. \end{cases}$$

Teorema 5.4 *Seja* $\Omega\subset I\!R^N$ *domínio limitado. Suponhamos* (F_0), (F_1), (F_2), (V_0), (V_1) *e que existam* $(\underline{u},\underline{v})$, $(\overline{u},\overline{v})$ *sub e supersolução de (5-5), respectivamente, onde* $\underline{u}\leq\overline{u}$ *e* $\underline{v}\leq\overline{v}$. *Então (5-5) tem uma solução fraca* (u,v) *tal que*

$$\underline{u}\leq u\leq\overline{u} \qquad \underline{v}\leq v\leq\overline{v}.$$

Demonstração: Defina,

$$u_0=\underline{u} \quad e \quad v_0=\underline{v},$$

como, $u_0,v_0\in C(\overline{\Omega})$, tem-se que $f(x,u_0,v_0),g(x,u_0,v_0)\in L^\infty(\Omega)$.

Considere o seguinte problema

$$(1)_u \qquad \begin{cases} -\Delta_p u+V(x)u^{p-1}=f(x,u_0,v_0) & em \quad \Omega\\ u\geq 0 \quad \text{em } \Omega, \qquad u=0 \quad em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema D.4 $(1)_u$ tem uma única solução fraca $u_1\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí, pelo Princípio da Comparação fraco (cf. lema 5.2), (F_0) e usando a definição de sub e super-solução fraca

$$-\Delta_p u_1+V(x)u_1^{p-1}=f(x,u_0,v_0)=f(x,\underline{u},\underline{v})\geq -\Delta_p\underline{u}+V(x)\underline{u}^{p-1}.$$

Então,

$$\underline{u}\leq u_1 \quad \text{em} \quad \Omega$$

por outro lado,

$$-\Delta_p u_1+V(x)u_1^{p-1}=f(x,u_0,v_0)\leq f(x,\overline{u},v_0)\leq -\Delta_p\overline{u}+V(x)\overline{u}^{p-1},$$

portanto,

$$\underline{u}\leq u_1\leq\overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Como $\overline{u} \in L^\infty(\Omega)$, então $u_1 \in L^\infty(\Omega)$. Seja, $\overline{f}(x,u_0,v_0) = f(x,u_0,v_0) - V(x)u_1^{p-1}$, sendo $\overline{f} \in L^\infty(\Omega)$, pelo Teorema de regularidade devido à Lieberman (cf. Teorema B.1), $u_1 \in C^1(\overline{\Omega})$.

De forma análoga, considerando o problema

$$(1)_v \qquad \begin{cases} -\Delta_q v + V(x)v^{q-1} = g(x,u_0,v_0) & em \quad \Omega \\ v \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad v = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo Lema D.4 $(1)_v$ tem uma única solução fraca $v_1 \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Daí, pelo Princípio da Comparação fraco (c.f lema 5.2), (F_0) e usando a definição de sub e supersolução fraca

$$-\Delta_q v_1 + V(x)v_1^{q-1} = g(x,u_0,v_0) = g(x,\underline{u},\underline{v}) \geq -\Delta_q \underline{v} + V(x)\underline{v}^{q-1}$$

então,

$$\underline{v} \leq v_1 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Por outro lado,

$$-\Delta_q v_1 + V(x)v_1^{q-1} = g(x,u_0,v_0) \leq g(x,\overline{u},v_0) \leq -\Delta_q \overline{v} + V(x)\overline{v}^{q-1}$$

portanto,

$$\underline{v} \leq v_1 \leq \overline{v} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Como $\overline{v} \in L^\infty(\Omega)$, então $v_1 \in L^\infty(\Omega)$. Seja, $\overline{g}(x,u_0,v_0) = g(x,u_0,v_0) - V(x)v_1^{p-1}$, sendo $\overline{g} \in L^\infty(\Omega)$, pelo Teorema de regularidade devido a Lieberman (cf. Teorema B.1), $v_1 \in C^1(\overline{\Omega})$.

Agora, considere o problema

$$(2)_u \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = f(x,u_1,v_1) & em \quad \Omega \\ u \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$(2)_u$ tem uma única solução fraca $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí, pelo Princípio da Comparação fraco (c.f lema 5.2), (F_0) e usando a definição de sub e supersolução fraca

$$-\Delta_p u_2 + V(x)u_2^{p-1} = f(x,u_1,v_1) \geq f(x,u_0,v_1) \geq f(x,u_0,v_0) \geq -\Delta_p u_1 + V(x)u_1^{p-1}$$

então,

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Por outro lado,

$$-\Delta_p u_2 + V(x)u_2^{p-1} = f(x,u_1,v_1) \leq f(x,\overline{u},v_1) \leq -\Delta_p \overline{u} + V(x)\overline{u}^{p-1}$$

portanto,

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Argumentando da mesma forma, já feito, temos que $u_2 \in C^1(\overline{\Omega})$.

De forma análoga,

$$(2)_v \qquad \begin{cases} -\Delta_q v + V(x)v^{q-1} = g(x,u_1,v_1) & em \quad \Omega \\ v \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad v = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$(2)_v$ tem uma única solução fraca $v_2 \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Daí, pelo Princípio da Comparação fraco (c.f lema 5.2), (F_0) e usando a definição de sub e supersolução fraca

$$-\Delta_q v_2 + V(x)v_2^{q-1} = g(x,u_1,v_1) \geq g(x,u_0,v_1) \geq g(x,u_0,v_0) \geq -\Delta_q v_1 + V(x)v_1^{q-1}$$

então,

$$v_1 \leq v_2 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Por outro lado,

$$-\Delta_q v_2 + V(x)v_2^{q-1} = g(x,u_1,v_1) \leq g(x,\overline{u},v_1) \leq -\Delta_q \overline{v} + V(x)\overline{v}^{p-1}$$

segue,

$$\underline{v} \leq v_1 \leq v_2 \leq \overline{v} \quad \text{em} \quad \Omega$$

portanto, $v_2 \in C^1(\Omega)$.

Assim,

$$(n)_u \qquad \begin{cases} -\Delta_p u_n + V(x)u_n^{p-1} = f(x,u_{n-1},v_{n-1}) & em \quad \Omega \\ u_n \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u_n = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$$(n)_v \qquad \begin{cases} -\Delta_q v_n + V(x)v_n^{q-1} = g(x,u_{n-1},v_{n-1}) & em \quad \Omega \\ v_n \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad v_n = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases}$$

procedendo da mesma forma anterior, obtemos uma sequência de soluções fraca dos problemas $(n)_u, (n)_v$

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq \ldots \overline{u}.$$

$$\underline{v} \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \overline{v}.$$

Como toda sequência limitada e monótona é convergente. Podemos, então, definir

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{u}: & \overline{\Omega} & \longrightarrow & I\!R \\ & \mathrm{x} & \longmapsto & u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{v}: & \overline{\Omega} & \longrightarrow & I\!R \\ & \mathrm{x} & \longmapsto & v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x). \end{array}$$

Como u_n é solução fraca de $(n)_u$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi + V(x)|u_n|^{p-1}\phi dx = \int_\Omega f(x,u_{n-1},v_{n-1})\phi dx, \qquad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

fazendo, $\phi = u_n$, como $V \geq 0$

$$\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |u_n|^p dx \leq \int_\Omega |u_n|^p + V(x)|u_n|^p dx \leq C_1\|f\|_\infty \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, u_n é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De forma, totalmente, análoga tem-se que v_n é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$,$W_0^{1,q}(\Omega)$são espaços de Banach reflexivos, temos

$$u_n \rightharpoonup u_0 \qquad em \;\; W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$v_n \rightharpoonup v_0 \qquad em \;\; W_0^{1,q}(\Omega).$$

Das imersões de Sobolev (c.f Teorema A.13) e pelo Teorema A.3

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u_0 \quad em \;\; L^p(\Omega) \\ u_n(x) \longrightarrow u_0(x) \quad q.t.p \;\; em \;\; \Omega \\ |u_n(x)| \leq h_1 \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{5-6}$$

e

$$\begin{cases} v_n \longrightarrow v_0 \quad em \;\; L^q(\Omega) \\ v_n(x) \longrightarrow v_0(x) \quad q.t.p \;\; em \;\; \Omega \\ |v_n(x)| \leq h_2 \in L^q(\Omega) \end{cases} \tag{5-7}$$

Pela convergência q.t.p, acima, e pela unicidade do limite, concluímos que $u = u_0$ e $v = v_0$.

Como f é Caracthéodory,

$$\int_\Omega f(x,u_{n-1},v_{n-1})dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u,v)dx$$

Pelo que já fizemos no capítulo 1,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi dx.$$

De (5-6) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (c.f Teorema A.2)

$$\int_\Omega V(x)u_n^{p-1}\phi dx \longrightarrow \int_\Omega V(x)u^{p-1}\phi dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi + V(x)u^{p-1}\phi dx = \int_\Omega f(x,u,v)\phi dx.$$

Analogamente,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla\psi + V(x)v^{q-1}\psi dx = \int_\Omega g(x,u,v)\psi dx.$$

Ou seja, (u,v) é solução fraca (5-5) tal que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \qquad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

Assim, $u.v \in L^\infty(\Omega)$ implicando que $f,g \in L^\infty(\Omega)$. Utilizando o Teorema da Regularidade de Lieberman (c.f Teorema B.1) tem-se $u,v \in C^1(\overline{\Omega})$. □

Abaixo, temos dois lemas técnicos que são usados para a existência de super-solução do problema $(*)_\lambda$.

Lema 5.5 (Existência de uma família de subsoluções) *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e satisfaça (V_0) e (V_1). Então para cada $n \geq 1$ e cada $\lambda \in (0,\Lambda)$ existem $\underline{u}_n, \underline{v}_n \in C^1(\overline{B_n})$ tais que*

$$\begin{cases} -\Delta_p \underline{u}_n + V(x)\underline{u}_n^{p-1} \leq \lambda \underline{u}_n^{\alpha_1} + v_n^{\beta_1}, & v_n \in [\underline{v}_n, \overline{v}_n] \\ -\Delta_q \underline{v}_n + V(x)\underline{v}_n^{q-1} \leq \lambda \underline{v}_n^{\alpha_2} + u_n^{\beta_2}, & u_n \in [\underline{u}_n, \overline{u}_n] \\ \underline{u}_n = \underline{v}_n = 0 \quad em\ \partial B_n \quad u_n, v_n > 0 \quad em\ B_n \end{cases} \tag{5-8}$$

E além disso, sendo $\overline{u}, \overline{v}$ super-solução em $\mathbb{R}^N$ do problema$(*)_\lambda$, e fazendo $\overline{u}_n = \overline{v}_n = 0$ em B_n^c, temos que ; u_n e v_n são crescente, isto é,

$$0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \ldots \leq \underline{u}_n \leq \ldots \leq \overline{u} \quad em\ \mathbb{R}^N$$
$$0 \leq \underline{v}_1 \leq \underline{v}_2 \leq \ldots \leq \underline{v}_n \leq \ldots \leq \overline{v} \quad em\ \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Consideremos a seguinte família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = \lambda u^{\alpha_1} \quad em\ B_n \\ u = 0 \quad em\ \partial B_n \\ u > 0 \quad em\ B_n \end{cases} \tag{5-9}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_q v + V(x)v^{q-1} = \lambda v^{\alpha_2} & em\ \ B_n \\ v = 0 \quad em\ \ \partial B_n \\ v > 0 \quad em\ \ B_n. \end{cases} \tag{5-10}$$

Observe que, sendo u_n, v_n soluções fracas de (5-9) e (5-10) em cada B_n. Onde as quais são únicas. Então, certamente, teremos

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + V(x)u^{p-1} \leq \lambda u_n^{\alpha_1} + v_n^{\beta_1}, & em\ \ B_n \\ u_n = 0 \quad em\ \ \partial B_n \qquad e \qquad u_n > 0 \quad em\ \ B_n \end{cases} \tag{5-11}$$

onde v_n é solução do problema (5-10). E de forma análoga,

$$\begin{cases} -\Delta_q v_n + V(x)v^{q-1} \leq \lambda v_n^{\alpha_2} + u_n^{\beta_2}, & em\ \ B_n \\ v_n = 0 \quad em\ \ \partial B_n \qquad e \qquad v_n > 0 \quad em\ \ B_n \end{cases} \tag{5-12}$$

onde u_n é solução do problema (5-9). Então, basta mostrar que (5-9) e (5-10) possuem soluções fracas únicas e que estas são crescentes.

Iremos mostrar,apenas, que (5-9) tem solução, pois com argumento análogo conseguiremos mostrar que (5-10) possui solução.

Considere, então o funcional energia associado ao problema (5-9)

$$J(u) = \frac{1}{p}\left(\int_{B_n} |\nabla u|^p + V(x)|u|^p dx\right) - \frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} (u^+)^{\alpha_1+1} dx, \quad u \in W_0^{1,p}(B_n).$$

Afirmamos, que J é coercivo, pois

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{\alpha_1+1}\|u\|_p^{\alpha_1+1} \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - C_1\frac{\lambda}{\alpha_1+1}\|u\|^{\alpha_1+1} \\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p\left(1 - C_1\frac{\lambda}{\alpha_1+1}\|u\|^{\alpha_1+1-p}\right) \end{aligned}$$

como por hipótese $\alpha_1 + 1 < p$, logo, $J(u) \to \infty$, quando $\|u\| \to \infty$. Donde, $\exists\ c > 0$, onde

$$J(u) \geq -c, \ \ \forall\ u \in W_0^{1,p}(B_n).$$

Seja,

$$I = \inf_{u\ \in\ W_0^{1,p}(B_n)} J(u)$$

tomando $(u_k) \subseteq W_0^{1,p}(B_n)$ tal que,

$$J(u_k) \longrightarrow I.$$

Podemos supor, sem perde de generalidade, que $u_k \geq 0$, uma vez que, $|u_k|$ minimiza o funcional energia. De fato,

$$|u_k| = u_k^+ + u_k^- \geq u_k^+$$

logo,

$$-|u_k| \leq -u_k^+$$

implicando,

$$J(|u_k|) \leq J(u_k)$$

assim,

$$J(|u_k|) \longrightarrow I.$$

Então,

$$\begin{aligned} J(u_k) \leq C_1 + 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\int_{B_n} |\nabla u_k|^p + V(x)u_k^p dx - \frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} (u_k)^{\alpha_1+1} dx \leq C_1 + 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\|u_k\|^p \leq C_1 + 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} (u_k)^{\alpha_1+1} dx - \int_{B_n} V(x)u_k^p dx \\ &\Longrightarrow \quad \|u_k\|^p \leq C_3 + C_4\|u_k\|^{\alpha_1+1} \end{aligned}$$

como, $\alpha_1 + 1 < p$, segue que (u_k) é limitada em $W_0^{1,p}(B_n)$. Como $W_0^{1,p}(B_n)$ é reflexivo

$$u_k \rightharpoonup u, \text{ em } W_0^{1,p}(B_n)$$

logo, por imersão compacta (ver o teorema A.13)

$$u_k \longrightarrow u \text{ em } L^p(B_n)$$

Daí, pelo Teorema A.3

$$\begin{cases} u_k \longrightarrow u \text{ q.t.p em } B_n \\ |u_k| \leq h \in L^p(B_n) \end{cases} \tag{5-13}$$

Como $u_k \geq 0$, teremos que $u \geq 0$. Pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (c.f Teorema A.2),

$$\int_{B_n} V(x)u_k^p dx \longrightarrow \int_{B_n} V(x)u^p dx$$

$$\frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} u_k^{\alpha_1+1} dx \longrightarrow \frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} u_k^{\alpha_1+1} dx.$$

Pelo item (iii) do Teorema E.3,

$$\| u \|^p \leq \liminf \| u_k \|^p$$

assim,

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p + \int_{B_n} V(x)u^p dx - \frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} u^{\alpha_1+1}dx \\
&\leq \frac{1}{p}\left(\liminf_{k\to\infty}\|u_k\|^p + \lim_{k\to\infty}\int_{B_n} V(x)u_k^p dx\right) - \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} u_k^{\alpha_1+1}dx \\
&= \liminf_{k\to\infty}\left[\frac{1}{p}\left(\|u_k\|^p + \int_{\Omega} V(x)u_k^p dx\right) - \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda}{\alpha_1+1}\int_{B_n} u_k^{\alpha_1+1}dx\right] = \liminf_{k\to\infty} J(u_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} J(u_k) = I
\end{aligned}$$

portanto,

$$J(u) = I$$

isto é, o ínfimo do funcional é atingido por algum $u \in W_0^{1,p}(B_n)$. Como,

$$J'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = \int_{B_n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla + V(x)u^{p-1}vdx - \lambda\int_{B_n} u_k^{\alpha_1}vdx, \quad v \in W_0^{1,p}(B_n).$$

Sendo $u \in W_0^{1,p}(B_n)$ tal que

$$I = \min_{u\in W_0^{1,p}(B_n)} J(u) \Longrightarrow J(u) \leq J(u+tv), \ \ t \in I\!R.$$

Daí,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \geq 0 \tag{5-14}$$

e

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \leq 0 \tag{5-15}$$

De (5-14) e (5-15), concluímos que

$$J'(u)v = 0, \quad v \in W_0^{1,p}(B_n)$$

em particular,

$$J'(u)\phi = 0, \quad \phi \in C_0^{\infty}(B_n).$$

Assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi + V(x)u^{p-1}\phi dx = \lambda\int_{B_n} u_k^{\alpha_1}\phi dx$$

portanto $u \in W_0^{1,p}(B_n)$ é solução fraca de (5-9). Afirmamos que $u \not\equiv 0$.

De fato, seja $u_0 \in W_0^{1,p}(B_n)$, $u_0 > 0$ em B_n, então

$$J(tu_0) = \frac{t}{p}\left(\int_{B_n} |\nabla u_0|^p + V(x)u_0^p dx\right) - \frac{\lambda t^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1}\int_{B_n} u_0^{\alpha_1} dx < 0$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno.

Logo,

$$J(u) \leq J(u_0) < 0$$

Implicando que $u \not\equiv 0$, pois se $u \equiv 0$, teríamos que $J(u) = 0$.

Agora definiremos

$$g(x,u) = \lambda u^{\alpha_1} - V(x)u^{p-1}$$

logo,

$$|g(x,u)| \leq \lambda |u|^{\alpha_1} + \|V\|_\infty |u|^{p-1} \leq C_1|u+1|^{\alpha_1} + C_1|u+1|^{p-1}$$

como, $\alpha_1 \leq p-1$, temos

$$|g(x,u)| \leq \lambda |u|^{\alpha_1} + \|V\|_\infty |u|^{p-1} \leq C_1|u+1|^{p-1} + C_1|u+1|^{p-1} \leq C_2\left(|u|^{p-1}+1\right)$$

Donde, utilizando o Teorema C.11, o qual, implica que $u \in L^\infty(B_n)$.

E utilizando o Teorema de regularidade de Lieberman (c.f Teorema B.1), temos que $u \in C^1(\overline{B_n})$. Daí, pelo Teorema de Vázquez (c.f Teorema C.3) temos que $u > 0$ em B_n. De fato, pois

$$-\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = \lambda u^{\alpha_1} \geq 0$$

então

$$-\Delta_p u \geq -V(x)u^{p-1}$$

segue que

$$\Delta_p u \leq V(x)u^{p-1} \leq \|V\|_\infty u^{p-1}.$$

Definindo,

$$\beta(u) = \|V\|_\infty u^{p-1}$$

daí,

$$\int_0^1 \frac{1}{(\beta(s)s)^{\frac{1}{p}}} ds = \frac{1}{\|V\|_\infty}\int_0^1 \frac{1}{(s^p)^{\frac{1}{p}}} ds = \frac{1}{\|V\|_\infty}\int_0^1 \frac{1}{s} ds = \infty.$$

Portanto, pelo Teorema C.3 $u > 0$ em B_n. Então, temos que $u \in C^1(\overline{B}_n) \cap W_0^{1,p}(B_n)$ é solução fraca do Problema (5-9).

A unicidade de solução do problema (5-9), segue do artigo de Diaz-Saa (cf. [15]) e pelo Teorema C.12. Ou seja, para cada B_n obtemos uma única solução de 5-9. Agora, façamos $\underline{u}_n = u$. E observemos que se $\gamma \in (0,1)$ e $\phi \in C_0^\infty(\overline{B}_n)$, $\phi \geq 0$, então

$$\int_{B_n} |\nabla(\gamma u_n)|^{p-2}\nabla(\gamma u_n)\nabla\phi + V(x)(\gamma u_n)^{p-1}\phi dx - \lambda \int_{B_n} (\gamma u)^{\alpha_1}\phi dx \leq$$
$$\gamma^{p-1}\left(\int_{B_n} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla(u_n)\nabla\phi + V(x)u_n^{p-1}\phi dx - \lambda \int_{B_n} u_n^{\alpha_1}\phi dx\right) = 0$$

ou seja, γu_n é uma sub-solução de (5-9), como $\overline{u}$ é uma super-solução de (5-9). E escolhendo $\gamma \in (0,1)$ tal que $\gamma u_n \leq \overline{u}$. Pelo teorema 5.4 existe $\overline{u}_n$ solução do problema (5-9) tal que

$$\gamma u_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}.$$

Mas, pela unicidade de solução de (5-9), concluímos que $\overline{u}_n = u_n$.

Considere, $\underline{u}_{n+1} \in W_0^{1,p}(B_n) \cap L^\infty(B_n)$ satisfazendo

$$-\Delta_p \underline{u}_{n+1} + V(x)\underline{u}_{n+1}^{p-1} = \lambda \underline{u}_{n+1}^{\alpha_1} \quad em \;\; B_n$$

de modo que, $\underline{u}_{n+1}$ é uma super-solução de (5-9), tomando $\gamma = \gamma_n \in (0,1)$ tal que $\gamma u_n \leq \underline{u}_{n+1}$. Novamente, pelo Teorema 5.4 existe $\overline{u}_n \in W_0^{1,p}(B_n) \cap L^\infty(B_n)$ tal que

$$\gamma u_n \leq \overline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \quad em \;\; B_n.$$

Mas, como (5-9) tem uma única solução em B_n

$$\overline{u}_n = u_n \leq \underline{u}_{n+1} \quad em \;\; B_n.$$

Então fazendo $u_n = 0$ em B_n^c, temos a sequência $u_n = u_{n,\lambda} \in C^1(\overline{B}_n)$ tal que

$$0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \ldots \leq \underline{u}_n \leq \ldots \leq \overline{u} \quad em \;\; I\!R^N.$$

De forma análoga, consiguimos obter

$$0 \leq \underline{v}_1 \leq \underline{v}_2 \leq \ldots \leq \underline{v}_n \leq \ldots \leq \overline{v} \quad em \;\; I\!R^N.$$

□

Com intuito de construir uma super-solução $(*)_\lambda$ estudaremos a existência e o comportamento no infinito da solução do problema abaixo. Seja; $\rho_1 : I\!R^N \longrightarrow I\!R$, considere

o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w + V(x)w^{p-1} = \rho_1(x), & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ w > 0 \quad em \ \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5-16}$$

Lema 5.6 *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e satisfaça (V_0) e (V_1). Se $\rho_1 \in L^1 \cap C(\mathbb{R}^N)$, $\rho_1 > 0$ e*

$$\rho_1(x) \longrightarrow 0, \quad quando \ |x| \longrightarrow \infty.$$

Então existe uma solução $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$w(x) \longrightarrow 0, \quad quando \ |x| \longrightarrow \infty.$$

Demonstração: Apresentamos aqui o espaço

$$E = \left\{ w \in D^{1,p} / \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-1} < \infty \right\}$$

onde $D^{1,p} = D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é o fecho de C_0^∞ com respeito a norma do gradiente.

O espaço E é munido com a norma dada por

$$\|w\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p + V(x)|w|^p dx.$$

Com esta norma, E torna-se um espaço de Banach reflexivo, e segue de (V_0) que temos a imersão contínua de $E \hookrightarrow W^{1,p}$. E além disso, um elemento de $w \in D^{1,p}$ está

$$w \in E \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|w|^p dx < \infty.$$

A existência de solução do problema (5-16), será dado por método de minimização do funcional energia associado ao problema

$$J(w) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p + V(x)|w|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 w dx, \quad w \in E$$

utilizando os mesmos argumentos feitos no lema 5.5 conseguimos mostrar que J é coercivo. Donde, $\exists \ c > 0$, onde

$$J(w) \geq -c, \ \forall \ w \in E.$$

Seja,

$$I = \inf_{w \ \in \ D^{1,p}} J(w)$$

tomando $(w_k) \subseteq E$ tal que,

$$J(w_k) \longrightarrow I.$$

Então,

$$\begin{aligned} J(w_k) \leq C_1 + 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^p + V(x)|w_k|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 w_k dx \leq C_1 + 1 \\ &\Longrightarrow \quad \|w_k\|^p \leq C_1 + 1 + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 w_k dx \end{aligned}$$

como,

$$\rho_1(x) \longrightarrow 0, \quad quando |x| \longrightarrow +\infty$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|x| > M \Longrightarrow |\rho_1(x)| < \varepsilon.$$

Por hipótese $\rho_1 \in C^1(\mathbb{R}^N)$, implicando que $\rho_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, para $|x| \leq M$. Donde,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 w_k dx = \int_{|x|>M} \rho_1 w_k dx + \int_{|x|\leq M} \rho_1 w_k dx \leq C_1 \|\rho_1\|_\infty \|w\| \leq C_2 \|u\|$$

portanto,

$$\|w_k\|^p \leq C_3 + C_2 \|w_k\|$$

sendo $1 < p$, segue que (u_k) é limitada em E. Como E é reflexivo

$$w_k \rightharpoonup w \ \text{ em } \ E.$$

Logo, por imersão de Sobolev (ver o teorema A.13)

$$w_k \longrightarrow w \ \text{ em } \ L^p(\mathbb{R}^N)$$

daí, pelo Teorema A.3

$$\begin{cases} w_k \longrightarrow w \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N \\ |w_k| \leq h \ \in \ L^p(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{5-17}$$

pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (c.f Teorema A.2),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 w_k dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 w_k dx,$$

pelo item (iii) do Teorema E.3,

$$\| w \|^p \leq \liminf \| w_k \|^p$$

assim,

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{p}\|w\|^p + \int_{I\!R^N} \rho_1 w dx \leq \frac{1}{p}\liminf_{k\to\infty}\|w_k\|^p - \lim_{k\to\infty}\int_{I\!R^N}\rho_1 w_k dx \\ &= \liminf_{k\to\infty}\left[\frac{1}{p}\|w_k\|^p - \int_{I\!R^N}\rho_1 w_k dx\right] = \liminf_{k\to\infty} J(w_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} J(w_k) = I \end{aligned}$$

portanto,

$$J(w) = I.$$

Isto é, o ínfimo do funcional é atingido por algum $w \in E$. Da mesma forma que foi feito no Lema 5.5 tem-se que

$$J'(w)\phi \quad = \quad 0, \quad \phi \in C_0^\infty(I\!R^N).$$

Assim,

$$\int_{I\!R^N} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla\phi + V(x)w^{p-1}\phi dx = \int_{I\!R^N}\rho_1 w\phi dx.$$

Portanto $w \in E$ é solução fraca de (5-16). E usando os mesmos argumentos no Lema 5.5, conseguimos mostrar que

$$w \geq 0 \quad e \quad w \not\equiv 0.$$

Sendo w solução de (5-16), considere

$$-\Delta_p w = \rho_1 - V(x)w^{p-1} \equiv g(x,w) \quad \text{em } I\!R^N.$$

E denotaremos, $|.|_{s,r}$ a norma de $L^s(B_r)$, para algum $1 < s < \infty$ e $r > 0$. Pelo Teorema B.9

$$\sup_{y\in B_r}|w(y)| \leq Cr^{-\frac{N}{p}}\left(|w|_{p,2r} + kr^{\frac{N}{p}}\right)$$

onde $C \equiv C(N,p,r) > 0$ e $k \equiv \left(r|g|_{\frac{N}{p-1},2r}\right)^{\frac{1}{p-1}}$,
isto é,

$$\sup_{y\in B_r}|w(y)| \leq C_1\left(|w|_{p,2r} + |g|^{\frac{1}{p-1}}_{\frac{N}{p-1},2r}\right)$$

onde $C_1 \equiv C_1(N,p,r) > 0$. Por outro lado,

$$\int_{B_{2r}} |g|^{\frac{N}{p-1}} dx \leq C_2\left(|\rho_1|^{\frac{1}{p-1}}_{\frac{N}{p-1},2r} + |w|_{p*,2r}\right)$$

onde $C_2 \equiv C(N,p,|V|_\infty,r) > 0$ e então usando as imersões de Sobolev

$$L^{p*}(B_{2r}) \hookrightarrow L^p(B_{2r})$$

donde,

$$\sup_{y\in B_r} |w(y)| \leq k\left(|\rho_1|^{\frac{1}{p-1}}_{\frac{N}{p-1},2r} + |w|_{p^*,2r}\right)$$

onde $k \equiv k(N,p,r,|V|_\infty)$. Agora, para $\varepsilon > 0$ tome $R = R_\varepsilon$ tal que

$$|\rho_1|^{\frac{1}{p-1}}_{\frac{N}{p-1},B^c_{2r}}, \quad |w|_{p^*,B^c_{2r}} < \frac{\varepsilon}{2K}$$

onde $k \equiv k(N,p,|V|_\infty)$. Se $x \in B^c_{R+2}$ e aplicando o Pelo Teorema B.9, devido a Serrin, em $B_2(x)$, então

$$\sup_{y\in B_1(x)} |w(y)| \leq C\left(|\rho_1|^{\frac{1}{p-1}}_{\frac{N}{p-1},2} + |w|_{p^*,2}\right) < \varepsilon.$$

Pois, $B_2(x) \subset B^c_R$. Mostrando que

$$|w(y)| \leq \varepsilon, \quad quando |y| \geq R+1.$$

E consequentemente,

$$w(y) \longrightarrow 0, \quad quando |y| \longrightarrow +\infty$$

Por outro lado, Teorema B.9 para $R_1 > R$ temos

$$\sup_{y\in B_{R_1}} |w(y)| \leq C\left(|\rho_1|^{\frac{1}{p-1}}_{\frac{N}{p-1},2R_1} + |w|_{p^*,2R_1}\right) \leq K_1 < \infty.$$

Portanto, $w \in L^\infty(B_{R_1})$ e então $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. E utilizando o Teorema de regularidade de Lieberman (c.f o Teorema B.1). E usando os mesmos argumentos, já feitos, do Lema 5.5 e utilizando o Princípio da Comparação de Vazquez, temos que $w > 0$ em $\mathbb{R}^N$. □

Lema 5.7 *Sejam $a,b > 0$ e $0 < \alpha < p-1 < \beta < \infty$. Então exite $\Lambda > 0$ (Λ depende de a,b,p,α, β) e para cada $\lambda \in (0,\Lambda)$, existe $M_\lambda > 0$ tal que $M_\lambda \longrightarrow 0$, quando $\lambda \longrightarrow 0$ e*

$$at^{p-1} \geq \lambda b^\alpha t^\alpha + b^\beta t^\beta, \quad onde \;\; t = t_\lambda = M_\lambda \cdot \frac{1}{b}.$$

Demonstração: É suficiente mostrar que

$$a \geq \lambda b^\alpha t^{\alpha-(p-1)} + b^\beta t^{\beta-(p-1)}, \quad \text{para algum} \;\; t > 0.$$

Defina,

$$f(t) = \lambda b^{\alpha} t^{\alpha-(p-1)} + b^{\beta} t^{\beta-(p-1)}, \quad t > 0.$$

Assim, f é contínua não-negativa e

$$f \longrightarrow +\infty, \text{quando } \ t \longrightarrow 0 \ \text{ ou } \ t \longrightarrow +\infty.$$

Logo, existe um ponto de mínimo, seja este $t_\lambda > 0$.

Calculando a 1ª derivada para encontrar t_λ

$$f'(t) = (\alpha-(p-1))\lambda b^{\alpha} t^{\alpha-p} + (\beta-(p-1)) b^{\beta} t^{\beta-p}$$

Como $f'(t_\lambda) = 0$, segue

$$(\alpha-(p-1))\lambda b^{\alpha} t^{\alpha-p} = -(\beta-(p-1)) b^{\beta} t^{\beta-p}$$

daí,

$$\lambda \frac{[\alpha-(p-1)]b^{\alpha}}{[\beta-(p-1)]b^{\beta}} = t_\lambda^{\beta-p(\alpha-p)} = t_\lambda^{\beta-\alpha}$$

então,

$$t_\lambda = \left[\lambda^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \left(\frac{(p-1)-\alpha}{\beta-(p-1)} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \right] \frac{1}{b} \equiv \frac{M_\lambda}{b}.$$

Assim, $M_\lambda > 0$ tal que $M_\lambda \longrightarrow 0$, quando $\lambda \longrightarrow 0$. E além disso

$$f(t_\lambda) = \lambda b^{\alpha} \left[\lambda^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \left(\frac{(p-1)-\alpha}{\beta-(p-1)} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \frac{1}{b} \right]^{\alpha} + b^{\beta} \left[\lambda^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \left(\frac{(p-1)-\alpha}{\beta-(p-1)} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \frac{1}{b} \right]^{\beta} = \lambda^{\frac{\beta-(p-1)}{\beta-\alpha}} . C_{b,p,\alpha,\beta}$$

ou seja,

$$f(t_\lambda) = \lambda^{\frac{\beta-(p-1)}{\beta-\alpha}} . C_{b,p,\alpha,\beta}$$

para algum $C_{b,p,\alpha,\beta} > 0$.

Consequentemente, existe $\Lambda \equiv \Lambda_{a,b,\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$f(t_\lambda) \leq a, \quad 0 < \lambda < \Lambda.$$

□

Lema 5.8 (Existência de uma super-solução) *Seja $V \in L^\infty$ e satisfaça (V_0) e (V_1). Então existe $\Lambda > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$ existem $M_\lambda^1 > 0$, $M_\lambda^2 > 0$, $\overline{u} \equiv \overline{u}_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$*

e $\overline{v} \equiv \overline{v}_\lambda \in C^1(I\!R^N)$ *tal que*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{I\!R^N} |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi + V(x)\overline{u}^{p-1}\phi dx \geq \lambda \int_{I\!R^N} (\overline{u}^{\alpha_1} + v^{\beta_1})\phi dx, & v \in [\underline{v}, \overline{v}] \\ \displaystyle\int_{I\!R^N} |\nabla \overline{v}|^{p-2}\nabla\overline{v}\nabla\phi + V(x)\overline{v}^{p-1}\phi dx \geq \lambda \int_{I\!R^N} (\overline{v}^{\alpha_2} + \overline{u}^{\beta_2})\phi dx, & u \in [\underline{u}, \overline{u}] \\ \overline{u},\ \overline{v}\ \ em\ \ I\!R^N, \end{cases}$$

para $\phi,\ \psi \in C^\infty(I\!R^N)$, *onde* $\phi,\ \psi \geq 0$.

Demonstração: Sejam

$$\overline{u} = M^1(w + \eta_1)$$
$$\overline{v} = M^2(z + \eta_2)$$

Onde w é solução fraca da pela Lema 5.6 e z é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p z + V(x)z^{p-1} = \rho_2 \quad \text{em } I\!R^N \\ z > 0 \quad \text{em } I\!R^N, \end{cases}$$

e M, η_i serão encontrado logo a frente no texto.Tome

$$\eta_2 > \sup_{x \in I\!R^N} |w(x) - z(x)|$$

segue

$$w(x) < z(x) + \eta_2$$

existe $\eta_1 > 0$ tal que

$$w + \eta_1 < z + \eta_2. \tag{5-18}$$

Já temos que $\overline{u}, \overline{v} \in C^1 \cap L^\infty$. E afirmamos que $\overline{u}, \overline{v}$ é super-solução $(*)_\lambda$.

De fato, seja $\phi \in C_0^\infty$, $\phi \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{I\!R^N} |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\phi + V(x)\overline{u}^{p-1}\phi dx \\ &= \int_{I\!R^N} M_1^{p-1}\left(|\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla\phi + V(x)w^{p-1}\phi\right)dx + \int_{I\!R^N} M_1^{p-1}V(x)\left((w+\eta_1)^{p-1} - w^{p-1}\right)\phi dx \\ &= \int_{I\!R^N} M_1^{p-1}\rho_1\phi dx + \int_{I\!R^N} M_1^{p-1}V(x)\left((w+\eta_1)^{p-1} - w^{p-1}\right)\phi dx. \end{aligned}$$

Seja $I_{w,\eta_1,p} \equiv \left((w+\eta_1)^{p-1} - w^{p-1}\right)$, temos $I_{w,\eta_1,p} > 0$. Como

$$\int_{B_{R_0}^c} M_1^{p-1}\rho_1\phi dx = 0 \tag{5-19}$$

e sendo $V \geq 0$

$$\int_{B_{R_0}} M_1^{p-1} V(x) I_{w,\eta_1,p} \phi dx \geq 0 \tag{5-20}$$

então

$$E_1 \geq \int_{B_{R_0}^c} M_1^{p-1} \rho_1 \phi dx + \int_{B_{R_0}} M_1^{p-1} \rho_1 \phi dx + \int_{B_{R_0}^c} M_1^{p-1} V(x) I_{w,\eta_1,p} \phi dx + \int_{B_{R_0}} M_1^{p-1} V(x) I_{w,\eta_1,p} \phi dx$$

daí, de (5-19), (5-20) e $m_0 = \min_{x \in B_{R_0}} \rho_1$

$$E_1 \geq \int_{B_{R_0}} M_1^{p-1} m_0 \phi dx + \int_{B_{R_0}^c} M_1^{p-1} V(x) I_{w,\eta_1,p} \phi dx. \tag{5-21}$$

Utilizando a Desigualdade de Simmons (c.f Teorema A.15), existe uma constante $c_p > 0$ tal que

$$\langle | \varepsilon |^{p-2} \varepsilon - | \zeta |^{p-2} \zeta, \varepsilon - \zeta \rangle \geq \begin{cases} c_p \, | \varepsilon - \zeta |^p, & \text{se} \quad p \geq 2, \\ c_p \dfrac{| \varepsilon - \zeta |^2}{(| \varepsilon | + | \zeta |)^{2-p}}, & \text{se} \quad 1 < p < 2. \end{cases} \tag{5-22}$$

para todo $\varepsilon, \zeta \in I\!R^s$, para $s \geq 1$.

Agora, fazendo $I_{w,\eta_1,p} = |w + \eta_1|^{p-2}(w + \eta_1) - |w|^{p-2} w$, e aplicando 5-22, com $\varepsilon = w + \eta_1$, $\zeta = \eta_1$. Então

$$I_{w,\eta_1,p} \geq \Gamma_p(\eta_1), \tag{5-23}$$

onde,

$$\Gamma_p(\eta_1) \equiv \begin{cases} c_p \eta_1 & \text{se} \quad p \geq 2, \\ c_p \dfrac{\eta_1}{(w_0 + \eta_1)^{2-p}}, & \text{se} \quad 1 < p < 2. \end{cases} \tag{5-24}$$

onde $w_0 > 0$, dado por $w_0 \equiv \sup_{x \in I\!R^N} \mathrm{w(x)}$.

Segue;

$$E_1 \geq \int_{B_{R_0}} M_1^{p-1} m_0 \phi dx + \int_{B_{R_0}^c} M_1^{p-1} V(x) \Gamma_p(\eta_1) \phi dx = \int_{I\!R^N} M_1^{p-1} \left(\rho_1 + \delta_0 \Gamma_p(\eta_1) \right) \phi dx$$

Seja $m_1 = \min(m_0, \delta_0 \Gamma_p(\eta_1))$. Portanto,

$$E_1 \geq \int_{I\!R^N} M_1^{p-1} m_1 \phi dx$$

E fazendo,

$$E_2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{v}|^{p-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi + V(x) \overline{v}^{p-1} \psi dx$$

utilizando argumentos análogas que já foram feitas anteriormente,

$$E_2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} M_2^{q-1} m_2 \psi dx$$

Onde, $m_2 = \min(\overline{m}_0, \delta_0 \Gamma_q(\eta_2))$, sendo $\overline{m}_0 = \min\limits_{x \in B_{R_1}} \rho_2$.
Sendo

$$m = \min(m_1, m_2)$$

obteremos

$$E_1 \geq \int_{\mathbb{R}^N} M_1^{p-1} m \phi dx$$

$$E_2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} M_2^{p-1} m \psi dx.$$

Para $a = m$ e fixado p, α_1, β_1. E fazendo,

$$M_\lambda = \min(M_\lambda^1, M_\lambda^2)$$

onde,

$$M_\lambda^1 = \lambda^{\frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}} \left(\frac{(p-1) - \alpha_1}{\beta_1 - (p-1)} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}},$$

$$M_\lambda^2 = \lambda^{\frac{1}{\beta_2 - \alpha_2}} \left(\frac{(q-1) - \alpha_2}{\beta_1 - (q-1)} \right)^{\frac{1}{\beta_2 - \alpha_2}}$$

E

$$b = \frac{M_\lambda^1}{M_\lambda} |z + \eta_2|_\infty$$

utilizando o Lema 5.7, existe $M_1 > 0$ tal que

$$M_1 = M_\lambda^1 . \frac{1}{b} = M_\lambda . \frac{1}{|z + \eta_2|_\infty}$$

tal que

$$M_1^{p-1} m \geq \lambda M_1^{\alpha_1} \left(\frac{M_\lambda^1}{M_\lambda} |z + \eta_2|_\infty \right)^{\alpha_1} + M_1^{\beta_1} \left(\frac{M_\lambda^1}{M_\lambda} |z + \eta_2|_\infty \right)^{\beta_1}$$

como

$$M_\lambda^1 \geq M_\lambda$$

temos,

$$\frac{M_\lambda^1}{M_\lambda}.|z+\eta_2|_\infty \geq |z+\eta_2|_\infty.$$

Portanto,

$$M_1^{p-1}m \geq \lambda M_1^{\alpha_1}|z+\eta_2|_\infty^{\alpha_1} + M_1^{\beta_1}|z+\eta_2|_\infty^{\beta_1}$$

$$M_1^{p-1}m \geq \lambda M_1^{\alpha_2}|w+\eta_1|_\infty^{\alpha_2} + M_1^{\beta_2}|z+\eta_2|_\infty^{\beta_2}. \tag{5-25}$$

Analogamente, Utilizando o Lema 5.7, para q, α_2, β_2,e

$$a = m, \qquad b = \frac{M_\lambda^2}{M_\lambda}|z+\eta_2|_\infty$$

tomando existe $M_2 > 0$ tal que

$$M_2 = M_\lambda^2.\frac{1}{b} = M_\lambda.\frac{1}{|z+\eta_2|_\infty},$$

observe que

$$M_1 = M_2$$

tal que

$$M_2^{q-1}m \geq \lambda M_2^{\alpha_1}\left(\frac{M_\lambda^2}{M_\lambda}|z+\eta_2|_\infty\right)^{\alpha_2} + M_2^{\beta/2}\left(\frac{M_\lambda^2}{M_\lambda}|z+\eta_2|_\infty\right)^{\beta_2},$$

como

$$M_\lambda^2 \geq M_\lambda$$

temos,

$$\frac{M_\lambda^2}{M_\lambda}.|z+\eta_2|_\infty \geq |z+\eta_2|_\infty.$$

Portanto,

$$M_2^{q-1}m \geq \lambda M_2^{\alpha_2}|z+\eta_2|_\infty^{\alpha_2} + M_2^{\beta_2}|z+\eta_2|_\infty^{\beta_2}$$

de (5-18)

$$M_2^{q-1}m \geq \lambda M_2^{\alpha_2}|z+\eta_2|_\infty^{\alpha_2} + M_2^{\beta_2}|w+\eta_1|_\infty^{\beta_2} \tag{5-26}$$

Então de (5-25) e (5-26) e definindo $M = M_1 = M_2$

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} M^{p-1}m\phi \geq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda M^{\alpha_1}|w+\eta_1|_\infty^{\alpha_1}\phi + M^{\beta_1}|z+\eta_2|_\infty^{\beta_1}\phi \geq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda \overline{u}^{\alpha_1}\phi + \overline{v}^{\beta_1}\phi \\ \int_{\mathbb{R}^N} M^{q-1}m\psi \geq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda M^{\alpha_2}|z+\eta_2|_\infty^{\alpha_2}\psi + M^{\beta_2}|w+\eta_1|_\infty^{\beta_2}\psi \geq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda \overline{v}^{\alpha_2}\psi + \overline{u}^{\beta_2}\psi. \end{cases} \tag{5-27}$$

Portanto,

$$\overline{u} = M(w+\eta_1), \quad \overline{v} = M(z+\eta_2)$$

são super-solução de $(*)_\lambda$. □

Demonstração do Teorema 1.4: Seja Λ dado pelo Lema 5.7 e tome $\lambda \in (0,\Lambda)$. Sejam $\overline{u}, \overline{v}$ dadas pelo Lema 5.8, fazendo $\overline{u}_{n+1}, \overline{v}_{n+1}$ as restrições de $\overline{u}, \overline{v}$ em B_{n+1}. Assim $\overline{u}_{n+1}, \overline{v}_{n+1}$ é uma super-solução do problema $(*)_\lambda$ restrito a B_{n+1}. Já que, pelo Lema 5.5 o problema $(*)_\lambda$ tem uma sub-solução $\underline{u}_{n+1}, \underline{v}_{n+1}$ com

$$\underline{u}_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1}, \quad \underline{v}_{n+1} \leq \overline{v}_{n+1} \quad \text{em } B_{n+1} \tag{5-28}$$

E existe, pelo Teorema 5.4, $u_{n+1} \in W_0^{1,p}(B_n+1)$, $v_{n+1} \in W_0^{1,q}(B_{n+1})$, solução do problema $(*)_\lambda$ restrita a B_{n+1} tal que

$$\underline{u}_{n+1} \leq u_{n+1} \leq \overline{u}_{n+1}, \quad \underline{v}_{n+1} \leq v_{n+1} \leq \overline{v}_{n+1} \quad \text{em } B_{n+1},$$

usaremos os mesmo argumento já feito no lema 5.8, que é (u_{n+1}, v_{n+1}) solução do problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_{n+1} + V(x)u_{n+1}^{p-1} &= \lambda u_{n+1}^{\alpha_1} + v_{n+1}^{\beta_1}, \quad \text{em } B_n, \\ -\Delta_q v_{n+1} + V(x)v_{n+1}^{q-1} &= \lambda v_{n+1}^{\alpha_2} + u_{n+1}^{\beta_2}, \quad \text{em } B_n. \end{aligned} \tag{5-29}$$

Logo (u_{n+1}, v_{n+1}) é super-solução (λ_*) em B_n, como pelo lema 5.5 existe $(\underline{u}_n, \underline{v}_n)$ sub-solução de (λ_*). Pelo teorema 5.4 existe uma (u_n, v_n) solução fraca 5-29 tal que

$$\underline{u}_n \leq u_n \leq u_{n+1} \qquad \underline{v}_n \leq v_n \leq v_{n+1} \quad \text{em } B_n \tag{5-30}$$

e

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{B_n} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \phi dx = \int_{B_n} \left(\lambda u_n^{\alpha_1} + v_n^{\beta_1} - V(x)u_n^{p-1}\right)\phi dx, & \phi \in W_0^{1,p}(B_n) \\ \displaystyle\int_{B_n} |\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n \nabla \psi dx = \int_{B_n} \left(\lambda v_n^{\alpha_2} + u_n^{\beta_2} - V(x)v_n^{q-1}\right)\psi dx, & \psi \in W_0^{1,q}(B_n) \end{cases} \tag{5-31}$$

fazendo, $u_n = v_n = 0$ em $\overline{B}_n^c$. Sejam

$$\lambda u_n^{\alpha_1} + v_n^{\beta_1} - V(x)u_n^{p-1} = g_n^1(x), \quad \text{em } I\!R^N \tag{5-32}$$

$$\lambda v_n^{\alpha_2} + u_n^{\beta_2} - V(x)v_n^{q-1} = g_n^2(x), \quad \text{em } I\!R^N. \tag{5-33}$$

Observe que;

$$g_n^1(x) \leq \Lambda \overline{u}^{\alpha_1} + \overline{v}^{\beta_1} + |V|_\infty \overline{u}^{p-1} = g^1(x), \quad \text{em } I\!R^N \tag{5-34}$$

onde, $g^1 \in L^\infty$.

$$g_n^2(x) \leq \Lambda \overline{v}^{\alpha_2} + \overline{u}^{\beta_2} + |V|_\infty \overline{v}^{q-1} = g^2(x), \quad \text{em } I\!R^N \tag{5-35}$$

onde, $g^2 \in L^\infty$.Portanto, $g_n^1, g_n^2 \in L^\infty$.

Afirmamos que u_n é limitada em $W_{loc}^{1,p}$ e v_n é limitada em $W_{loc}^{1,q}$. De fato, fixemos $\Omega \in I\!R^N$ um domínio limitado suave, de modo que $\Omega \in B_n$ para um n suficientemente grande, então de (5-31), fazendo $\phi = u_n$, restrito à Ω,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \nabla u_n \nabla \phi dx = \int_\Omega \left(\lambda u_n^{\alpha_1} + v_n^{\beta_1} - V(x)u_n^{p-1}\right) u_n dx = \int_\Omega g_n^1 u_n dx \leq C_\Omega \tag{5-36}$$

Daí, de (5-28) e (5-36)

$$\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega + C_1.$$

Provando que u_n é limitada em $W_{loc}^{1,p}$. De forma análoga, prova-se que v_n é limitada em $W_{loc}^{1,q}$. Assim,

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{em } W_{loc}^{1,p} \tag{5-37}$$

$$v_n \rightharpoonup v, \quad \text{em } W_{loc}^{1,q} \tag{5-38}$$

Donde, dos Teoremas A.14, A.3

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u, \quad \text{em } L^p(\Omega) \\ u_n(x) \longrightarrow u(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega \\ |u_n(x)| \leq h_1, \quad \text{q.t.p. em}\Omega. \end{cases} \tag{5-39}$$

$$\begin{cases} v_n \longrightarrow u, \quad \text{em } L^q(\Omega) \\ v_n(x) \longrightarrow u(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega \\ |v_n(x)| \leq h_2, \quad \text{q.t.p. em}\Omega \end{cases} \tag{5-40}$$

Observemos que

$$\Omega_n = \Omega = \{x \in I\!R^N | dist(x, \partial\Omega) < n\}$$

e definamos para cada par $m, n \in I\!N$

$$u_{mn} := u_m|\Omega_n \quad \text{solução do problema em } \Omega_n,$$

De (5-39) obtemos uma matriz de subsequência convergente, isto é

$$\begin{array}{l} u_{21},\ u_{31},\ u_{41},\ \cdots \longrightarrow u^1, \text{ q.t.p em } \Omega_1 \\ u_{32},\ u_{42},\ u_{52},\ \cdots \longrightarrow u^2, \text{ q.t.p em } \Omega_2 \\ u_{43},\ u_{53},\ u_{63},\ \cdots \longrightarrow u^3, \text{ q.t.p em } \Omega_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \end{array}$$

Pelas convergências (5-39)

$$u^n_{|\Omega_{n-1}} = u^{n-1}$$

Sendo,

$$u(x) := u^n(x), \ \ x \in \Omega_n$$

e

$$I\!R^N = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n,$$

Então a sequência diagonal (u_{2nn}) satisfaz

$$u_{2nn}(x) \longrightarrow u(x), \ \text{ q.t.p em } I\!R^N.$$

de forma análoga temos que

$$v_{2nn}(x) \longrightarrow v(x), \ \text{ q.t.p em } I\!R^N.$$

Pelo que já foi feito no Capítulo 2

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi dx \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n \nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla\psi dx \end{cases} \tag{5-41}$$

Donde, fazendo $\phi = \nabla u_n - \nabla u$

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(u_n - u)\rangle dx \longrightarrow 0. \tag{5-42}$$

Do Corolário A.16, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx \longrightarrow 0 \tag{5-43}$$

ou seja,

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u, \quad \text{em } L^p(\Omega). \tag{5-44}$$

Daí, pelo Teorema A.3

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x), \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{5-45}$$

Usando o mesmo argumento da sequência diagonal temos que, a menos de uma subsequência

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x), \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,$$

$$\nabla v_n(x) \longrightarrow \nabla v(x), \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

De (5-45),

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) \longrightarrow |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \qquad \text{q.t.p em } \Omega \tag{5-46}$$

e $|\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)$ é limitado em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\right|^{\frac{p}{p-1}} dx \leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx \tag{5-47}$$

$$= \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx = \int_\Omega g_n^1 dx \leq C_\Omega. \tag{5-48}$$

Segue do Lema A.5 que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \quad \text{em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \tag{5-49}$$

de (5-49) e do Teorema A.6

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\phi dx=\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx,\quad \phi\in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{5-50}$$

Utilizando (5-39), (5-40) e Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega}V(x)u_n^{p-1}\phi dx\longrightarrow\int_{\Omega}V(x)u^{p-1}\phi dx, & \phi\in C_0^{\infty}(\Omega)\\ \displaystyle\int_{\Omega}\left(\lambda u_n^{\alpha_1}+v_n^{\beta_1}\right)\phi dx\longrightarrow\int_{\Omega}\left(\lambda u^{\alpha_1}+v^{\beta_1}\right)\phi dx, & \phi\in C_0^{\infty}(\Omega)\end{cases} \tag{5-51}$$

portanto,

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi+V(x)u_n^{p-1}\phi dx=\int_{\Omega}\left(\lambda u^{\alpha_1}+v^{\beta_1}\right)\phi dx,\quad \phi\in C_0^{\infty}(\Omega) \tag{5-52}$$

Seja $\phi\in C_0^{\infty}(I\!R^N)$ e $A=supp\ \phi\subset\Omega_k$, para algum $k\in I\!N$. Como,

$$\int_{I\!R^N}||\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi|dx\leq\int_A||\nabla u|^{p-1}\nabla\phi|dx\leq C\|u\|_{W^{1,p}(A)}^{p-1}<\infty \tag{5-53}$$

pelo Teorema A.7

$$\int_{\Omega_n}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx\longrightarrow\int_{I\!R^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi dx,\quad \phi\in C_0^{\infty}(I\!R^N) \tag{5-54}$$

usando o mesmo argumento utilizado em 5-53 e aplicando o Teorema A.7

$$\int_{\Omega_n}V(x)u^{p-1}\phi dx\longrightarrow\int_{I\!R^N}V(x)u^{p-1}\phi dx,\quad \phi\in C_0^{\infty}(I\!R^N) \tag{5-55}$$

$$\int_{\Omega_n}\left(\lambda\hat{u}^{\alpha_1}+\hat{v}^{\beta_1}\right)\phi dx\longrightarrow\int_{I\!R^N}\left(\lambda\hat{u}^{\alpha_1}+\hat{v}^{\beta_1}\right)\phi dx,\quad \phi\in C_0^{\infty}(I\!R^N) \tag{5-56}$$

Portanto,

$$\int_{I\!R^N}|\nabla\hat{u}|^{p-2}\nabla\hat{u}\nabla\phi+V(x)\hat{u}^{p-1}\phi dx=\int_{I\!R^N}\left(\lambda\hat{u}^{\alpha_1}+\hat{v}^{\beta_1}\right)\phi dx,\quad \phi\in C_0^{\infty}(I\!R^N) \tag{5-57}$$

analogamente,

$$\int_{I\!R^N}|\nabla\hat{v}|^{q-2}\nabla\hat{v}\nabla\phi+V(x)\hat{v}^{q-1}\psi dx=\int_{I\!R^N}\left(\lambda\hat{v}^{\alpha_2}+\hat{u}^{\beta_2}\right)\psi dx,\quad \phi\in C_0^{\infty}(I\!R^N) \tag{5-58}$$

ou seja, (u,v) é solução fraca de $(*)_{\lambda}$. E por construção temos que $g^1\in L^{I\!R^N}(I\!R^N)$, então pelo Teorema B.8 $u\in C^1(I\!R^N)$. De forma análoga $v\in C^1(I\!R^N)$.

A positividade de u,v segue pelo fato de termos fixado $\Omega\subset B_k$, para $k>n\in I\!N$

e relembrando que $u_k > 0$ em B_k. Logo $\inf u_k \equiv m_k > 0$. Por outro lado

$$u_n \geq u_k$$

segue que,

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \geq m_k > 0.$$

Consequentemente $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$, de forma análoga temos que $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$. $\square$

APÊNDICE A

Espaços de Lebesgue e de Sobolev

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados importantes sobre Espaços de Lebesgue e Espaços de Sobolev que foram utilizados com frequência neste trabalho.

Lema A.1 (Fatou) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, tais que, $f_n \geq 0$ q.t.p. em Ω, para todo $n \in I\!N$ e $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$. Se, para todo $x \in \Omega$, $f(x) = \liminf_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) \leq +\infty$, então $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega f dx \leq \int_\Omega (\liminf_{n\longrightarrow\infty} f_n) dx.$$

Demonstração: (cf. Brézis [8, p. 90]).

Teorema A.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis satisfazendo:*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, q.t.p. em Ω;
(ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$, tal que, para todo n, $\mid f_n(x) \mid \leq g(x)$, q.t.p. em Ω.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Demonstração: (cf. Brézis [8, p. 90]).

Teorema A.3 *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que, $\| f_n - f \|_p \longrightarrow 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$, tais que,*

(i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$, q.t.p. em Ω;
(ii) $\mid f_{n_k}(x) \mid \leq h(x)$, $\forall k$, q.t.p. em Ω.

Demonstração: (cf. Brézis [8, p. 94]).

Teorema A.4 (Desigualdade de Hölder) *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega \mid fg \mid dx \leq \left(\int_\Omega \mid f \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \mid g \mid^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Demonstração: (cf. Brézis [8, p.92]).

Consideremos $W^{1,p}(\Omega)$, com $1<p<\infty$, o espaço usual de Sobolev equipado com a norma

$$\| u \|_{1,p}=(\| u \|_p^p+\| \nabla u \|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

e seja $W_0^{1,p}(\Omega)$ o subespaço fechado e convexo de $W^{1,p}(\Omega)$ dado por

$$W_0^{1,p}(\Omega)=\{u\in W^{1,p}(\Omega); u\,|_{\partial\Omega}=0\},$$

onde $u_{|\partial\Omega}=0$ é a restrição do traço a fronteira de Ω

Lema A.5 *Seja $\Omega\subset I\!R^N$ aberto e $(f_n)\subset L^s(\Omega)$, para $s>1$, uma sequência limitada. Se $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ q.t.p em Ω. Então $f\in L^s(\Omega)$ e $f_n\rightharpoonup f$ em $L^s(\Omega)$.*

Demonstração:(cf. [9]).

Teorema A.6 *Seja E um conjunto mensurável, $1<p<\infty$, e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Então se $f_n\rightharpoonup f$ em $L^p(E)$ se, e só se*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E gf_n dx=\int_E gf dx,\quad g\in L^q(E).$$

Demonstração: (cf. [34, p.163]).

Teorema A.7 (Continuação da Integração) *Se f é integrável sobre $I\!R^N$ e Ω_n é uma sequência crescente, onde $\cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n=I\!R^N$. Então*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n} f dx\longrightarrow\int_{I\!R^N} f dx.$$

Demonstração: (cf. Royden [34, p. 375]).

Teorema A.8 (Desigualdade de Poincaré-Sobolev) *Seja $\Omega\subset I\!R^N$ um domínio limitado. Então existe uma constante $c=c(p)$, tal que, para todo $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se*

$$\int_\Omega |\, u\,|^p\, dx\le c\int_\Omega |\,\nabla u\,|^p\, dx.$$

Demonstração: (cf. Adams [1, p. 184]).

Teorema A.9 (Desigualdade de Hardy) *Seja $\Omega\subset I\!R^n$ aberto limitado de classe C^1 e $1<p<\infty$. Considere $d(x)=dist(x,\Gamma)$. Existe uma constante C tal que;*

$$\left\|\frac{u}{d}\right\|_p\le C\|\nabla u\|_p,\qquad \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demonstração: (cf. Brézis [8, p.313]).

Lema A.10 *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e assuma que $supp(u)$ é um subconjunto compacto de Ω. Então, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: (cf. Brézis [8, p.288]).

Definição A.11 *Dizemos que um dominio Ω satisfaz a propriedade do cone se para qualquer $x \in \Omega$, existe um cone limitado C_x, com vértice em x, tal que, C_x está inteiramente contido em Ω.*

Definição A.12 *Dizemos que um domínio Ω satisfaz a propriedade de lipschitz local se existe uma cobertura localmente finita O por abertos U, tais que, $O \cap U$ são gráficos de funções uniformemente lipschitzianas.*

Teorema A.13 (Imersões Contínuas de Sobolev) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio satisfazendo a propriedade do cone, $m \geq 0$ inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões abaixo são contínuas:*

(i) Se $m < \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$;
(ii) Se $m = \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $p \leq q \leq \infty$;
(iii) Se $\dfrac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$, onde $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), |\alpha| \leq j\}$;
(iv) Se $m-1 < \dfrac{n}{p} < m$ e Ω tem a propriedade de lipschitz local, então,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega}), \quad onde \quad 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}.$$

Demonstração: (cf. Figueiredo [17], Adams [1]).

Teorema A.14 (Rellich-Kondrachov) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio satisfazendo a propriedade do cone, $m \geq 1$ inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões abaixo são compactas:*

(i) Se $m < \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$;
(ii) Se $m = \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $1 \leq q \leq \infty$;
(iii) Se $\dfrac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$, onde e $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, onde $1 \leq q \leq \infty$;
(iv) Se $\dfrac{n}{p} < m$ e Ω tem a propriedade de lipschitz local, então,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}).$$

(v) *Se* $m-1<\dfrac{n}{p}<m$ *e* Ω *tem a propriedade de lipschitz local, então,*

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega}),\ \ onde\ \ 0<\lambda\leq m-\frac{n}{p}.$$

Em particular, se $n=(m-1)p$*, então,* $W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega})$*, para* $0<\lambda<1$.

Demonstração: (cf. Figueiredo [17], Adams [1]).

Teorema A.15 (Desigualdade de Simmons) *Sejam* $x,y\in I\!R^N$ *e* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *o produto escalar natural em* $I\!R^N$*. Então,*

$$\langle|\,x\,|^{p-2}\,x-|\,y\,|^{p-2}\,y,x-y\rangle\geq\begin{cases}c_p\,|\,x-y\,|^p, & se\quad p\geq 2,\\ c_p\dfrac{|\,x-y\,|^2}{(|\,x\,|+|\,y\,|)^{2-p}}, & se\quad 1<p<2.\end{cases}\tag{A-1}$$

Demonstração: (cf. Peral [33, p. 80]).

Corolário A.16 *Seja* $u_1,u_2\in W_0^{1,p}(\Omega)$ *então*

$$\int_\Omega\langle|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2,\nabla(u_1-u_2)\rangle\geq\begin{cases}c_p\displaystyle\int_\Omega|\,\nabla(u_1-u_2)\,|^p, & p\geq 2,\\ c_p\dfrac{\left(\displaystyle\int_\Omega|\,\nabla u_1-\nabla u_2\,|^p\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega(|\,\nabla u_1\,|+|\,\nabla u_2\,|)^p\right)^{\frac{2-p}{p}}}, & 1<p<2\end{cases}$$

Demonstração: Para $p\geq 2$ é uma aplicação imediata do teorema A.15. Agora, suponhamos que $1<p<2$, e utilizando a desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega|\,\nabla(u_1-u_2)\,|^p\,dx=\int_\Omega|\,\nabla(u_1-u_2)\,|^p\,.\frac{(|\,\nabla u_1\,|+|\,\nabla u_2\,|)^{\frac{p(p-2)}{2}}}{(|\,\nabla u_1\,|+|\,\nabla u_2\,|)^{\frac{p(p-2)}{2}}}dx$$

$$\begin{aligned}&\leq\left(\int_\Omega\left(\frac{|\,\nabla(u_1-u_2)\,|}{|\,\nabla u_1\,|+|\,\nabla u_2\,|^{\frac{p(p-2)}{2}}}\right)^{\frac{2}{p}}dx\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_\Omega\left((|\,\nabla u_1\,|+|\,\nabla u_2\,|)^{\frac{p(p-2)}{2}}\right)^{\frac{2}{p(p-2)}}dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\\ &=\left(\int_\Omega\frac{|\,\nabla(u_1-u_2)\,|^2}{(|\,\nabla u_1\,|+|\,\nabla u_2\,|)^{2-p}}dx\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_\Omega(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\end{aligned}$$

Então usando o Teorema A.15

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_\Omega |\nabla u_1+|\nabla u_2)|^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}} &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}dx \\ &\leq \int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, \nabla(u_1-u_2)\rangle dx\end{aligned}$$

□

Observação A.17 *O corolário acima pode ser escrito em termos da norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, \nabla(u_1-u_2)\rangle dx \geq \begin{cases} c_p\|(u_1-u_2)\|^p, & p\geq 2, \\ c_p\frac{\|u_1-u_2\|^2}{(\|u_1\|+\|u_2\|)^{2-p}}, & 1<p<2 \end{cases} \tag{A-2}$$

Demonstração: De fato, como

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega (|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \||\nabla u_1|+|\nabla u_2|\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega}+\|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega}\end{aligned}$$

o que implica,

$$\frac{1}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)dx^p\right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{1}{\|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega}+\|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega}}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega}+\|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega}\right)^{2-p}} &\leq \frac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p dx\right)^{\frac{2-p}{p}}} \\ &\leq \int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, \nabla(u_1-u_2)\rangle dx\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2, \nabla(u_1-u_2)\rangle dx \geq \begin{cases} c_p\|(u_1-u_2)\|^p, & p\geq 2, \\ c_p/\frac{\|u_1-u_2\|^2}{(\|u_1\|+\|u_2\|)^{2-p}}, & 1<p<2 \end{cases}$$

□

APÊNDICE B

Resultados de Regularidade

Considere o problema de contorno

$$\begin{cases} div\mathcal{A}(x,u,\nabla u)+\mathcal{B}(x,u,\nabla) &= 0 \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{B-1}$$

Inicialmente vamos impor as seguintes condições sobre $\mathcal{B}calA$ e $\mathcal{B}$:

(F_1) $\displaystyle\sum_{i,k=1}^{N}\frac{\partial A^k}{\partial\eta_i}(x,\mu,\eta)\xi_j\xi_k \geq \lambda(k+|\eta|)^m|\xi|^2;$

(F_2) $\displaystyle\sum_{i,k=1}^{N}|\frac{\partial A^k}{\partial\eta_i}(x,\mu,\eta)| \leq \Lambda(k+|\eta|)^m;$

(F_3) $|\mathcal{A}(x,\mu,\eta)-\mathcal{A}(y,\upsilon,\eta)| \leq \lambda(1+|\eta|)^{m+1}[|x-y|^\alpha+|\mu-\upsilon|^\alpha]$

(F_4) $|\mathcal{B}(x,\mu,\eta)| \leq \lambda(1+\eta)^{m+2}$

para todo $(x,\mu,\eta)\in\partial\Omega\times[-M_0,M_0]\times I\!R^N$,
para todo $y,\upsilon\in\Omega\times[-M_0,M_0]$ e para todo $\varepsilon\in I\!R^N$, onde $0<\alpha,\lambda,\Lambda,M_0\in I\!R$ com $\alpha\leq 1$, $\lambda\leq\Lambda$ e o $0\leq k\in I\!R$.

Teorema B.1 (Lieberman) *Seja $\Omega\in I\!R^N$ um domínio limitado com fronteira $C^{1,\alpha}(\Omega)$. Suponha que $\mathcal{A}e\mathcal{B}$ satisfazem $(F_1)-(F_4)$. Se u é uma solução fraca limitada de B-1 com $\|u\|_\infty\leq M_0$ em Ω, então existe uma constante positiva β dependendo de $\alpha,\Lambda\backslash\lambda,m,N$ tal que $u\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e além disso*

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})}\leq C$$

onde C depende de $\alpha,\Lambda\backslash\lambda,m,M_0,N,\Omega$.

Demonstração: (cf. Lieberman [29])

Afirmação O operador p-Laplaciano satisfaz $(F_1)-(F_3)$.

De fato, seja

$$\mathcal{A}(x,z,\eta)=|\eta|^{p-2}\eta=(A^1,...,A^N)=(|\eta|^{p-2}\eta_1,...,|\eta|^{p-2}\eta_N)$$

e

$$\frac{\partial A^k}{\partial\eta_i}(x,z,\eta)=(p-2)|\eta|^{p-4}\eta_i\eta_k+|\eta|^{p-2}\delta_{i,k},$$

onde

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & se \;\; i = k, \\ 0 & se \;\; i \neq k. \end{cases} \tag{B-2}$$

Verificaremos (F_1) e (F_2), pois (F_3) é imediata. **(1)** Verificação de (F_1)

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial A^k}{\partial \eta_i}(x,z,\eta)\xi_i\xi_k &= (p-2)|\eta|^{p-4}\sum_{i,k=1}^{N}\eta_i\eta_k\xi_i\xi_k + |\eta|^{p-2}|\xi|^2 \\ &= (p-2)|\eta|^{p-4}(\langle\eta,\xi\rangle)^2 + |\eta|^{p-2}|\xi|^2 \\ &\geq \begin{cases} (p-2)|\eta|^{p-2}|\eta|^2 + |\eta|^{p-2}|\xi|^2 & \text{se} \quad p \leq 2 \\ |\eta|^{p-2}|\xi|^2 & \text{se} \quad p > 2 \end{cases} \\ &\geq \min\{1, p-1\}|\eta|^{p-2}|\xi|^2. \end{aligned}$$

(2) Verificação de (F_2)

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i,k}^{N} \frac{\partial A^k}{\partial \eta_i}(x,z,\eta)\right| &\leq \left|(p-2)|\eta|^{p-4}\sum_{i,k=1}^{N}\eta_i\eta_k + |\eta|^{p-2}\sum_{i,k=1}^{N}\delta_{i,k}\right| \\ &= \left|(p-2)|\eta|^{p-2} + |\eta|^{p-2}\right| \\ &= (p-1)|\eta|^{p-2} \\ &\leq \max\{1, p-1\}|\eta|^{p-2}. \end{aligned}$$

□

O próximo resultado estudamos a regularidade para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{B-3}$$

Teorema B.2 *Seja $g \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ e suponha que existem constantes $\gamma \in (0,1)$ e $c > 0$ tais que*

$$|g(x)| \leq \frac{c}{d(x)^{\gamma}} \qquad q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Se $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ é solução de B-3 então existem $\alpha \in (0,1)$ e $M > 0$, dependendo de c, γ, e Ω; tais que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|u\|_{u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} < M.$$

Demonstração: (cf. Haí [26]).

Aqui $d(x) := d(x, \partial\Omega)$.

Primeiro note que $d \in Lip(\overline{\Omega}) \cap C^2(V_{\partial\Omega})$, onde $V_{\partial\Omega}$ é uma vizinhança tubular de $\partial\Omega$,

De fato, tome $x, y \in I\!R^N$ e escolha $z \in \partial\Omega$ tal que

$$d(y) = |y - z|.$$

Logo

$$d(x) \leq |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + d(y),$$

ou seja,

$$d(x) - d(y) \leq |x - y|.$$

Trocando x por y na expressão acima temos

$$d(y) - d(x) \leq |x - y|.$$

Portanto

$$|d(x) - d(y)| \leq |x - y|, \qquad para \quad x, y \in \overline{\Omega}$$

Como na fronteira $\partial\Omega$ é C^2, d é uma função C^2 numa vizinhança de $\partial\Omega$. Mais precisamente, por Gilbarg e Trundinger (cf. [23] , Lema 14.16, pg 355) temos que $d \in C^2(\Gamma_\mu)$, para algum $\mu > 0$, onde

$$\Gamma_\mu := \{x \in \overline{\Omega} : d(x) < \mu\}.$$

Lema B.3 *Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$ positiva e $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em Ω. Então existem C_1, C_2, com $0 < C_1 < C_2$ tal que*

$$C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_2 d(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Demonstração: Primeiro vamos mostrar a desigualdade para x próximo da fronteira. Tome δ suficientemente pequeno e considere Ω_δ, cuja definição é

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega | d(x) \leq 0\}$$

Como $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\frac{\partial u(x)}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$, existe $c > 0$ tal que para todo $x \in \Omega_\delta$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) \leq -c.$$

Sendo $d \in C^1(\overline{\Omega})$, daí existe $m > 0$ tal que

$$-m \leq d(x) \leq m \qquad e \qquad -m \leq \frac{\partial d}{\partial \eta} \leq m \qquad em\ \overline{\Omega}$$

Daí, tomando $0 < l \leq \frac{c}{m}$, temos que

$$l\frac{\partial d}{\partial \eta}(x) \geq -lm \geq -c \geq \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)$$

logo,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) - l\frac{\partial d}{\partial \eta}(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \Omega_\delta \tag{B-4}$$

Tome $x_0 \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$ próximo de X_0 tal que $x - x_0$ está na direção de η. Faça $\gamma(t) = x + t\eta$, com $t \in [0, |x - x_0|]$, então $x_0 = x + |x - x_0|\eta = \gamma(|x - x_0|)$ e $\gamma(0) = x$. Note

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\gamma(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(x + t\eta) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\gamma_i = \frac{\partial u}{\partial \eta}(\gamma(t))$$

e

$$\frac{\partial d}{\partial t}(\gamma(t)) = \frac{\partial d}{\partial t}(x + t\eta) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial d}{\partial x_i}\gamma_i = \frac{\partial d}{\partial \eta}(\gamma(t))$$

Então como

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \int_0^{|x-x_0|} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{|x-x_0|} \frac{\partial u(x)}{\partial t}(\gamma(t)) dt,$$

$$\int_\gamma \frac{\partial d}{\partial \eta} ds = \int_0^{|x-x_0|} \frac{\partial d}{\partial \eta}(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{|x-x_0|} \frac{\partial d(x)}{\partial t}(\gamma(t)) dt,$$

usando B-4, segue que

$$\int_0^{|x-x_0|} \frac{\partial u}{\partial t}(\gamma(t)) dt \leq l \int_0^{|x-x_0|} \frac{\partial d}{\partial t}(\gamma(t)) dt$$

ou seja,

$$u(\gamma(t))|_0^{|x-x_0|} \leq l u(\gamma(t))|_0^{|x-x_0}$$

Como $u(x_0) = 0 = d(x_0)$, então

$$ld(x) \leq u(x), \qquad para\ algum\ l > 0.$$

A outra desigualdade é análoga basta tomar $L > \frac{c}{m}$ daí

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) + L\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) \geq 0 \qquad para\ todo\ x \in \Omega_\delta \tag{B-5}$$

pois $L\frac{\partial d}{\partial \eta}(x) - \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) \geq -Lm + c$. Repetindo os argumento feitos acima, obtemos

$$u(x) \leq Ld(x).$$

Se x não estiver próximo da fronteira, isto é $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}$, como $u, d > 0$ em Ω temos

$$-\frac{m}{u(x)} \leq \frac{d(x)}{u(x)} \leq \frac{m}{u(x)}$$

e

$$-\frac{\inf\limits_{x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}} u(x)}{d(x)} \leq \frac{u(x)}{d(x)} \leq \frac{\sup\limits_{x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}} u(x)}{d(x)}$$

Portanto existem constantes $\tilde{l}, \tilde{L} > 0$ com $\tilde{L} < \tilde{l}$ tais que,

$$\tilde{l}d(x) \leq u(x) \leq \tilde{L}d(x), \qquad x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$$

Tomando $C_1 = \min l, \tilde{l}$ e $C_2 = \max\{L, \tilde{L}\}$, que obtemos o que queríamos. □

Teorema B.4 *Seja $\Omega \subset I\!R^N$ um domínio limitado.*
(i) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p'}(\Omega)$ é um operador limitado.
(ii) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p'}(\Omega)$ é coercivo.
(iii) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p'}(\Omega)$ é um operador estritamente monótono, ou seja, $\langle -\Delta_p u - (-\Delta_p v), u - v \rangle > 0$, para todo $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq v$.
(iv) $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p'}(\Omega)$ é um homeomorfismo.

Demonstração: Temos que operador $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p'}(\Omega)$ é dado por,

$$\begin{array}{llll} -\Delta_p \text{ u:} & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p'}(\Omega) \\ & \text{u} & \longmapsto & -\Delta_p u : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p'}(\Omega) \\ & & & v \longmapsto \langle -\Delta_p u, v \rangle = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \end{array}$$

Afirmamos que o operador $-\Delta_p$ está bem definido. De fato, pois

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u, v \rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \\ &\leq \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_\Omega ||\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v| dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q dx \right)^{\frac{1}{q}} . \left(\int_\Omega (|\nabla v|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= \quad \|\nabla u\|_p^{p-1}\|\nabla v\|_p$$

como $|\nabla u|, |\nabla v| \in L^p(\Omega)$ podemos concluir que $|\langle -\Delta_p u, v\rangle| < +\infty$.

Ou seja $-\Delta_p$ está bem definido.

(i) Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, utilizando o que já foi feito acima para mostrar que $-\Delta_p u$ está bem definido

$$\begin{aligned} \|-\Delta_p u\|_{W^{1,p'}(\Omega)} &= \sup_{\substack{\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\phi\|=1}} \|\nabla u\|_{(p-1)q}^{p-1}.\|\nabla\phi\|_p \\ &\leq \|u\|^{p-1} \end{aligned}$$

Portanto $-\Delta_p$ é limitado.

(ii) Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u, u\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^p dx \\ &= \|u\|^p \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle -\Delta_p u, u\rangle}{\|u\|} = \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\|u\|^p}{\|u\|} = +\infty$$

Ou seja, $-\Delta_p$ é coercivo.

(iii) A monotonicidade do operador segue da desigualdade de Simmons (cf. Teorema A.15)

(iv) (cf. Peral [33, p. 81]). □

Teorema B.5 *(**Browder-Minty**) Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável e seja $T : X \longrightarrow X'$ um operador limitado, contínuo, coercivo e monótono. Então para cada $g \in X'$ existe uma solução da equação*

$$Tu = g$$

Ou seja $T(X) = X'$.

Demonstração: (cf. Brézis [8, p. 145])

Teorema B.6 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), & em \quad \Omega \\ u = 0, & em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{B-6}$$

onde $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado com fronteira suave,* $p > 1$. *Então (B-6) admite uma única solução fraca* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach reflexivo e separável e $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p'}(\Omega)$ um operador limitado, contínuo, coercivo e monótono (cf Teorema B.4). Logo pelo Teorema B.5 existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema (B-6).

A unicidade vem da injetividade do operador $-\Delta_p$ dado pelo item (iv) do Teorema B.4. □

Observação B.7 *Como* $f \in L^\infty(\Omega)$ *segue do Teorema C.11 que* $u \in L^\infty(\Omega)$. *Do Teorema de regularidade do Lieberman (cf. Teorema B.1), temos que* $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Se supormos que* $f \geq 0$ *e* $f \not\equiv 0$, *E utilizando como função teste* $\phi = -u^-$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla(-u^-) dx = -\int_\Omega f(x) u^- dx \leq 0$$

Portanto,

$$\|u^-\| = 0$$

Então $u \geq 0$, *então pelo Princípio da Comparação Forte (cf Teorema C.5) temos que*

$$u \equiv 0 \qquad em \quad \Omega \quad ou \quad u > 0 \qquad em \quad \Omega$$

se $u \equiv 0$ *implicando que* $f \equiv 0$ *em* Ω, *contrariando o fato que* $f \not\equiv 0$ *em* Ω.

Portanto, $u > 0$ *em* Ω. *Além disso, utilizando o Lema de Hopf (cf. C.6) temos que* $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0$. □

Teorema B.8 *Seja* $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ *uma solução fraca de*

$$-div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \phi, \;\; p > 1, \;\; \phi \in L_{loc}^q(\Omega)$$

$q > p'N$. *Então* $u \in C_{loc}^{1+\alpha}(\Omega)$.

Demonstração: (cf. Dibenedetto [16]).

Considere o problema,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = g(x,u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{B-7}$$

onde g tem a seguinte condição de crescimento,

$$|g(x,u)| \leq c_1 + c_2|u|^{p-1}. \tag{B-8}$$

Teorema B.9 *Seja u solução fraca da equação (B-7) sobre uma bola $B_{2R} \subset \Omega$. Suponha que $p < N$ e satisfaça (B-8). Então,*

$$\|u\|_{\infty,R} \leq CR^{-\frac{N}{p}} \left(\|u\|_{p,2R} + kR^{\frac{N}{p}} \right)$$

e

$$\||\nabla u|\|_{p,R} \leq CR^{-1} \left(\|u\|_{p,2R} + kR^{\frac{N}{p}} \right),$$

onde $C \equiv C(N,p,c_2,r) > 0$ e $k \equiv \left(r|g|_{\frac{N}{p-1},2r} \right)^{\frac{1}{p-1}}$.

Demonstração: (cf. Serrin [39]).

APÊNDICE C

Princípio de Comparação e de Máximo

Neste apêndice apresentamos alguns resultados sobre EDP e Equações Lineares e Quasilineares que utilizamos frequêntemente durante a elaboração deste trabalho.

Teorema C.1 (do Divergente) *Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ n funções C^1, definidas em uma vizinhança aberta O de $\overline{\Omega}$ tomando valores em $\mathbb{C}$; seja $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Temos*

$$\int_\Omega div\varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \nu d\sigma.$$

Demonstração: (cf. Treves [41, p. 78]).

Teorema C.2 (Idêntidades de Green) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o Teorema do Divergente e $u, v \in C^2(\Omega)$. Então, valem as seguintes idêntidades*

$$\int_\Omega u\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

e

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Demonstração: (cf. Folland [18, p. 69]).

Teorema C.3 (Vázquez) *Seja $u \in C^1(\Omega)$, tal que, $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ q.t.p. em Ω, $\Delta_p u \leq g(u)$ q.t.p. em Ω com $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, não-decrescente, $g(0) = 0$ e $g(s) = 0$ para algum $s > 0$ ou $g(s) > 0$, para todo $s > 0$. Então, u não é idênticamente nula em Ω e $u > 0$ em todo Ω.*
Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ para $x_0 \in \partial\Omega$, Ω satisfaz a condição da esfera interior e $u(x_0) = 0$, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Demonstração: (cf. Vázquez [42, p. 200]).

Lema C.4 (Desigualdade do tipo Harnack) *Suponha que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u & \geq & 0 & \quad em \quad \Omega \\ u & \geq & 0 & \quad sobre \quad \Omega. \end{cases} \tag{C-1}$$

Seja $x_0 \in \Omega$, $\delta > 0$ *satisfazendo*

$$\overline{B(x_0, 5\delta)} \subseteq \Omega$$

e $s > 0$ *onde* $s < \frac{N(p-1)}{N-p}$, *se* $p \leq N$ *e* $s \leq \infty$ *se* $p \geq N$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *que depende de N,s,p e* δ *com a seguinte propriedade*

$$\|u\|_{L^s(B(x_0,2\delta))} \leq C\delta^{\frac{N}{s}} \inf_{B(x_0,\delta)} u$$

Demonstração:(ver Damascelli, L. [13]).

Teorema C.5 (Princípio da Comparação Forte) *Suponha que* Ω *sejam um domínio conexo em* $\mathbb{R}^N$ *e que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ *seja tal que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u & \geq & 0 & \quad em \quad \Omega \\ u & \geq & 0 & \quad sobre \quad \Omega. \end{cases} \tag{C-2}$$

Podemos concluir que ocorre apenas uma das duas alternativas

$$u \equiv 0 \qquad em \quad \Omega \quad ou \quad u > 0 \qquad em \quad \Omega$$

Demonstração: Suponha a existência de $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0 = 0)$, defina

$$F = \{x \in \Omega \ / \ u(x) = 0\}$$

Como $F \neq 0$ e u é contínua segue que F é fechado em Ω. Sendo Ω existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B(x_0, 5\delta)} \subset \Omega$. Pela Desigualdade do tipo Harnarck (ver Teorema C.4). Existem $C > 0$ e $s > 0$ tais que

$$\|u\|_{L^s B(x_0,2\delta)} \leq C\delta^{\frac{N}{s}} \inf_{B(x_0,\delta)} u$$

Como $u \geq 0$ em Ω e $u(x_0) = 0$. Segue que o $\inf_{B(x_0,\delta)} u = 0$, daí

$$\int_{B(x_0,2\delta)} |u|^s dx = 0$$

Sendo $u \geq 0$ e contínua segue que $u \equiv 0$. Portanto, F é aberto em Ω. Sendo Ω conexo devemos ter que $\omega = F$. Portanto $u \equiv 0$ ou $u > 0$ em Ω.

Lema C.6 (Hopf) *Seja $\Omega \subset I\!R^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & \geq & 0 & em & \Omega & (Sentido\ Fraco), \\ u & > & 0 & em & \Omega, \\ u & = & 0 & em & \partial\Omega. \end{cases} \tag{C-3}$$

Então, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$ para $x_0 \in \partial\Omega$, onde ν denota o vetor normal unitário exterior à $\partial\Omega$.

Demonstração: (cf. Sakaguchi [36, p. 417]).

Teorema C.7 (Princípio da Comparação Fraca) *Seja $\Omega \in I\!R^N$, um domínio limitado e com fronteira suave. Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 & \leq & -\Delta_p u_1 & em\ \Omega \\ u_1 & \leq & u_2 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{C-4}$$

No sentido fraco, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\phi dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\phi dx$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então $u_1 \leq u_2$ em Ω.

Demonstração: (cf. Peral [33, p. 83]).

Teorema C.8 *Seja $1 < p$ e $\Omega \subseteq I\!R^N$ domínio limitado e $\partial\Omega \in C^2$. Se $f, g \in L^\infty(\Omega)$ e $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ e*

$$-\Delta_p u = f \quad e \quad -\Delta_p v = g \quad em \quad \Omega.$$

Se $f \geq g \geq 0$ q.t.p em Ω e $C = \{x \in \Omega / f(x) = g(x)\}$ tem interior vazio, então

$$\begin{gathered} u(x) > v(x) \geq 0, \quad \forall\ x \in \Omega \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \eta} < \frac{\partial v(x)}{\partial \eta} \quad \forall\ x \in \partial\Omega \end{gathered}$$

Demonstração: (cf. Guedda e Verón [25, p. 888]).

As condições abaixo serão hipóteses importante para o próximo Teorema da Comparação. Seja $\Omega \subseteq I\!R^N$. Considere a seguinte função mensurável não-linear $\Psi_i : \Omega \times (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ satisfaça

(PC_1) Para cada $x \in \Omega$ a função $t \longmapsto \Psi_i(x,t)t^{1-p}$ é decrescente em $(0,\infty)$.
(PC_2) $\Psi_1(x,z) \leq \Psi_2(x,z)$ para todo $(x,z) \in \Omega \times (0,\infty)$.

Teorema C.9 (Princípio da Comparação) *Suponha que Ψ_1, Ψ_2 satisfação (PC_1) e que Ψ_1 ou Ψ_2 satisfaça (PC_2). Se $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u \in L^\infty(\Omega)$, $u > 0$, $v > 0$ em Ω tal que*

$$-\Delta_p u \leq \Psi_1(x,u) \qquad e \qquad -\Delta_p v \geq \Psi_2(x,v) \quad em \quad \Omega.$$

Se $u \leq v$ em $\partial\Omega$ e $\Psi_1(x,u)$ ou $\Psi_2(x,u) \in L^1(\Omega)$, então $u \leq v$ em Ω.

Demonstração:[cf. Mohammed [32, p. 243]]

Teorema C.10 (Lema fundamental) *Suponha que $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua tal que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$, em $|\xi| = r$, onde $\langle .,. \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^m$ e $|.|$ é sua norma relacionada. Então, existe $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(z_0) = 0$.*

Demonstração: (cf. Lions [30]).

Teorema C.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $1 < p < N$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução fraca de (B-7). Se g tem a seguinte condição de crescimento,*

$$|g(x,u)| \leq C(1 + |u|^r), \quad com \quad r + 1 \leq p^* = \frac{Np}{N-p} \tag{C-5}$$

Então $u \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: (cf. Peral [33, p. 97]).

Teorema C.12 *Suponha que $f : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory tal que*

$$t \longrightarrow \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}, \quad é\ uma\ função\ descrente\ q.t.p \quad x \in \Omega.$$

Se $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ são respectivamente sub e super-soluções de (B-7) tal que $\frac{u_1}{u_2} \in L^\infty(\Omega)$ e $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega$ então $u_1 \leq u_2$ q.t.p em Ω.

Demonstração: Seja $J : L^1(\Omega) \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ dado por

$$J(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u^{\frac{1}{p}}| dx & , \quad u \geq 0, \ u^{\frac{1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \infty & , \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{C-6}$$

Definamos,

$$D(J) := \{u \in L^1(\Omega) \mid u \geq 0, \quad u^{\frac{1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

Assim pelo, seguinte, lema devido a Díaz e Saá, é convexo, semi-contínuo inferiormente e $J \not\equiv \infty$.

Lema C.13 *Seja $J : L^1(\Omega) \longrightarrow (-\infty, +\infty]$, definido em (C-6). Então J é convexo, semi-contínuo inferiormente e $J \not\equiv +\infty$.*

Demonstração do Lema: (cf. Díaz e Saá [15]).

E note que

$$\langle J'(u),\phi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\left(\frac{\phi}{u^{\frac{p-1}{p}}}\right)dx, \quad u\in D(J), \;\; \phi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Seja

$$\Omega_0 := \{x\in\Omega \mid u_1(x) > u_2(x)\}$$

Afirmamos que $\mid \Omega_0 \mid = 0$. De fato, suponha que $\mid \Omega_0 \mid \neq 0$. E seja $\phi_i = \frac{u_1^p - u_2^p}{u_i^p - 1}$, $i = 1,2$. Segue que $\phi_1,\phi_2 \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$, pois

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \text{em} \;\; \partial\Omega_0, \qquad \frac{u_1}{u_2}, \; \frac{u_2}{u_1} \in L^\infty(\Omega_0),$$

e

$$\phi_1 = \left[u_1 - \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\frac{1}{p}} u_2\right], \quad \phi_2 = \left[\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{\frac{1}{p}} u_1 - u_2\right]$$

Pela convexidade de J e o fato que $u_1,u_2\in D(J)$ e $\frac{u_1}{u_2}$, $\frac{u_2}{u_1}\in L^\infty(\Omega_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle J'(u_1^p) - J'(u_2^p), u_1^p - u_2^p\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\left(\frac{u_1^p - u_2^p}{u_1^{p-1}}\right) - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\left(\frac{u_1^p - u_2^p}{u_2^{p-1}}\right)dx \end{aligned} \tag{C-7}$$

Segue de (C-7) e o fato que $t \longmapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ é decrescente que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_0} |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\left(\frac{u_1^p - u_2^p}{u_1^{p-1}}\right) - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\left(\frac{u_1^p - u_2^p}{u_2^{p-1}}\right)dx \\ &\leq \int_{\Omega_0}\left(\frac{f(x,u_1)}{u_1^{p-1}} - \frac{f(x,u_2)}{u_2^{p-1}}\right)(u_1^p - u_2^p)dx < 0 \end{aligned} \tag{C-8}$$

ou seja, temos que $u_1 = u_2$ q.t.p em Ω_0, contrariando a definição de Ω_0. Portanto $\mid \Omega_0 \mid = 0$ e $u_1 \leq u_2$. $\square$

APÊNDICE D

Minimização de Funcionais Energia

Neste apêndice estudaremos a regularidade dos funcionais energia que aparecem neste trabalho. Consideramos dois casos:

Lema D.1 *Seja $\Omega \in I\!R^N$, $N \geq 3$, um conjunto aberto. Para $p \in (1,\infty)$, definamos o funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow I\!R$ por*

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

Então J é diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$J'(u)v = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx.$$

Demonstração: (cf. Badiale [6, p. 88]).

Lema D.2 *Seja $\Omega \in I\!R^N$, $N \geq 3$, um conjunto aberto. Para $p \in (1,\infty)$, e $\beta + 1 < p$. Definamos o funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow I\!R$ por*

$$J(u) = \frac{1}{\beta+1}\int_\Omega (u^+)^{\beta+1} v dx.$$

Então J é diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$J'(u)v = \int_\Omega (u^+)^{\beta+1} v dx.$$

Demonstração: Como,

$$u^+ = \frac{1}{2}(|u| + u)$$

e utilizando os mesmos argumentos feito em [6, p. 88], temos o desejado.

Lema D.3 *Seja* $0 < \beta < p-1$. *Então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^\beta \ \ em \ \ \Omega \\ u > 0, \ \ em \ \ \Omega \\ u = 0 \ \ sobre \ \partial\Omega \end{cases} \tag{D-1}$$

tem solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *positiva.*

Demonstração: Seja $J : W_0^{1,p} \longrightarrow I\!R$ dado por

$$J(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{1}{\beta+1}\int_\Omega (u^+)^{\beta+1}$$

o funcional energia associado ao problema é coercivo, pois

$$\begin{aligned} |J(u)| &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{\beta+1}\|u\|^{\beta+1} \\ &= \|u\|^p\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{\beta+1}\|u\|^{\beta+1-p}\Big) \end{aligned}$$

Como por hipótese $0 < \beta < p-1$, logo, $|J(u)| \to \infty$, quando $\|u\| \to \infty$.
Donde, $\exists \ C > 0$, onde

$$J(u) \geq -c, \ \ \forall \ \ u \in W_0^{1,p}$$

Seja,

$$I = \inf_{u \ \in \ W_0^{1,p}} J(u)$$

Tomando $(u_n) \subseteq W_0^{1,p}$ tal que,

$$J(u_n) \longrightarrow I$$

Então,

$$\begin{aligned} J(u_n) \leq C_1 + 1 \ \ &\Longrightarrow \ \ \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p - \frac{1}{\beta+1}\int_\Omega (u_n^+)^{\beta+1} \leq C_1 + 1 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \ \ \frac{1}{p}\|u_n\|^p \leq C_1 + 1 + \frac{1}{\beta+1}\int_\Omega (u_n^+)^{\beta+1} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \ \ \|u_n\|^p \leq C_3 + C_4\|u_n\|^{\beta+1} \end{aligned}$$

Como, $0 < \beta < p-1$, segue que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo

$$u_n \rightharpoonup u, \ \ \text{em} \ \ W_0^{1,p}(\Omega)$$

Logo, por imersão compacta (ver o teorema A.13)

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega)$$

Daí, pelo A.3

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ q.t.p em } \Omega \\ |u_n| \leq h \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{D-2}$$

Donde, (veja teorema E.3)

$$\|u\|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^p$$

De D-2 temos

$$\begin{cases} u_n^+ \longrightarrow u^+ \text{ q.t.p em } \Omega \\ |u_n^+| \leq h \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{D-3}$$

Pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n^+)^{\beta+1} dx = \int_\Omega (u^+)^{\beta+1} dx$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{\beta+1}\int_\Omega (u^+)^{\beta+1}dx \leq \frac{1}{p}\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^p - \frac{1}{\beta+1}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n^+)^{\beta+1}dx \\ &= \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{1}{\beta+1}\int_\Omega (u_n^+)^{\beta+1}dx\right) = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = I \Longrightarrow \\ J(u) &= I \end{aligned}$$

Isto é, o ínfimo do funcional é atingido por algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelos lemas D.1 e D.2 obtemos,

$$J'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega (u^+)^\beta v dx$$

Sendo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I = \min_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u) \Longrightarrow J(u) \leq J(u+tv), \ t \in I\!R \Longrightarrow$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \geq 0 \tag{D-4}$$

e

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \leq 0 \tag{D-5}$$

De D-4 e D-5, concluímos que

$$\begin{aligned} J'(u)v &= 0 = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega (u^+)^\beta v dx \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega (u^+)^\beta v dx \end{aligned}$$

Portanto $u \in W_0^{1,p}$ é solução fraca de D-1. Facilmente, conseguimos ver que u satisfaz a hipótese do Teorema C.11,o qual, implica que $u \in L^\infty(\Omega)$. Donde utilizando o Teorema de Regularidade devido à Lieberman B.1, então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. No entanto, $u \not\equiv 0$ quase sempre em Ω, pois seja $\varepsilon > 0$ e $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\phi > 0$, logo

$$J(\varepsilon\phi) = \frac{\varepsilon^p}{p}\|\phi\|^p - \frac{\varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1}\int_\Omega \phi^{\beta+1} dx < 0 = J(0)$$

para ε suficientemente pequeno. Ou seja $u \not\equiv 0$.
Tome $v = 0$, como $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega (u^+)^{\beta+1} dx \qquad em, \quad \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad sobre \qquad \partial\Omega. \end{aligned}$$

pelo Princípio da Comparação fraca (ver o Teorema C.7), segue que $u \geq 0$.
Considere,

$$C = \{x \in \Omega \quad / \quad u(x) = 0\}$$

Se $int(C) = \emptyset$, pelo teorema C.8 $u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$.
Mas se $int(C) \neq \emptyset$, então existe $x \in C$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset C$, onde

$$u(B_\delta(x)) = 0 \tag{D-6}$$

fazendo,

$$\begin{aligned} B : [0,\infty) &\longrightarrow I\!R \\ t &\longmapsto t^\beta \end{aligned}$$

onde $0 < \beta < p-1$. B é contínua e não-decrescente e $B(0) = 0$. Como temos D-6 e

$$-\Delta_p u = B(u) \qquad q.t.p \qquad em \quad \Omega$$

Pelo Teorema de Vázquez (ver Teorema C.3) u é identicamente nula ou $u > 0$ em Ω q.t.p.
Mas mostramos que $u \not\equiv 0$ quase sempre em Ω. Segue que $u > 0$ em Ω. $\square$

Seja,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = f(x) \quad em \ \Omega \\ u = 0 \quad em \ \partial\Omega \quad e \quad u \geq 0 \quad em \ \Omega \end{cases} \tag{D-7}$$

Lema D.4 *Seja $1 < p < \infty$ e $\Omega \in I\!R^N$. Suponhamos que $V : \Omega \longrightarrow I\!R$ seja $V \in L^\infty$ e $V \geq 0$. Então o problema (D-7) tem uma única solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Considere o seguinte funcional energia associada ao problema, $J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow I\!R$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + V(x)|u|^p dx - \int_\Omega f(x)u dx$$

o funcional energia associado ao problema é coercivo, pois

$$\begin{aligned} |J(u)| &\geq \frac{1}{p}(\|u\|^p + \|V\|_\infty \|u\|_p) - \|f\|_q \|u\|_p \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - C_1\|f\|_q\|u\| \\ &= \|u\|^p\left(\frac{1}{p} - C_1\|f\|_q\|u\|^{1-p}\right) \end{aligned}$$

Como por hipótese $1 < p$, logo, $|J(u)| \to \infty$, quando $\|u\| \to \infty$.
Donde, $\exists \ c > 0$, onde

$$J(u) \geq -c, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Seja,

$$I = \inf_{u \ \in \ W_0^{1,p}} J(u)$$

Tomando $(u_n) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que,

$$J(u_n) \longrightarrow I$$

Podemos supor, sem perde de generalidade, que $u_n \geq 0$, uma vez que, $|u_n|$ minimiza o funcional energia. De fato,

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^- \geq u_n^+$$

Logo,

$$-|u_n| \leq -u_n^+$$

Implicando,

$$J(|u_n|) \leq J(u_n)$$

Assim,

$$J(|u_n|) \longrightarrow I$$

Então,

$$\begin{aligned} J(u_n) \leq C_1 + 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p + V(x)u_n^p dx - \int_\Omega f(x)u_n dx \leq C_1 + 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\|u_n\|^p \leq C_1 + 1 + \int_\Omega f(x)u dx - \int_\Omega V(x)u_n^p dx \\ &\Longrightarrow \quad \|u_n\|^p \leq C_3 + C_4\|f\|_q\|u_n\| \end{aligned}$$

Como, $1 < p$, segue que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega)$$

Logo, por imersão compacta (ver o teorema A.13)

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega)$$

Daí, pelo Teorema A.3

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ q.t.p em } \Omega \\ |u_n| \leq h \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{D-8}$$

Como $u_n \geq 0$, teremos que $u \geq 0$.
Pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (c.f Teorema A.2),

$$\int_\Omega V(x)u_n^p dx \longrightarrow \int_\Omega V(x)u^p dx$$

$$\int_\Omega f(x)u_n dx \longrightarrow \int_\Omega f(x)u dx$$

Pelo item (iii) do Teorema E.3,

$$\| u \|^p \leq \liminf \| u_n \|^p$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p + \int_\Omega V(x)u^p dx - \int_\Omega f(x)u dx \\ &\leq \frac{1}{p}\left(\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^p + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega V(x)u_n^p dx\right) - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)u_n dx \\ &= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{p}\left(\|u_n\|^p + \int_\Omega V(x)u_n^p dx\right) - \int_\Omega f(x)u_n dx\right] = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} J(u_n) = I \end{aligned}$$

Portanto,

$$J(u) = I$$

Isto é, o ínfimo do funcional é atingido por algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como,

$$J'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla + V(x)u^{p-1}vvdx - \int_\Omega f(x)vdx$$

Sendo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I = \min_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u) \Longrightarrow J(u) \leq J(u+tv), \;\; t \in I\!R$$

Daí,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \geq 0 \tag{D-9}$$

e

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \leq 0 \tag{D-10}$$

De D-9 e D-10, concluímos que

$$J'(u)v \;\; = \;\; 0$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V(x)u^{p-1}vdx - \int_\Omega f(x)vdx = 0$$
$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V(x)u^{p-1}vdx = \int_\Omega f(x)vdx$$

Portanto $u \in W_0^{1,p}$ é solução fraca de (D-7). Suponhamos que (D-7) tenha duas soluções $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla \phi + V(x)u_1^{p-1}\phi dx = \int_\Omega f(x)\phi dx \tag{D-11}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla \phi + V(x)u_2^{p-1}\phi dx = \int_\Omega f(x)\phi dx \tag{D-12}$$

para $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Subtraindo (D-11) de (D-12)

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\right)\phi + V(x)\left(u_1^{p-1} - u_2^{p-1}\right)\phi dx = 0 \tag{D-13}$$

Fazendo $\phi = (u_1 - u_2)^+$, assim como no Lema 5.2 obteremos

$$(u_1 - u_2)^+ = 0 \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega$$

Se subtrairmos (D-12) de (D-11) e fazendo $\phi = (u_1 - u_2)^-$. E seguindo argumentos análogos feito no Lema 5.2, teremos

$$(u_1 - u_2)^- = 0 \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega$$

Ou seja,

$$u_1 - u_2 = 0 \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega$$

Então

$$u_1 = u_2 \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega$$

□

Lema D.5 *Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $m > 0$. Então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{1}{u^\alpha} & em \ \ \Omega \\ u > 0 & em \ \ \Omega \\ u = 0 & em \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{D-14}$$

tem uma única solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo $u \geq \varepsilon\phi_1$ em Ω, onde ε é uma constante positiva e ϕ_1 1ª auto-função do operador p-Laplaciano.

Demonstração:(cf. Giacomoni [21], p. 124).

Observação D.6 *Pelo Lema B.3 existe $C > 0$ tal que*

$$Cd(x) \leq \phi_1$$

Assim,

$$\frac{1}{u^\alpha} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{\phi_1} \leq \frac{K}{d^\alpha}$$

Daí, pelo Teorema B.2 segue que $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

APÊNDICE E

Resultados de Análise Funcional

Definição E.1 (Convergência Fraca) *Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subseteq X$ uma sequência. Dizemos que (x_n) converge fraco em X se existe $x \in X$, tal que,*

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \ \ \forall f \in X^*.$$

Assim, x é o limite fraco de (x_n) e denotamos esta convergência por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema E.2 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Então, existe uma subsequência $(x_{n_j}) \subseteq (x_n)$ e $x \in X$, tal que,*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x. \ \ em \ \ X.$$

Demonstração: (cf. Brézis [8], p. 69).

Teorema E.3 *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em E. Então,*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$ *se, e somente se,* $\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E^*$.
(ii) *Se* $x_n \longrightarrow x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$.
(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$, *então* $(\| x_n \|)$ *é limitada e* $\| x \| \leq \liminf \| x_n \|$.
(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$ *e* $f_n \longrightarrow f$ *em* E^* *(isto é,* $\| f_n - f \|_{E^*} \longrightarrow 0$*), então* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: (cf. Brézis [8, p.58]).

Teorema E.4 *Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sequência em E^*. Então,*

(i) $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E^*, E)$ *se, e somente se,* $\langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall x \in E$.
(ii) *Se* $f_n \longrightarrow f$, *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E^*, E)$.
(iii) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^*, E)$, *então* $(\| f_n \|)$ *é limitada e* $\| f \| \leq \liminf \| f_n \|$.
(iv) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E^*, E)$ *e* $x_n \longrightarrow x$ *em* E, *então* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: (cf. Brézis [8, p.63]).

Teorema E.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *A bola unitária*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia $fraca^*$ $\sigma(E^*, E)$.

Demonstração: (cf. Brézis [8, pg. 56])

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[2] ALVES, C. O.; CORRÊA, F. J. S. A.; GONÇALVES, J. V. A. **Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems**. *Adv. Nonlinear Stud.*, 5(2):265–278, 2005.

[3] ALVES, C. O.; MOUSSAOUI, A. **Existence and regularity of solutions for a class of singular (p(x), q(x))- laplacian systems**. *Pré-print, arXiv:1608.00217*, 2016.

[4] AMBROSETTI, A.; ARCOYA, D. **An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems**. Birkhauser, Berlin, 2012.

[5] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. **Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems**. Cambridge University Press, New York, 2007.

[6] BADIALE, M.; SERRA, E. **Semilinear elliptic equations fo Beginners**. Springer, New York, 2011.

[7] BELLOUT, H. **On a special Schauder basis for the Sobolev spaces $W_0^{1,p}(\Omega)$**. *Illinois J. Math.*, 39(2):187–195, 1995.

[8] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, New York, 2011.

[9] BRÉZIS, H. M.; LIEB, E. A. **A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals**. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88(3):486–490, 1983.

[10] CARL, S.; LE, V. K.; MOTREANU, D. **Nonsmoth Variational Problems and Their Inequalities: Comparison Principles and Applications**. Springer, New York, 2005.

[11] CARRIÃO, P. C.; GONCALVES, J. V.; MIYAGAKI, O. H. **Existence and nonexistence in a class of equations with supercritical growth**. *Appl. Anal.*, 74(3-4):275–287, 2000.

[12] CARRIAO, P. C.; GONCALVES, J. V.; MIYAGAKI, O. H. **Existence and λ-behavior of positive solutions of the equation $-\Delta u + a(x)u = \lambda u^q + u^p$ in $\mathbf{R}^N$**. *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 6(1):19–37, 1999.

[13] DAMASCELLI, L. **Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results**. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(4):493–516, 1998.

[14] DEIMLING, K. **Nonlinear Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlim, 1985.

[15] DÍ AZ, J. I.; SAÁ, J. E. **Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires**. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305(12):521–524, 1987.

[16] DIBENEDETTO, E. **$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations**. *Nonlinear Anal.*, 7(8):827–850, 1983.

[17] FIGUEIREDO, D. G. **Equações Elípticas Não-Lineares**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

[18] FOLLAND, G. B. **Introduction to Partial Differential Equations**. Princeton University Press, New Jersey, 1995.

[19] GARCÍ A MELIÁN, J.; SABINA DE LIS, J. **Maximum and comparison principles for operators involving the p-Laplacian**. *J. Math. Anal. Appl.*, 218(1):49–65, 1998.

[20] GIACOMONI, J.; HERNÁNDEZ, J.; MOUSSAOUI, A. **Quasilinear and singular systems: the cooperative case**. 540:79–94, 2011.

[21] GIACOMONI, J.; SCHINDLER, I.; TAKÁˇ C, P. **Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation**. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 6(1):117–158, 2007.

[22] GIACOMONI, J.; SCHINDLER, I.; TAKÁˇ C, P. **Singular quasilinear elliptic systems and Hölder regularity**. *Adv. Differential Equations*, 20(3-4):259–298, 2015.

[23] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer, New York, 1983.

[24] GONCALVES, J. V.; SANTOS, C. A. P.; CARVALHO, M. L. **Quasilinear elliptic systems with convex-concave singular terms and ϕ-laplacian operator**. *Differential and Integral Equations*, 2017 (Aceito).

[25] GUEDDA, M.; VÉRON, L. **Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents**. *Nonlinear Anal.*, 13(8):879–902, 1989.

[26] HAI, D. D. **On a class of singular p-Laplacian boundary value problems**. *J. Math. Anal. Appl.*, 383(2):619–626, 2011.

[27] HAN, Q.; LIN, F. **Elliptic Partial Differential Equations**. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2000.

[28] KHODJA, B.; MOUSSAOUI, A. **Positive solutions for infinite semipositone/positone quasilinear elliptic systems with singular and superlinear terms**. *Differ. Equ. Appl.*, 8(4):535–546, 2016.

[29] LIEBERMAN, G. M. **Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations**. *Nonlinear Anal.*, 12(11):1203–1219, 1988.

[30] LIONS, J.-L. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[31] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos Não-Homogêneos)**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[32] MOHAMMED, A. **Positive solutions of the p-Laplace equation with singular nonlinearity**. *J. Math. Anal. Appl.*, 352(1):234–245, 2009.

[33] PERAL, I. **Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian**. Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Trieste, 1997.

[34] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M. **Real analysis**. China Machine Press, fourth edition, 2010.

[35] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw Hill Series in Higher Mathematics, New York, 2000.

[36] SAKAGUCHI, S. **Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems**. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 14(3):403–421 (1988), 1987.

[37] SCHMITT, K.; THOMPSON, R. C. **Nonlinear Analysis and Differential Equations: An Introduction**. http://www.math.utah.edu/ schmitt/ode1.pdf, 2004.

[38] SCHWARTZ, J. T. **Nonlinear Functional Analysis**. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.

[39] SERRIN, J. **Local behavior of solutions of quasi-linear equations**. *Acta Math.*, 111:247–302, 1964.

[40] STAMPACCHIA, G. **Equations Elliptiques du Second Ordre a Coefficients Discontinus**. Les Presses de L'Universite de Montreal, Montreal, 1966.

[41] TREVES, F. **Basic Linear Partial Differential Equations. Pure and Applied Mathematics Vol 62**. Academic Press, New York-London, 1975.

[42] VÁZQUEZ, J. L. **A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations**. *Appl. Math. Optim.*, 12:191–202, 1984.