UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS HUMANAS
FILOSOFIA BACHARELADO

ANDRÉ LUIZ RIBEIRO

GEOMETRIA E ARITMÉTICA: UM ENCAIXE IMPERFEITO

CIDADE DE GOIÁS
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS HUMANAS

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome(s) completo(s) do(a)(s) autor(a)(es)(as): André Luiz Ribeiro

Título do trabalho: "Geometria e Aritmética: um encaixe imperfeito"

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;

- Submissão de artigo em revista científica;

- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **André Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 08/04/2022, às 09:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **ANDRÉ LUIZ RIBEIRO**, **Discente**, em 08/04/2022, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2809001** e o código CRC **EC19A426**.

Referência: Processo nº 23070.014923/2022-34 SEI nº 2809001

ANDRÉ LUIZ RIBEIRO

GEOMETRIA E ARITMÉTICA: UM ENCAIXE IMPERFEITO

Monografia apresentada à Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para a conclusão do curso de Bacharelado em Filosofia.

Orientador: Prof. Dr. André da Silva Porto

CIDADE DE GOIÁS

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Ribeiro, André Luiz
Geometria e Aritmética: Um Encaixe Imperfeito [manuscrito] / André Luiz Ribeiro. - 2022.
XLV, 45 f.

Orientador: Prof. Dr. André da Silva Porto.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Humanas, Filosofia, Cidade de Goiás, 2022.

1. Geometria. 2. Aritmética. 3. Incomensurabilidade . 4. Existência . I. Porto, André da Silva, orient. II. Título.

CDU 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e quatro dias do mês de março do ano de 2022 às 15h15min (por meio do Zoom), iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado "*Geometria e Aritmética: Um Encaixe Imperfeito*", de autoria de André Luiz Ribeiro, do curso de Filosofia da Faculdade de Filosofia/Campus Goiás da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. Dr. André da Silva Porto (FAFIL-UFG), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Prof. Dr. Cristiano Novaes de Rezende (FAFIL-UFG) e Prof. Dr. Diego Pinheiro Fernandes (UFPB). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 10,0 (dez), tendo sido o TCC considerado aprovado.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Diego Pinheiro Fernandes**, **Usuário Externo**, em 25/03/2022, às 15:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **André Da Silva Porto**, **Professor do Magistério Superior**, em 25/03/2022, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Cristiano Novaes De Rezende**, **Professor do Magistério Superior**, em 27/03/2022, às 15:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2780287** e o código CRC **5FD1832A**.

Referência: Processo nº 23070.014923/2022-34 SEI nº 2780287

Resumo

No presente trabalho esclarecemos de que modo a descoberta de magnitudes incomensuráveis impactou a matemática grega e como, ainda hoje, experimentamos os desdobramentos deste fato. Ademais, contrastando a doutrina de Eudoxo sobre razão e proporção e as formulações de Descartes que viabilizaram um tratamento aritmético de grandezas geométricas, mostramos como, no início da modernidade, o esforço para superar o abismo entre Geometria e Aritmética tomou forma. Por fim, explorando as divergências entre matemáticos modernos e construtivistas contemporâneos a respeito da noção de existência, mostramos como, ao adotarmos uma concepção mais rigorosa de existência como significando “posse em mãos” de um método para identificação de objetos matemáticos, o encaixe imperfeito entre Geometria e Aritmética volta, então, à baila, reabilitando-se assim a distinção entre números e magnitudes e a independência lógica entre provas geométricas e provas aritméticas.

Palavras-chave: geometria, aritmética, incomensurabilidade, existência.

Abstract

In the present work we clarify how the discovery of incommensurable magnitudes impacted Greek mathematics and how, even today, we experience the consequences of this fact. Furthermore, contrasting Eudoxus' doctrine on ratio and proportion and Descartes' formulations that enabled an arithmetical treatment of geometric quantities, we show how, at the beginning of modernity, the effort to overcome the abyss between Geometry and Arithmetic took shape. Finally, exploring the divergences between modern mathematicians and contemporary constructivists regarding the notion of existence, we show how, by adopting a more rigorous conception of existence as meaning “hand possession” of a method for identifying mathematical objects, the imperfect fit between Geometry and Arithmetic then returns to the fore, thus rehabilitating the distinction between numbers and magnitudes and the logical independence between geometric proofs and arithmetic proofs.

Keywords: geometry, arithmetic, incommensurability, existence.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e aos meus irmãos por, ao longo destes (longos) anos de graduação, terem me garantido, como aliás fizeram a vida toda, o suporte material e afetivo sem o qual eu não teria chegado a escrever este trabalho. Agradeço ao meu bom e velho amigo Lucas Romanowski, com quem eu tenho tido já há 13 anos o prazer de discutir, ultimamente com uma frequência menor do que deveríamos, sobre as questões mais relevantes e instigantes da existência. Sou profundamente grato, ademais, à professora Renata Arruda, minha orientadora de Iniciação Científica e Monitoria, por todos os esclarecimentos, conselhos e sugestões que recebi dela ao longo dos últimos anos. Ao professor Cristiano Rezende, sou grato não apenas por ter aceito o convite para integrar a banca diante da qual defenderei este trabalho, mas também e sobretudo por ter me inspirado, ainda em 2012, a um dia, quem sabe, me tornar um filósofo, e a ingressar no curso que agora estou prestes a terminar. Ao professor Diego, que também gentilmente aceitou o convite para compor a banca da minha defesa, devo não apenas as aulas de Lógica ministradas por ele em 2019, nas quais eu ouvi pela primeira vez sobre coisas estranhas como “intuicionismo lógico” e sobre pensadores como Cantor e Hilbert, mas também a motivação para fazer da filosofia da lógica e da matemática a minha área de formação. Agradeço muitíssimo, também, ao professor André Porto, que aceitou prontamente a dura tarefa de me orientar na elaboração da presente monografia, orientação sem a qual esta empreitada certamente não teria passado da introdução, e a quem eu devo as ótimas aulas de Filosofia da Matemática que me serviram de base para que eu pudesse, ainda que com menos habilidade do que eu gostaria, tratar dos temas aqui tratados. Por fim, sou profundamente grato a Deus, mesmo por todos os acontecimentos inesperados, contratempos, decepções e equívocos que me trouxeram até aqui, e por hoje eu conseguir ver sentido em muito de tudo isso, ainda que não em tudo.

“ho theos geometrei”

(Platão)

“ho theos arithmetidsei”

(Gauss)

“Mathematics belongs to man, not to God. (...) If God has mathematics of his own that needs to be done, let him do it himself.”

(Bishop)

Geometria e Aritmética, um encaixe imperfeito

ÍNDICE

Introdução

1 – Magnitudes incomensuráveis e a impossibilidade de encaixe

1.1 - Breve histórico

1.2 - Duas noções de "razão"

1.3 - Magnitudes incomensuráveis e o algoritmo de Euclides

1.4 - Incomensurabilidade, medições empíricas e determinações matemáticas

2 – Um encaixe aparente

2.1 - Descartes e o método analítico

2.2 - Operações aritméticas com grandezas geométricas

2.3 - Existência como "subsistência genérica"

2.4 – Números Reais e o axioma de Cantor-Dedekind

3 – Retomada das posições gregas: o desencaixe reabilitado

3.1 - O construtivismo: contornos gerais

3.2 - Brouwer, Wittgenstein e a construção dos "números" Reais

3.3 - O Teorema do Valor Intermediário

Conclusão

INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade, quando a pretensão pitagórica de exprimir todas as coisas por meio de números viu-se frustrada pela descoberta de grandezas geométricas incomensuráveis, compreender de que modo Geometria e Aritmética se relacionam tem se mostrado um problema intrincado, sobre o qual vários filósofos e matemáticos têm se debruçado sem que, contudo, haja nos dias atuais um consenso. O fato de não existir entre determinadas magnitudes uma medida comum, numericamente exprimível, mostrou aos gregos que não poderia haver entre tais disciplinas senão um "encaixe imperfeito", expressão que cremos capturar bem as ideias, decorrentes da descoberta em questão, de que **1)** números e magnitudes não podem ser tratados indistintamente e **2)** entre a linguagem geométrica e aquela da aritmética existe uma independência lógica tal que não se pode admitir como livremente intercambiáveis as demonstrações próprias a cada uma destas disciplinas.

A esse respeito, na contemporaneidade, a comunidade matemática se divide entre os que creem que o abismo entre Geometria e Aritmética foi superado, fundamentalmente através dos trabalhos realizados por matemáticos do século XIX como Cantor e Dedekind, e aqueles ditos "construtivistas", minoritários, para os quais as posições gregas seguem, no geral, válidas. Diferentemente, contudo, do que se passa no âmbito das ciências empíricas, onde divergências entre pesquisadores costumam ser bem aceitas e mesmo encaradas como promotoras do progresso, entre os que se ocupam da Matemática (tida desde sempre como exemplo paradigmático de clareza e precisão) desacordos como este de que trataremos parecem, antes, denunciar uma incomoda e intolerável fragilidade; a presença, em alguma medida, de confusões conceituais que atestam contra a credibilidade da Matemática, o que torna o esforço que pretendemos aqui realizar, de lançar luz sobre tais questões, mais do que justificado.

No presente trabalho pretenderemos, então, a princípio, lançar luz sobre alguns dos principais impactos da descoberta da incomensurabilidade sobre a matemática grega, marcadamente sobre a noção de "razão" que, já em uso pelos

matemáticos gregos ao tempo em que a mencionada descoberta teria se dado, teve, contudo, de ser reformulada para dar conta dos desafios que o novo problema impunha. Na sequência, apresentamos uma prova da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado, empregando para tanto o algoritmo de Euclides, prova cujos fundamentos filosóficos buscaremos esclarecer no tópico seguinte ao tratarmos da distinção entre medições empíricas e determinações matemáticas.

Em seguida, no segundo capítulo, trataremos dos principais esforços realizados ao longo da modernidade para escamotear as diferenças entre Geometria e Aritmética, dando ênfase, num primeiro momento, ao desenvolvimento da geometria analítica no início da modernidade e ao o tratamento aritmético de grandezas geométricas possibilitado pelas inovações matemáticas introduzidas por Descartes. A fim de esclarecer, então, de que modo, seguindo os passos dos matemáticos do início da modernidade, Cantor, Dedekind e outros matemáticos do século XIX pretenderam resolver definitivamente a questão do desencaixe entre Geometria e Aritmética, nos centraremos no debate a respeito da noção abstrata de "existência" de que estes matemáticos lançaram mão e que, segundo cremos, é condição necessária para que tenham chegado às conclusões a que chegaram.

Sem qualquer pretensão de oferecer uma explicação exaustiva a respeito do trabalho destes matemáticos, propósito que demandaria de nós um esforço muito maior do que o presente trabalho comporta, apresentaremos uma breve caracterização da definição dos números reais proposta por Dedekind e, em seguida, no terceiro capítulo, das definições propostas por Brouwer e Wittgenstein, a fim de, contrastando tais definições, apontar para o papel que a noção abstrata de existência defendida pelos modernos desempenha no projeto de colapsar as linguagens geométrica e aritmética, bem como para o papel que a noção construtivista de existência sustentada por Brouwer e Wittgenstein desempenha no projeto de impedir tal colapso. Por fim, pretenderemos mostrar, através da divergência entre modernos e construtivistas a respeito do Teorema do Valor Intermediário, como a contraposição entre tais escolas acerca da noção de

existência impacta também sobre a compreensão da distinção e provas geométricas e provas aritméticas.

1 – MAGNITUDES INCOMENSURÁVEIS E A IMPOSSIBILIDADE DE ENCAIXE

1.1 - Breve histórico

Para que tenhamos noção da importância atribuída pelos gregos ao problema da incomensurabilidade, basta que consideremos *Os Elementos* de Euclides, obra do século III a.c. que melhor sintetiza o pensamento matemático grego da antiguidade e cuja influência se faz sentir ainda nos dias atuais, sendo amplamente considerada uma das obras mais importantes da história da humanidade. Nos *Elementos*, dividido por Euclides em treze livros, a incomensurabilidade é o principal tema tratado ao longo do livro X, o que já significaria muito se levássemos em conta o fato de que tal livro reúne 115 das 465 proposições de que a obra é constituída, pouco menos que um quarto. Para além disso, contudo, a incomensurabilidade também é o grande problema por trás da elaboração da doutrina das razões e proporções apresentada por Euclides no livro V, doutrina cuja autoria é atribuída a Eudoxo de Cnido e cujos resultados reverberam por todo o restante da obra. A incomensurabilidade, portanto, é certamente o grande destaque dos *Elementos*, ao lado do já mencionado estudo sobre proporções e do estudo sobre sólidos regulares, apresentado pelo autor no livro XIII.

Tal importância não é, de modo algum, exagerada por Euclides, a julgar pela versão[1] mais aceita e difundida da história da descoberta das grandezas incomensuráveis. Fundada principalmente em textos de autores do século III da era comum, como Jâmblico e Proclo (textos escritos, portanto, cerca de sete séculos após os eventos neles relatados), tal versão situa a mencionada descoberta no seio

1 De acordo com Roque, tal versão só teria se consolidado a partir de um artigo de Von Fritz: "Em um artigo publicado em 1945, "The discovery of incommensurability by Hippasos of Metapontum" (A descoberta da incomensurabilidade por Hípaso de Metaponto), Von Fritz conjectura que a incomensurabilidade tenha sido descoberta durante o estudo do problema das diagonais do pentágono regular, que constituem o famoso pentagrama. A lenda da descoberta dos irracionais por Hípaso foi erigida a partir desse exemplo." (2012, p. 95)

da escola pitagórica que, em razão da crença de que o número seria a essência de todas as coisas, teria buscado mantê-la em sigilo. A divulgação de que existiriam magnitudes cujas relações fossem numericamente inexprimíveis colocaria em xeque os fundamentos do pensamento pitagórico e, em razão disso, conta-se que o responsável por trazer a público a descoberta, Hippasus de Metapontum, teria sido assassinado como retaliação. Ainda segundo tal lenda, às revelações de Hippasus teria se seguido uma crise sem precedentes no âmbito da matemática grega, uma crise de fundamentos semelhante, de certo modo, àquela que a modernidade conheceu a partir do desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

Esta versão da história tornou-se bastante popular entre os séculos XIX e XX. Provavelmente tal popularidade se deveu, em alguma medida, ao tom épico que a história confere ao esforço empreendido a essa altura por matemáticos como Cantor e Dedekind em relação à definição dos números Reais, esforço este que, pretensamente, teria resolvido de uma vez por todas o problema das magnitudes incomensuráveis tornando possível exprimir numericamente a relação entre elas e dando fim à crise milenar instaurada por Hippasus. Entretanto, e apesar de não termos a pretensão de promover no presente trabalho uma análise histórica aprofundada de como tais eventos se deram, vale a pena notar que, como afirma Roque (2012), tanto a hipótese de que a descoberta teria se dado no âmbito da escola pitagórica quanto a suposição de que ela teria levado a uma crise profunda da matemática grega são hoje contestadas por um bom número de historiadores, embora a importância de tal descoberta seja, naturalmente, inquestionável.

1.2 - Duas noções de “razão”

De qualquer modo, ainda que não se saiba ao certo quem teria sido o responsável pela descoberta da incomensurabilidade e em que contexto ela teria se dado, parece provável que tenha acontecido entre os séculos V e IV antes da era

comum[2]. Alternativamente à versão tradicional da história, especula-se[3] que Teeteto, matemático grego ligado ao círculo de Platão, possa ter se deparado com o problema ao lidar com a aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Ademais, a teoria das razões e proporções entre magnitudes que Euclides expõe no livro V dos *Elementos*, atribuída a Eudoxo de Cnido (também ligado à Academia de Platão) e que dataria do século IV, pressupõe, como já dissemos, o problema em questão. No livro X dos *Elementos*, Euclides apresenta uma outra noção de "razão" que, como afirma Thomas L. Heath (1908), seria historicamente anterior à do livro V, anterior à própria descoberta da incomensurabilidade, e abarcaria apenas relações entre grandezas comensuráveis. A noção exposta no livro V, então, seria mais abrangente e teria sido elaborada justamente para possibilitar que se tratasse como razões as relações entre magnitudes incomensuráveis, ainda que não fosse possível expressá-las numericamente.

Fundamentalmente, desde a perspectiva do livro X, haver uma razão entre duas magnitudes seria o mesmo que haver entre elas uma medida comum. O fato de que este seria o sentido original do termo, como afirma Heath, "is proved by the use of the term 'alogos' for the incommensurable, which means irrational in the sense of not having a ratio to something taken as rational" (1908, p.117). Contudo, embora possamos tender a superestimar a relevância histórica das ideias apresentadas no livro X, visto que ainda hoje nos referimos às relações entre grandezas incomensuráveis (ou às expressões "numéricas" que as representam, como $\sqrt{2}$ e π) como "irracionais", as ideias avançadas no livro V dos *Elementos* tiveram, talvez, um impacto maior. Tais ideias, sobretudo a definição (5) de "igualdade de razões", na qual se afirma que

> "Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta,

2 Tanto Von Fritz quanto Roque situam a essa altura a descoberta, apesar de incertas as suas origens.

3 Hipótese sugerida por Roque (2012)

> relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes." (Euclides, 2009, p. 205)

tiveram extrema importância na modernidade, não obstante a restrição a que duas grandezas sejam "de mesmo tipo" para que se afirme haver entre elas uma razão (restrição apresentada na def. 3) ter sido duramente atacada, no início da modernidade, por Descartes, como veremos no capítulo seguinte. Nas palavras de Ávila, referindo-se à def. 5 do livro V dos *Elementos*, "muito notável é o fato de que as mesmas idéias de Eudoxo seriam utilizadas mais de dois milênios depois por Richard Dedekind (1831-1916) na construção de uma teoria rigorosa dos números reais" (1985, p. 1).

É importante ressaltar, entretanto, que apesar de ter viabilizado na antiguidade grega o tratamento matemático de grandezas incomensuráveis, a doutrina de Eudoxo não promoveu, como viriam a fazer os modernos (dentre eles, Dedekind) qualquer confusão entre números e magnitudes. Ao contrário, as posições avançadas no livro V "resolvem" o problema justamente ao promover um divórcio entre "razão entre magnitudes" e a exigência de que estas sejam numericamente representáveis (isto é, que tenham uma medida comum), de tal modo que, ainda que a relação entre o lado e a diagonal do quadrado não possa ser expressa numericamente, podemos dizer que tal relação existe e que é a mesma entre quadrados de diferentes dimensões: a razão entre lado e diagonal de um quadrado cujo lado tenha comprimento igual a X é a mesma que a razão entre lado e diagonal de um quadrado cujo lado meça Y; há entre eles uma "igualdade de razões", coisa que não se poderia afirmar não fosse a doutrina de Eudoxo. Como afirma De Morgan (1841) apud Heath, aqui "razão" assume o sentido de "magnitude relativa" e "sameness of relative magnitude may exist where quantuplicitative expression is impossible" (1908, p. 118).

1.3 - Magnitudes incomensuráveis e o algoritmo de Euclides

No livro X, Euclides apresenta de maneira bastante clara o que se deve entender por magnitudes comensuráveis e incomensuráveis e emprega em vários momentos um método conhecido como antifairese ou, hoje em dia, como algoritmo de Euclides, procedimento definido pelo autor tanto no livro VII (onde é aplicado a números) quanto no próprio livro X (onde é aplicado, sobretudo, a segmentos incomensuráveis), a que os gregos em geral recorriam para a identificação de razões entre números ou seguimentos. No livro X, entretanto, o algoritmo ganha uma outra finalidade, como veremos adiante.

“Magnitudes são ditas comensuráveis”, afirma o autor na definição I do livro X, “as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se". Como esclarece Heath (1908) ao explicar o algoritmo de Euclides, tal medida comum (a razão antifairética) entre comensuráveis é encontrada quando procedemos a subtrações recíprocas entre tais magnitudes (suponhamos, **A** e **B**), a menor (**B**) subtraída da maior (**A**), o resto (**R**) de tal operação subtraído, por sua vez, da magnitude menor (**B**), e assim até se chegue, em uma sequência finita de passos, a uma grandeza (**U**) tal que **U** meça tanto **A** quanto **B**.

Se, de saída, já dispomos das medidas correspondentes a **A** e **B**, isto é, se ambos estes seguimentos estão numericamente apresentados, não cabe qualquer questionamento acerca da comensurabilidade entre **A** e **B**, visto que, com certeza, ao menos a unidade de medida empregada (e.g. metro, centímetro) mede, simultaneamente, ambos os seguimentos, e a utilidade do algoritmo consiste então em nos fornecer o maior seguimento entre os que medem simultaneamente **A** e **B**. Entretanto, caso os seguimentos não tenham sido numericamente apresentados, o algoritmo de Euclides poderá 1) nos proporcionar uma medida comum entre eles, caso sejam de fato comensuráveis, ou 2) nos proporcionar uma prova de sua incomensurabilidade, uma vez que, neste caso, nunca se chega a uma subtração entre seguimentos cujo resto seja zero. Nas palavras do próprio Euclides, expressas na proposição II do livro X:

> "Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis." (Euclides, 2009, p. 355)

Suponhamos, então, que **A** meça dez centímetros e **B** meça seis centímetros. Pelo algoritmo de Euclides, encontraremos a medida comum entre ambos subtraindo **B** de **A**, isto é, medindo **A** por meio de **B**. Concluiremos que **B** mede **A** uma vez, contudo de maneira inexata, sobrando então um resto **R** cuja medida é quatro centímetros. Agora medimos **B** através de **R**, subtraindo **R** de **B**, verificando então que **R** cabe uma vez em **B** e que resta um seguimento **R²**, de comprimento igual a dois centímetros. Por fim, medimos **R** por **R²**, verificando que **R²** cabe duas vezes, exatamente, em **R**. Um seguimento de dois centímetros, portanto, é a maior medida comum **U** que procurávamos: **A** está para **B** assim como 10 está para 6 assim como 5 x 2cm está para 3 x 2cm. Como vimos, de saída já se encontrava perfeitamente satisfeita a caracterização da relação de comensurabilidade exposta na proposição 5 do livro X dos Elementos de Euclides, segundo a qual "magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número" (2009, p. 358). De saída, ao menos "1 centímetro" mediria ambos os seguimentos.

Podemos também, a fim de deixar mais claro o procedimento, representá-lo em linguagem fracionária, apesar de tal linguagem não ser utilizada por Euclides: neste caso, o valor numérico correspondente ao seguimento inicialmente medido (no exemplo acima, 10cm) ocupará a posição de numerador da fração e o valor correspondente ao seguimento medidor (no caso, 6cm) ocupará a posição de denominador. Se a divisão resultar inexata, o resto da divisão (4cm) ocupará a posição de denominador da fração seguinte, enquanto o denominador da fração passará a ocupar a posição de numerador da fração seguinte, e assim até que se chegue a uma fração sem resto. Tal notação fracionária do algoritmo é de grande utilidade quando se trata de compreender o raciocínio por trás do emprego que podemos fazer do algoritmo de Euclides a fim de provar que duas grandezas são

incomensuráveis. Vejamos, por exemplo, o caso da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado[4].

Antes de mais nada, projetamos o lado (L) do quadrado (XYWZ) sobre sua diagonal (D). Veremos que a diagonal (D) é medida pelo lado (WZ^1) uma vez e que resta um seguimento (R). Em seguida, da diagonal (D), partindo de Z^1, traçamos uma reta perpendicular, (Z^1W^1): visto que o triângulo YZ^1W^1 é isósceles, concluímos que Z^1W^1 e R tem a mesma medida, de tal modo que podemos formar um novo quadrado de lado R cuja diagonal (D^1) está descrita sobre o lado do primeiro quadrado. Ademais, visto que as retas WZ e WZ^1 tem o mesmo comprimento e que, portanto, o triângulo Z^1WZ é isósceles, concluímos que o triângulo Z^1W^1Z também é isósceles, de maneira que o seguimento W^1Z é igual a W^1Z^1, que é igual a R.

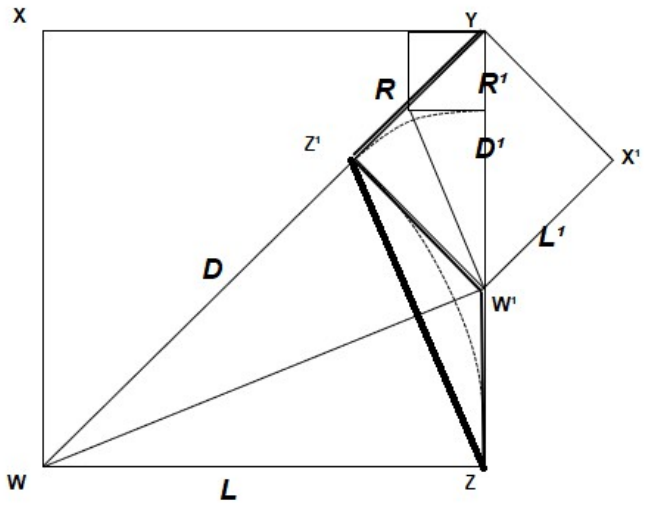

Figura 1

Projetando, então, o lado do segundo quadrado sobre a sua diagonal, como fizemos com o primeiro quadrado, percebemos que o procedimento se repete, que o

4 - Apesar de conhecido na antiguidade e de se valer da antifairese, procedimento popularizado por Euclides, aparentemente tal prova da incomensurabilidade entre lado e diagonal do quadrado não aparece nos Elementos. Como esclarece Roque (2012) “Um indício do emprego desse método pode ser encontrado no tratado peripatético “De lineis insecabilibus” (970a, 15-19), atribuído a Aristóteles”.

lado (L^1) mede a diagonal (D^1) uma vez e resta um seguimento (R^1) um pouco menor, de tal modo que com o seguimento R^1 será possível construir um novo quadrado e repetir, assim, indefinidas vezes o mesmo procedimento. Expressando tal aplicação do algoritmo de Euclides em termos fracionários, temos que a medida da diagonal (D) pelo lado (L), isto é, D/L, é igual (L+R)/L, que é igual a 1+R/L. Visto que R é igual L^1, temos que D/L é igual $1+L^1/L$, que é o mesmo que $1+1/L/L^1$. Ora, como esclarecemos acima ao falarmos dos triângulos isósceles, L é o mesmo que $2x\ L^1 + R^1$. Disto se segue que D/L é igual a $1+½+R^1/L^1$, como vemos na figura 2.

$$\frac{D}{L} = 1 + \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\ddots}\right)}\right)}\right)}\right)}\right)}$$

Figura 2

A sequência indefinida de frações contínuas geradas a partir do algoritmo de Euclides aponta ainda mais claramente que as subtrações recíprocas para o caráter infinitário do método quando aplicado a grandezas incomensuráveis e, diferentemente da prova da incomensurabilidade entre diagonal e lado que encontramos em Aristóteles (que recorre à paridade e imparidade, como veremos mais adiante) aqui encontramos uma aproximação numérica da medida comum entre tais grandezas (1,41463...), um “número” decimal com tantas casas quanto se desejar, restringindo um pouco mais a cada casa a “quota inferior” da “medida comum” que se procura e que, como sabemos, não pode ser encontrada. Para os gregos, que não reconheciam decimais como números, quanto mais decimais

inexprimíveis em uma fração irredutível entre dois inteiros (isto é, irracionais), tal procedimento não poderia nem de longe preencher o abismo que havia se criado entre números e magnitudes, entre geometria e aritmética; pelo contrário, o realçava.

1.4 - Incomensurabilidade, medições empíricas e determinações matemáticas

Como pretendemos ter esclarecido nos tópicos acima, foi precisamente em razão da constatação de que entre certas grandezas é impossível encontrar uma medida comum que se abriu, entre os gregos, um abismo separando aritmética e geometria. A comensurabilidade entre grandezas geométricas, caso sempre se verificasse, garantiria a existência de um encaixe perfeito, harmonioso, entre a linguagem geométrica e aquela da aritmética. Mas como é possível, afinal, que haja magnitudes incomensuráveis se parece tão intuitiva a possibilidade de subdividirmos sempre e indefinidamente qualquer grandeza dada até encontrarmos uma unidade suficientemente pequena para torná-la comensurável com outra grandeza qualquer? Como é possível uma antifairese infinita? A fim de compreendermos o problema, será preciso analisar com cuidado os significados que comumente atribuímos a termos como “medida” e “medição”, bem como prestar atenção à noção de impossibilidade impressa por Euclides em sua definição de “grandezas incomensuráveis”.

Pensemos, por exemplo, em dois fios de barbante de tamanhos diferentes, cada qual descrevendo diferentes segmentos de reta. Tais fios serão comensuráveis, pela definição apresentada acima, se houver entre eles uma medida comum, um seguimento que meça precisamente ambos os fios. Imagine, então, que, utilizando adequadamente uma régua, percebemos que um dos fios mede cinco centímetros, enquanto o outro mede três. Concluímos que se tratam de grandezas comensuráveis, ambos sendo medidos pela unidade “um centímetro”. Entretanto, todos hão de convir que tal medida poderá ter sido mais ou menos precisa a depender da qualidade da régua ou da acuidade visual de quem realiza a medição.

Neste contexto, “medir” nomeia um processo empírico que consiste, fundamentalmente, em representar em linguagem aritmética propriedades geométricas (o comprimento) de objetos físicos, atividade cujos resultados podem variar em graus de precisão; cujos resultados são, portanto, contingentes.

Contudo, também nos valemos de expressões como “medição” ou “comensurabilidade” quando temos em mente proporções geométricas como aquela segundo a qual o lado de um quadrado está para o perímetro deste assim como um (1) está para quatro (4). Há sempre e necessariamente uma “medida comum” entre o lado de um quadrado e o seu perímetro, independentemente da unidade de medida que elejamos ou de qualquer instrumento de medição. Aqui a constatação da comensurabilidade entre tais magnitudes não envolve, ao contrário do exemplo anterior, qualquer recurso à experiência sensível, nem se trata (a relação em questão) de algo contingente, variável em graus. A comensurabilidade entre tais grandezas é algo dado de saída, a priori, em razão da própria definição de “quadrado”, “lado de um quadrado”, “perímetro de um quadro”. Uma figura cujo lado não fosse comensurável com o perímetro, ou cuja razão entre lado e perímetro diferisse da razão entre um (1) e (4), certamente não poderia ser chamada de “quadrado”.

É precisamente sobre esta *necessidade* em matemática (que pressupõe o caráter não-empírico daquilo de que tal ciência trata) que reside a “exatidão” e a “certeza” com as quais estamos familiarizados. A exatidão, portanto, da relação entre as grandezas geométricas e as grandezas aritméticas mencionadas no exemplo acima não constitui uma “representação precisa”, em termos numéricos, da relação entre lado e perímetro do quadrado, mas antes uma determinação matemática, uma regra, por meio da qual podemos inferir quando certos objetos empíricos são ou deixam de ser quadrados; uma regra que, como afirma Porto ao esclarecer o emprego de tal noção por Wittgenstein, não fala “diretamente sobre a realidade, nenhuma realidade, como uma realidade platônica abstrata de objetos ideais” (2007, p. 81), mas, antes, estabelece “novos critérios para o emprego de termos antigos, alterando assim, seus sentidos”, servindo, portanto, para “julgarmos

alegações empíricas, descartando certas alegações como sendo “absurdas”” (2007, p. 81). Ademais, é este caráter apodítico das determinações matemáticas que é evocado quando, ao definir “magnitudes incomensuráveis”, Euclides fala da *impossibilidade* de haver entre tais magnitudes uma medida comum.

Se, ao tratarmos da incomensurabilidade, nos encontrássemos de algum modo no terreno da experiência sensível ou da mera representação, se justificaria a intuição de que sempre encontraríamos medidas comuns a quaisquer dois segmentos se os subdividíssemos uma quantidade suficiente de vezes. Não seria sequer concebível, ademais, “prova” alguma de que duas grandezas são incomensuráveis, visto que do fato de uma certa quantidade de subdivisões ter sido realizada sem sucesso não se segue que as próximas fracassarão em resultar numa medida comum. Entretanto, a razão pela qual se justifica a afirmação de que, por exemplo, o lado e a diagonal do quadrado são incomensuráveis não reside em qualquer tentativa malfadada de subdividir tais magnitudes, mas, antes, na constatação de que assumir a comensurabilidade entre tais grandezas levaria ao absurdo, como esclarece Aristóteles:

> “For all who effect an argument per impossibile deduce what is false, and prove the original conclusion hypothetically when something impossible results from the assumption of its contradictory; e.g. that the diagonal of the square is incommensurate with the side, because odd numbers are equal to evens if it is supposed to be commensurate. One deduces that odd numbers come out equal to evens, and one proves hypothetically the incommensurability of the diagonal, since a falsehood results from its contradictory.” (Aristóteles, 1991, 41a21-41b6)

Apesar de a prova mencionada por Aristóteles evocar noções aritméticas como paridade e imparidade, diferindo bastante daquela prova geométrica que obtemos através da aplicação do algoritmo de Euclides, ambas apontam para a impossibilidade, para o absurdo de se assumir a comensurabilidade entre diagonal e lado do quadrado, e ambas repousam sobre o mesmo fundamento. Visto que, em se tratando de quadrados, a subtração da diagonal pelo lado sempre gera um resto e visto que com tal resto pode-se sempre construir um novo quadrado, é devido à

própria definição de “quadrado”, às propriedades que algo deve possuir para que possamos considerá-lo um quadrado, que o algoritmo não pode vir a resultar zero. Do mesmo modo, a prova por paridade/ imparidade mencionada por Aristóteles (se pudermos supor que ela corresponde, em linhas gerais, à prova por paridade/ imparidade de que dispomos atualmente) envolve o recurso às propriedades que constituem um triângulo retângulo, uma vez que se recorre ao teorema de Pitágoras, bem como às propriedades implicadas pelo fato de um número ser par ou ímpar.

Deste modo, apesar de a descoberta de magnitudes incomensuráveis ser produto, não causa, do caráter não-empírico que marca a matemática grega por oposição às matemáticas concebidas por outros povos da antiguidade, tal caráter foi sem dúvidas realçado pela mencionada descoberta. Como consequência dela, segundo Roque (2012), intensificou-se entre os gregos a preocupação com a necessidade de demonstração, o que fomentou o desenvolvimento do método axiomático característico dos *Elementos* de Euclides. Além disso (e esta é a consequência que aqui mais nos interessa), em decorrência da descoberta da incomensurabilidade formou-se uma lacuna entre Geometria e Aritmética, tornando-se imprescindível para os matemáticos gregos distinguir claramente números de magnitudes. A partir de então, demonstrações geométricas e demonstrações aritméticas, antes empregadas indistintamente, passaram a ser encaradas como operações de naturezas completamente diferentes, ideia que podemos ver claramente expressa por Aristóteles em seus Segundos Analíticos:

> “One cannot, therefore, prove anything by crossing from another genus— e.g. something geometrical by arithmetic. For there are three things in demonstrations: one, what is being demonstrated, the conclusion (this is what belongs to some genus in itself); one, the axioms (axioms are the things on which the demonstration depends); third, the underlying genus of which the demonstration makes clear the attributes and what is accidental to it in itself.” (Aristóteles, 1991, 75a38-75b2, § 7)

A convicção, entre os matemáticos ocidentais, num tal desencaixe entre Aritmética e Geometria perduraria por vários séculos, até vir a ser abalada no início

da Modernidade pelas ideias de Descartes e Fermat, fonte na qual bebeu quase que a totalidade dos matemáticos modernos. Desde então tem prevalecido entre os matemáticos uma abordagem que ambiciona escamotear as diferenças marcantes entre as duas disciplinas e que, de certo modo, subsume a geometria à aritmética, reduzindo sem maiores preocupações magnitudes a números, não obstante os esforços empreendidos por um outro grupo de matemáticos e filósofos, a que podemos chamar de construtivistas ou intuicionistas, que têm acumulado para reabilitar, ao menos no essencial, a perspectiva grega. Na próxima seção apresentaremos, de maneira esquemática, as principais características da posição moderna a respeito do problema, apontando em seguida para a resposta dos contemporâneos construtivistas.

2 – UM ENCAIXE APARENTE

2.1 - Descartes e o método analítico

Durante muitos séculos a matemática grega em geral e, em particular, a crença na impossibilidade de exprimir em linguagem aritmética as verdades da geometria, foi preservada no ocidente. E isso não obstante o nascimento, com os árabes, durante a idade média, do conjunto de métodos para resolução de equações a que chamamos de álgebra, que introduziu símbolos para variáveis numéricas e conferiu às operações aritméticas um nível muito maior de generalidade. Aos algebristas medievais se seguiram os modernos tais como Descartes e Fermat e, com eles, o desenvolvimento do que ficou conhecido como “geometria analítica”, disciplina cujo propósito consiste na resolução de problemas geométricos recorrendo-se à linguagem algébrica, analítica, por meio de um método que, opondo-se ao modo sintético de apresentação dos *Elementos* de Euclides, em que se parte do que é mais geral (definições, postulados) para a resolução de problemas particulares, consiste justamente na busca pelo procedimento para a resolução de problemas particulares a partir da assunção de que a resposta ao problema já foi dada.

Tal método dito “analítico”, já empregado por Viette, foi largamente utilizado por Descartes. Por muito tempo questionou-se, como sugere Roque (2012), qual seria o método de que disporia Euclides e outros matemáticos gregos para chegarem a conclusões como aquelas que são apresentadas nos *Elementos*, uma vez que lá as construções e resoluções de problemas simplesmente aparecem como decorrência dos princípios mais gerais, como num passe de mágica. Deve ter havido, mesmo entre os gregos, um procedimento pelo qual se chegava, antes, àqueles resultados para então, em seguida, apresentá-los de maneira sintética, como os conhecemos. À diferença dos modernos, contudo, tal “análise” grega não teria como se valer dos recursos algébricos a que tivemos acesso após séculos de

trabalho realizado neste campo, como dissemos, marcadamente pelos árabes. Nas palavras de Viette (apud Roque, 2012):

> "Encontra-se na Matemática uma certa maneira de procurar a verdade, que se diz ter sido primeiramente inventada por Platão, que Theon chamou "Análise" e que, para ele, define a suposição daquilo que procuramos como se estivesse concedido para chegar a uma verdade procurada, por meio das consequências; ao contrário, a "Síntese" é a suposição de uma coisa concedida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos por meio das consequências." (2012, p. 236)

À semelhança das considerações de Viette apresentadas acima acerca do método analítico, Descartes se refere ao método para resolução de problemas por ele empregado em seu *La Geometrie*[5] como consistindo, primeiramente, em considerar tal resolução como já levada a cabo e "dar nomes a todas as linhas que pareçam necessárias para construí-lo, como também para aquelas que são desconhecidas"(2010, p. 493). Tal indistinção metodológica entre objetos cuja existência se conhece e aqueles cuja existência se desconhece, mas que se supõe necessário que existam para que determinado problema seja solucionado, de certo modo, sugere o que trataremos mais adiante como a noção de existência característica do pensamento matemático moderno, a ideia de que a existência de objetos matemáticos possa ser assumida como mera subsistência genérica, como impossibilidade de inexistência.

Embora tal opção metodológica dos modernos já constitua, por si mesma, uma tentativa de ruptura com a geometria euclidiana, destaca-se nesse processo de distanciamento progressivo dos modernos em relação aos gregos o tratamento algébrico dado por Descartes à geometria e as implicações que tal tratamento viria a ter sobre a noção de "razão". Como afirma Mary Tiles, foi Descartes o responsável por "first systematically introduced algebraic methods into geometry, insisting that the objects of geometry, geometrical figures and curves, should be defined not in the manner of Euclid, but by algebraic (polynomial) equations" (2004, p. 74). A partir de

5 GUINSBURG, Jacó; ROMANO, Roberto; CUNHA, Newton (Ed.). **Descartes: obras escolhidas**. Editora Perspectiva SA, 2010.

tal tratamento algébrico, Descartes proporá que, ao contrário do que exigiam os gregos, é perfeitamente concebível, por exemplo, que o produto entre seguimentos de reta seja expresso, também, como um seguimento de reta, de modo que, estabelecendo-se um seguimento como unidade, não haveria qualquer restrição no âmbito das grandezas contínuas quanto ao que tal seguimento pudesse medir. Haveria uma correspondência, sobre a reta, para qualquer grandeza, incluindo-se aí as relações entre grandezas incomensuráveis.

2.2 - Operações aritméticas com grandezas geométricas

Como vimos no capítulo precedente, a noção de razão apresentada por Euclides na definição 3 do livro V estabelece que "uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero" (2009, p. 205), do que se segue que são admissíveis razões entre dois seguimentos de reta, razões entre duas áreas etc., mas não se admite razões, por exemplo, entre uma área e uma linha. Isso parece bastante intuitivo uma vez que, dado que linhas dispõem apenas de duas dimensões, mesmo uma infinidade de linhas seria insuficiente para medir uma superfície. Por motivos semelhantes, a multiplicação entre dois seguimentos de reta não poderia, para os gregos, jamais ser interpretada como resultando em um terceiro seguimento de reta, mas antes em uma superfície. Ao se propor a superar, então, esta restrição, própria da matemática grega, a operar apenas com grandezas homogêneas, Descartes cria as condições para a "algebrização" da geometria que caracteriza a geometria analítica. Como elucida Tiles:

> "Descartes thus assumes that all continuous magnitudes and all ratios between them (whether they are commensurable or not) can be represented by lengths. In this way the theory of ratios and proportions between continuous magnitudes was swiftly turned into an 'arithmetic' in which ratios are treated as numbers of a new kind. These ratios would include not only those between commensurable magnitudes, but also those between incommensurable magnitudes,

> i.e. ratios known not to be expressible as ratios between whole numbers, such as √2 and π.” (2004, p. 75)

Deste modo, ao fazer do seguimento de reta uma espécie de estalão universal no âmbito das grandezas contínuas assim como a unidade o é no âmbito da aritmética, podendo o seguimento de reta ser então empregado para a medição tanto de áreas, quanto de volumes, quanto do tempo, do espaço e do movimento, a própria distinção entre números e magnitudes, tão cara entre os gregos, passa a ser de certo modo maquiada. Ademais, razões passam a ser tomadas como números passíveis a toda sorte de operações aritméticas, seu sentido originário de “relações entre magnitudes” é obliterado e assume-se que mesmo razões entre grandezas incomensuráveis são, por assim dizer, representáveis, no plano cartesiano, por seguimentos de reta.

Apesar de tais inovações soarem como uma negação absoluta das posições gregas, não é como se a incomensurabilidade mesma entre tais grandezas tivesse sido “sanada” no âmbito da geometria analítica, estas permanecem incomensuráveis; a relevância matemática deste fato e o abismo aberto por ele entre Geometria e Aritmética é que são, pelo trabalho empreendido por Descartes, minimizados, uma vez que se torna possível operar com grandezas geométricas em geral “como se” fossem números, realizando com elas as operações tradicionais da aritmética, como salienta Roque:

> “Isso foi possível pela escolha de um segmento de reta arbitrário considerado “unidade”. A partir daí, o produto de dois segmentos pôde ser interpretado como um outro segmento, e não mais necessariamente como a área de um retângulo. (...) Apesar de construir geometricamente a solução, tal método era absolutamente inovador na geometria, pois permitia ultrapassar a homogeneidade das grandezas e operar com elas como se fossem números, o que implica uma mistura entre gêneros tidos tradicionalmente como distintos: a aritmética e a geometria.” (2012, p. 255)

Apesar, contudo, da “confusão” promovida por Descartes entre aritmética e geometria, não devemos supor que tal confusão tivesse, para o filósofo, mais que um caráter meramente operatório e, digamos, utilitário; motivado, talvez, pela

empolgação de Descartes com o desenvolvimento da ciência moderna. Tais inovações permitiam a resolução de vários problemas matemáticos até então sem solução, como o problema de Pappus, e viriam a ser, ademais, de grande valia para os físicos da época. Como assevera Tiles: “algebraic, analytic geometry was closely, and indeed almost inseparably, bound to the development of mathematically expressed theories of mechanics” (2004, p. 75). A expectativa de “conversão da inteligência teórica ao real” e a crença na “possibilidade de fazer a teoria penetrar na ação”, posturas características de Descartes, segundo Koyré (1991), ante o progresso científico que ele presenciava, provavelmente jogaram aí um papel determinante.

2.3 - Existência como “subsistência genérica”

Para além das implicações do trabalho realizado por Descartes, discutidas acima, em relação à “superação” do abismo identificado pelos gregos entre Geometria e Aritmética, desempenharam um papel crucial neste processo os esforços, realizados ao final do século XIX por vários matemáticos, em relação à definição dos números reais. Destes matemáticos destacam-se Dedekind e Cantor, sendo a proposta de definição apresentada pelo primeiro uma das de maior impacto sobre a matemática contemporânea. Apesar de terem concorrido para a formulação de tal definição uma série de conceitos sobre os quais valeria a pena discutir de maneira mais aprofundada, como aqueles relativos à teoria de conjuntos desenvolvida por Cantor ou mesmo a ideia (formulada por Aristóteles, mas condenada por ele e defendida por vários filósofos e matemáticos do início da modernidade) de “infinito atual”, centraremos a nossa atenção na noção de “existência” conforme empregada pelos matemáticos modernos, isto é, como “subsistência genérica”. Tal noção nos parece fundamental para compreendermos de que maneira veio a se tornar lugar comum entre os matemáticos do século XX a ideia de que um encaixe perfeito entre Geometria e Aritmética havia, então, sido conquistado.

Identificar “existência” e “subsistência genérica” implica exigir, para que se possa dizer que algo existe, tão somente que seja admitida a impossibilidade de sua inexistência. Esta noção (que é, ademais, como se interpreta o quantificador existencial em lógica clássica) parece se sustentar sobre o mero recurso ao princípio do terceiro excluído, preconizado por Aristóteles e segundo o qual não pode ser o caso que duas proposições contraditórias sejam simultaneamente falsas, e envolve uma completa dissociação entre “existência” e “construção”. A respeito do emprego desta noção ainda no início da modernidade, Bos (2001) afirma (após mencionar sua discordância em relação à tradição historiográfica que sustenta ter havido, entre os gregos, relação entre o seu interesse por construções geométricas e a busca por ”provas de existência”) que:

> “(...) the interpretation of constructions as existence proofs is inapplicable for the early modern period. I have found no evidence that early modern mathematicians doubted the existence of the solutions of the problems whose solution, by construction, they pursued with such intensity. Nor does it appear that they understood the classical interest in construction in terms of existence. Arguments, based on continuity, were known and accepted, for instance, to prove the existence of a square equal in area to a given circle, but there was common agreement that such arguments did not count as solution of the problem to find, determine, or indeed construct such a square” (2001, p. 7)

Ao se referir ao exemplo da quadratura do círculo, Bos tem em mente, como ele próprio esclarece, as contribuições a este campo proporcionadas pelo trabalho de Johannes Buteo, matemático francês do final do século XVI para quem a existência de um quadrado cuja área correspondesse à de um círculo determinado era algo evidente, apesar de não haver àquela altura uma construção de tal quadrado realizada segundo os parâmetros Euclidianos, isto é, com régua e compasso. Para Buteo, “because clearly there was a square smaller than the given circle, and a larger one as well, there must also be a square whose area was equal to that of the circle” (2001, p. 26). Bos chama a atenção aqui para o fato de que Buteo, sem maiores explicações, supõe que há uma espécie de "contínuo” implicado pela possibilidade de se conceber quadrados sempre um pouco maiores ou um

pouco menores e assume uma espécie de Teorema do Valor Intermediário (a respeito do qual falaremos no capítulo seguinte). A partir daí seria possível, por redução ao absurdo, dada a impossibilidade de que este não fosse o caso, inferir a existência de um quadrado cuja área correspondesse à do círculo em questão, o que exemplifica perfeitamente o caráter abstrato da noção de existência aqui empregada.

Três séculos mais tarde, num contexto em que, como esclarece Oliveira (2021), tornou-se necessário à comunidade matemática o desenvolvimento de um conceito "suficientemente geral e único" de "função", um dos pensadores empenhados nesta tarefa, o russo Nikolai Lobachevsky, propôs uma definição que, mais uma vez, exprime o caráter abstrato da noção de existência de que laçam mão os matemáticos modernos:

> "General conception demands that a function of x be called a number which is given for each x and which changes gradually together with x. The value of the function could be given either by an analytical expression, or by a condition which offers a means for testing all numbers and selecting one of them; or, lastly, the dependence may exist but remain unknown." (apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 77)

A última possibilidade mencionada na citação acima, em que se concebe que haja funções para as quais não se tenha estabelecido um método a partir do qual se possa determinar os seus valores ou sequer uma expressão analítica que a nomeie, nas palavras de Oliveira, representa "um raciocínio caracteristicamente clássico, a totalidade das funções já estaria dada, quer tenhamos ou não uma forma de identificá-las através de uma expressão analítica" (2021). Aqui encontra-se tanto a noção abstrata de existência a que temos nos referido, dissociada de qualquer exigência de "construção", como também (ao menos implicitamente ou sugeridos) o recurso anteriormente mencionado à noção de "infinito atual" e à noção de conjunto, do qual o "infinito" seria, justamente, predicado, e cujos elementos, apesar de desconhecidos por mentes humanas, existiriam "sub specie aeternitates". Estas mesmas noções, como veremos, estão pressupostas também no empreendimento

levado a cabo por Dedekind e que, supostamente, teria sanado o desencaixe entre Aritmética e Geometria.

2.4 – Números Reais e o axioma de Cantor-Dedekind

Como mencionamos, por alto, no primeiro capítulo deste trabalho, ao se propor a definir números reais (noção, aliás, cujas origens remontam a Descartes) Dedekind se valerá em larga medida das ideias atribuídas a Eudoxo, expostas no livro V dos Elementos de Euclides. As considerações ali apresentadas acerca dos critérios a serem observados para se asserir que há igualdade entre duas razões (isto é, que são proporcionais) servirão de inspiração para o que viriam a ser os "cortes de Dedekind". Segundo o próprio Dedekind, apud Ávila:

> "... se interpretarmos número real como razão de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece de maneira clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões (Elementos, V, 5). Aí reside a origem de minha teoria, bem como a de Bertrand e muitas outras tentativas de construir os fundamentos dos números reais" (1985, p. 7)

Ao se propor a definir "razão" e "proporção" de modo que tais definições pudessem abarcar também relações entre grandezas incomensuráveis, Eudoxo estabelece que, para que sejam tomadas como proporcionais, duas razões devam ser sempre tais que a relação ("maior que", "menor que" ou "igual a") entre a grandeza medida (**A** e **C**) e a grandeza medidora (**B** e **D**) seja sempre a mesma para ambas as razões, desde que um mesmo número (suponhamos, "**m**") esteja multiplicando ambas as grandezas medidas e um mesmo número ("**n**") multiplique ambas as grandezas medidoras. $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ serão, então, razões proporcionais se e somente se, para qualquer **m** e para qualquer **n,** se **mA** for maior que **nB,** então **mC** é maior que **nD**; se **mA** for menor que **nB**, então **mC** é menor que **nD**; se **mA** for igual **nB**, então **mC** é igual **nD**.

Como esclarece Ávila (1985), Dedekind perceberá aí que, para cada razão individualmente considerada, deve haver um par de classes A1 e A2 em que A1 corresponda a todos os valores racionais possíveis para $\frac{m}{n}$ tais que **mA** > **nB** e A2 corresponda a todos os valores racionais possíveis para $\frac{m}{n}$ tais que **mA** < **nB**. A igualde entre duas razões corresponderia, então, à igualdade entre as classes A1 e A2 de ambas as razões. Segundo Ávila,

> "No fundo, a definição de Eudoxo associa a cada razão $\frac{A}{B}$ um par de classes A1 e A2. Este par de classes é o que Dedekind chama de corte e que ele utiliza para definir o número real. Por exemplo, o corte que define o número real (irracional) √2 é o par de classes A1 e A2 assim descrito: A1 é o conjunto de todas as frações $\frac{m}{n}$ tais que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2$; são as "raízes quadradas de 2 por falta. (...) e A2 constitui-se das razões $\frac{m}{n}$ tais que raízes por excesso". (1985, p. 7)

Assim, quando a classe A1 tiver um valor máximo e a classe A2 tiver um valor mínimo, os cortes de Dedekind descreverão um número real racional; se esses valores não existirem, estaremos diante de um número irracional. Contudo, tanto racionais quanto irracionais, dentro do esquema de Dedekind, representam sempre e de maneira precisa, cada um, um ponto sobre a reta real (e é nisso que, afinal, consiste o "encaixe" aqui pretendido entre geometria e aritmética). O conjunto dos números reais, entendido como uma totalidade fechada cujos elementos, infinitos, são tidos como atualmente existentes apesar de desconhecidos, seria assim isomórfico à reta real (concebida, contra o que outrora havia sustentado Aristóteles, como composta de pontos) e, assim como esta, contínuo.

Tal isomorfia, sustentada como axioma que, como afirma Ehrlich (1994, p. viii), leva o nome de "axioma de Cantor-Dedekind" justamente por terem sido eles os primeiros a proporem a ideia, não seria concebível sem o recurso à noção de existência como subsistência genérica, sem que se abrisse mão da exigência de um

método para a identificação do ponto sobre a reta correspondente a um número irracional, exigência que constituísse requisito para se falar na "existência" de tal ponto. É justamente a divergência em relação ao emprego de tal noção que ensejará, no século XX, o desenvolvimento de uma matemática que, de certo modo, resgatará as posições gregas acerca da distinção fundamental entre números e magnitudes e do desencaixe entre geometria e aritmética, matemática a que chamamos de "construtivista" ou "intuicionista", de que trataremos no capítulo seguinte.

3 – RETOMADA DAS POSIÇÕES GREGAS: O DESENCAIXE REABILITADO

3.1 - O construtivismo: contornos gerais

Já no final do século XIX, como assevera Bridges (2018), matemáticos como Kronecker e Poincaré demonstravam insatisfação em relação aos métodos e pressupostos dos matemáticos, seus contemporâneos, herdeiros da tradição iniciada por Descartes e Fermat a que nos referimos no tópico anterior. Tais matemáticos divergiam fundamentalmente dos modernos no que diz respeito às condições em que se pode asserir a existência de objetos matemáticos, os primeiros exigindo em todo caso (o que se torna mais evidente em contextos infinitários) um método por meio do qual o objeto, cuja existência se assere, possa ser construído. Os modernos, por outro lado, como vimos no capítulo anterior, se contentariam com a mera demonstração (via, por exemplo, redução ao absurdo negativa) da impossibilidade da inexistência de determinado objeto para asserir a sua existência. Nas palavras de Bridges:

> "Constructive mathematics is distinguished from its traditional counterpart, classical mathematics, by the strict interpretation of the phrase "there exists" as "we can construct". In order to work constructively, we need to re-interpret not only the existential quantifier but all the logical connectives and quantifiers as instructions on how to construct a proof of the statement involving these logical expressions." (Bridges, 2018)

Tal noção construtiva de existência, cujas implicações matemáticas viriam a ser compreendidas de maneira mais sistemática no século XX, a partir dos trabalhos de Brouwer, envolvia, ademais, uma gama de outros pressupostos filosóficos relativos, por exemplo, à noção de "infinito" e de "verdade", com notáveis desdobramentos lógicos. Uma vez que, na ausência do objeto ou de um método para encontrá-lo, não estamos autorizados, de um ponto de vista construtivista, a

afirmar que tal objeto existe, parece inconcebível que se admita, como fazem os modernos, um “infinito atual”, fechado em si mesmo, predicado de uma coleção incontável de objetos inacessíveis ou ao menos ainda não acessados por qualquer mente humana, embora compreendidos pelo intelecto divino. Por oposição, então, à noção de infinito atual, boa parte dos construtivistas, como o próprio Brouwer, retomará a noção, defendida por Aristóteles no contexto do debate acerca dos paradoxos de Zenão, de “infinito potencial”. É tal recusa à noção moderna de infinito e de existência “sub specie aeternitatis” que Bishop, em seu Constructivist Manifesto, tem em mente ao afirmar que

> “Mathematics belongs to man, not to God. We are not interested in properties of the positive integers that have no descriptive meaning for finite man. When a man proves a positive integer to exist, he should show how to find it. If God has mathematics of his own that needs to be done, let him do it himself.” (1967, p. 2)

O infinito assim compreendido não predica, então, coleções de objetos, totalidades fechadas, mas antes um “processo” que jamais se conclui e que, à medida que se atualiza, traz à existência novos objetos, isto é, os constrói. De tudo isso se segue que a verdade de uma proposição matemática não pode consistir, desde uma perspectiva construtiva, em tal proposição representar corretamente uma determinada configuração abstrata do mundo, repleto de objetos abstratos ainda desconhecidos: para uma proposição matemática, ser verdadeira significa que tenhamos apresentado para ela, a partir de outras já admitidas como verdadeiras, uma demonstração. São, então, destes pressupostos filosóficos a respeito da natureza dos objetos matemáticos e de como conhecê-los (pressupostos, portanto, ontológicos e epistemológicos) que derivam os princípios da lógica intuicionista que a opõe à lógica clássica, fregeana, que, por assim, exprime as intuições principais da matemática moderna.

Tais princípios são tão característicos do intuicionismo que, por vezes, chega-se a inverter a “ordem das razões” e a tomá-los como causa, não consequência, das posições assumidas pelos intuicionistas em matemática. É em razão da exigência de

um método de construção para se asserir a existência de objetos (exigência que não se verifica no que diz respeito à afirmação da inexistência de objetos) que o intuicionista rejeita provas por redução ao absurdo negativa, em que do absurdo da inexistência de *x* se conclui que existe *x.* Contudo, pela mesma razão o intuicionista aceita provas por redução ao absurdo positiva, em que do absurdo da existência de *x* se conclui que não existe *x* ou, ainda, que é falso que *x,* falsidade significando então o mesmo que "ser absurdo". Daí decorre também a rejeição intuicionista ao princípio clássico do terceiro excluído, a compreensão intuicionista da dupla negação como irredutível a uma afirmação e, em geral, todas as regras intuicionistas de dedução natural.

3.2 - Brouwer, Wittgenstein e a construção dos "números" Reais

Como mencionamos anteriormente, o primeiro a oferecer uma sistematização do construtivismo matemático foi L.E.J Brouwer, filósofo do início do século XX envolvido com os esforços, comuns em sua época, para oferecer fundamentos sólidos à matemática, a essa altura abalada em razão da então recente "descoberta" das assim chamadas geometrias não-euclidianas. As geometrias não-euclidianas colocaram em xeque a ideia kantiana de que os juízos da geometria, sintéticos a priori, estariam fundados na intuição pura e apriorística do espaço, dado que tal intuição do espaço parecia perfeitamente representada pelas definições e postulados de Euclides, ao passo que parecia incompatível com as conclusões a que se chegava por meio destas geometrias alternativas. Brouwer, então, profundamente influenciado pela filosofia kantiana e refratário às ambições logicistas de Frege, sustentará que os juízos geométricos são sim sintéticos a priori, fundados, contudo, assim como os juízos da aritmética, na intuição do tempo. A partir da intuição apriorística da passagem do tempo, de um instante a outro, a que Brouwer chamava "duosidade"[6], se desdobrariam (isto é, seriam construídos) toda sorte de

6 - Expressão empregada por Oliveira (2021)

objetos matemáticos, desde os números naturais até aquilo a que o autor se refere como “sequência de escolhas”.

O construtivismo brouweriano, então, assentado em bases profundamente idealistas, se oporá decididamente à ideia platônica de que os juízos matemáticos representariam ou corresponderiam de algum modo a objetos abstratos, existentes realmente fora da mente humana. Para Brouwer, todos os objetos matemáticos são construídos mentalmente e dependem, para existir, de sua construção ser levada a cabo por um “sujeito criativo” livre. Como assevera Oliveira,

> Brouwer insinua que só é possível compreender o que ele argumenta através da experiência de primeira pessoa do sujeito cognoscente. É através dessa experiência que se reconhece o ato instaurador da existência de uma entidade matemática, que só pode ser uma construção mental. Assim, em termos formais, o quantificador existencial da matemática sempre significará “∃cm”, i.e., “existir” = “ser uma construção mental” (2021, p. 19)

Deste modo, ademais, a atividade matemática seria anterior mesmo a qualquer linguagem matemática e irredutível a ela, irredutível à mera manipulação sintática de símbolos segundo regras previamente estabelecidas, o que coloca o construtivismo brouweriano em rota de colisão, também, com Hilbert e outros matemáticos formalistas de seu tempo. É da intuição originária da duosidade, “the pure form of the experience ‘then—now’” (Van Atten, 2004) e da intuição, contida nesta primeira, do tempo que flui entre estes dois momentos, isto é, o Contínuo, que dependerá toda e qualquer construção matemática. O “Discreto”, portanto, dentro desta perspectiva, como afirma Van Atten, pressupõe o Contínuo e vice e versa, embora o Discreto apareça aqui como logicamente posterior.

Dentro deste quadro, a construção dos números Reais será compreendida como algo que se leva a cabo a partir de uma sequência de escolhas, potencialmente infinita, realizada por um sujeito criativo segundo uma regra, por assim dizer, autoimposta. É neste sentido que se compreende a posição de Brouwer acerca dos números reais:

> “Consideramos uma sequência indefinidamente extensível de intervalos λ aninhados que possuem a propriedade de que todo esteja estritamente dentro de seu predecessor ... Chamamos tal sequência indefinidamente extensível de intervalos λ aninhados de um ponto ou de um número real. Devemos enfatizar que, para nós, o ponto é a sequência ... em si, não algo como “o ponto limite para o qual, de acordo com a concepção clássica, convergem os intervalos λ, e que, ainda de acordo com essa concepção, poderiam ser definidos como o ponto de acumulação único dos pontos intermediários de todos esses intervalos”. (Brouwer, Van Dalen (ed) Intuitionismus. Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag. 1992. Pg. 69)

A definição apresentada acima lembra, de certo modo, os cortes de Dedekind, uma vez que os reais aparecem de algum modo relacionados a sequências determinadas de intervalos racionais e à noção de “ponto”. Contudo, não se assume aqui a existência, no infinito, de um ponto “discreto”, para o qual tais sequências convirjam). Ao contrário da tendência, presente entre os modernos, de discretizar o contínuo, Brouwer reinterpreta aqui a noção de “ponto” de modo que, se assumirmos que a reta real é composta por pontos e que os irracionais, assim como os racionais, são ou correspondem a pontos sobre a reta, teremos de tratar o ponto, ele mesmo, como algo contínuo em certo sentido.

Assim como Brouwer, ao tratar dos números reais, pressupõe uma regra por meio da qual tais sequências possam ser construídas e identifica números reais justamente a sequências indefinidamente extensíveis de intervalos racionais aninhados, recusando-se a aceitar sem ressalvas o axioma de Cantor-Dedekind e a admitir que haja isomorfismo entre os números reais e uma reta real “puntiforme”, algo semelhante pode ser dito a respeito de Wittgenstein. Para ele, os números reais consistiriam precisamente no método empregado para a construção da sequência de intervalos, como vemos na citação abaixo:

> “The idea behind $\sqrt{2}$ is this: we look for a rational number which, multiplied by itself, yields 2. There isn't one. But there are those which in this way come close to 2 and there are always some which approach 2 more closely still. There is a procedure permitting me to approach 2 indefinitely closely. This procedure is itself something. And I call it a real number.” (Wittgenstein, Observações Filosóficas, Pg 227, § 183)

Há entre os dois filósofos uma sutil diferença se nos atentarmos ao fato de que, para Wittgenstein, o nome “número real” se refere à regra que condiciona a formação da sequência de intervalos racionais, o procedimento por meio do qual a sequência é gerada, e não à própria sequência, mas ambos convergem em recusarem a definição de Dedekind e outras semelhantes justamente em razão da exigência, por ambos reconhecida, de que disponhamos, para asserir a existência de objetos matemáticos, de um procedimento que nos permita encontrá-los, identificá-los, construí-los. Assim, se tratamos o número real como um ponto em meio a um emaranhado infinito de outros pontos, é preciso que a própria noção tradicional de “ponto” seja revista ou que seja revista a noção tradicional de “número” que nos leva a identificar $\sqrt{2}$, por exemplo a uma dízima não periódica, ao invés de identificá-la ao procedimento que a gera. No contexto construtivista, a existência de algo como $\sqrt{2}$ deve significar, então, que dispomos de um método para gerar as infinitas aproximações em que a própria $\sqrt{2}$, afinal, deve consistir.

3.3 - O Teorema do Valor Intermediário

Um exemplo bastante esclarecedor da oposição entre clássicos (modernos) e intuicionistas em relação à noção de existência quando aplicada a objetos matemáticos (e também em relação à interpretação do quantificador existencial na lógica clássica) é fornecido pela divergência entre tais escolas a respeito do Teorema do Valor Intermediário. Tal teorema (que, como vimos no capítulo 2 com o exemplo da quadratura do círculo, já era utilizado de maneira mais ou menos intuitiva pelos matemáticos do início da modernidade) foi formalizado pela primeira vez no início do século XIX pelo matemático boêmio Bernard Bolzano, razão pela qual também é conhecido como “teorema de Bolzano”, e estabelece que:

> “Theorem (Standard). Let f(x) be a function which is denned and continuous in the closed interval a<x<b, and such that f(a)<0, f(b)>0. Then there exists a point c, a<c<b such that f(c) = 0.

> The word 'standard' is added above in order to indicate that we are dealing with the standard situation, i.e., with the ordinary real numbers.” (Robinson, 2016)

É interessante notar como, na citação acima, o autor faz questão de ressaltar que tal apresentação do teorema corresponde à sua interpretação padrão, que é justamente a que envolve as noções próprias ao que temos chamado, no presente trabalho, de matemática moderna. Deste ponto de vista, o Teorema do Valor Intermediário assere que, dada uma função contínua tal que $f(a) < 0$ e $0 < f(b)$, existe um ponto $f(x)$ tal que $f(x) = 0$, isto é, $\exists x(f(x)=0)$. Tal conclusão parece bastante intuitiva, sobretudo quando a tomamos em consideração diante de uma imagem como a figura 3: não nos parece concebível que, sendo contínua, a função “pule” o eixo das ordenadas, que não haja sobre ele um ponto cujo valor, no eixo das abscissas, seja zero. A inferência que leva, então, da asserção da impossibilidade da inexistência de um tal ponto à conclusão de que ele efetivamente existe nos soa ironicamente, bastante intuitiva.

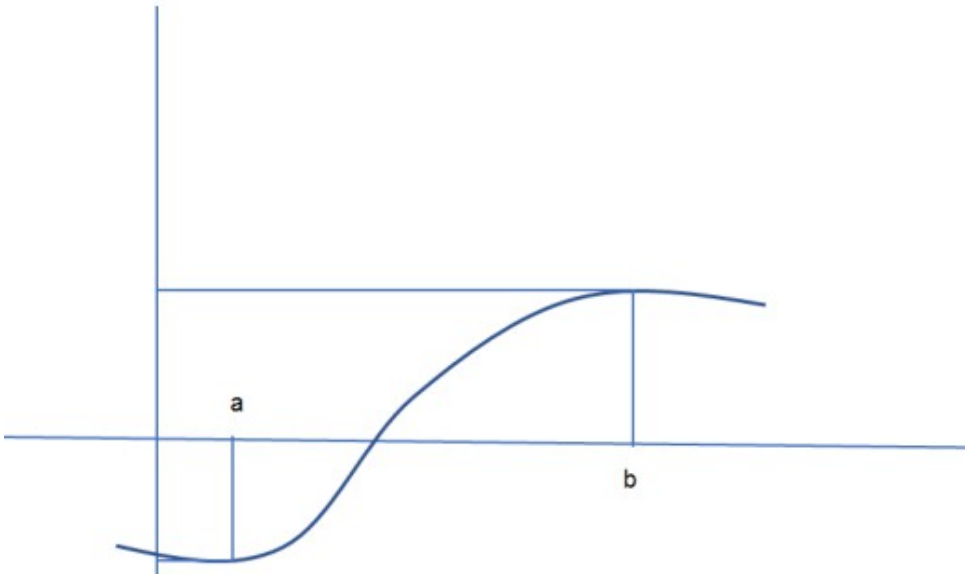

Figura 3

Fonte: Oliveira (2021)

De uma perspectiva intuicionista, contudo, o Teorema do Valor Intermediário não pode asserir mais que: dada uma função contínua tal que f(a) > 0 e 0 > f(b), então não pode ser o caso que para toda a ordenada x, a função f(x) falhe em ser igual a zero, isto é, ¬¬∃x(f(x)=0) ou ainda ¬∀x(f(x) ≠ 0). Disto, entretanto, não podemos concluir que ∃x(f(x)=0), pois, para podermos concluir isso, teríamos de ter em mãos um método para obter tal ponto. A dupla negação aqui não pode ser interpretada como logicamente equivalente a uma afirmação justamente em razão de essa equivalência pressupor a noção abstrata de existência a que temos nos referido. Nas palavras de Oliveira, que explica como a interpretação do TVI se dá especificamente no contexto da reflexão brouweriana, “o intuicionista brouweriano só aceita asserir “∃x (f(x)=0)” se existir (i.e., se ele “tiver em mãos”) uma construção cognitiva-matemática completamente geral para encontrar a aproximação daquele valor “c” tal que “(f(c)=0)”” (2021, p. 87).

Porém, um intuicionista estaria prontamente disposto a admitir que a existência de f(x) = 0, apesar de esta não ser demonstrada pelo teorema em tela, possa ainda ser demonstrada geometricamente, justamente porque, ao contrário dos modernos, os intuicionistas preservam a distinção grega entre provas expressas em linguagem geométrica e aquelas expressas em linguagem aritmética (ou, no caso, em linguagem analítica). Nada impede que uma construção geométrica (com base, por exemplo, em alguma axiomatização da geometria) seja apresentada e, por fim, seja provada a existência do ponto intermediário em questão. Deste modo, como podemos ver, tanto a crença grega na independência lógica entre Geometria e Aritmética quanto a distinção, mais fundamental, entre grandezas geométricas e números (como pretendemos ter esclarecido ao apresentarmos algumas definições construtivas dos números reais) puderam ser retomadas na contemporaneidade.

CONCLUSÃO

Ao longo do presente trabalho, esperamos ter sido capazes de esclarecer de que modo a descoberta da existência de magnitudes incomensuráveis entre os antigos gregos impactou a matemática grega e como, ainda hoje, experimentamos os desdobramentos deste fato. Apesar de não termos discutido as definições de "número" e "grandeza geométrica" aceitas na antiguidade grega e como estas noções se desenvolveram ao longo da história, acreditamos termos dado cabo da tarefa de esclarecer de que modo a incomensurabilidade inviabilizou a perspectiva, em geral associada à escola pitagórica, de que por meio de números pudéssemos sempre exprimir verdades geométricas e de que provas geométricas e aritméticas pudessem ser empregadas indistintamente.

Ademais, por meio do contraste entre as noções de "razão" e "proporção", apresentadas por Euclides no livro V dos *Elementos,* e as formulações de Descartes que viabilizaram o que chamamos de "tratamento aritmético" de grandezas geométricas, pretendemos ter mostrado como, no início da modernidade, o esforço para superar o abismo entre geometria e aritmética veio a tomar forma, num contexto em que tal superação parecia importar bastante para a resolução de vários problemas que a matemática e a física moderna ensejavam. A partir, então, de uma investigação sobre as raízes modernas da noção de "existência" de objetos matemáticos como mera subsistência genérica, esperamos ter elucidado de que modo, já no século XIX, matemáticos como Cantor e Dedekind creram ter dado cabo, finalmente, do problema grego.

Por fim, explorando as divergências entre matemáticos modernos e matemáticos construtivistas a respeito, fundamentalmente, da mencionada noção de existência, esperamos ter mostrado de que modo, ao adotarmos uma concepção mais rigorosa de existência como significando "posse em mãos" de um método para

identificação de objetos matemáticos, o encaixe imperfeito entre Geometria e Aritmética volta, então, à baila, reabilitando-se assim a distinção, tão cara entre os gregos, entre números e magnitudes e a independência lógica entre provas geométricas e provas aritméticas.

Referências Bibliográficas

Aristóteles, Jonathan Barnes et al. **The complete works of Aristotle**. Princeton, NJ: Princeton University Press, fourth printing, 1991

ÁVILA, Geraldo. **Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de matemática.** Revista do Professor de Matemática, v. 7, p. 5-10, 1985.

BISHOP, Errett Albert. **Foundations of constructive analysis**. 1967.

BOS, Henk JM. **Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction**. Springer Science & Business Media, 2001.

Bridges, Douglas and Erik Palmgren, **Constructive Mathematics,** *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/mathematics-constructive/>.

BROUWER, L. E. J. **Intuitionismus**. van Dalen. 1992. Tese de Doutorado. D. (ed.). Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim.

DE MORGAN. **Proportion**. The Penny Cyclopaedia for the Diffusion of Useful Knowledge. Vol 19, 1841

Euclides; Bicudo, Irineu. **Os elementos**. Unesp, 2009.

EHRLICH, Philip (Ed.). **Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua**. Springer Science & Business Media, 2013.

GUINSBURG, Jacó; ROMANO, Roberto; CUNHA, Newton (Ed.). **Descartes: obras escolhidas**. Editora Perspectiva SA, 2010.

Heath, T., **The Thirteen Books of Euclide's Elements**, v. 2, **CAMBRIDGE: at the University Press,** 1908

KOYRÉ, Alexandre. Do mundo do "mais-ou-menos" ao universo da precisão. **Estudos de história do pensamento filosófico**, p. 271-288, 1991.

OLIVEIRA, **Paulo Júnio de et al. As bases do intuicionismo matemático de Brouwer a natureza do continuum intuicionista**. 2021.

PORTO, André. Wittgenstein E a medida da circunferência. **Philósophos-Revista de Filosofia**, v. 12, n. 2, 2007.

ROBINSON, Abraham. **Non-standard analysis**. Princeton University Press, 2016.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

TILES, Mary. **The philosophy of set theory: an historical introduction to Cantor's paradise**. Courier Corporation, 2004.

VON FRITZ, Kurt. The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. **Annals of mathematics**, p. 242-264, 1945.

WITTGENSTEIN, L. Philosophical Remarks. Oxford: Basil Blackwell, 1975

YOUSCHKEVITCH, Adolf Pavlovitch. **The concept of function up to the middle of the 19th century.** Archive for History of exact Sciences, p. 37-85, 1976.