

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO
BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ALMÉRIO JOSÉ VENÂNCIO PAINS SOARES PAMPLONA

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS E NUMÉRICAS USANDO O MÉTODO SPH:
APLICAÇÕES À CONDUÇÃO DE CALOR E AO TUBO DE CHOQUE**

Goiânia

2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

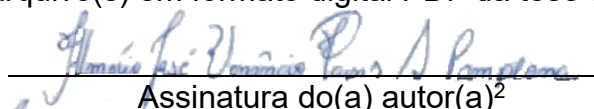
Nome completo do autor: Almério José Venâncio Pains Soares Pamplona

Título do trabalho: Soluções analíticas e numéricas usando o método SPH: aplicações à condução de calor e ao tubo de choque.

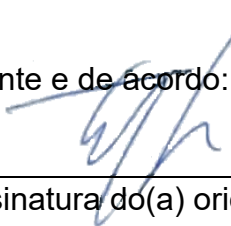
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 17 / 12 / 18

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

ALMÉRIO JOSÉ VENÂNCIO PAINS SOARES PAMPLONA

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS E NUMÉRICAS USANDO O MÉTODO SPH:
APLICAÇÕES À CONDUÇÃO DE CALOR E AO TUBO DE CHOQUE**

Monografia apresentada ao programa de Bacharelado em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Goiás, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Joel Roberto Guimarães Vasco

Goiânia
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Venâncio Pains Soares Pamplona, Almério José

Soluções analíticas e numéricas usando o método SPH: aplicações à condução de calor e ao tubo de choque. [manuscrito] / Almério José Venâncio Pains Soares Pamplona. - 2018.

103, f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Joel Roberto Guimarães Vasco. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Engenharia Mecânica, Goiânia, 2018.

Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Tubo de Choque. 2. Transferência de Calor. 3. SPH. I. Roberto Guimarães Vasco, Joel, orient. II. Título.

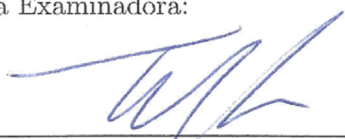
CDU 621

ALMÉRIO JOSÉ VENÂNCIO PAINS SOARES PAMPLONA

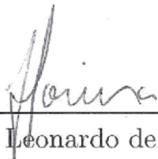
**SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA USANDO O MÉTODO SPH:
APLICAÇÕES À CONDUÇÃO DE CALOR E AO TUBO DE CHOQUE**

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Goiás – UFG.

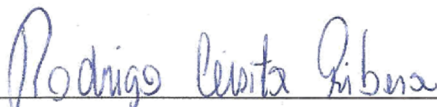
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Joel Roberto Guimarães Vasco – UFG - Orientador



Prof. Dr. Leonardo de Queiroz Moreira - UFG



Prof. Dr. Rodrigo Lisita Ribera – UFG

Goiânia, 14 de dezembro de 2018

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, principalmente, aos meus pais, Suelma Francisca da Silva Pains Soares e Gilvan Pains Soares, pelo apoio e amor incondicionais, sem os quais, tudo o que realizei até o presente momento seria impossível.

Aos meus familiares, principalmente, ao meu irmão, Ariston Venâncio Pains Soares Pamplona.

Aos meus amigos e colegas, que de alguma forma contribuíram com o meu crescimento como estudante, profissional e cidadão. Agradeço, especialmente, àqueles me acompanharam de perto desde o início desta jornada, mesmo nos momentos mais difíceis. E àqueles, os quais conheci ao longo da jornada, mas que sempre mostram forte apoio e amizade.

Ao meu orientador e amigo Joel Roberto Guimarães, agradeço imensamente pelos ensinamentos, pela paciência e dedicação, me orientado por novos e desconhecidos caminhos e me apoiando em todos os projetos científicos ao longo dos últimos anos.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Goiás, onde tive o suporte e infraestrutura necessários para a realização da minha graduação e trabalhos.

RESUMO

Diante do contexto de desenvolvimento e avanço das técnicas de aproximação numéricas para investigações científicas e de engenharia, o presente trabalho se propõe a explorar métodos numéricos tradicionais de diferenças finitas, como de Euler, de Lax-Wendroff e MacCormack e comparar com o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH). Para isto são utilizados dois problemas físicos: o tubo de choque e a transferência de calor por condução em uma placa plana retangular. Os modelos matemáticos desses problemas são apresentados e são desenvolvidas soluções analíticas para os mesmos, de modo que sejam os elementos de referência para a comparação dos métodos numéricos. Os modelos numéricos de cada método são introduzidos com uma breve revisão bibliográfica, sendo que no caso dos métodos de diferenças finitas, adentra-se superficialmente em seu desenvolvimento, dando mais atenção ao método SPH. Visto isto, as aproximações numéricas são aplicadas aos problemas físicos, gerando resultados que são comparados com as soluções exatas. Além disso, são explorados alguns aspectos dos métodos numéricos, buscando compreender a influência dos mesmo sobre os resultados, possibilitando uma análise mais detalhada. Por fim, os métodos são comparados entre eles, buscando compreender as potencialidades do método SPH.

Palavras-chave: Tubo de choque. Transferência de calor. SPH.

ABSTRACT

In the context of the development and advancement of numerical approximation techniques for scientific and engineering research, the present work proposes to explore traditional numerical methods of finite differences, such as Euler, Lax-Wendroff and MacCormack, and compare with the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). For this, two physical problems are used: the shock tube and the heat transfer by conduction in a rectangular flat plate. The mathematical models of these problems are presented and analytical solutions are developed for them, so that they are the reference elements for the comparison of the numerical methods. The numerical models of each method are introduced with a brief bibliographic review, and in the case of finite difference methods, a brief development is doing, giving more attention to the SPH method. Given this, numerical approximations are applied to the physical problems, generating results that are compared with the exact solutions. In addition, some aspects of the numerical methods are explored, trying to understand the influence of them on the results, allowing a more detailed analysis. Finally, the methods are compared among them, seeking to understand the potential of the SPH method.

Keywords: Shock tube. Heat transfer. SPH

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Esquema demonstrando a relação entre as teorias, as simulações numéricas e os experimentos. Essa relação é fundamental para as investigações científicas e de engenharia.....	18
Figura 2.1	Esquema simplificado de um tubo de choque, no qual se observa o estado inicial do gás na câmara e no canal, além dos estados após a ruptura do diafragma.	24
Figura 2.2	Diagrama do plano de fase x, t com a solução exata do problema de Riemann, no qual, pode-se observar as quatro regiões bem definidas.	30
Figura 2.3	Diagrama do plano de fase x, t com a solução exata do problema de Riemann e as curvas características da solução.	30
Figura 2.4	Detalhe da região de rarefação E , a qual é limitada pela esquerda e pela direita por curvas características $C -$	35
Figura 2.5	Diagrama da placa plana retangular submetida a quatro diferentes condições de contorno do tipo Dirichlet.....	37
Figura 2.6	Superposição do problema de Dirichlet em quatro sistemas.	38
Figura 3.1	Domínio discretizado em uma malha simétrica.	43
Figura 3.2	À esquerda, tem-se o diagrama esquemático do Lax-Wendroff e à direita, o esquema do MacCormack.	46
Figura 3.3	Diagrama esquemático do Euler progressivo temporal centro espacial.	48
Figura 3.4	Representação do domínio de suporte localizado, inteiramente, no domínio do problema, de modo que a integral de superfície sobre Ω é nula.	52
Figura 3.5	Representação do domínio de suporte ultrapassando o domínio do problema, área hachurada, de modo que a integral de superfície sobre Ω não pode ser considerada nula. .	52
Figura 3.6	Representação da aproximação por partículas do domínio do problema, considerando as partículas do domínio de suporte. O domínio de suporte é circular com raio κh e a partícula a ao centro.	53
Figura 3.7	Função de suavização utilizada por Lucy (1977) e a sua primeira derivada..	56
Figura 3.8	Função Gaussiana de suavização e sua primeira derivada.....	56
Figura 3.9	Função cúbica spline de suavização e sua primeira derivada.....	57

Figura 3.10	Função <i>quartic</i> de suavização e sua primeira derivada.	58
Figura 3.11	Função super Gaussiana de suavização e sua primeira derivada.	58
Figura 3.12	Algoritmo de busca all-pair em domínio bidimensional, no qual a vizinhança de uma partícula é estabelecida segundo a distância <i>rab</i> em relação à κh	59
Figura 3.13	À esquerda a malha numérica temporária sobre o domínio de um problema bidimensional. À direita o detalhe da região de busca do método linked-list.	59
Figura 3.14	Esquema do posicionamento das partículas fantasmas segundo o tipo delas.	75
Figura 4.1	Perfis de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica para $t = 0.2 s$, com $\epsilon = 0$, $\alpha = 2$, $u = 0$ e com a função <i>quartic</i> como núcleo.	80
Figura 4.2	Perfis de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica para $t = 0.2 s$, com $\epsilon = 0$, $\alpha = 2$, $u = 0$ e com a função super gaussiana como núcleo.	80
Figura 4.3	Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função da velocidade suavizada, com $t = 0.2 s$, $\epsilon = 0$, $\alpha = 2$ e núcleo <i>quartic</i> .	81
Figura 4.4	Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do coeficiente α , com $t = 0.2 s$, $\epsilon = 0$, $u = 0.625$ e núcleo <i>quartic</i>	82
Figura 4.5	Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do coeficiente ϵ , com $t = 0.2 s$, $\alpha = 1$, $u = 0.0625$ e núcleo <i>quartic</i> . ..	83
Figura 4.6	Perfis de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica para $t = 0.2 s$, com $\epsilon = 0$, $\alpha = 1$, $u = 0.625$ e com a função <i>quartic</i> como núcleo.	84
Figura 4.7	Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do <i>Ccfl</i> , com $t = 0.2 s$ e $\mu ab = 0$, para o método de Lax-Wendroff.	84
Figura 4.8	Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do <i>Ccfl</i> , com $t = 0.2 s$ e $\mu ab = 0$, para o método de MacCormack.	85
Figura 4.9	Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do μab , com $t = 0.2 s$ e <i>Ccfl</i> = 0.7, para o método de Lax-Wendroff.	86
Figura 4.10	Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do μab , com $t = 0.2 s$ e <i>Ccfl</i> = 0.7, para o método de MacCormack.	86
Figura 4.11	Perfis massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do μab , com $t = 0.2 s$, <i>Ccfl</i> = 0.7 e $\mu ab = 11$, para o método de Lax-Wendroff.	87

Figura 4.12	Perfis massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do μab , com $t = 0.2 s$, $Ccfl = 0.7$ e $\mu ab = 11$, para o método de MacCormack.....	87
Figura 4.13	Solução analítica da distribuição da temperatura sobre a placa para o regime permanente.	89
Figura 4.14	Distribuição das partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular. ..	90
Figura 4.15	Distribuição da temperatura inicial e de condição de contorno sobre as partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular, considerando apenas o fundamental.	91
Figura 4.16	Distribuição da temperatura inicial e de condição de contorno sobre as partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular, sem tratamento dos cantos.	91
Figura 4.17	Esquema da aplicação da interpolação entre os contornos.	92
Figura 4.18	Distribuição da temperatura inicial e de condição de contorno sobre as partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular, com tratamento dos cantos.	92
Figura 4.19	Distribuição da temperatura sobre a placa usando o método SPH, com $\beta = 0.09$ e $t = 40.1599 s$, sendo este o regime permanente.....	93
Figura 4.20	Análise da influência da constante β : à esquerda a curva do erro médio em relação à constante e à direita, a curva do custo computacional em relação à constante.....	93
Figura 4.21	Distribuição da temperatura sobre a placa usando o método SPH, com $\beta = 0.2$ e $t = 40.1599 s$. Nela há o início da degeneração do resultado nas regiões dos cantos da placa.	94
Figura 4.22	Influência do $Ccfl$ no resultado dos métodos de diferenças finitas: à esquerda, tem-se a curva do método de Euler PTCE e à direita, tem-se o método de MacCormack.	95
Figura 4.23	Resultado da simulação dos métodos de diferenças finitas, considerando $Ccfl = 0.75$ e $t = 40.05 s$ para o método de Euler, à esquerda, e $Ccfl = 0.35$ e $t = 40.1835 s$ para o método de MacCormack, à direita.	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Resultado dos três métodos numéricos em relação ao erro médio e ao custo computacional.....	88
Tabela 4.2	Comparação entre os três métodos utilizados para modelar o problema da condução de calor em uma placa plana.....	96
Tabela 4.3	Comparação entre os três métodos utilizados para modelar o problema da condução de calor nos cantos da placa plana.....	96

LISTA DE SÍMBOLOS

Siglas

- MDF - Método das diferenças finitas
- MEF - Método dos elementos finitas
- MVF - Método dos volumes finitos
- PTCE - Progressivo temporal centro espacial
- SPH - *Smoothed Particle Hydrodynamics*

Operadores

- ∂ - derivada parcial
- d - derivada total
- D - derivada total
- Δ - diferença finita
- \int - integral
- lim - limite
- Σ - somatório
- ∇ - nabla
- $\tilde{\nabla}$ - nabla renormalizado

Subscritos

- - limite inferior de uma função
- + - limite superior de uma função
- a - partícula de referência
- b - partícula vizinha
- L - região à esquerda do tubo de choque
- loc - localmente limitada
- n - índice de somatório
- p - índice para indicar componente da solução da equação de Euler
- R - região à direita do tubo de choque
- s - celeridade do som

Sobrescritos

- - curva característica anterior
- + - curva característica posterior
- 0 - curva característica centrada
- ∞ - generalização do espaço vetorial

A	- solução da equação de transferência de calor
B	- solução da equação de transferência de calor
C	- solução da equação de transferência de calor
D	- solução da equação de transferência de calor
α	- índice de notação tensorial de Einstein
β	- índice de notação tensorial de Einstein

Letras gregas

α	- difusividade térmica
α_1	- constante auxiliar
α_2	- constante auxiliar
γ	- razão entre os coeficientes de calor específico do gás
δ	- delta de Dirac
$\delta^{\alpha\beta}$	- delta de Kronecker
ε_d	- constante de correção da posição
ε	- energia interna específica
ζ	- componente do vetor normal unitário
\mathbf{v}	- vetor unitário
ξ	- função de parametrização das curvas características
ξ_n	- constante da solução equação de transferência de calor
ρ	- massa específica
κ	- constante relacionada à função de suavização
Λ	- matriz diagonalizável de transformação do sistema de equações de Euler
μ	- viscosidade dinâmica
σ	- tensor de tensões
τ	- tensor de tensão cisalhante
φ	- função de suporte compacto
φ	- constante da solução equação de transferência de calor
Ψ_n	- coeficiente de Fourier
ψ_n	- constante da solução equação de transferência de calor
Ω	- domínio do problema físico
$\partial\Omega$	- fronteira ou superfície do domínio do problema físico
ω_n	- constante da solução equação de transferência de calor

Letras latinas

A	- matriz de transformação do sistema de equações de Euler
C^1	- espaço das funções com suporte compacto
C^-	- curva característica anterior
C^0	- curva característica centrada
C^+	- curva característica posterior

c	- celeridade do som
c_p	- calor específico
\mathbf{D}	- tensor da taxa de deformação
E	- energia interna total
e	- energia interna total específica
F	- função vetorial de fluxo do sistema de Euler
G	- função vetorial do sistema de Euler
H	- entalpia
\mathbf{I}	- matriz identidade
h	- comprimento de suavização
k	- condutividade térmica
L_{loc}^∞	- espaço das funções mensuráveis e localmente limitadas
M	- número de Mach
M'	- constante para comparação
m	- massa
N	- número total de partículas
\mathbf{n}	- vetor unitário normal à superfície
P	- pressão em um estado específico do fluido
r	- autovalor da solução para o tubo de choque
R	- constante do gás
\mathbb{R}	- espaço vetorial dos reais
s	- entropia específica
T	- temperatura
v	- variável característica
U	- velocidade de um estado específico do fluido
u	- velocidade no eixo horizontal
\mathbf{u}	- campo de velocidade
x	- componente horizontal do vetor de posição
\mathbf{x}	- vetor de posição
y	- componente vertical do vetor de posição
W	- função de suavização
\tilde{W}	- função de suavização renormalizada

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	OBJETIVOS	21
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	22
2	ANÁLISE TEÓRICA	23
2.1	ONDAS DE CHOQUE NO TUBO DE SOD	23
2.1.1	EQUAÇÕES DE EULER PARA FLUIDOS COMPRESSÍVEIS	24
2.1.2	SOLUÇÃO EXATA DO PROBLEMA DE RIEMANN	29
2.2	TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PLACA RETANGULAR.....	36
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	42
3.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	42
3.1.1	LAX-WENDROFF E MACCORMACK.....	44
3.1.2	EULER PROGRESSIVO TEMPORAL CENTRO ESPACIAL.....	47
3.2	MÉTODO SMOOTHED PARTICLES HYDRODYNAMICS.....	48
3.2.1	FUNDAMENTOS DO MÉTODO SPH	49
3.2.2	A FUNÇÃO NÚCLEO DE SUAVIZAÇÃO	54
3.2.3	COMPRIMENTO DE SUAVIZAÇÃO.....	60
3.2.4	EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO.....	60
3.2.5	DESLOCAMENTO DE PARTÍCULAS	63
3.2.6	EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	63
3.2.7	EQUAÇÃO DA ENERGIA.....	65
3.2.8	EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA CONDUÇÃO.....	67
3.2.9	CORREÇÕES APLICADAS AO MÉTODO SPH	71
3.2.10	LEIS DE ESTADO PARA PRESSÃO.....	73
3.2.11	VISCOSIDADE ARTIFICIAL	73
3.2.12	CONDIÇÃO DE CONTORNO	74
3.2.13	EVOLUÇÃO TEMPORAL.....	75
4	RESULTADOS E ANÁLISE	78
4.1	TUBO DE CHOQUE.....	78
4.2	CONDUÇÃO EM PLACA PLANA RETANGULAR	88
5	CONCLUSÃO	97

5.1	PERSPECTIVA DE TRABALHOS FUTUROS	98
6	REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

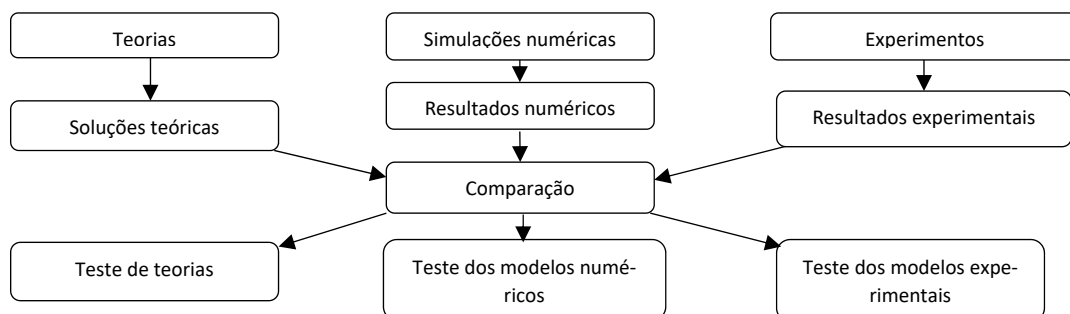
Nas últimas décadas, com o avanço da tecnologia computacional, os métodos numéricos ganharam mais espaço no campo científico e da engenharia, principalmente quando se trata de resolver problemas complexos. A justificativa para isso não está apenas nos computadores mais modernos, mas em aspectos próprios das ferramentas numéricas quando comparadas com os campos teórico e experimental.

Os métodos numéricos traduzem problemas físicos em uma descrição matemática discreta, recria e soluciona os problemas e expressa os fenômenos virtualmente, segundo os parâmetros da análise. Isso permite analisar os fenômenos com mínimo de considerações possível, diferente dos campos teóricos, onde soluções são encontradas somente para um conjunto de considerações, que muitas vezes distanciam o resultado do fenômeno físico real.

Além disso, os métodos numéricos podem ser simulados a qualquer instante, dependo apenas de um computador e uma fonte elétrica. Enquanto experimentos exigem condições específicas e controladas, diversos recursos materiais e humanos, o que pode tornar o processo caro e, muitas vezes, pode colocar os operadores em perigo. Outra vantagem é o fato dos métodos numéricos oferecem uma compreensão intuitiva mais profunda e informações completas sobre os fenômenos físicos, as quais não podem ser medidas diretamente ou observadas.

Apesar das vantagens que apresenta, os métodos numéricos sozinhos não são capazes de abordar todos os aspectos da pesquisa científica e de engenharia. Portanto, o ideal é uma interação entre os três campos, como mostra o esquema da Figura 1.1, a fim de obter resultados cada vez melhores.

Figura 1.1 Esquema demonstrando a relação entre as teorias, as simulações numéricas e os experimentos. Essa relação é fundamental para as investigações científicas e de engenharia.



Fonte: (LIU & LIU, 2003).

Os campos da dinâmica dos fluidos e da transferência de calor se servem dessa relação entre a teoria, os experimentos e as simulações numéricas, especialmente nas áreas industriais como a aeronáutica e o automobilismo. Nelas, projetos de turbo-compressores, perfis de asa e aerofólios e turbinas, por exemplo, passam por modelagem e testes numéricos, baseados em teorias matemáticas antes dos testes diretamente nos protótipos. Isso permite uma visualização mais completa dos fenômenos físicos que cercam o projeto, possibilitando a produção de um produto otimizado e competitivo para o mercado.

Mas não são apenas as vantagens mercadológicas que sustentam o uso dos métodos numéricos. Os campos da dinâmica dos fluidos e da transferência de calor são fundamentados em modelos matemáticos, os quais são conjuntos de equações diferenciais ordinárias ou diferenciais parciais e permitem a compreensão dos fenômenos da natureza e a otimização de projetos. As soluções analíticas para esses modelos, em geral, são possíveis somente sob várias considerações e simplificações, como o de domínio suaves e geometrias simples. Isso limita a aplicação dos modelos, enquanto que os métodos numéricos oferecem a possibilidade de gerar resultados, com precisão e confiabilidade, para geometrias e domínios complexos.

Para gerar tais resultados, os métodos numéricos se fundamentam na discretização do domínio contínuo que caracteriza fenômeno físico, de modo que se tenham elementos finitos discretos sobre os quais são atribuídas as propriedades das variáveis. Por meio de relações nodais ou de partículas, se estabelecem equações algébricas ou equações diferenciais que traduzem o as equações originais sobre o domínio discretizado.

O primeiro método numérico foi idealizado por Euler, quando não existiam computadores. A função inicial era solucionar sistemas de equações diferenciais unidimensionais, utilizando aproximações por expansões em série de Taylor truncadas (DEMIDOVICH & MARON, 1960). Mas esta técnica só ganhou popularidade a partir da década de 1950, com o avanço da tecnologia computacional (FREY & BUHAN, 2018) e ficou conhecida como Método das Diferenças Finitas (MDF).

Outros métodos foram desenvolvidos posteriormente, como o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). O desenvolvimento dos mesmos foi motivado por problemas complexos nas áreas da mecânica dos sólidos e dinâmica dos fluidos. O MEF é um método de malha Lagrangeana, a qual é fixada ao material durante todo o

processo computacional, movendo-se em conjunto com o material (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 2000; LIU & QUEK, 2003).

Contudo, esses métodos baseados em uma malha numérica possuem algumas limitações, sendo a primeira a própria malha numérica. Determiná-la de maneira apropriada não é uma tarefa simples no caso de geometrias complexas, pois envolve transformações matemáticas complexas. Além disso, a determinação precisa da localização de regiões não homogêneas, superfícies livres, fronteiras deformáveis e interfaces dinâmicas requerem um alto custo computacional. (LIU & LIU, 2003).

A fim de oferecer soluções numéricas estáveis e com acurácia para qualquer tipo de condição de contorno, surgiram os métodos de partículas livres de malha. A proposta desses métodos é representar o domínio por partículas, às quais pode-se associar diretamente as propriedades do sistema físico. As partículas podem ser arranjadas em escalas microscópica, mesoscópica e macroscópica.

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) é um método de partículas macroscópicas, o qual foi desenvolvido como intuito de resolver problemas astrofísicos (LUCY, 1977; MONAGHAN & GINGOLD, 1977). O modelo matemático do método SPH, inicialmente proposto, tinha como base modelos probabilísticos (LUCY, 1977) e, mais tarde, foi modificado para ser aplicado como um método determinístico sem malha.

Outras características do método SPH que podem ser apontadas. A primeira é a sua formulação naturalmente Lagrangeana, uma vez que a discretização em partículas permite acompanhá-las durante todo o processo computacional. A segunda é que a integração no tempo, normalmente, é feita com métodos explícitos (LIU & LIU, 2003). Terceiro, apesar de ser um método livre de malha, alguns métodos para determinar a distribuição das partículas podem envolver a criação de uma malha temporária. E por último, o método SPH possui uma natureza adaptativa, de modo que ele não é afetado pela distribuição arbitrária das partículas.

Essas características permitem que domínios sejam discretizados sem a necessidade de uma conectividade fixa, o que facilita tratar grandes deformações. Como a discretização é feita apenas uma vez durante o processo, o tratamento de geometrias complexas também é facilitado, bem como o refinamento da discretização.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho se propõe a analisar numericamente dois problemas que possuem resultados experimentais conhecidos e que estão bem fundamentos analiticamente, os quais são: o tubo de choque e a transferência de calor por condução em uma placa plana retangular.

O tubo de choque é um experimento que foi inicialmente realizado pelo francês Paul Vieille em 1899 (LOUIS, 1994) e que foi extensamente estudado a partir de 1940 (FOMIN, 2010). O experimento consiste em um tubo fechado e separado em duas regiões por uma membrana. Uma das regiões é preenchida por gás com pressão e massa específica elevadas em relação a outra região, também preenchida com gás. Ao se retirar a membrana, a interação entre as diferentes pressões e a massas específicas geram ondas de choque, ondas de expansão e discontinuidades de contato.

A placa plana retangular é um problema bidimensional, que consiste em aplicar diferentes temperaturas no contorno da placa. A diferença de temperatura cria um gradiente de temperatura, promovendo o fluxo de calor das regiões de maior temperatura para as regiões de menor temperatura. Esse fenômeno difusivo ocorre até que o sistema entre equilíbrio termodinâmico, também conhecido como regime permanente.

A análise numérica para estes dois problemas consiste em:

- i. Construir o modelo matemático dos problemas físicos selecionados;
- ii. Determinar a solução analítica dos modelos matemáticos;
- iii. Construir modelos numéricos a partir dos modelos matemáticos, utilizando os métodos de Diferenças Finitas e o método SPH;
- iv. Simular os modelos numéricos construídos;
- v. Comparar os resultados dos modelos numéricos em relação à solução analítica;
- vi. Comparar os resultados dos modelos numéricos de cada método numérico entre eles, procurando avaliar a capacidade relativa de cada um deles.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em quatro seções. A primeira seção é dedicada à descrição do modelo teórico dos problemas físicos, bem como o desenvolvimento da solução analítica. A segunda seção compreende a revisão bibliográfica e descrição dos métodos numéricos utilizados. A terceira parte apresenta a aplicação dos métodos numéricos nos problemas físicos, tratando dos resultados obtidos dessa aplicação e a sua análise. Por fim, a conclusão do autor sobre os resultados e a análise realizada.

Na primeira seção, os modelos matemáticos do tubo de choque e da transferência de calor na placa plana retangular são apresentados, com as equações de governo e as considerações pertinentes. O tubo de choque, por se tratar de um sistema hiperbólico linear, pode ser transformado em variáveis características a partir das quais se desenvolve a solução analítica. Quanto à placa plana, pode-se aplicar o método de Fourier ou da separação de variáveis para determinar a solução para o regime permanente.

Na segunda seção, um breve histórico dos métodos de diferenças finitas é apresentado, seguindo com a base desses métodos, que é a expansão em série de Taylor truncada. Mais detalhes sobre os esquemas implícitos de Lax-Wendroff, MacCormack e o esquema explícito de Euler progressivo temporal centro espacial são apresentados de forma introdutória. Quanto ao método SPH, é nessa seção que é apresentado o seu desenvolvimento, aprofundando na formulação, nas bases da representação integral e a aproximação por partículas. Os métodos de determinação da vizinhança, da integração temporal e de correções do SPH também são detalhados. Além disso, descrevem-se as funções de suavização, fundamentais para a utilização do SPH.

Na terceira seção, são estabelecidas as condições iniciais e de contorno de cada problema físico, bem como detalhes da aplicação dos modelos numéricos. Posto isto, os resultados são apresentados e analisados, de modo que possa ser levantado um comparativo entre a solução exata e as soluções numéricas, a partir do qual pode-se avaliar os métodos numéricos entre eles.

Na quarta seção, as discussões e conclusões a respeito do trabalho são apresentadas. Adiciona-se também perspectivas futuras para o trabalho, bem como a proposta de aperfeiçoamento.

2 ANÁLISE TEÓRICA

Uma breve revisão bibliográfica dos fundamentos teóricos e dos fenômenos físicos, que são tratados neste trabalho, é apresentada nesta seção. Além disso, há uma maior atenção com o fenômeno do tubo de choque, pois a solução envolve conceitos mais complexos, apesar do tema principal do trabalho ser a solução em regime permanente da condução em uma placa retangular.

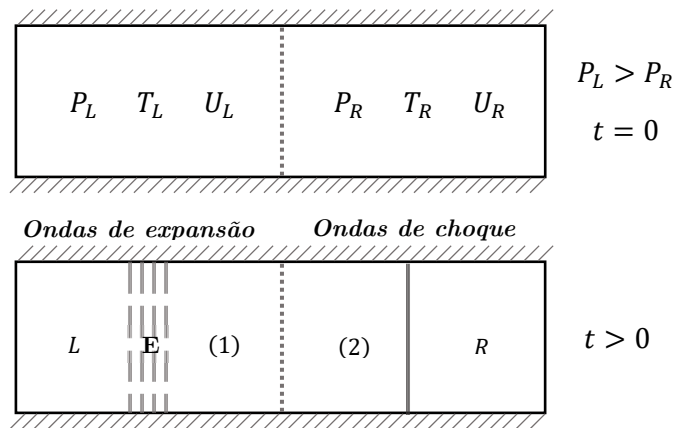
2.1 ONDAS DE CHOQUE NO TUBO DE SOD

O estudo de ondas de choque em tubo foi iniciado pelo cientista francês Paul Vieille em 1899 (LOUIS, 1994), o qual estudava a onda de choque proveniente de uma onda de combustão e a formação de uma frente de detonação. No entanto, o aparato só recebera nome de tubos de choque nos anos 1940, com o crescente interesse na dinâmica dos gases, devido ao desenvolvimento da aeronáutica. A popularização do tubo de choque ocorreu devido à sua capacidade de medição do número de Mach e da temperatura do escoamento, o que não ocorre no túnel de vento (FOMIN, 2010).

O problema das ondas de choque em um tubo é um caso interessante, pois oferece a possibilidade da introdução de noções sobre sistemas de equação diferenciais parciais não lineares hiperbólicas. Além disso, tais problemas são usados para verificar a capacidade dos métodos numéricos em lidar com descontinuidades, uma vez que esse fenômeno é conhecido e possui validações experimentais (SOD, 1978).

O tubo de choque consiste em um tubo separado em duas regiões por um diafragma, tendo uma das extremidades fechada e a outra, podendo ser ou não fechada. Uma das regiões é preenchida com gás com alta pressão e a outra com gás a baixa pressão. O compartimento de baixa pressão é denominado canal e o compartimento de alta pressão recebe o nome de câmara. Normalmente o canal possui um comprimento pelo menos dez vezes maior que a câmara. Um esquema do tubo de choque pode ser observado na Figura 2.1.

Figura 2.1 Esquema simplificado de um tubo de choque, no qual se observa o estado inicial do gás na câmara e no canal, além dos estados após a ruptura do diafragma.



Fonte: Própria autoria.

A câmara fica inicialmente em repouso inercial, com velocidade $U_L = 0$, além do estado termodinâmico P_L e T_L . Da mesma forma, o canal também inicia em repouso, $U_R = 0$, mas com o estado P_R e T_R . No instante $t = 0$, o diafragma é rompido e o gás na câmara expande, buscando homogeneizar a pressão em todo o tubo. A expansão ocorre por meio de ondas de expansão na câmara, as quais se movem na direção contrária às ondas de choque no canal (HENSHALL, 1955). As ondas de expansão são um processo contínuo em uma região bem definida (E), propagando-se para a esquerda ao mesmo tempo que a largura da região (E) aumenta.

As ondas de choque no canal se propagam para a direita. O gás expandido é separado do gás comprimido por descontinuidades de contato, o que pode ser considerada como uma membrana fictícia que se move a velocidade constante para a direita. Esse comportamento torna as funções, que descrevem esse fenômeno, descontínuas através das ondas de choque e as descontinuidades de contato.

2.1.1 EQUAÇÕES DE EULER PARA FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

Para modelar matematicamente o escoamento no tubo de choque, considera-se o tubo como infinitamente longo, o que permite evitar a reflexão das ondas de choque no fim do tubo, e os efeitos da viscosidade no escoamento são negligenciados. Além disso, o escoamento é considerado homogêneo, anisotrópico e simétrico. Essas hipóteses permitem descrever o escoamento por meio do sistema de equações de Euler unidimensionais, (LEVEQUE, 1992)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, u é a velocidade, p é a pressão e E é a energia total, dada por

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2}, \quad (2.2)$$

onde γ é a razão entre os coeficientes de calor específico. A matriz da derivada temporal é definida como a função $G(x, t)$, enquanto a outra é definida pela função $F(G(x, t))$, sendo as duas contínuas e diferenciáveis no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}$, sendo este domínio contínuo e definido pelo gás contido no tubo.

Considera-se o fluido compressível como um gás ideal, o que permite usar a lei constituinte dos gases, dada por

$$p = \rho R_g T, \quad (2.3)$$

onde R_g é a constante universal dos gases dividida pela massa molecular do gás e T é a temperatura.

Como o fenômeno das ondas de choque envolve um rápido aumento da temperatura e da velocidade, isso gera um comportamento supersônico, de modo que a velocidade do som (c), o número de Mach (M) e a entalpia (H) se tornam significativos. Essas propriedades são definidas como:

$$c = \sqrt{\gamma R_g T} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (2.4)$$

$$M = \frac{u}{c}, \quad (2.5)$$

$$H = \frac{E + p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2}. \quad (2.6)$$

O sistema de equações (2.1) pode ser reescrito em sua forma conservativa

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

Com as seguintes condições iniciais, tendo a posição do diafragma na abscissa definida por x_0 , são:

$$G(x, 0) = \begin{cases} (\rho_L, \rho_L u_L, E_L), & x < x_0, \\ (\rho_R, \rho_R u_R, E_R), & x > x_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

A solução do sistema de equações diferenciais hiperbólicas não lineares pode ser obtida da teoria dos sistemas hiperbólicos lineares com coeficiente constante. Com ela, é possível transformar explicitamente as equações em variáveis características. Desse modo, reescreve-se a equação (2.7) como:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} + A \frac{\partial G}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ G(x, 0) = G_0(x), \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz constante. Esse é um sistema das leis de conservação com a função de fluxo $F(G) = AG$, de modo que este sistema é denominado hiperbólico, se A for diagonalizável com autovalores reais, sendo decomposto em:

$$A = R\Lambda R^{-1}, \quad (2.10)$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ é a matriz diagonal dos autovalores e $R = [r_1|r_2|r_3]$ é a matriz dos autovetores diretos. Note que $AR = R\Lambda$, portanto,

$$Ar_p = \lambda_p r_p \quad \text{com } p = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

O sistema pode ser considerado estritamente hiperbólico, se todos os autovalores forem distintos, o que é considerado neste caso. Assim, modificando a equação (2.9) para as variáveis características, tem-se

$$v = R^{-1}G. \quad (2.12)$$

Multiplicando a equação (2.9) por R^{-1} e, usando a equação (2.10), obtém-se

$$R^{-1} \frac{\partial G}{\partial t} + \Lambda R^{-1} \frac{\partial G}{\partial x} = 0. \quad (2.13)$$

Sendo R^{-1} constante, a equação (2.13) pode ser simplificada para

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0. \quad (2.14)$$

Desde que Λ é escalar, isso decompõe o sistema hiperbólico clássico em três equações independentes

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} + \lambda_p \frac{\partial v_p}{\partial x} = 0 \quad \text{com } p = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Cada uma dessas equações é uma equação advectiva constante, com a solução

$$v_p(x, t) = v_p(x - \lambda_p t, 0). \quad (2.16)$$

Assim, desde $v = R^{-1}G$, os valores iniciais de v_p são, simplesmente os p -ésimos componentes do vetor

$$v_p(x, 0) = R^{-1}G_0(x). \quad (2.17)$$

A solução do sistema original é recuperada pela equação (2.12)

$$G(x, t) = Rv(x, t). \quad (2.18)$$

Note que o valor de $v_p(x, t)$ é o coeficiente de r_p em um autovetor expandido do vetor $G(x, t)$, portanto, a equação (2.18) pode ser reescrita como

$$G(x, t) = \sum_{p=1}^3 v_p(x, t)r_p \quad (2.19)$$

Combinando a equação (2.19) com a equação (2.16), obtém-se

$$G(x, t) = \sum_{p=1}^3 v_p(x - \lambda_p t, 0)r_p \quad (2.20)$$

Visto isto, depreende-se que $G(x, t)$ depende apenas dos valores iniciais nos três pontos $x - \lambda_p t$, de modo que a dependência do domínio é dada por $\Omega(\bar{x}, \bar{t}) = \{\bar{x} - \lambda_p \bar{t}, p = 1, 2, 3\}$. A partir disso e tomando a função do fluxo F , sendo o fluido um gás politrópico, a matriz jacobiana obtida é

$$A = \frac{\partial F}{\partial G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)U^2 & (3 - \gamma)U & (\gamma - 1) \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)U^3 - UH & H - (\gamma - 1)U^2 & \gamma U \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A partir dessa matriz, pode-se calcular os autovalores

$$\lambda_1 = U - c, \quad \lambda_2 = U, \quad \lambda_3 = U + c, \quad (2.22)$$

e os correspondentes autovetores

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ U - c \\ H - cU \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ U \\ U^2/2 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ U + c \\ H + cU \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

os quais, por sua vez, fornecem as seguintes matrizes

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U - c & U & U + c \\ H - cH & U^2/2 & H + cU \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{U}{c}\right) & -\left(\alpha_2 U + \frac{1}{c}\right) & \frac{\alpha_2}{2} \\ 1 - \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_2 \\ \frac{1}{2}\left(\alpha_1 - \frac{U}{c}\right) & -\left(\alpha_2 U - \frac{1}{c}\right) & \frac{\alpha_2}{2} \end{bmatrix},$$

onde $\alpha_1 = (\gamma - 1)U^2/(2c^2)$ e $\alpha_2 = (\gamma - 1)/c^2$.

Como o sistema de equações (2.15) pode ser considerado um sistema de equações convectivas com velocidade de transporte constante λ_p , então existe uma única curva característica, a qual é a linha $x = \lambda_p t$, com o invariante $v = G$. A partir de (2.22), tem-se que as três características distintas, C^- , C^0 e C^+ , são

$$C^- : \frac{dx}{dt} = U - c, \quad C^0 : \frac{dx}{dt} = U, \quad C^+ : \frac{dx}{dt} = U + c. \quad (2.25)$$

A solução ainda precisa do apoio dos invariantes, os quais podem ser escritos na forma diferencial. Mas para isso, o sistema de equações de (2.1) deve ser reescrito em, primeiro em sua forma não conservativa

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

onde ε é a energia interna específica e $e = \varepsilon + u^2/2$ é a energia total específica. Com isto, suponha que $p = p(\rho, \varepsilon)$ e considere a entropia específica s descrita por meio da equação de Gibbs

$$T ds = d\varepsilon + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (2.27)$$

onde T é a temperatura. Logo, assumindo que as variáveis dependentes são suficientemente suaves em x e t , então

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Desde que $T > 0$,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (2.29)$$

Isso permite que o sistema (2.26) possa ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Note que a forma constitutiva da pressão passa a ser $p = p(\rho, s)$ e as propriedades

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) = c^2 > 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{2c}{\rho} \left(\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} + c \right) > 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Para derivar as equações características, utiliza-se a forma não conservativa (2.30) e as equações de estado (2.31), assim

$$dp = c^2 d\rho + \frac{\partial p}{\partial s} ds, \quad (2.32)$$

a qual, em conjunto com a terceira equação do sistema (2.30) fornece

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.33)$$

A equação (2.33) em conjunto com a primeira equação do sistema (2.30) fornece

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho c \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho c \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}. \quad (2.34)$$

A partir dessa forma, as equações características podem ser escritas como

$$\begin{cases} dv_1 = dp - \rho c du = 0 \\ dv_2 = dp - c^2 d\rho = 0. \\ dv_3 = dp - \rho c du = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

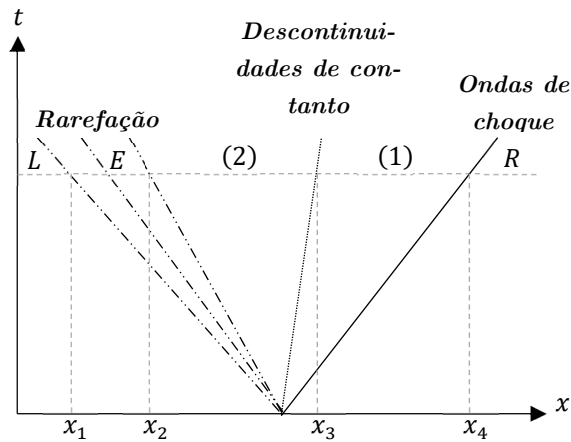
Integrando as equações do sistema (2.35) ao longo das curvas características, considerando o escoamento isentrópico, obtém-se

$$v_1 = U - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad v_2 = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad v_3 = U + \frac{2c}{\gamma + 1}. \quad (2.36)$$

2.1.2 SOLUÇÃO EXATA DO PROBLEMA DE RIEMANN

O comportamento do gás no tubo de choque descrito na seção 2.1 é conhecido como problema de Riemann. Este problema é modelado dividindo-se o tubo em quatro regiões como na Figura 2.1, mas é interessante identificar essas regiões no plano (x, t) , Figura 2.2, juntamente com as ondas que caracterizam o escoamento. As ondas de choque e as discontinuidades de contato são representadas por uma linha, pois se propagam em zonas uniformes com velocidade constante. No entanto as ondas de rarefação se propagam em uma zona que varia continuamente.

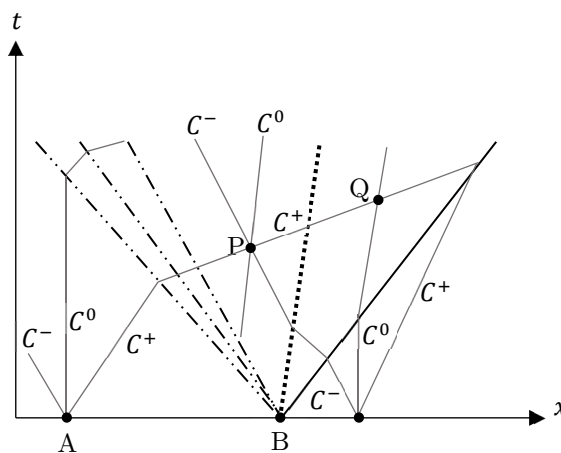
Figura 2.2 Diagrama do plano de fase (x, t) com a solução exata do problema de Riemann, no qual, pode-se observar as quatro regiões bem definidas.



Fonte: Própria autoria.

As condições iniciais são dadas na equação (2.8), lembrando que $U_L = U_R = 0$. Tendo em vistas as condições iniciais, considera-se a transição através das descontinuidades que existem entre as regiões e a propagação de informações ao longo das curvas características, Figura 2.3.

Figura 2.3 Diagrama do plano de fase (x, t) com a solução exata do problema de Riemann e as curvas características da solução.



Fonte: Própria autoria.

Essas transições entre as descontinuidades possuem condições específicas conhecidas como condições de Rankine-Hugoniot. Para compreendê-las, considera-se o problema de Cauchy dado pelas equações (2.7) e (2.8) e assume-se que $G(x, 0) = G_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})^3$, onde L_{loc}^∞ é o espaço das funções mensuráveis e localmente limitadas. Seja $C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty])$ o espaço C^1 das

funções φ com suporte compacto em $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Note que se $G \in C^1$ e $\varphi \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, então pelo teorema de Green, obtém-se

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \varphi dx dt = \\ & = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} G_0 \cdot \varphi_0 dx dt = 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde \cdot denota o produto interno Euclidiano em \mathbb{R}^3 . Isso implica que qualquer solução clássica de G para todo $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^3$ satisfaz a equação (2.37). Apesar disso, a equação (2.37) faz sentido se $G \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^3$. Portanto, a seguinte definição pode ser feita:

Definição 2.1: Assumindo que $G_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^3$. A função $G \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^3$ é denominada de solução fraca do problema de Cauchy (2.7) e (2.8) se $G \in \Omega$ e satisfaz a equação (2.37) para qualquer função $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^3$.

Por construção, a solução clássica do problema (2.7) e (2.8) também é uma solução fraca. Sendo assim, multiplicando a equação (2.7) pela função de teste $C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^3$ e comparando com a equação (2.37), obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}} (G(x, 0) - G_0(x)) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0, \quad (2.38)$$

a qual é válida, apenas por partes.

As soluções de (2.7), no sentido de distribuição, são suaves por partes, admitindo descontinuidades. Esse argumento mostra que qualquer distribuição de solução G é uma solução clássica desde que o domínio de G seja C^1 . Contudo, adiciona-se ainda que G é C^1 por partes se existir um número finito de superfícies orientadas suaves $\partial\Omega$ no espaço (x, t) no qual G é C^1 e através das quais G possui descontinuidades de primeira espécie (*jump discontinuity*). Dada a superfície de descontinuidade $\partial\Omega$, o vetor normal dela é definido como $\mathbf{n} = (n_t, n_x)$ e os limites de G nela são denotados por G_+ e G_- em cada lado de $\partial\Omega$, de modo que

$$G_\pm(x, t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0, \sigma > 0} G((x, t) \pm \sigma \mathbf{n}). \quad (2.39)$$

Como o caso considerado é unidimensional, pode-se considerar que qualquer linha de descontinuidade $\partial\Omega$ pode ser parametrizada com a forma $(\xi(t), t)$, onde $\xi : t \rightarrow \xi(t)$ é uma função C^1 em algum intervalo de tempo (t_1, t_2) em \mathbb{R} , e é definido de alguma maneira que

$$G_{\pm}(\xi(t), t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0, \sigma > 0} G((\xi(t), t) \pm \sigma \mathbf{n}). \quad (2.40)$$

No entanto, nem mesmo no caso de uma função C^1 por partes é admitida descontinuidades. Os valores de G e $F(G)$ em cada lado de $\partial\Omega$ estão relacionados de modo implícito nas equações, como resultado do seguinte teorema:

Teorema 2.1 (Condição de Rankine-Hugoniot): Seja $G : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \Omega$ uma função por partes C^1 . Então G é uma solução da equação (2.7) no sentido de distribuição em $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \Omega$, se e somente se, as duas condições seguintes forem satisfeitas:

- i. G é uma solução clássica de (2.7) nos domínios em que G é C^1 ;
- ii. G satisfaz a condição de salto

$$(G_+ - G_-)n_t + (F(G_+) - F(G_-))n_x = 0. \quad (2.41)$$

ao longo das superfícies de descontinuidade.

Suponha que G é uma função por partes C^1 e solução da equação (2.7) no sentido de distribuições em $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. A partir do que fora apresentado, G satisfaz a condição (i). Portanto, em relação a segunda condição, considere uma superfície descontínua $\partial\Omega$ de G , M um ponto de $\partial\Omega$ e D uma pequena bola centrada em M . Para simplificar, considera-se que $\partial\Omega \cap D$ é a única superfície de descontinuidade de G em D e se denomina D_{\pm} os dois componentes abertos de D de cada lado de $\partial\Omega$. Seja, ainda, $\boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(D)^3$ e suponha que o vetor normal \mathbf{n} aponta na direção de D_+ , logo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \left(G \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + F \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \right) dxdt = \\ &= - \int_{D_+} \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} dxdt - \int_{\partial\Omega \cap D} (n_t G_+ + n_x F(G_+)) \cdot \boldsymbol{\varphi} dS - \dots \\ &\dots - \int_{D_-} \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} dxdt + \int_{\partial\Omega \cap D} (n_t G_- + n_x F(G_-)) \cdot \boldsymbol{\varphi} dS. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Como G é uma solução clássica de (2.7) em D_+ e D_- , a primeira e a terceira integral são anuladas e é obtida a equação

$$\int_{\partial\Omega \cap D} \left(-n_t(G_+ - G_-) - n_x(F(G_+) - F(G_-)) \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} dS = 0. \quad (2.43)$$

Isso é válido para uma função $\boldsymbol{\varphi}$ arbitrária, de modo que a relação de salto (2.41) é obtida no ponto M . Por outro lado, se G é uma função por partes C^1 que satisfaça as condições (i) e (ii), basta verificar se G é de fato uma solução distribuída de (2.7). Nesse sentido, denota-se

$$[G] = G_+ - G_-, \quad [F(G)] = F(G_+) - F(G_-), \quad (2.44)$$

como o salto de G e $F(G)$ através de $\partial\Omega$. Desse modo a equação (2.41) pode ser reescrita

$$n_t[G] + n_x[F(G)] = 0. \quad (2.45)$$

Sendo as componentes do vetor normal não nulas, pode-se reescreve-lo como

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\zeta \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

onde $\zeta \in \mathbb{R}$ e \mathbf{v} um vetor unitário em \mathbb{R} . Logo, isso implica que a equação (2.45) pode ser reescrita, novamente, como

$$\zeta[G] = \mathbf{v}[F(G)]. \quad (2.47)$$

A superfície $\partial\Omega$ possui orientação padrão determinada pela escolha da forma canônica do volume de controle no seu espaço tangente e, portanto, um campo vetorial normal canônico associado a essa orientação. Se $\partial\Omega$ é orientada e $\mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ é o vetor normal unitário externo, então ζ e \mathbf{v} podem ser interpretados como a velocidade da propagação das descontinuidades e a direção, respectivamente. Desse modo, no caso unidimensional, $\partial\Omega$ é uma curva parametrizada por $(t, \xi(t))$ tal que

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\zeta \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \zeta = \frac{d\xi}{dt}. \quad (2.48)$$

e a condição de salto de Rankine-Hugoniot se torna

$$\zeta[G] = [F(G)]. \quad (2.49)$$

Visto isto, aplica-se condição de salto de Rankine-Hugoniot (2.49), associando as regiões (1) e (R):

$$\begin{aligned} U_s(\rho_1 - \rho_R) &= \rho_1 U_1 - \rho_R U_R, \\ U_s(\rho_1 U_1 - \rho_R U_R) &= \rho_1 U_1^2 + p_1 - (\rho_R U_R^2 + p_R), \\ U_s(E_1 - E_R) &= (E_1 + p_1)U_1 - ((E_R + p_R)U_R). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Isolando a massa específica na primeira equação do sistema (2.50) e usando essa relação para isolar a pressão na segunda equação, obtém-se as equações

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{\rho_R} &= \frac{U_s}{U_s - U_1}, \\ \frac{p_1}{p_R} &= 1 + \frac{\rho_R U_s U_1}{p_R}.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Usando a equação (2.2) na terceira equação do sistema (2.50), bem como as equações do sistema (2.51), obtém-se

$$U_1 = \frac{2c_R}{\gamma + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right),\tag{2.52}$$

onde $M_s = U_s/c_R$. Com a expressão (2.52), pode-se reescrever as equações do sistema (2.51), obtendo-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\frac{\rho_R}{\rho_1} &= \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_s^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \\ \frac{p_1}{p_R} &= \frac{2M_s^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.\end{aligned}\tag{2.53}$$

A descontinuidade de contato de fato é a descontinuidade de uma função de massa específica, enquanto a pressão e a velocidade permanecem contínuas, de modo que

$$U_2 = U_1, \quad p_2 = p_1.\tag{2.54}$$

Quanto as regiões (2) e (L), elas podem ser relacionadas por meio da análise das curvas características na Figura 2.3. Observa-se que as curvas C^0 e C^+ se cruzam no ponto P da região (2) enquanto transportam informações da região (L) ao longo da região de rarefação. Isso significa que os invariantes v_1 e v_3 são iguais para as regiões (2) e (L), logo

$$\frac{\rho_2}{\rho_L} = \left(\frac{p_2}{p_L} \right)^{1/\gamma}, \quad U_2 = \frac{2}{\gamma - 1} (c_L - c_2).\tag{2.55}$$

Isto posto, é possível obter uma equação implícita para M_s com as relações encontradas. Para isto, considerando a relação $U_2 = U_1$ e as equações (2.54) e (2.55), tem-se

$$\frac{2c_R}{\gamma + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) = \frac{2}{\gamma - 1} (c_L - c_2) \rightarrow M_s - \frac{1}{M_s} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{c_L}{c_R} \left(1 - \frac{c_2}{c_L} \right).\tag{2.56}$$

Agora, considerando apenas o termo c_2/c_L e as relações das equações (2.4), (2.55) e (2.54), então

$$\frac{c_2}{c_L} = \left(\frac{p_1}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \left[\frac{p_R}{p_L} \left(\frac{2M_s^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\tag{2.57}$$

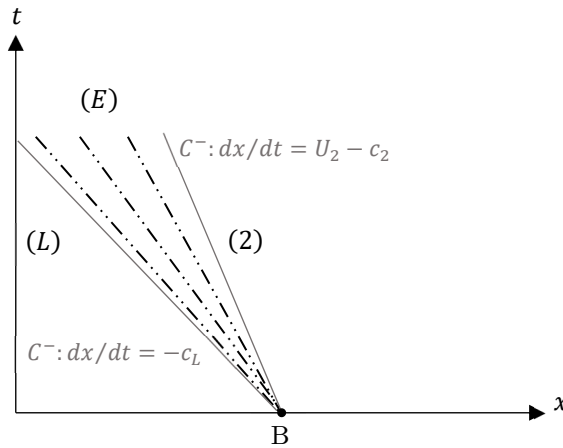
Substituindo (2.57) na equação (2.56), obtém-se

$$M_s = \frac{1}{M_s} + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{c_L}{c_R} \left\{ 1 - \left[\frac{p_R}{p_L} \left(\frac{2M_s^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \right]^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right\}. \quad (2.58)$$

Com a solução de M_s , utilizando um método iterativo como o método de Newton, determina-se todos os parâmetros das regiões uniformes (1) e (2). Entretanto, a solução exata completa necessita da determinação da extensão de cada uma das regiões, o que significa determinar as abscissas x_1 , x_2 , x_3 e x_4 . Para isto, considera-se a região de rarefação, (E), Figura 2.4, limitada pela esquerda por uma curva característica C^- , a qual inicia no ponto B, pertencendo à região (L) e com uma inclinação $dx/dt = -c_L$. Considere-se, ainda, que a região de rarefação seja limitada pela direita por outra curva característica C^- , também iniciando no ponto B, mas pertencendo à região (2), então a inclinação dela é $dx/dt = U_2 - c_2$. Logo, as abscissas x_1 e x_2 possuem os valores

$$x_1 = x_0 - c_L t, \quad x_2 = x_0 + (U_2 - c_2)t \quad (2.59)$$

Figura 2.4 Detalhe da região de rarefação (E), a qual é limitada pela esquerda e pela direita por curvas características C^- .



Fonte: Própria autoria.

Considerando um ponto qualquer (x, t) na região de rarefação, $x_1 < x < x_2$, e pela Figura 2.3, nota-se que este ponto pertence a curva característica C^- que se inicia em B, o que implica, necessariamente que $(x - x_0)t = U - c$. No entanto, tomando a curva característica C^+ que vem da região (L), obtém-se $c + (\gamma - 1)U/2 = c_L$. Combinando as duas relações, tendo em vista que o escoamento é isentrópico, conclui-se que a solução exata na região de rarefação é

$$\begin{aligned}
U_E &= \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_L + \frac{x - x_0}{t} \right), \\
c_E &= c_L - \frac{(\gamma - 1)U}{2}, \\
p_E &= p_L \left(\frac{c_E}{c_L} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

A descontinuidade de contato é transportada à velocidade constante, $U_2 = U_1$, então

$$x_3 = x_0 + U_2 t. \tag{2.61}$$

Além disso, as ondas de choque também se propagam à velocidade constante U_s , de modo que

$$x_4 = x_0 + U_s t. \tag{2.62}$$

Com isto, todos os parâmetros do escoamento no tubo de choque podem ser determinados ao longo do tempo. Os tempos de observação são normalmente curtos, portanto, nesse trabalho, são estudados os resultados para um tempo de 0,2 s, tendo em vista os mesmos parâmetros do Sod (1978).

2.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PLACA RETANGULAR

O problema de transferência de calor em uma placa retangular consiste em um domínio contínuo, homogêneo, simétrico e isotrópico, o qual é submetido a uma diferença de temperatura entre suas fronteiras, o que promove a troca de energia térmica ou calor da fronteira de maior temperatura para a fronteira de menor temperatura até que o sistema entre em regime permanente. Considerando que a temperatura na placa seja a função contínua $T = T(x, y, t)$ no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, a equação diferencial parcial que modela este problema é a equação parabólica

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T, \tag{2.63}$$

onde α é difusividade térmica da placa. Considerando, inicialmente, que o sistema esteja em regime permanente, a equação (2.63) reduz para a equação de Laplace

$$\nabla^2 T = 0, \tag{2.64}$$

para o qual são impostas as seguintes condições de contorno

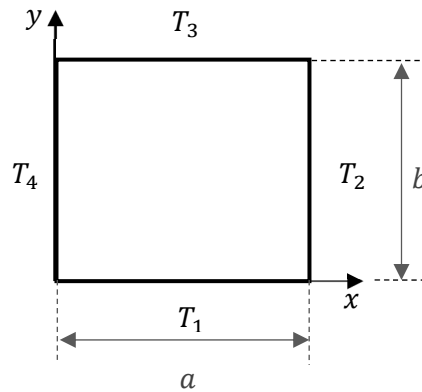
$$\begin{aligned}
T(x, 0) &= T_1, & \forall x \in [0, a], & \quad y \in [0, b], \\
T(x, b) &= T_3, & \forall x \in [0, a], & \quad y \in [0, b], \\
T(0, y) &= T_4, & x \in [0, a], & \quad \forall y \in [0, b], \\
T(a, y) &= T_2, & x \in [0, a], & \quad \forall y \in [0, b].
\end{aligned}
\tag{2.65}$$

O problema pode ser ilustrado como na Figura 2.5, na qual, observa-se as condições de contorno impostas à placa retangular.

Para resolver analiticamente este problema, uma das possíveis técnicas é o método da separação de variáveis, também conhecido como método de Fourier. Para aplicar a técnica em um problema bidimensional é necessário que:

- i. Uma das direções seja expressa por uma equação diferencial homogênea sujeita a condições de contorno homogêneas, enquanto a outra direção é expressa por uma equação diferencial homogênea e uma condição de contorno não-homogênea
- ii. O sinal da constante ξ^2 deve ser tal que o problema de contorno da direção homogênea se torne um problema de valor característico.

Figura 2.5 Diagrama da placa plana retangular submetida a quatro diferentes condições de contorno do tipo Dirichlet.



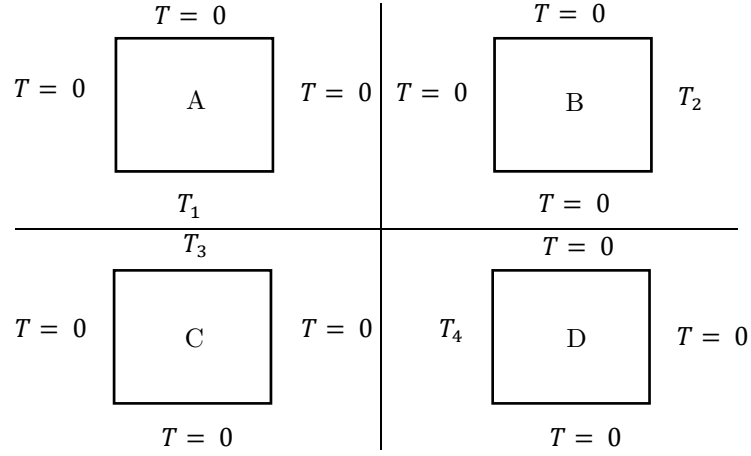
Fonte: Própria autoria.

Visto estas condições, a priori as equações (2.64) e (2.65) não atendem as condições. Para contornar isso, é utilizado o fato de que o problema é linear e contínuo para propor a seguinte superposição

$$T(x, y) = T^A(x, y) + T^B(x, y) + T^C(x, y) + T^D(x, y). \tag{2.66}$$

Isso significa que o problema de Dirichlet (2.64) e (2.65) pode ser entendido como a soma isomórfica da contribuição de quatro sistemas que podem ser observados na Figura 2.6.

Figura 2.6 Superposição do problema de Dirichlet em quatro sistemas.



Fonte: Própria autoria.

Aplicando as condições de contorno na superposição (2.66), é fácil verificar que elas são atendidas. Assim, pode-se aplicar o método de Fourier em cada uma das equações diferenciais, a começar pelo sistema A definido como

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T^A(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T^A(x, y) = 0, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} T^A(x, 0) &= T_1, & \forall x \in [0, a], & \quad y \in [0, b], \\ T^A(x, b) &= 0, & \forall x \in [0, a], & \quad y \in [0, b], \\ T^A(0, y) &= 0, & x \in [0, a], & \quad \forall y \in [0, b], \\ T^A(a, y) &= 0, & x \in [0, a], & \quad \forall y \in [0, b]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Supondo que a função $T^A(x, y)$ possa ser reescrita como $T^A(x, y) = X^A(x)Y^A(y)$ e substituindo-a na equação (2.67), obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} X^A + \xi^2 X^A = 0, \\ \frac{d^2}{dy^2} Y^A - \xi^2 Y^A = 0, \end{cases} \quad (2.69)$$

onde ξ^2 é uma constante. Para a primeira equação do sistema (2.69), propõe-se a seguinte solução

$$X_n^A(x) = \vartheta_n^a \sin(\xi_n x) + \omega_n^a \cos(\xi_n x). \quad (2.70)$$

Aplicando as condições de contorno $T^A(0, y) = 0$, obtém-se

$$X_n^A(x) = \vartheta_n^a \sin(\xi_n x), \quad \xi_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.71)$$

Quanto à segunda equação do sistema (2.69), a solução para fica

$$Y_n^A(y) = \vartheta_n^b \sinh(\xi_n y) + \omega_n^b \cosh(\xi_n y), \quad (2.72)$$

mas, fazendo $\psi_n = \left((\omega_n^b)^2 - (\vartheta_n^b)^2 \right)^{1/2}$ e $\Phi_n = (1/\xi_n) \tanh^{-1}(\vartheta_n^b/\omega_n^b)$, a solução pode ser reescrita na forma

$$Y_n^A(y) = \psi_n \sinh(\xi_n(y + \Phi_n)). \quad (2.73)$$

Aplicando a condição homogênea

$$T^A(x, b) = X^A(x)Y^A(b) = 0, \quad (2.74)$$

obtem-se

$$Y_n^A(b) = \psi_n \sinh(\xi_n(b + \Phi_n)) = 0, \quad (2.75)$$

do qual, depreende-se que

$$\Phi_n = -b, \quad \psi_n \neq 0, \quad (2.76)$$

para uma solução não trivial de $T^A(x, y)$. Portanto, tem-se

$$Y_n^A(b) = \psi_n \sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right). \quad (2.77)$$

Devido à linearidade, a solução do problema de Dirichlet (2.67) e (2.68) se torna

$$T^A(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right), \quad (2.78)$$

onde $\Psi_n = \vartheta_n^a \psi_n$. Obtida a equação (2.78), aplica-se a condição de contorno não homogênea, o que resulta em

$$T^A(x, 0) = T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(-b)}{a}\right). \quad (2.79)$$

A equação (2.79) é uma série de Fourier, de modo que o coeficiente Ψ_n é determinado como

$$\Psi_n = -\frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a T_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx. \quad (2.80)$$

Portanto a solução do problema de Dirichlet (2.67) e (2.68) é

$$T^A(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_1[(-1)^{n+1} - 1]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right). \quad (2.81)$$

Para mostrar a existência da solução (2.81) é preciso notar que

$$\frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} = e^{-n\pi y/a} \left[\frac{1 - e^{-(n\pi/a)(b-y)}}{1 - e^{-2n\pi b/a}} \right] \leq K_1 e^{-n\pi y/a}, \quad (2.82)$$

onde K_1 é uma constante. Tomando uma condição de contorno não homogênea mais geral para o problema, $f(x)$, e assumindo que que ela seja limitada, tem-se que

$$\left| \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right| \leq \frac{2}{a} \int_0^a |f(x)| dx = K_2. \quad (2.83)$$

Logo, a série de $T^A(x, y)$, equação (2.81), é dominada pela série

$$\sum_{n=1}^{\infty} M' e^{-n\pi y_0/a}, \quad y \geq y_0 > 0, \quad M' = \text{constante}, \quad (2.84)$$

de modo que $T^A(x, y)$ converge uniformemente e x e y para quaisquer $0 \leq x \leq a$, $y \geq y_0 > 0$. Consequentemente, $T^A(x, y)$ é contínua nessa região e satisfaz as condições de fronteira $T^A(0, y) = T^A(a, y) = T^A(x, b) = 0$. Agora, denomina-se o coeficiente de Fourier da seguinte forma

$$\Psi_n^* = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad (2.85)$$

e se diferencia a equação (2.81) duas vezes em relação à x , obtendo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T^A(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\Psi_n^* \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}, \quad (2.86)$$

enquanto que a diferenciação duas vezes em relação a y resulta em

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} T^A(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^* \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}. \quad (2.87)$$

Nota-se que tanto $\partial^2 T^A(x, y)/\partial x^2$ quanto $\partial^2 T^A(x, y)/\partial y^2$ são dominadas pela série

$$\sum_{n=1}^{\infty} M n^2 e^{-n\pi y_0/a}, \quad (2.88)$$

portanto, elas convergem uniformemente para qualquer $0 < y_0 < b$. Consequentemente, $\partial^2 T^A(x, y)/\partial x^2$ e $\partial^2 T^A(x, y)/\partial y^2$ existem, e a solução $T^A(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace. Por fim, falta mostrar que $T^A(x, 0) = f(x)$. Seja $f(x)$ uma função contínua e seja $f'(x)$ contínua por partes em $[0, a]$ e além disso, se $f(0) = f(a) = 0$, então, a série de Fourier para $f(x)$ converge uniformemente. Tomando $y = 0$ para a série de $T^A(x, y)$, obtém-se

$$T^A(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^* \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (2.89)$$

Desde que $T^A(x, 0)$ converge uniformemente para $f(x)$, pode-se escrever para um $\delta > 0$,

$$|z_m(x, 0) - z_n(x, 0)| < \delta, \quad m, n > N_\delta, \quad (2.90)$$

onde

$$z_m(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^* \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (2.91)$$

É fácil ver que $z_m(x, y) - z_n(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace e as condições de contorno $x = 0$, $x = a$ e $y = b$. Assim, pelo princípio do máximo

$$|z_m(x, y) - z_n(x, y)| < \delta, \quad m, n > N_\delta, \quad (2.92)$$

na região $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$. Então a série de $T^A(x, y)$ converge uniformemente e, como consequência, $T^A(x, y)$ é contínua na região $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$. Visto isto, tem-se que

$$T^A(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^* \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f(x). \quad (2.93)$$

Um procedimento análogo pode ser realizado para as outras componentes da superposição (2.66), que resulta na solução geral

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_1[(-1)^{n+1} - 1]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right) + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_2[(-1)^{n+1} - 1]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_3[(-1)^{n+1} - 1]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + \dots \\ &\dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_4[(-1)^{n+1} - 1]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(x-a)}{b}\right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Apesar da apresentação da análise teórico matemática da seção dois, o foco deste trabalho são as soluções numéricas dos fenômenos do tubo de choque e da transferência de calor em uma placa plana retangular. Nesse sentido, esta seção, tem como objetivo introduzir os conceitos dos métodos das diferenças finitas e do método *Smoothed Particles Hydrodynamics* (SPH).

3.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método aplicado a problemas unidimensionais era de conhecimento L. Euler em 1768 (DEMIDOVICH & MARON, 1960) foi estendido para duas dimensões por Runge em 1908. Com o desenvolvimento da tecnologia computacional em 1950, o uso do método foi impulsionado e extensamente estudado, estabelecendo-o durante as seis décadas que se seguiram, com pesquisa e resultados (FREY & BUHAN, 2018).

O método consiste na aproximação da derivada de uma função f . Considere que f é uma função contínua em um ponto x qualquer, com $x \in \mathbb{R}$, logo

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (3.1)$$

onde, à medida que Δx tende a zero, o valor da diferença se aproxima do valor da derivada no ponto x . Nesse sentido, se no lugar do limite tomar-se o valor finito da diferença, obtém-se um valor aproximado da derivada, cuja precisão aumenta com a redução do valor de Δx . Essa alteração do operador diferencial para um operador de diferença finita gera um erro, o qual é denominado erro de discretização ou erro de truncamento, sendo consequência do uso de uma parte finita de uma série de Taylor.

Portanto, supondo, também, que $f(x)$ seja uma função C^n continua na vizinhança de x , com $x \in \Omega$, sendo Ω o domínio definido como uma bola fechada em $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Para qualquer $\Delta x > 0$, tem-se que a expansão em série de Taylor

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{d}{dx}f(x)\Delta x + \frac{d^2}{dx^2}f(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + \dots, \quad (3.2)$$

a qual pode ser expressa também como

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{d}{dx}f(x)\Delta x + O(\Delta x^2), \quad (3.3)$$

onde $O(\Delta x^2)$ indica um erro de aproximação proporcional a Δx^2 . Desse modo, pode-se definir a derivada da função por meio de uma diferença progressiva como

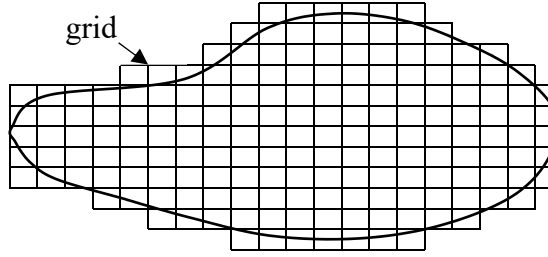
$$\frac{d}{dx}f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \quad (3.4)$$

e, analogamente, a diferença retroativa é definida como

$$\frac{d}{dx}f(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \equiv \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}. \quad (3.5)$$

onde i é o ponto ou nó de referência no domínio discretizado, com $i \in [0, N]$, sendo N , o número total de nós presentes na malha e $N \in \mathbb{N}$, Figura 3.1.

Figura 3.1 Domínio discretizado em uma malha simétrica.



Fonte: Própria autoria.

As duas aproximações possuem erros de primeira ordem $O(\Delta x)$ e são menos consistentes do que a diferença de centro, segundo Frey e Buhan (2018, p. 57), a qual possui erro de segunda ordem $O(\Delta x^2)$. Para obter esta diferença, toma-se as seguintes expansões em série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \frac{d}{dx}f(x)\Delta x + \frac{d^2}{dx^2}f(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3}{dx^3}f(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots, \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \frac{d}{dx}f(x)\Delta x + \frac{d^2}{dx^2}f(x)\frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{d^3}{dx^3}f(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

as quais subtraídas uma da outra, resultam em

$$\frac{d}{dx}f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \equiv \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.7)$$

Os problemas que são tratados neste trabalho também apresentam derivadas de ordem superior, logo, é interessante explorar os operadores de diferenças finitas de segunda ordem. Para isso, recorre-se novamente à série de Taylor, mas tomando termos de ordem superior, tal como

$$\begin{aligned}
f(x + \Delta x) &= f(x) + \frac{d}{dx}f(x)\Delta x + \frac{d^2}{dx^2}f(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3}{dx^3}f(x)\frac{\Delta x^3}{3!} \\
&\quad + \frac{d^4}{dx^4}f(x)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots, \\
f(x - \Delta x) &= f(x) - \frac{d}{dx}f(x)\Delta x + \frac{d^2}{dx^2}f(x)\frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{d^3}{dx^3}f(x)\frac{\Delta x^3}{3!} \\
&\quad + \frac{d^4}{dx^4}f(x)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

as quais, somadas resultam em

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \equiv \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}, \tag{3.9}$$

com um erro da ordem de $O(\Delta x^2)$.

Todas as equações apresentadas representam o método de Euler explícito para da discretização das equações diferenciais contínuas. Contudo, quando o MDF é utilizado para aproximar um sistema de equações diferenciais parciais, onde tem-se um domínio multidimensional, normalmente, utiliza-se uma combinação dos esquemas de discretização. O resultado pode ser uma solução numérica explícita ou implícita, dependendo do esquema de discretização adotado e da equação diferencial parcial. Posto isto, três esquemas são analisados neste trabalho: Euler progressivo temporal centro espacial, Lax-Wendroff e MacCormack.

3.1.1 LAX-WENDROFF E MACCORMACK

Os esquemas de Lax-Wendroff e MacCormack são esquemas distintos, classificados como métodos implícitos de discretização e surgiram para solucionar sistemas de equações diferenciais parciais hiperbólicas. Apesar de serem esquemas distintos, eles possuem equivalência, uma vez que partem do mesmo princípio: utilizar discretização centrada no espaço adicionada de um passo intermediário na discretização do tempo.

O esquema de Lax-Wendroff (LAX & WENDROFF, 1960) é obtido ao se tomar o vetor $G(t + \Delta t, x)$ do sistema de equações de Euler (2.7), o qual pode ser expandido em série de Taylor da seguinte forma:

$$G(t + \Delta t, x) = G(t, x) + \frac{\partial G(t, x)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 G(t, x)}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3). \tag{3.10}$$

Considerando o caso linear, as derivadas temporais podem ser substituídas por derivadas espaciais tais que

$$\begin{aligned}
G(t + \Delta t, x) &= G(t, x) - \frac{A\Delta t}{2\Delta x} [G(t, x + \Delta x) - G(t, x - \Delta x)] + \dots \\
&\dots + \frac{A^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} [G(t, x + \Delta x) - 2G(t, x) + G(t, x - \Delta x)] + O(\Delta t^2, \Delta x^2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para os casos não lineares é preciso calcular o Jacobiano de $\mathbf{A} = \partial F / \partial G$, destacando que $F(G(t, x)) = \mathbf{A}G(t, x)$. Logo, para evitar esse cálculo, pode-se utilizar o esquema de Lax-Wendroff de dois passos (RICHTMEYER & MORTON, 1967). O esquema parte das expansões em série de Taylor de $G(t + \Delta t, x + \Delta x)$ e $G(t - \Delta t, x - \Delta x)$ em torno de (t, x)

$$\begin{aligned}
G(t + \Delta t/2, x + \Delta x/2) &= G(t, x) + \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2), \\
G(t - \Delta t/2, x - \Delta x/2) &= G(t, x) - \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} - \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

as quais, ao se substituir a derivada temporal pela derivada espacial e fazer a aproximação, tornam-se

$$\begin{aligned}
G(t + \Delta t/2, x + \Delta x/2) &= \frac{G(t, x + \Delta x) + G(t, x)}{2} - \dots \\
&\dots - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(G(t, x + \Delta x)) - F(G(t, x))] + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \\
G(t - \Delta t/2, x - \Delta x/2) &= \frac{G(t, x) + G(t, x - \Delta x)}{2} - \dots \\
&\dots - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(G(t, x)) - F(G(t, x - \Delta x))] + O(\Delta t^2, \Delta x^2).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

O conjunto de equações (3.13) definem o primeiro passo. O segundo passo parte da expansão de Taylor de $G(t + \Delta t, x)$ em torno de (t, x) e da substituição da derivada temporal pela espacial, tal que

$$\begin{aligned}
G(t + \Delta t, x) &= G(t, x) - \dots \\
&\dots - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(G(t + \Delta t/2, x + \Delta x/2)) - F(G(t - \Delta t/2, x - \Delta x/2))] + \dots \\
&\dots + O(\Delta t^2, \Delta x^2).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Reescrevendo as equações (3.13) e (3.14) com a notação própria do MDF, tem-se o sistema

$$\begin{aligned}
G_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{G_{i+1}^n + G_i^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(G_{i+1}^n) - F(G_i^n)] \\
G_{i-1/2}^{n-1/2} &= \frac{G_i^n + G_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(G_i^n) - F(G_{i-1}^n)] \\
G_i^{n+1} &= G_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(G_{i+1/2}^{n+1/2}) - F(G_{i-1/2}^{n-1/2})].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Nota-se que o esquema em dois passos evita o cálculo do Jacobiano de \mathbf{A} , pois permite trabalhar diretamente com a função $F(G(t, x))$, a qual já inclui a matriz \mathbf{A} em sua formulação.

O esquema de MacCormack utiliza a mesma abordagem do esquema de Lax-Wendroff, a diferença está no fato de que o primeiro passo do MacCormack é equivalente ao segundo do Lax-Wendroff e o segundo passo do MacCormack é o primeiro do Lax-Wendroff, resultando em

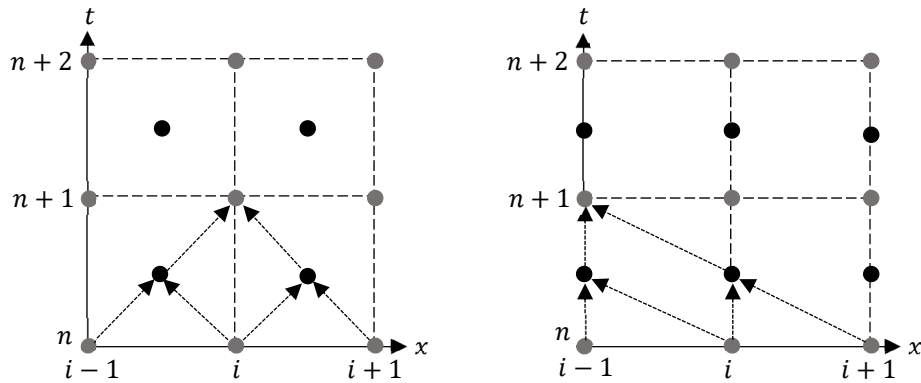
$$\begin{aligned} G_i^{n+1/2} &= G_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(G_{i+1}^n) - F(G_i^n)] \\ G_i^{n+1} &= \frac{G_i^n + G_i^{n+1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(G_i^{n+1/2}) - F(G_{i-1}^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou, alternativamente

$$\begin{aligned} G_i^{n-1/2} &= G_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(G_i^n) - F(G_{i-1}^n)] \\ G_i^{n+1} &= \frac{G_i^n + G_i^{n-1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(G_{i+1}^{n-1/2}) - F(G_i^{n-1/2})] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Os dois esquemas podem ser visualizados no diagrama da Figura 3.2, no qual tem-se a malha numérica dada a discretização equidistante espacial e temporal.

Figura 3.2 À esquerda, tem-se o diagrama esquemático do Lax-Wendroff e à direita, o esquema do MacCormack.



Fonte: Própria autoria.

Os dois esquemas são mais estáveis que os esquemas centrados progressivos de Euler, pois ao se reorganizar a equação, por exemplo, tem-se

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} = -A \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} + \frac{A^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 G(t, x)}{\partial x^2}, \quad (3.18)$$

onde o segundo componente do lado direito da equação pode ser considerado um termo difusivo. Isso significa que o método numérico consegue conservar a transformação da energia cinética em energia térmica, fechando o sistema de conservação de Euler e reduzindo a difusão numérica.

Apesar disso, o método ainda sofre com a difusão numérica. A fim de reduzir esses efeitos numéricos, o termo difusivo é alterado para incluir uma viscosidade artificial, $\bar{\mu}_{ab}$, e é rearranjado para a função $F(G(t, x))$, de modo que

$$\tilde{F}(G(t, x)) = F(G(t, x)) - \bar{\mu}_{ab} \Delta x^2 \frac{\partial G(t, x)}{\partial x}, \quad (3.19)$$

e o sistema de equações de Euler pode ser reescrito como

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(G(t, x))}{\partial x} = 0, \quad (3.20)$$

onde $0 \leq \bar{\mu}_{ab} \leq 10$ (HÖFNER, 2014).

A convergência dos esquemas de Lax-Wendroff e MacCormack é garantida pela condição (COURANT, et al., 1928)

$$\Delta t = C_{cfl} \frac{\Delta x}{|U| + c}, \quad C_{cfl} < 1, \quad (3.21)$$

onde C_{cfl} é o número de Courant-Friedrich-Levy, c é a celeridade do som.

3.1.2 EULER PROGRESSIVO TEMPORAL CENTRO ESPACIAL

Para problemas bidimensionais no espaço com evolução temporal, pode-se aplicar o esquema de discretização centralizada no espaço e progressiva no tempo. Um exemplo disso é equação diferencial parcial da transferência de calor por condução em materiais sólidos dada pela equação (2.63). Considerando um domínio $\Omega \subset [0, N] \times [0, M] \times [0, t]$, onde N é o número total de nós no eixo-x, M é o número total de nós no eixo-y e t é o número total de nós no eixo-t, então a discretização da equação é

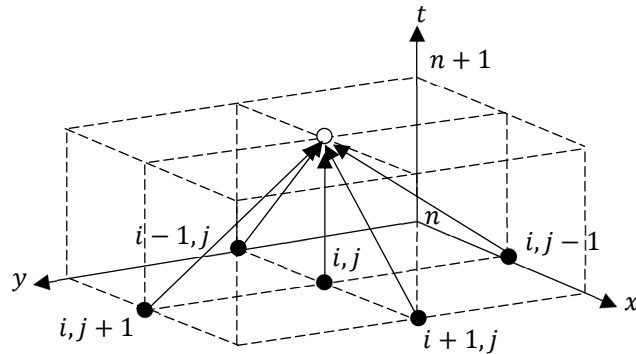
$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} &= T_{i,j}^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n] + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} [T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Esse esquema apresenta convergência se a seguinte condição de Courant-Friedrich-Lewy for verificada

$$\Delta t = \frac{C_{cfl}}{\alpha} \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad C_{cfl} < 1, \quad (3.23)$$

onde o $C_{cfl} = 1/2$ é o valor adotado para este caso. Além disso, o diagrama esquemático do método pode ser observado na Figura 3.3.

Figura 3.3 Diagrama esquemático do Euler progressivo temporal centro espacial.



Fonte: Própria autoria.

3.2 MÉTODO SMOOTHED PARTICLES HYDRODYNAMICS

O método numérico *Smoothed Particles Hydrodynamics* (SPH) foi um método desenvolvido (MONAGHAN & GINGOLD, 1977; LUCY, 1977), inicialmente, para a resolução de problemas astrofísicos e posteriormente foi estendido para problemas da mecânica dos sólidos e fluidos. A proposta do método é utilizar princípios estatísticos para recuperar expressões analíticas de variáveis físicas de uma distribuição conhecida de um determinado domínio.

Formalmente, o SPH pode ser definido como um método sem malha, Lagrangiano e de partícula. Os princípios de interpolação utilizados nele consideram as partículas em um determinado domínio e utiliza a influência, segundo uma distribuição, das partículas em uma determinada vizinhança para atribuir valores a uma partícula de referência. Isso cria uma suavização na interação dessas partículas ao longo de comprimento definido, além de tornar desnecessário uma malha para conectar as partículas no processo de computação, trabalhando bem, mesmo sem refinamento na operação de qualquer partícula, o que caracteriza o método. Essa característica permite com que o método possua maior adaptabilidade aos domínios e condições de contorno complexos, do que os métodos tradicionais que dependem de uma malha numérica.

Outro aspecto que pode ser destacado do SPH é o resultado atingindo da combinação entre a formulação Lagrangiana e a aproximação por partículas. Ao contrário dos outros

métodos sem malha, que apenas interpolam nós, o SPH permite a inclusão de propriedades materiais às partículas, sendo que essas propriedades podem ser alteradas por meio das interações internas e as forças externas aplicadas ao processo (LIU & LIU, 2003).

3.2.1 FUNDAMENTOS DO MÉTODO SPH

3.2.1.1 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO

Dado um domínio de interesse, ele pode ser representado por um conjunto de partículas que carregam consigo as propriedades materiais do domínio e que evoluem de acordo com as leis de conservação de quantidade de movimento, energia e massa. Nesse sentido, seja f um campo variável qualquer contínuo e definido sobre o domínio Ω , tal que a identidade se verifica

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) d\mathbf{x}_b, \quad (3.24)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de posição e $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$ é a função delta de Dirac definida como

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_b \\ 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_b \end{cases}. \quad (3.25)$$

Agora, suponha que a função delta de Dirac possa ser substituída por uma função de suavização $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$, tal que as seguintes propriedades possam ser identificadas

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b = 1, \quad (3.26)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b), \quad (3.27)$$

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = 0, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_b| > \kappa h, \quad (3.28)$$

onde κ é uma constante relacionada à função de suavização para um ponto em \mathbf{x} e define a região de efetividade da função de suavização. A primeira condição, (3.26), é conhecida como condição de normalização ou condição unitária, uma vez que a integração da função de suavização resulta na unidade. A segunda condição é a propriedade da função de Delta, obtida com a aproximação do comprimento de suavização, h , a zero. Por fim, a terceira condição é a condição do suporte compacto. Esta condição garante que a integração sobre todo o domínio pode ser localizada sobre o domínio de suporte, de modo que o domínio de integração pode ser o próprio domínio de suporte.

Logo, uma vez atendidas as propriedades supracitadas, a equação (3.24) pode ser reformulada como

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b)W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)d\mathbf{x}_b, \quad (3.29)$$

No entanto, a equação (3.29) deve ser considerada uma aproximação, pois a função de suavização não é a função delta de Dirac, apesar das propriedades (3.26), (3.27) e (3.28) moldarem a função de suavização o mais próximo possível da função de delta de Dirac. Portanto, para manter o rigor, a equação (3.29) é reescrita, usando a notação $\langle \rangle$ (MONAGHAN & GINGOLD, 1983), como

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b)W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)d\mathbf{x}_b, \quad (3.30)$$

Essa aproximação possui erro de ordem $O(h^2)$ (MONAGHAN, 1982; MONAGHAN, 1992; HERNQUIST & KATZ, 1989; FULK, 1994). Para verificar, basta aplicar a expansão em série de Taylor da função $f(\mathbf{x}_b)$ em torno de \mathbf{x} , onde $f(\mathbf{x})$ é diferenciável. Logo, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}) \rangle &= f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)d\mathbf{x}_b + \\ &+ \frac{d}{d\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)d\mathbf{x}_b + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando a propriedade (3.26) na equação (3.31) e, notando que a função de suavização é uma função par em relação à \mathbf{x} , então $(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ é uma função ímpar, o que resulta em

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) + O(h^2) \quad (3.32)$$

Portanto, a aproximação pela representação integral ou aproximação pela função de suavização possui precisão da ordem de $O(h^2)$. Mas essa afirmação só pode ser feita se a função de suavização for par e a condição de normalização for atendida, caso contrário, o erro pode assumir outra forma.

A representação integral se mostra capaz de atender a aproximação de um campo variável. Contudo, como o método é usado para solucionar equações diferenciais parciais, é natural esperar que as derivadas espaciais também o sejam. Para isso, aplica-se a representação ao divergente do campo, resultando em

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(\mathbf{x}_b)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b. \quad (3.33)$$

O divergente $[\nabla \cdot f(\mathbf{x}_b)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ possui a seguinte identidade

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot f(\mathbf{x}_b)] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) &= \nabla \cdot [f(\mathbf{x}_b) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)] - \dots \\ &\dots - f(\mathbf{x}_b) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h), \end{aligned} \quad (3.34)$$

de modo que, substituindo na equação (3.33), obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(\mathbf{x}_b) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)] d\mathbf{x}_b - \dots \\ &\dots - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Aplicando o teorema do divergente na primeira integral do lado direito da equação (3.35) sobre a superfície $\partial\Omega$ do domínio de integração Ω , obtém-se

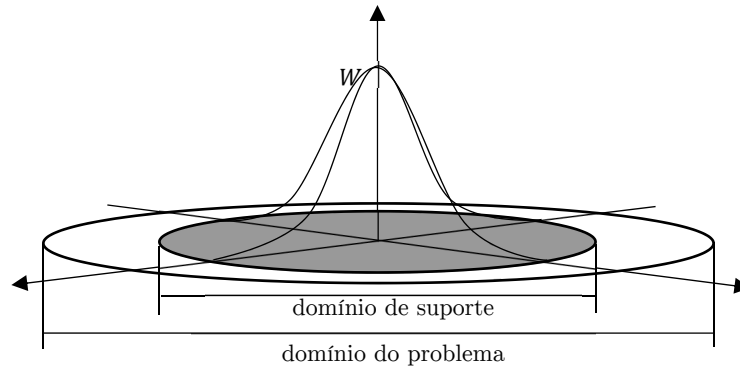
$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}_b) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) \cdot \mathbf{n} dS - \dots \\ &\dots - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal da superfície $\partial\Omega$.

A integral de superfície possui algumas características em relação as condições de fronteira e a função de suavização, que devem ser consideradas. Visto que $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ é definida com um suporte compacto, pode-se afirmar que enquanto o domínio de suporte está localizado no domínio do problema, a integral de superfície é nula, como pode ser observado na Figura 3.4. Entretanto, quando o domínio de suporte ultrapassa o domínio do problema, $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ é truncado pela fronteira e a integral de superfície deixa de ser nula. Assim, a influência do bordo deve ser considerada, se a integral de superfície for considerada nula. De qualquer forma, para o domínio de suporte localizado no domínio do problema, tem-se que

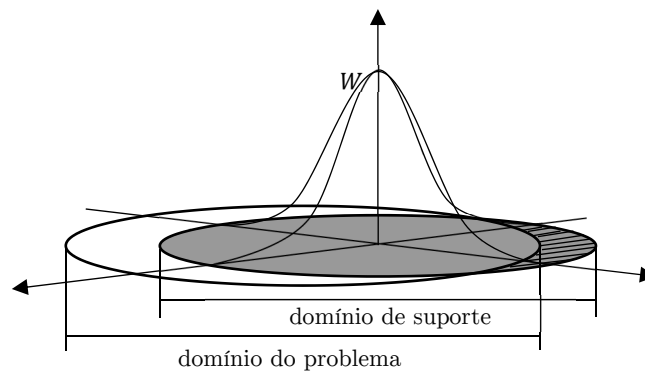
$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b) \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b, \quad (3.37)$$

Figura 3.4 Representação do domínio de suporte localizado, inteiramente, no domínio do problema, de modo que a integral de superfície sobre Ω é nula.



Fonte: Próprio autoria.

Figura 3.5 Representação do domínio de suporte ultrapassando o domínio do problema, área hachurada, de modo que a integral de superfície sobre Ω não pode ser considerada nula.



Fonte: Próprio autoria.

3.2.1.2 APROXIMAÇÃO POR PARTÍCULAS

A essência do método SPH está na discretização do domínio do problema em partículas que carregam propriedades físicas e ocupam um volume definido. Dada essa discretização, a representação integral é aproximada por somatórios sobre todas as partículas localizadas no domínio de suporte. Isso pode ser feito ao se considerar a representação integral como uma integral de Riemann. A representação da discretização pode ser observada na Figura 3.6.

Considere o volume infinitesimal $d\mathbf{x}_b$ de uma partícula b , com $b \in [1, N]$ e $N \in \mathbb{N}$, sendo o número total de partículas no domínio de suporte, que são as partículas vizinhas. Substituindo esse volume por um volume finito ΔV_b , então

$$d\mathbf{x}_b \approx \Delta V_b = \frac{m_b}{\rho_b}, \quad (3.38)$$

onde ρ_b é a massa específica da partícula b e m_b é a massa. Dessa forma, a representação integral pode ser reescrita como

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} f(\mathbf{x}_b) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h), \quad (3.39)$$

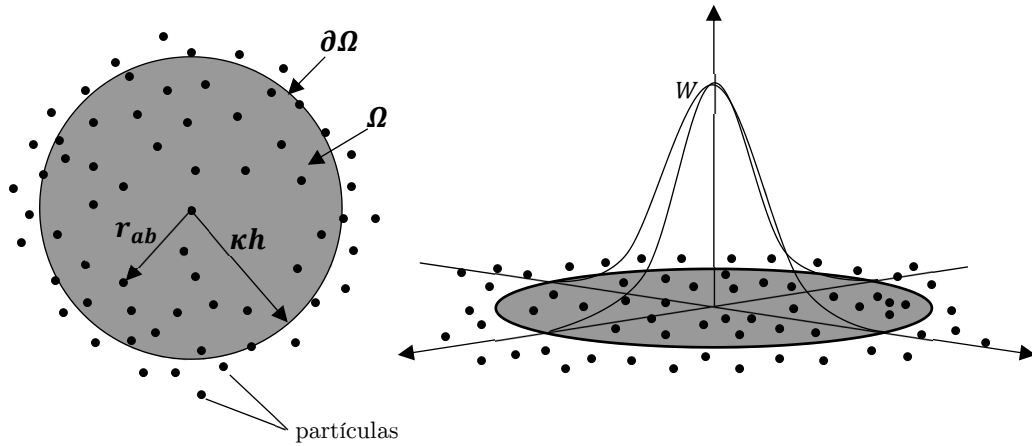
sendo que a aproximação para a função sobre uma partícula a pode ser escrita como

$$\langle f(\mathbf{x}_a) \rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} f(\mathbf{x}_b) W_{ab}, \quad (3.40)$$

onde

$$W_{ab} = W(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, h). \quad (3.41)$$

Figura 3.6 Representação da aproximação por partículas do domínio do problema, considerando as partículas do domínio de suporte. O domínio de suporte é circular com raio κh e a partícula a ao centro.



Fonte: Próprio autoria.

De forma análoga, a aproximação do gradiente do campo via partículas para uma partícula a , assume a representação

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}_a) \rangle = - \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} f(\mathbf{x}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (3.42)$$

onde

$$\nabla_a W_{ab} = \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} \frac{\partial W_{ab}}{\partial |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} = \frac{\mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}} \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}}. \quad (3.43)$$

Observado as equações (3.40) e (3.42), nota-se que a representação integral de uma função contínua é aproximada por somatórios discretizados sobre um conjunto de partículas

vizinhas. Isso permite a independência do método SPH em relação a uma malha numérica do domínio Ω .

3.2.2 A FUNÇÃO NÚCLEO DE SUAVIZAÇÃO

A função de suavização ou função núcleo de suavização ou simplesmente núcleo é uma função analítica e contínua sobre um domínio com suporte compacto. O papel do núcleo é o de interpolar os valores das propriedades das partículas presentes nesse domínio, segundo uma distribuição.

Para isso, a função de suavização deve possuir as propriedades (3.26), (3.27) e (3.28), mas algumas outras também devem estar presentes, como

- Positividade: $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) \geq 0$ para qualquer ponto \mathbf{x}_b no domínio de suporte de uma partícula no ponto \mathbf{x} ;
- Decaimento: $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ deve ser monótona decrescente no sentido de afastamento da partícula;
- Simetria: a função de suavização deve ser par;
- Suavidade: a função de suavização deve ser suficientemente suave.

A propriedade da normalização garante que uma consistência de ordem zero para a representação integral do campo variável. O suporte compacto transforma uma operação global em uma operação local. A propriedade função Delta é o que permite a aproximação $\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x})$, à medida que o comprimento de suavização tende a zero.

Quanto a propriedade da positividade da função de suavização dentro do domínio de suporte, sua importância não está relacionada à convergência do método, mas ao significado físico dos resultados obtidos pelo método SPH. Pois, se o núcleo possuir algumas partes negativas, isso pode resultar em valores de massa específica negativos, o que fisicamente não faz sentido.

O decaimento está relacionado a uma característica de distribuição Gaussiana da função de suavização, pois ela garante que a maior contribuição das partículas vizinhas mais próximas à partícula considerada. Nesse sentido, a simetria contribui com essa característica, pois ela

garante que as partículas vizinhas com a mesma distância em relação a partícula alvo possuem o mesmo peso de influência, independente da direção delas.

A condição de suavidade é uma das mais importantes, uma vez que ela está relacionada à sensibilidade da função de suavização em relação ao grau de desordem das partículas. Essa sensibilidade é menor quanto mais suave é o núcleo e os erros de aproximação são menores para desordem menos significativa (MONAGHAN, 1992; FULK, 1994).

Qualquer função pode ser usada como função de suavização, desde que as propriedades supracitadas sejam atendidas. Por isso, várias funções foram criadas com o propósito de serem funções de suavização.

Uma das primeiras funções de suavização utilizada foi a *bell-shaped* (LUCY, 1977)

$$W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_b|, h) = W(s, h) = \alpha_h \begin{cases} (1 + 3s)(1 - s)^3, & s \leq 1 \\ 0, & s > 1 \end{cases} \quad (3.44)$$

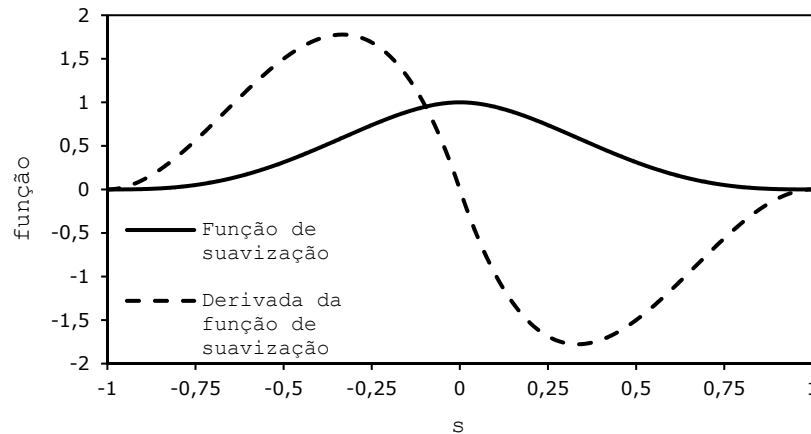
onde α_h é $5/4h$, $5/\pi h^2$ e $105/16\pi h^3$ em uma, duas e três dimensões, respectivamente. Essa constante multiplicativa garante a propriedade de normalização nas três dimensões, a qual é obtida por meio da integração do núcleo sobre o domínio de suporte. Além disso, $s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_b|/h$ é a distância relativa entre duas partículas. Na Figura 3.7, pode-se observar o comportamento desta função, bem como de sua derivada.

Outra função de suavização apresentada logo nos primórdios do método SPH é a função Gaussiana (MONAGHAN & GINGOLD, 1977)

$$W(s, h) = \alpha_h e^{-s^2}, \quad (3.45)$$

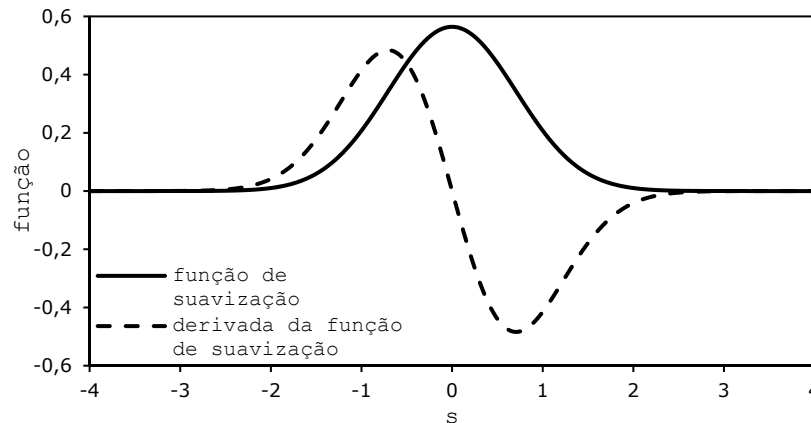
onde α_h é $1/\pi^{1/2}h$, $1/\pi h^2$ e $1/\pi^{3/2}h^3$ em uma, duas e três dimensões, respectivamente. Essa é uma função que conserva a suavidade, mesmo para derivadas de maiores ordens, o que confere alta estabilidade e precisão. No entanto, ela não possui suporte compacto, pois apesar de, numericamente, se aproximar rapidamente de zero, a função Gaussiana não zera de fato. Isso significa que mesmo com um pequeno peso, todas as partículas do domínio do problema exercem influência umas sobre as outras, o que aumenta o custo computacional. A Gaussiana pode ser observada na Figura 3.8.

Figura 3.7 Função de suavização utilizada por Lucy (1977) e a sua primeira derivada.



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.8 Função Gaussiana de suavização e sua primeira derivada.



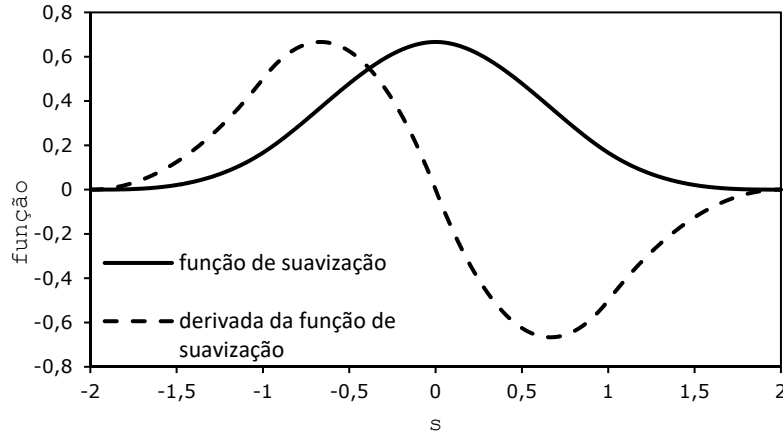
Fonte: Própria autoria.

Como a função Gaussiana de suavização é a que possui a melhor estabilidade, os outros tipos de funções de suavização procuram se aproximar dela. A cúbica *spline*, do tipo *B-spline*, (MONAGHAN & LATTANZIO, 1985) é dessas funções que surgiu com comportamento semelhante ao da Gaussiana, mas possuindo um suporte compacto,

$$W(s, h) = \alpha_h \begin{cases} \frac{2}{3} - s^2 + \frac{1}{2}s^3, & 0 \leq s < 1, \\ \frac{1}{6}(2 - s)^3, & 1 \leq s < 2, \\ 0, & s \geq 2, \end{cases} \quad (3.46)$$

onde α_h é $1/h$, $15/7\pi h^2$ e $3/2\pi h^3$ em uma, duas e três dimensões, respectivamente. A função é contínua por partes, o que reduz a estabilidade comparada com a Gaussiana, além da derivada segunda ser linear por partes. O comportamento da função cúbica pode ser observado na Figura 3.9.

Figura 3.9 Função cúbica *spline* de suavização e sua primeira derivada.



Fonte: Própria autoria.

Existem ainda outros tipos de função de suavização (JOHNSON, et al., 1996; MORRIS, 1994; MORRIS, 1996) de ordem maior que se aproximam mais do núcleo Gaussiano e, portanto, apresentam maior estabilidade. Uma delas é a *quartic* apresentada por Liu (2003), que consiste em

$$W(s, h) = \alpha_h \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{8}s^2 + \frac{19}{24}s^3 - \frac{5}{32}s^4, & s \leq 2, \\ 0, & s > 2 \end{cases}, \quad (3.47)$$

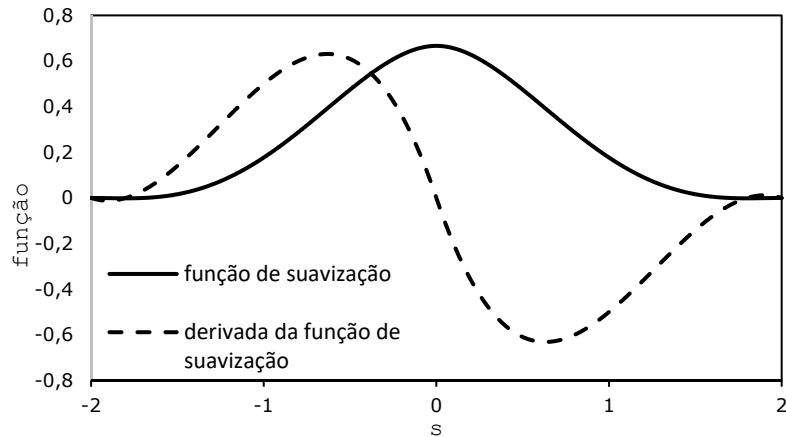
onde α_h é $1/h$, $15/7\pi h^2$ e $315/208\pi h^3$ em uma, duas e três dimensões, respectivamente. Monaghan (1983) ainda apresenta uma forma alternativa da função de suavização Gaussiana, a qual possui um suporte compacto de $3h$ e erros de interpolação da ordem de $O(h^4)$. Essa forma é conhecida como super Gaussiana e possui a formulação

$$W(s, h) = \alpha_h e^{-s^2} \left(\frac{3}{2} - s^2 \right), \quad (3.48)$$

onde α_h para problemas unidimensionais é $1/h\sqrt{\pi}$. O comportamento das funções de suavização quartic e super Gaussiana podem ser observadas nas Figura 3.10 e Figura 3.11.

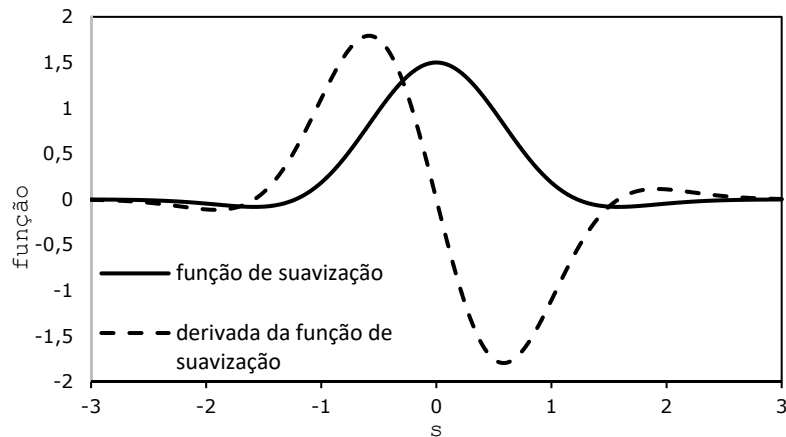
Independente da formulação é preciso determinar as partículas vizinhas, uma vez que o núcleo depende da distância relativa entre as partículas. O esforço computacional para esse processo pode ser reduzido ao se aproveitar do suporte compacto característico das funções de suavização. Dois algoritmos de procura podem ser usados para estabelecer a vizinhança: *all-pair* e *linked-list*.

Figura 3.10 Função *quartic* de suavização e sua primeira derivada.



Fonte: Própria autoria.

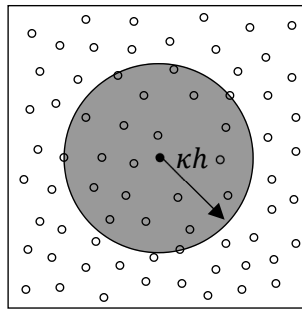
Figura 3.11 Função super Gaussiana de suavização e sua primeira derivada.



Fonte: Própria autoria.

A Figura 3.12 ilustra o princípio de funcionamento do algoritmo de procura *all-pair*. Nele, para uma dada partícula a é calculada a distância r_{ab} , da partícula a até cada uma das partículas b do domínio do problema, com $b \in [1, N]$, com N sendo o número total de partículas. Se r_{ab} for menor que κh , então a partícula b pertence ao domínio de suporte e compõe a vizinhança da partícula a . Por simetria, a partícula a também é vizinha da partícula b . Esse processo é implementado para todas as partículas N , gerando uma complexidade da ordem de $O(N^2)$, uma vez que para um número grande de partículas, envolvendo fenômenos com deslocamento delas, o custo computacional pode ser significativo, pois o processo é repetido a cada laço de tempo. Portanto, esse algoritmo é indicado para problemas de pequena escala.

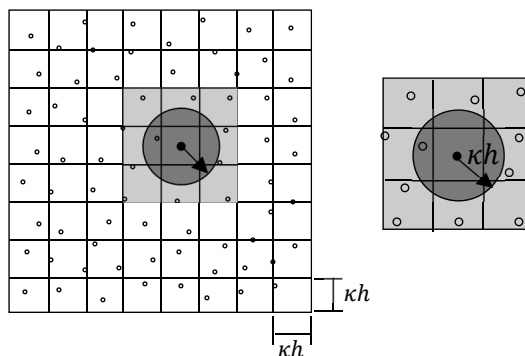
Figura 3.12 Algoritmo de busca *all-pair* em domínio bidimensional, no qual a vizinhança de uma partícula é estabelecida segundo a distância r_{ab} em relação à κh .



Fonte: Própria autoria.

O algoritmo *linked-list* funciona bem para domínios cujas partículas apresentam comprimento de suavização constante. Sua implementação (MONAGHAN, 1985; SIMPSON, 1995) consiste na construção de uma malha numérica temporária sobre o domínio do problema, sendo que o espaçamento dela deve coincidir com o comprimento de suavização. Assim, as partículas vizinhas de uma partícula a são necessariamente as partículas da mesma célula ou das células imediatamente adjuntas. Conseqüentemente, a busca é reduzida para apenas 3, 9 ou 27 células para os casos uni-, bi- e tridimensionais, respectivamente, como pode ser observado na Figura 3.13. Esse fato diminui o esforço computacional no estabelecimento da vizinhança (MONAGHAN & GINGOLD, 1983), refletindo em uma complexidade da ordem de $O(N)$, se o número de partículas por célula for pequeno.

Figura 3.13 À esquerda a malha numérica temporária sobre o domínio de um problema bidimensional. À direita o detalhe da região de busca do método *linked-list*.



Fonte: Própria autoria.

3.2.3 COMPRIMENTO DE SUAVIZAÇÃO

O comprimento de suavização é um dos elementos de maior importância no método SPH, pois está diretamente relacionado com o esforço computacional e a precisão do método. Se κh for muito pequeno, o número de partículas no domínio de suporte pode não ser suficiente para a interação adequada dos elementos das leis de balanço, prejudicando a precisão. Por outro lado, se κh for muito grande, as propriedades locais podem ser suavizadas excessivamente, prejudicando, também, a precisão do método.

Tomando-se $\kappa = 2$ e $h = 1,2\Delta x$, o número de partículas que compõe a vizinhança, incluindo a partícula em si, deve ser de 5, 21 e 57 para problemas uni-, bi- e tridimensionais respectivamente (MORRIS, 1996).

Para os casos em que o comprimento de suavização varia, recomenda-se a aproximação dada pela relação com a massa específica

$$h_a = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} \right)^{1/d}, \quad (3.49)$$

onde h_0 é o comprimento de suavização inicial, ρ_0 é a massa específica inicial e d é o valor do número de dimensões do problema. Outro método é o que considera a variação temporal do comprimento de suavização em função do balanço de massa (BENZ, 1989),

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h}{d} \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.50)$$

3.2.4 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

O balanço da quantidade de movimento segundo a formulação lagrangeana é dado por

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla : \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.51)$$

onde \mathbf{u} é o campo de velocidade e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensão. Aplicando a aproximação por partículas, equação (3.42), obtém-se

$$\left\langle \frac{1}{\rho_a} \nabla : \boldsymbol{\sigma}_a \right\rangle = \frac{1}{\rho_a} \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \boldsymbol{\sigma}_b : \nabla_a W_{ab}. \quad (3.52)$$

Contudo, a expressão (3.52) não conserva exatamente a quantidade de movimento linear e angular. Sendo assim, considera-se a seguinte expressão do núcleo do SPH e a aproximação por partícula do gradiente de uma função constante é nulo, portanto:

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \cdot \nabla_a W_{ab} = 0, \quad (3.53)$$

de modo que se pode escrever a seguinte identidade

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \frac{\boldsymbol{\sigma}_a}{\rho_a} : \nabla_a W_{ab} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_a}{\rho_a} : \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab}. \quad (3.54)$$

Somando as expressões (3.52) e (3.54), resulta em

$$\left\langle \frac{1}{\rho_a} \nabla : \boldsymbol{\sigma}_a \right\rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_a \rho_b} (\boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_b) : \nabla_a W_{ab}, \quad (3.55)$$

o que é equivalente a dizer que (MONAGHAN, 1982; MONAGHAN, 1985; MONAGHAN, 1985)

$$\left\langle \frac{D\mathbf{u}_a}{Dt} \right\rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_a \rho_b} (\boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_b) : \nabla_a W_{ab}. \quad (3.56)$$

Outra forma de aprimorar a conservação da quantidade de movimento é considerando a seguinte identidade

$$\frac{1}{\rho} \nabla : \boldsymbol{\sigma} = \nabla : \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right) + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho^2} \nabla \rho, \quad (3.57)$$

a qual pode ser reescrita, usando a aproximação por partículas, como

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \nabla : \boldsymbol{\sigma} \right\rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \frac{\boldsymbol{\sigma}_b}{\rho_b} : \nabla_a W_{ab} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_a}{\rho_a^2} : \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \rho_b \nabla_a W_{ab}. \quad (3.58)$$

Rearranjando a expressão (3.58) e substituindo na equação do balanço de quantidade de movimento, obtém-se

$$\left\langle \frac{D\mathbf{u}_a}{Dt} \right\rangle = \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_a}{\rho_a^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_b}{\rho_b^2} \right) : \nabla_a W_{ab}. \quad (3.59)$$

O tensor de tensão pode ser expandido em uma componente com as tensões normais, composta pela pressão, e uma componente com as tensões cisalhantes. Isso permite que as equações (3.56) e (3.59) sejam reescritas como

$$\left\langle \frac{D\mathbf{u}_a}{Dt} \right\rangle = - \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_a \rho_b} (p_a + p_b) \mathbf{I} : \nabla_a W_{ab} + \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_a \rho_b} (\boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_b) : \nabla_a W_{ab} \quad (3.60)$$

e

$$\left\langle \frac{D\mathbf{u}_a}{Dt} \right\rangle = - \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \mathbf{I} : \nabla_a W_{ab} + \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_a}{\rho_a^2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_b}{\rho_b^2} \right) : \nabla_a W_{ab}, \quad (3.61)$$

onde a componente $p\mathbf{I}$ é a componente de tensão normal e $\boldsymbol{\tau}$ é a componente de tensão cisalhante, para o caso de um escoamento simétrico, homogêneo, isotrópico e compressível. Para esse tipo de escoamento, o elemento $\boldsymbol{\tau}$ é definido como (JEFFREYS, 1969; CHORIN & MARSDEN, 1992; BATCHELOR, 2002)

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (3.62)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade, μ é a viscosidade dinâmica e \mathbf{D} é a taxa de deformação, definida como

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

onde u , v e w são as componentes do campo de velocidade $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Usando a notação de Einstein e aplicando a aproximação por partículas, a equação (3.62) pode ser reformulada como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_a^{\alpha\beta} = & \sum_{b=1}^N \mu_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_b^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\alpha} + \sum_{b=1}^N \mu_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_b^\alpha \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta} - \dots \\ & \dots - \left(\frac{2}{3} \sum_{b=1}^N \mu_b \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_b \cdot \nabla_a W_{ab} \right) \delta^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde os sobrescritos gregos α e β indicam as coordenadas e $\delta^{\alpha\beta}$ é a função delta de Kronecker, tendo o valor unitário para $\alpha = \beta$ e nulo para $\alpha \neq \beta$.

A equação (3.64) não apresenta conservação adequada dos momentos de linear e angular, portanto, utilizam-se as expressões

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mu_a \mathbf{u}_a^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\alpha} = \mu_a \mathbf{u}_a^\beta \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\alpha} = 0, \quad (3.65)$$

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mu_a \mathbf{u}_a^\alpha \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta} = \mu_a \mathbf{u}_a^\alpha \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta} = 0, \quad (3.66)$$

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mu_a \mathbf{u}_a \cdot \nabla_a W_{ab} = \mu_a \mathbf{u}_a \cdot \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} = \mathbf{0}, \quad (3.67)$$

as quais subtraídas da equação (3.64) resulta na equação

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_a^{\alpha\beta} = & \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mu_b \mathbf{u}_b^\beta - \mu_a \mathbf{u}_a^\beta) \frac{\partial W_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a^\alpha} + \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mu_b \mathbf{u}_b^\alpha - \mu_a \mathbf{u}_a^\alpha) \frac{\partial W_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a^\beta} - \dots \\ & \dots - \left(\frac{2}{3} \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (\mu_b \mathbf{u}_b - \mu_a \mathbf{u}_a) \cdot \nabla_a W_{ab} \right) \delta^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Com isto, tem-se uma aproximação mais geral balanço da quantidade de movimento para fluidos compressíveis.

3.2.5 DESLOCAMENTO DE PARTÍCULAS

O deslocamento das partículas é definido pela equação diferencial

$$\left\langle \frac{D\mathbf{x}_a}{Dt} \right\rangle = \mathbf{u}_a. \quad (3.69)$$

Apesar de bem definida, a equação (3.69) possui instabilidade numérica (VASCO, 2014), a qual pode ser corrigida adicionando-se a expressão

$$\Delta \mathbf{u}_a = \varepsilon_d \sum_{b=1}^N m_b \frac{\mathbf{u}_{ab}}{\bar{\rho}_{ab}} W_{ab}, \quad (3.70)$$

onde $\mathbf{u}_{ab} = \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b$, $\bar{\rho}_{ab} = (\rho_a + \rho_b)/2$ e ε é uma constante que varia de 0 a 1. O resultado é a equação

$$\left\langle \frac{D\mathbf{x}_a}{Dt} \right\rangle = \mathbf{u}_a + \varepsilon_d \sum_{b=1}^N m_b \frac{\mathbf{u}_{ab}}{\bar{\rho}_{ab}} W_{ab}. \quad (3.71)$$

A equação (3.71) confere maior ordenação às partículas, prevenindo a penetração em casos de escoamentos de alta velocidade (MONAGHAN, et al., 2003).

3.2.6 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A distribuição de partículas e a evolução do comprimento de suavização são elementos do método SPH que, de modo geral, são determinados pela massa específica, o que a torna fundamental ao processo. Além disso, matematicamente, a conservação da massa é garantida pelo número fixo de partículas que discretizam o domínio do problema. Contudo, aspectos como a massa específica constante ou o gradiente nulo do campo de velocidade não podem ser

assegurados para fenômenos envolvendo fluidos como a água. Isso se deve ao fato de que o escoamento é considerado fracamente compressível (VASCO, 2014).

Visto isto, duas expressões, usando a aproximação por partículas, podem ser formuladas. A primeira advém da aplicação direta da aproximação, resultando em

$$\langle \rho_a \rangle = \sum_{b=1}^N m_b W_{ab}. \quad (3.72)$$

Ela é conhecida como somatório da densidade e possui a vantagem de conseguir conservar a massa do sistema. Contudo, a medida que as partículas do domínio do problema se aproximam do bordo livre do domínio ou de superfícies em que elas interagem com partículas de outros materiais, a massa específica sofre rápido decaimento, sofrendo suavização excessiva e causando resultados espúrios (LIU & LIU, 2003; VASCO, 2014). Com a expressão (3.72) não se consegue garantir a nulidade da divergência do campo velocidades.

A segunda formulação apresenta maior estabilidade próximo à superfície livre ou superfícies de outros materiais e conserva $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, sendo expressa com base na equação do balanço de massa

$$\left\langle \frac{D\rho_a}{Dt} \right\rangle = -\rho_a \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_b \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (3.73)$$

A forma numericamente mais consistente da equação (3.73) é obtida por meio da identidade

$$\rho_a \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_a \cdot \nabla_a W_{ab} = \rho_a \mathbf{u}_a \cdot \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} = 0, \quad (3.74)$$

a qual adicionada à equação (3.73) resulta em

$$\left\langle \frac{D\rho_a}{Dt} \right\rangle = \rho_a \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (3.75)$$

A segunda formulação segundo a equação (3.75) considera a velocidade relativa entre os pares de partículas do domínio de suporte, o que garante comportamento antissimétrico, eliminando problemas de inconsistência das partículas (LIU & LIU, 2003). A equação (3.75) pode ser reescrita na sua forma mais popular ao se utilizar a identidade

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \rho], \quad (3.76)$$

o que aplicado à a aproximação da equação da continuidade, implica em

$$\left\langle \frac{D\rho_a}{Dt} \right\rangle = \sum_{b=1}^N m_b \mathbf{u}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (3.77)$$

Apesar das vantagens da equação (3.75) e (3.77), elas são indicadas para modelagem numérica de fenômenos com descontinuidade no domínio como ondas de choque, enquanto que a equação (3.72) é mais usada para os outros tipos de fenômenos (LIU & LIU, 2003), mas com a seguinte forma corrigida por uma normalização

$$\langle \rho_a \rangle = \frac{\sum_{b=1}^N m_b W_{ab}}{\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} W_{ab}}, \quad (3.78)$$

o que corrige os problemas relacionados à superfície livre e a interação com a superfície de outros materiais.

3.2.7 EQUAÇÃO DA ENERGIA

A equação do balanço de energia aplicada a um escoamento adiabático, simétrico, homogêneo, isotrópico e compressível, segundo uma perspectiva Lagrangeana, é

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}), \quad (3.79)$$

onde e é a energia específica total. Reescrevendo a equação (3.79), usando notação de Einstein, obtém-se

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2\rho\mu} \boldsymbol{\tau}^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}^{\alpha\beta}, \quad (3.80)$$

a qual deve ser reformulada a luz da aproximação por partículas. Para isso, existem duas abordagens aplicáveis ao primeiro termo do lado direito da equação (3.80). A primeira delas parte da identidade

$$-\frac{p}{\rho} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = \frac{p}{\rho^2} \left(-\rho \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} \right) = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (3.81)$$

a qual permite aproximar proporcionalmente o trabalho da pressão à equação de continuidade.

Logo, utilização a equação (3.77) na equação (3.81), obtém-se

$$\left\langle -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_a^\beta}{\partial x_a^\beta} \right\rangle = \frac{p_a}{\rho_a^2} \sum_{b=1}^N m_b \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta}. \quad (3.82)$$

Outra identidade que pode ser utilizada para aproximar o trabalho da pressão é

$$-\frac{p \partial \mathbf{u}^\beta}{\rho \partial x^\beta} = -\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p \mathbf{u}^\beta}{\rho} \right) + \mathbf{u}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (3.83)$$

o que implica em

$$\left\langle -\frac{p \partial \mathbf{u}_a^\beta}{\rho \partial x_a^\beta} \right\rangle = \sum_{b=1}^N m_b \frac{p_b}{\rho_b^2} \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta}, \quad (3.84)$$

de modo que, somando as equações (3.82) e (3.84), tem-se

$$\left\langle -\frac{p \partial \mathbf{u}_a^\beta}{\rho \partial x_a^\beta} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta}. \quad (3.85)$$

A segunda abordagem é aplicar a equação (3.75) no lugar do balanço de massa da equação (3.81), o que implica que

$$\left\langle -\frac{p \partial \mathbf{u}_a^\beta}{\rho \partial x_a^\beta} \right\rangle = \frac{p_a}{\rho_a} \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta}. \quad (3.86)$$

Para o trabalho da pressão existe uma terceira identidade, formulada como

$$-\frac{p \partial \mathbf{u}^\beta}{\rho \partial x^\beta} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} (p \mathbf{u}^\beta) - \mathbf{u}^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right], \quad (3.87)$$

a qual, aproximada por partículas assume a expressão

$$\left\langle -\frac{p \partial \mathbf{u}_a^\beta}{\rho \partial x_a^\beta} \right\rangle = \frac{1}{\rho_a} \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} p_b \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta}, \quad (3.88)$$

de forma que, adicionado (3.86) e (3.88), obtém-se

$$\left\langle -\frac{p \partial \mathbf{u}_a^\beta}{\rho \partial x_a^\beta} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N m_b \frac{(p_a + p_b)}{\rho_a \rho_b} \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta}. \quad (3.89)$$

Visto as duas abordagens, a equação da energia total específica de um fluido pode ser aproximada por

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta} + \frac{1}{2\rho_a \mu_a} \boldsymbol{\tau}_a^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_a^{\alpha\beta} \quad (3.90)$$

ou

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N m_b \frac{(p_a + p_b)}{\rho_a \rho_b} \mathbf{u}_{ab}^\beta \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a^\beta} + \frac{1}{2\rho_a \mu_a} \boldsymbol{\tau}_a^{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_a^{\alpha\beta}. \quad (3.91)$$

3.2.8 EQUAÇÃO DA ENERGIA PARA CONDUÇÃO

A equação da energia para o caso transferência de calor por condução em um material sólido e homogêneo é expressa como

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho c_p} \nabla(k \cdot \nabla T) \quad (3.92)$$

onde c_p é o calor específico a pressão constante, k é a condutividade térmica e T é a temperatura do material. Essa equação introduz o Laplaciano ou a derivada de segunda ordem e para construir a aproximação de partícula desse operador é preciso retornar à representação integral. Sendo assim, considerando novamente a representação integral de uma função $f(\mathbf{x})$ suficientemente suave em um domínio Ω

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b. \quad (3.93)$$

A expansão em série de Taylor da função $f(\mathbf{x}_b)$ em torno de \mathbf{x} pode ser descrita como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_b) &= f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x})^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^k + O\left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Substituindo a equação (3.94) na equação (3.93), obtém-se

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\mathbf{x})}{k!} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b + \dots \\ &\quad \dots + O\left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right), \end{aligned} \quad (3.95)$$

a qual pode ser rearranjada como

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{k=0}^n A_k f^{(k)}(\mathbf{x}) + O\left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right), \quad (3.96)$$

onde

$$A_k = \frac{(-1)^k h^k}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b. \quad (3.97)$$

O termo A_k é uma variável que auxilia na aplicação das propriedades de normalização e simetria da função de suavização, as quais são importantes para a aproximação por partículas e garantem consistência de primeira ordem (LIU & LIU, 2003). Isso pode ser observado como

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b = 1, \\
A_1 &= -h \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b = 0, \\
A_k &= \frac{h^2}{2!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b = 0, \\
&\vdots \\
A_k &= \frac{(-1)^n h^n}{n!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^n W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b = 0.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Agora, aplica-se a aproximação integral da derivada de segunda ordem da função $f(\mathbf{x})$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_b)}{\partial \mathbf{x}^2} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b, \tag{3.99}$$

sobre a qual é aplicada a integração por partes

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right\rangle &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{x}_b)}{\partial \mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) \cdot \mathbf{n} dS - \dots \\
&\dots - \int_{\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{x}_b)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}_b.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.100) pode receber a integração por partes também, o que resulta em

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right\rangle &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{x}_b)}{\partial \mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) \cdot \mathbf{n} dS - \dots \\
&\dots - \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}_b) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}_b) \frac{\partial^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}_b,
\end{aligned} \tag{3.101}$$

na qual é substituída equação (3.97) no terceiro termo do lado direito, obtendo-se

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right\rangle &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{x}_b)}{\partial \mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) \cdot \mathbf{n} dS - \dots \\
&\dots - \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}_b) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} dS + \sum_{k=0}^n \frac{\partial^2 A_k}{\partial \mathbf{x}^2} f^{(k)}(\mathbf{x}) + O\left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h}\right),
\end{aligned} \tag{3.102}$$

onde

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{(-1)^k h^k}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^k \frac{\partial^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}_b. \quad (3.103)$$

Os valores das constantes $\nabla_a^2 A_k$ podem ser avaliadas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_0}{\partial \mathbf{x}^2} &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}_b = 0, \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial \mathbf{x}^2} &= -h \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right) \frac{\partial^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}_b = 0, \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial \mathbf{x}^2} &= \frac{h^2}{2!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}_b = 1, \\ &\vdots \\ \frac{\partial^2 A_k}{\partial \mathbf{x}^2} &= \frac{(-1)^n h^n}{n!} \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h} \right)^n \frac{\partial^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}_b = 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Visto isto, é importante ressaltar as condições no bordo do domínio, as quais são

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \nabla_a W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (3.105)$$

o que implica

$$\left\langle \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right\rangle = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} + o\left(\frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}}{h}\right). \quad (3.106)$$

Isso mostra que a derivada de segunda ordem pode ser aproximada pela representação integral, com um erro da ordem de $O((\mathbf{x}_b - \mathbf{x})/h)$, uma vez que, o suporte compacto seja garantido tanto para a função de suavização quanto para a derivada de primeira ordem dela.

A partir disso, basta aplicar a aproximação por partículas, assumindo que sejam integrais de Riemann sobre o domínio compacto. Portanto, seja

$$\left\langle \nabla_a (k_a \nabla T_a) \right\rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (k_b \nabla T_b) \nabla_a W_{ab}. \quad (3.107)$$

Essa é uma possível aproximação por partícula do Laplaciano sobre a temperatura.

Usando a identidade

$$\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (k_a \nabla T_a) \nabla_a W_{ab} = (k_a \nabla T_a) \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} = 0 \quad (3.108)$$

e somando com a equação (3.107), obtém-se

$$\langle \nabla_a(k_a \nabla T_a) \rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (k_a \nabla T_a + k_b \nabla T_b) \nabla_a W_{ab}. \quad (3.109)$$

Agora, considere a expansão em série de Taylor de temperatura das partículas

$$\begin{aligned} T_a &= T_b + \nabla T_b (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) + O((\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)^2), \\ T_b &= T_a + \nabla T_a (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) + O((\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)^2), \end{aligned} \quad (3.110)$$

o que permite aproximar o gradiente de temperatura por uma diferença finita, tal que

$$\langle \nabla_a(k_a \nabla T_a) \rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (k_a + k_b) (T_a - T_b) \frac{\nabla_a W_{ab}}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|}, \quad (3.111)$$

onde o termo $\nabla_a W_{ab}/|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|$ é responsável pela aproximação do operador Laplaciano, uma vez que

$$\frac{\nabla_a W_{ab}}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} = \frac{1}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} \frac{\partial W_{ab}}{\partial |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} = \frac{\mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}^2} \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}} = F_{ab}. \quad (3.112)$$

O uso de $|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|$ ao invés de $\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$, confere maior consistência à aproximação por partículas do operador Laplaciano. Além disso, pode-se adicionar uma constante a F_{ab} de modo que

$$F_{ab} = \frac{\mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}^2 + \eta^2} \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}}. \quad (3.113)$$

onde $\eta = 0,01h$ e age prevenindo singularidades, quando a posição de duas partículas, com temperaturas distintas, coincide (CLEARY & MONAGHAN, 1999).

Com o desenvolvimento supracitado, a equação da energia para o caso da transferência de calor por condução em um material sólido e homogêneo pode ser aproximada por

$$\langle \frac{DT_a}{Dt} \rangle = \frac{1}{\rho_a c_{pa}} \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} (k_a + k_b) (T_a - T_b) F_{ab}, \quad (3.114)$$

No caso em que o material é anisotrópico, ou seja, possui regiões de descontinuidade das propriedades físicas, a equação (3.114) apresentará inconsistência. Para resolver esse problema, observa-se cada região separadamente e soluciona-se o balanço de energia, assumindo que o fluxo de calor seja contínuo entre a interface das regiões. Essa análise permite obter um coeficiente de condução térmica, o qual proporciona uma equação mais consistente (CLEARY & MONAGHAN, 1999),

$$\frac{4k_a k_b}{k_a + k_b}, \quad (3.115)$$

logo, a equação (3.114) pode ser reescrita como

$$\left\langle \frac{DT_a}{Dt} \right\rangle = \frac{1}{\rho_a c_{pa}} \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \left(\frac{4k_a k_b}{k_a + k_b} \right) (T_a - T_b) F_{ab}, \quad (3.116)$$

de modo que (3.116) preserva os mesmos resultados da (3.114), no caso de um material isotrópico.

3.2.9 CORREÇÕES APLICADAS AO MÉTODO SPH

A aproximação por partículas pode apresentar inconsistências de ordem zero e primeira ordem em regiões próximas as fronteiras ou em distribuições não uniformes de partículas. Os problemas relativos às fronteiras advêm da baixa densidade de partículas próximas ou nas fronteiras, levando a gradientes de pressão espúrios. Já a distribuição não uniforme pode proporcionar um número insuficiente de partículas no domínio de suporte, aumentando o erro da aproximação por partículas (LIU & LIU, 2003). Isso significa que a função de suavização pode não atender as propriedades de normalização e de delta de Dirac.

Uma das técnicas que pode ser utilizada para solucionar esses problemas é a renormalização da função de suavização e do gradiente (BONET & LOK, 1999). No caso da função de suavização, a técnica parte do conceito da propriedade de normalização, assim, supõe-se que

$$\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = AW(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h), \quad (3.117)$$

onde $\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ é a função de suavização renormalizada e A é uma constante. Como $\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ também é uma função núcleo, pode-se verificar a propriedade de normalização, de modo que

$$\int_{\Omega} \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b = \left(\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b \right) A = \mathbf{1}, \quad (3.118)$$

o que implica

$$A = \left(\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b \right)^{-1}. \quad (3.119)$$

Logo, a função de suavização renormalizada pode ser reescrita como

$$\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = \frac{W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b}, \quad (3.120)$$

sobre a qual, aplica-se a aproximação por partículas, resultando em

$$\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = \frac{W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)}{\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} W_{ab}}. \quad (3.121)$$

Nota-se que o denominador da equação (3.121), a priori deveria ser igual a unidade, devido à propriedade de normalização. Contudo, a renormalização parte do princípio que a função de suavização pode não possuir essa propriedade para algum domínio de suporte e, portanto, o denominador da equação (3.121) pode não ser unitário. No caso em que é unitário, o núcleo renormalizado é igual ao núcleo não renormalizado, garantindo a coesão teórica.

O mesmo conceito pode ser aplicado ao gradiente da função de suavização, sendo assim, considera-se que

$$\tilde{\nabla}W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = \mathbf{B}\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h), \quad (3.122)$$

onde $\tilde{\nabla}W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h)$ é o gradiente renormalizado do núcleo e \mathbf{B} é uma matriz quadrada. Verificando a propriedade de normalização, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}) \otimes \nabla \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b = \dots \\ & \dots = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}) \otimes \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b \right) \mathbf{B} = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (3.123)$$

implicando que

$$\mathbf{B} = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}) \otimes \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) d\mathbf{x}_b \right)^{-1}. \quad (3.124)$$

Aplicando a aproximação por partículas à equação (3.124), obtém-se

$$\mathbf{B} = \left(\sum_{b=1}^N \mathbf{x}_{ba} \otimes \nabla_a W_{ab} \right)^{-1}, \quad (3.125)$$

onde $\mathbf{x}_{ba} = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a$. Contudo, ainda é possível combinar as duas correções (3.117) e (3.122).

Para isso, aplica-se o gradiente sobre a função de suavização renormalizada, tal que

$$\nabla \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = \frac{\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) - Q}{\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} W_{ab}}, \quad (3.126)$$

onde

$$Q = \frac{\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab}}{\sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} W_{ab}}. \quad (3.127)$$

Posto isto, aplica-se o conceito de renormalização, sendo

$$\tilde{V}\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h) = C\nabla\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b, h), \quad (3.128)$$

o que, de forma análoga à (3.125), resulta em

$$\mathbf{C} = \left(\sum_{b=1}^N \mathbf{x}_{ba} \otimes \nabla_a \tilde{W}_{ab} \right)^{-1}. \quad (3.129)$$

3.2.10 LEIS DE ESTADO PARA PRESSÃO

A determinação de uma lei de estado de pressão adequada é fundamental para o método SPH, uma vez o sistema de equações do SPH deve ser fechado por essa lei. No caso da dinâmica dos gases, a pressão é uma função da temperatura, $p = p(T)$. Esta também pode ser associada, por meio do balanço de energia, com a massa específica, a energia interna e a velocidade tal que

$$p = (\gamma - 1)\rho \left(e - \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.130)$$

onde γ é a razão entre os coeficientes de calor específico, é a mais indicada como lei de estado. Partindo da formulação (3.130) e admitindo que o gás utilizado seja ideal, então a relação direta para a celeridade do som é

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (3.131)$$

O detalhe a ser observado é a escolha adequada da aproximação da massa específica e da velocidade do SPH, para serem utilizados na lei de estado. Isso é discutido na análise de resultados da aplicação do método SPH no fenômeno do tubo de choque.

3.2.11 VISCOSIDADE ARTIFICIAL

Em escoamentos de fluidos, desenvolvem-se oscilações nos resultados numéricos relacionados a uma difusão numérica. Isso ocorre, em problemas como o de ondas de choque, porque a simulação tem que transformar energia cinética em energia térmica. Essa transformação pode ser compreendida como uma perda viscosa. Desse modo, é introduzido aos métodos numéricos uma viscosidade artificial, a qual no método SPH (MONAGHAN & GINGOLD, 1983;

MONAGHAN & POINRACIC, 1985; MONAGHAN, 1987) é utilizada como uma pressão viscosa, dada por

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{\acute{\epsilon}\bar{\mu}_{ab}^2 - \acute{\alpha}\bar{c}_{ab}\bar{\mu}_{ab}}{\bar{\rho}_{ab}}, & \mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{x}_{ab} < 0 \\ 0, & \mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{x}_{ab} \geq 0 \end{cases} \quad (3.132)$$

onde

$$\bar{\mu}_{ab} = \frac{h_{ab}\mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}^2 + 0,01h^2} \quad (3.133)$$

$h_{ab} = (h_a + h_b)/2$, $\bar{c}_{ab} = (c_a + c_b)/2$ e $\bar{\rho}_{ab} = (\rho_a + \rho_b)/2$. Essa característica de pressão viscosa se deve ao fato de que, especificamente no método SPH, ela não só introduz à simulação a transformação necessária de energia, como também evita a penetração não física causada pela proximidade das partículas (MONAGHAN, 1989). Além disso, a viscosidade artificial é utilizada na aproximação do balanço de quantidade de movimento como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\mathbf{u}_a}{Dt} \right\rangle = & - \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \mathbf{I} : \nabla_a W_{ab} + \dots \\ & \dots + \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_a}{\rho_a^2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_b}{\rho_b^2} \right) : \nabla_a W_{ab}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

As constantes $\acute{\alpha}$ e $\acute{\epsilon}$ possuem valores próximos de 1,0. A constante $\acute{\alpha}$ está associada ao segundo coeficiente de viscosidade ou *bulk viscosity*, enquanto $\acute{\epsilon}$ possui a função de evitar a interpenetração em escoamentos que apresentam altos valores de Mach (LIU & LIU, 2003).

3.2.12 CONDIÇÃO DE CONTORNO

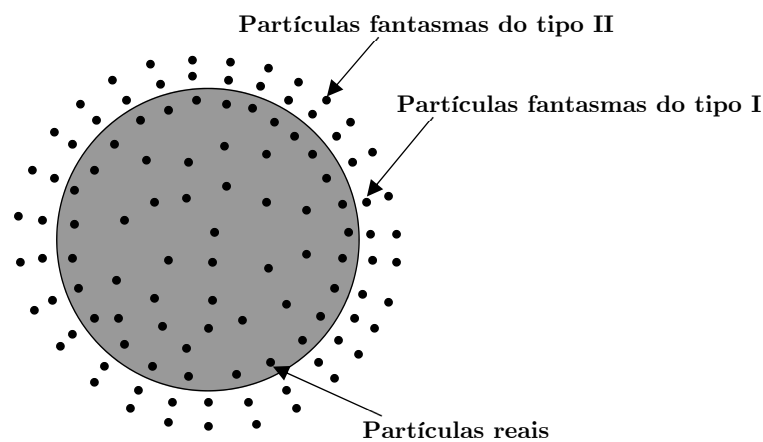
As condições de contorno podem ser tratadas no método SPH utilizando-se partículas fantasmas ou virtuais. Monaghan (1994) propôs utilizar esse tipo de partícula em posições adjacentes à fronteira do domínio, de modo que elas pudessem produzir forças repulsivas sobre as partículas reais próximas à fronteira, prevenindo a penetração não física.

As partículas fantasmas podem ser classificadas em dois tipos (LIU & LIU, 2003): tipo I e tipo II. As partículas fantasmas de tipo II são posicionadas simetricamente as partículas reais adjacentes as fronteiras e possuem as mesmas propriedades físicas, com exceção da velocidade, que possui sentido contrário. Contudo, essas partículas não são suficientes para prevenir a penetração das partículas reais para fora do domínio, portanto são necessárias as partículas do

tipo I, as quais produzem forças repulsivas suficiente para manter as partículas reais dentro do domínio.

As partículas do tipo I são utilizadas pela função de suavização e na aproximação por partículas das partículas reais. Entretanto, são desconsideradas no processo de simulação para a determinação da posição e das variáveis físicas. A Figura 3.14 mostra o esquema da construção de um domínio discretização com a adição das partículas fantasmas ou virtuais.

Figura 3.14 Esquema do posicionamento das partículas fantasmas segundo o tipo delas.



Fonte: Própria autoria.

No presente trabalho, as partículas utilizadas foram as do tipo I, mas sem a imposição de forças repulsivas. A função delas foi a de simular as condições de contorno como temperaturas fixas e diferente das temperaturas das partículas reais. Portanto, garante-se uma fonte térmica para o divergente de temperatura, mantendo-se o fluxo de calor durante todo o processo, até que seja atingido regime permanente.

3.2.13 EVOLUÇÃO TEMPORAL

O sistema de equações obtido pelo método SPH aplicado às leis de conservação consiste em um conjunto de equações diferenciais ordinárias relativas ao tempo.

O método SPH soluciona numericamente apenas a evolução espacial das leis de conservação. Portanto, é preciso aplicar algum método de integração temporal para solucionar o sistema resultante. Como o método SPH possui erros de ordem $O(h^2)$, sessão 3.2.1.1, para

manter a consistência geral da aproximação numérica, opta-se por métodos de integração que possuem erros de mesma ordem (VASCO, 2014).

Existem várias opções de métodos de integração temporal com erros de ordem $O(t^2)$, logo, o critério utilizado na escolha é a característica conservativa em relação as propriedades das leis de conservação, como a quantidade de movimento, por exemplo (VASCO, 2014). Nesse sentido, foi adotado o método de Runge-Kutta de segunda ordem, também conhecido como método de Euler aprimorado.

O método consiste em tomar a forma generalizada de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{df(t)}{dt} = g(t, f(t)), \quad (3.135)$$

com $f(t)$ e $g(t, f(t))$ sendo funções contínuas e diferenciáveis em um domínio Ω . Posto isto, expande-se em série de Taylor a função $f(t + \Delta t)$ em torno de t , tal que

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{df(t)}{dt} \Delta t + \frac{d^2f(t)}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3). \quad (3.136)$$

Derivando a equação (3.135) em relação à t , tem-se que

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{dg(t, f(t))}{dt} + g(t, f(t)) \frac{dg(t, f(t))}{df}. \quad (3.137)$$

a qual substituída na equação (3.136), bem como a equação (3.135), resulta em

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= f(t) + g(t, f(t))\Delta t + \dots \\ \dots + \left[g(t, f(t)) + \Delta t \frac{dg(t, f(t))}{dt} + \Delta t g(t, f(t)) \frac{dg(t, f(t))}{df} \right] \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Nota-se que o termo em chaves da equação (3.138) é equivalente à expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t, f + \Delta t g(t, f(t))) &= g(t, f(t)) + \Delta t \frac{dg(t, f(t))}{dt} + \dots \\ \dots + \Delta t g(t, f(t)) \frac{dg(t, f(t))}{df} + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (3.139)$$

portanto, a equação (3.138) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= f(t) + g(t, f(t)) \frac{\Delta t}{2} + \dots \\ \dots + \frac{\Delta t}{2} g(t + \Delta t, f + \Delta t g(t, f(t))) + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (3.140)$$

ou ainda

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right), \quad (3.141)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= g(t^n, f^n), \\ k_2 &= g\left(t^n + \Delta t, f^n + \Delta t k_1\right). \end{aligned} \quad (3.142)$$

A forma mais generalizada e implícita das equações (3.141) e (3.142) é obtida ao aplicar se aplicar a *Runge-Kutta* ou *Butcher tableaux* (BUTCHER, 1964), o que resulta em

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= f^n + \Delta t k_2, \\ k_1 &= g(t^n, f^n), \\ k_2 &= g\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, f^n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right). \end{aligned} \quad (3.143)$$

Outra forma de expressar a generalização das equações (3.141) e (3.142) é por meio de (VASCO, 2014)

$$\begin{aligned} f^{n+1/2} &= f^n + \frac{\Delta t}{2} g(t^n, f^n), \\ f^{n+1} &= f^n + \frac{\Delta t}{2} f^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.144)$$

4 RESULTADOS E ANÁLISE

Nesta seção são apresentados os resultados da aplicação dos métodos numéricos SPH e MDF em casos testes. O primeiro caso apresentado é o tubo de choque modelado por Hernquist (1989), introduzido por Monaghan (1983) a partir de Sod (1978). Apesar de ser unidimensional, o problema abordado possui uma natureza descontínua das propriedades do domínio, o que exigiu a utilização de várias técnicas do método SPH. Portanto, tal estudo de caso funciona como fundamentação inicial e possibilitou ajuste do método SPH, uma vez que o tubo de choque de Sod é um problema clássico. O segundo problema é o de transferência de calor por condução em uma placa plana retangular. Os resultados de ambos os casos foram submetidos a análises de erros para observar a precisão em relação aos resultados analíticos, bem como comparar a eficiência entre os métodos numéricos. Além disso, alguns outros parâmetros são observados com mais detalhes para verificar a influência dos mesmos.

4.1 TUBO DE CHOQUE

O tubo de choque modelado neste trabalho apresenta as condições iniciais (LIU & LIU, 2003; SOD, 1978)

$$\begin{aligned} \rho_L &= 1 \frac{kg}{m^3}, & p_L &= 1 kPa, & u_L &= 0 \frac{m}{s}, & e_L &= 2.5 \frac{kJ}{kg}, \\ \Delta x_L &= 0.001875 m \\ \rho_R &= 0.25 \frac{kg}{m^3}, & p_R &= 0.1795 kPa, & u_R &= 0 \frac{m}{s}, & e_R &= 1.795 \frac{kJ}{kg}, \\ \Delta x_R &= 0.0075 m \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde ρ é a massa específica, p é a pressão, u é a velocidade, e é a energia interna específica e Δx é o espaçamento entre as partículas. O subíndice L indica a região à esquerda da membrana no tubo, sendo $x \leq 0$ tal que $x \in [-0.6, 0]$, enquanto o subíndice R indica a região da direita, sendo $x > 0$ tal que $x \in]0, 0.6]$. Além disso, admite-se que o gás dentro do tubo é ar e que ele é um gás ideal, logo, $\gamma = 1.4$.

No caso do método SPH são utilizadas 400 partículas na simulação, todas com a mesma massa $m = 0.001875 kg$. No lado esquerdo, são distribuídas 320 partículas, igualmente espaçadas, e da mesma forma são distribuídas as 80 partículas restantes no outro lado. São

utilizados dois critérios para obtenção do passo temporal, o primeiro é constante e igual a $\Delta t = 0.0005$ s, enquanto o segundo é dado por

$$\Delta t = \min\left(C_t, C_{cfl} \frac{h}{|c|}\right) \quad (4.2)$$

onde C_t é um passo de tempo arbitrário, C_{cfl} o número de Courant-Friedrichs-Lewy, c é a celeridade do som e h é o comprimento de suavização. Este último é definido como $h_L = 5\Delta x_L$ e $h_R = 2\Delta x_R$, o que não é usual, mas devido a descontinuidade do domínio e ao algoritmo de determinação da vizinhança, foi o natural a ser feito para garantir o maior número de partículas no menor domínio compacto possível. Foi adotado $C_{cfl} = 0.3$ e o tempo de real observado foi de $t = 0.2$ s.

Outro detalhe acrescentado à esse problema especificamente, foi o uso de uma velocidade suavizada das partículas, definida como

$$\mathbf{u}_s = \langle \mathbf{u}_a \rangle = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \mathbf{u}_b \tilde{W}_{ab}, \quad (4.3)$$

a qual é acrescentada à velocidade original das partículas como

$$\tilde{\mathbf{u}}_a = \acute{u} \mathbf{u}_s + (1 - \acute{u}) \mathbf{u}_a, \quad (4.4)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}_a$ é a velocidade da partícula a corrigida e \acute{u} é uma constante tal que $\acute{u} \in [0,1]$. Como essa não é uma técnica usual observada na literatura, alguns gráficos são gerados para avaliar o impacto dessa correção nos resultados. Além dessa correção foi utilizada a renormalização e a viscosidade artificial, cujos coeficientes $\acute{\alpha}$ e $\acute{\epsilon}$ variaram nos intervalos $[0,2]$ e $[1; 2]$, respectivamente. 6.5960

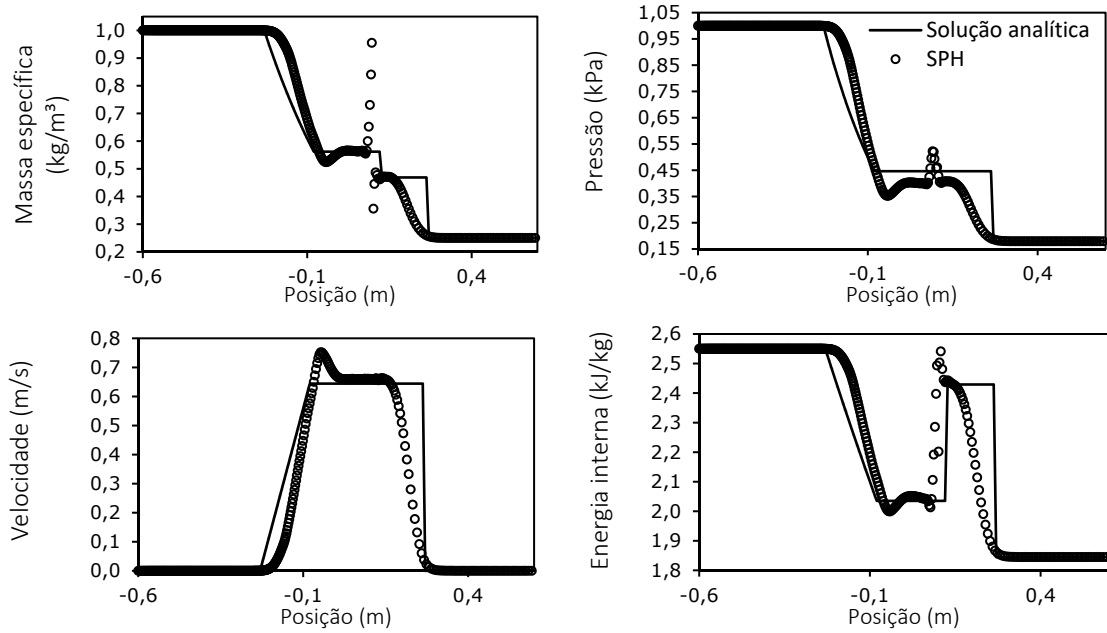
Nas simulações numéricas foram utilizados dois tipos de núcleo: o *quartic* e o super gaussiano. Observando a Figura 4.1 e a Figura 4.2, é possível notar que o núcleo *quartic* apresenta maior suavização, principalmente nas regiões de descontinuidade, o que resulta em gráficos visualmente mais próximos. Contudo, ao analisar o erro médio em relação à solução analítica,

$$erro_m = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|f(x_i) - \langle f(x_i) \rangle|}{f(x_i)}, \quad (4.5)$$

onde N é o número total de partículas, obteve-se para o núcleo *quartic* erros de 4.4799%, 6.3961%, 13.1086% e 2.3994% para massa específica, pressão, velocidade e energia interna, respectivamente. Já para o núcleo super gaussiano obteve-se 4.3489%, 6.4669%, 13.7677% e

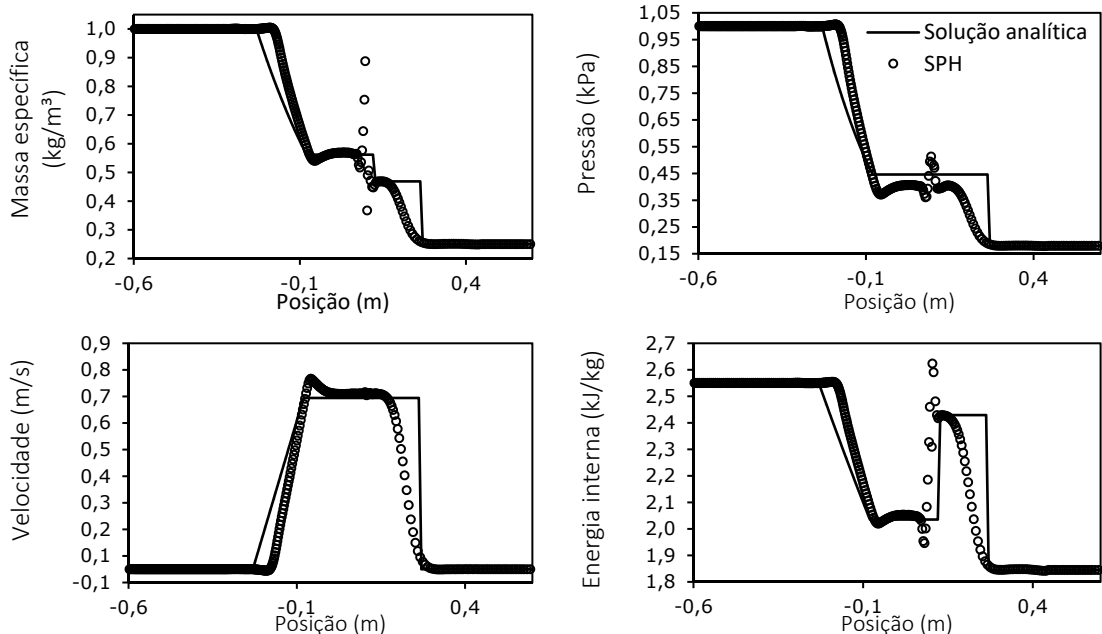
2.4001%. Isso revela que o núcleo *quartic* apresenta 2.2057% a mais de precisão, em média, que o núcleo super gaussiano e que os dois núcleos apresentam o maior erro em relação a velocidade. Além disso, a simulação com o núcleo *quartic* é pelo menos 1.7255 vezes mais rápida.

Figura 4.1 Perfis de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica para $t = 0.2$ s, com $\epsilon = 0$, $\alpha = 2$, $\dot{u} = 0$ e com a função *quartic* como núcleo.



Fonte: Própria autoria.

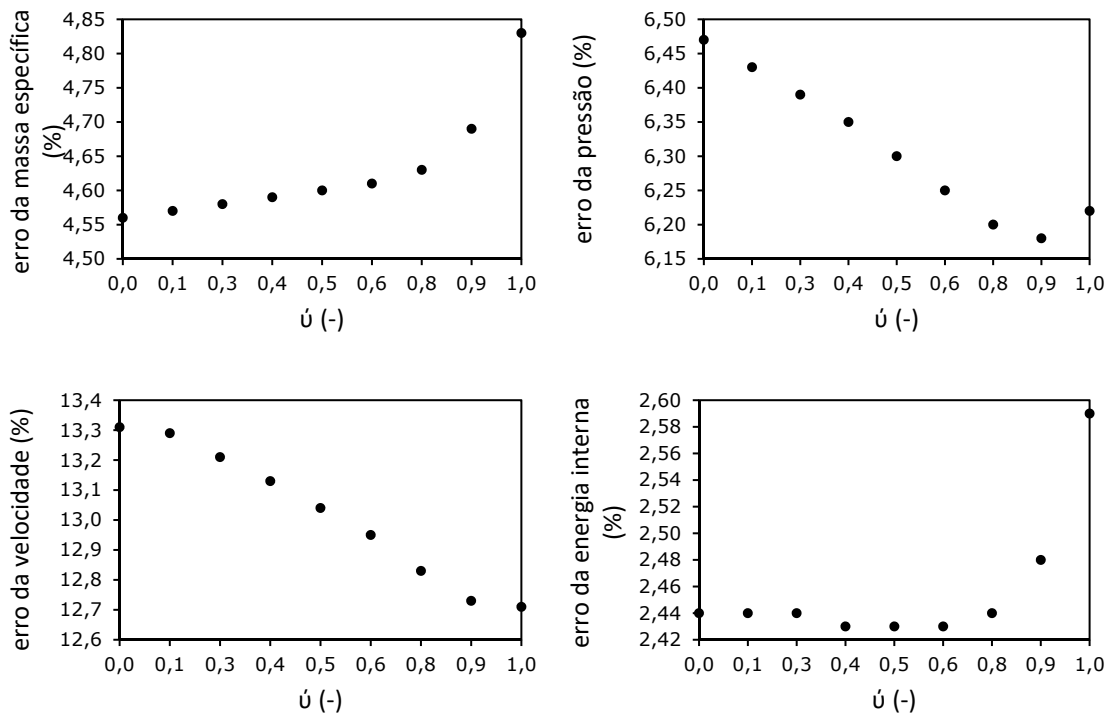
Figura 4.2 Perfis de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica para $t = 0.2$ s, com $\epsilon = 0$, $\alpha = 2$, $\dot{u} = 0$ e com a função super gaussiana como núcleo.



Fonte: Própria autoria.

O impacto da velocidade suavizada na solução, utilizando a função de suavização *quartic*, mantendo $\epsilon = 0$ e $\alpha = 2$ e utilizando o erro médio como referência, pode ser observado na Figura 4.3. A partir dela, nota-se que a velocidade suavizada possui efeito positivo à medida que seu valor aumenta sobre a velocidade e a pressão das partículas. Contudo, o efeito se torna negativo para valores entre 0.875 e 1.0 e é negativo para qualquer valor no caso da massa específica. No caso da energia interna, o erro é reduzido até $\hat{u} = 0.625$, após o qual sofre um aumento exponencial. Esse valor pode ser usado como um valor ótimo, pois tanto a velocidade quanto a pressão sofrem redução do erro e a massa específica não mostra aumento expressivo do erro.

Figura 4.3 Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função da velocidade suavizada, com $t = 0.2$ s, $\epsilon = 0$, $\alpha = 2$ e núcleo *quartic*.

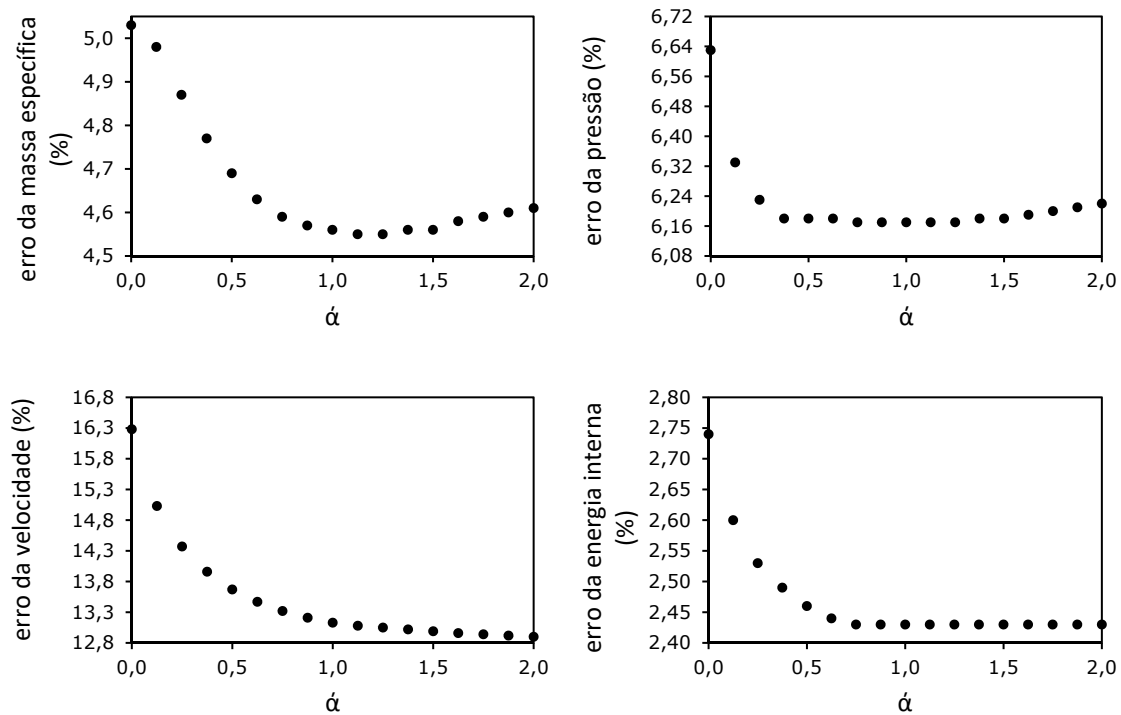


Fonte: Própria autoria.

O coeficiente α da viscosidade artificial também pode ter sua influência avaliada. Para isso, considera-se $\epsilon = 0$, $\hat{u} = 0.625$ e o núcleo *quartic* e o erro médio relativo à solução analítica. Pela Figura 4.4, nota-se que o aumento do coeficiente α possui um efeito exponencial na redução do erro médio em todas as propriedades, o que é refletido como amortecimento dos erros

dissipativos ao custo do aumento dos erros difusivos, causando a suavização das curvas de massa específica, pressão, velocidade e energia interna. O valor $\alpha = 1$ se mostra como um limiar entre os erros dissipativos e difusivos, pois o erro médio geral se estabiliza nesse ponto, mas a cima desse valor, os erros dissipativos aumentam e as curvas suavizam excessivamente. Isso justifica a razão da escolha desse valor por autores como Monaghan (1983) e Liu & Liu (2003).

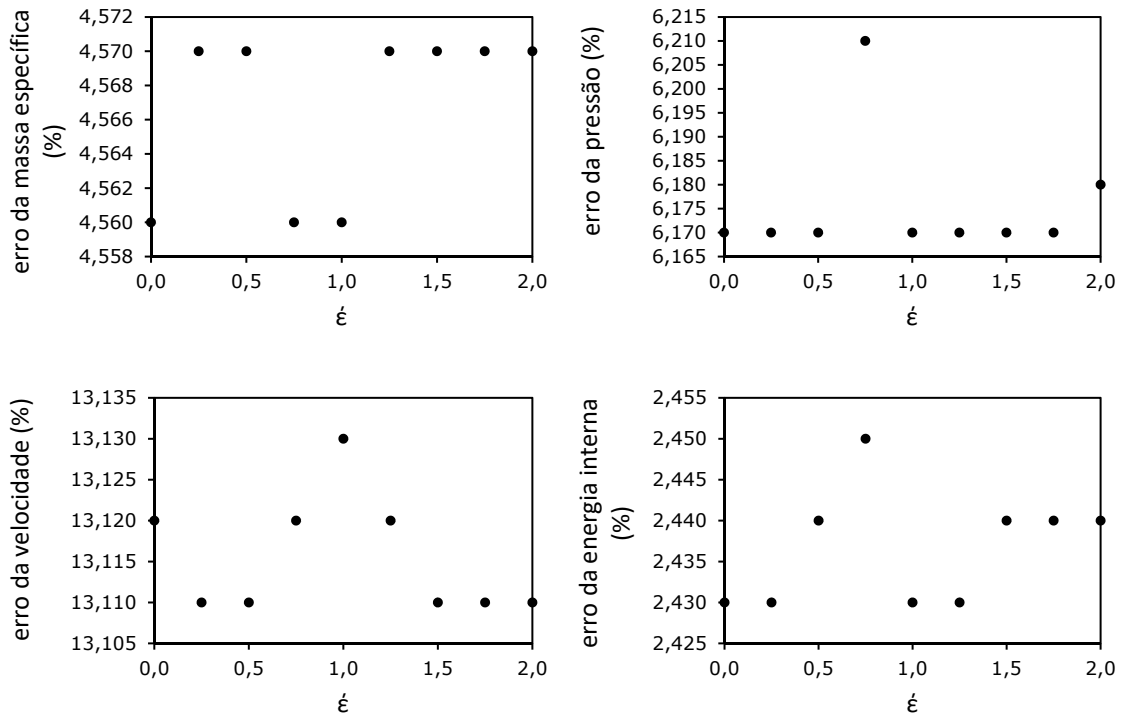
Figura 4.4 Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do coeficiente α , com $t = 0.2$ s, $\epsilon = 0$, $\dot{u} = 0.625$ e núcleo *quartic*.



Fonte: Própria autoria.

O aspecto a ser avaliado agora é o coeficiente ϵ , sob as condições de $\alpha = 1$, $\dot{u} = 0.625$ e o núcleo *quartic*. Pela Figura 4.5, observa-se que a maior influência que o coeficiente ϵ possui é nas propriedades da velocidade e da energia interna das partículas. A medida que o valor de ϵ aumenta, o erro da energia interna aumenta, enquanto o erro da velocidade diminuí. Quanto as outras propriedades, há um aumento do erro, o que implica que de maneira geral, o coeficiente ϵ possui uma influência negativa.

Figura 4.5 Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do coeficiente $\acute{\epsilon}$, com $t = 0.2 s$, $\acute{\alpha} = 1$, $\acute{u} = 0.0625$ e núcleo *quartic*.



Fonte: Própria autoria.

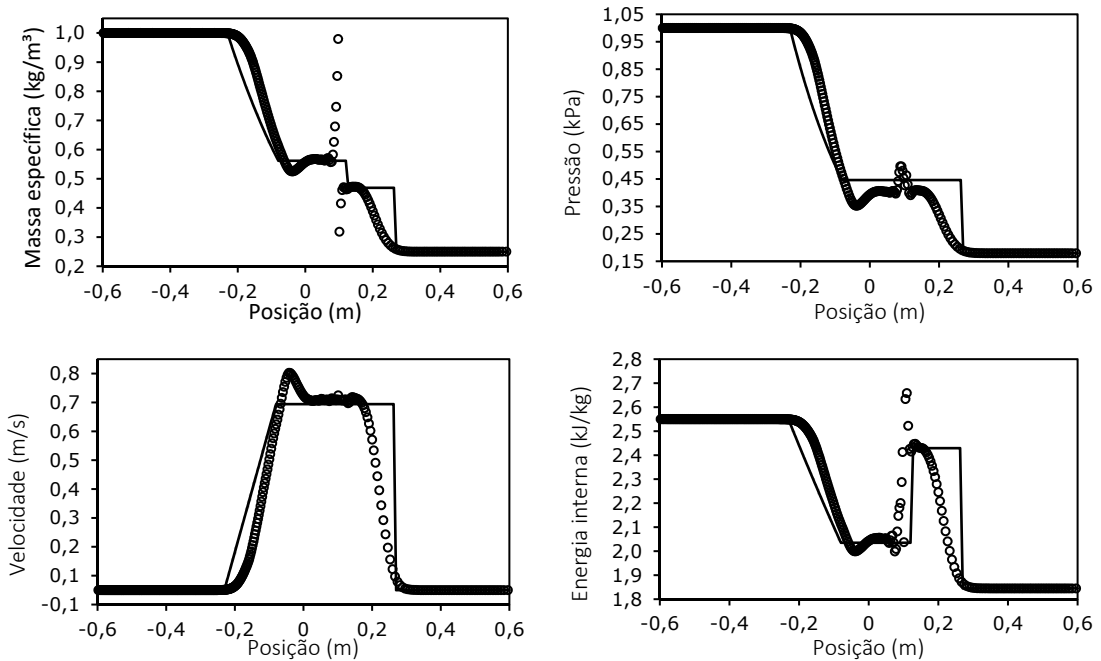
Posto isto, o melhor resultado para a simulação realizada neste trabalho, considera os parâmetros $\acute{\epsilon} = 0$, $\acute{\alpha} = 1$, $\acute{u} = 0.625$ e núcleo super gaussiano, cujo resultado pode ser observado na Figura 4.6.

Para o problema do tubo de choque não foi utilizado apenas o método SPH. Com o intuito de realizar uma comparação sobre a qualidade do método, foram utilizados métodos clássicos: o esquema de Lax-Wendroff e o esquema de MacCormack. Para ambos, procurou-se uma discretização da malha, de modo a aproximar as condições entre eles o método SPH. Portanto, foram utilizadas 400 células ou nós de uma malha unidimensional, sendo as 320 células do lado esquerdo do tubo discretizadas com $\Delta x_L = 0.001875 m$ e as 80 do lado direito, com $\Delta x_R = 0.0075 m$. No caso de ambos os métodos, também é possível avaliar a influência do número de Courant-Friedrichs-Lewy, C_{cfl} , e da viscosidade artificial, $\bar{\mu}_{ab}$.

No caso do C_{cfl} , considerando $\bar{\mu}_{ab} = 0$, é possível notar, Figura 4.7 e Figura 4.8, que o seu aumento reduz o erro médio da massa específica, velocidade e energia interna. Apenas a

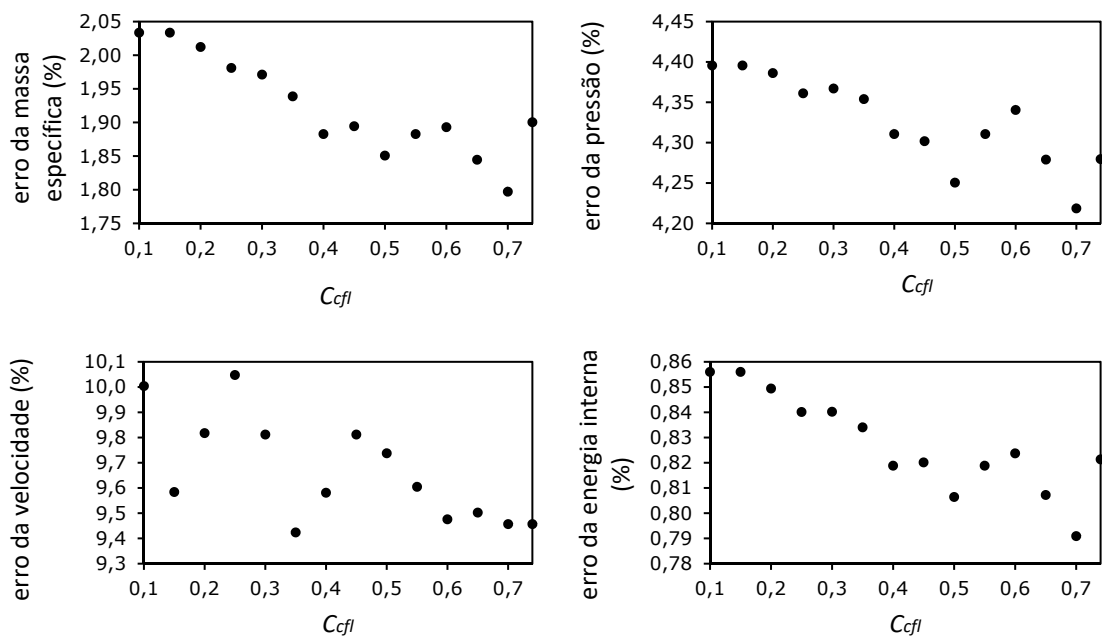
pressão não segue um padrão bem definido. Contudo, para ambos, o menor erro é obtido para $C_{cfl} = 0.7$ e a cima de 0.75 o método diverge.

Figura 4.6 Perfis de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica para $t = 0.2 s$, com $\epsilon = 0$, $\alpha = 1$, $\dot{u} = 0.625$ e com a função *quartic* como núcleo.



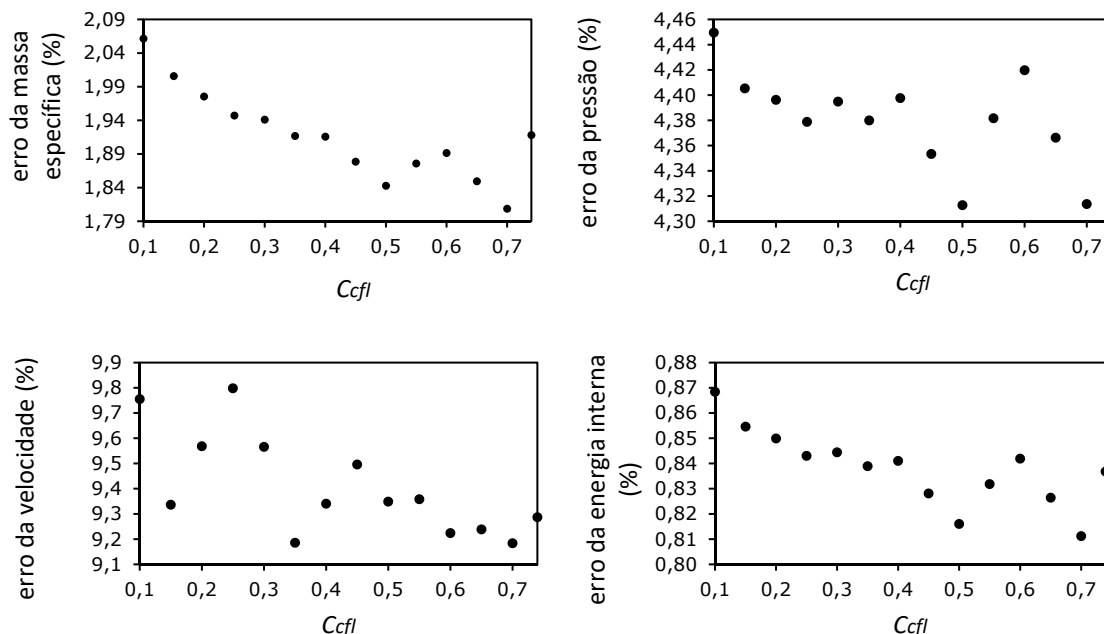
Fonte: Própria autoria.

Figura 4.7 Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do C_{cfl} , com $t = 0.2 s$ e $\bar{\mu}_{ab} = 0$, para o método de Lax-Wendroff.



Fonte: Própria autoria.

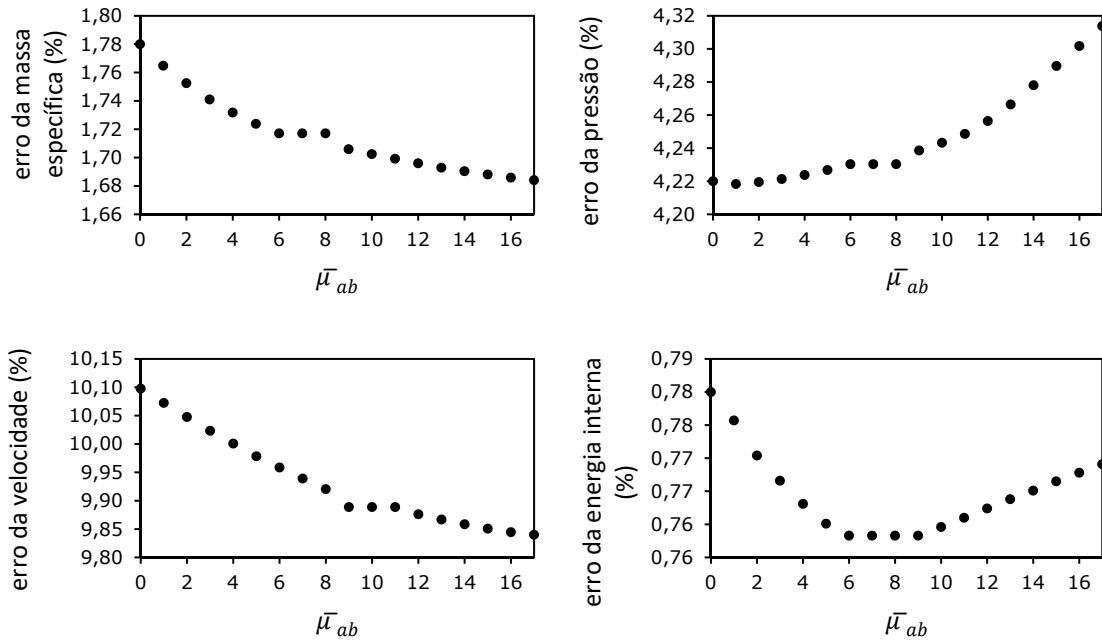
Figura 4.8 Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do C_{cfl} , com $t = 0.2 s$ e $\bar{\mu}_{ab} = 0$, para o método de MacCormack.



Fonte: Própria autoria.

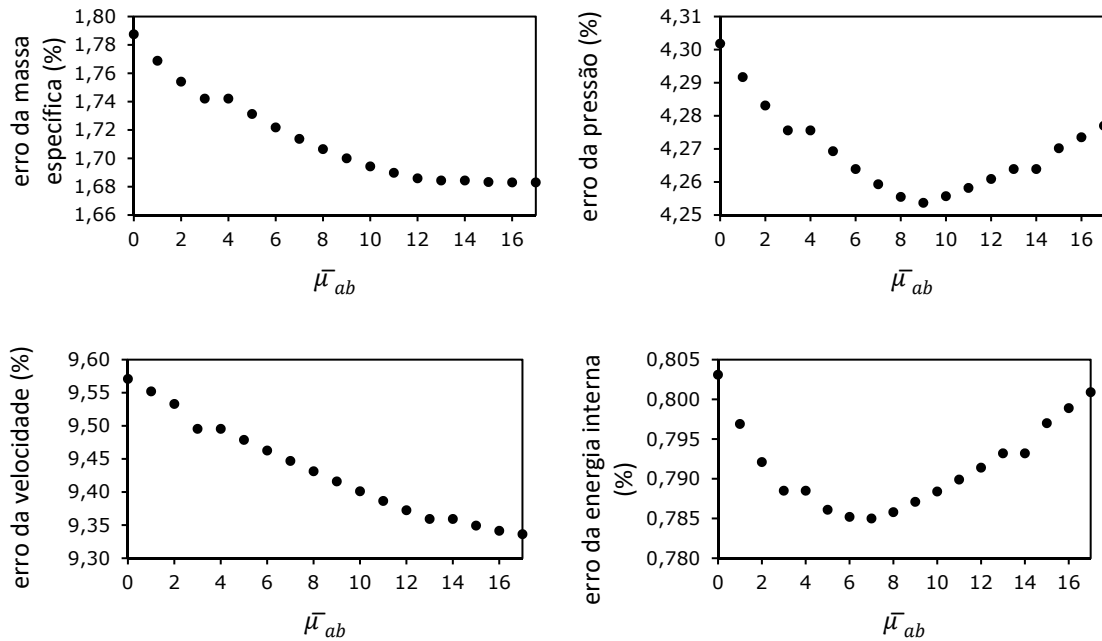
Quanto à viscosidade artificial, considerando $C_{cfl} = 0.7$, construíram-se curvas avaliando o seu impacto em cada uma das propriedades observadas nesse trabalho. O resultado dessas curvas pode ser observado na Figura 4.9 e na Figura 4.10. Nelas, percebe-se que o erro médio da massa específica, velocidade e energia interna diminuem com o aumento da viscosidade artificial até o valor de $\bar{\mu}_{ab} = 11$. No caso do esquema de Lax-Wendroff, acima desse valor, a energia interna começa a ter seu erro médio elevado, enquanto a pressão, que estava indiferente à ação da viscosidade, também começa a sofrer incrementos no seu erro médio. Esse valor não concorda exatamente com o da literatura (HÖFNER, 2014), uma vez que o máximo estabelecido é de 10, mas está muito próximo. No caso do esquema de MacCormack, a energia interna volta a ter incrementos em seu erro, a partir de $\bar{\mu}_{ab} = 9$, enquanto que a pressão é mais sensível à viscosidade artificial do que no esquema de Lax-Wendroff. Para o esquema de MacCormack, pode-se optar também pela viscosidade $\bar{\mu}_{ab} = 11$, pois, apesar do erro da energia interna ter crescido, não foi considerável e todos os outros parâmetros tiveram decréscimo no erro. Portanto de maneira geral, o resultado é positivo para $\bar{\mu}_{ab} = 11$ para ambos os esquemas de diferenças finitas.

Figura 4.9 Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do $\bar{\mu}_{ab}$, com $t = 0.2 s$ e $C_{cfl} = 0.7$, para o método de Lax-Wendroff.



Fonte: Própria autoria.

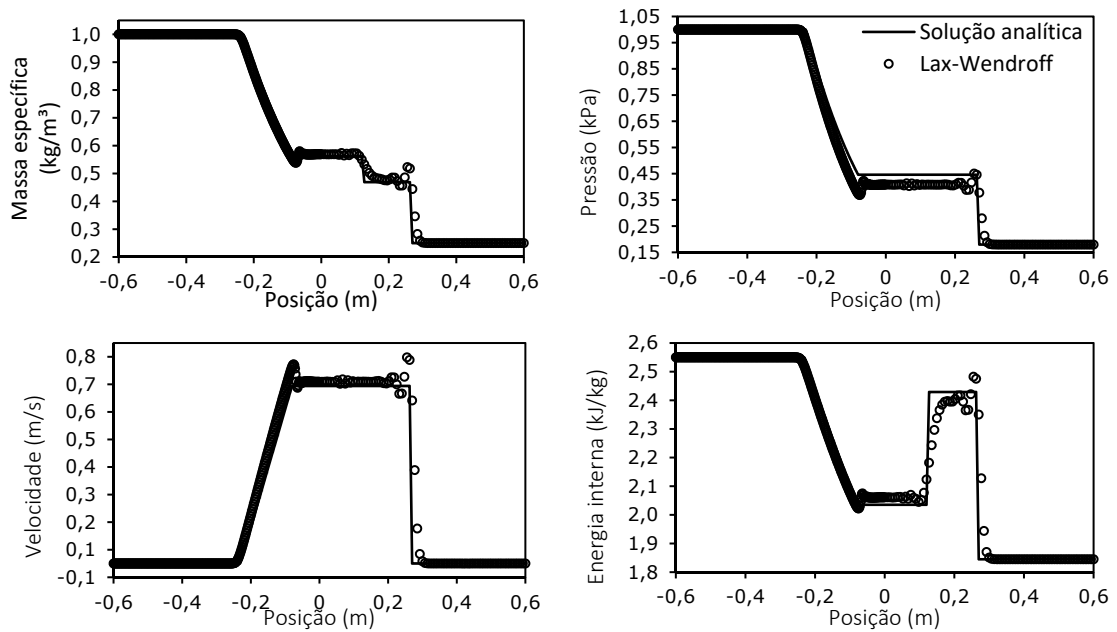
Figura 4.10 Perfis dos erros de massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do $\bar{\mu}_{ab}$, com $t = 0.2 s$ e $C_{cfl} = 0.7$, para o método de MacCormack.



Fonte: Própria autoria.

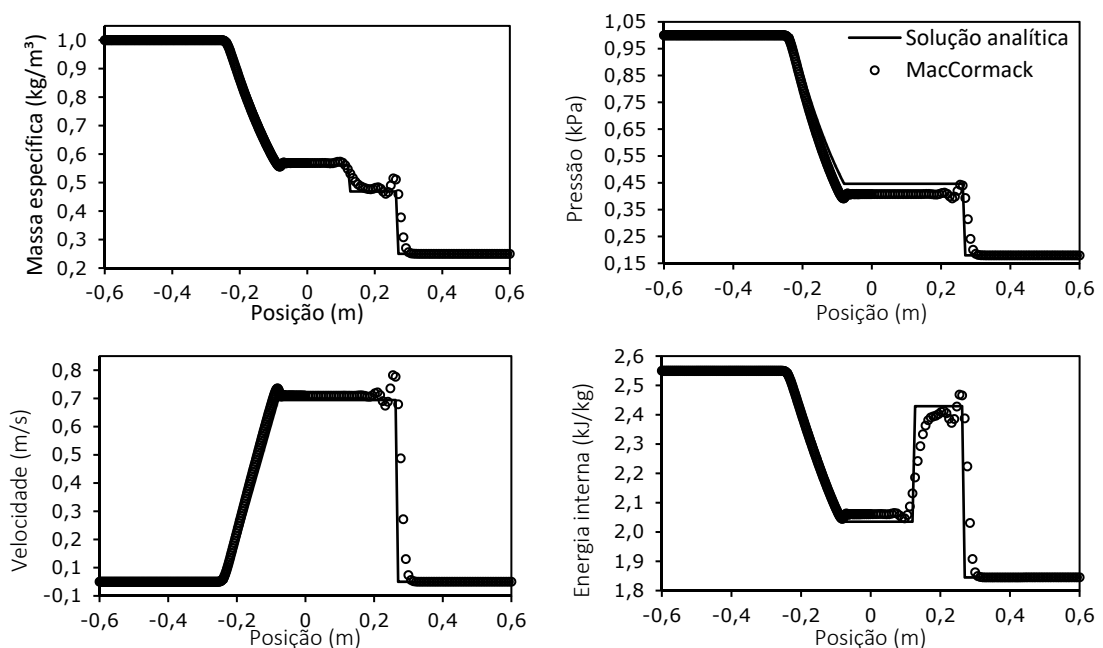
O resultado da simulação utilizando os dois esquemas de diferenças finitas, considerando os parâmetros $C_{cfl} = 0.7$ e $\bar{\mu}_{ab} = 11$, pode ser observado na Figura 4.11 e na Figura 4.12.

Figura 4.11 Perfis massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do $\bar{\mu}_{ab}$, com $t = 0.2 s$, $C_{cfl} = 0.7$ e $\bar{\mu}_{ab} = 11$, para o método de Lax-Wendroff.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.12 Perfis massa específica, pressão, velocidade e energia interna específica em função do $\bar{\mu}_{ab}$, com $t = 0.2 s$, $C_{cfl} = 0.7$ e $\bar{\mu}_{ab} = 11$, para o método de MacCormack



Fonte: Própria autoria.

Visto isto, constrói-se a Tabela 4.1 comparando os melhores resultados dos três métodos numéricos utilizados, segundo os parâmetros de erro médio e custo computacional médio, considerando que o equipamento utilizado para realizar as simulações foi um notebook Intel(R) Core(TM) i5-3337U com CPU de 1,8 GHz e RAM de 4 GB. A Tabela 4.1 revela que de modo geral, o erro médio do resultado do SPH é maior que dos métodos de diferenças finitas, bem como o custo computacional, 52 vezes. Apesar disso, os três métodos concordaram com a ordem de grandeza do erro de truncamento, previsto em teoria.

Tabela 4.1 Resultado dos três métodos numéricos em relação ao erro médio e ao custo computacional.

Método numérico	Erro médio (%)				Custo computacional médio (s)
	ρ (kg/m^3)	p (kPa)	u (m/s)	e (kJ/kg)	
SPH	4.4996	6.1466	12.6161	2.3773	104
Lax-Wendroff	1.6992	4.2486	9.8888	0.7583	2
MacCormack	1.6898	4.2582	9.3865	0.7899	2

Fonte: Próprio autoria.

Outro ponto que vale ressaltar é a capacidade de lidar com a descontinuidade do domínio do problema. Os métodos de Lax-Wendroff e MacCormack apresentam curvas relativamente contínuas entre as diferentes regiões do tubo, Figura 4.11 e Figura 4.12, sendo que o maior problema aparente é o de difusão numérica nas regiões de rápida transição de estado das curvas. Enquanto o método SPH, apesar de apresentar curvas suavizadas, Figura 4.6, com uma menor difusão numérica e maior dispersão numérica, revela uma descontinuidade nas curvas, justamente, na região de descontinuidade do domínio.

4.2 CONDUÇÃO EM PLACA PLANA RETANGULAR

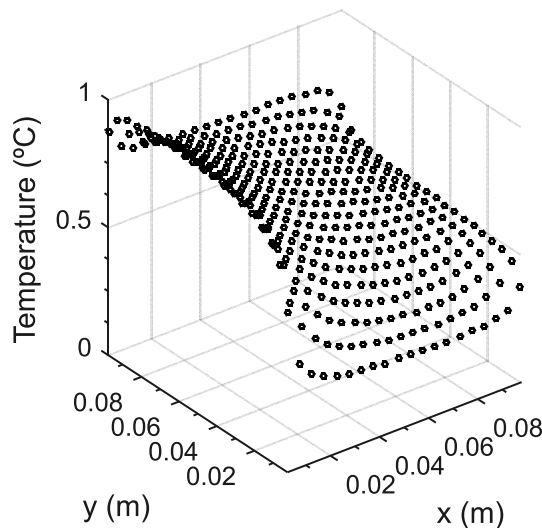
A placa plana retangular considerada é composta por aço carbono AISI 1010, cujas propriedades (BERGMAN, et al., 2002) são

$$\rho = 7854 \frac{kg}{m^3}, \quad c_p = 0.434 \frac{kJ}{kgK}, \quad k = 60.5 \frac{W}{mK}, \quad \alpha = 17.7 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}. \quad (4.6)$$

As dimensões da placa são 10 cm de largura, por 10 cm de comprimento e 4,5 mm de espessura. Foi considerada a existência de espessura nesse problema, apesar de ser bidimensional, pois é necessário o cálculo da massa para poder aplicar o método SPH. As temperaturas do contorno adotadas foram: $T_{inferior} = 0.25 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{direita} = 0.50 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{superior} = 0.75 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T_{superior} = 1.00 \text{ }^\circ\text{C}$. Quanto a temperatura inicial do domínio é $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.

A solução analítica da distribuição do calor sobre a placa para o regime permanente sob as condições supracitadas pode ser observada na Figura 4.13. Esse resultado é a referência da análise comparativa entre os métodos numéricos utilizados para modelar esse fenômeno térmico.

Figura 4.13 Solução analítica da distribuição da temperatura sobre a placa para o regime permanente.



Fonte: Própria autoria.

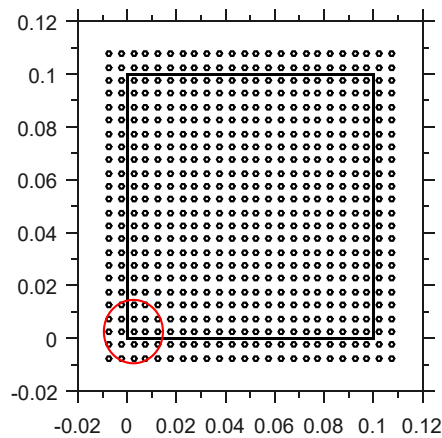
Com relação aos métodos, o primeiro a ser apresentado é o SPH. Para ele, foram utilizadas 400 partículas para discretizar o domínio da placa e 176 partículas virtuais para discretizar o contorno com as temperaturas fixas. A distância entre as partículas é uniforme, com $\Delta x = \Delta y = 0.005 \text{ m}$ e o comprimento de suavização adotado foi de $h = 1.2\Delta x = 0.006 \text{ m}$. Quanto ao critério do passo temporal, é utilizada a expressão (CLEARY & MONAGHAN, 1999)

$$\Delta t = \frac{\beta \rho c_p h^2}{k}, \quad (4.7)$$

onde β é uma constante equivalente ao número de Courant-Friedrichs-Lewy tal que $0 < \beta \leq 0.1$.

O domínio discretizado em partículas pode ser observado na Figura 4.14, na qual se observa em destaque um círculo em vermelho que representa o domínio de suporte contendo 21 partículas, contando a partícula de referência. Dentro do retângulo estão as partículas reais que discretizam o domínio do problema. Fora do retângulo estão as partículas virtuais que delimitam as condições de contorno.

Figura 4.14 Distribuição das partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular.



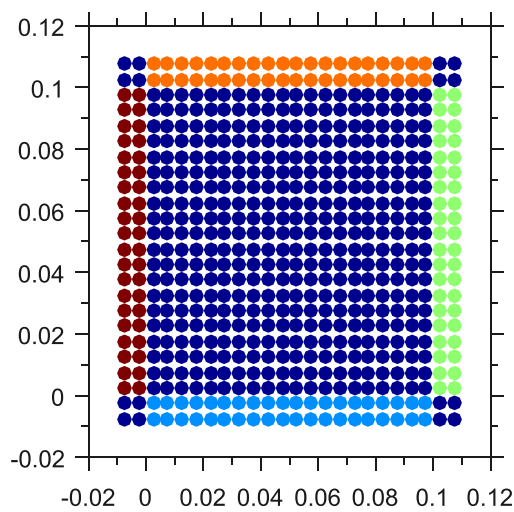
Fonte: Própria autoria.

A determinação da temperatura sob as partículas virtuais pode ser feita de duas maneiras: sem tratamento de interpolação nos cantos e com tratamento nos cantos da placa. Inicialmente, a distribuição fundamental é dos bordos, como é mostrado na Figura 4.15. Para preencher os cantos, pode-se usar distintos critérios, sendo um dos mais simples o que é mostrado na Figura 4.16. Contudo, como todas as partículas virtuais contribuem na determinação da distribuição das partículas reais, ao aumentarem o número de componentes da vizinhança, a falta de um tratamento adequado influencia no resultado da simulação. Logo, é proposto neste trabalho uma interpolação linear em função do ângulo entre um bordo e outro, de modo que as temperaturas sejam distribuídas radialmente entre as partículas que compõem o canto. A expressão de interpolação utilizada é

$$T(\theta) = C_1 + C_2\theta, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y - y_o}{x - x_o}\right) \quad (4.8)$$

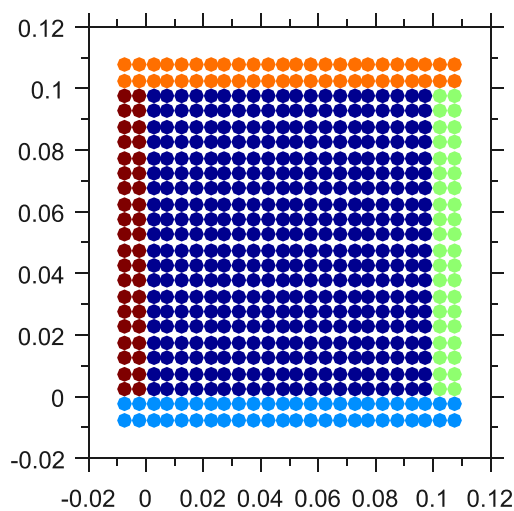
onde θ é o ângulo, medido a partir da vertical, em função da posição das partículas, C_1 e C_2 são constantes obtidas pelas condições de contorno, que, nesse caso, são as temperaturas de contorno. A Figura 4.17 mostra um esquema de como a expressão de interpolação é aplicada, enquanto que a Figura 4.18 mostra o resultado da distribuição da temperatura com o tratamento dos cantos.

Figura 4.15 Distribuição da temperatura inicial e de condição de contorno sobre as partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular, considerando apenas o fundamental.



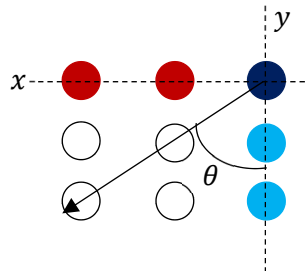
Fonte: Própria autoria.

Figura 4.16 Distribuição da temperatura inicial e de condição de contorno sobre as partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular, sem tratamento dos cantos.



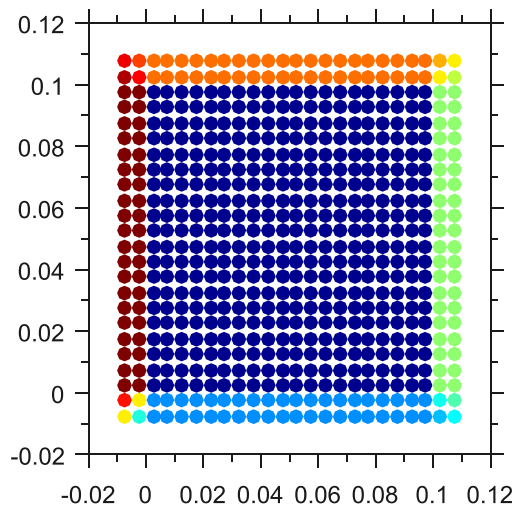
Fonte: Própria autoria.

Figura 4.17 Esquema da aplicação da interpolação entre os contornos.



Fonte: Própria autoria

Figura 4.18 Distribuição da temperatura inicial e de condição de contorno sobre as partículas reais e virtuais sobre a placa plana retangular, com tratamento dos cantos.



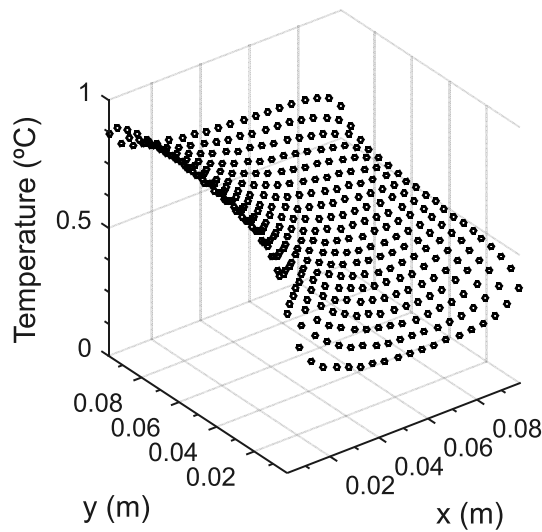
Fonte: Própria autoria.

O resultado da simulação, considerando $\beta = 0.09$ e tempo de regime de $t = 40.1599$ s, pode ser observado na Figura 4.19. Sob uma perspectiva visual imediata e, portanto, subjetiva, pode-se afirmar que a solução numérica se aproxima da solução analítica. Mas é preciso avaliar como os parâmetros do método podem influenciar a precisão dele. Nesse sentido, o primeiro que pode ser destacado é a constante β .

A avaliação da influência da constante β em relação ao erro médio entre a método numérico e a solução exata, é ilustrado na Figura 4.20. Por meio dela, percebe-se que o erro médio permanece flutuando entre 8.0657% e 8.1544 %, sendo que a única exceção é para $\beta = 0.09$, onde o erro é de 8.0657 %. Nota-se também, que apesar do erro não alterar

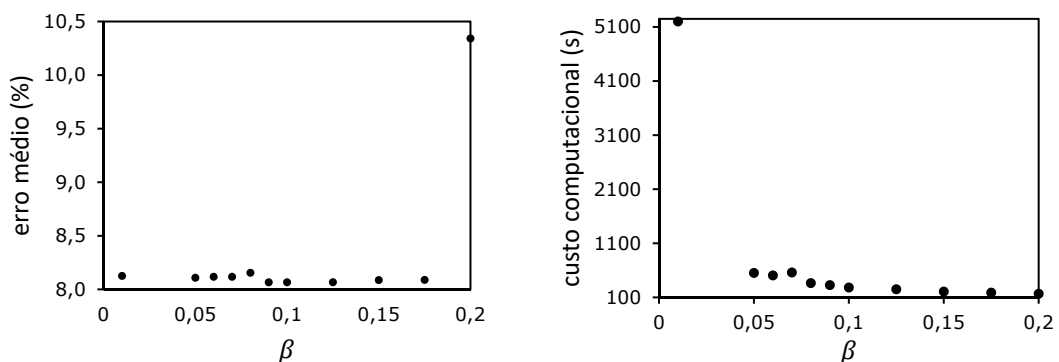
significativamente, o custo computacional pode ser significativo para $\beta < 0.05$. Com o auxílio da Figura 4.21, observa-se que o erro mesmo tendo um erro médio de 10.3422%, o resultado começa a se degenerar nas regiões próximas aos cantos da placa plana. Esse resultado permite concluir que a faixa de valores da constante β que garantem a convergência do método é de $]0,0.2[$, ao contrário do que é indicado pela literatura (CLEARY & MONAGHAN, 1999).

Figura 4.19 Distribuição da temperatura sobre a placa usando o método SPH, com $\beta = 0.09$ e $t = 40.1599$ s, sendo este o regime permanente.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.20 Análise da influência da constante β : à esquerda a curva do erro médio em relação à constante e à direita, a curva do custo computacional em relação à constante.

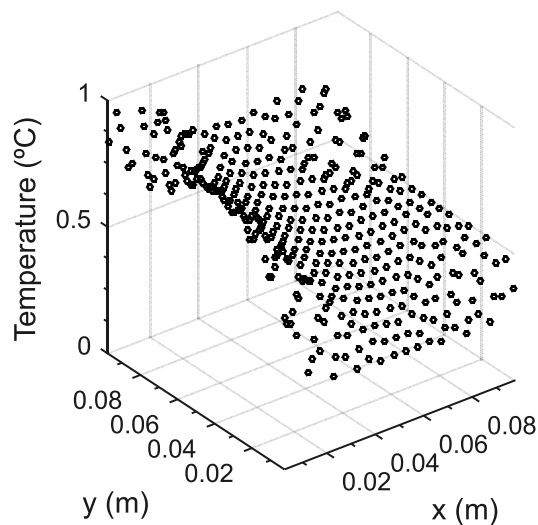


Fonte: Própria autoria.

Com relação ao efeito do tratamento das condições de contorno nos cantos da placa plana, considerando $\beta = 0.09$, tem-se que o erro médio com o tratamento é de 8.0657% e sem

o tratamento é de 8.3467 % o que indica uma otimização de 3.4839 % e uma sensibilidade desse modelo numérico em relação à região dos cantos. Fato este, que é reforçado pela Figura 4.21, no qual observa-se as regiões dos cantos como as primeiras regiões a mostrarem sinais de divergência.

Figura 4.21 Distribuição da temperatura sobre a placa usando o método SPH, com $\beta = 0.2$ e $t = 40.1599$ s. Nela há o início da degeneração do resultado nas regiões dos cantos da placa.



Fonte: Própria autoria.

Os outros métodos numéricos aplicados ao problema foram o de MacCormack e o Euler progressivo temporal centro espacial. Os dois foram discretizados da mesma forma semelhante ao método SPH, sendo que $\Delta x = \Delta y = 0.005$ m, o que garante alguma similaridade para comparar os três métodos. O critério temporal em ambos os métodos de diferenças finitas é

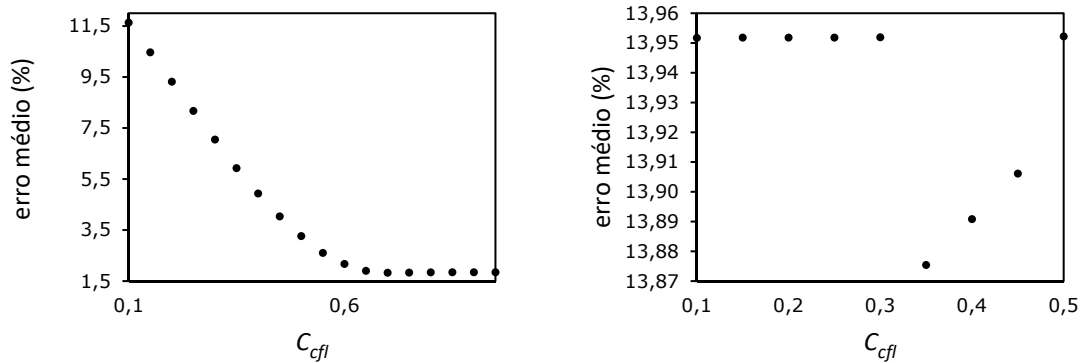
$$\Delta t = \frac{C_{cfl}}{\alpha} \left(\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right), \quad C_{cfl} < 1 \quad (4.9)$$

onde C_{cfl} é o número Courant-Friedrichs-Lewy e α é a difusividade térmica.

Posto isto, a primeira análise em relação aos métodos de diferenças finitas é feita para C_{cfl} , de modo a observar a influência deste parâmetro. Na Figura 4.22, mostra esta influência sobre a qual percebe-se que o método de Euler PTCE é mais sensível à constante C_{cfl} . Isso provavelmente se deve à maior estabilidade que o método de MacCormack possui em relação ao método de Euler. Contudo, o método de MacCormack com $C_{cfl} > 0.5$ diverge antes do

método de Euler, $C_{cfl} > 1$. Além disso, os valores ótimos são: $C_{cfl} = 0.75$, para o esquema de Euler, e $C_{cfl} = 0.35$, para o esquema de MacCormack.

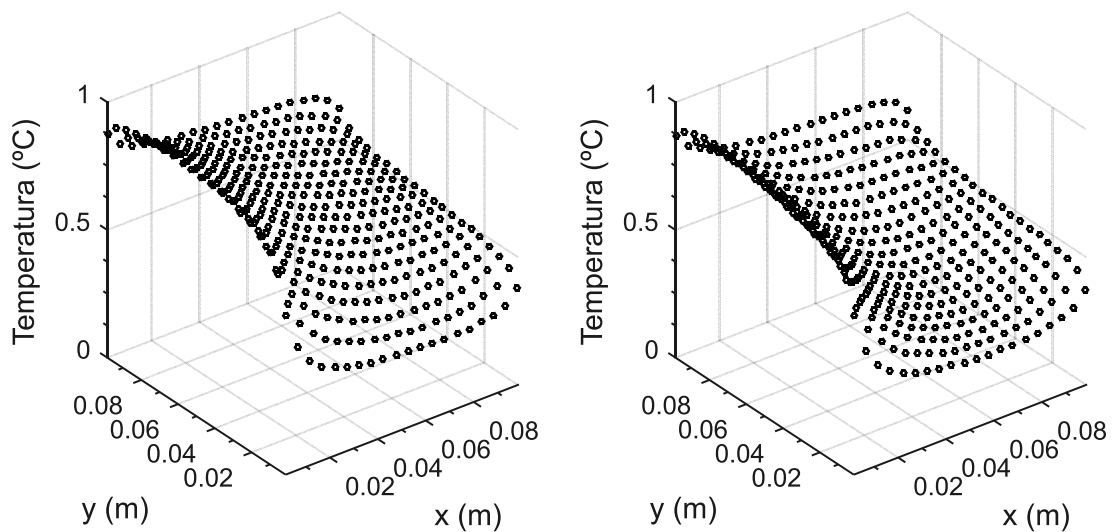
Figura 4.22 Influência do C_{cfl} no resultado dos métodos de diferenças finitas: à esquerda, tem-se a curva do método de Euler PTCE e à direita, tem-se o método de MacCormack.



Fonte: Própria autoria.

Utilizando os coeficientes ótimos, os resultados dos métodos de diferenças finitas podem ser observados na Figura 4.23. É possível perceber que a distribuição da região central do método de Euler está mais próxima da solução exata do que a região central do método de MacCormack, o que justifica os menores erros obtidos pelo método de Euler.

Figura 4.23 Resultado da simulação dos métodos de diferenças finitas, considerando $C_{cfl} = 0.75$ e $t = 40.05$ s para o método de Euler, à esquerda, e $C_{cfl} = 0.35$ e $t = 40.1835$ s para o método de MacCormack, à direita.



Fonte: Própria autoria.

Para comparar os três métodos, constrói-se a Tabela 4.2, utilizando o erro médio e o custo computacional, tendo como referência o melhor resultado de cada um dos três. Por meio da Tabela 4.2, observa-se que o método mais preciso é o de Euler, possuindo também o menor custo computacional. Em seguida, tem-se o método SPH, quase 5 vezes menos preciso que o método de Euler e com um custo computacional 304 vezes maior. Por último, o método de MacCormack, quase 8 vezes menos preciso que o de Euler e 2 vezes a menos que o SPH. Quanto ao custo computacional, o esquema de MacCormack possui dobro do custo que o de Euler e aproximadamente 136 menor que o custo do SPH.

Tabela 4.2 Comparação entre os três métodos utilizados para modelar o problema da condução de calor em uma placa plana.

Método	Erro médio (%)	Custo computacional (s)
SPH	8.0657	325.00
Euler PTCE	1.8262	1.07
MacCormack	13.8754	2.40

Fonte: Própria autoria.

Apesar do resultado da comparação geral entre os três métodos, pode-se ainda fazer uma análise focada apenas na região dos cantos da placa, onde a solução apresenta maior sensibilidade às condições de contorno. Logo, a Tabela 4.3 apresenta os resultados dos erros médios nas regiões dos cantos da placa. Nela, observa-se que o método SPH, na média, obteve resultados 0,3342% melhores que o método de Euler, enquanto, o método de MacCormack superou os dois em 0,6467% e 0,9830%, respectivamente.

Tabela 4.3 Comparação entre os três métodos utilizados para modelar o problema da condução de calor nos cantos da placa plana.

Método	Erro médio (%)				Média (%)
	Sudoeste	Sudeste	Nordeste	Noroeste	
SPH	92.6087	54.4197	40.2814	56.2394	60.8873
Euler PTCE	93.2103	54.1247	40.5276	56.5006	61.0908
MacCormack	91.4287	54.3882	40.1075	56.0601	60.4961

Fonte: Própria autoria.

5 CONCLUSÃO

Os modelos matemáticos dos problemas do tubo de choque e da transferência de calor por condução em uma placa retangular foram apresentados e a solução analítica para os ambos foi desenvolvida. A aplicação do método das variáveis características para resolver o sistema de equações de Euler que modela o tubo de choque, exige compreensão mais detalhada da teoria de ondas de choque, no que tange a área da matemática que lida com domínio descontínuos. Quanto à aplicação do método da separação de variáveis, na equação de balanço de energia térmica sobre a placa, obteve-se a solução analítica de forma mais direta. Tal fato se deve à natureza mais simples do problema, quando comparada com a do tubo de choque.

Os métodos de diferenças finitas possuem uma formulação simples e utilizam de uma série de manobras algébricas sobre expansões em série de Taylor, que permitem obter diferentes qualidades de resultados. Além disso, sua implementação em domínio com geometrias simples se mostrou relativamente direta.

O método SPH é um método que possui uma formulação mais robusta no sentido de se utilizar de mais de uma técnica de aproximação. As técnicas utilizadas foram a representação integral, utilizando uma função de interpolação, conhecida por função de suavização e que possui propriedades específicas, a aproximação por partículas e a expansão em série de Taylor.

Como o método SPH é um método essencialmente Lagrangiano, as equações de governo dos problemas físicos, inicialmente apresentadas em sua forma Euleriana, foram reformuladas e, em seguida, aplicou-se a aproximação por partículas. No caso do problema do tubo de choque, foi preciso utilizar a viscosidade artificial e a renormalização da função de suavização e da derivada da mesma, para corrigir os erros de interpolação. No caso da placa plana, foram utilizadas partículas fantasmas e uma interpolação linear nas quinas da placa plana, para garantir a aplicação correta das condições de contorno.

Ao se comparar os resultados numéricos com a solução analítica, obteve-se erros na ordem de grandeza conforme a literatura, revelando a implementação adequada. Além disso, as curvas e superfícies resultantes também apresentam semelhança com os resultados da literatura utilizada neste trabalho, corroborando com a adequação da implementação.

Apesar disso, alguns resultados da análise se mostraram relativamente divergentes às referências ou não foram encontrados. No caso do tubo de choque, uma correção adicional utilizada foi a de uma velocidade suavizada. Essa correção não aparece na literatura, no entanto apresenta efeitos ótimos para $\acute{u} = 0.675$ e dentro da faixa de $\acute{u} \in [0.675, 0.8]$, pode-se encontrar, seguramente, bons resultados. No caso da placa plana, o número de Courant-Friedrichs-Lewy normalmente utilizado no método de diferença finitas é 0,5. Mas neste trabalho foi determinado que os melhores resultados são obtidos para $C_{cfl} = 0,75$ e $C_{cfl} = 0,35$, para o método de Euler e o método de MacCormack, respectivamente. Apesar de divergir do valor usual, os números obedecem ao critério de $C_{cfl} < 1$. Além disso, a constante β do critério do passo temporal do método SPH apresentou convergência para uma faixa maior que a indicada por Cleary (1999), mas o valor ótimo de resultado estava dentro da faixa.

Para as outras variáveis, observou-se que, no caso dos coeficientes da viscosidade artificial do método SPH aplicado no tubo de choque, apenas o coeficiente $\acute{\alpha}$ se mostrou necessário e com o valor usual da literatura, $\acute{\alpha} = 1$ (MONAGHAN & GINGOLD, 1983), enquanto que $\acute{\epsilon}$, apresentou influência negativa aos resultados. A viscosidade artificial dos métodos de Lax-Wendroff e MacCormack também concordou com a literatura (HÖFNER, 2014), mas os valores ótimos encontrados estão no limite da faixa admissível.

Comparando apenas os métodos numéricos de diferença finitas e o SPH, observou-se que para os problemas utilizados neste trabalho, os métodos de diferenças finitas obtiveram melhor performance que o método SPH, no que tange o erro médio e custo computacional. No caso do tubo de choque, o MDF conseguiu tratar a descontinuidade do domínio, enquanto o SPH mostra sinais de problemas relativos à descontinuidade.

Apesar disso, considerando a precisão dos métodos, todos são competitivos, pois possuem a mesma ordem de grandeza.

5.1 PERSPECTIVA DE TRABALHOS FUTUROS

Os problemas adotados neste trabalho verificaram o potencial dos métodos de diferenças finitas para problemas com geometria simples, sem grandes deformações das fronteiras do domínio e sem a presença de superfícies livres. No entanto, o método SPH mostrou que também

é capaz de lidar com esses casos simples, mantendo uma precisão na mesma ordem de grandeza que os MDFs.

Posto isto, sugere-se como trabalhos futuros, a aplicação do método SPH e outro método MDF em problemas envolvendo superfície livre, como o escoamento de Poiseuille ou o de Couette, ou deformação das fronteiras, como impacto hidrodinâmico ou fenômenos de explosão. O intuito é continuar a investigação das potencialidades do método SPH e, se possível, desenvolver otimizações que resolvem os problemas de:

- Eficiência na determinação da vizinha das partículas, especialmente quando as partículas se movimentam;
- Custo computacional, sendo que a verificação possibilidade de paralelização do código para tratar uma quantidade maior de partículas.

6 REFERÊNCIAS

BATCHELOR, G. K., 2002. *An introduction to fluid dynamics*. 1 ed. Cambridge: The Press Syndicate of the University of Cambridge.

BENZ, W., 1989. *Smoothed particle hydrodynamics: a review*. France: NATO Workshop, Les Arcs.

BERGMAN, L. T., LAVINE, S. A., INCROPERA, F. P. & DEWITT, D. P., 2002. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 7 ed. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

BONET, J. & LOK, T.-S. L., 1999. Variational and momentum preservation aspects of smoothed particle hydrodynamics formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* , 180, pp. 95-115.

BUTCHER, J. C., 1964. Implicit Runge-Kutta process. *Mathematics of Computation*, 18, pp. 50-64.

CHORIN, A. & MARSDEN, J., 1992. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. 3 ed. Springer-Verlag Publishing Company, Inc.

CLEARY, P. W. & MONAGHAN, J. J., 1999. Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics* , 148, pp. 227-264.

COURANT, R., FRIEDRICHES, K. & LEWY, H., 1928. Über die partialen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, Volume 100, pp. 32-74.

COURANT, R. & FRIEDRICHS, K. O., 1948. *Supersonic flows and shock waves*. New York: Interscience Publishers, INC.

DEMIDOVICH, B. & MARON, I., 1960. *Foundations of computational mathematics*. Moscow.

- FOMIN, N. A., 2010. 110 years of experiments on shock tubes. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 83, 6.
- FREY, P. & BUHAN, M. d., 2018. *The finite difference method*. Disponível em: <https://www.ljll.math.upmc.fr/frey/ftp/finite-differences.pdf>. Acessado em: 20 Nov. 2018.
- FULK, D. A., 1994. *A numerical analysis of smoothed particle hydrodynamics*, PhD Thesis: Air Force Institute of Technology.
- GODLEWESKI, E. & RAVIART, P. A., 1996. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. New York: Springer Science + Business Media, LLC.
- HENSHALL, B. D., 1955. *On some aspects of the use of shock tubes in aerodynamic research*, England: University of Bristol.
- HERNQUIST, L. & KATZ, N., 1989. TreeSPH - A unification of SPH with the hierarchical tree method. *The Astrophysical Journal Supplement Series* , 70, pp. 419-446.
- HÖFNER, S., 2014. *Lecture Note*. Disponível em: <http://www.astro.uu.se/~hoefner/astro/teach/ch10.pdf>. Acessado em: 20 Nov. 2018.
- JEFFREYS, H., 1969. *Cartesina tensors*. 1 ed. Cambridge: The Press Syndicate of the University of Cambridge.
- JOHNSON, G. R., STRYK, R. A. & BEISSEL, S. R., 1996. SPH for high velocity impact computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, pp. 347-373.
- LAX, P. & WENDROFF, B., 1960. Sístems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, pp. 217-237.
- LEVEQUE, R. J., 1992. *Numerical methods for conservation laws*. 2 ed. Berlim: Birkhäuser.
- LIU, G. R. & LIU, M. B., 2003. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method*. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd.

- LIU, G. R. & QUEK, 2003. *The finite element method: a practical course*. Butterworth Herinemann. .
- LOUIS, M., 1994. L'œuvre scientifique de Paul Vieille (1854-1934). *Revue d'histoire des sciences*, 47(3-4), pp. 381-404.
- LUCY, L. B., 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82(12), pp. 1013-1024.
- MONAGHAN, J. J., 1982. Why particle methods work (hydrodynamics). *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* , 3, pp. 422-433.
- MONAGHAN, J. J., 1985. Particle method for hydrodynamics. *Computer Physics Report*, 3, pp. 71-124.
- MONAGHAN, J. J., 1987. SPH meets the shocks of Noh. *Monash University Paper*.
- MONAGHAN, J. J., 1988. An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, 48, pp. 89-96.
- MONAGHAN, J. J., 1989. On the problem of penetration in particle methods. *Journal of Computational Physics* , 82, pp. 1-15.
- MONAGHAN, J. J., 1992. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomical and Astrophysics*, 30, pp. 543-574.
- MONAGHAN, J. J. & GINGOLD, R. A., 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 181, pp. 375-389.
- MONAGHAN, J. J. & GINGOLD, R. A., 1982. Kernel estimates as a basis for general particle method in hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 181, pp. 429-453.
- MONAGHAN, J. J. & GINGOLD, R. A., 1983. Shock simulation by the particle method SPH. *Journal of Computational Physics*, 52, pp. 374-389.

- MONAGHAN, J. J., KOS, A. & ISSA, N., 2003. Fluid motion generated by impact. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 129, p. 250-259.
- MONAGHAN, J. J. & LATTANZIO, J. C., 1985. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, 149, pp. 135-143.
- MONAGHAN, J. J. & POINRACIC, J., 1985. Artificial viscosity for particle methods. *Applied Numerical Mathematics*, 1, pp. 187-194.
- MORRIS, J. P., 1994. *A study of stability properties of SPH*. Monash University: Applied Mathematics Reports and Preprints.
- MORRIS, J. P., 1996. *Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications*. Monash University: PhD thesis.
- RICHTMEYER, R. D. & MORTON, K. W., 1967. *Difference methods for initial-value problems*. 2 ed. New York : Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 4.
- SIMPSON, J. C., 1995. Numerical techniques for tree-dimensional smoothed particle hydrodynamics simulations: application to accretion disks. *The Astrophysical Journal* , 448, pp. 822-831.
- SOD, G. A., 1978. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 27, pp. 1-31.
- VASCO, J. R. G., 2014. *Desenvolvimento de software utilizando a técnica SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) na geração de ondas de submersão*, Ilha Solteira: Universidade Estadual Paulista - UNESP, Tese de Doutorado.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L., 2000. *The finite element method*. 5 ed. Butterworth Herinemann.