

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

**JOÃO PAULO SILVA RODRIGUES
SUZANA TAVARES DOS SANTOS**

ANÁLISE DE FLUXO DE CARGA COM TÉCNICAS DE ESPARSIDADE

Goiânia

2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC nº 1204/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG):

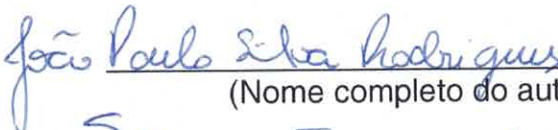
Nome completo do autor: João Paulo Silva Rodrigues / Suzana Tavares dos Santos

Título do trabalho: Análise de Fluxo de Carga com Técnicas de Esparsidade

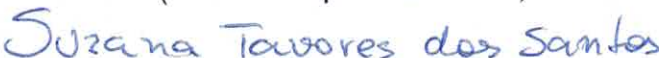
2. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [] SIM [] NÃO¹

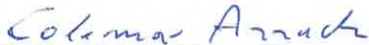
Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF do TCCG.



(Nome completo do autor)²



Ciente e de acordo:



(Nome completo do orientador)²

Data: 16 / 12 / 19

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Versão abril de 2018

² As assinaturas devem ser originais sendo assinadas no próprio documento, imagens coladas não serão aceitas.

JOÃO PAULO SILVA RODRIGUES
SUZANA TAVARES DOS SANTOS

ANÁLISE DE FLUXO DE CARGA COM TÉCNICAS DE ESPARSIDADE

Trabalho submetido à Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e Computação da Universidade Federal de Goiás para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Elétrica, sob orientação do Professor Dr. Colemar Arruda.

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Rodrigues, João Paulo Silva
Análise de Fluxo de Carga com Técnicas de Esparsidade
[manuscrito] / João Paulo Silva Rodrigues, Suzana Tavares dos Santos. - 2019.
lix, 59 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Colemar Arruda.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Engenharia Elétrica, Goiânia, 2019.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. fluxo de carga. 2. esparsidade. 3. métodos iterativos. 4. gauss seidel. I. Santos, Suzana Tavares dos. II. Arruda, Colemar, orient. III. Título.

CDU 621.3


ANÁLISE DE FLUXO DE CARGA COM TÉCNICAS DE ESPARSIDADE

Trabalho submetido à Escola de Engenharia
Elétrica, Mecânica e Computação da
Universidade Federal de Goiás para obtenção
do Grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Trabalho aprovado. Goiânia, 16 de dezembro de 2019.



Professor Dr. Colemar Arruda
(orientador)



Professor Dr. Gelson Brigatto
(membro)



Engº Eletricista Wallisson Calixto
(membro)

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente ao professor Dr. Colemar pela orientação, contribuição e pelas discussões a respeito dos temas da área desse trabalho que me proporcionou um grande enriquecimento técnico e teórico.

À minha família, que me acolhe e me incentiva a sempre continuar adquirindo conhecimento e, que me forneceu o suporte necessário para que eu pudesse concluir a minha graduação.

Agradeço à minha amiga, Suzana Tavares, que aceitou meu convite em ser minha parceira no desenvolvimento desse trabalho. Obrigado por me dar todo o tipo de apoio que possibilitou a conclusão deste.

E por fim, aos meus amigos que muito contribuíram com a minha formação humana e profissional, por meio de conselhos, pela presença em momentos difíceis e pelas diversas situações felizes que me proporcionaram durante minha vida.

João Paulo Silva Rodrigues

Agradeço primeiramente a Deus e todo Seu amor e graça depositado a mim, proporcionando meu crescimento, pois sem Ele, eu não teria chegado até aqui. Agradeço aos meus pais, Maria Dirlene e Gonçalo, e a meus irmãos, Fernando e Flávio (*in memoriam*), que apesar da distância e de todas as dificuldades da vida, sempre me apoiaram na realização desse sonho de me tornar Engenheira. Agradeço também ao meu namorado Estevão Libardi, bem como toda a sua família, pelo suporte, cuidado, carinho e atenção que me foi conferido, tornando-se a minha família em Goiânia.

Àqueles que eu tive a dádiva de conhecer e partilhar da amizade durante esta caminhada na Casa de Estudantes: Ana Carolina, Edimar, Gean Junio e Ruan Gautiery, que dia após dia, me deram forças de onde estivessem para que fosse possível a conclusão dessa graduação.

Grande agradecimento a um amigo muito especial, João Paulo Silva Rodrigues, a qual tive o imenso prazer em realizar este projeto em parceria e que sempre esteve presente me ajudando no que fosse preciso para conquistar o tão sonhado diploma. Obrigado pelo apoio, ensinamentos e por sua amizade.

Agradecida também estou, à equipe de Engenharia da empresa Sun Pharma, que me recebeu e me apoiou a todo o momento na conclusão do curso. Meu muito obrigada pela paciência e compreensão.

Gratidão a todos os amigos, tanto de Barreiras quanto de Goiânia, e familiares que direta ou indiretamente tem contribuído para minha formação pessoal, acadêmica e profissional.

Suzana Tavares dos Santos

Em conjunto, agradecemos à Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da Universidade Federal de Goiás por toda sua infraestrutura e docentes altamente comprometidos com a arte de ensinar e, novamente, ao professor Dr. Colemar Arruda, pela disposição e orientação neste trabalho. Ao professor Dr. Gelson Brigatto e ao Engenheiro Eletricista Wallisson Calixto pela participação na banca examinadora.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem ao problema de fluxo de carga almejando mostrar que, a característica esparsa, presente nas maiorias das matrizes definidas nesse tipo de problema, pode ser utilizada a fim de se obter vantagens computacionais ao implementar/executar programas que processarão as diferentes variáveis de sistemas elétricos de potência. Possui foco apenas em mostrar as diferenças no processamento de redes com diferentes números de barras ao fazer uso de diferentes técnicas de esparsidade durante a execução de um algoritmo modificado de Gauss-Seidel para solução de sistemas lineares, limitando-se apenas, a aplica-las em operações matriciais. Assim, o desenvolvimento ou demonstrações de teoremas ou definições estão fora do escopo desse estudo.

Embora apresente a teoria necessária à aplicação dos conceitos envolvidos no estudo do fluxo de carga, este texto não apresenta o desenvolvimento de algoritmos que utilizarão esses conceitos para o cálculo das variáveis do sistema, pois pretende-se apenas comparar, por meio de resultados, o tempo de processamento e uso de memória quando utiliza-se métodos diretos como a inversão matricial e técnicas de esparsidade na resolução de sistemas lineares iterativos.

Considerando que matrizes esquematizadas e calculadas em problemas de sistemas de potência são, geralmente, esparsas, simétricas, quadradas e positivas definidas, diferentes métodos como, *Cholesky*, LU e Bi-fatoração, podem ser aplicados a elas para otimização do processo iterativo de Gauss Seidel matricial. A implementação computacional do método iterativo para comparação de desempenho, quando se emprega a inversão matricial ou matrizes esparsas, foi realizada utilizando a linguagem de programação *Python* que, por meio de instruções de alto nível, facilitou a implementação, reduzindo a quantidade de linhas de código necessárias.

Esse estudo se torna significativo quando analisado sob a ótica de o quanto a associação de métodos matemáticos aliados a problemas de engenharia produzem uma poderosa sinergia capaz de alcançar resultados que são satisfatórios, consistentes e totalmente confiáveis quando elucidado à problemas reais.

Palavras-chave: Esparsidade, Fluxo de carga, Sistemas elétricos de Potência, Método de Gauss-Seidel, Introdução à Sistemas de Energia Elétrica.

ABSTRACT

This paper presents an approach to the load flow problem aiming to show that the sparse characteristic, present in most matrices defined in this problem type, can be used in order to obtain computational advantages when implementing/executing programs that will process the different variables of electrical power systems. It focuses only on showing differences in the processing of networks with different numbers of buses by using different sparsity techniques while executing a modified Gauss-Seidel algorithm for solving linear systems, but simply applying them in matrix operations. Thus, the development or demonstrations of theorems or definitions are beyond the scope of this study.

Although it presents the theory necessary for the application of the concepts involved in the study of the load flow, this paper does not present the development of algorithms that will use these concepts to calculate the system variables, since it is only intended to compare, through results, the processing time and memory usage when using direct methods such as matrix inversion and sparse techniques in the resolution of iterative linear systems.

Considering that schematized and calculated matrices in power system problems are generally sparse, symmetric, square and definite positives, different methods such as Cholesky, LU and Bi-factorization can be applied to them to optimize matrix Gauss Seidel's iterative process. The computational implementation of the iterative method for performance comparison, when employing matrix inversion or sparse matrices, was performed using the Python programming language which, through high level instructions, facilitated the implementation and reduced the number of lines of code needed.

This study becomes significant when analyzed from the perspective of how the association of mathematical methods combined with engineering problems produces a powerful synergy capable of achieving results that are satisfactory, consistent and fully reliable when elucidated to real problems.

Keywords: Sparsity, Load Flow, Electric Power Systems, Gauss-Seidel Method, Introduction to Electric Power Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Componentes básicos de um Sistema de Potência	17
Figura 2 - Diagrama unifilar do Sistema Elétrico de Potência.....	18
Figura 3 - Modelo que representa um gerador síncrono	20
Figura 4 - Modelo que representa um motor síncrono	21
Figura 5 - Modelo de transformador em fase	22
Figura 6 - Modelo π de transformador em fase	22
Figura 7 - Modelo de transformador em fase quando $T=1$	23
Figura 8 - Modelo π para linhas de transmissão.....	23
Figura 9 - Diagrama de Admitâncias	25
Figura 10 - Sistema genérico de 3 barras	27
Figura 11 - Fatores triangulares L e R da matriz.....	36
Figura 12 – Rede 4 nós.....	37
Figura 13 - Grafo correspondente da figura 12	37
Figura 14 - Grafo com nó 1 arrastado para nó 2	37
Figura 15 - Grafo com nó 2 arrastado para nó 3	38
Figura 16 - À esquerda, grafo com 8 ramos; à direita, grafo com nó 7 arrastado para o nó 6.....	38
Figura 17 - Padrão de elementos não-nulos da matriz Y_{BUS} : à esquerda, com 345 barras e à direita, com 386 barras.....	44
Figura 18 - Padrão de elementos não-nulos da matriz Y_{BUS} : à esquerda, com 768 barras e à direita, com 981 barras.....	45
Figura 19 - Padrão de elementos não-nulos da matriz Y_{BUS} : à esquerda, com 2.648 barras e à direita, com 3.565 barras.....	45
Figura 20 - Padrão de elementos não-nulos da matriz Y_{BUS} : à esquerda, com 5.024 barras e à direita, com 8.438 barras.....	46
Figura 21 – Curva de Armazenamento X Número de barras	49
Figura 22 - Curva de Tempo de processamento X Número de barras	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classes de Tensão	16
Tabela 2 - Grau de Esparsidade.....	43
Tabela 3 - Quantidade de memória x Esparsidade	46
Tabela 4 - Tempo de processamento para eliminação Gaussiana	48
Tabela 5 - Tempo de processamento usando método splu.....	48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CA	Corrente Alternada
CSC	<i>Compressed Sparse Column</i> – Coluna Esparsa Compactada
CSR	<i>Compressed Sparse Row</i> – Linha esparsa compactada
DDR4	<i>Double Data Rate 4</i> – Taxa de Transferência Dobrada 4
GE	Grau de Esparsidade
IEC	<i>International Electrotechnical Commission</i> – Comissão Internacional de Eletrotécnica
LT's	Linhas de Transmissão
NBR	Norma Brasileira
RAM	<i>Random Access Memory</i> – Memória de Acesso aleatório
SSD	<i>Solid State Drive</i> - Unidade de Estado Sólido

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	VII
LISTA DE TABELAS.....	VIII
LISTAS DE SIGLAS E ABREVIATURAS.....	IX
SUMÁRIO.....	X
1 INTRODUÇÃO.....	13
1.1 Objetivos do Trabalho	13
1.2 Metodologia do Trabalho	14
1.3 Estrutura do Trabalho	14
2 SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA	15
2.1 Introdução a Sistemas de Energia Elétrica	15
2.1.1 Geração	15
2.1.2 Transmissão e Subtransmissão.....	16
2.1.3 Distribuição	18
2.1.4 Carga	19
3 MODELAGEM DE ELEMENTOS DE SISTEMAS DE POTÊNCIA.....	20
3.1 Máquinas Síncronas.....	20
3.2 Transformadores de Potência	21
3.3 Linhas de Transmissão	23
3.4 Cargas	23
4 ANÁLISE DE FLUXO DE CARGA.....	25
4.1 Equação de Rede.....	25
4.2 Formulação do Problema de Fluxo de Carga	26
5 MÉTODOS ITERATIVOS	30
5.1 Gauss-Seidel	30
5.2 Gauss-Seidel Matricial.....	32

6 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FLUXO DE CARGA COM TÉCNICAS DE ESPARSIDADE.....	34
6.1 Método LU.....	34
6.2 Bi-Fatoração	35
6.2.1 Bi-fatoração pelo método gráfico	36
6.3 Método <i>Cholesky</i>	38
6.4 Ordenação	41
7 RESULTADOS.....	43
7.1 Grau de Esparsidade	43
7.2 Armazenamento	46
7.3 Solução do método iterativo – Gauss Seidel Matricial.....	47
8 CONCLUSÃO.....	51
9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
APÊNDICE A: Dados de um Sistema de 4 barras Utilizado na Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação.	56
APÊNDICE B: Tensões nodais obtidas com método iterativo de Gauss-Seidel	57
APÊNDICE C: Algoritmo Método Gauss Seidel	59

1 INTRODUÇÃO

Hodiernamente, a busca por diversos meios de aprimoramento de sistemas elétricos de potência, tem sido um processo contínuo e acelerado. Em face de um cenário em que se preza eficiência, sustentabilidade e qualidade energética, as indústrias e as instituições de ensino têm concentrado esforços em se produzir estudos e novas tecnologias que explorem esses parâmetros no que tange a geração, transmissão e distribuição de energia elétrica.

O Brasil, por ser um país com uma matriz energética diversificada e com predominância majoritária de energia limpa e renovável, vem passando por uma revolução nesse setor. Aliadas as outras áreas, como a automação e sistemas de tecnologia da informação, por exemplo, foi possível serem criadas as chamadas redes elétricas inteligentes (*Smart Grids*), que atuam de forma eficiente, corrigindo falhas na transmissão de energia, e que já são uma realidade nos sistemas mais modernos. Logo, é evidente que a contínua contribuição por parte de novas técnicas para aprimoramento de sistemas existentes, no intuito de corrigir problemas e/ou melhorar o que outrora era tido como atual, é de suma importância para o progresso dessas estruturas em termos científicos.

Uma das técnicas que hoje é amplamente utilizada é a computação, por meio de algoritmos e linguagens de programação. Esse método permite que se faça a resolução de problemas de maneira rápida e eficiente, permitindo que sistemas que antes possuíam dificuldades de processamento, possam ser executados de maneira mais prática, isentando a necessidade de execução de cálculos manuais. Outro benefício é a otimização de processos, que geralmente faz uso de métodos matemáticos associados, no intuito agregar mais confiabilidade nos resultados e diminuir o tempo de processamento, para que se proponha melhorias na redução dos custos e maximização de lucros diretos e indiretos.

1.1 Objetivos do Trabalho

Tendo em vista a necessidade atual de aperfeiçoamento de métodos computacionais na solução de problemas reais, este trabalho tem como objetivo principal a análise do fluxo de carga de sistemas elétricos de potência fazendo uso de técnicas de esparsidade, uma vez que, geralmente, as matrizes que são tratadas nesse tipo de problema, além de simétricas, positivas definidas e quadradas, são também esparsas. Assim, é possível explorar essa característica a fim de alcançar ganhos computacionais em termos de tempo de processamento e memória. Este processo torna-se factível quando se compara o tempo de solução de sistemas lineares esparsos utilizando métodos como inversão matricial e métodos de fatoração e ordenamento.

1.2 Metodologia do Trabalho

O trabalho se deu por meio de pesquisas bibliográficas na área de Sistemas de Potência, em sites de órgãos governamentais como a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) e em livros didáticos da área. Para a implementação computacional, foi utilizada a linguagem *Python* para adaptação do método de Gauss-Seidel na sua forma matricial permitindo assim que fosse possível verificar com clareza como a modelagem se dá e quais seriam as soluções para determinados sistemas a fim de se comparar os resultados dos mesmos em termos de tempo de processamento e armazenamento de memória.

1.3 Estrutura do Trabalho

O trabalho foi dividido em 8 capítulos. O capítulo 2 traz as referências bibliográficas que permitem fundamentar teoricamente acerca do que são os sistemas de energia elétrica bem como seus parâmetros constituintes. O capítulo 3 trata da modelagem dos elementos do sistema de potência, que viabiliza um melhor entendimento dos problemas a serem tratados. O capítulo 4 faz a análise do fluxo de carga envolvendo os elementos modelados no capítulo 3, permitindo estimar o comportamento físico do sistema por meio de cálculos e diagramas esquemáticos. No capítulo 5 é mostrado o método de Gauss-Seidel na sua forma tradicional e matricial, que são alguns dos processos iterativos que permitem fazer uso de artifícios matemáticos possibilitando encontrar os resultados desejados.

O capítulo 6 tem como foco a solução do problema de fluxo de carga fazendo uso de técnicas de esparsidade, em que é mostrado como algumas dessas técnicas funcionam no intuito de se alcançar o resultado de maneira mais ágil. No capítulo 7 é possível encontrar os resultados que advêm do processo dos estudos feitos nos capítulos anteriores bem como as constatações a respeito do que se pode inferir das técnicas de esparsidade empregadas de forma computacional. E, por fim, no capítulo 8, tem-se a conclusão de todo o trabalho.

2 SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

2.1 Introdução a Sistemas de Energia Elétrica

Segundo a NBR 5460, sistema elétrico (de potência) define-se, em termos gerais, como “[...] o conjunto definido de linhas e subestações que assegura a transmissão e/ou a distribuição de energia elétrica, cujos limites são definidos por meio de critérios apropriados [...]” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1992, p. 44). Saadat (1999, tradução nossa) divide esse sistema em quatro partes principais: Geração, Transmissão e Subtransmissão, Distribuição e Carga. A geração e transmissão são tidas como a fonte de alimentação e os sistemas de subtransmissão e distribuição são o meio final para se transmitir a energia elétrica para os consumidores (GÖNEN, 2009, tradução nossa).

2.1.1 Geração

A geração é onde se tem início todo o sistema de potência, pois é neste estágio em que a energia, seja ela hidráulica, eólica, nuclear, etc. é convertida em energia mecânica e posteriormente transformada em energia elétrica.

Segundo a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), as hidrelétricas são as principais fontes de geração de energia elétrica do Sistema Elétrico Brasileiro, que corresponde cerca de 62% da capacidade instalada em operação no país. Esse tipo de geração se dá por meio da força gravitacional, exercida pela massa de água ao percorrer um desnível geográfico. Ao atingir as turbinas, onde a energia potencial se transforma em energia mecânica de rotacional, o gerador é excitado, convertendo a energia mecânica em energia elétrica. Geralmente, nesses tipos de sistema, têm-se vários geradores que atuam em paralelo na rede a fim de que se tenha energia suficiente para o fornecimento pleno (ANEEL, 2019).

Outro componente que é de extrema importância para o sistema elétrico de potência é o transformador que tem como função transmitir energia com grande eficiência de um nível de tensão para outro. Excluindo-se as perdas existentes no transformador, a potência transferida do lado primário para o secundário quase sempre é a mesma; portanto, é possível transferir potência a longas distâncias caso faça-se uso de, por exemplo, um transformador que possui uma relação de espiras “a” em que o mesmo reduz a corrente no secundário para $1/a$, logo, reduzindo as perdas durante a transmissão (SAADAT, 1999, tradução nossa).

Devido a problemas práticos de projeto e requisitos de isolamento, a tensão comumente gerada é em torno de 30 kV, sendo assim, no final das linhas de transmissão, é necessário se utilizar transformadores abaixadores a fim de que se reduza a tensão a valores

adequados para o sistema de distribuição. Nota-se que, geralmente, em um sistema elétrico de potência moderno, a energia transmitida pode passar por quatro a cinco transformadores entre o gerador e o consumidor final (SAADAT, 1999, tradução nossa).

2.1.2 Transmissão e Subtransmissão

Para que os consumidores tenham acesso à energia gerada, é preciso transportá-la das usinas até os locais de consumo, em que, geralmente, não se situam próximos dos locais de geração. Assim, o transporte de energia é usualmente feito mediante o emprego de dispositivos específicos como Linhas de Transmissão (LT's), subestações e alimentadores.

As Linhas de Transmissão têm como principal objetivo transportar grandes blocos de energia para o sistema de distribuição, fornecendo carga de maneira imediata. Além disso, ela possui a função de interconectar as concessionárias vizinhas permitindo assim que, durante a falta de energia, seja possível dar continuidade à transferência de energia entre as regiões afetadas (SAADAT, 1999, tradução nossa).

Existe um padrão de tensão de transmissão que foi definido pelo IEC (*International Electrotechnical Commission* - IEC 60038, 2009) que estipula os seguintes valores de referência conforme mostra a Tabela 1:

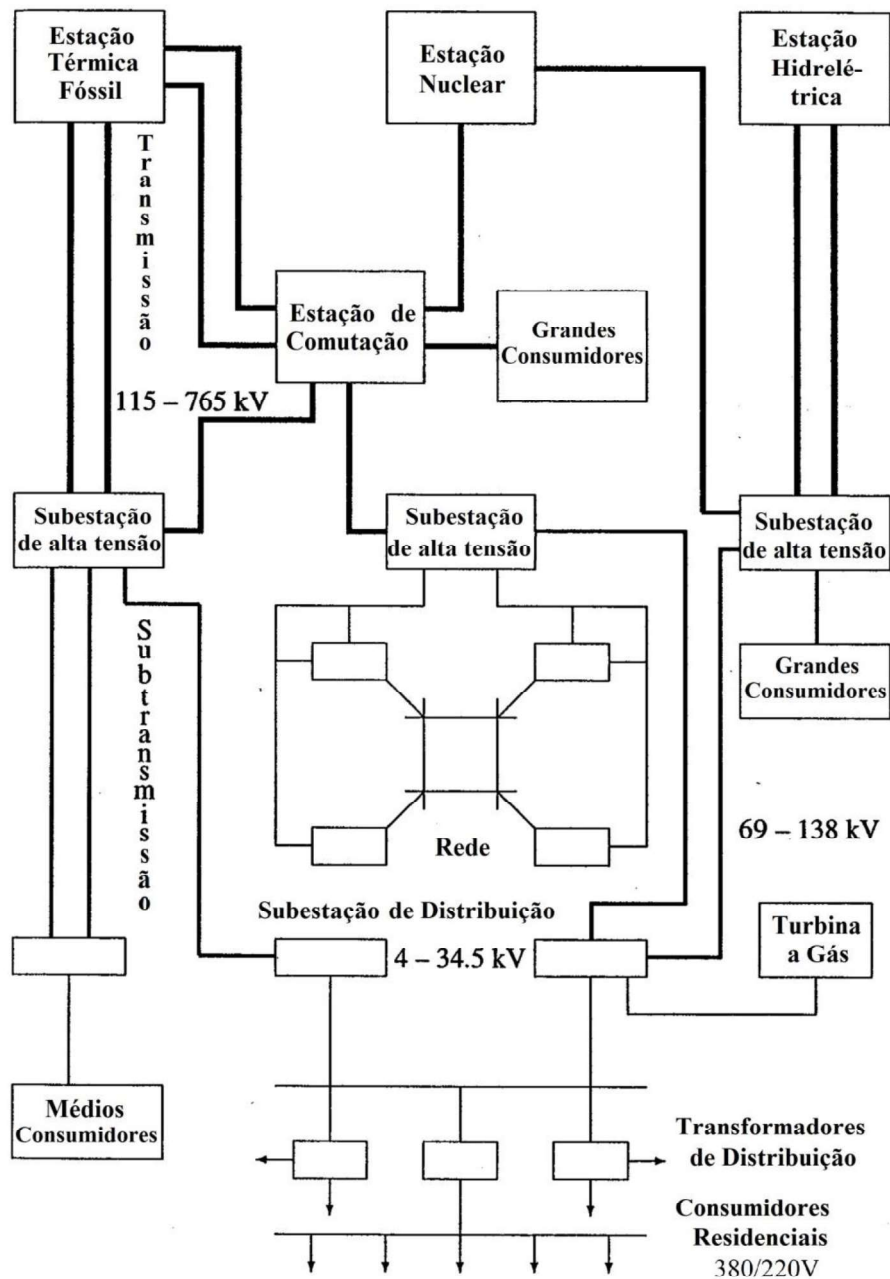
Tabela 1 - Classes de Tensão

Categorias de Tensão da IEC	Faixa de Tensão Nominal
Baixa Tensão	kV < 1
Média Tensão	1 < kV < 35
Alta Tensão	35 < kV < 230
Extra-Alta Tensão	230 < kV < 800
Ultra-Alta Tensão	1050 kV, 1100 kV, 1200 kV

Fonte: IEC 60038, 2009 (tradução nossa, adaptado)

A Figura 1 mostra um diagrama do sistema de transmissão e distribuição. Esse sistema se trata de uma rede complexa interconectada, em que as linhas de transmissão de alta tensão são finalizadas nas subestações, chamadas de subestações de alta tensão.

Figura 1 - Componentes básicos de um Sistema de Potência



Fonte: SAADAT, 1999 (tradução nossa, adaptado)

Caso esta subestação tenha como função alternar e desativar circuitos, ela é chamada de estação de comutação. Nas subestações primárias, a tensão é reduzida com a finalidade de se alcançar um valor mais adequado para a próxima parte da jornada em direção ao consumidor. (SAADAT, 1999, tradução nossa).

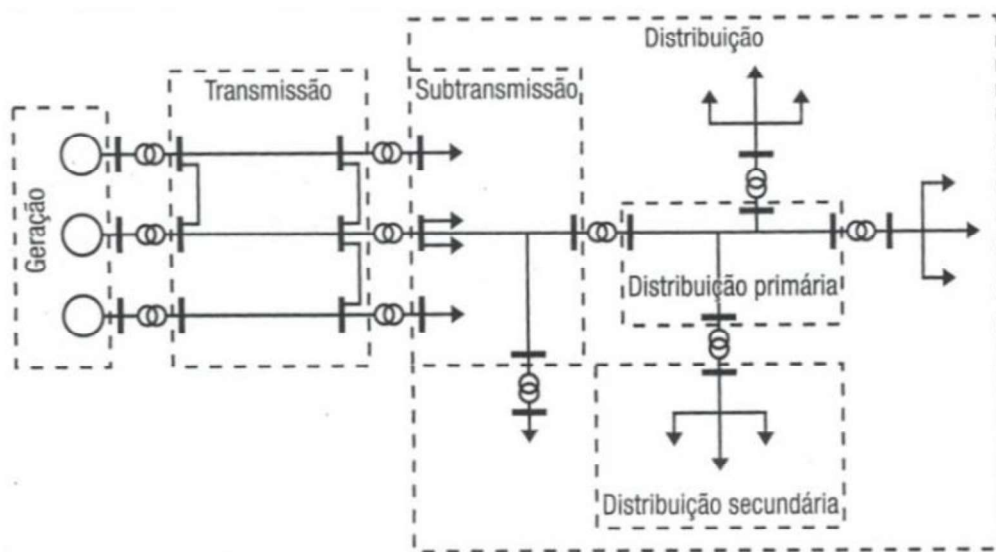
Uma rede de subtransmissão é denotada, de acordo com a Figura 1, como a parte do sistema que conecta subestações de alta tensão às subestações de distribuição, fazendo uso de

transformadores abaixadores. De acordo com o Art. 47 do Decreto nº 41.019 de 26 de fevereiro de 1957, as tensões nominais que devem ser adotadas pelas concessionárias de serviço de energia elétrica são, para transmissão e subtransmissão em corrente alternada, de 750; 500; 230; 138; 69; 34,5 e 13,8 kV. Em vista disto, é possível que grandes consumidores, como clientes industriais, possam ser atendidos diretamente pelo sistema de transmissão ou de subtransmissão.

2.1.3 Distribuição

Segundo Saadat (1999, tradução nossa), o sistema que conecta as subestações de distribuição aos equipamentos de entrada e saída dos consumidores é denominado como sistema de distribuição.

Figura 2 - Diagrama unifilar do Sistema Elétrico de Potência



Fonte: BENEDITO, 20--?

As linhas de distribuição primária usualmente possuem tensão que estão na faixa dos níveis de média tensão e, sendo assim, alguns consumidores industriais podem ser abastecidos diretamente por essa alimentação. Já a rede de distribuição secundária reduz a tensão das linhas de distribuição primária para níveis de baixa tensão, assim consumidores comerciais e residenciais podem usufruir do serviço, em que os níveis de tensões usualmente são 220/127 V ou 380/220 V.

2.1.4 Carga

As cargas do sistema de potência podem ser classificadas de acordo com a finalidade do consumo de energia elétrica por parte de um consumidor, destacando-se:

- a) Cargas residências: iluminação, cargas resistivas (chuveiros, ferros de passar roupas etc.);
- b) Cargas comerciais: iluminação e ar condicionado em diferentes centros comerciais;
- c) Cargas industriais: com predomínio de motores de indução, em geral são trifásicas;
- d) Cargas de Iluminação Pública; e
- e) Cargas Rurais: irrigação, agroindústrias etc.

Como dito anteriormente, os consumidores industriais podem ser alimentados diretamente pelos sistemas de transmissão, subtransmissão ou linhas de distribuição primária. O que definirá qual o tipo de sistema é necessário para abastecimento de determinada indústria será o seu porte, pois indústrias muito grandes geralmente são mantidas por meio de um sistema de transmissão, indústrias grandes pelo sistema de subtransmissão e pequenas indústrias pelas linhas de distribuição primária.

A maior parte das cargas industriais é composta de motores de indução que dependem diretamente da tensão e da frequência do sistema, diferente das cargas comerciais e residenciais que consistem, primordialmente, em iluminação, aquecimento e refrigeração que independem da frequência e consomem pouca potência reativa (SAADAT, 1999, tradução nossa).

A magnitude da carga consumida varia ao longo do dia, logo, a potência fornecida deverá se manter sob demanda. Os valores de pico (ou demanda máxima) ocorrem quando se atinge o maior valor de demanda de potência em um período de 24h.

3 MODELAGEM DE ELEMENTOS DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

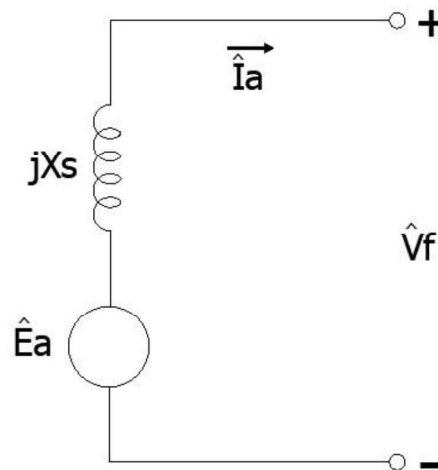
Este capítulo tem como objetivo modelar os elementos do sistema de potência explicitados anteriormente e que serão utilizados em esquemas para a base de cálculos.

3.1 Máquinas Síncronas

Máquinas síncronas são dispositivos capazes de realizar a conversão de energia elétrica em mecânica e vice-versa. O termo síncrono refere-se ao fato de que a frequência elétrica dessas máquinas está relacionada com a velocidade mecânica do eixo de rotação.

Geradores síncronos são máquinas síncronas utilizadas para conversão da energia mecânica, produzida por uma máquina motriz, em energia elétrica CA com tensão e frequência específica. Em análises de fluxo de carga, o modelo que representa o circuito equivalente para o gerador síncrono é mostrado na Figura 3. Este modelo mostra, de forma simplificada, os efeitos típicos da construção desse tipo de máquina: tensão \hat{E}_a induzida nos enrolamentos do estator, tensão \hat{V}_{fase} nos terminais do gerador, corrente \hat{I}_a que flui nos terminais do gerador quando conectado a uma carga, autoindutância e reação de armadura representadas como a reatância síncrona X_s (CHAPMAN, 2013).

Figura 3 - Modelo que representa um gerador síncrono

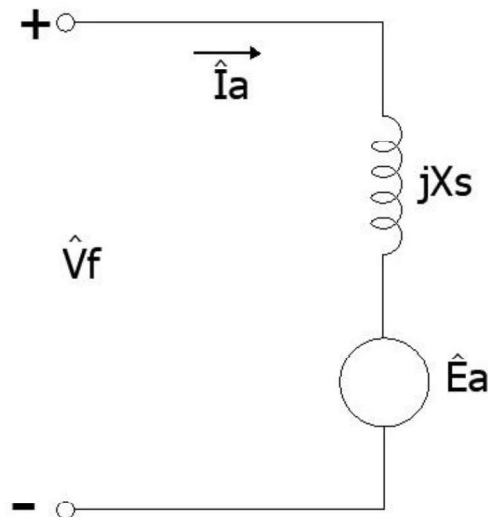


Fonte: Os autores

Já os motores síncronos convertem potência elétrica em potência mecânica apresentando o mesmo aspecto construtivo de geradores síncronos e, portanto, o circuito equivalente é semelhante ao mostrado para o gerador. Entretanto, como a potência elétrica é

consumida, o fluxo de potência ativa é invertido, assim o sentido de referência para \hat{I}_a também é oposto como mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Modelo que representa um motor síncrono



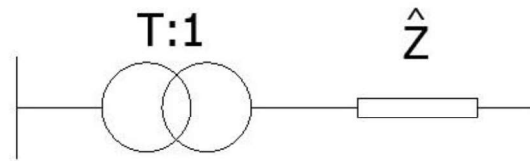
Fonte: Os autores

3.2 Transformadores de Potência

Transformadores de potência são equipamentos utilizados nos sistemas de potência capazes de alterar a amplitude de tensão e corrente sem modificar a frequência elétrica dessas grandezas. Eles podem ser classificados como transformadores elevadores ou transformadores abaixadores. Uma de suas aplicações é garantir níveis de tensão e corrente adequados para transmissão de potência elétrica nos sistemas de potência (SATO & FREITAS, 2015).

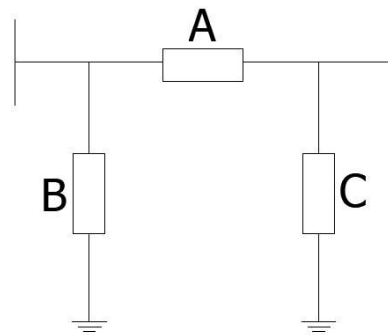
De modo geral, a representação de um transformador consiste em uma impedância Z série e um autotransformador ideal com relação de transformação $T:1$. Se T é um número real, o transformador é denominado transformador em-fase ($T = a$), se T é um número complexo ($T = ae^{j\theta}$) diz-se defasador. A Figura 5 mostra a representação de um transformador em-fase (MONTICELLI, 1983).

Figura 5 - Modelo de transformador em fase



Fonte: Os autores

Um transformador em-fase pode ser representado por um modelo equivalente do tipo π , conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6 - Modelo π de transformador em fase

Fonte: Os autores

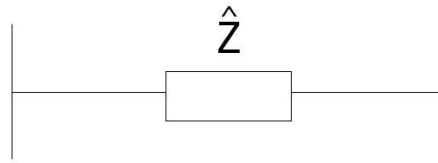
Os parâmetros A, B e C, são dados por:

$$A = z \cdot T \quad (3.1)$$

$$B = z \cdot \frac{T^2}{1-T} \quad (3.2)$$

$$C = z \cdot \frac{T}{T-1} \quad (3.3)$$

Para $T = 1$, as impedâncias representadas por B e C se comportam como circuito aberto e o esquema se reduz ao mostrado na Figura 7.

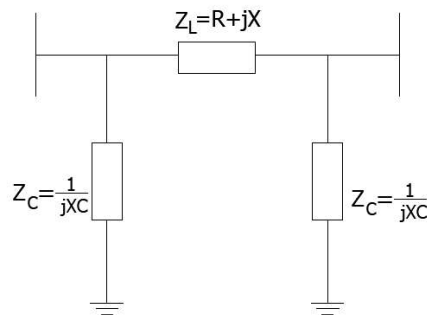
Figura 7 - Modelo de transformador em fase quando $T=1$ 

Fonte: os autores

3.3 Linhas de Transmissão

As linhas de transmissão são os elementos responsáveis por transmitir todas as grandezas relacionadas à energia elétrica (tensão, corrente e potência elétrica etc.), portanto, exercem função fundamental garantindo acessibilidade da energia elétrica em todo o território brasileiro. É caracterizada pela predominância dos efeitos resistivos, indutivos e capacitivos (entre cabo e a terra). Esses efeitos podem ser representados por meio de parâmetros concentrados ou distribuídos a depender do tipo de modelo adotado.

Para linhas de comprimento médio adota-se o modelo π , ilustrado na Figura 8. A impedância série Z_L representa os efeitos resistivos e indutivos dos condutores, enquanto a impedância Z_C , o efeito capacitivo.

Figura 8 - Modelo π para linhas de transmissão

Fonte: Os autores

3.4 Cargas

As cargas são modelos que expressam o consumo de potência ativa e reativa em qualquer instante do tempo, em função da tensão no barramento e da frequência elétrica no sistema. Quando ocorrem pequenas variações de frequência e tensão, de modo que haja

condições de preservar a estabilidade, o sistema irá retornar ao regime permanente rapidamente, sendo possível, nesses casos modelar a carga conectada ao sistema elétrico por meio de modelos estáticos sem perda de generalidade.

Nesse estudo de fluxo de carga adotam-se dois modelos de carga: impedância constante e potência constante. O primeiro modelo expressa a variação de potência proporcionalmente ao quadrado de desvios da tensão $V(k)$ de seu ponto de operação pré-distúrbio V_0 , como mostram as relações (3.4) e (3.5).

$$P(k) = P_0 \left(\frac{V(k)}{V_0} \right)^2 \quad (3.4)$$

$$Q(k) = Q_0 \left(\frac{V(k)}{V_0} \right)^2 \quad (3.5)$$

Já o segundo modelo de carga, expressa a variação de potência independente de variações de tensão, como pode-se notar nas equações abaixo:

$$P(k) = P_0 \quad (3.6)$$

$$Q(k) = Q_0 \quad (3.7)$$

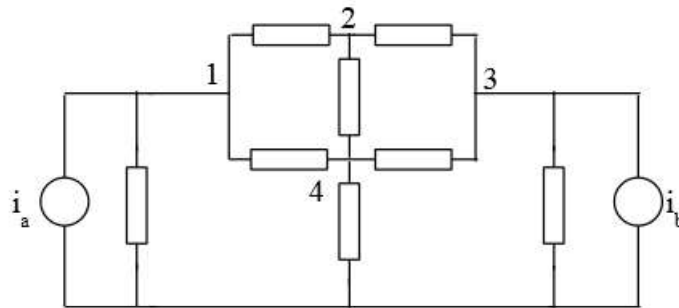
4 ANÁLISE DE FLUXO DE CARGA

Ferramenta fundamental no estudo das variáveis dos sistemas de potência, a análise de fluxo de carga fornece dados importantes que são utilizados nas fases de planejamento e operação dos grandes sistemas de energia elétrica. Aplicada em situações em que o sistema opera em condições de estabilidade, essa análise envolve a determinação das tensões nodais e dos fluxos de potência para um sistema genérico.

4.1 Equação de Rede

A análise do fluxo de carga requer conhecimento acerca de relações importantes da teoria de circuitos. Uma bastante empregada é a lei de Kirchoff para corrente, que relaciona a soma das correntes que saem e entram em uma região, sistema ou nó. A Figura 9 mostra um diagrama de admitâncias e fontes de corrente em paralelo e, de acordo com o teorema de Kirchoff para a corrente, a soma das correntes que entram e saem de um nó é igual a zero. Assim, para o nó 1, tem-se:

Figura 9 - Diagrama de Admitâncias



Fonte: ARRUDA, 2005

$$\sum I_1 = 0 \quad (4.1)$$

$$I_{10} + I_{12} + I_{14} - I_A = 0 \Rightarrow I_{10} + I_{12} + I_{14} = I_A \quad (4.2)$$

As correntes nos ramos podem ser definidas em função das tensões nodais e dos valores das admitâncias. Considerando a barra 0 como a referência ($V_0 = 0 \text{ V}$), portanto, a equação 4.2 torna-se:

$$(V_1 - 0)Y_{10} + (V_1 - V_2)Y_{12} + (V_1 - V_4)Y_{14} = I_A \quad (4.3)$$

Reagrupando os termos em função das tensões, então:

$$(Y_{10} + Y_{12} + Y_{14})V_1 - Y_{12}V_2 - Y_{14}V_4 = I_A \quad (4.4)$$

Por fim, definido como Y_{11} o somatório de admitâncias incidentes no nó 1,

$$Y_{11}V_1 - Y_{12}V_2 - Y_{14}V_4 = I_A \quad (4.5)$$

Analogamente, pode-se empregar as mesmas etapas para todas as equações referentes aos nós restantes. Conhecendo todas as equações é possível formular a equação de rede na sua forma matricial, conforme equação 4.6, para o circuito mostrado na Figura 9. Como demonstrado na equação 4.2, as correntes que compõe o vetor de injeção de correntes são positivas quando entram no nó e negativas quando deixam o nó.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & 0 & -Y_{14} \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} & -Y_{24} \\ 0 & -Y_{32} & Y_{33} & -Y_{34} \\ -Y_{41} & -Y_{42} & -Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ 0 \\ I_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

De modo geral, o raciocínio acima pode ser aplicado a um circuito de n barras:

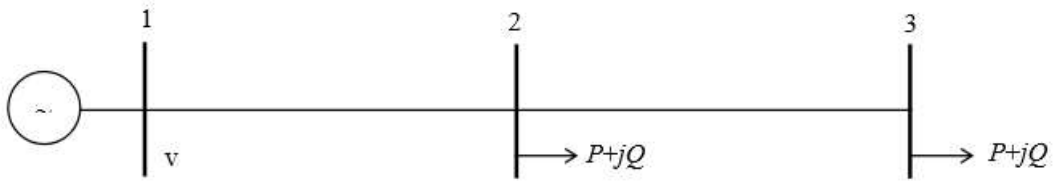
$$[Y_n][V_n] = [I_n] \quad (4.7)$$

onde Y_n é a matriz de admitâncias nodais, V_n é o vetor de tensões nodais e I_n é o vetor de injeção de correntes nos nós.

4.2 Formulação do Problema de Fluxo de Carga

Um sistema genérico de 3 barras que é mostrado na Figura 10

Figura 10 - Sistema genérico de 3 barras



Fonte: ARRUDA, 2007

possui a seguinte equação de rede, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & 0 \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} \\ 0 & -Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Na operação dos sistemas elétricos de potência é comum conhecer a injeção de potências nas barras do sistema, que se relaciona com a tensão e corrente por meio das seguintes equações:

$$S = V \cdot I^* \quad (4.9)$$

$$I = \left(\frac{S}{V} \right)^* \quad (4.10)$$

Portanto, o vetor de correntes pode ser dado em função da injeção de potência na barra. Quando a barra está conectada a uma carga, a injeção de potência é negativa e quando a barra é conectada à geração, a injeção de potência é positiva, de forma que a injeção líquida de potência na barra é dada por:

$$S_{liq} = S_g - S_c \quad (4.11)$$

Assim, a equação 4.10 se resume a:

$$I = \left(\frac{S_g - S_c}{V} \right)^* \quad (4.12)$$

Logo, a equação de rede pode ser reformulada em função da injeção de potência, como se segue:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & 0 \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} \\ 0 & -Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ (S_2^g - S_2^c)^* / V_2^* \\ (S_3^g - S_3^c)^* / V_3^* \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A primeira linha da equação de rede acima representa a barra da geração, conhecida geralmente como barra *slack* ou barra *swing*. A barra *slack* se caracteriza como a referência para as outras barras em termos de magnitude de tensão e fase e essas grandezas permanecem constantes independentemente do valor de corrente ou potência solicitado pela rede.

As demais linhas representam barras PQ cujos valores de potência ativa e reativa são conhecidos e considerados constantes independentemente dos valores das tensões nodais. Considerando que há geração apenas na barra 1 e que as demais são barras de carga, a equação 4.13 se resume a:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & 0 \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} \\ 0 & -Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ (-S_2^c)^* / V_2^* \\ (-S_3^c)^* / V_3^* \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Já o módulo da tensão e o defasamento angular são incógnitas. Embora comumente associadas a barras de cargas, barras de geração também podem ser consideradas barras PQ quando não possuem equipamentos capazes de regular as tensões nos nós.

Outro tipo de barra adotado nos estudos de sistemas de potência é a barra PV, comumente conhecida como barra de tensão controlada. Nesse tipo de barra, conhece-se a magnitude da tensão passível de controle por meio de injeção de reativos. Em barras PV, a potência ativa e o módulo da tensão são conhecidos, enquanto a potência reativa e a fase da tensão são desconhecidas.

Portanto, a análise de fluxo de carga se propõe solucionar dois subproblemas característicos dos sistemas de energia elétrica:

1. Encontrar os valores de tensões nodais e os respectivos ângulos de fase; e
2. Encontrar as injeções de potência ativa e reativa na barra *slack* e injeções de potência reativa nas barras PV.

Além disso, conhecendo as variáveis encontradas pelos subproblemas, pode-se analisar os fluxos de potências nos ramos, e assim, conhecer as perdas de potências nas linhas de transmissão e nos demais elementos do sistema de potência.

$$\begin{cases} V_k^i = \frac{1}{Y_{kk}} \cdot \left(-S_k^* / (V_k^{i-1})^* + Y_{21} \cdot V_1 \right), & \text{para } k = 2 \\ V_k^i = \frac{1}{Y_{kk}} \cdot \left(-S_k^* / (V_k^{i-1})^* \right), & \text{para } k = 3, 4, \dots, N \end{cases} \quad (5.5)$$

Para aplicação do método, durante a iteração inicial, considera-se a escolha de valores adequados para as tensões desconhecidas. Assim, novas estimativas de V_k podem ser obtidas substituindo os valores de V_k^{i-1} , pelos valores de V_k^i . O processo pode ser repetido até que se atinja o critério de parada.

A convergência pode ser controlada pelo cálculo do *mismatch* de potência, ou seja, pelo cálculo do balanço de potência nas barras. Para uma barra k qualquer, a injeção de corrente na barra é dada pela linha k da equação 5.1 que, aplicando na equação 4.9, obtém-se o *mismatch* de potência:

$$\sum S_k = V_k \cdot \left(-Y_{k1} \cdot V_1 - Y_{k2} \cdot V_2 + \dots + Y_{kk} \cdot V_k + \dots - Y_{kN-1} \cdot V_{N-1} - Y_{kN} \cdot V_N \right)^* + S_k^c \quad (5.6)$$

$$\sum S_k = V_k \cdot \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N (-Y_{kn} \cdot V_n) + Y_{kk} \cdot V_k \right)^* + S_k^c \quad (5.7)$$

$k = 2, 3, 4, \dots, N$

Assim, o critério de parada é estipulado escolhendo um valor desejado para o *mismatch*.

5.2 Gauss-Seidel Matricial

Embora a versão tradicional do método de Gauss-Seidel possua uma simples concepção, sua convergência pode ser lenta devido ao grande número de cálculos. O método matricial propõe uma melhoria na convergência em relação ao tradicional ao considerar a carga como um modelo de impedância constante, assim é possível rearranjar os termos, associando à carga os elementos da diagonal principal (ARRUDA, 2007). Considere a linha k da equação 5.1, manipulando o termo independente, tem-se:

$$I_k = \frac{-S_k^*}{V_k^*} \cdot \frac{V_k}{V_k} = \frac{-S_k^*}{V_k^* \cdot V_k} \cdot V_k = \frac{-S_k^*}{|V_k|^2} \cdot V_k \quad (5.8)$$

Ou de forma equivalente para o processo iterativo:

$$\frac{-S_k^*}{(V_k^{i-1})^*} \cdot \frac{V_k^i}{V_k^i} = \frac{-S_k^*}{|V_k^{i-1}|^2} \cdot V_k^i \quad (5.9)$$

em que o fator $-S_k^*/|V_k^{i-1}|^2$ corresponde ao inverso do modelo de impedância, ou seja, possui dimensão de admitância e o termo $|V_k^{i-1}|^2$ corresponde ao valor escolhido do módulo da tensão para iniciar o processo iterativo. Assim, a equação 5.2 pode ser reescrita associando esses fatores aos termos da diagonal principal, como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} Y_{22} + \frac{S_2^*}{|V_2^{i-1}|^2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & Y_{kk} + \frac{S_k^*}{|V_k^{i-1}|^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & Y_{nn} + \frac{S_n^*}{|V_n^{i-1}|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^i \\ \vdots \\ V_k^i \\ \vdots \\ V_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{21} \cdot V_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Logo, a equação acima pode ser solucionada isolando o vetor de tensões nas barras:

$$\begin{bmatrix} V_2^i \\ \vdots \\ V_k^i \\ \vdots \\ V_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{22} + \frac{S_2^*}{|V_2^{i-1}|^2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & Y_{kk} + \frac{S_k^*}{|V_k^{i-1}|^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & Y_{nn} + \frac{S_n^*}{|V_n^{i-1}|^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{21} \cdot V_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Assim, a equação 5.10 pode ser utilizada como um método iterativo para o cálculo das tensões, em que a matriz de coeficiente deve ser atualizada com os valores de tensões da iteração anterior. Um algoritmo ilustrando como esse método foi implementado é mostrado no Apêndice C.

6 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FLUXO DE CARGA COM TÉCNICAS DE ESPARSIDADE

A resolução do problema de fluxo de carga pelo método de Gauss-Seidel pode ser alcançada por meio de algoritmos associados a um programa computacional, em que são calculadas repetidas soluções de grandes conjuntos de equações lineares.

Os conjuntos de equações lineares que descrevem o problema de fluxo de carga possuem natureza esparsa. Geralmente, uma matriz é dita esparsa se houver uma vantagem em explorar seus elementos nulos. Esta vantagem é alcançada ao eliminar a necessidade de cálculos envolvendo esses elementos bem como seu armazenamento. Assim, obtém-se um ganho computacional em termos de tempo de execução e armazenamento em memória.

Então, neste capítulo serão abordados alguns conceitos de álgebra linear e como os mesmos são usados para a fatoração de matrizes esparsas. Entretanto, essas definições são apresentadas de forma simplificada, logo, recomenda-se a leitura dos textos originais para maior formalismo e aprofundamento teórico.

6.1 Método LU

A forma matricial do método de Gauss-Seidel permite a linearização das equações a cada iteração, assim para calcular as variáveis do sistema pode-se aplicar a inversão matricial, outra alternativa é decompor a matriz de coeficiente em dois fatores de forma que a solução seja alcançada com maior facilidade e menor número de cálculos. Sendo assim, será discutido nesse tópico o método de fatoração LU. Esse método consiste em resolver sistemas lineares $n \times n$ (n equações \times n incógnitas) fatorando a matriz de coeficientes em um produto de matrizes, uma triangular inferior e a outra, triangular superior.

Suponha um dado sistema de equações como mostrado abaixo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (6.1)$$

A matriz de coeficientes A , de n equações e n incógnitas será fatorada em um produto

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (6.2)$$

em que L é a matriz triangular inferior e U é a matriz triangular superior. O método consiste em 04 passos:

- Passo 1: De posse da equação, 6.1, é possível escrever $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ como:

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.3)$$

- Passo 2: Feito isso, defina uma matriz \mathbf{y} de tamanho $n \times 1$ como:

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (6.4)$$

- Passo 3: Então, use a equação 6.3 para reescrever a equação 6.2 como $L\mathbf{y}=\mathbf{b}$ e resolva esse sistema em \mathbf{y} .
- Passo 4: Substitua \mathbf{y} na equação 6.3 e resolva em \mathbf{x} .

Com isso, o sistema que antes era $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ foi substituído pelo par de sistemas lineares $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$ e $L\mathbf{y}=\mathbf{b}$ que devem ser resolvidos um em seguida do outro (ANTON, 2012).

6.2 Bi-Fatoração

Enquanto que o método de fatoração utiliza a combinação de linhas matriciais para a eliminação de variáveis, o método da bi-fatoração utiliza linhas e colunas. Cada passo do processo elimina um elemento e o seu simétrico, ou seja, o processo elimina a cada passo os elementos A_{ij} e A_{ji} . Para tanto, utiliza-se um fator matricial esquerdo e direito, simulando respectivamente, uma combinação de linhas e colunas (ARRUDA, 2001). Esse processo relaciona-se com a equação da seguinte maneira:

$$L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 A R_1 R_2 \dots R_{n-1} R_n = I \quad (6.5)$$

sendo:

L = matriz de fatores triangular inferior (*left-hand*)

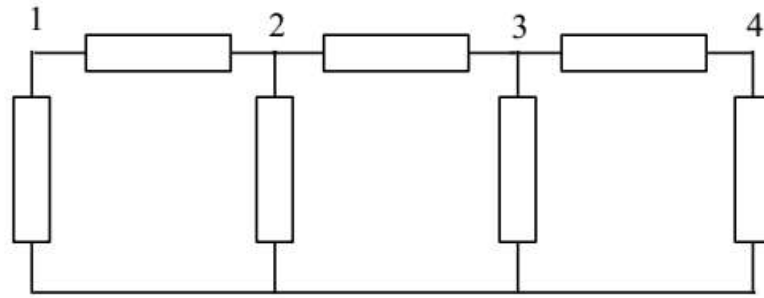
R = matriz de fatores triangular superior (*right-hand*)

I = matriz identidade

Assim, a equação 6.5 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$A^{-1} = R_1 R_2 \dots R_{n-1} R_n L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 \quad (6.6)$$

Figura 12 – Rede 4 nós



Fonte: ARRUDA, 2001

Pode-se notar que a matriz de admitância associada à Figura 12 possui referência comum entre todos os nós, portanto, a visualização gráfica do processo de eliminação pode ser feita excluindo-se o nó de referência, obtendo assim, o grafo correspondente abaixo:

Figura 13 - Grafo correspondente da figura 12



Fonte: ARRUDA, 2001

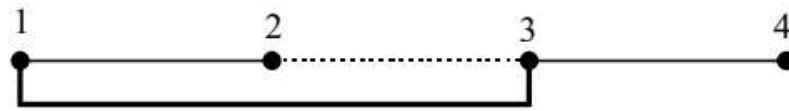
Assume-se que o processo de eliminação na matriz correspondente à figura 13 tenha início no ramo 1-2. A eliminação deste ramo pode ser obtida através da operação matricial explicitada no item 6.3 que, em termos gráficos, equivale a dizer que o nó 1 foi *arrastado* para o nó 2 conforme a figura 14 abaixo:

Figura 14 - Grafo com nó 1 *arrastado* para nó 2

Fonte: ARRUDA, 2001

Agora, supondo que o processo de eliminação da figura 13 tivesse iniciado eliminando o ramo 2-3. A figura 15 ilustra este processo, *arrastando* o nó 2 para o nó 3, porém com uma ressalva: o nó 2 está conectado ao nó 1, que impede seu deslocamento sem a criação de uma nova conexão. Sendo assim, ao *arrastar* o nó 2 para o 3, surge uma conexão entre o nó 1 e o nó 3 (ARRUDA, 2001).

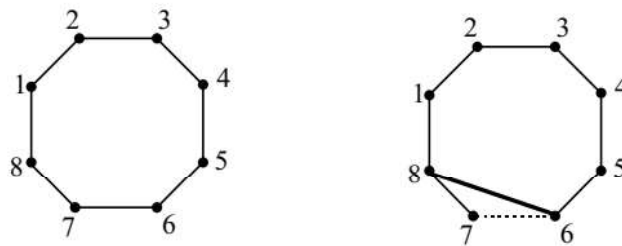
Figura 15 - Grafo com nó 2 *arrastado* para nó 3



Fonte: ARRUDA, 2001

Por fim, elucidando um exemplo com 8 ramos em que se deseja eliminar o ramo 6-7. Ao *arrastar* o nó 6 para o 7, surge uma conexão entre 5 e 7. Ao *arrastar* o nó 7 para o 6, surge uma conexão entre o nó 8 e 6. Esse exemplo pode ser observado abaixo:

Figura 16 - À esquerda, grafo com 8 ramos; à direita, grafo com nó 7 *arrastado* para o nó 6



Fonte: ARRUDA, 2001

Segundo Arruda (2001), a visualização gráfica, sem dúvidas, permite que seja facilitada a determinação dos caminhos de fatoração que consigam diminuir a criação de novos ramos que, em termos computacionais, implica em uma redução significativa em termos de operações matemáticas.

6.3 Método *Cholesky*

O método de *Cholesky* é conhecido como uma variante simétrica da eliminação gaussiana, adaptada para matrizes simétricas definidas positivas. Considere a equação 6.1 onde A é a matriz de coeficientes, quadrada de ordem N , simétrica, positiva definida; \mathbf{b} é um vetor de tamanho N e \mathbf{x} é o vetor solução também de tamanho N . Aplicando o método de *Cholesky* em A , uma fatoração triangular é produzida:

$$A = LL^T \quad (6.7)$$

onde L é a matriz triangular inferior com elementos positivos em sua diagonal. Para garantir que uma matriz M seja de fato a matriz triangular inferior, basta verificar se $m_{ij}=0$ para $i < j$; ou caso se queira encontrar a matriz triangular superior, averiguar se $m_{ij}=0$ para $i > j$ (GEORGE & LIU, 1981). A matriz L^T é a transposta da matriz L . Portanto, a solução da equação 6.1 pode ser alcançada fazendo:

$$LL^T \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.8)$$

e substituindo $\mathbf{y}=L^T\mathbf{x}$, o vetor solução \mathbf{x} é obtido resolvendo dois sistemas triangulares na forma

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (6.9)$$

e

$$L^T \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (6.10)$$

Como exemplo, considere o problema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

De acordo com o método de *Cholesky*, o fator L é dado por:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ 0,50 & 0,50 & & & \\ 1 & -1 & 1 & & \\ 0,25 & -0,25 & -0,50 & 0,50 & \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Fazendo $L\mathbf{y}=\mathbf{b}$, obtemos:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2,5 \\ 6 \\ -2,5 \\ -0,50 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

e então, resolvendo $L^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$, vem:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -8 \\ -0,50 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Este exemplo mostra uma desvantagem a respeito do método de *Cholesky* quando aplicado em uma matriz esparsa: a matriz geralmente sofre um efeito chamado de preenchimento (*fill-in*), ou seja, o fator L possui elementos não nulos em posições que não constam na matriz triangular inferior de A.

Suponha que as equações sejam rearranjadas da seguinte forma: a última equação se torna a primeira, a penúltima se torna a segunda e assim sucessivamente, até que a primeira equação se torne a última. Além disso, considere que as variáveis x_i , para $i=1, 2, \dots, 5$ sejam permutadas conforme o seguinte esquema: $x_i = \tilde{x}_{5-i+1}$, $i=1, 2, \dots, 5$. Assim, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Vale frisar que essa reorganização das equações e mudança dos nomes das variáveis equivale a uma permutação simétrica das linhas e colunas da matriz A, aplicando a mesma permutação à matriz b. Este novo sistema será chamado de $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{b}}$. Fazendo uso do método de Cholesky neste novo sistema, fatorando \tilde{A} em $\tilde{L}\tilde{L}^T$ obtém-se:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 4 & & & & 0 \\ 0 & 0,791 & & & \\ 0 & 0 & 1,730 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0,707 & \\ 0,500 & 0,632 & 1,150 & 1,41 & 0,129 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Resolvendo $\tilde{L}\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{b}}$ e $\tilde{L}^T\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}}$, leva a solução $\tilde{\mathbf{x}}$ que é uma forma rearranjada de \mathbf{x} . O ponto crucial a ser observado nessa abordagem é que a reordenação de equações e das variáveis trouxe um fator triangular \tilde{L} tão esparsa quanto a matriz triangular inferior de A . Entretanto, esta é uma prática difícil de ser alcançada para a maioria dos problemas envolvendo matrizes esparsas. Uma reorganização criteriosa da matriz de coeficientes pode levar a uma grande redução de preenchimento (GEORGE & LIU, 1981).

Assim, a tarefa de encontrar uma boa ordenação definida como “problema de ordenação” é o ponto fundamental no estudo das soluções dos problemas esparsos. Na sessão seguinte, um método de ordenação será discutido.

6.4 Ordenação

O conceito de ordenação surge da necessidade de geração de um número mínimo de elementos no processo de preenchimento já citado anteriormente. O termo ordenação é bastante vasto, pois permite associar as implicações da sequência de operações no processo da eliminação Gaussiana ao processo de redução física da rede elétrica. Neste capítulo foi utilizada a teoria de grafo em que a mesma trata da renumeração dos nós em um esquema que é um conjunto de nós e arcos que indicam a localização dos elementos não nulos da matriz original a fim de modificar as características desta. O ordenamento da matriz esparsa fará essa renumeração dos nós em um grafo no intuito de modificar as características da matriz original (SIMEÃO, 2001).

Então a finalidade primordial deste método além de preservar a esparsidade da matriz é a otimização das estruturas de dados e controle de precisão numérica, visando a estabilidade do sistema (SIMEÃO, 2001).

Nos cálculos envolvidos no método de Cholesky, ficou evidente que o preenchimento que advém dele é um efeito que deveria ser evitado, pois este consome memória e exige maior custo computacional. Na tentativa de que este problema seja controlado, tenta-se tornar o fator de Cholesky o mais esparsa possível, permutando linhas e colunas da matriz original. Entretanto, encontrar uma ordem para as linhas e colunas de uma

matriz simétrica definida positiva no intuito de sanar esse problema é uma tarefa complexa (TSUCHIYA, 2017).

Sendo assim, uns dos melhores métodos de ordenamento conhecido é o método do mínimo grau (LIU,1985). O termo grau faz referência à quantidade de elementos não nulos em uma coluna ou linha da matriz, exceto a diagonal principal. O grau de um elemento da diagonal principal será o grau da linha ou da coluna ao qual este elemento pertence

Neste método, a cada passo, observa-se na matriz restante da fatoração qual é o grau de cada elemento da diagonal principal. Feito isso, seleciona-se qual é o elemento da diagonal que possui menor grau. Se este elemento ocorre na posição (k,k) da matriz restante, haverá uma troca da linha 1 coluna 1 com a linha k coluna k, respectivamente. Assim, o novo pivô será estabelecido mediante o cálculo da próxima coluna do fator de Cholesky (TSUCHIYA, 2017).

A motivação para se observar os graus desses elementos se dá pelo fato de que se o pivô A_{kk} possui grau d , por exemplo, a matriz atualizada conterà d^2 elementos não nulos e, portanto, têm-se como objetivo, minimizar a quantidade desses, escolhendo o pivô com menor grau.

No método de fatoração de Cholesky esparsa faz-se uso de grafos para implementar esta ordenação numérica, que ocorre antes da fatoração, uma vez que a ordenação não ocorre ao mesmo tempo que se calcula a fatoração. Supondo uma matriz A a ser fatorada com grau m , seu grafo correspondente terá m nós, com uma aresta conectando os nós i e j , caso o elemento A_{ij} seja não nulo. O grau do nó i é o número de arestas que constituem este nó. (TSUCHIYA, 2017).

Este artifício assemelha-se ao utilizado na bi-fatoração pelo método gráfico, quando se *arrasta*, por exemplo, o nó i para o nó j e cria-se arestas entre o nó j e o nós que estavam conectados anteriormente ao nó i . O preenchimento até este passo é igual ao número de arestas novas que foram criadas.

7 RESULTADOS

Esta seção se dedica a apresentar os resultados do problema de fluxo de carga, cuja solução é obtida pelo método direto: mediante inversão matricial e considerando a característica esparsa do problema, por meio de técnicas de esparsidade. Ambos os métodos são implementados em linguagem *Python* versão 3.8. A inversão matricial é feita utilizando um algoritmo próprio fundamentado no escalonamento de Gauss-Jordan. Para a esparsidade, optou-se por utilizar o método *splu* da classe *Linalg*, presente na biblioteca *Scipy*. A aplicação desse método consiste em utilizar como parâmetro a matriz de coeficiente, o método computa a decomposição da matriz de coeficiente esparsa retornando um objeto que possui um método para encontrar a solução do sistema dado a fatoração.

Todos os resultados apresentados foram realizados em um notebook com as seguintes especificações de hardware:

- Processador: Intel® Core™ i5, 1.60 GHz, memória cache L3 6MB com 4 núcleos físicos e 8 virtuais;
- Memória RAM: Samsung 8GB DDR4 2666 MHz
- Armazenamento: SSD ADATA XPG, 512 GB, com velocidade de leitura 3500 MB/s e escrita 3000 MB/s; e
- Sistema Operacional: Windows 10 64 bits.

7.1 Grau de Esparsidade

Para obtenção dos resultados, foram utilizadas diferentes configurações de redes cujo número de barras é da ordem 300, 700, 900, 2.000, 3.000, 5000 e 8.000. Define-se como grau de esparsidade a relação dada pela expressão abaixo:

$$GE = \frac{\text{quantidade de elementos nulos}}{\text{quantidade total de elementos}} \times 100\% \quad (7.1)$$

A Tabela 2 mostra o número de elementos não-nulos, assim como o grau de esparsidade de acordo com o número de barra N de cada rede

Tabela 2 - Grau de Esparsidade

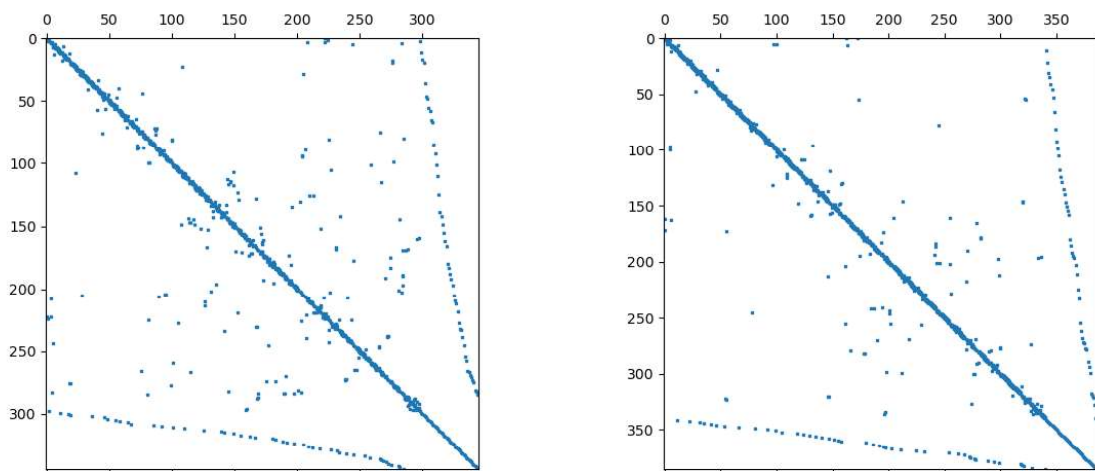
N	Número de elementos não-nulos	GE (%)
345	1.037	99,13%
386	1.156	99,22%

N	Número de elementos não-nulos	GE (%)
768	2.306	99,61%
981	2.941	99,69%
2.648	7.950	99,89%
3.565	10.695	99,92%
5.024	15.074	99,94%
8.438	25.318	99,96%

Fonte: Os autores

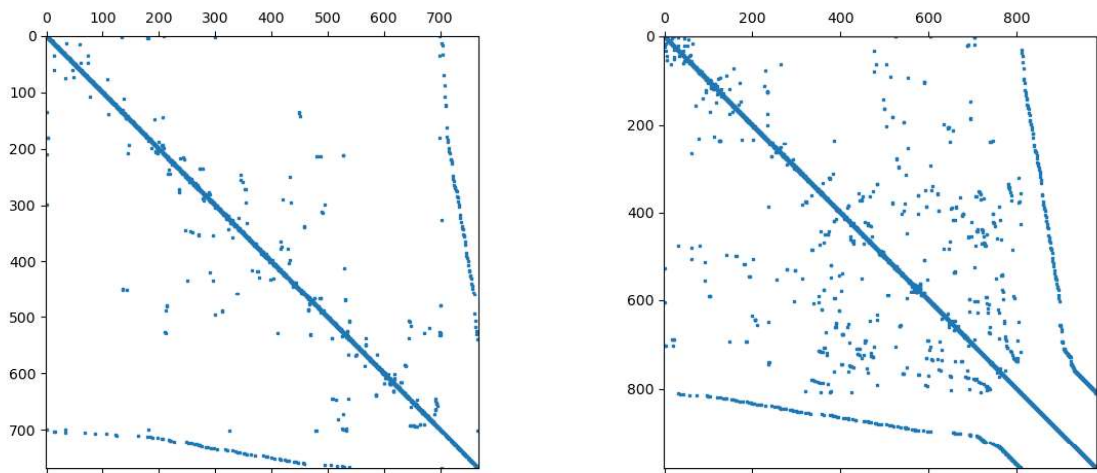
Nas figuras 17, 18, 19 e 20 são mostrados os padrões da estrutura esparsa para cada rede relacionada na Tabela 2.

Figura 17 - Padrão de elementos não-nulos da matriz Y_{BUS} : à esquerda, com 345 barras e à direita, com 386 barras



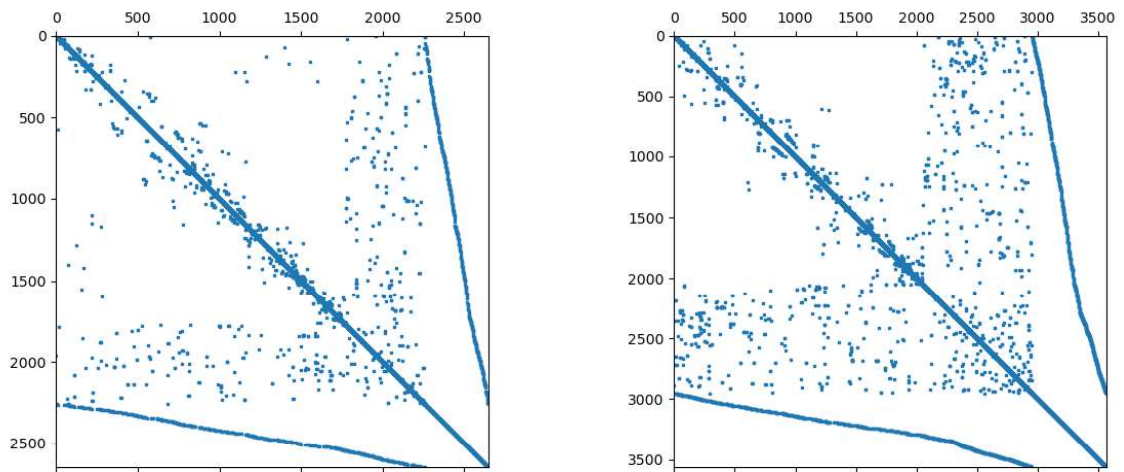
Fonte: Os autores

Figura 18 - Padrão de elementos não-nulos da matriz Y_{BUS} : à esquerda, com 768 barras e à direita, com 981 barras



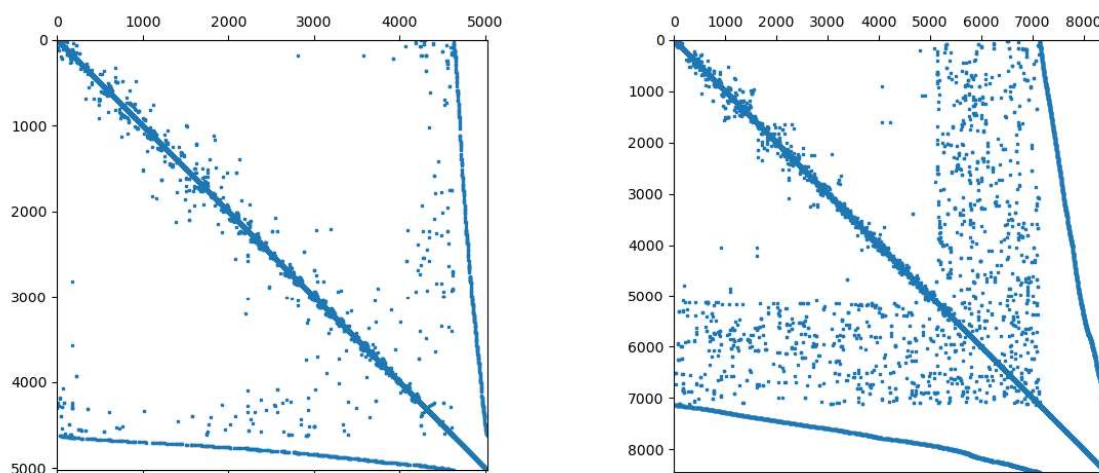
Fonte: Os autores

Figura 19 - Padrão de elementos não-nulos da matriz Y_{BUS} : à esquerda, com 2.648 barras e à direita, com 3.565 barras



Fonte: Os autores

Figura 20 - Padrão de elementos não-nulos da matriz YBUS: à esquerda, com 5.024 barras e à direita, com 8.438 barras



Fonte: Os autores

7.2 Armazenamento

O algoritmo de inversão e o método de fatoração das matrizes utilizam formatos de armazenamentos diferentes em memória. Enquanto que na inversão matricial utiliza-se a matriz densa, durante a fatoração o formato compacto é empregado. O formato compacto foi obtido utilizando a técnica de compactação *Compressed Sparse Row (CSR)* em que, a matriz de coeficientes A é substituída por três vetores auxiliares que armazenam: os elementos não-nulos de A , o índice da coluna de A correspondente a cada elemento não nulo e o índice do vetor de elementos não-nulos que corresponde ao primeiro elemento não-nulo em cada linha de A . A matriz A Tabela 3 mostra a quantidade de Megabytes para alocação dessas matrizes em memória.

Tabela 3 - Quantidade de memória x Esparsidade

N	Quantidade de memória (MB)		Redução de memória	GE (%)	Tempo de Compressão (ms)
	Matriz Cheia	Formato CSR			
345	1,8	0,021	98,84%	99,13%	1,526
386	2,3	0,024	98,97%	99,22%	2,001
768	9,0	0,047	99,48%	99,61%	6,482
981	14,7	0,060	99,59%	99,69%	18,952
2.648	107,0	0,162	99,85%	99,89%	70,147
3.565	193,9	0,220	99,89%	99,92%	127,601
5.024	385,1	0,310	99,92%	99,94%	252,811
8.438	1.086,4	0,515	99,95%	99,96%	772,298

Fonte: Os autores

A Tabela 3 aponta uma vantagem do armazenamento em formato CSR em relação a matriz cheia: a memória consumida é substancialmente reduzida. Entretanto, por falta de dados, não se pode verificar qual é a economia de memória para sistemas que possuem um grau menor de esparsidade. Em formato CSR, os dados são compostos por três vetores: dos elementos não-nulos, dos índices das respectivas colunas e da posição do primeiro elemento não nulo de cada linha, portanto, espera-se que seja vantajoso aplicar conceitos de esparsidade, em relação ao armazenamento, quando o número de elementos salvos em formato CSR for inferior ao número de elementos da matriz densa.

Em relação ao tempo de compressão, percebe-se que essa variável depende da ordem da matriz, uma vez que esse tempo é proporcional à quantidade de elementos a ser percorrido e inversamente proporcional ao grau de esparsidade.

7.3 Solução do método iterativo – Gauss Seidel Matricial

O desempenho do método iterativo de Gauss Seidel matricial será analisado por meio da comparação do tempo de processamento da solução do sistema linear, em cada iteração, utilizando a eliminação gaussiana e explorando a esparsidade da matriz. Independente da abordagem, é adotado como critério de parada em todos os testes um *mismatch* de potência ativa no valor de 0,001 MW. Além disso, o tempo estimado para alcançar a solução é dado pela média aritmética dos intervalos de tempo de cada iteração, pois a cada iteração, o tempo gasto em cada rotina tem um desvio muito pequeno do valor médio.

Assim, o tempo para solução dos sistemas lineares no problema do fluxo de carga por meio da eliminação gaussiana foi computado como

$$t_{\text{solução}} = t_{\text{inversão}} + t_{\text{produto}} \quad (7.2)$$

onde, t_{produto} é o tempo para o produto da inversa (Z_{BUS}) pelo vetor coluna (I). Na resolução do problema considerando a esparsidade, o tempo de processamento foi definido como

$$t_{\text{solução}} = t_{\text{conversão}} + t_{\text{fatoração}} + t_{\text{produto}} \quad (7.3)$$

onde, $t_{\text{conversão}}$ é o tempo para converter a matriz Y_{BUS} do formato cheio para o formato CSR e, $t_{\text{fatoração}}$ é o tempo que o método *splu* processa a fatoração. O tempo da etapa de ordenação não é calculado pois está incluído no tempo de fatoração. Antes da apresentação dos resultados, é importante salientar que o processo de inversão matricial para as matrizes de

ordem 5000 e 8000, mostrou grande lentidão, não sendo possível constatar a real causa desse fato, sendo assim, para esses casos, foi computado o tempo de apenas uma iteração, como mostrado nas tabelas seguintes. Os resultados são mostrados na Tabela 4 e na Tabela 5, respectivamente.

Tabela 4 - Tempo de processamento para eliminação Gaussiana

N	$t_{\text{inversão}}$ (ms)	t_{produto} (ms)	$t_{\text{solução}}$ (ms)	Número de iterações
345	250,1	0,500	250,6	2
386	383,5	0,28	383,7	14
768	1.525,9	1,00	1.526,9	2
981	4.616,0	1,46	4.617,5	2
2.648	39.579,3	8,66	39.588,0	3
3.565	106.226,1	15,96	106.242,0	6
5.024	185.000,0	27,90	185.027,9	1
8.438	1.093.602,7	85,77	1.093.688,4	1

Fonte: Os autores

Tabela 5 - Tempo de processamento usando método *splu*

N	$t_{\text{compressão}}$ (ms)	$t_{\text{fatoração}}$ (ms)	t_{produto} (ms)	$t_{\text{solução}}$ (ms)	Número de iterações
345	1,526	0,500	0,000	2,027	2
386	2,001	0,286	0,070	2,356	14
768	6,482	0,499	0,000	6,981	2
981	18,952	3,976	1,496	24,425	2
2.648	70,147	2,645	0,317	73,110	3
3.565	127,601	3,149	0,327	131,077	2
5.024	252,811	3,989	0,499	257,299	2
8.438	772,298	13,773	1,749	787,819	4

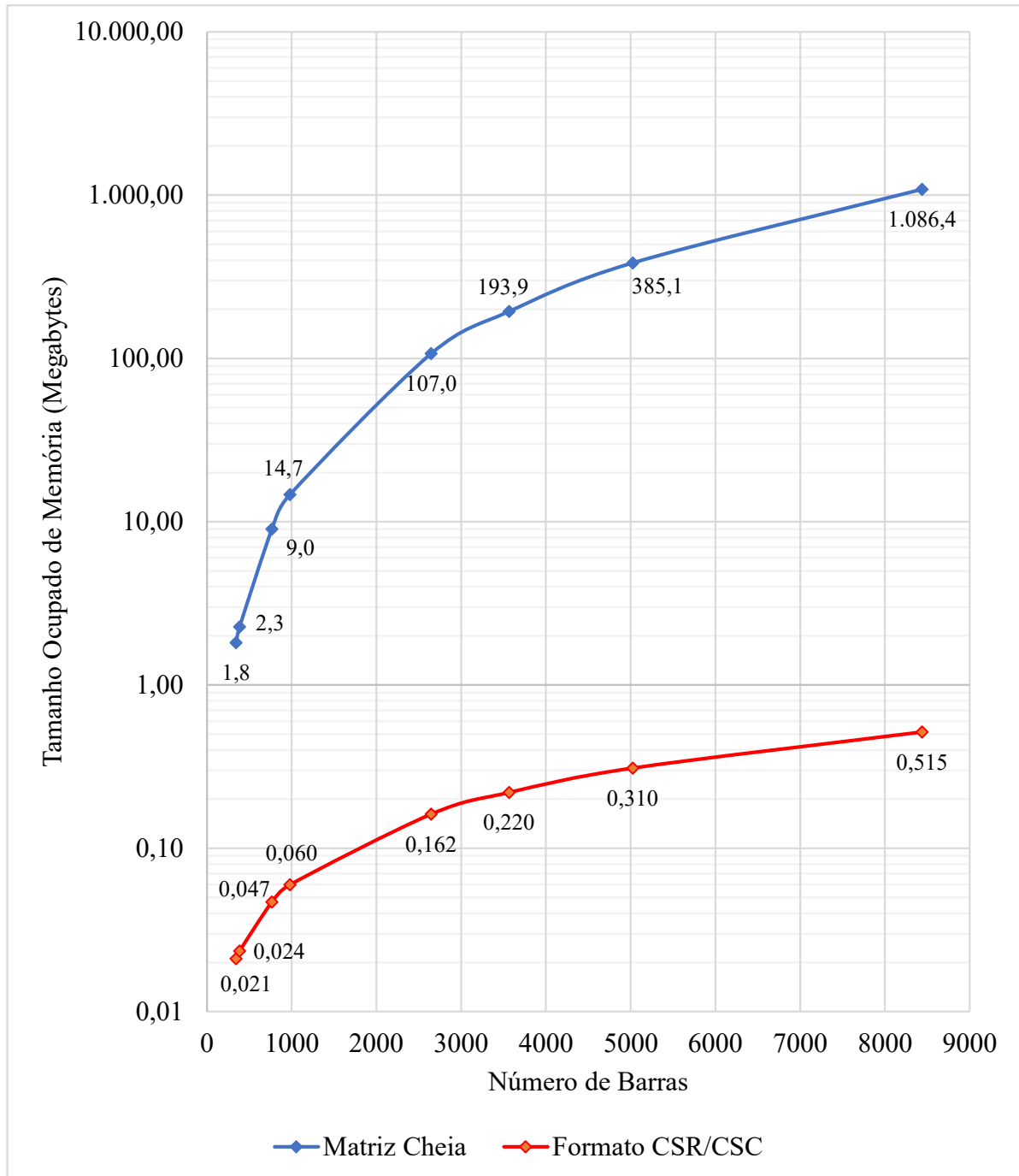
Fonte: Os autores

É importante destacar que independentemente do método utilizado para calcular as tensões no problema de fluxo de carga, o número de iterações é sempre o mesmo, pois em ambos os casos a essência do algoritmo de Gauss-Seidel é preservada, assim como é empregada a mesma tolerância como critério de parada. Ressalta-se também que o formato de compressão CSR em nada altera a convergência ou como o algoritmo trabalha, apenas modifica a forma como os vetores são processados quando chamados pela função *splu*.

A Figura 21 mostra o espaço alocado em memória em função do número de barras em que a característica não linear é evidenciada em ambas as curvas. O formato de

armazenamento comprimido se mostra vantajoso em relação ao formato cheio para qualquer número de barras considerado nesse estudo, já que como todas as redes possuem alto grau de esparsidade, menos elementos devem ser armazenados na memória em relação à matriz cheia.

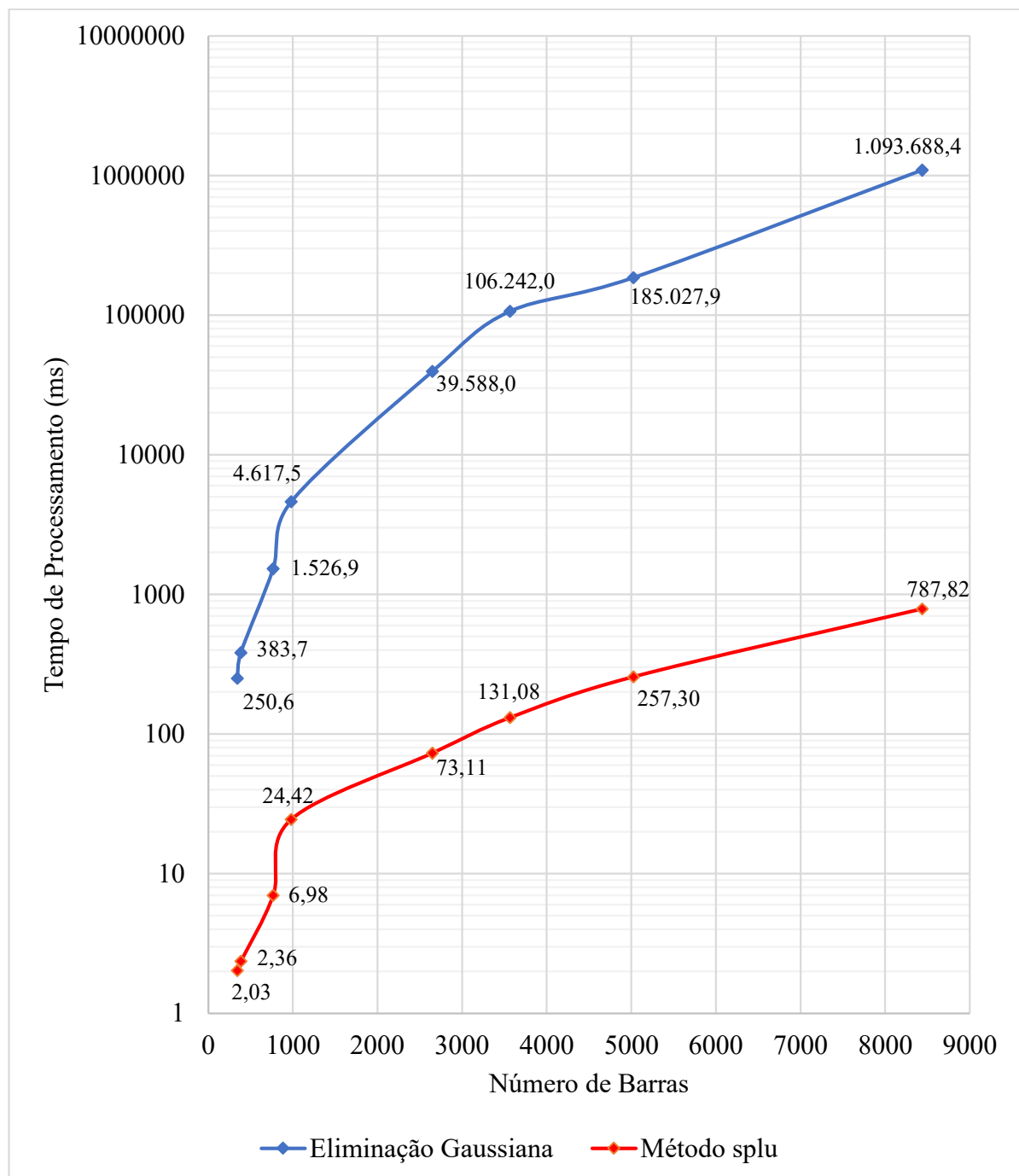
Figura 21 – Curva de Armazenamento X Número de barras



Fonte: Os autores

O desempenho em termos de tempo de processamento da resolução do sistema linear está mostrado na Figura 22, em que se pode inferir que os dados que consistem na tabela 4, representando o tempo de inversão matricial pelo método de Gauss, são bem maiores quando comparados ao tempo de processamento gasto pelo programa implementado via método *splu*. O que torna ainda mais evidente o benefício associado a aplicação das técnicas de esparsidade nas análises de engenharia.

Figura 22 - Curva de Tempo de processamento X Número de barras



Fonte: Os autores

8 CONCLUSÃO

A área de engenharia elétrica possui diversas aplicações que envolvem a resolução de grandes sistemas de equações lineares e esparsos. Este trabalho apresentou como as técnicas de esparsidade podem ser utilizadas na resolução desses sistemas, bem como, na análise do problema de fluxo de carga. Foi proposta uma modificação do algoritmo de Gauss-Seidel que possibilita uma simplificação para o cálculo das tensões de uma rede genérica por meio da inversão matricial, no intuito de melhorar a convergência do método.

A busca da solução do sistema linear pode ser trabalhosa se o número de barras, N , do sistema for elevado, pois o número de elementos aumenta conforme o fator N^2 . Nesse contexto, torna-se impraticável calcular as variáveis por métodos tradicionais como, eliminação gaussiana ou LU. Assim, foi proposta a aplicação de artifícios matemáticos que aproveitam a característica esparsa das matrizes desses sistemas na implementação de um programa, a fim de minimizar a quantidade de operações e o armazenamento.

Observando a Tabela 2 pode-se concluir que, para as redes analisadas, o aumento do número de barras implica em um aumento no grau de esparsidade, ou seja, a quantidade de elementos nulos se aproxima da quantidade total de elementos. As Figuras 17, 18, 19 e 20 mostram graficamente o padrão dos elementos não-nulos das matrizes Y_{BUS} . Percebe-se que o preenchimento aumenta de acordo com que se aumenta o número de barras e, embora visualmente a rede com 5.024 barras, presente na Figura 20, aparente conter menos elementos que a rede com 2.648 barras, a Figura 19, apresenta que, na verdade, a maioria dos elementos não-nulos estão concentrados próximos a diagonal principal.

Durante a execução do programa computacional, verificou-se que a quantidade de espaço alocado na memória RAM, foi maior quando se armazenou a matriz no formato cheio. Percebeu-se que houveram aumentos expressivos quando a dimensão da matriz mudou da ordem de 900 para 2000 e de 5000 para 8000 barras, atingindo aproximadamente a marca de 1,0 Gigabyte. Em contrapartida, ao empregar o formato comprimido (CSR/CSC), observou-se que a redução do consumo de memória foi, em todos os casos, acima de 98%, o que viabiliza a utilização do programa em computadores com recursos limitados de memória.

O desempenho em cada método em termos de tempo de processamentos foram apresentadas nas Tabelas 4 e 5. Utilizando a eliminação gaussiana, notou-se que o tempo de solução para a convergência do método foi, em termos gerais, o mesmo para o tempo de inversão. Por outro lado, na Tabela 5, percebeu-se que o tempo de compressão e o tempo de fatoração tiveram maior contribuição no tempo de solução. Diante desses fatos, pôde-se

constatar-se uma nova vantagem em explorar a esparsidade das matrizes: o tempo de processamento em geral é menor, considerando o método para matrizes esparsas *splu*.

Dessa forma, concluiu-se que considerar a esparsidade das matrizes de coeficiente de sistemas de grande porte, que são frequentemente utilizados na engenharia, pode trazer benefícios no âmbito computacional das aplicações tecnológicas e científicas.

Assim, em função da indisponibilidade de tempo e informações a respeito das metodologias implementadas, no intuito de disponibilizar um melhor fechamento para este trabalho, recomenda-se, para trabalhos futuros, que se façam outras comparações de sistemas, como Newton-Rapson e Gauss-Jacobi.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5460**: Sistemas elétricos de potência. Rio de Janeiro, 1992.

SAADAT, Hadi. **Power system analysis**. [S.I]: McGraw-Hill, 1999.

GÖNEN, Turan. **Electrical power transmission system engineering: Analysis and Design**. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2009.

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA – ANEEL. **Saiba mais sobre o setor elétrico**. Disponível em:

<https://www.aneel.gov.br/home?p_p_id=101&p_p_lifecycle=0&p_p_state=maximized&p_p_mode=view&_101_struts_action=%2Fasset_publisher%2Fview_content&_101_returnToFullPageURL=%2F&_101_assetEntryId=14476909&_101_type=content&_101_groupId=654800&_101_urlTitle=faq&inheritRedirect=true>. Acesso em: 15 nov. 2019.

International Electrotechnical Commission. **IEC 600308**: IEC standart voltages. Edition 7.0. Geneva, 2009. Disponível em: < <https://www.sis.se/api/document/preview/569923/>>. Acesso em 14 nov. 2019.

BRASIL. Decreto nº 41.019, de 26 de fevereiro de 1957. Regulamenta os serviços de energia elétrica, Rio de Janeiro, 1957. Disponível em <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/Antigos/D41019.htm>. Acesso em 15 nov. 2019.

BENEDITO, Raphael Augusto de Souza. **2. Introdução a sistemas elétricos de potência**. 20--?. Slides. Disponível em: < <http://paginapessoal.utfpr.edu.br/raphaelbenedito/sistemas-eletricos-de-potencia-i/aulas/SEP%201%20-%20Cap%202%20Introducao%20a%20SEP%20-Modo%20de%20Compatibilidade.pdf/view> >. Acesso em: 15 nov. 2019. – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

CHAPMAN, Stephen J. **Fundamentos de máquinas elétricas**. Tradução: Anatólio Laschuk. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

SATO, Fujiro; Freitas, Waldir. **Análise de curto-circuito e princípios de proteção em sistemas de energia elétrica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

MONTICELLI, Alcir José. **Fluxo de carga em redes de energia elétrica**. São Paulo: Edgar Blücher, 1983.

ARRUDA, Colemar. **Equações de redes elétricas**. 2005. Notas de aula – Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

ARRUDA, Colemar. **Fluxo de Potência**. 2007. Notas de aula – Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

DAVIS, Timothy A. **Direct methods for sparse linear systems**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

GEORGE, Alan; LIU, Joseph W. H. **Computer solution of large sparse positive definite systems**. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.

DUFF, I. S. et al. **Direct Methods for Sparse Matrices**. Second edition. Oxford: Oxford University Press, 2017.

ANTON, Howard. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SIMEÃO, Sandra Fiorelli de Almeida Penteado. **Técnicas de esparsidade em sistemas estáticos de energia elétrica**. São Carlos: [s.n.], 2001.

TSUCHIYA, Luciana Yoshie. **Fatorações incompletas de Cholesky na solução direta de sistemas lineares oriundos de métodos de pontos interiores**. Campinas: [s.n.], 2017.

ARRUDA, Colemar. **Esparsidade**. 2001. Notas de aula - Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

LIU, Joseph W. H. **Modification of the minimum degree algorithm by multiple elimination.** New York: ACM Transactions on Mathematical Software, 1985

APÊNDICE A: Dados de um Sistema de 4 barras Utilizado na Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação.

Dados das barras:

Geracao e Carga em MW e MVar												
2	Nome	Tipo	V	Ang	Pg	Qg	Qmi	Qma	Bc	Pc	Qc	Qsh
0	0	2	1.02	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0.98	0	180	230	0	0	0	0	0	0
2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	300	250	0
3	3	0	1	0	0	0	0	0	0	500	300	120

Dados dos ramos:

3	NF	Circ	R%	X%	MVAr	tap
0	1		1.2	7.5	20	1
0	2		0	1.6	0	0.97
1	3		0	1.2	0	1.02
2	3		8	40	30	1

APÊNDICE B: Tensões nodais obtidas com método iterativo de Gauss-Seidel

Aplicação do método iterativo de Gauss-Seidel para solução do problema de fluxo de carga para o sistema mostrado no Apêndice C.

Ybus		
linha	coluna	valor
1	2	-2.0801+13.0005j
1	3	64.4330j
2	2	0.2059-90.6031j
2	4	81.6993j
3	3	3.4808-67.2538j
3	4	-48.0769+2.4038j
4	4	5.4808-87.3872j

Vetor Corrente
0
2.1217-13.2605j
-65.7216j
0

Resultados:

Iteração 1

Vetor Tensão
1.02
1.00813598-0.1864683j
1.01026129-0.05368024j
0.95616536-0.23021908j

Mismatch PU
6.02579438+2.37098096j
0.17000776+0.21723214j
-0.07052835-0.05877362j
0.16373492+0.09824095j

Iteração 2

Vetor Tensão
1.02
0.98059114-0.19311112j
1.01026209-0.05310215j
0.92849821-0.23620247j

Mismatch PU
6.13433016+2.72209410j
-0.089490148-0.11434852j
0.000176238+0.000146865j
0.025511674+0.015307004j

Iteração 3

Vetor Tensão
1.02
0.97261487-0.19854884j
1.0099206 -0.05340756j
0.91807637-0.24307082j

Mismatch PU
6.24343208+2.83876933j
-0.02423703-0.03096954j
0.00192681+0.00160568j
0.08689872+0.05213923j

Iteração 4

Vetor Tensão
1.02
0.96920838-0.20043745j
1.00975489-0.05353941j
0.91386804-0.24539366j

Mismatch PU
6.28436879+2.89082516j
-0.01070660-0.01368065j
0.00094033+0.00078361j
0.03644786+0.02186872j

Iteração 5

Vetor Tensão
1.02
0.9678274 -0.20121697j
1.00968505-0.05359589j
0.91214558-0.24635807j

Mismatch PU
6.30134771+2.91207353j
-0.00434025-0.00554588j
0.00039603+0.00033003j
0.0149155+0.008949304j

Iteração 6

Vetor Tensão
1.02
0.96725674-0.2015353j
1.00965612-0.05361914j
0.91143519-0.24675157j

Mismatch PU
6.30830788+2.92086722j
-0.00179795-0.00229738j
0.00016416+0.00013680j
0.00616896+0.00370138j

Iteração 7

Vetor Tensão
1.02
0.9670208 -0.20166674j
1.00964414-0.05362875j
0.9111414 -0.24691407j

Mismatch PU
6.31118316+2.92450404j
-0.00074379-0.00095040j
0.00006793+0.00005661j
0.00025529+0.00153175j

Iteração 8

Vetor Tensão
1.02
0.96692309-0.20172111j
1.00963918-0.05363273j
0.91101975-0.24698129j

Mismatch PU
6.31237271+2.92601016j
-0.00030810-0.00039369j
0.00002813+0.0000234j
0.00095748+0.00063448j

APÊNDICE C: Algoritmo Método Gauss Seidel