Arthur Custódio de Oliveira
Enes Maximino da Rocha Júnior

Adequação do Método da Soma das Correntes considerando elementos shunts de barra e de ramos de redes de distribuição

Goiânia
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nomes completos dos autores: Arthur Custódio de Oliveira e Enes Maximino da Rocha Junior

Título do trabalho: Adequação do Método da Soma das Correntes considerando elementos shunts de barra e de ramos de redes de distribuição

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;

- Submissão de artigo em revista científica;

- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Gelson Antonio Andrea Brigatto**, **Professor do Magistério Superior**, em 26/06/2025, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Enes Maximino Da Rocha Júnior**, **Discente**, em 26/06/2025, às 18:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Arthur Custódio De Oliveira**, **Discente**, em 30/06/2025, às 18:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5464389** e o código CRC **51122B1F**.

Referência: Processo nº 23070.013395/2025-49 SEI nº 5464389

Arthur Custódio de Oliveira
Enes Maximino da Rocha Júnior

Adequação do Método da Soma das Correntes considerando elementos shunts de barra e de ramos de redes de distribuição

Projeto de final de curso apresentado à Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Antônio Andrêa Brigatto

Goiânia
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Arthur Custódio de
Adequação do Método da Soma das Correntes considerando elementos shunts de barra e de ramos de redes de distribuição [manuscrito] / Arthur Custódio de Oliveira, Enes Maximino da Rocha Júnior. - 2025.
LIII, 53 f.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Antônio Andrêa Brigatto .
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Engenharia Elétrica, Goiânia, 2025.
Bibliografia.

1. Fluxo de carga. 2. Método da Soma das Correntes. 3. Elementos shunts. 4. Redes de distribuição. I. Júnior, Enes Maximino da Rocha. II. , Gelson Antônio Andrêa Brigatto, orient. III. Título.

CDU 621.3

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e cinco dias do mês de junho do ano de 2025 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado "Adequação do Método da Soma das Correntes Considerando Elementos Shunts de Barra e de Ramos de Redes de Distribuição", de autoria de Arthur Custódio de Oliveira e Enes Maximino da Rocha Junior, do curso de Engenharia Elétrica, da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. Dr. Gelson Antônio Andrêa Brigatto da EMC/UFG, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Profa. Dra. Lina Paola Garces Negrete (EMC/UFG) e Prof. Dr. Igor Kopcak (EMC/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do(a) estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 9,0 (nove virgula zero), tendo sido o TCC considerado APROVADO.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Gelson Antonio Andrea Brigatto**, **Professor do Magistério Superior**, em 25/06/2025, às 15:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Igor Kopcak**, **Professor do Magistério Superior**, em 25/06/2025, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Lina Paola Garces Negrete**, **Professora do Magistério Superior**, em 25/06/2025, às 15:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5461910** e o código CRC **227EA390**.

Referência: Processo nº 23070.013395/2025-49 SEI nº 5461910

AGRADECIMENTOS

Agradecemos, primeiramente, às nossas famílias, pelo apoio incondicional e pela motivação constante ao longo da nossa trajetória acadêmica. Aos professores do curso de Engenharia Elétrica, cujos ensinamentos e orientações foram essenciais para nossa formação e para o desenvolvimento deste trabalho. Manifestamos ainda nosso reconhecimento aos colegas de curso e de projeto, pelas trocas de conhecimento e pelo apoio mútuo durante os desafios enfrentados.

Gostaríamos de expressar nossa especial gratidão ao professor Gelson Antônio Andrêa Brigatto, orientador deste trabalho, por sua orientação precisa, incentivo contínuo e contribuições fundamentais em todas as etapas do desenvolvimento da pesquisa. Seu acompanhamento técnico e didático foi indispensável para a estruturação e consolidação dos resultados apresentados.

Estendemos também nosso agradecimento à instituição de ensino, por fornecer a infraestrutura e os recursos necessários para a realização deste trabalho. Por fim, deixamos nosso sincero reconhecimento a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste projeto.

RESUMO

A modelagem de redes de distribuição de energia elétrica normalmente considera a topologia da rede constituída apenas por elementos série de ramos. Esta característica fundamenta os algoritmos clássicos de cálculo do fluxo de carga de redes de distribuição, tal como o Método da Soma das Correntes (MSI), tal que a inclusão de elementos *shunts* como reguladores de tensão, bancos de capacitores ou reatores e efeitos capacitivos dos alimentadores exige adaptações nos métodos tradicionais. Embora a formulação do Método da Soma das Potências considerando elementos *shunts* já tenha sido abordada na literatura, o equivalente para o MSI carece de desenvolvimento. Este trabalho tem então o objetivo de propor uma adequação do Método da Soma das Correntes para a análise de fluxo de carga em redes de distribuição, com a inclusão de elementos *shunts* reativos de barras e de ramos da rede. O trabalho contempla a reformulação do MSI clássico com a incorporação de novos termos às equações, bem como a aplicação da implementação computacional da proposta em redes-teste para comparação de desempenho e validação dos resultados com métodos de solução já consolidados. A análise de casos demonstra que a nova abordagem permite representar os efeitos dos elementos reativos sobre os perfis de tensão e as perdas no sistema de forma igualmente precisa. Assim, este trabalho contribui com uma modelagem aplicável às exigências de simulação de redes de distribuição atuais, com potencial de adaptação a cenários com geração distribuída e dispositivos de controle.

Palavras-chave: Fluxo de carga, Método da Soma das Correntes, Elementos *shunts,* Redes de distribuição.

ABSTRACT

The modeling of electrical power distribution networks usually considers the network topology as consisting only of series branch elements. This characteristic underlies the classical algorithms for calculating the load flow of distribution networks, such as the Current Sum Method (CSM), so that the inclusion of shunts such as voltage regulators, capacitor banks or reactors and capacitive effects of feeders requires adaptations to the traditional methods. Although the formulation of the Power Sum Method considering shunts has already been addressed in the literature, the equivalent for CSM needs to be developed. This work aims to propose an adaptation of the Current Sum Method for load flow analysis in distribution networks, with the inclusion of reactive shunt elements of buses and branches of the network. The work contemplates the reformulation of the classic MSI with the incorporation of new terms to the equations, as well as the application of the computational implementation of the proposal in test networks for performance comparison and validation of the results with already consolidated solution methods. Case analysis demonstrates that the new approach allows representing the effects of reactive elements on voltage profiles and system losses equally accurately. Thus, this work contributes with a model applicable to the simulation requirements of actual distribution networks, with potential for adaptation to scenarios with distributed generation and control devices.

Keywords: Power flow, Current Summation Method, *Shunts* elements, Distribution networks.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela com os parâmetros dos elementos de ramos.....21
Tabela 2 - Tipos de barras e classificação das variáveis associadas.....25
Tabela 3 - Módulo das tensões de barras do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 10 barras.....44
Tabela 4 - Ângulo das tensões de barras do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 10 barras.....44
Tabela 5 - Comparação do desempenho do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 10 barras.....45
Tabela 6 - Comparação do desempenho do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 14 barras.....46
Tabela 7 - Comparação do desempenho do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 118 barras..... 47

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Componentes gerais de sistemas elétricos de potência.....13
Figura 2 - Convenções de corrente e potência.....14
Figura 3 - Esquema para definição da modelagem de geração e carga.....16
Figura 4 - Modelagem de elementos *shunts* de barra.....17
Figura 5 - Elemento série de um ramo genérico *k-m*.....18
Figura 6 – Modelo π de linhas de transmissão e distribuição.....19
Figura 7 - Modelo π do transformador em fase.....20
Figura 8 - Ramo genérico *k-m* e esquema para definição de fluxos e perdas de potência.....22
Figura 9 - Esquema de correntes de barra e de ramos para definição do balanço de correntes.....23
Figura 10 - Esquema radial típico de rede de distribuição e seus fluxos de potência unidirecionais.....27
Figura 11 - Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura inversa do MSI...28
Figura 12 - Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura direta do MSI.....29
Figura 13 - Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura inversa do MSP com *shunts*.....30
Figura 14 – Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura direta do MSP com *shunts*.....31
Figura 15 - Representação de uma rede de distribuição genérica com shunts.....38
Figura 16 - Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura inversa do MSI com *shunts*.....39
Figura 17 - Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura direta do MSI com *shunts*.....41

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

Abreviaturas

DLF - Direct Load Flow
MSI - Método da Soma das Correntes
MSP - Método da Soma das Potências
PFC - Problema do Fluxo de Carga
PV - Barra de tensão controlada (P–V)
PQ - Barra de carga (P–Q)
S/E - Subestação
X/R - Relação reatância/resistência

Símbolos

V_k - Módulo da tensão na barra *k*

θ_k - Ângulo da tensão na barra *k*

P_k - Injeção líquida de potência ativa na barra *k*

Q_k - Injeção líquida de potência reativa na barra k

y_{km} - Admitância série do ramo *k-m*

z_{km} - Impedância série do ramo *k-m*

a_{km} - Tap do transformador entre barras *k* e *m*

θ_{km} - Defasagem angular entre as barras *k* e *m*

φ_{km} - Defasagem angular do transformador *k-m*

b_k^{sh} - Susceptância shunt da barra *k*

b_{km}^{sh} - Susceptância shunt distribuída do ramo *k-m*

$\hat{I}_k$ - Corrente injetada na barra *k*

$\hat{I}_{km}$ - Corrente no ramo *k-m*

$\hat{S}_k$ - Potência complexa na barra *k*

$\hat{S}_{km}$ - Fluxo de potência de *k* para *m*

$\hat{S}_{km}^{perdas}$ - Perdas de potência no ramo *k-m*

Ω_k - Conjunto de barras vizinhas à barra *k*

NB - Número total de barras do sistema

NPQ - Número de barras tipo PQ

NPV - Número de barras tipo PV

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 9

1.1 Justificativa 9

1.2 Objetivos 9

1.3 Metodologia 10

1.4 Organização do Trabalho 10

1.5 Introdução 12

1.6 Conceituações Básicas 12

1.6.1 Elementos de rede 13

1.6.2 Convenções de Sentidos de Correntes e Potências 13

1.6.3 Representação Por Unidade 14

1.6.4 Modelagem de Elementos de Barra 15

1.6.5 Modelagem de Elementos de Ramos 18

1.6.6 Equações Gerais de Correntes, Fluxos e Perdas de Ramos 20

1.6.7 Equação Nodal de Rede 22

1.6.8 Classificação de Barras 24

1.6.9 Estratégia de Solução de PFC 25

1.7 PFC de Redes de Distribuição 26

1.7.1 Introdução 26

1.7.2 Método da Soma das Correntes 27

1.7.3 Método da Soma das Potências com *Shunts* 29

1.7.4 Método Direct Load Flow com *Shunts* 34

1.7.5 Critério de Convergência dos métodos de Solução do Subsistema 1 37

2. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO 38

2.1 Formulação MSI com *Shunts* - Varredura Inversa 39

2.2 Formulação MSI com *Shunts* - Varredura Direta 40

2.3 Algoritmo de Implementação Computacional 41

3. TESTES E ANÁLISES DE RESULTADOS 43

3.1 Comparação de Resultados para a Solução do Subsistema 1 43

3.2 Comparação de Desempenhos para a Rede de 10 Barras 45

3.3 Comparação de Desempenhos para a Rede de 14 barras 46

3.4 Comparação de Desempenhos para a Rede de 118 barras 47

4. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....49
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 51

1. INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa

O estudo problema do fluxo de carga (PFC) configura-se como etapa essencial para a análise de operação, planejamento e controle de sistemas elétricos de potência. Em redes de distribuição, com topologia predominantemente radial e níveis de tensão reduzidos, diferentes métodos foram desenvolvidos com o objetivo de proporcionar soluções eficientes ao PFC, entre os quais se destaca o Método da Soma das Correntes (MSI).

Contudo, uma limitação observada em diversas formulações aplicadas a redes de distribuição refere-se à exclusão de elementos *shunts,* como bancos de capacitores, reatores ou efeitos capacitivos das linhas, os quais se associam tanto às barras quanto aos ramos da rede. A ausência desses elementos na modelagem compromete a abrangência da análise da rede de distribuição, sobretudo em contextos com elevada presença de dispositivos de compensação reativa ou sensibilidade acentuada à variação do perfil de tensão.

Diante desse cenário, propõe-se uma adequação do MSI com inclusão dos efeitos de elementos *shunts* de barra e de ramos na formulação do algoritmo de solução, visando aumentar a precisão dos resultados, mas sem prejudicar a eficiência computacional inerente ao método.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral aprimorar o MSI, com a inclusão de elementos *shunts* de barra e de ramos, para aplicação em estudos de fluxo de carga em redes de distribuição. Especificamente, propõe-se revisar os fundamentos do problema do fluxo de carga e estudos dos Métodos da Soma das Correntes, Soma das Potências (MSP) e Direct Load Flow (DLF), bem como desenvolver expressões matemáticas que incluam elementos *shunts* nas etapas de varredura inversa e direta do MSI. Além disso, o trabalho visa implementar o algoritmo do MSI com shunts em ambiente computacional, comparar os resultados obtidos com as versões métodos MSP e DLF com *shunts* e avaliar o impacto dessa consideração nos resultados com

ênfase no perfil de tensões e desempenho numérico, bem como identificar os benefícios e possíveis limitações da abordagem proposta em contextos práticos.

1.3 Metodologia

A metodologia adotada buscou estruturar o trabalho nas seguintes etapas:

1) Revisão da literatura sobre a teoria do fluxo de carga, focando nas formulações do Método da Soma das Potências e do método Direct Load Flow, bem como no procedimento da inserção dos elementos shunts na modelagem do MSP.
2) Desenvolvimento da formulação do MSI adaptado para incluir elementos *shunts* de barra e de ramos nos processos de varredura inversa e direta.
3) Implementação computacional do MSI com shunts em um software de simulação (MatLab), bem como dos métodos MSP e DLF com *shunts*.
4) Análise de resultados: realização de testes em redes elétricas com o MSI com *shunts* desenvolvido e comparação dos resultados obtidos com os métodos MSP e DLF com *shunts*, focando em análise de precisão e tempo de processamento como critérios de desempenho, para posterior conclusão.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, sendo o primeiro dedicado à introdução do tema, apresentação dos objetivos e justificativa para o estudo.

O capítulo 2 aborda os princípios teóricos necessários à compreensão do fluxo de carga, incluindo a definição dos elementos da rede elétrica, convenções de sinais, representação por unidade, modelagem dos componentes de barra e de ramos, formulação das equações de corrente, fluxos e perdas, equação nodal e classificação das barras. Apresenta também os métodos clássicos de solução do PFC e discute as adaptações para redes de distribuição.

O capítulo 3 apresenta a formulação matemática desenvolvida para o MSI com considerando elementos *shunts* presentes na rede. São estudadas as etapas de varredura inversa e direta separadamente, com desenvolvimento das equações modificadas e comentários sobre sua implementação algorítmica.

O capítulo 4 aborda os casos de teste aplicados e analisados, apresentando também os parâmetros de simulação e os critérios de avaliação para comparação

dos resultados entre o MSI com *shunts* e os métodos MSP e DLF com *shunts*, discutindo os valores observados no perfil de tensão e desempenho computacional.

Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões obtidas a partir da análise dos resultados, destacando as principais contribuições do trabalho e a proposição de possíveis linhas para investigações futuras.

Complementando a apresentação do trabalho, é apresentada a Bibliografia contendo as referências citadas ao longo do texto.

TEORIA BÁSICA

1.5 Introdução

O desenvolvimento de métodos eficientes para a análise do fluxo de carga em redes de distribuição demanda uma compreensão aprofundada dos fundamentos teóricos que regem o comportamento elétrico dessas redes. As redes de distribuição, responsáveis pela entrega da energia elétrica aos consumidores finais, apresentam características particulares que as diferenciam dos sistemas de transmissão, como a presença de grande quantidade de nós, baixos níveis de tensão e alta resistência relativa das linhas. Essas particularidades exigem métodos de análise específicos e adaptados para garantir a maior precisão dos estudos e a eficiência computacional necessária ao planejamento e a operação dessas redes (STEVENSON, 1982).

Neste contexto, torna-se essencial a definição adequada dos elementos constituintes de redes elétricas, o entendimento da convenção de sinais e a correta modelagem dos componentes elétricos, tais como linhas, transformadores, cargas e fontes de geração. Além disso, a representação por unidade (*pu*) emerge como uma ferramenta essencial para a padronização e simplificação dos cálculos envolvidos.

A formulação do problema do fluxo de carga se apoia nas leis fundamentais de circuitos, notadamente as Leis de Kirchhoff, para compor o conjunto de equações que descrevem o comportamento do sistema sob condições operativas normais. A solução dessas equações requer a aplicação de métodos numéricos adequados à análise de redes de distribuição, tais como o Método da Soma das Correntes (MSI), o Método da Soma das Potências (MSP) e o Método Direct Load Flow (DLF).

Este capítulo visa então fornecer uma base teórica para o desenvolvimento do trabalho, abordando conceitos básicos, formulação de equações e a descrição dos métodos de solução de fluxo de carga, preparando o leitor para compreender as adequações necessárias à consideração de elementos *shunts* na rede em estudo.

1.6 Conceituações Básicas

A análise de sistemas elétricos de potência exige a modelagem adequada de seus componentes principais, entre eles, as barras, os ramos e os elementos *shunts*. Adicionalmente, o estudo do fluxo de carga baseia-se na definição de convenções

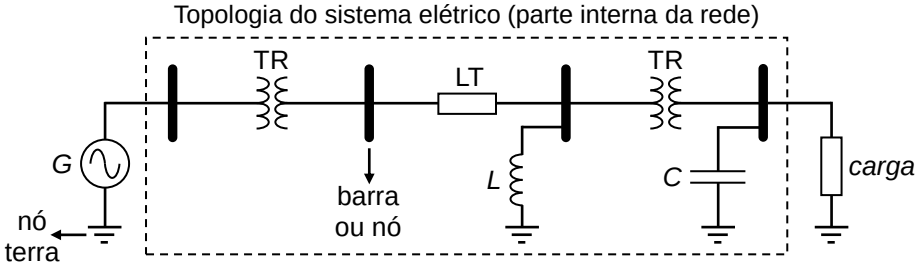
de sentidos de corrente e potência, bem como no uso da representação em *pu*, que facilita a comparação de grandezas elétricas e a simplificação de cálculos.

Os próximos tópicos aprofundam os detalhes da modelagem dos elementos de rede, a formulação das equações de corrente, fluxos e perdas de potência, e a estruturação da equação nodal, além da classificação das barras e das estratégias de solução do problema do fluxo de carga, incluindo as adaptações necessárias para considerar elementos *shunts* de barra e de ramos na rede de distribuição.

1.6.1 Elementos de rede

Os elementos que compõem um sistema elétrico de potência (SEP) podem ser divididos em dois grupos principais: os elementos de barra e os elementos de ramo. Os componentes de barra são aqueles conectados em derivação nó terra e residem basicamente nos elementos geradores, cargas e componentes *shunt* como bancos de capacitores ou reatores. Geradores e cargas são tratados como fontes ou sumidouros de potência, enquanto que os elementos *shunts* são considerados como reguladores de tensão. Os elementos de ramos são os componentes que interligam as barras da rede, como linhas de transmissão/distribuição e seus transformadores, representados por parâmetros concentrados baseados em impedância e admitância. A combinação de elementos de ramos e *shunts* determinam a topologia do sistema e os elementos de geração e carga determinam suas características operacionais.

Figura 1 - Componentes gerais de sistemas elétricos de potência.



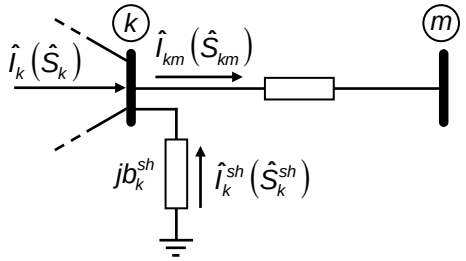
Fonte: BRIGATTO (2025).

1.6.2 Convenções de Sentidos de Correntes e Potências

Como os sentidos positivos e negativos influenciam no desenvolvimento da formulação da rede, a definição do sentido de correntes e potências é necessária, sendo neste trabalho adotado o sentido proposto em MONTICELLI (1983).

Seja o esquema dos sentidos de correntes e potências adotados como sendo positivo visto na Figura 2. As injeções de corrente $\hat{I}_k$ e $\hat{I}_k^{sh}$ em uma barra genérica *k* são convencionadas como positivas entrando na barra *k*, e a corrente $\hat{I}_{km}$ no sentido da barra *k* para *m* de um ramo qualquer *k*-*m* é convencionada positiva saindo da barra *k*. Por extensão, as injeções de potência líquida $\hat{S}_k$ e *shunt* $\hat{S}_k^{sh}$ na barra *k*, bem como o fluxo de potência $\hat{S}_{km}$ no ramo *k*-*m*, seguem as mesmas convenções das injeções de correntes de barra e correntes de ramos, respectivamente.

Figura 2 - Convenções de corrente e potência.



Fonte: BRIGATTO (2025).

1.6.3 Representação Por Unidade

A presença de transformadores em redes elétricas implica uma complexidade adicional no cálculo de redes, pois as impedâncias da rede precisam ser refletidas entre os lados primário e secundário do transformador. A utilização da representação por unidade permite a eliminação dessa etapa, uma vez que, quando normalizadas, as impedâncias nos dois lados do transformador se tornam equivalentes.

Assim, a representação por unidade ou *pu* é uma técnica amplamente usada na análise de sistemas elétricos para simplificar os cálculos e permitir comparações diretas entre os diferentes valores das grandezas elétricas do sistema. Esta técnica consiste na normalização das variáveis elétricas fundamentais (tensão, corrente, impedância e potência) com relação a valores de base definidos previamente.

A representação por unidade em sistemas trifásicos consiste em fixar valores de base adequados para duas das grandezas fundamentais. Normalmente define-se uma potência aparente total de base S_{base} comum a toda a rede, correspondente à soma das 3 potências de base de fase, tal que: $S_{base} = 3S_{base}^{fase}$, e uma tensão de linha V_{base} para cada lado dos transformadores presentes no sistema, relacionada com as

tensões de fase por: $V_{base} = \sqrt{3} V_{base}^{fase}$. Com a definição de S_{base} e V_{base}, tem-se que a corrente de base I_{base} e impedância de base Z_{base} são determinadas por:

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{\sqrt{3}\, V_{base}} \tag{1}$$

$$Z_{base} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}} \tag{2}$$

Uma vez definidos S_{base}, V_{base}, I_{base} e Z_{base}, qualquer grandeza do sistema pode ser expressa em *pu* como como fração das respectivas grandezas de base.

Essa abordagem unifica o tratamento de diversas configurações de sistemas elétricos, além de reduzir a variação numérica das grandezas envolvidas, tornando os cálculos mais estáveis e eficientes nos métodos de análise de fluxo de carga.

A análise de fluxo de carga é fundamental para o planejamento e a operação de sistemas de energia elétrica. Ela permite determinar as tensões, os ângulos de fase, as potências ativas e reativas em cada nó da rede, bem como os fluxos de potência nos ramos. Para modelar um sistema de potência, é essencial representar adequadamente os elementos de barra e de ramos, realizados nos itens a seguir.

1.6.4 Modelagem de Elementos de Barra

A Figura (3) ilustra um esquema genérico de uma barra *k* de um sistema de potência, onde estão conectados um elemento gerador e um elemento de carga. O elemento gerador injeta uma potência complexa $\hat{S}_k^G = P_k^G + j\, Q_k^G$ na barra, enquanto o elemento de carga absorve uma potência complexa $\hat{S}_k^C = P_k^C + j\, Q_k^C$ da barra (saída de energia da rede). Baseado na convenção de sinais adotada, tem-se que geração e carga podem ser modeladas por uma injeção líquida positiva (geração menos carga) entrando na barra *k*, denotada por $\hat{S}_k$ e determinada por:

$$\hat{S}_k = \hat{S}_k^G - \hat{S}_k^C = \left(P_k^G - P_k^C\right) + j\left(Q_k^G - Q_k^C\right) = P_k + j\, Q_k \tag{3}$$

onde P_k é a injeção líquida de potência ativa na barra *k*, determinada por:

$$P_k = P_k^G - P_k^C \tag{4}$$

Nesse caso, um valor positivo para P_k está associado a uma predominância de geração na barra, ou seja, a barra está injetando potência ativa na rede. Por

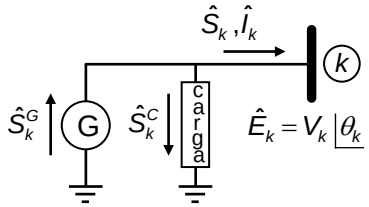
outro lado, um valor negativo indica uma predominância de carga, onde há um maior consumo do que geração na barra em questão.

De forma análoga, com base na Equação (3), a injeção líquida de potência reativa Q_k em uma barra genérica *k* é definida por:

$$Q_k = Q_k^G - Q_k^C \tag{5}$$

Neste caso, um valor positivo para Q_k significa que a barra está fornecendo potência reativa ao sistema, enquanto um valor negativo indica que a barra está absorvendo (ou armazenando) potência reativa do sistema.

Figura 3 - Esquema para definição da modelagem de geração e carga.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Com base na Figura (3), que detalha a relação entre a injeção líquida de potência $\hat{S}_k$, a tensão na barra $\hat{E}_k$ e a corrente líquida injetada $\hat{I}_k$, a injeção líquida de potência complexa $\hat{S}_k$ da barra *k* pode ser expressa em termos da tensão e do conjugado da corrente injetada, determinado por:

$$\hat{S}_k = \hat{E}_k \hat{I}_k^* \tag{6}$$

Desse modo, se conhecidas a tensão $\hat{E}_k = V_k \angle \theta_k$ e as injeções líquidas de potência ativa P_k e reativa Q_k em uma barra genérica *k*, conclui-se que a injeção líquida de corrente complexa $\hat{I}_k$ na barra *k* pode ser determinada por:

$$\hat{S}_k = \hat{E}_k \hat{I}_k^* \quad \Rightarrow \quad \hat{S}_k^* = \left(\hat{E}_k \hat{I}_k^*\right)^* = \hat{E}_k^* \hat{I}_k \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_k = \frac{\hat{S}_k^*}{\hat{E}_k^*} = \frac{P_k - jQ_k}{V_k \angle -\theta_k} \tag{7}$$

Outros componentes de barra residem nos elementos *shunts*, referentes a bancos de capacitores ou de reatores em derivação nó de referência terra da rede e com a função de regulação de tensão na barra em que se encontra conectado, por meio do fornecimento ou do consumo de potência reativa à rede elétrica.

Seja então a Figura 4, que mostra o esquema de um elemento *shunt* em uma barra genérica *k*, modelado por uma admitância *shunt* $\hat{y}_k^{sh} = j b_k^{sh}$, onde b_k^{sh} é a susceptância *shunt*. Desse modo, a corrente *shunt* de barra $\hat{I}_k^{sh}$, adotada entrando na barra *k* segundo a convenção adotada, é determinada por:

$$\hat{I}_k^{sh} = (0 - \hat{E}_k)\hat{y}_k^{sh} = -\hat{E}_k \hat{y}_k^{sh} \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_k^{sh} = -\hat{E}_k \, jb_k^{sh} \tag{8}$$

Logo, a injeção de potência *shunt* $\hat{S}_k^{sh}$ na barra *k* é determinada por:

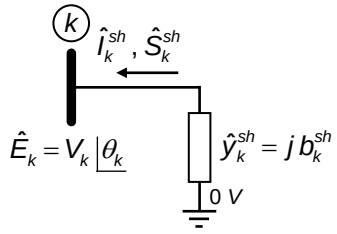
$$\hat{S}_k^{sh} = \hat{E}_k (\hat{I}_k^{sh})^* = \hat{E}_k (-\hat{E}_k \, jb_k^{sh})^* = \hat{E}_k \hat{E}_k^* (-jb_k^{sh})^* = V_k \angle \theta_k \; V_k \angle -\theta_k \; jb_k^{sh} \Rightarrow \hat{S}_k^{sh} = jV_k^2 b_k^{sh}$$

Definindo-se Q_k^{sh} como a potência reativa nominal do componente *shunt* de uma barra genérica *k*, tal que: $\hat{S}_k^{sh} = j Q_k^{sh}$, e considerando-se V_k como a tensão nominal da barra *k*, tem-se então que: $\hat{S}_k^{sh} = j Q_k^{sh} = jV_k^2 b_k^{sh}$ e obtém-se que:

$$Q_k^{sh} = V_k^2 b_k^{sh} \quad \Rightarrow \quad b_k^{sh} = \frac{Q_k^{sh}}{V_k^2} \tag{9}$$

Com base na Equação (9), como $b_k^{sh} = -1 / x_k^{sh}$, tem-se que a susceptância e, por consequência, a injeção de potência *shunt* Q_k^{sh}, terá valor negativo para $x_k^{sh} > 0$ e valor positivo para $x_k^{sh} < 0$. Assim, para bancos de reatores, onde $x_k^{sh} = \omega L > 0$, fazendo com que $Q_k^{sh} < 0$, a injeção de potência *shunt* é contrária ao sentido adotado e, portanto, há consumo de reativo, ou seja, um componente *shunt* indutivo atua como carga, implicando em diminuição da magnitude da tensão da barra onde está conectado. Para bancos de capacitores, onde $x_k^{sh} = -1/(\omega C) < 0$, tal que $Q_k^{sh} > 0$, a injeção de potência *shunt* está no sentido adotado e, portanto, há injeção de reativo na rede, tal que um componente *shunt* capacitivo age como elemento de geração de reativo, implicando no aumento da magnitude da tensão da barra.

Figura 4 - Modelagem de elementos *shunts* de barra



Fonte: BRIGATTO (2025).

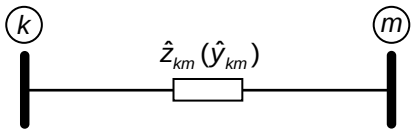
1.6.5 Modelagem de Elementos de Ramos

Em redes elétricas, os elementos de ramos residem em linhas de transmissão ou de distribuição e transformadores, conectados entre duas barras da rede. Estes componentes são fundamentados por um elemento série e, dependendo da natureza física do componente (linha longa e transformador com taps), estes podem também apresentar efeitos capacitivos ou indutivos *shunts* em cada barra terminal do ramo.

A Figura 5 ilustra o esquema do elemento série de um ramo genérico *k-m* de sistemas elétricos, representado por uma impedância série $\hat{z}_{km}$ constituída por uma resistência série r_{km} e uma reatância série x_{km}, de modo que:

$$\hat{z}_{km} = r_{km} + j\, x_{km} \tag{10}$$

Figura 5 - Elemento série de um ramo genérico *k-m*



Fonte: BRIGATTO (2025).

Geralmente, na formulação do problema de fluxo de carga é mais conveniente representar os elementos série de ramos em termos de admitâncias, ao invés de impedâncias, tal que definindo-se uma condutância série g_{km} e uma susceptância série b_{km}, a chamada admitância série $\hat{y}_{km}$ do ramo é então definida por:

$$\hat{y}_{km} = g_{km} + j\, b_{km} \tag{11}$$

onde $\hat{y}_{km}$ pode ser obtida a partir da impedância série $\hat{z}_{km}$ pela relação inversa:

$$\hat{y}_{km} = \frac{1}{\hat{z}_{km}} = \frac{1}{r_{km} + j\, x_{km}} \Rightarrow \hat{y}_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} + j\,\frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$$

tal que, ao separar as partes real e imaginária do resultado e comparando-se com a Equação (11), tem-se que a condutância série g_{km} e a susceptância série b_{km} de um ramo genérico *k-m* são calculadas, respectivamente, por:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \tag{12}$$

$$b_{km} = -\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \tag{13}$$

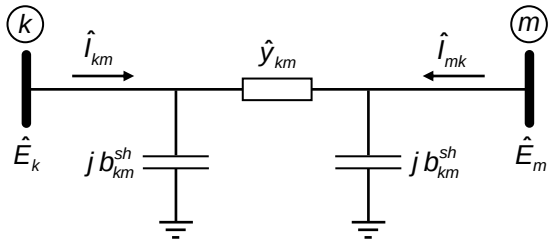
A Figura 6 mostra a representação do modelo π para linhas longas, em que, além do elemento série $\hat{y}_{km}$, o efeito capacitivo da linha é também modelado por uma suscetância *shunt* b_{km}^{sh} conectada a cada barra do ramo, tal que a corrente $\hat{I}_{km}$ no sentido da barra *k* para *m* do ramo *k*-*m* com linha é determinada por:

$$\hat{I}_{km} = \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)\hat{E}_k - \hat{y}_{km}\,\hat{E}_m \tag{14}$$

e a corrente $\hat{I}_{mk}$ no sentido da barra *m* para a barra *k* do ramo é determinada por:

$$\hat{I}_{mk} = -\hat{y}_{km}\,\hat{E}_k + \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)\hat{E}_m \tag{15}$$

Figura 6 – Modelo π de linhas de transmissão e distribuição.



Fonte: os próprios autores.

Para transformadores, estes são representados por uma admitância série $\hat{y}_{km}$ e sua relação de transformação $\hat{t} = a_{km}\angle\varphi_{km}$, onde a_{km} expressa a capacidade de um transformador de alterar intencionalmente a magnitude da tensão nas barras e φ_{km} expressa a capacidade de alterar intencionalmente os ângulos de tensão das barras.

Para o controle dos ângulos de tensão, é necessário que o sistema elétrico seja malhado e, como redes de distribuição são normalmente radiais, tem-se neste caso que $\varphi_{km} = 0$ e a relação de transformação dos transformadores (reguladores de tensão) presentes em redes de distribuição se resume ao termo a_{km}, onde esse tipo de transformador é chamado na literatura técnica de transformador em fase.

A Figura 7 mostra a representação do modelo π para o transformador em fase, onde a corrente $\hat{I}_{km}$ no sentido da barra *k* para *m* do ramo é determinada por:

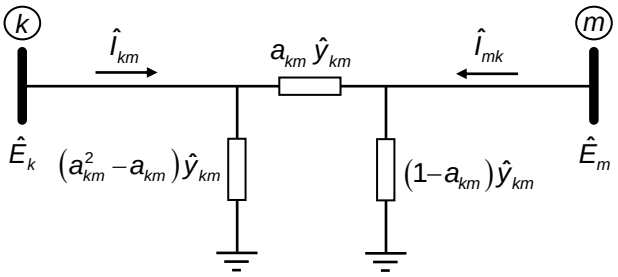
$$\hat{I}_{km} = a_{km}^2\,\hat{y}_{km}\,\hat{E}_k - a_{km}\,\hat{y}_{km}\,\hat{E}_m \tag{16}$$

e a corrente $\hat{I}_{mk}$ no sentido da barra *m* para a barra *k* do ramo é determinada por:

$$\hat{I}_{mk} = -a_{km}\,\hat{y}_{km}\,\hat{E}_k + \hat{y}_{km}\,\hat{E}_m \tag{17}$$

Para $a_{km} > 1$, isto implica um efeito indutivo na barra *k*, onde a magnitude da tensão tende a diminuir devido ao caráter de consumo de reativo da admitância shunt na barra *k*, enquanto que na barra *m* tem efeito capacitivo, onde a magnitude da tensão tende a aumentar na barra *m* devido ao caráter de geração de reativo da admitância *shunt* na barra *m*. Desse modo, se $a_{km} < 1$, os efeito nas barras *k* e *m* é o contrário, isto é, a magnitude da tensão na barra *k* tende a aumentar devido ao caráter capacitivo da admintância *shunt* na barra *k*, e na barra *m* tende a diminuir devido ao caráter indutivo da admintância *shunt* na barra *m*. Por fim, se $a_{km} = 1$, então não há alteração na magnitude da tensão nas barras terminais do ramo *k-m* e o modelo π do transformador em fase se resume à admitância série $\hat{y}_{km}$.

Figura 7 - Modelo π do transformador em fase.



Fonte: os próprios autores.

1.6.6 Equações Gerais de Correntes, Fluxos e Perdas de Ramos

A partir das equações de correntes nos dois sentidos dos elementos de ramos (linhas e transformadores) determinadas anteriormente, pode-se obter expressões gerais para estas correntes, por simples inspeção, o que permite uma representação uniforme dos elementos de ramos e facilita a formulação dos sistemas elétricos.

Logo, analisando as Equações (14) e (16), pode-se inferir uma equação geral para a corrente $\hat{I}_{km}$ em um ramo genérico *k-m* de sistemas elétricos por:

$$\hat{I}_{km} = \left(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2\,\hat{y}_{km}\right)\hat{E}_k + \left(-a_{km}\,\hat{y}_{km}\right)\hat{E}_m \tag{18}$$

Similarmente, analisando as Equações (15) e (17) obtidas anteriormente, pode-se inferir uma equação geral para a corrente $\hat{I}_{mk}$ no ramo genérico *k-m* por:

$$\hat{I}_{mk} = \left(-a_{km}\,\hat{y}_{km}\right)\hat{E}_k + \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)\hat{E}_m \tag{19}$$

onde os parâmetros dos elementos de ramos estão sumarizados na Tabela 1.

Tabela 1 - Tabela com os parâmetros dos elementos de ramos.

Elementos de ramo	b_{km}^{sh}	a_{km}
Linha de transmissão	dado	1,0
Transformador em fase	0,0	dado

Fonte: os próprios autores.

A partir das expressões gerais para as correntes de ramo, pode-se deduzir as equações gerais para os fluxos de potência ativa e reativa nos elementos de ramos.

A Figura 8 mostra o esquema genérico de um ramo *k*-*m* qualquer de rede, onde observa-se que a equação geral do fluxo de potência aparente complexo $\hat{S}_{km}$ no sentido *k* para *m* do ramo pode ser obtido com base na Equação (18) por:

$$\hat{S}_{km} = \hat{E}_k \hat{I}_{km}^{*} = \hat{E}_k \left(\left(j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km} \right) \hat{E}_k + \left(-a_{km} \hat{y}_{km} \right) \hat{E}_m \right)^{*}$$

$$\hat{S}_{km} = -j V_k^2 b_{km}^{sh} + a_{km}^2 V_k^2 (g_{km} - j b_{km}) - a_{km} V_k V_m \left(\cos\theta_{km} + j \operatorname{sen}\theta_{km} \right) (g_{km} - j b_{km})$$

Logo, considerando-se que: $\hat{S}_{km} = P_{km} + j Q_{km}$, tem-se que, separando-se as partes real e imaginária do resultado acima, pode-se obter as equações gerais dos fluxos de potência ativa P_{km} e reativa Q_{km} no sentido *k* para *m* do ramo por:

$$P_{km} = a_{km}^2 V_k^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \cos\theta_{km} - a_{km} V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \quad (20)$$

$$Q_{km} = -a_{km}^2 V_k^2 \left(b_{km}^{sh} + b_{km} \right) - a_{km} V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \cos\theta_{km} \quad (21)$$

Analogamente, com base na Figura 8, a equação geral do fluxo de potência aparente $\hat{S}_{mk}$ no sentido *m* para *k* pode ser obtido com base na Equação (19) por:

$$\hat{S}_{mk} = \hat{E}_m \hat{I}_{mk}^{*} = \hat{E}_m \left(\left(-a_{km} \hat{y}_{km} \right) \hat{E}_k + \left(j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km} \right) \hat{E}_m \right)^{*}$$

$$\hat{S}_{mk} = -j V_m^2 b_{km}^{sh} + V_m^2 (g_{km} - j b_{km}) - a_{km} V_k V_m \left(\cos\theta_{km} - j \operatorname{sen}\theta_{km} \right) (g_{km} - j b_{km})$$

tal que, considerando-se que: $\hat{S}_{mk} = P_{mk} + j Q_{mk}$ e separando-se as partes real e imaginária do resultado acima, pode-se obter as equações gerais dos fluxos de potência ativa P_{mk} e reativa Q_{mk} no sentido *m* para *k* do ramo por:

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \cos\theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \quad (22)$$

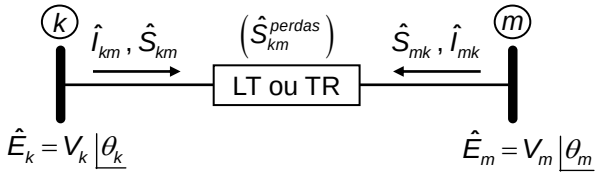
$$Q_{mk} = -V_m^2 \left(b_{km}^{sh} + b_{km} \right) + a_{km} V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \cos\theta_{km} \quad (23)$$

Analisando-se as equações dos fluxos de potência nos dois sentidos do ramo da Figura 8, observa-se que as diferença dos fluxos de potência residem nas perdas $\hat{S}_{km}^{perdas} = P_{km}^{perdas} + jQ_{km}^{perdas}$ do ramo. Logo, a perda de potência ativa P_{km}^{perdas} pode ser obtida somando as Equações (20) e (22), e a perda de potência reativa Q_{km}^{perdas} somando as Equações (21) e (23), tal que as equações gerais de perdas são:

$$P_{km}^{perdas} = P_{km} + P_{mk} = \left(a_{km}^2 V_k^2 + V_m^2\right) g_{km} - 2a_{km} V_k V_m g_{km} \cos\theta_{km} \quad (24)$$

$$Q_{km}^{perdas} = Q_{km} + Q_{mk} = -\left(a_{km}^2 V_k^2 + V_m^2\right)\left(b_{km}^{sh} + b_{km}\right) + 2a_{km} V_k V_m b_{km} \cos\theta_{km} \quad (25)$$

Figura 8 - Ramo genérico *k-m* e esquema para definição de fluxos e perdas de potência.



Fonte: os próprios autores.

1.6.7 Equação Nodal de Rede

A Figura 9 mostra um esquema genérico de barras e de ramos de sistemas elétricos. Com base na Figura 9, tem-se que, aplicando-se a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) à uma barra genérica *k* de um ramo *k-m*, nota-se que a soma da injeção líquida de corrente $\hat{I}_k$ na barra *k* com a corrente $\hat{I}_k^{sh}$ do elemento *shunt* ligado à barra *k*, definida na equação (8), é igual ao somatório das correntes de ramos $\hat{I}_{km}$, definida pela equação geral (18), que tem a barra *k* como um de seus terminais, onde $m \in \Omega_k$ e Ω_k é o conjunto das barras conectadas diretamente à barra *k*, tal que:

$$\hat{I}_k + \hat{I}_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} \hat{I}_{km} \Rightarrow \hat{I}_k = jb_k^{sh}\hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \left(\left(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}\right)\hat{E}_k + \left(-a_{km}\,\hat{y}_{km}\right)\hat{E}_m\right)$$

$$\hat{I}_k = \left(jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k}\left(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}\right)\right)\hat{E}_k + \left(\sum_{m \in \Omega_k}\left(-a_{km}\hat{y}_{km}\right)\right)\hat{E}_m \quad (26)$$

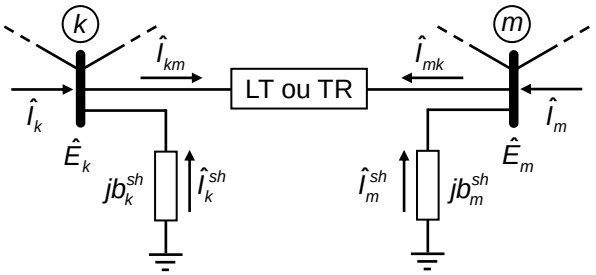
Analogamente para a barra *m* do ramo *k-m* da Figura 9, tem-se que a soma da injeção líquida de corrente $\hat{I}_m$ na barra *m* com a corrente *shunt* $\hat{I}_m^{sh}$, é igual ao somatório das correntes de ramos $\hat{I}_{mk}$, definida pela equação geral (19), tal que:

$$\hat{I}_m + \hat{I}_m^{sh} = \sum_{k \in \Omega_m} \hat{I}_{mk} \Rightarrow \hat{I}_m = \left(\sum_{k \in \Omega_m}\left(-a_{km}\,\hat{y}_{km}\right)\right)\hat{E}_k + \left(jb_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m}\left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)\right)\hat{E}_m$$

$$\hat{I}_m = \left(\sum_{k \in \Omega_m} \left(- a_{km}\, \hat{y}_{km} \right) \right) \hat{E}_k + \left(jb_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km} \right) \right) \hat{E}_m \tag{27}$$

onde Ω_m é o conjunto das barras conectadas diretamente à barra *m*.

Figura 9 - Esquema de correntes de barra e de ramos para definição do balanço de correntes.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Para um sistema elétrico com *NB* barras, pode-se obter a equação de balanço de corrente para todas as barras aplicando as Equações (26) e (27), resultando em um conjunto de equações que relaciona um vetor $\underline{\hat{I}}$ ($NB \times 1$) de injeções líquidas de correntes complexas nas barras e um vetor $\underline{\hat{E}}$ ($NB \times 1$) de tensões complexas de barra, através de uma matriz $[\hat{Y}]$ formada por componentes advindos dos elementos série e *shunts* de rede, chamada matriz admitância nodal, tal que (na equação é mostrado apenas os elementos referentes a duas barras quaisquer *k* e *m* da rede):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{I}_k \\ \vdots \\ \hat{I}_m \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{I}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} \left(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2\, \hat{y}_{km} \right) & \cdots & -a_{km}\, \hat{y}_{km} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -a_{km}\, \hat{y}_{km} & \cdots & jb_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km} \right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{[\hat{Y}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{E}_k \\ \vdots \\ \hat{E}_m \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{E}}}$$

o que determina a equação nodal de rede, expressa de forma compacta por:

$$\underline{\hat{I}} = [\hat{Y}]\, \underline{\hat{E}} \tag{28}$$

Logo, os elementos da diagonal principal e fora da diagonal principal da matriz admitância nodal apresenta as seguintes formas gerais determinadas por:

$$\hat{Y}_{kk} = jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} \left(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2\, \hat{y}_{km} \right) = jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} \left(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \left(g_{km} + j\, b_{km} \right) \right) \tag{29}$$

$$\hat{Y}_{km} = - a_{km}\, \hat{y}_{km} = - a_{km} \left(g_{km} + j\, b_{km} \right) \tag{30}$$

$$\hat{Y}_{mk} = -a_{km}\,\hat{y}_{km} = -a_{km}\left(g_{km} + j\,b_{km}\right) \tag{31}$$

$$\hat{Y}_{mm} = jb_m^{sh} + \sum_{k\in\Omega_m}\left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right) = jb_m^{sh} + \sum_{k\in\Omega_m}\left(jb_{km}^{sh} + \left(g_{km} + j\,b_{km}\right)\right) \tag{32}$$

A formulação matricial de sistemas elétricos definida pela equação (28) é de natureza linear, pois a relação entre tensão e corrente é linear, tal que o estado das tensões de barra (geralmente as incógnitas do sistema) se resume ao cálculo:

$$\hat{\underline{E}} = \left[\hat{Y}\right]^{-1}\hat{\underline{I}} = \left[\hat{Z}\right]\hat{\underline{I}} \tag{33}$$

onde $\left[\hat{Z}\right]$ representa a matriz impedância nodal do sistema, caracterizada por ter montagem trabalhosa, razão pela qual a formulação do problema do fluxo de carga normalmente se basear na matriz admitância nodal, cuja construção é mais simples.

Na prática, os dados de barra de sistemas elétricos são descritos em termos de potência, não de corrente. Portanto, como as potências injetadas nas barras são conhecidas e as tensões são incógnitas, é necessário reformular o problema. Além disso, a equação nodal não contempla diretamente barras com tensão controlada, nem especifica uma barra de referência angular, o que é essencial para resolver o sistema de equações. Assim, a formulação do problema de fluxo de carga requer um modelo não linear, uma vez que a relação entre tensão e potência não é linear.

1.6.8 Classificação de Barras

Em sistemas elétricos, cada barra *k* geralmente apresenta duas equações básicas não lineares e quatro variáveis fundamentais: o módulo V_k e o ângulo de fase θ_k da tensão na barra *k*, e as potências ativa líquida P_k e reativa líquida Q_k injetadas na barra *k*. Logo, para garantir que o número de equações seja igual ao número de incógnitas e possibilitar a solução do fluxo de carga por algum método numérico, é necessário que as barras sejam classificadas segundo suas variáveis previamente conhecidas e sua incógnitas, onde duas dessas variáveis são dados para que as outras duas sejam calculadas durante o processo de solução do PFC.

Assim, com base na combinação de variáveis conhecidas e incógnitas, todas as barras de um sistema são classificadas em três tipos (resumo na Tabela 2):

- Barra PQ: conhecem-se as potências ativa P_k e reativa Q_k injetadas e obtém-se o módulo da tensão V_k e o ângulo de fase θ_k na barra k. Geralmente são barras de cargas (consumo) e bastante comuns em redes de distribuição e transmissão.
- Barra PV: conhecem-se a potência ativa P_k injetada e o módulo da tensão V_k na barra, sendo calculados a potência reativa Q_k injetada e o ângulo de fase θ_k. Esse tipo de barra representa unidades geradoras com grande capacidade de geração ou compensadores síncronos, nas quais o módulo de tensão é mantido constante e independente de variações de geração/demanda nas demais barras da rede. Este tipo de barra normalmente não está presente em redes de distribuição.
- Barra Vθ (ou *slack*/referência): conhecem-se o módulo da tensão V_k e o ângulo de fase θ_k, enquanto as potências ativa P_k e reativa Q_k injetadas são calculadas. Essa barra é utilizada como referência de ângulo para todo o sistema e também é responsável por equilibrar o balanço de potência ativa e reativa da rede.

Tabela 2 - Tipos de barras e classificação das variáveis associadas.

Tipo de barra	**Notação**	**Dados**	**Incógnitas**
Barra de carga	PQ ou 0	P_k e Q_k	V_k e θ_k
Barra de tensão controlada	PV ou 1	P_k e V_k	Q_k e θ_k
Barra de referência angular	Vθ ou 2	V_k e θ_k	P_k e Q_k

Fonte: os próprios autores

1.6.9 Estratégia de Solução de PFC

Analisando-se as variáveis fundamentais da formulação do PFC de sistemas elétricos, pode-se observar que as variáveis de tensão e potência são de natureza diferentes, tal que, se conhecidos o estado da tensão V_k e θ_k de todas as barras do sistema em estudo, pode-se calcular as injeções de potência ativa P_k e reativa Q_k desconhecidas. Com isso, a literatura técnica geralmente adota uma estratégia de solução do PFC com base em dois subproblemas chamado subsistemas, a saber:

- Subsistema 1: visa determinar o estado das tensões desconhecidas do sistema, ou seja, os módulos de tensão V_k para barras PQ e os ângulos θ_k para barras PQ e PV. Para isso, normalmente é necessário um método iterativo e implementação

computacional do algoritmo do solução devido ao usual elevado número de barras dos sistemas elétricos, o que resulta no principal objetivo de solução do PFC.

- Subsistema 2: busca, com as tensões de barra já conhecidas, realizar o cálculo das variáveis restantes, que residem nas injeções líquidas de potência ativa P_k e reativa Q_k na barra Vθ e a potência reativa Q_k das barras PV. Neste subsistema, os cálculos são diretos e utilizam as equações de potência já estabelecidas. Além disso, com o estado das tensões de barra conhecido, pode-se calcular os fluxos de potência ativa e reativa nos ramos e perdas de potência ativa e reativa nos ramos, bem como a potência reativa absorvida por elementos *shunts*.

1.7 PFC de Redes de Distribuição

1.7.1 Introdução

Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica (SDEE) possuem características específicas que os distinguem de sistemas de transmissão de potência. A principal é a topologia radial de seus alimentadores, adotada por isto proporcionar simplicidade operacional e facilidade na coordenação da proteção. Esses sistemas partem de uma subestação, também chamada barra fonte, nó raiz ou S/E, que recebe potência do sistema de transmissão (*grid*) e alimenta, em cascata, as demais barras da rede, tipicamente compostas por cargas. Em condições normais e sem controle de tensão devido à ausência de geração significativa (sem barras PV), o fluxo de potência é unidirecional: da barra fonte (tipo Vθ) para as barras de consumidores (barras PQ).

As redes de distribuição também apresentam baixa razão X/R, o que reduz a efetividade do controle de tensão via elementos *shunts*, geralmente desprezados na modelagem (b_k^{sh} = 0). Adicionalmente, a tensão nas demais barras tende a seguir a da barra fonte, devido ao “efeito arraste” da tensão proporcionado pelo *grid*. Mesmo quando há geração distribuída, a capacidade de controle de tensão é limitada, não sendo suficiente para alterar o perfil de tensão. Como consequência, modela-se a das barras como tipo PQ e a barra fonte como tipo Vθ, uma vez que é necessário o fornecimento de uma referência angular para as demais barras do SDEE.

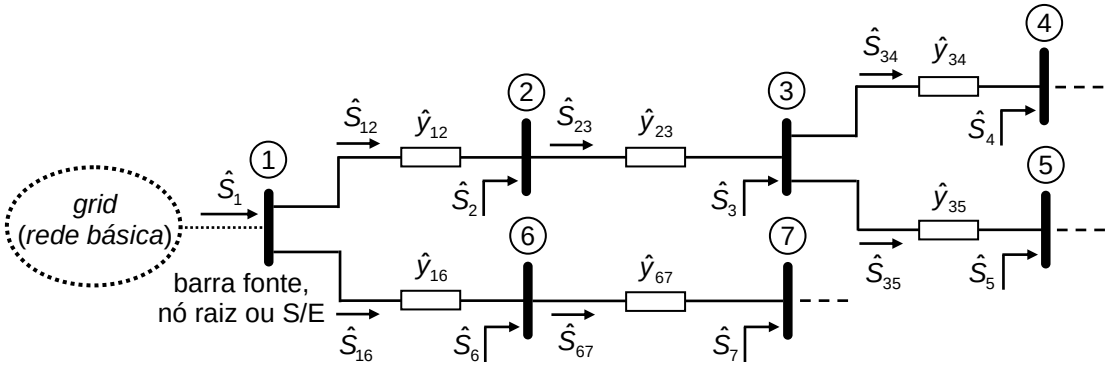
Além disso, os trechos de linha de redes de distribuição são curtos (inferiores a 80 *km*) e operam com tensões moderadas (tipicamente abaixo de 34 *kV*), tal que

os efeitos capacitivos *shunt* dos ramos são desprezados (b_{km}^{sh} = 0). A presença de reguladores de tensão no sistema também é ignorada (a_{km} = 1) e os transformadores fazem parte da carga, modelando-se apenas o lado primário em tensão.

Assim, baseado nestas características, a topologia de redes de distribuição de energia elétrica geralmente se resume tipicamente a elementos série $\hat{y}_{km}$ de ramos, tal como exemplificado no esquema unifilar mostrado na Figura 10.

Assim, para o devido cálculo do subsistema 1 de redes de distribuição, são normalmente empregados métodos mais adequados às características destas redes, tais como os algoritmos fundamentados em um processo de varredura direta e inversa dos ramos da rede, chamados Método da Soma das Potência (MSP) e Método da Soma das Correntes (MSI), bem como no método baseado em uma formulação matricial proposto em TENG (2003), chamado método *direct load flow*.

Figura 10 - Esquema radial típico de rede de distribuição e seus fluxos de potência unidirecionais.



Fonte: BRIGATTO (2025).

1.7.2 Método da Soma das Correntes

O Método da Soma das Correntes, proposto em SHIRMOHAMMADI (1988), é um algoritmo iterativo para resolver o fluxo de carga em redes de distribuição radiais, fundamentado em formulações de correntes e tensões no domínio complexo. O MSI baseia-se em dois processos de varredura de barras e de ramos da rede elétrica em estudo, vistos a seguir, que são iterativamente repetidos até que algum critério de parada adotado previamente seja atingido, quando enfim a solução é encontrada:

- Varredura inversa: nesta etapa, procede-se ao acúmulo progressivo das correntes complexas injetadas nas barras, começando pelas barras terminais e avançando

em direção à barra de referência (barra fonte). Durante o processo, somam-se as contribuições de corrente das barras mais distantes até atingir a barra fonte.

- Varredura direta: usando os resultados da varredura inversa, realiza-se a correção das tensões complexas nas barras a partir da tensão conhecida da barra fonte, com as tensões nas demais barras atualizadas seguindo o sentido da rede.

Para ilustrar o processo da varredura inversa, seja o ramo genérico *k-m* de uma rede de distribuição radial mostrado na Figura 11, onde a barra *m* se localiza mais distante da fonte do que a barra *k*. Partindo-se dos nós terminais e em direção à barra fonte, a corrente acumulada na barra *m* corresponde à soma de todas as correntes que chegam na barra *m*, com exceção da corrente no sentido *m* para *k* do ramo *k-m*. Definindo-se Φ_m como o conjunto de barras dos ramos imediatamente a jusante da barra *m*, com base na Figura 11 tem-se que a corrente $\hat{I}_m^{ac}$ acumulada na barra *m* corresponde à soma da injeção líquida de corrente (geração – carga) $\hat{I}_m$ na barra *m* com o somatório de todas as correntes de ramos $\hat{I}_{\ell m}$, $\ell \in \Phi_m$, tal que:

$$\hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{I}_{\ell m} \tag{34}$$

Em que a injeção líquida de corrente complexa $\hat{I}_m$ na barra *m* é obtida com base na Equação (7) considerando os dados de injeção líquida de potência $\hat{S}_m = P_m + jQ_m$ e de tensão $\hat{E}_m = V_m \angle \theta_m$ da barra *m*, tal que:

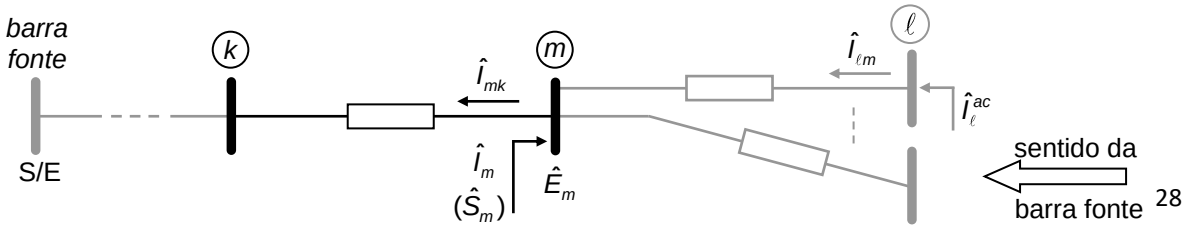
$$\hat{I}_m = \frac{\hat{S}_m^*}{\hat{E}_m^*} = \frac{(P_m + jQ_m)^*}{(V_m \angle \theta_m)^*} \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_m = \frac{P_m - jQ_m}{V_m \angle -\theta_m} \tag{35}$$

Definindo-se $\hat{I}_\ell^{ac}$ como a corrente acumulada em uma barra $\ell \in \Phi_m$, com base a Figura 11, observa-se que $\hat{I}_{\ell m}$ é igual à corrente $\hat{I}_\ell^{ac}$, isto é: $\hat{I}_{\ell m} = \hat{I}_\ell^{ac}$, tal que:

$$\hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{I}_\ell^{ac} \tag{36}$$

Assim, o acúmulo de correntes em uma dada barra *m* ocorre somando-se sua injeção líquida com as correntes acumuladas nas barras a jusante da barra *m*.

Figura 11 - Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura inversa do MSI.



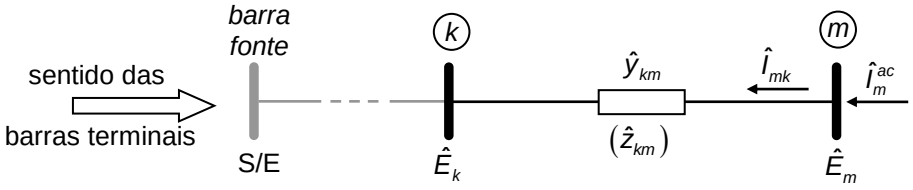
Fonte: BRIGATTO (2025).

Para exemplificar o processo da varredura direta, seja o ramo genérico *k*-*m* mostrado na Figura 12, onde a barra *m* está mais distante da barra fonte do que a barra *k* e o restante da rede a jusante da barra *m* está representada pela corrente $\hat{I}_m^{ac}$ acumulada na barra *m* obtida com o processo de varredura inversa. Partindo-se da tensão da barra fonte e em direção aos nós terminais, com base na Figura 12 tem-se que a tensão $\hat{E}_m$ da barra *m* pode ser corrigida supondo-se que a tensão $\hat{E}_k$ na barra *k* tenha sido previamente corrigida ou conhecida no caso da barra fonte. Assim, equacionando o ramo *k*-*m* da Figura 12, tem-se que $\hat{E}_m$ é obtido por:

$$\hat{I}_{mk} = \left(\hat{E}_m - \hat{E}_k\right)\hat{y}_{km} \;\Rightarrow\; \hat{E}_m - \hat{E}_k = \frac{1}{\hat{y}_{km}}\hat{I}_{mk} = \hat{z}_{km}\hat{I}_m^{ac}$$

$$\hat{E}_m = \hat{E}_k + \hat{z}_{km}\hat{I}_m^{ac} \tag{37}$$

Figura 12 – Ramo genérico *k*-*m* para exemplificação da varredura direta do MSI.



Fonte: BRIGATTO (2025).

1.7.3 Método da Soma das Potências com *Shunts*

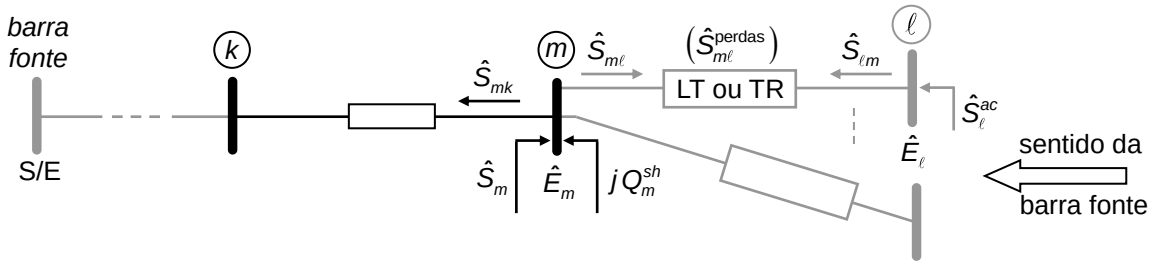
A formulação do Método da Soma das Potências foi originalmente proposto em BROADWATER (1988) e a versão considerando elementos *shunts* de barra e de ramos, desenvolvido a seguir, é baseado na apresentação em BRIGATTO (2025).

Para o processo de varredura inversa, seja o ramo genérico *k*-*m* de uma rede de distribuição radial mostrado na Figura 13, onde a barra *m* situa-se mais distante da barra fonte do que a barra *k*. Partindo-se dos nós terminais e em direção à barra fonte, define-se o acúmulo de potências na barra *m* como a soma das potências incidentes na barra *m*, com exceção do fluxo $\hat{S}_{mk}$ no sentido *m* para *k* do ramo *k*-*m*. Definindo Φ_m como o conjunto das barras dos ramos imediatamente a jusante da

barra *m*, com base na Figura 13 observa-se que a potência $\hat{S}_m^{ac}$ acumulada na barra *m* resulta da soma da injeção líquida de potência $\hat{S}_m$ com a contribuição de potência *shunt* jQ_m^{sh} da própria barra, subtraída do somatório dos fluxos de potência $\hat{S}_{m\ell}$ dos ramos *m*-ℓ, $\ell \in \Phi_m$, visto o sentido adotado positivo ser saindo da barra *m*, tal que:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m + jQ_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} \tag{38}$$

Figura 13 – Ramo genérico *k*-*m* para exemplificação da varredura inversa do MSP com *shunts*.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Como a perda de potência $\hat{S}_{m\ell}^{perdas}$ no ramo *m*-ℓ pode ser obtida pela soma dos fluxos de potência complexa $\hat{S}_{m\ell}$ e $\hat{S}_{\ell m}$ nos dois sentidos do ramo *m*-ℓ e, com base na Figura 13 observa-se que o fluxo $\hat{S}_{\ell m}$ no sentido ℓ para *m* equivale à potência $\hat{S}_\ell^{ac}$ previamente acumulada na barra $\ell \in \Phi_m$, tal que: $\hat{S}_{\ell m} = \hat{S}_\ell^{ac}$. Logo, tem-se que o fluxo de potência $\hat{S}_{m\ell}$ no sentido *m* para ℓ do ramo *m*-ℓ pode ser obtido por:

$$\hat{S}_{m\ell}^{perdas} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_{\ell m} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_\ell^{ac} \quad \Rightarrow \quad \hat{S}_{m\ell} = \hat{S}_{m\ell}^{perdas} - \hat{S}_\ell^{ac} \tag{39}$$

Ao aplicar o resultado da Equação (39) na Equação (38) e considerando que a potência *shunt* Q_m^{sh} na barra *m* pode ser obtida com base na Equação (9) por:

$$Q_m^{sh} = V_m^2 b_m^{sh} \tag{40}$$

tem-se que a potência $\hat{S}_m^{ac}$ acumulada na barra *m* pode ser redefinida como:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m + jQ_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} \;\Rightarrow\; \hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m + jV_m^2 b_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} \left(\hat{S}_{m\ell}^{perdas} - \hat{S}_\ell^{ac}\right) \tag{41}$$

Definindo-se os termos vistos na Equação (41) em coordenadas cartesianas: $\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + jQ_m^{ac}$, $\hat{S}_m = P_m + jQ_m$, $\hat{S}_\ell^{ac} = P_\ell^{ac} + jQ_\ell^{ac}$ e $\hat{S}_{m\ell}^{perdas} = P_{m\ell}^{perdas} + jQ_{m\ell}^{perdas}$, tem-se a Equação (41) pode agora ser novamente redefinida da seguinte forma:

$$\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + jQ_m^{ac} = P_m + jQ_m + jV_m^2 b_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m} \left(P_\ell^{ac} + jQ_\ell^{ac} - P_{m\ell}^{perdas} - jQ_{m\ell}^{perdas} \right)$$

tal que, ao separar as partes real e imaginária, obtém-se as potências ativa P_m^{ac} e reativa Q_m^{ac} acumuladas em cada barra no processo de varredura inversa, por:

$$P_m^{ac} = P_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} \left(P_\ell^{ac} - P_{m\ell}^{\text{perdas}} \right) \tag{42}$$

$$Q_m^{ac} = Q_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} \left(Q_\ell^{ac} - Q_{m\ell}^{\text{perdas}} \right) + jV_m^2 b_m^{sh} \tag{43}$$

onde as perdas de potência ativa $P_{m\ell}^{perdas}$ e reativa $Q_{m\ell}^{perdas}$ em um ramo *m*-ℓ, $\ell \in \Phi_m$, são obtidas com base nas Equações (24) e (25) da seguinte forma:

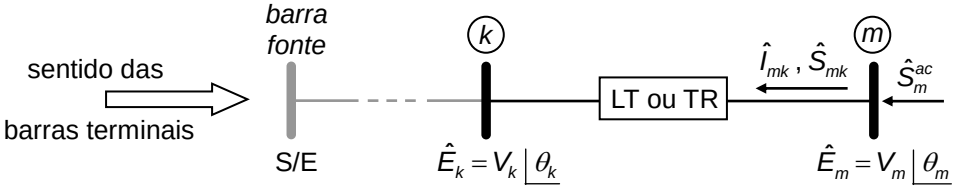
$$P_{m\ell}^{perdas} = \left(a_{m\ell}^2 V_m^2 + V_\ell^2 \right) g_{m\ell} - 2a_{m\ell} V_m V_\ell g_{m\ell} \cos\theta_{m\ell} \tag{44}$$

$$Q_{m\ell}^{perdas} = -\left(a_{m\ell}^2 V_m^2 + V_\ell^2 \right) \left(b_{m\ell} + b_{m\ell}^{sh} \right) + 2a_{m\ell} V_m V_\ell b_{m\ell} \cos\theta_{m\ell} \tag{45}$$

Para o processo de varredura direta, após a acumulação de potência pelas barras na varredura inversa, a etapa seguinte envolve a correção do módulo e do ângulo da tensão em cada barra por meio da varredura direta. Esta varredura tem início na barra fonte (tensão conhecida) e propaga-se até os terminais da rede.

Assim, seja o ramo genérico *k*-*m* apresentado no esquema da Figura 14, onde a barra *m* situa-se mais distante da barra fonte do que a barra *k* e o restante da rede a jusante da barra *m* está representada pela potência $\hat{S}_m^{ac}$ previamente acumulada na barra *m* no processo de varredura inversa. Partindo-se da tensão conhecida da barra fonte e em direção aos nós terminais, observa-se na Figura 14 que a tensão $\hat{E}_m$ da barra *m* pode ser corrigida supondo que a tensão $\hat{E}_k$ na barra *k* tenha sido previamente re-calculada, ou conhecida no caso da barra fonte.

Figura 14 – Ramo genérico *k*-*m* para exemplificação da varredura direta do MSP com *shunts*.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Com base na Figura 14, observa-se que o fluxo de potência $\hat{S}_{mk}$ no sentido *m* para *k* do ramo *k-m* corresponde a potência $\hat{S}_m^{ac}$ acumulada na barra *m*, tal que: $\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_{mk}$. Considerando a expressão geral de correntes de ramo $\hat{I}_{mk}$ no sentido *m* para *k* definida pela Equação (19), tem-se que $\hat{S}_m^{ac}$ pode então ser determinada por:

$$\hat{S}_{mk} = \hat{S}_m^{ac} = \hat{E}_m \hat{I}_{mk}^* = \hat{E}_m \left(- a_{km}\, \hat{y}_{km}\, \hat{E}_k + \left(j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km} \right) \hat{E}_m \right)^*$$

$$\hat{S}_m^{ac} = - a_{km}\, \hat{y}_{km}^*\, V_k \underline{\left| -\theta_k \right.} V_m \underline{\left| \theta_m \right.} + \left(\hat{y}_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right) V_m \underline{\left| -\theta_m \right.} V_m \underline{\left| \theta_m \right.}$$

$$\hat{S}_m^{ac} = - a_{km}\, \hat{y}_{km}^*\, V_k V_m \underline{\left| \theta_m - \theta_k \right.} + \left(\hat{y}_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right) V_m^2$$

Como a impedância série $\hat{y}_{km} = g_{km} + j\, b_{km}$ pode ser expressa em coordenadas polares por seu módulo y_{km} e ângulo ϕ_{km}, tal que: $\hat{y}_{km} = y_{km} \underline{\left| \phi_{km} \right.}$, tem-se que:

$$\hat{S}_m^{ac} = - a_{km}\, y_{km} \underline{\left| -\phi_{km} \right.}\, V_k V_m \underline{\left| \theta_m - \theta_k \right.} + \left(g_{km} - j\, b_{km} - j b_{km}^{sh} \right) V_m^2$$

$$\hat{S}_m^{ac} = - a_{km}\, V_k V_m\, y_{km} \underline{\left| \theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right.} + \left(g_{km} - j \left(b_{km} + b_{km}^{sh} \right) \right) V_m^2$$

Considerando a relação: $1 \underline{\left| \alpha \right.} = \cos\alpha + j \operatorname{sen}\alpha$, pode-se estabelecer que:

$$\hat{S}_m^{ac} = - a_{km} V_k V_m\, y_{km} \left(\cos\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right) + j \operatorname{sen}\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right) \right) + \left(g_{km} - j \left(b_{km} + b_{km}^{sh} \right) \right) V_m^2$$

Considerando $\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + j\, Q_m^{ac}$ e separando-se as partes real e imaginária do resultado obtido acima, pode-se determinar então que:

$$P_m^{ac} = V_m^2\, g_{km} - a_{km} V_k V_m\, y_{km} \cos\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right)$$

$$Q_m^{ac} = - V_m^2 \left(b_{km} + b_{km}^{sh} \right) - a_{km} V_k V_m\, y_{km} \operatorname{sen}\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right)$$

Isolando-se as funções trigonométricas seno e cosseno, tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right) = \frac{- V_m^2 \left(b_{km} + b_{km}^{sh} \right) - Q_m^{ac}}{a_{km} V_k V_m\, y_{km}}$$

$$\cos\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right) = \frac{V_m^2\, g_{km} - P_m^{ac}}{a_{km} V_k V_m\, y_{km}}$$

Empregando a identidade trigonométrica: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tem-se que:

$$\operatorname{sen}^2\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right) + \cos^2\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km} \right) = 1$$

$$\left(\frac{- V_m^2 \left(b_{km} + b_{km}^{sh} \right) - Q_m^{ac}}{a_{km} V_k V_m\, y_{km}} \right)^2 + \left(\frac{V_m^2\, g_{km} - P_m^{ac}}{a_{km} V_k V_m\, y_{km}} \right)^2 = 1$$

Desenvolvendo e manipulando o resultado obtido acima, obtém-se então que:

$$V_m^4 + \left(\frac{2\left(\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right) Q_m^{ac} - g_{km} P_m^{ac}\right) - a_{km}^2 V_k^2 y_{km}^2}{g_{km}^2 + \left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)^2} \right) V_m^2 + \frac{\left(P_m^{ac}\right)^2 + \left(Q_m^{ac}\right)^2}{g_{km}^2 + \left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)^2} = 0 \qquad (46)$$

Definindo os termos A_m e B_m, obtém-se:

$$A_m = \frac{2\left(Q_m^{ac}\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right) - P_m^{ac}\, g_{km}\right) - a_{km}^2 V_k^2 y_{km}^2}{g_{km}^2 + \left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)^2} \qquad (47)$$

$$B_m = \frac{\left(P_m^{ac}\right)^2 + \left(Q_m^{ac}\right)^2}{g_{km}^2 + \left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)^2} \qquad (48)$$

De maneira semelhante ao que ocorre na formulação convencional do MSP, os coeficientes A_m e B_m são conhecidos no momento em que se realiza o cálculo do da Equação (46), pois seus componentes são parâmetros da rede elétrica (y_{km}, g_{km}, b_{km} e b_{km}^{sh}), e a tensão V_k da barra k e as potências ativa e reativa acumuladas na barra m (P_m^{ac} e Q_m^{ac}) foram anteriormente corrigidas ou calculadas. Logo, o resultado da Equação (46) depende exclusivamente do módulo da tensão V_m na barra m. Assim, a Equação (46) expressa um polinómio de 4º grau biquadrático, definido por:

$$V_m^4 + A_m V_m^2 + B_m = 0 \qquad (49)$$

onde apenas a solução real positiva e próxima de 1 *pu* (próximo do valor nominal da tensão) tem sentido físico para sistemas elétricos de potência e determinada por:

$$V_m = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{A_m^2 - 4B_m} - A_m\right)} \qquad (50)$$

Com o módulo de tensão V_m obtido com a Equação (50) e o ângulo de tensão θ_k na barra k corrigido previamente, pode-se por fim determinar o ângulo de fase θ_m da tensão na barra m com base na identidade: $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{sen}\alpha/\cos\alpha$, tal que:

$$\mathrm{tg}\left(\theta_m - \theta_k - \phi_{km}\right) = \frac{\mathrm{sen}(\theta_m - \theta_k - \phi_{km})}{\cos(\theta_m - \theta_k - \phi_{km})} = \frac{-V_m^2\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right) - Q_m^{ac}}{V_m^2\, g_{km} - P_m^{ac}}$$

$$\theta_m = \theta_k + \phi_{km} + \mathrm{arctg}\left(\frac{-V_m^2\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right) - Q_m^{ac}}{V_m^2\, g_{km} - P_m^{ac}}\right) \qquad (51)$$

1.7.4 Método Direct Load Flow com *Shunts*

O método *Direct Load Flow* (DLF), proposto em TENG (2003), baseia-se em uma formulação matricial construída com base na topologia da rede em estudo, de modo a relacionar as injeções líquidas de corrente de barras com as tensões nodais, por meio de uma matriz DLF obtida a partir do produto entre duas matrizes básicas:

- [BIBC] (Bus Injection to Branch Current): matriz composta por valores binários (0 ou 1) que determina a correspondência entre as injeções líquidas de corrente complexa em cada barra e as correntes complexas que percorrem os ramos.
- [BCBV] (Branch Current to Bus Voltage): matriz cujos elementos correspondem às impedâncias série dos ramos da rede elétrica, estabelecendo uma conexão entre as correntes complexas nos ramos e as tensões complexas nas barras.

A formulação alternativa do método DLF considerando elementos *shunts* de barra e de ramos na rede em estudo foi proposto em um Trabalho de Conclusão de Curso por SILVA e BRIGATTO (2023), construída a partir da equação nodal da rede.

A ausência de *shunts* na rede elétrica torna a matriz admitância singular, pelo fato da soma dos elementos de cada linha da matriz ser nula. A presença de *shunts* na rede faz a soma dos elementos de cada linha da matriz admitância ser não nula, o que permite empregar a equação nodal da rede para expressar a relação entre o vetor de tensões complexas de barra e o vetor de injeções líquidas de corrente.

Como exemplificação do desenvolvimento da formulação do DLF com *shunts*, seja uma rede de distribuição formada por quatro barras, sendo a barra 1 definida como a barra fonte com tensão e ângulo conhecidos (tipo Vθ). Com isso, a equação nodal da rede pode ser expressa em sua forma expandida conforme visto a seguir.

$$\underline{\hat{I}} = \left[\hat{Y}\right]\underline{\hat{E}} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \\ \hat{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, pode-se determinar de maneira geral as injeções líquidas de corrente complexa associadas às barras da rede por meio da seguinte expressão:

$$\begin{cases} \hat{I}_1 = \hat{Y}_{11}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{13}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{14}\hat{E}_4 \\ \hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{23}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{24}\hat{E}_4 \\ \hat{I}_3 = \hat{Y}_{31}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{32}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{33}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{34}\hat{E}_4 \\ \hat{I}_4 = \hat{Y}_{41}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{42}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{43}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{44}\hat{E}_4 \end{cases} \quad (52)$$

Considerando a presença de elementos *shunts* de barra e de ramos na rede, a soma dos elementos de cada linha da matriz admitância resulta em um valor não nulo correspondente ao total de admitâncias *shunts* conectados a cada barra. Assim, definindo $\hat{Y}_k^{sh,T}$ como total de *shunts* conectados a uma barra *k* da rede, tem-se:

$$\hat{Y}_k^{sh,T} = \hat{Y}_{k1} + \hat{Y}_{k2} + \hat{Y}_{k3} + \hat{Y}_{k4} \quad (53)$$

tal que a Equação (52) pode ser re-escrita como:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{11} + \hat{Y}_{12} + \hat{Y}_{13} + \hat{Y}_{14} = \hat{Y}_1^{sh,T} \\ \hat{Y}_{21} + \hat{Y}_{22} + \hat{Y}_{23} + \hat{Y}_{24} = \hat{Y}_2^{sh,T} \\ \hat{Y}_{31} + \hat{Y}_{32} + \hat{Y}_{33} + \hat{Y}_{34} = \hat{Y}_3^{sh,T} \\ \hat{Y}_{41} + \hat{Y}_{42} + \hat{Y}_{43} + \hat{Y}_{44} = \hat{Y}_4^{sh,T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{Y}_{11} = \hat{Y}_1^{sh,T} - \hat{Y}_{12} - \hat{Y}_{13} - \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} = \hat{Y}_2^{sh,T} - \hat{Y}_{22} - \hat{Y}_{23} - \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} = \hat{Y}_3^{sh,T} - \hat{Y}_{32} - \hat{Y}_{33} - \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} = \hat{Y}_4^{sh,T} - \hat{Y}_{42} - \hat{Y}_{43} - \hat{Y}_{44} \end{cases}$$

Substituindo os termos da primeira coluna da matriz admitância obtidos no último resultado no conjunto de correntes de barra da Equação (52), obtém-se que:

$$\begin{cases} \hat{I}_1 = \left(\hat{Y}_1^{sh,T} - \hat{Y}_{12} - \hat{Y}_{13} - \hat{Y}_{14}\right)\hat{E}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{13}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{14}\hat{E}_4 \\ \hat{I}_2 = \left(\hat{Y}_2^{sh,T} - \hat{Y}_{22} - \hat{Y}_{23} - \hat{Y}_{24}\right)\hat{E}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{23}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{24}\hat{E}_4 \\ \hat{I}_3 = \left(\hat{Y}_3^{sh,T} - \hat{Y}_{32} - \hat{Y}_{33} - \hat{Y}_{34}\right)\hat{E}_1 + \hat{Y}_{32}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{33}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{34}\hat{E}_4 \\ \hat{I}_4 = \left(\hat{Y}_4^{sh,T} - \hat{Y}_{42} - \hat{Y}_{43} - \hat{Y}_{44}\right)\hat{E}_1 + \hat{Y}_{42}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{43}\hat{E}_3 + \hat{Y}_{44}\hat{E}_4 \end{cases}$$

Desenvolvendo o conjunto de equações acima, isolando os termos com $\hat{Y}_k^{sh,T}$ e agrupando-se os termos comuns de admitâncias, tem-se o conjunto de equações:

$$\begin{cases} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T}\hat{E}_1 = \left(\hat{E}_2 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{12} + \left(\hat{E}_3 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{13} + \left(\hat{E}_4 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{14} \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T}\hat{E}_1 = \left(\hat{E}_2 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{22} + \left(\hat{E}_3 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{23} + \left(\hat{E}_4 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{24} \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T}\hat{E}_1 = \left(\hat{E}_2 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{32} + \left(\hat{E}_3 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{33} + \left(\hat{E}_4 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{34} \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T}\hat{E}_1 = \left(\hat{E}_2 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{42} + \left(\hat{E}_3 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{43} + \left(\hat{E}_4 - \hat{E}_1\right)\hat{Y}_{44} \end{cases}$$

Colocando-se o conjunto de equações acima para forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T}\hat{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_3 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_4 - \hat{E}_1 \end{bmatrix}$$

A equação matricial assim obtida não tem forma quadrada, pois é composta por 4 equações, mas três incógnitas, sendo necessário torná-la na forma quadrada para posterior solução com base na álgebra matricial, mas sem mudar o conjunto original. Para isso, são introduzidas na equação matricial duas considerações:

- Inserção da coluna 1 da matriz admitância referente à barra fonte (barra 1) na matriz acima, com a troca da diagonal principal $\hat{Y}_{11}$ por um valor elevado (10^{10}) para que a tensão na barra fonte não seja corrigido a cada iteração do método.
- Acréscimo de elemento com valor nulo na primeira linha do vetor de diferenças de tensão referente à barra fonte (barra 1), equivalente a introduzir o termo $\hat{E}_1 - \hat{E}_1$ neste elemento, tal que o cálculo das injeções de correntes não serão alteradas.

Assim, empregando as duas considerações no resultado da equação matricial obtida anteriormente, obtém-se então que:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T}\hat{E}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{E}_1 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_3 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_4 - \hat{E}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 10^{10} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{E}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{E}}_{V\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 10^{10} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix}^{-1}}_{[DLF]} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T}\hat{E}_1 \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T}\hat{E}_1 \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{I}}_{barra}}$$

$$\therefore \quad \underline{\hat{E}} = \underline{\hat{E}}_{V\theta} + [DLF]\,\underline{\hat{I}}_{barra} \tag{54}$$

Como as injeções líquidas de corrente dependem das tensões de barra, que normalmente são incógnitas do problema do fluxo de carga, tem-se que a obtenção das tensões de barra com a Equação (54) requer um processo iterativo, onde o estado das tensões de barra é corrigido a cada iteração *i* com base nas injeções

líquidas de corrente nas barras calculadas com o estado das tensões de barra atual obtido na iteração anterior, por meio da equação recursiva determinada por:

$$\therefore \quad \hat{\underline{E}} = \hat{\underline{E}}_{V\theta} + [DLF]\, \hat{\underline{I}}_{barra} \tag{55}$$

1.7.5 Critério de Convergência dos métodos de Solução do Subsistema 1

O cálculo do subsistema 1 por qualquer dos método de solução (MSP, MSI e DLF) é finalizado por um teste de convergência com uma tolerância ε adotada. Um critério de parada comumente utilizado consiste em calcular o módulo do maior erro ΔV de tensões de barra entre duas iterações sucessivas i e $i+1$, tal que:

$$\max_{k \in \Omega_{NB-1}} \left|\Delta V_k\right| \leq \varepsilon \ , \ \text{onde: } \Delta V_k = V_k^{(i+1)} - V_k^{(i)} \tag{56}$$

onde Ω_{NB-1} é o conjunto de todas as barras da rede, com exceção da barra fonte.

Se atingida a convergência, finaliza-se o processo iterativo adotando o último estado das tensões de barra obtido como solução do subsistema 1 e resolve-se o subsistema 2, cujo cálculo é trivial. Caso a convergência não tenha sido atingida, deve-se retornar o processo do algoritmo iterativo do método de solução utilizado.

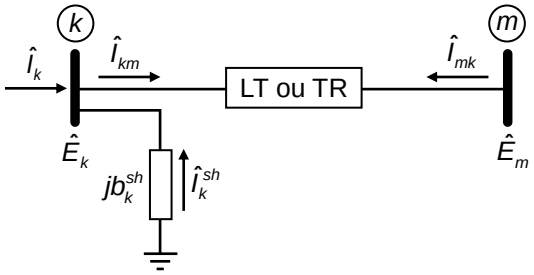
2. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Com os tópicos teóricos vistos no Capítulo 2 necessários ao desenvolvimento do objeto de estudo e contribuição deste trabalho, neste capítulo é apresentada a formulação do MSI considerando a presença de elementos *shunts* de barras e de ramos na rede de distribuição em estudo e, para o seu desenvolvimento, espera-se as devidas semelhanças com a versão original MSI apresentada no item 2.3.2, e com a versão do MSP considerando *shunts* apresentada no item 2.3.3.

Inicialmente, é conveniente visualizar uma rede de distribuição genérica com os componentes que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho. A Figura 15 apresenta o esquema de uma rede representada por um ramo genérico *k-m* com tensões $\hat{E}_k = V_k \angle \theta_k$ e $\hat{E}_m = V_m \angle \theta_m$ nas barras *k* e *m*, respectivamente, e a injeção de uma corrente líquida $\hat{I}_k$ na barra *k*, bem como o elemento série entre as duas barras, que pode ser um transformador regulador de tensão ou linha de distribuição, com os fluxos de corrente $\hat{I}_{km}$ e $\hat{I}_{mk}$ que percorrem o ramo em direções opostas, e por fim um elemento *shunt* responsável por injetar uma corrente $\hat{I}_k^{sh}$ na barra *k*. Para melhor compreensão da formulação, as equações destes termos são reescritas a seguir:

- Equação (7): $\hat{I}_k = \dfrac{P_k - jQ_k}{V_k \angle -\theta_k}$
- Equação (8): $\hat{I}_k^{sh} = -\hat{E}_k \, jb_k^{sh}$
- Equação (11): $\hat{y}_{km} = g_{km} + j\, b_{km}$
- Equação (18): $\hat{I}_{km} = \left(jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km} \right) \hat{E}_k - a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_m$
- Equação (19): $\hat{I}_{mk} = -a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_k + \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km} \right) \hat{E}_m$

Figura 15 - Representação de uma rede de distribuição genérica com shunts



Fonte: BRIGATTO (2025).

2.1 Formulação MSI com *Shunts* - Varredura Inversa

Seja o ramo genérico *k*-*m* de uma rede de distribuição mostrado na Figura 16, onde a barra *m* situa-se mais distante da barra fonte do que a barra *k*. Partindo-se dos nós terminais e em direção à barra fonte, define-se o acúmulo de correntes na barra *m* como a soma de todas as corrente incidentes (entrando) na barra *m*, com exceção da corrente no sentido *m* para *k* do ramo *k*-*m*. Definindo-se Φ_m como o conjunto das barras dos ramos imediatamente a jusante da barra *m*, tem-se que a potência $\hat{I}_m^{ac}$ acumulada na barra *m* corresponde à soma da injeção líquida de corrente $\hat{I}_m$ na barra *m* com a corrente no elemento *shunts* $\hat{I}_m^{sh}$ em derivação ao nó terra na barra *m*, subtraída do somatório de correntes $\hat{I}_{m\ell}$ no sentido ℓ para *m*, $\ell \in \Phi_m$, visto que o sentido da corrente $\hat{I}_{m\ell}$ é adotada positivo saindo da barra *m*, tal que:

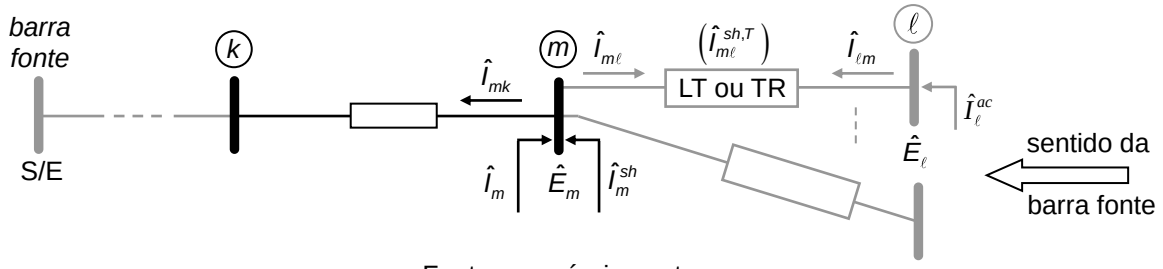
$$\hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \hat{I}_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{I}_{m\ell} \tag{57}$$

onde, conforme (7) e (8), $\hat{I}_m$ e $\hat{I}_m^{sh}$ são calculadas respectivamente por:

$$\hat{I}_m = \frac{\hat{S}_m^*}{\hat{E}_m^*} = \frac{P_m - jQ_m}{V_m \angle -\theta_m} \tag{58}$$

$$\hat{I}_m^{sh} = -\hat{E}_m\, jb_m^{sh} \tag{59}$$

Figura 16 - Ramo genérico *k*-*m* para exemplificação da varredura inversa do MSI com *shunts*.



Fonte: os próprios autores.

Seja um ramo qualquer *m*-ℓ, $\ell \in \Phi_m$, a jusante da barra *m*. Definindo-se $\hat{I}_{m\ell}^{sh,T}$ como o total de corrente nos elementos *shunts* do ramo *m*-ℓ, com base na Figura 16 observa-se que a corrente $\hat{I}_{m\ell}$, subtraída do total de correntes *shunts* $\hat{I}_{m\ell}^{sh,T}$, resulta no negativo (entrando na barra ℓ) da corrente $\hat{I}_{\ell m}$, tal que $\hat{I}_{m\ell}^{sh,T}$ pode ser obtida por:

$$\hat{I}_{m\ell} - \hat{I}_{m\ell}^{sh,T} = -\hat{I}_{\ell m} \;\Rightarrow\; \therefore\; \hat{I}_{m\ell}^{sh,T} = \hat{I}_{m\ell} + \hat{I}_{\ell m} \tag{60}$$

onde, baseado nas Equações (18) e (19), $\hat{I}_{m\ell}$ e $\hat{I}_{\ell m}$ são obtidas respectivamente por:

$$\hat{I}_{m\ell} = \left(jb_{m\ell}^{sh} + a_{m\ell}^2\,\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_m - a_{m\ell}\,\hat{y}_{m\ell}\,\hat{E}_\ell \tag{61}$$

$$\hat{I}_{\ell m} = -a_{m\ell}\,\hat{y}_{m\ell}\,\hat{E}_m + \left(jb_{m\ell}^{sh} + \hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_\ell \tag{62}$$

Logo, aplicando-se as Equações (61) e (62) na Equação (60), tem-se que a corrente total $\hat{I}_{m\ell}^{sh,T}$ nos elementos *shunts* de um ramo *m*-ℓ, $\ell \in \Phi_m$, é determinado por:

$$\hat{I}_{m\ell}^{sh,T} = \left(jb_{m\ell}^{sh} + a_{m\ell}^2\,\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_m - a_{m\ell}\,\hat{y}_{m\ell}\,\hat{E}_\ell - a_{m\ell}\,\hat{y}_{m\ell}\,\hat{E}_m + \left(jb_{m\ell}^{sh} + \hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_\ell$$

$$\hat{I}_{m\ell}^{sh,T} = \left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(a_{m\ell}^2 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_m + \left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(1 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_\ell \tag{63}$$

Analisando novamente a Figura 16, observa-se que a corrente $\hat{I}_{\ell m}$ no sentido ℓ para *m* do ramo *m*-ℓ, $\ell \in \Phi_m$, corresponde à corrente $\hat{I}_\ell^{ac}$ previamente acumulada na barra ℓ, ou seja, $\hat{I}_{\ell m} = \hat{I}_\ell^{ac}$ e, com base na Equação (60), tem-se que a corrente $\hat{I}_{m\ell}$ no sentido *m* para ℓ do ramo *m*-ℓ, $\ell \in \Phi_m$, pode agora ser determinado por:

$$\hat{I}_{m\ell}^{sh,T} = \hat{I}_{m\ell} + \hat{I}_\ell^{ac} \;\Rightarrow\; \therefore\; \hat{I}_{m\ell} = \hat{I}_{m\ell}^{sh,T} - \hat{I}_\ell^{ac}$$

tal que, aplicando-se a Equação (63) no resultado acima, tem-se que:

$$\hat{I}_{m\ell} = \left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(a_{m\ell}^2 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_m + \left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(1 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_\ell - \hat{I}_\ell^{ac} \tag{64}$$

Por fim, aplicando-se a Equação (64) na Equação (57), tem-se que a corrente $\hat{I}_m^{ac}$ acumulada na barra *m* de um ramo genérico *k*-*m* da rede em estudo, onde a barra *m* situa-se mais distante da barra fonte do que a barra *k*, é determinada por:

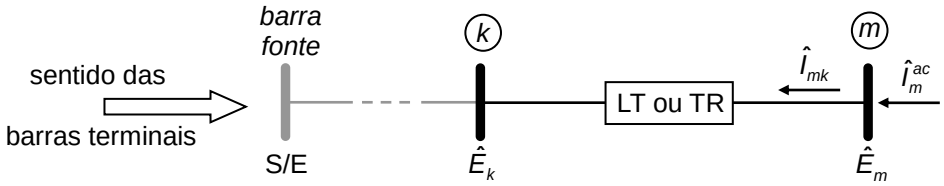
$$\hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \hat{I}_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m}\left(\left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(a_{m\ell}^2 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_m + \left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(1 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_\ell - \hat{I}_\ell^{ac}\right)$$

$$\hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \hat{I}_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m}\left(\hat{I}_\ell^{ac} - \left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(a_{m\ell}^2 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_m - \left(jb_{m\ell}^{sh} + \left(1 - a_{m\ell}\right)\hat{y}_{m\ell}\right)\hat{E}_\ell\right) \tag{65}$$

2.2 Formulação MSI com *Shunts* - Varredura Direta

Seja o ramo genérico *k*-*m* de uma rede de distribuição mostrado na Figura 17, onde a barra *m* situa-se mais distante da barra fonte do que a barra *k* e o restante da rede a jusante da barra *m* está representado pela corrente $\hat{I}_m^{ac}$ acumulada na barra *m* obtida previamente com o processo de varredura inversa. Partindo-se da tensão da barra fonte e em direção aos nós terminais, com base na Figura 17, tem-se que a tensão complexa $\hat{E}_m$ da barra *m* pode ser corrigida supondo-se que a tensão $\hat{E}_k$ na barra *k* tenha sido previamente recalculada, ou conhecida no caso da barra fonte.

Figura 17 - Ramo genérico *k-m* para exemplificação da varredura direta do MSI com *shunts.*



Fonte: os próprios autores.

Logo, a corrente $\hat{I}_{mk}$ no sentido *m* para *k* do ramo *k-m* da Figura 17 pode ser determinada pela expressão geral definida na Equação (19), reescrita a seguir:

$$\hat{I}_{mk} = -a_{km}\,\hat{y}_{km}\,\hat{E}_k + \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)\hat{E}_m$$

Analisando a Figura 17, observa-se que a corrente $\hat{I}_{mk}$ corresponde à corrente $\hat{I}_m^{ac}$ previamente acumulada na barra *m*, tal que, $\hat{I}_{mk} = \hat{I}_m^{ac}$ e tem-se por fim que:

$$\hat{I}_{mk} = \hat{I}_m^{ac} \;\Rightarrow\; \therefore\; \hat{I}_m^{ac} = -a_{km}\,\hat{y}_{km}\,\hat{E}_k + \left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)\hat{E}_m$$

$$\left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)\hat{E}_m = \hat{I}_m^{ac} + a_{km}\,\hat{y}_{km}\,\hat{E}_k$$

tal que a tensão complexa $\hat{E}_m$ da barra *m* pode ser corrigida a cada iteração por:

$$\hat{E}_m = \frac{\hat{I}_m^{ac} + a_{km}\,\hat{y}_{km}\,\hat{E}_k}{\left(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}\right)} \tag{66}$$

2.3 Algoritmo de Implementação Computacional

Com base no equacionamento das varreduras inversa e direta do Método da Soma das Correntes, o presente trabalho desenvolve uma versão adaptada desse método para considerar explicitamente os efeitos de elementos shunts de barra e de ramos em redes de distribuição que pode ser implementado computacionalmente na seguinte sequência de passos (algoritmo), descrita a seguir, até a convergência do processo por um critério de parada adotado:

- **Passo 1** (iteração *i* = 0): ler e normalizar os dados de rede. Inicializar tensões complexas de barra com o *flat-start* ($\hat{E}_k = 1\angle 0$). Calcular as potências líquidas ativa P_k com a Equação (4) e reativa Q_k com a Equação (5), exceto a barra fonte.

- **Passo 2** (iteração *i*): calcular a injeção líquida de corrente complexa com a Equação (7) para todas as barras da rede, com exceção da barra fonte, com base no estado das tensões complexas de barra atual $\hat{E}_k^{(i)}$ obtido na iteração anterior.
- **Passo 3** (iteração *i*): executar o processo de varredura inversa com o cálculo das correntes acumuladas em cada barra da rede com base na Equação (65), exceto o nó fonte, partindo-se dos nós terminais e em direção à barra fonte.
- **Passo 4** (iteração *i*): executar o processo de varredura direta com o cálculo do estado das tensões complexas de barra da rede com base na Equação (66), a partir da tensão da barra fonte conhecida, em direção às barras terminais da rede.
- **Passo 5** (iteração *i*): fazer $i = i + 1$ e testar a convergência por um critério com a tolerância adotada, tal como pelo maior erro ΔV dos módulos de tensões de barra entre duas iterações sucessivas *i* ($V_k^{(i)} = |\hat{E}_k^{(i)}|$) e $i+1$ ($V_k^{(i+1)} = |\hat{E}_k^{(i+1)}|$) apresentado na Equação (56). Se atingida a convergência, finalizar o processo iterativo do MSI com *shunts*, adotar o último estado das tensões complexas de barra obtido como solução do subsistema 1 e resolver as incógnitas de subsistema 2 (solução por simples equação); caso não tenha atingida a convergência, retornar ao passo 2.

3. TESTES E ANÁLISES DE RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com a versão do Método da Soma das Correntes adaptado para contemplar os efeitos de elementos *shunts* de barra e de ramos desenvolvido neste trabalho, empregando-se como algoritmos de referência os métodos Soma das Potências e Direct Load Flow com *shunts*.

Para as análises, comparações e discussões de resultados, considerou-se os seguintes critérios para a avaliação do desempenho dos algoritmos do MSP, MSI e DLF com *shunts* na solução do subsistema 1 do PFC de redes de distribuição com *shunts*, onde adotou-se a tolerância ε = 0,0001 igualmente para todos os métodos:

- Precisão dos resultados;
- Número de iterações gasta para a convergência;
- Tempo de processamento médio: foram simulados 10000 vezes cada algoritmo e obtida a média de tempo das simulações, assim adotado pelo fato do contador de tempo do MatLab produzir valores semelhantes, mas diferentes a cada simulação.

Para as análises de resultados, foram utilizados três redes de distribuição de teste encontradas na literatura: uma rede composta por 10 barras, descrito em RAO (2011), uma rede constituída por 14 barras, constante em CINVALAR et al. (1988), e o sistema de distribuição IEEE-118 barras, apresentado em ZHANG (2007).

3.1 Comparação de Resultados para a Solução do Subsistema 1

Para inicializar a avaliação do desempenho do MSI com *shunts* desenvolvido neste trabalho, foi realizada a comparação de resultados do subsistema 1 (módulo e ângulo de tensão de barras de rede) com os métodos de referência MSP e DLF com *shunts*, com a finalidade de demonstrar que o MSI com *shunts* apresenta precisão e convergência de resultados de maneira similar aos demais métodos de comparação.

Para a avaliação da solução do subsistema 1 considerando *shunts* com os algoritmos dos três métodos, utilizou-se a rede de 10 barras, onde os resultados da magnitude das tensões de barra são apresentados na Tabela 3 e os resultados do ângulo de fase das tensões de barra são apresentados Tabela 4. Assim, a análise das Tabelas 3 e 4 mostra então que os três métodos (MSI, MSP e DLF) com *shunts* apresentaram os mesmos valores de tensão e ângulo em todas as barras da rede, confirmando que os métodos foram corretamente implementados e estes resolvem o

subsistema 1 do PFC com a mesma precisão. A igualdade nos valores até a quarta casa decimal indica que não há erros significativos nos cálculos e que a inclusão dos elementos *shunts* é considerada de forma consistente nos três métodos de solução.

Tabela 3 - Módulo das tensões de barras do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 10 barras.

Número da barra	MSI	MSP	DLF
1	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,9993	0,9993	0,9993
3	0,9988	0,9988	0,9988
4	0,9965	0,9965	0,9965
5	0,9950	0,9950	0,9950
6	1,0142	1,0142	1,0142
7	1,0131	1,0131	1,0131
8	1,0113	1,0113	1,0113
9	1,0308	1,0308	1,0308
10	1,0284	1,0284	1,0284

Fonte: os próprios autores.

Tabela 4 - Ângulo das tensões de barras do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 10 barras.

Número da barra	MSI	MSP	DLF
1	0,000	0,000	0,000
2	-0,049	-0,049	-0,049
3	-0,117	-0,117	-0,117
4	-0,209	-0,209	-0,209
5	-0,234	-0,234	-0,234
6	-0,346	-0,346	-0,346
7	-0,365	-0,365	-0,365
8	-0,376	-0,376	-0,376
9	-0,449	-0,449	-0,449
10	-0,420	-0,420	-0,420

Fonte: os próprios autores.

Considerando que o MSI trabalha com correntes e tensões complexas para os seus processos de varredura, o MSP se baseia em potências e módulos e ângulos de tensão de barra para executar também seus processos de varredura, e o DLF é baseado em uma formulação matricial de correntes e tensões complexas de barra, conclui-se que, apesar dos métodos se fundamentarem em formulações distintas, os resultados finais foram idênticos, significando que todos convergiram para a mesma

solução do subsistema 1 do problema do fluxo de carga. Assim, os três métodos são equivalentes em termos de exatidão e a escolha de qual utilizar dependerá de outros fatores como tempo de execução ou facilidade de implementação computacional.

3.2 Comparação de Desempenhos para a Rede de 10 Barras

Para inicializar a comparação de resultados do MSI com *shunts* e os métodos MSP e DLF com *shunts*, com base nos critérios número de iterações e tempo médio de simulação, utilizou-se a rede teste de 10 barras, que é um sistema pequeno, de único alimentador e que presenta diversas *shunts* de barra capacitivos e reguladores de tensão com tap maior que 1, o que explica as tensões de várias barras em fim de linha apresentarem módulos de tensão maior que a da barra fonte (vide Tabela 3).

A Tabela 5 mostra os valores do número de iterações gasto e o tempo médio de processamento obtidos com a simulação computacional dos métodos MSI, MSP e DLF com *shunts* para a solução do subsistema 1 da rede teste de 10 barras.

Tabela 5 - Comparação do desempenho do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 10 barras.

Método de solução do subsistema 1	**Número de iterações**	**Tempo médio de 10000 simulações**
MSI com *shunts*	3	$5{,}3875 \times 10^{-5}$ s
MSP com *shunts*	4	$1{,}0498 \times 10^{-5}$ s
DLF com *shunts*	3	$2{,}1148 \times 10^{-5}$ s

Fonte: os próprios autores.

Como mostrado na Tabela 5, os métodos MSI e o DLF convergiram em 3 iterações**,** enquanto que o algoritmo do MSP exigiu 4 iterações**.** A explicação para o MSP requerer mais iterações pode ser explicada devido à sua formulação se basear em tensões e potências, cuja relação não é linear e pode elevar a complexidade de solução do PFC em redes pequenas. Já os métodos MSI e DLF baseiam-se em correntes e tensões, cuja relação é linear e pode ser um facilitador da convergência.

Em relação aos tempos médios de processamento, o método MSP foi o mais rápido ($1{,}0498 \times 10^{-5}$ s), seguido pelo método DLF ($2{,}1148 \times 10^{-5}$ s), com o MSI exigindo o maior tempo ($5{,}3875 \times 10^{-5}$ s). A explicação pelo melhor desempenho do MSP para a rede de pequeno porte de 10 barras pode ser porque os cálculos com

potências são computacionalmente menos custosos, apesar de requerer mais iterações, do que o custo de pré-processamento com a montagem e inversão de matriz do DLF ou a complexidade das varreduras sequenciais com números complexos do MSI.

3.3 Comparação de Desempenhos para a Rede de 14 barras

Com o intuito de continuar a comparação dos métodos MSI, MSP e DLF com *shunts* com base nos critérios números de iterações e tempos médios de simulação, utilizou-se uma rede teste de 14 barras, que também é um sistema de pequeno porte com diversos *shunts* de barra capacitivos e ramos com reguladores de tensão, mas com diversos alimentadores e, no segmento destes, com várias ramificações.

A Tabela 6 mostra os valores do número de iterações gasto e o tempo médio de processamento obtidos com a simulação computacional dos métodos MSI, MSP e DLF com *shunts* para a solução do subsistema 1 da rede teste de 14 barras.

Tabela 6 - Comparação do desempenho do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 14 barras.

Método de solução do subsistema 1	**Número de iterações**	**Tempo médio de 10000 simulações**
MSI com *shunts*	3	6,2603 x 10^{-5} s
MSP com *shunts*	4	1,0851 x 10^{-5} s
DLF com *shunts*	3	3,1193 x 10^{-5} s

Fonte: os próprios autores.

Semelhante à rede de 10 barras, para a rede teste de 14 barras os métodos MSI e o DLF convergiram em 3 iterações e o método MSP exigiu 4 iterações, tal que a topologia mais ramificada do sistema de 14 barras não afetou significativamente a convergência, indicando que os métodos são robustos para redes de maior porte.

O MSP novamente gastou o menor tempo médio de execução (1,0851 x 10^{-5} s), com DLF (3,1193 x 10^{-5} s) e MSI (6,2603 x 10^{-5} s) seguindo a mesma tendência do caso da rede de 10 barras. O aumento marginal no tempo do MSI e DLF reflete o efeito da maior complexidade da rede sobre os custos de montagem e inversão de matriz do DLF e as varreduras sequenciais com números complexos do MSI, mas o MSP mantém eficiência devido à simplicidade dos

cálculos de potência, apesar do maior número de iterações devido à relação não linear entre potência e tensão.

3.4 Comparação de Desempenhos para a Rede de 118 barras

Por fim, para comparação dos métodos MSI, MSP e DLF com *shunts* usando os critérios números de iterações e tempos médios de simulação, empregou-se uma rede de 118 barras, que é um sistema de grande porte com diversos alimentadores e ramificações, mas com poucos *shunts* de barra e de ramos presentes na rede teste.

A Tabela 7 mostra os valores do número de iterações gasto e o tempo médio de processamento obtidos com a simulação computacional dos métodos MSI, MSP e DLF com *shunts* para a solução do subsistema 1 da rede teste de 118 barras.

Tabela 7 - Comparação do desempenho do MSI, MSP e DLF com *shunts* para a rede de 118 barras.

Método de solução do subsistema 1	**Número de iterações**	**Tempo médio de 10000 simulações**
MSI com *shunts*	5	$4{,}6703 \times 10^{-4}$ s
MSP com *shunts*	5	$0{,}7640 \times 10^{-4}$ s
DLF com *shunts*	3	$13{,}000 \times 10^{-4}$ s

Neste caso, como observado na Tabela 7, o DLF converge em 3 iterações, enquanto MSI e MSP exigem 5 iterações. Estes desempenhos podem ser explicados com o DLF aparentando se destacar em sistemas maiores devido à relação matricial linear entre correntes e tensões de barras, enquanto que o MSI e o MSP, baseados em varreduras, apresentam um comportamento distinto em redes crescentes, embora isso não se traduza em uma perda de eficiência global, como demonstrado pelos seus tempos de execução.

Em relação aos tempos médios de convergência de solução do subsistema 1, novamente observa-se que o MSP é o mais rápido ($0{,}7640 \times 10^{-4}$ s), seguido pelo MSI ($4{,}6703 \times 10^{-4}$ s) e DLF ($13{,}000 \times 10^{-4}$ s). O DLF, apesar de menos iterações, tem alto custo computacional devido à manipulação (montagem e inversão) de matrizes grandes ([DLF]), enquanto que o MSP mantém sua vantagem em tempo de processamento pelo fato de evitar operações matriciais complexas, mesmo com maiores iterações, e o MSI é penalizado pela necessidade de varreduras sequenciais em redes extensas.

4. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver uma formulação para a adaptação do Método da Soma das Correntes para considerar explicitamente os efeitos de elementos *shunts* de barra e de ramos em estudos de fluxo de carga em sistemas de distribuição. Para isso, foram desenvolvidas novas expressões para as etapas de varredura inversa e direta do MSI, de modo a incorporar adequadamente as correntes adicionais introduzidas pelos elementos *shunts*.

A versão adaptada do MSI foi implementada em ambiente computacional e submetida a testes comparativos com dois métodos equivalentemente adaptados: o métodos MSP e DLF. As simulações foram realizadas em três sistemas testes com diferentes níveis de tamanhos e complexidade (10, 14 e 118 barras), permitindo a avaliação e comparação de desempenho dos três métodos em termos de número de iterações, tempo de processamento, precisão de resultados e robustez numérica.

Os resultados mostraram que a inclusão de elementos *shunts* foi feita com sucesso e de forma consistente nos três métodos, uma vez que todos convergiram para soluções idênticas em termos de módulo e ângulo das tensões nas barras, com precisão numérica até a quarta casa decimal, o que vem a validar, tanto a correção da formulação proposta, quanto a sua implementação computacional.

Em termos de desempenho dos métodos implementados, observou-se que:

- O MSI apresentou convergência com número menor de iterações, comparável ao DLF, mas tempos de execução maior devido à natureza sequencial do algoritmo.
- O MSP, embora requeira mais iterações, apresentou o menor tempo de execução médio, em todas as redes testadas, o que pode ser explicado pela menor complexidade computacional com o cálculo de potências.
- O DLF destacou-se pelo menor número de iterações em redes maiores, mas seu tempo de execução foi mais elevado devido ao custo das operações matriciais.

No caso da rede de 118 barras, o DLF foi o mais eficiente em número de iterações, enquanto o MSP continuou sendo o mais rápido em tempo computacional e o MSI manteve precisão e estabilidade, porém é penalizado devido ao maior custo computacional de suas varreduras direta e inversa com números complexos.

Assim, conclui-se que a abordagem aqui proposta, MSI considerando *shunts*, é válida por sua robusta e eficácia para estudos de fluxo de carga, especialmente

em redes de pequeno e médio porte e a escolha de qual método é mais adequado dependerá das características da rede analisada e das prioridades do estudo (tempo de processamento, precisão, facilidade de implementação, etc.).

Como complemento, é válido destacar a capacidade do MSI em tratar redes de distribuição com múltiplos ramos e elementos *shunts*, sem perda de precisão. No entanto, a limitação do MSI reside no custo computacional crescente à medida que a quantidade de barras da rede em estudo se torna maior e mais complexa.

Por fim, este trabalho abre caminho para futuras pesquisas, como a aplicação do MSI com *shunts* em redes desequilibradas trifásicas, sistemas com geração distribuída ou em estudos de estabilidade. Também é possível investigar formas de otimizar as varreduras do MSI com técnicas de paralelização ou pré-processamento, visando maior eficiência computacional.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRIGATTO, G. A. A., “Teoria do Problema do Fluxo de Carga - Material Didático”, Apostila de Tópicos em Sistemas Eletro-Eletrônicos, PPG EMC/UFG, 2025.

BROADWATER, R. P. et al. Power Flow Analysis of Unabalanced Multiphase Radial Distribution System. Electric Power System Research, , v. 14, 1988.

CINVALAR, S. et al. Distribution Feeder Reconfiguration for Loss Reduction. IEEE Transactions on Power Delivery, v. 3, n. 3, pp. 1217–1223, 1988.

MONTICELLI, Alcir J. Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica, Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 1983.

RAO, R. S. et al. Optimal capacitor placement in a radial distribution system using Plant Growth Simulation Algorithm, IJEPES, pg: 1133–1139, 2011.

SHIRMOHAMMADI, D. et al. A Compensation Based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks. IEEE Transactions on Power Systems, v. 3, n. 2, p. 753-762, 1988

SILVA, F. M., BRIGATTO, G. A. A., Formulação alternativa para a montagem da matriz DLF do método proposto por Teng para o cálculo do problema do fluxo de carga de redes de distribuição, Trabalho de Conclusão de Curso, EMC/UFG, 2023.

STEVENSON, W. D. Elementos de análise de sistemas de potência. 4. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

TENG, Jen-Hao. A direct approach for distribution system load flow solutions. In IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 18, no. 3, pp. 882-887, July 2003.

ZHANG, D. et al. An improved ts algorithm for loss-minimum reconfiguration in largescale distribution systems. Electric Power Systems Research, 2007