Kolmogorov e a Lógica de Problemas I*

Wagner de Campos Sanz
Departamento de Filosofia, UFG
wsanz@uol.com.br

Abstract: Intuitionistic logical constants are characterized by means of BHK clauses. The "K" is a reference to Kolmogorov who in 1925 had made a proposal for defining intuitionistic logic and which was later extended with the inclusion of *ex falso quodlibet* principle. In 1932 [Kol32] this principle is present and the author gives a semantics alternative to the one presented by Heyting in 1930. Kolmogorov uses the concept of problem. Here we are proposing a partial analysis of this semantics of problems. We want to show that this semantics involves a logic of actions. We finish by pointing what seems to us to be an open problem in this semantics.
Key words: problems theory; intuitionism; logic of actions; mathematical practice.

Resumo: As constantes lógicas intuicionistas são caracterizadas por meio de cláusulas BHK. O "K" do nome é referência a Kolmogorov que havia em 1925 oferecido uma proposta para definir a lógica intuicionista que mais tarde foi estendida para incluir o princípio de *ex falso quodlibet*. Em 1932 [Kol32] este princípio está presente e o autor apresenta uma semântica alternativa àquela proposta por Heyting em 1930, usando o conceito de problema. Neste artigo faremos uma análise parcial da semântica de problemas de Kolmogorov. Procuraremos mostrar que ela envolve uma lógica de ações mais próxima da prática matemática. Finalizaremos apontando aquilo que nos parece ser um problema em aberto para esta semântica.
Palavras-chave: teoria de problemas; intuicionismo; lógica de ações; prática matemática.

* Este trabalho é resultado do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq 401882/2011-0.

1) Introdução

O acrônimo BHK nomeia o conjunto de cláusulas que descrevem a interpretação intuicionista das constantes lógicas como apresentadas em [Hey56]. Ele corresponde às iniciais de **B**rouwer, **H**eyting e **K**olmogorov, personagens aos quais deveríamos historicamente as formulações da semântica intuicionista para as constantes lógicas.[1]

Dentre os três, Kolmogorov [Kol32] no ano de 1932 propôs uma interpretação da lógica intuicionista baseada no conceito de **problema**. Ele diz (*ibid.* pág. 328):

> *Em adição à lógica teórica, a qual sistematiza os esquemas de prova das verdades teóricas, podemos sistematizar os esquemas de solução de problemas, por exemplo, os problemas de construção geométrica.*
>
> ...
>
> *Será mostrado que a lógica intuicionista deve ser substituída pelo cálculo de problemas, pois seus objetos são em realidade os problemas, não as proposições pertinentes a uma teoria.*

O conceito de problema aparece em [Kol32] como conceito fundamental para a lógica intuicionista pela possibilidade de sistematização dos esquemas de solução de problemas tomando como modelo a sistematização de esquemas para os problemas de construção geométrica. A seguir examinaremos a interpretação construtiva de Kolmogorov em termos de problemas e mostraremos que ela baseia-se em uma espécie de "lógica das ações".

2) Prática Matemática e Solução de Problemas

Para Kolmogorov, a prática matemática consiste em formular problemas e buscar soluções. Por outro lado, sabemos, o complexo processo de produção do

[1] Para maiores detalhes ver [Att08].

conhecimento matemático é finalizado por uma exposição onde enuncia-se (publica-se) um teorema, tal que, idealmente, todo enunciado de um teorema deve vir seguido de uma prova.[2]

Seguindo a Corcoran ([Cor89], pág. 292), uma proposição da qual não sabemos o que é o caso, se ela é verdadeira ou se ela é falsa, constitui uma hipótese[3] e nos apresenta um problema, o problema de determinar qual é o caso. A solução da hipótese viria ou de mostrar que ela é verdadeira, apresentando uma prova, ou de mostrar que ela é falsa, apresentando uma refutação da proposição.[4] Se nenhum dos dois resultados for alcançado, não se pode falar em solução.

Por princípio consideramos que é impossível resolver positivamente os problemas de demonstrar e de refutar uma proposição. E quando nenhuma das duas ações é efetuada, a proposição permanece como hipótese. Também, por princípio, a solução positiva de um dos dois é interpretada como a solução negativa do outro.

Estabeleçamos alguma terminologia antes de prosseguir. Quando resolvemos um problema (como o de encontrar a demonstração de uma proposição que antes era uma hipótese) diremos que o problema é **positivamente solucionável**. Por outro lado, às vezes, mostraremos que não há como resolver o problema. Neste caso, diz-se que o problema é **insolúvel** ou **negativamente solucionável**. Por fim, o conjunto de problemas positivamente e negativamente solucionáveis constitui idealmente o conjunto dos **problemas solúveis**.[5]

---

[2] A este respeito, a concepção intuicionista é algo distinta, embora os conceitos envolvidos sejam os mesmos. A nosso ver, essa interpretação comete um erro ao confundir justificação e enunciação. Para os intuicionistas a asserção matemática é feita a partir de uma constatação empírica, a de que uma construção probatória foi produzida.

[3] Este uso do termo "hipótese" não corresponde à semântica contemporânea usual do termo.

[4] Corcoran assume que as proposições são bivalentes, o que obviamente não é o caso da posição intuicionista.

[5] Desse modo, o princípio de bivalência para as proposições equivale a dizer que toda hipótese é solucionável. Van Dalen ([Dal04]) faz uma observação que vai no mesmo sentido, pág. 9, nota 6.

De modo geral, uma proposição qualquer permanecerá problemática (para alguém) apenas enquanto permanecer como hipótese (para esse alguém). A solução de um problema é sempre relativa a um agente epistêmico, embora em casos específicos a referência a esse agente seja suprimida, como no caso da validez matemática[6]. Os problemas que envolvem provar e refutar são apenas espécie particular de problemas.

Como vimos, Kolmogorov faz referência explícita aos problemas de construção geométrica. Contudo, em sua maioria, os enunciados das *propositiones* da Geometria de Euclides são teoremas e não a expressão de problemas. Elas são afirmações seguidas de prova. As provas terminam com a expressão: "**como era para ser demonstrado**". Exemplo típico é o teorema de Pitágoras. Assim, uma *propositio* geométrica *p* tipificável pela expressão "como era para ser demonstrado" estará *a priori* correlacionada a dois problemas distintos: o de demonstrar a proposição *p* e o de refutar a proposição *p*.

Naturalmente, as *propositiones* da Geometria de Euclides serão problemáticas apenas de modo relativo ao leitor e por um breve espaço de tempo. Durante o tempo que decorre entre a compreensão da *propositio* geométrica e a compreensão da prova ou da construção que era demandada.

Todavia, para entender qual tese queria defender Kolmogorov com respeito à matemática e seus problemas, são as três primeiras *propositiones* da Geometria de Euclides que devem ser levadas em conta. Elas têm um caráter especial, heterogêneo às demais, pois, ao invés de uma prova, requerem que uma construção seja efetuada. As três são instâncias de um mesmo tipo de problema. O problema de providenciar um procedimento (série de ações) cujo resultado é um objeto geométrico de determinadas propriedades: (I) **construir** um triângulo eqüilátero a partir de um dado segmento de reta; (II) "**mover**"**/replicar** um segmento de reta

[6] Por causa do seu caráter intersubjetivo.

(seu ponto inicial) sobre um ponto dado; (III) **diminuir** de um segmento de reta dado o comprimento de outro segmento de reta (menor).

A exposição relativa a cada uma das *propositiones* geométricas I, II e III termina com a expressão: "**como era para ser feito**". A expressão coroa a apresentação de uma solução relativa ao problema formulado. Estas formulações pedem que uma determinada ação e um determinado resultado sejam realizados.

As três construções envolvidas nas primeiras *propositiones* constituem esquemas que são empregados em outras construções envolvidas nas *propositiones* subseqüentes. Assim a sistematização de esquemas de solução para problemas da qual falava Kolmogorov aplica-se com justeza às três primeiras *propositiones*, elas serão usadas adiante na Geometria de Euclides para a resolução de outros problemas.[7]

Pelo menos, sob esta interpretação, compreende-se melhor porque Kolmogorov propõe a substituição do conceito problema no lugar do conceito proposição. Embora toda prova de um teorema possa ser visualizada como solução a um problema, é importante observar que o conceito contemporâneo de prova – de um discurso assertivo encadeado – não é imediatamente aplicável a todas as *propositiones*, em especial aos três casos citados. Mas o conceito de problema é aplicável a todas, seja de forma primitiva, seja de forma derivada.

Somente aquelas *propositiones* geométricas cuja exposição termina pela expressão "como era para ser demonstrado" serão consideradas propriamente proposições segundo a acepção lógico-filosófica contemporânea do termo. Só estas *propositiones* geométricas são teoremas no sentido de asserções verdadeiras/provadas, tal que o conteúdo da asserção é uma proposição. As *propositiones* geométricas cujo fecho é dado pela expressão "como era para ser feito" não são verdadeiramente proposições. De fato, a expressão "**construir** um

[7] Também aplica-se com justeza às *propositiones* que são para demonstrar, pois as *propositiones* posteriores são provadas com apoio das *propositiones* (teoremas) anteriores. Nesse caso, o fato de podermos sistematizar esquemas é uma característica dos sistemas axiomáticos.

triângulo eqüilátero a partir de um segmento de reta dado" não pode sozinha ser objeto do ato lingüístico de asserção.

Kolmogorov era ciente da correlação das proposições matemáticas com o conceito de problema via ação de demonstrar. Mas ao propor um cálculo de problemas, ele simplesmente parece ter em mente outra coisa. O autor ([Kol32], pág. 329) oferece quatro exemplos de problemas matemáticos, dentre os quais o seguinte: (3) **desenhar** um círculo que passe através de três pontos dados *(x,y,z)*. A semelhança de formulação deste exemplo com as três primeiras *propositiones* é notável. Vale ressaltar, o autor não se propõe a oferecer uma elucidação da noção de problema *(ibid.* pág. 329), ele considera os exemplos dados como suficientes para caracterizar o emprego do termo. Este é seu ponto de partida.

3) Porque Usar a Noção de Problema com o Intuicionismo?

Desde o ponto de vista de Kolmogorov, a lógica intuicionista corresponderia formalmente a um cálculo de problemas e deveria ser substituída por este cálculo, no qual os objetos básicos não são as proposições (de uma teoria), mas os problemas. A razão para esta substituição é consubstancial à tentativa de desfazer uma dificuldade presente na análise que o intuicionismo havia direcionado à negação de uma proposição universal[8]. Como toda proposição que tenha algum conteúdo deveria fazer referência a um estado de coisas acessível à nossa experiência, a negação de uma proposição universal *a*, para o caso de um domínio infinito, não poderia significar meramente que a proposição é falsa, diz Kolmogorov, mas deveria significar o mesmo que (*ibid.* pág. 332):

> *... uma proposição existencial: "Existe uma cadeia de inferências lógicas que, sob a assumção da correção de* a*, leva a uma contradição".*

[8] Em todo caso, a análise que Weyl ([Wey21]) apresenta como sendo intuicionista.

Antes de prosseguir, consideremos brevemente um problema bastante discutido na literatura mais recente e intimamente ligado à citação dada.[9] Aparentemente, a conclusão a que deveríamos chegar a partir das duas últimas observações é a de que ao provar a negação de uma afirmação universal **mostramos** "**uma cadeia de inferências lógicas que, sob a assumção da correção de *a*, leva a uma contradição**", segundo Kolmogorov. Este ponto é notável, pois a conclusão que se impõe aqui é a de que, do ponto de vista do nosso autor, na prova da negação de uma proposição universal, aquilo que deve ser exibido são os passos inferenciais que levam da assumção à conclusão (contraditória). Mas, se o que deve ser mostrado é uma construção, nesse caso a construção requerida envolve uma cadeia de inferências partindo da suposição da correção de *a*.[10]

Retornando a exposição do distinguido lógico, ele observa que, segundo a crítica brouweriana, uma proposição existencial não pode ser asserida sem dar uma construção correspondente. Todavia, uma proposição existencial não pode simplesmente ser assimilada à afirmação de que nós encontramos um elemento com as propriedades requeridas dentro do domínio. De outro modo a proposição seria falsa antes de que a construção fosse realizada e passaria a verdadeira depois de realizada.

A observação é relevante, já que segundo a interpretação intuicionista acerca das asserções uma asserção é o mesmo que afirmar que uma certa construção foi efetuada[11]. A afirmação existencial seria simplesmente falsa em um tempo no qual ainda não tenha sido exibido o elemento (já que é verdade que **eu não efetuei a construção ...**) mas passaria a ser verdadeira depois de exibir o elemento (ou divisar

[9] Ver [Att08].

[10] Exibir um elemento α para o qual $\sim P(\alpha)$ nos permitirá inferir uma contradição da forma $P(\alpha) \wedge \sim P(\alpha)$ tal que que o primeiro componente da conjunção é inferido a partir da suposição $\forall x P(x)$. Por seu turno, só podemos provar $\sim P(\alpha)$ se inferimos uma contradição a partir da suposição $P(\alpha)$.

[11] Lembramos que o significado intuicionista da asserção de uma proposição *p* é, como diz Heyting ([Hey56], pág. 8): "*eu efetuei a construção mental indicada por ...*".

um procedimento para encontrar um).[12] Mas então, as proposições existenciais teriam um estatuto bem particular (e curioso, já que a noção intuicionista de asserção funciona de outro modo para elas), teriam um conteúdo que supostamente não mudaria ao longo do tempo e que só poderia ser afirmado em condições especiais.[13]

A solução proposta pelo nosso autor toma por base a noção de problema. Segundo o autor, por trás da proposição existencial divisamos um problema: o de encontrar na totalidade infinita um elemento com as propriedades requeridas. Tenha ou não sido solucionado, o problema teria um significado determinado e independente da existência ou não de uma solução, independente do nosso conhecimento. Se ele for resolvido, obteríamos uma asserção intuicionista, ou seja, poderíamos afirmar o fato (empírico) de que uma solução foi encontrada. Deste modo, uma proposição existencial será analisada em dois componentes: um elemento objetivo – o problema –, e um elemento subjetivo[14] – a solução. Assim, para Kolmogorov, a asserção intuicionista equivaleria a afirmar que a solução de um problema foi encontrada. A elucidação proposta consiste, pois, em separar dois elementos distintos: o objetivo, significado (problema) por um lado, e o subjetivo, a

[12] Heyting ([Hey56], págs. 18 e 19) introduz uma distinção bem curiosa aqui. Para ele uma negação matemática não é o mesmo que negar que uma construção foi efetuada. É, ao contrário, a afirmação de que "eu efetuei na minha mente a construção *B*, a qual deduz uma contradição a partir da suposição de que a construção *A* tenha sido realizada". Embora isso seja um meio de evitar a crítica que está apontando Kolmogorov, a compreensão que o intuicionista tem do conceito de asserção é criticável. O ato realizado em um ato de mentir já não pode mais ser um ato de asserção, desde essa perspectiva. E isso é contrário a semântica usual do termo. Neste sentido, o uso do termo "julgamento", embora eivado de nuances herdadas da história da filosofia, apresenta-se como alternativa.

[13] As proposições matemáticas têm sido historicamente consideradas como o protótipo das proposições cujo valor de verdade não varia no tempo, ou, pelo menos, na visão intuicionista, que no máximo poderiam passar de indeterminadas a determinadas, mas nunca de falsas a verdadeiras. O problema está, a nosso ver, em aliar o significado de uma proposição matemática com o fato empírico de produzir uma prova. Neste sentido a solução que irá propor Kolmogorov é muito interessante.

[14] Sob esta perspectiva é claro que o fato empírico de encontrar uma solução é algo subjetivo, efetuado por um sujeito e idiossincrático (pois bem pode ser um erro, um equívoco).

asserção enquanto fato empírico, afirmação de haver encontrado uma solução, por outro.

Kolmogorov usa o par conceitual problema/solução como forma primordial de compreensão e descrição da prática matemática segundo o ponto de vista intuicionista, mas também da questão relativa ao significado. Por isso, temos fortes razões para crer que ele dá prioridade à expressão “como era para se feito” sobre a expressão “como era para ser demonstrado” em sua prototeoria de problemas. De fato, ele afirma (*ibid.* pág. 333):

> *Assim segue-se que devemos considerar a solução de problemas como a meta independente da matemática (em adição às provas das proposições de uma teoria).*

É preciso reconhecer que a tese contida na citação tem base empírica considerável, e até mesmo um matemático clássico, indisposto a aceitar as “mutilações” intuicionistas, teria dificuldades em rejeitá-la. Em certo sentido, a discussão agora passa a girar em torno do que é que podemos aceitar como solução de um problema.

4) Cálculo de Problemas

O cálculo de problemas de Kolmogorov é introduzido primeiro definindo o que são as fórmulas e o seu significado (*ibid.* pág. 329)[15]:

> *Se* a *e* b *são dois problemas, então* $a \wedge b$ ***designa*** *o problema “de* ***resolver*** *ambos problemas* a *e* b*”, enquanto* $a \vee b$ ***designa*** *o problema “de* ***resolver*** *ao menos um dos problemas* a *e* b*”*

[15] Nossos destaques em negrito. A palavra “designa” é a tradução empregada para o vocábulo alemão “bezeichnet” e a palavra “resolver” é a tradução empregada para o vocábulo alemão “lösen” do original. Na tradução inglesa os termos empregados são “designates” e “to solve”, respectivamente.

Duas observações. Primeira, as fórmulas, como $a \wedge b$, designam problemas[16] como se lê. Segunda, a caracterização propõe uma definição indutiva na qual a palavra "resolver" é um termo genérico que pode ser iterado nas descrições e ele indica uma ação (relativa a problemas).

Há algo que Kolmogorov não torna explícito, mas que podemos inferir das considerações acima: existem problemas atômicos. Se adicionarmos o fato de que ele havia apontado as construções geométricas como exemplo de problemas, concluiremos que um problema atômico involucra uma ação sob nossa hipótese interpretativa. A ação de **construir um triângulo eqüilátero de lado *AB*** torna-se assim **o problema** de **construir um triângulo eqüilátero de lado *AB***, como já apontamos.

A expressão "o problema de" quando anteposta a uma expressão que designa uma ação, seja como instância seja como gênero, torna clara a intenção de tomar a ação nomeada como objetivo a ser realizado, torna clara a intenção de que se deseja uma solução com determinadas características. Nenhuma das duas expressões em negrito no parágrafo anterior é uma proposição. A primeira serve como descrição de um gênero de ação e é transformada na descrição de um gênero de problema na segunda expressão. A solução do problema é um terceiro elemento.

A solução ao problema de construir um triângulo eqüilátero usando régua e compasso envolve o ordenamento e arranjo de uma série de ações (um algoritmo): desenhar um primeiro círculo; depois um segundo círculo; em seguida traçar o segmento de reta do ponto de intersecção dos círculos à extremidade do segmento dado. Assim, ao menos no caso dos problemas geométricos, uma solução é um procedimento. Mas é preciso mais ainda, é preciso garantir que o procedimento produz um resultado que apresenta determinada(s) propriedade(s): que os lados do triângulo sejam realmente idênticos, no caso em tela.

[16] Ver nota de rodapé anterior.

Curiosamente, uma expressão que designa um problema também pode ser transformada em uma expressão que designa novamente uma ação se lhe antepusermos a expressão “resolver”: **resolver o problema de construir** ... Naturalmente, a partir de certo ponto, a reiteração não acrescenta elementos relevantes ao conteúdo: **o problema de resolver o problema de construir** um círculo de raio *AB* é o mesmo que **o problema de construir** um círculo de raio *AB*.

A expressão “o problema de” permite transformar expressões que designam ações em fórmulas do cálculo de problemas. Se *A* e *B* são descrições de ações, *a* [*b*] será a descrição definida de um problema: “o problema de *A* [B]”. Para o caso molecular, usa-se a expressão “o problema de resolver”, já que os componentes são agora problemas. Assim, $a \wedge b$ [$a \vee b$] será a descrição definida de outro problema: “o problema de resolver ambos problemas [pelo menos um dos problemas] *a* e *b*”. Como outra face da moeda, prescrever “**resolver o problema de _____ir (ar/er)**” vem a ser o mesmo que prescrever “**_____ir (ar/er)**”. Assim, como $a \wedge b$ é o problema de resolver ambos os problemas *a* e *b*, a prescrição de resolver $a \wedge b$ vem a ser o mesmo que a prescrição de resolver ambos os problemas *a* e *b*.

Podemos, pois, enunciar a seguinte tese: o cálculo de problemas de Kolmogorov tem por esteio a descrição de ações enquanto gênero, à medida que a matemática para o nosso autor é o âmbito em que as soluções têm validez geral (*ibid.* pág. 330). Entendemos que o fato de ter validez geral advém de considerar um problema geral. A expressão “construir um triângulo de lado *AB*” serve para descrever de modo genérico uma infinidade de ações distintas. Uma solução a este problema deve ser um procedimento capaz de ser aplicado a qualquer uma das distintas ações individuais que caem sob o conceito de ação. Assim, no cálculo de problemas, toda fórmula designaria um problema genérico, por se tratar de matemática, a menção de um problema sempre envolverá um verbo de ação no infinitivo. A expressão contendo o verbo no infinitivo (“construir ....”, por exemplo) é a descrição de um gênero de ação, e indica algo a ser feito quando problematizado:

o problema de construir ... Em um problema, **uma ação passa a ser o foco de uma intenção**.

Sob a tese, a citação da introdução leva a concluir que o autor teria aberto um espaço relevante para considerar uma lógica de ações (sob a forma de gênero) como meio mais fundamental de exame e crítica do conhecimento matemático.

Infelizmente, dizer que problemas matemáticos e lógicos são do tipo de problemas que possuem a propriedade especial da validade geral de suas soluções é ainda pouco para caracterizar a matemática. Faltaria à proposta uma análise que permita distinguir problemas matemáticos de problemas não-matemáticos. As decisões metodológicas (como a de recusar/aceitar o princípio de terceiro excluído) parecem depender de uma elucidação mais fina do gênero de ações dos quais tratamos no âmbito da matemática; também, não é claro quando a descrição de uma ação pode ser usada para constituir a descrição de um problema matemático.

Notamos ademais que há certa ambiguidade no termo "solução". Ele pode ser usado para designar uma série de atividades visando um determinado fim, mas também pode ser usada para designar somente este fim.[17] Essa diferença aparece na formulação de dois problemas que Kolmogorov dá como exemplo (*ibid.* pág. 329): (1) encontrar quatro números inteiros x, y, z e n para os quais valha a relação $x^n+y^n=z^n$, para $n>2$; (2) desenhar um círculo que passe através de três pontos (x,y,z). No primeiro problema bem pode ser irrelevante a forma como os quatro números são encontrados, eles seriam "a" solução (embora saibamos que o problema é insolúvel e, por isso, a forma em que se mostra a insolubilidade do problema é de máxima relevância). No segundo problema, a própria atividade de desenhar o círculo é "a" solução do problema. Esta ambiguidade também deveria ser objeto de exame e elucidação.

[17] O mesmo ocorre com o termo "construção". Observamos que Veloso ([Vel84], pág. 36) reconhece: "*... às vezes, queremos encarar uma solução não meramente como uma atribuição de resultados a dados, mas sim como a própria descrição desta atribuição*".

5) Conclusão

O princípio de terceiro excluído não será válido no cálculo de problemas de Kolmogorov. A razão pode ser visualizada de modo bem simples. Ele considera que uma fórmula contendo uma variável, como $a \vee \neg a$, será considerada um problema resolvido somente no caso em que se possua um método geral para todo problema *a* que ou solucione *a* positivamente ou solucione *a* negativamente. Mas não existe quem possa sustentar ter a posse de um tal método.

Veloso [Vel84], em sua teoria de problemas, propôs entender a solução de um problema como uma função. Usando este conceito no seu sentido clássico, podemos afirmar que para todo problema existe ou não existe uma função que o soluciona, e o princípio de terceiro excluído passa assim a ser novamente válido.

Um dos tópicos que merece desenvolvimento é o tópico dos problemas atômicos. Se um problema atômico envolve a descrição de uma ação, a realização desta ação usualmente demanda a realização de uma série de outras ações. Assim, a um nível atômico, uma teoria que seja desenvolvida a partir de problemas deve providenciar uma forma de correlacionar ações. Há um modo de fazer isso, considerando a noção de que um problema pode se reduzir a outros. Mas talvez isso não seja suficiente, já que a ordem das ações é relevante para alcançar uma solução.

Quando consideramos uma teoria matemática, um modo de tratar as ações consiste em estabelecer quais as ações serão consideradas ações básicas constitutivas da teoria, por exemplo: traçar círculos com um centro e um raio dado e traçar segmentos de retas entre dois pontos. Tanto o problema de traçar um círculo a partir de um ponto *A* com raio *AB* quanto o problema de traçar um segmento de reta do ponto *A* ao ponto *B* poderiam ser considerados como problemas imediatamente resolvidos (uso de régua e compasso). Considerando a geometria vemos que a teoria não pode ser desenvolvida tomando por base unicamente essas ações. Necessitamos também fazer comparações, estabelecer relações, etc. A questão que se nos impõe é de como introduzir estes elementos em uma teoria matemática formulada por meio de um cálculo de problemas. Essa é uma questão em aberto.

6) Bibliografia

[Att08] Van Atten, M. "The development of intuitionistic logic", Stanford Encyclopedia of Philosophy.

[Cor89] Corcoran, J. "Argumentações e Lógica", O Que Nos Faz Pensar, n. 28, dezembro, Filosofia, PUC-Rio, 2010 (tradução de Argumentation and logic, Argumentation 3, págs. 17-43) 1989.

[Dal04] Van Dalen, D. "Kolmogorov and Brouwer on constructive implication and the ex falso rule", Russian Math Surveys, 59, págs. 247–257, 2004.

[Hey56] Heyting, A. *Intuitionism: An introduction*, North-Holland, 1971.

[Kol32] Kolmogorov, A. "On the interpretation of Intuitionistic logic", págs. 328-334 em From Brouwer to Hilbert, ed. P. Mancosu, Oxford Press, 1998 (tradução de Zur deutung der intuitionistichen logik, Mathematische Zeitschrift 35, 1932, págs. 58-65).

[Vel84] Veloso, P. "Aspectos de uma teoria geral de problemas", Cadernos de História e Filosofia da Ciência 7/1984, CLE, Unicamp.

[Wey21] Weyl, H. "On the new foundational crisis of mathematics", págs.86-118 em From Brouwer to Hilbert, ed. P. Mancosu, Oxford Press, 1998 (tradução de Über die neue grundlagenkrise der Mathematik, Mathematische Zeitschrift 10, 1921, págs. 37-79).