

**A RESPEITO DA NECESSIDADE DE REVISÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
GREGA: 48 ANOS DEPOIS, POR QUE CONTINUAMOS A ENSINAR COMO ANTES?**

Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da Silva
Universidade Federal de Goiás – UFG – Brasil

Humberto de Assis Clímaco
Universidade Federal de Goiás – UFG – Brasil

(aceito para publicação em abril de 2025)

Resumo

No presente artigo, analisamos o debate ocorrido entre 1975 e 1979 a respeito da tese que afirmava a existência de uma álgebra expressa em forma geométrica nos tratados matemáticos da Antiguidade e da adequabilidade de se traduzir, em livros de história da matemática, os resultados gregos em termos algébricos. Após demonstrarmos a importância deste debate para a compreensão das transformações posteriores na historiografia da matemática grega, a insuficiência da literatura em português sobre este assunto e as graves consequências que dela surgem – dentre as quais mencionamos a tradução e a publicação no contexto nacional de textos de história da matemática originalmente publicados antes do estabelecimento do debate que aqui apresentamos e o subsequente ensino de conceitos que se mostraram equivocados há décadas –, delineamos para o leitor de língua portuguesa o conteúdo das discussões por meio de uma análise exaustiva dos cinco primeiros artigos publicados sobre o assunto. Finalizamos explicando nossas próprias conclusões e mostrando possíveis linhas de pesquisa ainda não exploradas e que podem aprofundar o conhecimento acerca do tema.

Palavras-chave: matemática, história, Grécia Antiga, álgebra geométrica.

[ON THE NEED FOR THE REVISION OF THE HISTORY OF GREEK MATHEMATICS: 48
YEARS LATER, WHY DO WE KEEP TEACHING LIKE BEFORE?]

Abstract

In the present paper, we analyze the debate, held between 1975 and 1979, concerning the thesis that asserted the existence of an algebra expressed in geometric form in ancient mathematical treaties and the appropriateness of translating, in books on the history of mathematics, Greek results in algebraic terms. After demonstrating the importance of this debate for the comprehension of later transformations in the historiography of Greek mathematics, the insufficiency of the literature in Portuguese language regarding this subject and the serious consequences that arise from it – among which we mention the translation and publication in the Brazilian scenario of texts on the history of mathematics originally published before the occurrence of the debate here presented and the subsequent teaching of concepts that were proved wrong decades ago –, we outline to the Portuguese-speaking reader the content of the discussions held by means of an exhaustive analysis of the first five papers published on this matter. We end by explaining our own conclusions and showing possible lines of research not yet explored, which can deepen the knowledge on this subject.

Keywords: mathematics, history, Ancient Greece, geometric algebra.

1 Introdução

Entre os anos de 1975 e 1979 ocorreu um debate de grande importância para os estudos em história da matemática. Este debate se deu em torno da tese, aceita pelas correntes historiográficas até aquele momento estabelecidas, segundo a qual haveria, no interior da matemática grega, uma espécie de álgebra e um pensamento algébrico ocultos na forma de geometria. A noção de uma álgebra expressa em forma geométrica ficou conhecida como “álgebra geométrica” e a tese que a defendia como “a tese da álgebra geométrica”. Neste debate, que tinha como objeto central de análise *Os Elementos* de Euclides, o filólogo e historiador Sabetai Unguru (1931– atualmente), de um lado, se posicionou contrário à tese da álgebra geométrica; do outro, Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996), talvez o maior algebrista vivo à época, Hans Freudenthal (1905–1990), pioneiro da educação

matemática,¹ e André Weil (1906–1998), membro fundador dos Bourbaki, defenderam a posição da historiografia tradicional.

Neste artigo, apresentamos uma breve introdução à história do desenvolvimento do conceito de álgebra geométrica e da consolidação da tese que o utiliza para a escrita da história da matemática grega (cf. seção 2.1). Em seguida, demonstramos, por meio da exposição da situação da produção literária internacional e nacional (cf. seção 2.1), que os livros e artigos disponíveis para os estudantes brasileiros não contemplam a discussão que neste artigo é feita. Esta parte se produz para que fique justificada a produção deste trabalho. No que segue, apresentamos, pela primeira vez para o público de língua portuguesa, uma exposição minuciosa dos conteúdos do debate ocorrido nos cinco primeiros artigos publicados na década de 1970 (cf. seções de 2.2 a 2.4) a respeito da tese da álgebra geométrica e seu corolário, a ideia de que, por razões didáticas, seria justificado reescrever algebricamente os resultados obtidos em geometria pelos gregos. Começamos pela crítica inicial de Unguru em *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics* (1975) (cf. seção 2.2); passamos então às três respostas que lhe seguiram, *Defence of a 'Shocking' Point of View* (1976), de van der Waerden, *What is Algebra and What has it been in History?* (1977), de Freudenthal, e *Who Betrayed Euclid?* (1978), de Weil (cf. seção 2.3); e apresentamos a última resposta de Unguru da década de 1970, *History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art* (1979)² (cf. seção 2.4).

Por fim, apresentamos nossas conclusões sobre o debate, nas quais expusemos nossa concordância com o posicionamento de Unguru. Neste momento, julgamos necessário delinear algumas ressalvas com relação a alguns pontos de sua argumentação. Em seguida, trouxemos à tona a importância da discussão que Pierre Boutroux, um autor da década de 1930, faz acerca do pensamento filosófico e matemático dos gregos antigos para o debate aqui analisado. Finalizamos o trabalho com a proposição de duas novas linhas de investigação ainda não exploradas no trato desta problemática (cf. seção 3).

¹ Ele é o fundador da revista *Educational Studies in Mathematics*, da qual foi editor-chefe desde o início de suas publicações, em 1968, até 1977. Além disso, Freudenthal serviu como oitavo presidente (1967–1970) da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), a qual integrava desde 1955.

² No entanto, Unguru ainda volta ao assunto em seus artigos *Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of 'Geometric Algebra'* (Unguru e Rowe, 1981) e *'Application of Areas' and Related Problems* (Unguru e Rowe, 1982), que merecem ser analisados separadamente.

2 Exposição geral do debate

2.1 As origens da tese da álgebra geométrica, sua disseminação e as obras em português que tratam do assunto

Segundo a tese da álgebra geométrica, é possível dizer, em primeiro lugar, que alguns dos conteúdos da geometria grega, embora tenham sido por eles expressos em forma geométrica, são essencialmente algébricos; em segundo lugar, que é logicamente válido e historiograficamente permitido realizar a “tradução” dos textos gregos antigos para a linguagem algébrica moderna, de modo a não só tornar a sua leitura mais palatável, como também permitir novos *insights* no estudo da história da matemática grega (Unguru, 1975).

Esta tese foi tomada como norteadora para os estudos da história da matemática grega, e suas origens podem ser rastreadas até os trabalhos de Paul Tannery (1930 [1887]) e Hyeronimus Georg Zeuthen (1896 [1893]). Desde então, as publicações sobre a história da matemática da Antiguidade foram sempre organizadas com base nas traduções da linguagem geométrica e prosaica original de seus autores para a notação algébrica típica dos séculos XIX e XX. Os resultados alcançados por Otto Eduard Neugebauer (1899-1990), um renomado historiador das ciências exatas na Antiguidade, enquanto consonantes com o trabalho de Zeuthen, constituem um exemplo muito característico das consequências que uma metodologia orientada por este procedimento têm para a interpretação da matemática enquanto objeto de investigação da história, na medida em que tal autor, na busca por sustentar a difícil proposição de que os gregos tinham uma álgebra geométrica, estabelece uma nova tese que, na visão de Unguru (1975), não tinha lastros nos fatos: a de que a matemática babilônica teria influenciado profundamente os desenvolvimentos matemáticos na Grécia antiga. Assim, mesmo não havendo documentação histórica que sustentasse a suposição desta troca de conhecimentos tão forte – ao que o próprio Neugebauer reconhecia (Unguru, 1975) –, ao identificar a presença de procedimentos algébricos nos materiais numérico-aritméticos babilônicos, Neugebauer julgou lúcido supor uma equivalência entre a matemática dos babilônicos e a dos gregos antigos (Neugebauer, 1969). Seu trabalho foi justamente um dos maiores responsáveis pela disseminação da tese da álgebra geométrica no século XX.

Foi, no entanto, principalmente por meio dos trabalhos de Thomas Little Heath (1861–1940), o famoso classicista responsável por introduzir o leitor em língua inglesa aos importantes desenvolvimentos que levaram à preparação da edição crítica de Johan Ludvig Heiberg (1854–1928) e Heinrich Menge (1838– c. 1904) de *Os Elementos* de Euclides – esta que foi produzida a partir da avaliação das recentes descobertas de manuscritos deste tratado matemático –, que a visão de Neugebauer e dos demais defensores da tese da

álgebra geométrica pôde exercer uma ainda mais considerável influência sobre a historiografia da matemática grega. A tradução comentada de Heath para o inglês de *Os Elementos*, baseada no texto de Heiberg, publicada pela primeira vez em 1908, se fez no espírito de aceitação da tese da álgebra geométrica. Embora seu trabalho como tradutor seja respeitado e reconhecido até os dias de hoje – seu texto em inglês sendo citado por muitos que escrevem sobre história da matemática como o texto-padrão em língua inglesa do texto euclidiano –, Heath opta, nesta sua tradução, por empregar, nas notas explicativas que dispõe como comentários depois de cada proposição, a notação simbólica moderna para a explicação de conceitos, relações e demonstrações do texto original de Euclides; apesar de cuidadosas, essas notas de Heath são pelo menos uma escolha questionável (como ficará claro na exposição do debate, nas seções 2.2 a 2.4).

Seu livro *A history of Greek mathematics*, publicado em 1921 em dois volumes, foi um dos primeiros a abarcar todo o período da matemática grega, e a ser lido por um público muito mais amplo do que o pequeno círculo então existente de investigadores da matemática grega. Ele viria, nos próximos anos, a ser muito citado e utilizado pelos escritores de história geral da matemática que começaram a aparecer nas décadas seguintes e que influenciariam várias gerações de leitores, inclusive no Brasil.

As décadas de 1950 e 1960 foram marcos no crescimento do interesse pela história da matemática. Isto se deu em parte porque, nesta época, se encontravam em franca ascensão os cursos de graduação de licenciatura em matemática. Ao mesmo tempo a pesquisa em educação matemática era impulsionada pelo Movimento da Matemática Moderna. Foi, então, natural que tais livros tivessem como referência principal, em seus capítulos sobre as matemáticas babilônica e grega, os escritos de Tannery, Zeuthen, Neugebauer e Heath, o que, é claro, contribuiu fortemente para a popularização e a ampla divulgação da tese da álgebra geométrica.

Já no ano de 1950, van der Waerden publicou a primeira versão de seu *Ontwakende wetenschap* (literalmente, e de agora em diante, *O despertar da ciência*), cuja tradução para o inglês, em 1954, sob o título de *Science Awakening*, se tornou bastante popular. Este livro consiste numa divulgação dos avanços feitos nas décadas anteriores na escrita da história da matemática grega devidos principalmente aos resultados de Neugebauer e dos demais estudiosos que seguiram sua linha de pesquisa. Conforme van der Waerden prefacia na obra supracitada (1975 [1954], p. 3-8), a relação que Neugebauer estabelece entre as matemáticas babilônica e egípcia e a matemática grega configura uma superação da historiografia anterior – representada por Moritz Cantor que nos anos 1880, 1892, 1894 e 1908 publicou uma série de livros que estabeleceu o padrão de leitura da história da matemática por décadas.³

³ É importante ressaltar – dado o contexto do debate aqui exposto – que *O despertar da ciência* é o primeiro material a divulgar dois dos resultados de H. Freudenthal, colega e amigo de van der Waerden: sua hipótese a

Ainda por volta da década de 1950, começaram a ser publicados diversos livros gerais e didáticos sobre a história da matemática. Os autores cujas obras foram mais influentes no Brasil, em virtude de seus trabalhos terem recebido tradução para a língua portuguesa, foram Carl B. Boyer (1906–1976), autor de *História da Matemática*, publicado originalmente em 1968 sob o título de *A history of mathematics* (2011) e que recebeu uma tradução para o português por Elza Gomide publicada em 1974 pela Editora Edgard Blücher; Howard Eves (1911–2004), que, em 1953, publicou a primeira edição de *An introduction to the history of mathematics* (1969), traduzida para o português por Hygino H. Domingues e publicada no Brasil em 2004 pela Editora Unicamp; Dirk Jan Struik (1894–2000), cuja obra *A concise history of mathematics* (1948 [1954]), apesar de não ter sido publicada no Brasil, teve uma tradução para o português europeu feita por João Cosme Santos Guerreiro e publicada em 1989 pela editora Gradiva; e, dentre outros, Florian Cajori (1859 – 1930), que escreveu *A History of Mathematics* (1893 [1919]), traduzido para o português como *Uma História da Matemática* por Lázaro Coutinho e publicado em 2007 pela editora Ciência Moderna.

Vê-se, pela própria diferença entre a data de publicação no Brasil e o original dos livros mencionados, que seria impossível que tais livros incorporassem as novas descobertas da historiografia. Em particular, nos parece injustificável que tenha sido publicado em português 114 anos depois da edição original em inglês o livro de Cajori, pois sequer as descobertas de 90 anos atrás feitas por Neugebauer puderam ser incorporadas a ele. O fato de que uma editora tenha aceitado publicar tal livro nos parece uma prova adicional da importância e da urgência da apresentação do debate historiográfico apresentado no presente artigo. Isso significa que a grande maioria dos textos de história da matemática utilizados nos cursos de matemática no Brasil estão defasados, primeiro pelo fato óbvio de não incorporarem as descobertas matemáticas ocorridas após a publicação de seus originais em inglês, e segundo pelo fato de não mencionarem nenhuma das descobertas historiográficas mencionadas acima.

Além disso, embora alguns desses autores, como o marxista Struik, desenvolvam escritas da história da matemática levando em consideração o contexto sociocultural em que se desenvolveu a atividade científica de cada período e de cada civilização, a maioria dos autores acima mencionados concebe seus livros segundo uma perspectiva histórica que não considera os aspectos sociais que propulsionaram o fazer matemático, se preocupando, quase exclusivamente, com o desenvolvimento conceitual interno à matemática; cf. Abreu *et al.* (2020). No entanto, mesmo Struik (1989) acaba reproduzindo a matemática grega a

respeito dos símbolos para os números indianos (1975, p. 56-57) e a sua interpretação de uma tabuinha babilônica, a *A. O. 6770*, até então ininteligível para Neugebauer (1975, p. 73-75).

partir de traduções e interpretações dos textos antigos à luz das proposições (que serão mostradas inconsistentes) da álgebra geométrica.

Quando consideramos os conteúdos referentes à história da matemática grega e, mais especificamente, à tese da álgebra geométrica, percebemos que muito pouco se discute o assunto nos principais periódicos brasileiros. Uma pesquisa foi por nós realizada em periódicos na área de avaliação designada Educação, cuja área mãe era o Ensino, classificados segundo o Quadriênio 2017–2020 do *Qualis Periódicos* como A1 e A2, e nos artigos de outras importantes revistas para a divulgação da pesquisa científica em história da matemática. As classificadas como A1 eram o *Boletim de Educação Matemática* (também chamado, e de agora em diante, *Bolema*), a *Educação Matemática Pesquisa* e a *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*; as classificadas como A2 eram a *Educação Matemática em Revista*, a *Revista Brasileira de Educação* e a *Zetetiké*; as demais eram a *Revista Brasileira de História da Matemática* e o *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*. Em suas respectivas barras de pesquisa, entramos as seguintes buscas: “Unguru”, “Álgebra Geométrica” e “Euclides”. Sendo Unguru um autor chave para a entrada neste debate, a álgebra geométrica o assunto principal discutido e Euclides e seu *Os Elementos* o principal tratado matemático discutido no debate, fica, pelos resultados encontrados nestas buscas, mais ou menos delimitada a situação de nossa produção nacional sobre o assunto. Damos, a seguir os resultados de nossa pesquisa.

O *Bolema* foi a revista com o maior número de artigos sobre o assunto. Entre as buscas, Campos e Moreira (2018) se destacam por lidar justamente com uma das principais consequências da crítica da tese da álgebra geométrica: a reavaliação do uso da linguagem simbólica da álgebra moderna para a tradução dos enunciados de *Os Elementos*. Além dele, os únicos autores cujos trabalhos, de alguma maneira, têm relação com a nova proposta historiográfica de Unguru são: Otte (1992), por incorporar as conclusões de Grattan-Guinness (1970) – um importante autor cujo trabalho foi central para a formação desta nova historiografia proposta por Unguru –, Souza (1993) e Vianna (2010), por trazerem para seus respectivos artigos a história da matemática de Caraça (1971) – um autor que, apesar de importante para a história da matemática produzida em língua portuguesa, não pôde incorporar a novidade do debate aqui discutido –, e Gonçalves (2011), por incorporar as revisões mais recentes da historiografia da matemática babilônica de Jens Høyrup e Eleanor Robson. Bicudo (1992) é também um resultado digno de consideração, pois sua inspiradora discussão geral acerca da história da matemática leva em conta a visão de Weil (1979) acerca desta ciência.

Um foi o resultado das buscas na *Educação Matemática Pesquisa*: Dias (2012). Em seu trabalho, a partir de uma discussão acerca da distinção entre história e historiografia, o autor examina a historiografia da matemática antiga, dando especial atenção ao trabalho de Sabetai Unguru.

Não obtivemos nenhum resultado em nossas buscas na *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, na *Educação Matemática em Revista* e na *Revista Brasileira de Educação* (que tem uma seção dedicada a assuntos da educação matemática).

A *Zetetiké*, por sua vez, tem apenas em Moura e Sousa (2005) um resultado relacionado à álgebra geométrica: seu trabalho, que investiga as álgebras simbólica e não simbólica, continua a reprodução da tese da álgebra geométrica, argumentando que se pode falar numa álgebra retórica, que, de fato, realiza operações para a “descoberta” de incógnitas, mas sem o uso de notação simbólica específica. Sua base é Caraça (1966), mas os autores também citam Jacob Klein (1934) – a quem o próprio Unguru (1975) menciona como um dos seus predecessores – como uma de suas fontes.

Na *Revista Brasileira de História da Matemática*, nenhum resultado diretamente está relacionado com o assunto por nós aqui discutido. É verdade que existem muitos trabalhos que tratam sobre *Os Elementos*, Euclides e a geometria grega; exemplos interessantes são a tradução de Gustavo Barbosa da *Divisão do Cânone* de Euclides, publicada em 2010, Bicudo (2007) e Gonçalves (2007)⁴ – nos quais se discute questões linguísticas no texto grego original –, Garciadiego (2007), que dá, em espanhol, uma boa introdução a *Os Elementos*, e Lintz (2007), que discute sobre o conceito de área na geometria grega. Nenhum deles, no entanto, abordam o debate entre Unguru e os defensores da tese da álgebra geométrica.

O *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática* encontra-se em situação semelhante: há nele alguns resultados relacionados à geometria euclidiana e à matemática grega, mas que não discutem o tema por nós aqui tratado. É digno de nota o trabalho de Gomes (2022), que discute a “álgebra geométrica” presente nos tratados matemáticos de Omar Caiam (1048–1120), que sucedeu após mais ou menos dois séculos o grande Alcuarismi (c. 780–c. 850). A álgebra árabe é, em certa medida, parte da argumentação do debate aqui analisado; no entanto, Gomes (2022) não discute os problemas historiográficos em torno do conceito de “álgebra geométrica”; sua preocupação está mais centrada numa pesquisa interdisciplinar entre a história e a educação matemática.

Soma-se à situação das publicações nas revistas brasileiras especializadas em educação e história da matemática o atual cenário dos livros nacionais sobre história da matemática. Quando neles se observa alguma discussão sobre o debate da álgebra geométrica, os autores, em geral, não apresentam com o devido cuidado os argumentos favoráveis e contrários; acreditamos que esse tipo de postura, inviabiliza uma compreensão mais geral, por parte do leitor, dos argumentos centrais e que fundamentam o relativo consenso que se estabeleceu a partir do final da década de 1970.

⁴ Esses dois artigos antecipam a publicação da importante tradução que Bicudo fez para o português de *Os Elementos*.

É o caso do livro *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, publicado em 2012 pela editora Zahar e escrito por Tatiana Marins Roque, e que faz uma série de afirmações favoráveis à tese de Unguru. É nosso ponto de vista que, embora o texto seja a primeira fonte em português a discutir mais extensivamente o assunto, sua autora não teve o cuidado de apresentar, de maneira detalhada e cuidadosa, os argumentos favoráveis e contrários à tese da álgebra geométrica. Nem mesmo é contemplado por ela o fato de que continua havendo escritos polêmicos sobre o assunto. Um exemplo seria o debate que apareceu em 2014 entre Viktor Blåsjö (2014) e Michael Fried (2014), um antigo colaborador de Unguru (cf. Fried e Unguru, 2001). É nossa visão que a ausência de um panorama mais completo das discussões historiográficas em seu texto a faz perder também a oportunidade de mostrar ao leitor a rica discussão realizada e o porquê de ter se estabelecido o novo paradigma historiográfico da matemática grega inaugurado por Unguru.⁵

No volume 1 de *História da Matemática*, de Rubens Gouvêa Lintz, publicado em 2007 pela Coleção CLE, o tratamento do assunto da álgebra geométrica é cuidadoso, mas pouco extensivo. Em sua exposição, Lintz (p. 200 e seg.), que antes já havia estabelecido os cuidados que deveriam ser tomados com a “tradução” das proposições gregas em simbolismo algébrico moderno, por meio de uma discussão mais ou menos bem detalhada de VI.12-13⁶, adverte que não é muito sã falar sobre uma “álgebra geométrica” na matemática dos gregos antigos. No entanto, um vislumbre sobre a bibliografia utilizada para a composição de *História da Matemática* nos revela que a preocupação central de seu livro também não era fornecer nem que fosse um breve resumo das discussões historiográficas que cercavam aquele assunto.

O leitor em língua portuguesa consegue encontrar uma exposição mais completa do debate da década de 1970 em *A history of mathematics* de Victor Joseph Katz, que, lançado originalmente em 1993, recebeu uma tradução para o português lusitano publicada pela Fundação Calouste Gulbenkian em 2010, realizada a partir da segunda edição (1998). Neste livro, Katz, um algebrista reconhecido internacionalmente por seus trabalhos em história da matemática e pela articulação dos conhecimentos produzidos nesta disciplina com a educação matemática, parece adotar a posição oposta à de Unguru; na seção 2.4.3,

⁵ Apesar disso, o livro tem a vantagem de apresentar de maneira adequada para o leitor as inovadoras pesquisas sobre a matemática mesopotâmica de Jens Høyrup e de Eleanor Robson que são fundamentais para contrapor as visões historiográficas mais amigas da tese de Neugebauer acima mencionadas.

⁶ Para nos referirmos às proposições de *Os Elementos*, como é o costume, empregaremos os numerais romanos de I a XIII para nos referirmos ao livro no qual está a proposição. Este primeiro número será sucedido por um ponto e, em seguida, por algarismos indo-arábicos, que indicam especificamente a proposição de que se fala. Quando falarmos de proposições que se seguem imediatamente uma após a outra, indicamos, do mesmo, o numeral romano, sucedido por ponto e o numeral indo-arábico da primeira proposição e o numeral indo-arábico da última proposição separados por hífen. Assim, por exemplo, VI.12 é a décima segunda proposição do sexto livro, e VI.11-13 são as proposições de 11 a 13 do sexto livro.

intitulada *Álgebra Geométrica*, ao discorrer sobre o assunto, ele menciona os mesmos exemplos e utiliza argumentos iguais ou muito semelhantes aos empregados por van der Waerden tanto em *O despertar da ciência*, quanto em sua resposta ao primeiro artigo de Unguru, *Defence of a 'Shocking' Point of View*. O mérito de seu livro, no que diz respeito ao debate em questão, é apresentar as duas posições em discussão, citar as fontes principais e indicar leituras (2010, p. 129). O livro, entretanto, não apresenta o tema da álgebra geométrica em sua necessária profundidade – nem se pretende a fazê-lo, em razão de sua natureza de livro de história geral da matemática – como se busca fazer neste artigo.

Torna-se, pelas razões acima discutidas, bastante evidente a necessidade que a história da matemática no Brasil tem de uma publicação como esta. Não pretendemos com isso dizer que os trabalhos nacionais em história da matemática sejam absolutamente ignorantes do debate acerca da álgebra geométrica. Queremos, na verdade, dizer (com base em toda esta demonstração) que não existe um material que sumarie os detalhes e a extensão das propostas de Unguru, das respostas de van der Waerden, Freudenthal e Weil e, por último, da tréplica de Unguru. Este artigo fornecerá justamente o material necessário para que se inicie uma popularização deste tipo de discussão, tão importante para a constituição de uma crítica de nossa visão atual sobre a história da matemática.

2.2 O artigo de S. Unguru: a inauguração do debate acerca da tese da álgebra geométrica

Sabetai Unguru foi o responsável pela instauração do debate em torno da tese da álgebra geométrica.⁷ Seu artigo *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics*, publicado em 1975 pela *Archive for History of Exact Sciences*, expõe de maneira justa e minuciosa – chegando a citar longas passagens originais dos textos dos autores que ele critica em francês e alemão, além do inglês (em que o seu artigo é escrito) – e submete à duras críticas a tese da álgebra geométrica.

Unguru acusa os defensores de tal tese de cometerem erros metodológicos elementares no trato com a historiografia. Afirmar ainda que eles negligenciam um dos aspectos mais importantes para a pesquisa historiográfica: a atenção para as diferentes conjunturas culturais, sem a qual qualquer conclusão sobre a produção filosófico-científica de determinada cultura deve ser considerada inadequada.

⁷ Como quase todo debate, ele tem antecedentes. Dentro os vários autores mencionados por Unguru, merecem destaque Jacob Klein (1934; 1936) e Szabó (1969 [1978]).

O estilo do artigo é enérgico e, em alguns casos, abertamente provocador.⁸ A passagem abaixo é exemplar nesse sentido:

*“Eu não estou disposto a adentrar uma exaustiva análise das raízes sociológicas desta situação escandalosa. Deixem-me apenas sugerir (...), entretanto, que o fato de que a história da matemática esteve sendo tipicamente escrita por matemáticos possa ter alguma coisa a ver com isto; e em muitos casos não foram apenas matemáticos de ‘mente aberta’ que se engajaram em tais empreendimentos; ao contrário, estes eram matemáticos que ou atingiram a idade da aposentadoria e pararam de ser produtivos em suas próprias especialidades ou se tornaram profissionalmente estéreis. Entretanto, ambas categorias tinham algo em comum: a fim de servir a humanidade e gastar intocados restos de energia acadêmica, eles decidiram empregar sua criatividade em um campo, **história da matemática**, ‘metade’ do qual – a **história** – era muito estranha e exótica para eles, enquanto a outro ‘metade’ – a **matemática** – era, infelizmente, muito familiar para eles; a subjacente suposição sendo que a história não requer, de fato, qualquer treinamento, sua narrativa, métodos reportais e técnicas sendo contempladas pelo senso comum e autoevidentes; e já que eles eram altamente proficientes em matemática, eles tinham **tudo** que era preciso para se tornar historiadores da matemática bem sucedidos”.*⁹ (Unguru, 1975, p. 87–88, tradução nossa)

O matemático lida com as leis que regem as interações entre os objetos de estudo de sua disciplina, e não necessariamente com o seu desenvolvimento ao longo da história. Considerando os matemáticos como possuidores de uma posição filosófica quase hegemonicamente platônica e realçando o fato de eles não serem treinados nos métodos apropriados para a pesquisa historiográfica, Unguru caracteriza a escrita da história feita por eles como possuidora de “(...) modos universais de inferência, estruturas eternas e padrões de investigações atemporais e ideais (...) que são **completamente independentes da forma na qual acabam aparecendo numa conjuntura temporal particular**” (1975, p. 73, grifos do autor, tradução nossa). Unguru afirma que, em consequência, a historiografia desenvolvida a partir destes paradigmas não leva em conta a relação de interdependência conceitual entre a forma e o conteúdo, que ele considera fundamental para a pesquisa historiográfica (1975, p. 73, tradução nossa). Afirma ainda que o

⁸ Unguru (1975, p. 81) chega a utilizar, para se referir aos defensores da tese da álgebra geométrica, o termo *villains*, que se traduz literalmente por “vilões”.

⁹ Confirmam a afirmação de Unguru os casos exemplares de Tannery, Zeuthen e Heath. Tannery, embora versado em filosofia e história da matemática, era especialista na indústria do tabaco; por sua vez, H. G. Zeuthen, ainda que muito reconhecido pelos seus estudos em história da matemática, era apenas matemático de formação. De igual modo, apesar de sua reputação como grande classicista, a ocupação principal de Heath sempre esteve relacionada ao funcionalismo público.

desenvolvimento da matemática, para os defensores da tese da álgebra geométrica, é descrito exclusivamente nos termos do desenvolvimento da **forma** matemática. Para estes historiadores “ocasionais”, a “estrutura essencial” está dada; são apenas os modos de expressá-la que mudam conforme se vai seguindo o curso da história (1975, p. 87). A matemática das eras passadas seria, para tais autores, somente uma prévia preparatória para a matemática moderna. Isso, por exemplo, explica a necessidade de Neugebauer de enxergar as matemáticas egípcia e mesopotâmica como rudimentos da matemática grega.

Unguru afirma que tal posição configura um obstáculo para a tarefa intrínseca ao trabalho do historiador de destacar as particularidades da produção filosófico-científica de cada cultura. Para executar a tarefa de lançar as bases para a reescrita da história da matemática grega, Unguru propõe, em seu artigo, que se dê um papel de destaque para a simbologia, na medida em que ela denota a **forma** de expressão de um determinado **conteúdo**, e não um acessório dispensável para a análise histórica dos conceitos matemáticos.

Assim, a expressão do método matemático de certa época deve, argumenta Unguru, contemplar a realidade cultural em que tal método está inserido; conclui-se que, se os gregos antigos não se expressaram em linguagem algébrica, é porque o raciocínio algébrico não era um elemento de sua cultura matemática. Surge, assim, a afirmação fundamental para a rejeição da historicidade da tese da álgebra geométrica: a presença de pensamento algébrico na matemática grega exigiria a formulação de uma simbologia manipulativa que é característica da álgebra. E é então que Unguru se dedica a demonstrar que, como tal simbologia é absolutamente inexistente em quaisquer dos textos gregos antigos, não é possível que tenha existido então uma álgebra geométrica.

Para evidenciar as razões da necessidade de tal simbologia para poder caracterizar a matemática grega como algébrica, Unguru emprega (1975, p. 76–77) um minucioso estudo comparativo dos pensamentos algébrico e geométrico a fim de os descrever como categoricamente distintos entre si: embora o pensamento geométrico possua sua própria simbologia, ela não é essencial para o procedimento de demonstração ou de resolução de problemas, posto que o aspecto manipulativo do pensamento geométrico está concentrado na retórica, na descrição e nos elementos necessários para a realização da prova; o pensamento algébrico, por outro lado, preocupado exclusivamente com as relações que podem ser estabelecidas entre os objetos matemáticos e descompromissado com qualquer ontologia, depende necessariamente de uma simbologia que possa ser manipulada para alcançar os resultados matemáticos esperados. Unguru encerra esta parte de sua argumentação afirmando que:

*“A **Linguagem** é a realidade imediata do **Pensamento**. As diferenças entre as duas formas de pensar são diferenças reais, as quais não podem ser facilmente dispensadas, enraizadas que estão nas características do espaço perceptível, por um lado (geometria), e na denotatividade universal do símbolo manipulável absolutamente abstrato (álgebra), por outro. Diferentes formas de pensar implicam diferentes formas de expressão. É, portanto, impossível para um sistema de pensamento matemático (como a matemática grega) exibir uma tal discrepância entre seu suposto caráter implicitamente **algébrico** e o seu modo de expressão **puramente geométrico**”. (1975, p. 80, tradução nossa)*

Após ter demonstrado a relação de interdependência entre a forma e o conteúdo, e que a existência de um pensamento algébrico pressupõe a existência de uma simbologia manipulativa, Unguru conclui que, dado que a simbologia manipulativa apareceria pela primeira vez somente nos trabalhos matemáticos do século XVI, é historicamente inaceitável a proposição de que os gregos tivessem algum tipo de álgebra camuflada por simbologia geométrica.

2.3 As respostas dos defensores da tese da álgebra geométrica

2.3.1 O artigo de B. L. van der Waerden

Van der Waerden manteve o tom agressivo de Unguru ao respondê-lo um ano mais tarde, em seu artigo *Defence of a ‘Shocking’ Point of View*,¹⁰ cujo principal objetivo consistia em negar a importância atribuída por Unguru ao papel que a simbologia desempenha no desenvolvimento da atividade matemática.

Num primeiro momento, van der Waerden critica a definição de álgebra tomada por Unguru (1975) afirmando que, quando ele (van der Waerden) e os defensores da tese da álgebra geométrica caracterizavam a geometria de Euclides como álgebra geométrica, eles não se referiam à álgebra moderna, tal qual desenvolvida a partir do século XVI¹¹; prossegue afirmando que Unguru, ao escrever sua contraposição, não compreendeu qual era verdadeiramente o conceito de álgebra que os defensores da tese da álgebra geométrica assumiam, segundo o qual a álgebra seria simplesmente “(...) a arte de manipular

¹⁰ O título escolhido para seu texto retoma o adjetivo “*shocking*” (lit. chocante) utilizado duas vezes por Unguru em *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics* para se referir à posição, segundo ele “chocante”, de van der Waerden.

¹¹ Neste artigo, sempre que utilizarmos o termo “álgebra moderna” não estaremos nos referindo àquela álgebra dos séculos XIX e XX, mas sim à álgebra que começou a se desenvolver a partir do século XVI, com os trabalhos de François Viète (1540–1603) e dos demais matemáticos que se seguiram a ele, como René Descartes (1596–1650) e John Wallis (1616–1703).

expressões algébricas como $(a + b)^2$ e de resolver equações como $x^2 + ax = b$ ” (van der Waerden, 1976, p. 199, tradução nossa).

Em seguida, van der Waerden procura reestabelecer a precedência do conteúdo sobre a forma de sua expressão para a análise do desenvolvimento matemático, numa investida que seria repetida por H. Freudenthal (1977) e A. Weil (1978). Sua enérgica colocação na 11ª seção de seu texto retrata perfeitamente sua posição:

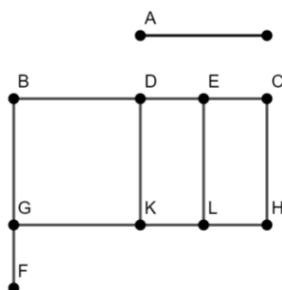
“Unguru, assim como muitos não-matemáticos, superestima grosseiramente a importância do simbolismo na matemática. Essas pessoas veem nossos artigos cheios de fórmulas e acham que essas fórmulas são uma parte essencial do pensamento matemático. Nós, matemáticos profissionais, sabemos que em muitos casos as fórmulas não são de maneira alguma essenciais, mas apenas convenientes”. (1976, p. 205, tradução nossa)

Em seguida, van der Waerden retoma *O despertar da ciência* para defender a validade das conclusões historiográficas tradicionais e reafirma a semelhança e a ligação entre as matemáticas babilônica, grega e árabe: para ele, uma é base para a outra (necessária e naturalmente, nesta ordem), e a matemática, ao se desenvolver ao longo da história, foi apenas encontrando novas formas de expressão. No final de seu artigo (1976, pp. 209–210), por exemplo, ele elenca algumas das muitas similaridades existentes entre as matemáticas grega e babilônica;¹² dentre as mais importantes estão o conhecimento do *teorema de Pitágoras* tanto pelos pitagóricos quanto pelos babilônicos, o interesse de ambos em resolver equações lineares com muitas incógnitas e o domínio, da parte de ambos, de métodos que, segundo ele, são “essencialmente” iguais para a solução de equações quadráticas.

Destacamos, no artigo de van der Waerden, um argumento, pelo lugar que ele veio a ocupar na tréplica de Unguru de 1979: o argumento de que a obviedade de determinadas proposições de *Os Elementos* para a geometria seria uma prova de que a verdadeira intenção de Euclides fosse a de demonstrar leis “essencialmente” algébricas. Essas proposições estão dispostas em diferentes livros de *Os Elementos*, mas, em especial, o conteúdo do livro II é sempre descrito pelos defensores da tese da álgebra geométrica como sendo algébrico em essência e geométrico apenas na forma. Dele, portanto, selecionamos II.1, que ilustra bem a base na qual se fundamentam os argumentos de van der Waerden; nela, Euclides afirma:

¹² Todas elas são discutidas de maneira mais elaborada em *O despertar da ciência*.

“Caso existam duas retas, e uma delas seja cortada em segmentos, quantos quer que sejam, o retângulo contido pelas duas retas é igual aos retângulos contidos tanto pela não cortada quanto por cada um dos segmentos”. (Euclides, 2009, p. 135–136)



A demonstração desta proposição é particularmente interessante, porque – assim que Euclides conclui a construção necessária para a prova¹³, posta conforme o diagrama acima – ele, sem recorrer a procedimentos lógicos, conclui imediatamente que “então, o [retângulo] BH é igual aos [retângulos] BK, DL, EH”¹⁴ (Euclides, 2009, p. 135) (ver diagrama acima), mas continua a demonstração visando provar que os retângulos construídos (BH, BK, DL e EH) são de fato os mesmos que ele menciona no enunciado (o contido pelas duas retas dadas e os contidos pela reta não cortada e por cada um dos segmentos produzidos pelo corte). Para van der Waerden (1976), a obviedade da verdade expressa por esta proposição evidencia que ela não é necessária para a prática geométrica;

¹³ A forma clássica de uma proposição é composta geralmente de seis partes: (1) a *πρότασις* (lit. proposição), onde se faz a enunciação da proposição em termos gerais, (2) a *ἐκθεσις* (lit. exibição), onde são apresentados os dados particulares do problema (como, por exemplo, “Seja uma reta AB...”), (3) o *διορισμός* (lit. especificação), no qual são reafirmados os objetivos da prova e as condições necessárias para a possibilidade da proposição, (4) a *κατασκευή* (lit. construção), onde são construídos os elementos necessários para a realização da prova, (5) a *ἀποδείξις* (lit. prova), onde se realiza a demonstração propriamente dita, e, finalmente, (6) o *συμπέρασμα* (lit. conclusão), onde se conclui a proposição – geralmente com os dizeres “o que era preciso mostrar” ou “o que era preciso fazer” – com uma retomada da *πρότασις*. Cf. Heath (1921, p. 370). Deste modo, quando dizemos que Euclides está concluindo “a construção necessária para a prova”, estamos nos referindo ao encerramento da *κατασκευή*.

¹⁴ Numa reformulação moderna, que conserve algo do pensamento grego: o tamanho do retângulo BCHG é igual ao tamanho dos retângulos BDKG, DELK e ECHL juntos. Como nos lembra David Fowler, tão importante para a construção desta nova historiografia proposta por Unguru, “*igualdade* [...] não significa *igualdade aritmética* de alguma medida numérica de área e não pode [também] significar *congruência*” (1999, p. 11, tradução e grifos nossos). Na verdade, “a ideia por trás do uso de Euclides de ‘igualdade’ na geometria é a de tamanho, e não de forma, e sua preocupação, em primeiro momento, é ver se duas retas, duas figuras planas ou duas regiões tridimensionais são iguais em tamanho ou, quando elas não são iguais, qual é a maior” (1999, p. 12).

É ainda importante mencionar que, em *Os Elementos*, o padrão é se referir a figuras paralelogramáticas por uma das diagonais. É por isso que “o paralelogramo BH” é o mesmo paralelogramo BCHG, conforme o chamaríamos hoje.

tanto é que, segundo ele, Euclides não a invoca explicitamente em nenhum dos seus primeiros quatro livros. Sua presença no segundo livro de *Os Elementos* se justifica, segundo van der Waerden (1976), apenas quando se lhe interpreta como uma espécie de “tradução” de uma lei algébrica para a linguagem geométrica, forma natural de expressão da cultura grega. Neste caso, esta seria a lei da distributividade da multiplicação com respeito à adição.

Não é possível, no espaço deste artigo, apresentar o conjunto dos longos argumentos presentes nas discussões entre Unguru, van der Waerden, Freudenthal e Weil acerca de proposições como esta, presentes não só em *Os Elementos*, mas também em outros trabalhos, como nos de Arquimedes de Siracusa (287–212 a. C.) e naqueles desenvolvidos pela matemática árabe. No entanto, pelo exemplo fornecido, queremos tornar evidente a forma de proceder de van der Waerden, pois é a partir dela que serão feitas suas observações que identificam uma continuidade no desenvolvimento da matemática ao longo da história que, conforme Unguru notaria em sua tréplica, ignora as características particulares da cultura e do tempo histórico, afirma a existência do pensamento algébrico na atividade matemática dos gregos antigos e norteia a prática de reeditar os textos antigos por meio do auxílio de uma linguagem matemática mais moderna, que permitiria – na visão de van der Waerden – superar a natureza verbal da linguagem matemática grega, descrita por ele como “embaraçosa”.

2.3.2 O artigo de H. Freudenthal

Nascido na Alemanha, mas radicado na Holanda, Freudenthal já era conhecido, quando se deu a discussão que apresentamos, por seus trabalhos em topologia. Mas era também, à época, um participante ativo do movimento de fundação da educação matemática, à qual dedicou todas suas energias até o final da vida, sem nunca abandonar suas pesquisas em história da matemática e a interdisciplinaridade que sempre caracterizou seus trabalhos.¹⁵

Em sua resposta a Unguru, publicada em 1977, Freudenthal argumenta que a posição de Unguru interpreta erroneamente o objeto de estudo da matemática. Para Freudenthal, a matemática não estuda os símbolos; em suas palavras, eles nada mais são que uma “(...) parte da linguagem pela qual os objetos matemáticos são representados” (1977, p. 192, tradução nossa), considerando, assim, que o papel desempenhado pelo simbolismo na matemática não é o aspecto fundamental para a compreensão da sua história.

¹⁵ Desde antes de se engajar no debate com Unguru, ele esteve envolvido com a pesquisa em história da matemática. É digno de nota que Freudenthal, tão crítico do Movimento da Matemática Moderna e da perspectiva dos Bourbaki em assuntos da educação matemática, tenha se alinhado de maneira tão integral com a defesa da visão de história de matemáticos membros dos Bourbaki, como o próprio Weil.

Ao desafio feito por Unguru de que os defensores da tese da álgebra geométrica explicassem as razões pelas quais os gregos, supostamente, teriam escondido sob um manto geométrico sua álgebra (1975, p. 75), Freudenthal responde elencando três razões. A primeira razão seria histórica: para ele, o percurso – caracterizado por ele como “tortuoso” – que o desenvolvimento da teoria matemática descreveu até encontrar sua forma final na teoria das proporções de Eudoxo foi considerado “(...) tão excelente que os gregos não aspiravam por um melhor” (1977, p. 191, tradução nossa). A segunda razão seria filosófica: a cultura filosófica, que tinha a unidade como indivisível, fez com que a prática teórica matemática se distanciasse o quanto fosse possível da divisão e, portanto, do contato com as frações e da sua subsequente concepção como números. Por fim, a terceira razão é apresentada como relativa à tradição; segundo Freudenthal, “uma vez canonizados, os *Elementos* se tornaram sacrossantos, suscetíveis a adições, mas não a mudanças” (1977, p. 191, tradução nossa).

Retomando a disputa acerca do conceito de álgebra, discutido até então por Unguru e van der Waerden, Freudenthal delineia o que acredita ser essencial para a atividade algébrica nas seguintes linhas, que se tornaram bastante emblemáticas do debate a respeito da álgebra geométrica:

“O que é álgebra? Não existe uma Suprema Corte para decidir tais questões. No entanto, “álgebra” tem um significado na linguagem cotidiana, assim como “cadeira” e “mesa”. Por exemplo, na escola, álgebra é resolver equações lineares e quadráticas. É o tipo de álgebra com que os babilônicos começaram. Sua álgebra não era álgebra, porque seu simbolismo não era suficientemente maleável? “Comprimento” e “largura” são muito piores que “x” e “y”, se você consegue dar receitas claras para resolver equações quadráticas com esses termos? Se a soma dos 10 primeiros quadrados for dada numa fórmula numérica que permita estender o resultado [encontrado] para qualquer n, isso não é álgebra? Essa habilidade para descrever relações e procedimentos de solução e as técnicas envolvidas de forma genérica é, na minha visão de álgebra, uma característica tão importante do pensamento algébrico que eu estou disposto a estender o nome “álgebra” a ela, enquanto nenhum outro nome seja proposto (...). Mas o que há num simples nome?”¹⁶ (1977, pp. 193–194, tradução nossa)

Tanto para Freudenthal quanto para van der Waerden, a essência do pensamento algébrico está em lidar com as relações entre os objetos sem que se tenha o compromisso

¹⁶ Fizemos a opção por traduzir “*What is in a name?*” por “o que há num simples nome?”, pois julgamos que tal tradução dá um significado mais preciso para o impacto da pergunta em inglês. Esta pergunta foi tomada por Freudenthal de *Romeu e Julieta*, quando, na cena 2 do segundo ato, Julieta questiona Romeu sobre a importância do nome de sua família diante de seu amor por ele.

com o que este objeto de fato é. Essa postura leva Freudenthal à afirmação extrema de que o conteúdo do Livro V de *Os Elementos* – por não abordar resultados geométricos e lidar com relações (razões e proporções) entre magnitudes, objetos esses que não são definidos em momento algum do tratado – não é sequer álgebra geométrica, mas sim álgebra pura (1977, p. 193).

2.3.3 A carta de André Weil

O tom do texto de André Weil, publicado em 1978 como uma carta ao editor da *Archive* – a mesma revista em que foram publicados os três artigos previamente discutidos – com o título *Who Betrayed Euclid?* é, possivelmente, o mais agressivo de todos.

Nele, Weil discute uma proposição de *Os Elementos* (IX.8), a evolução da notação para a exponenciação e o caráter simbólico tanto das letras utilizadas na linguagem matemática moderna quanto das palavras da matemática verbal da Antiguidade; e observa, ainda, uma natureza, para ele, puramente algébrica do conteúdo dos ditos livros aritméticos de Euclides (VII, VIII e IX): ele dá um passo que nos parece ainda mais extremo que a afirmação de Freudenthal de que o Livro V seria puramente algébrico, e classifica o conteúdo destes livros aritméticos como sendo a “álgebra do anel dos inteiros” (1978, p. 93).

Não julgamos necessário discutir tais argumentos, pois, nas poucas passagens que não são ataques pessoais a Unguru, Weil somente repete os argumentos utilizados – e já expostos em nosso trabalho – por van der Waerden e Freudenthal.

Unguru tampouco se dá ao trabalho de discutir tal carta, exceto por uma nota de rodapé na qual – mantendo o tom agressivo e, até, provocador, que marcou todo o debate – cita um texto de Simone Weil (1909–1943), irmã de André Weil e famosa por criticar o pensamento algébrico – para desqualificar os argumentos e o tom de seu oponente.

2.4 A tréplica de Unguru: o fechamento “provisório” do debate

Em sua tréplica, datada de 1979 e intitulada *History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art*, Unguru reapresenta os argumentos de seu artigo anterior de maneira mais sucinta e esquematizada (em apenas 11 páginas) – sem recorrer às longas citações que caracterizaram seu artigo de 1975 (que tem 48 páginas) – ao mesmo tempo em que responde às críticas de van der Waerden e Freudenthal acima mencionadas.

No início do artigo, Unguru reafirma que os matemáticos são, em sua maioria, platônicos. Daí, ele conclui que aqueles matemáticos que se dedicam à história de sua disciplina tomam como legítima a identificação de uma equivalência não só matemática,

mas também histórica, entre as várias formas que um conceito ou uma operação matemática adquirem ao longo da história. Unguru critica esta posição, afirmando que:

“O fato de que os matemáticos modernos possam interpretar a matemática grega de maneira algébrica é uma coisa. A conclusão de que, em consequência, a forma de pensamento dos matemáticos gregos era algébrica é um assunto totalmente diferente”. (1979, p. 452, tradução nossa)

Para tornar mais claros aqueles conceitos que haviam sido apresentados no artigo anterior, Unguru utiliza uma espécie de dualidade – que ele considera fundamental para o trabalho do historiador – entre dois conceitos: o idiossincrático e o nomotético. Idiossincrático, não apenas em sua visão, mas segundo comumente se concebe esse conceito, é aquilo que é particular, característico, único, que é diferente para casos diferentes. Já o nomotético é aquilo que segue uma norma ou conjunto de normas, isto é, é aquilo que é regular, padronizado e que se repete por regra geral. Para Unguru, o domínio da matemática é o nomotético e o domínio da história é o idiossincrático. Deste modo, ele consegue realizar uma crítica mais bem direcionada: os matemáticos que tentaram escrever a história da matemática, ao conceberem que as entidades matemáticas residem num mundo transcendental e identificarem uma essência imutável nas diferentes formas de expressão desenvolvidas ao longo da história, ignoraram a idiossincrasia da cultura, ou seja, aquilo que lhe é mais específico e próprio. E é justamente esta atitude que dá origem a conceitos que, para Unguru, são historicamente absurdos, como o da álgebra geométrica.¹⁷

Em continuidade, Unguru responde outras críticas feitas por van der Waerden. À conceitualização de álgebra assumida por ele e que lhe levou a acreditar na identificação de traços de atividade algébrica não só nos gregos, mas também nos babilônicos e nos egípcios, por exemplo, Unguru se contrapõe afirmando que, mesmo que se aceitasse tal conceitualização, seria impossível dar qualquer exemplo deste tipo de álgebra em toda a matemática pré-diofantina.¹⁸ Aos argumentos de van der Waerden que lhe fazem crer que a motivação para a formulação de proposições como a II.1 de *Os Elementos* deveria ser algébrica, em vista do seu caráter pouco interessante do ponto de vista geométrico, Unguru escreve que seu conceito de “interessante” é um tanto obscuro e parece apenas significar

¹⁷ Mikhail Katz (2020) demonstra que muitos historiadores não compartilham desta visão na sessão *Do historians endorse Unguru?* de seu artigo que recomendamos na Bibliografia (cf. Katz, 2020).

¹⁸ Diofanto de Alexandria (201/214–284/298) foi um matemático, imediatamente posterior a Arquimedes, a quem geralmente se atribuem os germes da álgebra. Como não poderemos discutir esses méritos para além dos pontos nos quais Unguru se ancora, recomendamos o leitor a procurar por Sialaros e Christianidis (2016), em que, numa tentativa de situar o debate discutido no presente artigo de acordo com o conceito de álgebra pré-moderna (ou, pré-Viète), se rejeita qualquer tipo de atribuição a Herão de Alexandria, um matemático grego anterior a Diofanto e a Arquimedes, procedimentos matemáticos com características algébricas.

algo que “(...) ‘funciona bem’ para a explicação da origem dos teoremas discutidos” (Unguru, 1979, p. 557, tradução nossa); “funciona bem”, por sua vez, também sendo um conceito nebuloso, para Unguru, parece estar relacionado à possibilidade de fornecer a explicação mais simples imaginável. Sua conclusão é de que a colocação de van der Waerden seria uma concatenação desengonçada de procedimentos lógicos e históricos, bastante reveladora da verdadeira raiz do conceito da álgebra geométrica: a capacidade dos matemáticos modernos de identificar as estruturas algébricas presentes nos textos antigos.

A segunda das três seções do artigo é dedicada aos argumentos de Freudenthal. Ela começa com uma resposta às ditas três razões por ele utilizadas para lidar com o desafio de Unguru de explicar o porquê de os gregos esconderem sua álgebra em forma geométrica. Em primeiro lugar, ele rejeita a razão histórica: Freudenthal (1977, p. 191) afirmara a tradicional história de que a teoria das proporções de Eudoxo, que se encontra no Livro V de *Os Elementos*, é a resolução do supostamente grave problema filosófico que teria sido causado pela descoberta dos incomensuráveis na escola pitagórica. Por esta razão – ainda de acordo com Freudenthal – tal teoria das proporções teria se consolidado como padrão inquestionável. Como Unguru põe em xeque a existência da chamada “crise dos incomensuráveis”,¹⁹ conclui-se que a teoria das proporções de Eudoxo não teve a importância que se costuma atribuir a ela – nomeadamente a de resolver uma crise nos fundamentos da matemática grega –, do que resulta que a razão histórica de Freudenthal seria, nas palavras de Unguru, ahistórica.²⁰

Unguru passa, então, à razão que Freudenthal chama de “tradicional”, contestando a sua afirmação de que a suposta “canonização” de *Os Elementos* teria feito com que todos os trabalhos matemáticos desenvolvidos posteriormente fossem escritos em linguagem geométrica. Ele diz: “Tudo bem, mas por que, então, Euclides adota esta mesma

¹⁹ A crise dos incomensuráveis foi um suposto escândalo lógico que teria surgido a partir da descoberta feita pelos matemáticos gregos de grandezas incomensuráveis entre si, isto é, que não podem medir uma à outra. Nos dias atuais, este conceito mais ou menos corresponde à nossa noção de número irracional. A aceitação e o desenvolvimento da tese que afirmava a sua ocorrência se deram a partir de Tannery (1930 [1887]), Hasse e Scholz (1928), van der Waerden (1940) e Freudenthal (1966). Recomendamos a leitura de David F. Fowler (1999), por tratar o assunto à luz da nova teoria das razões antifairéticas; e, também, Gonçalves e Possani (2009), que resume o assunto discutido para o leitor de língua portuguesa.

²⁰ Não queremos dizer – e nem acreditamos que esse tenha sido o objetivo de Unguru em seu artigo – que o conteúdo do Livro V não representa um grande avanço na matemática grega. Fowler (1999) discute melhor o assunto ao apresentar sua posição de que a matemática grega não era poderosa o suficiente para ter se deparado com o problema dos incomensuráveis e percebê-lo com uma “grave” afronta aos fundamentos que tinham estabelecido para sua ciência. Não é que a teoria das proporções não seja uma grande conquista grega – é consenso que, em particular, a Definição 5 do Livro V, representa uma caracterização historicamente importante para o conceito de proporção. No entanto, a posição de destaque e importância que esta teoria ocupa na história segundo as concepções compartilhadas por Fowler e Unguru não é a mesma de Freudenthal, pois, para eles – conforme expusemos acima –, esta teoria não foi a responsável pela resolução de uma crise.

linguagem?” (1979, p. 559, tradução nossa), se referindo à linguagem geométrica. À razão chamada de “filosófica”, Unguru opta por nem responder.

Depois de rejeitar a ideia de que a linguagem matemática dos gregos antigos gozava de propriedades semelhantes às da linguagem algébrica moderna que possibilitava representar uma ideia geral por meio de símbolos, Unguru passa a criticar a caracterização feita por Freudenthal do conteúdo do livro V de *Os Elementos* como sendo puramente algébrico. Mencionando resultados de Knorr (1975), Unguru compara a teoria geral das proporções do livro V, aplicável a todos os tipos de magnitudes, com a teoria elementar dos números do livro VII, que também lida com razões e proporções, mas aplicadas a números. Unguru questiona: se o livro V fosse álgebra – ou seja, resultados que valem de maneira geral para qualquer tipo de objeto – qual seria a necessidade de Euclides escrever o livro VII, em que resultados análogos são provados para os números? Segundo ele, esse tipo de interpretação não leva em conta a distinção que os gregos faziam entre os conceitos de **magnitude** e de **número**. Fazendo suas as palavras de T. L. Heath, ele diz: “A magnitude [μέγεθος], na verdade, corresponde a uma das duas divisões da *quantidade* [ποσόν], nomeadamente o contínuo (como uma reta, uma superfície, ou um corpo), enquanto o número [ἀριθμός] [...] [está relacionado com o] *discreto*” (Heath, 1949, p. 45, tradução nossa). Unguru conclui, assim, que o que justifica a existência dos dois livros é o fato de que a magnitude, em Euclides, não é um conceito geral, semelhante a uma variável algébrica, conforme ela foi pensada do século XVII em diante. Ela, sim, era um conceito que nomeia um tipo de objeto particular que não abrange números.²¹

A parte final da resposta de Unguru merece destaque, pois é nela que Unguru levanta alguns de seus mais significativos e fortes argumentos contra a tese da álgebra geométrica: trata-se de sua resposta à mais emblemática pergunta de Freudenthal: “(...) o que há num simples nome?” (1977, p. 194, tradução nossa). Em razão do fato de que tal resposta sintetiza em algumas palavras as razões principais do consenso estabelecido desde a década de 1980, optamos por reproduzir alguns trechos completos de seu artigo no que segue.

Unguru começa rebatendo a passagem de Freudenthal aqui reproduzida (1977, p. 193–194) ao rejeitar a suposta condição dos matemáticos babilônicos e gregos como algebristas: os primeiros, diz ele, por não serem capazes de produzir mais do que “receitas” matemáticas,²² e os segundos porque, embora realmente tenham tido condições de pensar e se expressar de maneira abstrata e geral, o faziam por meio de linguagem geométrica – o que decorre do fato de que eles lidavam com objetos geométricos, e não algébricos. Para Unguru, o nome tem a sua importância relacionada ao fato de que ele é um meio de

²¹ Sobre a deformação dos pressupostos filosóficos implícitos causada pelo uso da simbologia moderna na leitura dos tratados matemáticos antigos, cf. Campos e Moreira (2018).

²² Para um ponto de vista contrário ao exposto por Unguru sobre esta “produção de receitas” nos materiais numérico-aritméticos babilônicos, recomendamos Waschkies (2004, p. 6–9).

atribuição de significado às coisas. Deste modo, ele segue escrevendo acerca da impropriedade de se utilizar a palavra “álgebra” para se referir às matemáticas babilônica e grega. Para se justificar, ele retoma, uma última vez, a História como disciplina que deve investigar aquilo que é particular, isto é, o idiossincrático:

“Os entusiastas das interpretações algébricas da geometria grega violaram um dos princípios fundamentais da erudição histórica. A história é o estudo dos traços presentes de eventos passados do ponto de vista da mudança e do particular, do idiossincrático. Embora as estruturas perenes, os quadros estáveis e os aspectos duradouros quase-consistentes sejam tópicos legítimos de investigação histórica, eles não são o que fazem da história o que ela é. A história está primária e essencialmente interessada no evento qua evento particular, no acontecimento específico, na mudança de uma característica individual identificável para outra característica individual identificável. A história não se esforça (ou não se esforça primariamente) por amontoar eventos, para aglomerá-los sob a mesma titulação por meio da filtragem de suas individualidades. Ao contrário, a história é a tentativa de entender cada evento passado por si só”. (p. 562, tradução nossa)

E continua:

“A história da matemática é história, não matemática. Ela é o estudo dos aspectos idiossincráticos da atividade de matemáticos, eles mesmos engajados no estudo do nomotético, isto é, do que é o caso por lei. Se alguém quiser escrever a história da matemática, e não a matemática da história, este escritor deve ter cuidado para não substituir o nomotético pelo idiossincrático, isto é, para não lidar com a matemática do passado como se a matemática não tivesse passado para além das diferenças triviais na aparência externa daquilo que é basicamente um conteúdo incondicionalmente imutável”. (p. 563, tradução nossa)

Para Unguru, portanto, não é um procedimento historiograficamente adequado buscar pela identificação de uma essência algébrica na atividade matemática dos gregos e dos babilônicos. Não tem, da mesma forma, sensibilidade histórica alguma, em seu ponto de vista, a desvinculação do **conteúdo** associado a essa essência algébrica da forma através da qual ele é expresso, que elimina a importância da **forma** de expressão – o **nome** – de modo a conferir legitimidade à classificação das matemáticas babilônica e grega como algébricas. Ele continua:

*“Na matemática (como em qualquer outra coisa) forma e conteúdo não são variáveis independentes. Pelo contrário, elas se condicionam mutuamente e **nenhuma delas é imune à mudança** [grifos nossos]. Uma certa forma permite apenas um certo conteúdo, e um novo conteúdo requer uma nova forma. É por isso que a abordagem metodológica que lança indiscriminadamente a sombra algébrica sobre o jardim da matemática grega obscurece precisamente aqueles aspectos que fazem dela matemática **grega** [grifo do autor]”.* (p. 563, tradução nossa)

Em seguida, Unguru volta à questão “o que há num simples nome?”. Ele reconhece a afirmação de Freudenthal de que existe, no processo de atribuição de nomes às coisas, uma convencionalidade. Adverte, entretanto, que tal convencionalidade tem uma função social e histórica, e que romper com ela pode resultar em graves problemas. Afirma ainda que escolher arbitrariamente um nome diferente do convencionalizado para determinado objeto é perigoso porque, em primeiro lugar, pode ser o caso de que este nome esteja substituindo a realidade do objeto pela sua potencialidade. Assim, por exemplo (e este é o exemplo usado por Unguru), chamar “árvore” de “cadeira” substitui a realidade do objeto de ser uma árvore por algo no qual ele pode se transformar, isto é, a cadeira. Em segundo lugar, porque a escolha do novo nome pode levar à negligência de todas as potencialidades do objeto que não a escolhida na sua nova nomeação. Deste modo, seguindo o mesmo exemplo, chamar “árvore” de “cadeira” é problemático porque uma árvore não é potencialmente apenas uma cadeira: ela também pode ser um caixão ou uma mesa, por exemplo. Ele, então, conclui:

“O nome ‘álgebra’, assim como todos os nomes, é uma convenção (embora tenha algumas raízes históricas bem definidas). (...) Atribua-o indiscriminadamente ao que é obviamente geometria e você não apenas quebrou uma convenção útil; você criou, assim, uma nova, menos definida, nítida e útil que aquela que você violou, já que ela substitui potencialidade por realidade. E, ainda que isto seja possível, está historicamente errado, já que a história lida com a realidade (...) e não com a potencialidade (...). A abordagem de Freudenthal, van der Waerden e de suas cortes substitui a história pela lógica”. (p. 565, tradução nossa)

3 Conclusão

Estamos, em linhas gerais, de acordo com a resposta final de Unguru. Guardamos, entretanto, importantes ressalvas, algumas das quais foram amplamente tratadas nos anos seguintes pelos estudiosos de história da matemática. Não é, entretanto, possível nos limites do presente artigo realizar uma exposição pormenorizada deste ambiente de discussões posteriores. Registramos, assim, apenas que o debate não se encerrou completamente até hoje e que historiadores de diversas origens voltaram ao assunto, alguns reafirmando a crítica à tese da álgebra geométrica, outros em sua defesa, outros retomando as posições de Unguru, mas com ressalvas consideráveis.

Uma crítica que vale, no entanto, ser ressaltada é aquela feita à concepção de história de Unguru como um campo do conhecimento cujo domínio é o idiossincrático, em contraste com a matemática, cuja principal preocupação era o nomotético. Mesmo que ele tenha conseguido, com esta distinção, encontrar um dos erros fundamentais de seus opositores – aquele de procurar somente regularidades históricas e ignorar suas rupturas – consideramos que é importante destacar que sua definição ignora tanto o estudo de regularidades na ruptura (é o caso, por exemplo, do estudo do que existe em comum nas revoluções)²³ quanto o fato – bem demonstrado por Schubring (2003) – de que o estudo da ciência em tempos que não são de ruptura é extremamente importante para compreender as características fundamentais de uma época, na medida em que eles expressam a consolidação de determinada concepção científica.

Consideramos ainda importante ressaltar que não concordamos com todo o conteúdo do texto que abriu o debate em 1975 e chamamos especial atenção para o modo como Unguru concebe, no texto, a noção de álgebra. É a conclusão de Sialaros e Christianidis (2016), delineada ao colocar em destaque a distinção entre as álgebras pré-moderna e moderna, que nos parece a mais adequada para o tratamento do conceito de álgebra:

“(...) nós propomos que a álgebra deveria ser vista com um amplo espectro de ideias, ao invés de uma única categoria bem definida – conforme vista por ambos os lados do debate da ‘álgebra geométrica’. (...) Nós emitimos um claro alerta de anacronismo quando se aplica o genérico termo ‘álgebra’ sem que se esteja a par do período histórico ao qual [ele] se refere”. (p. 147, tradução nossa)

²³ Por exemplo, cf. a comparação de Florenzano (2009) da Revolução Russa com a Revolução Francesa e com a Revolução Inglesa.

Outro aspecto importante que julgamos ser de difícil aceitação em Unguru é o que diz respeito à agressividade com que ele expõe seus argumentos e à dureza dos termos escolhidos para tratar do grupo que caracteriza, em bloco, como “os matemáticos”. Unguru considerava que os historiadores mais jovens tinham uma atitude condescendente com os matemáticos que entraram na investigação histórica e se deram a empreendimentos historiográficos por sua autoridade matemática e por sua idade. Entendemos que isto, em partes, justifica sua postura mais agressiva, na medida em que, a seu ver, não era possível estabelecer uma nova forma de fazer história da matemática sem realizar uma profunda ruptura com a historiografia até então estabelecida. Mas, consideramos que a polaridade entre matemáticos e historiadores contribuiu para interditar o debate, o que resultou na criação de dificuldades adicionais para a busca – em meio às divergências naturais que existem entre os pesquisadores em qualquer assunto – de entendimentos comuns. Mais do que isso: a acusação de Unguru – reproduzida sem críticas por Roque (2012) – de que matemáticos não podem ser bons historiadores por serem platonistas é discutível. Para Mikhail Katz (2020)

“(...) a posição de Unguru de estabelecer uma polaridade entre historiadores e matemáticos tende a obscurecer o fato de que um número de historiadores importantes discordou de Unguru sobre os assuntos metodológicos em questão”. (p. 30, tradução nossa)

Katz nomeia – além dos já mencionados Sialaros e Christianidis (2016) – Kirsti (1975), Taisbak (1981), e Szabó (1978), a quem o próprio Unguru reconhece como um dos pioneiros nesta nova proposição de reescrita da história da matemática que ele também defende.

Por fim, apresentamos, agora, um historiador da ciência do início do século XX que é pouco conhecido do leitor em língua portuguesa e – a julgar pela total ausência de referência a seus textos no debate – também do leitor em língua inglesa, e cuja obra pode fornecer importantes contribuições para a análise dos argumentos do debate em questão: trata-se de Pierre Boutroux (1880–1922), filho do conhecido filósofo Émile Boutroux (1845–1921) e sobrinho do grande matemático Henri Poincaré (1854–1912).

Seu trabalho, escrito cinco décadas e meia antes do primeiro artigo de Unguru, sintetiza de maneira bastante clara alguns dos argumentos levantados na presente seção, ao mesmo tempo em que concentra, de forma mais transparente, argumentos que contrariam a tese da álgebra geométrica. Ao debater o ideal científico dos matemáticos, P. Boutroux (1920) argumenta que o ideal de ciência grego é, em primeiro lugar, especulativo, na medida em que “(...) ele pretende raciocinar sobre noções puras, essências ideais, sem

jamais se rebaixar à consideração dos objetos sensíveis”²⁴ (p. 76, tradução nossa). E continua:

“(...) seria absurdo pretender que os geômetras gregos não reconheceram a contribuição que os caracteres “aritméticos” próprios do cálculo realizam [ao estudo das grandezas, adição nossa]. Eles, com efeito, constantemente tiraram proveito destes caracteres em suas demonstrações. Mas eles não os isolaram e não acreditaram que se deveria estudar diretamente um conjunto de fatos que não lhes parecia poder ocupar um lugar legítimo nem na Aritmética, nem na Geometria, e que, ao contrário, tinham sempre desempenhado um papel preponderante na matemática aplicada. Assim, o mesmo escrúpulo, a mesma preocupação de pureza, que já havia incitado os teóricos gregos a retirar das ciências o cálculo das grandezas físicas, deveria igualmente tornar ilegítimo a seus olhos a aplicação (pura e simples) do cálculo às grandezas geométricas. E eis porque eles se afastaram desta matemática anfíbia, geométrica por seu objeto, mas aritmética de espírito e de método, que permitiu aos modernos selar definitivamente a união entre o número e a figura”. (p. 76, tradução nossa)

Contrastando o ideal científico dos matemáticos do século XVII com o ideal de ciência dos gregos antigos, Boutroux (1920) expõe os primeiros como superadores da posição inflexível e “aprisionadora” dos segundos. Ele diz:

“Foi a tradição grega que durante tanto tempo obscureceu a visão dos sábios, ocultando a identidade da natureza das operações relativas aos números e daquelas que concernem às grandezas, e impondo para o estudo desses dois tipos de operação o uso de uma terminologia e de métodos de raciocínio diferentes (...). [Até mesmo] Viète considerou ainda a ciência dos números e a das grandezas como tendo regras semelhantes, mas distintas. E foi Descartes quem, em sua Geometria, de 1637, afirmou pela primeira vez, sem restrições, a identidade destas duas ciências.

(...)

Foi, como vimos, descartando deliberadamente as concepções restritivas e os escrúpulos inerentes à ciência grega que os matemáticos do século XVII abriram a via ao progresso”. (p. 77–78, tradução nossa)

²⁴ Ele delinea, por exemplo, com bastante clareza, as diferenças que existiam na Grécia Antiga entre a logística, uma arte contabilística, e a aritmética, um estudo dos números enquanto objeto teórico (1920, p. 68). Indo além, afirma que uma das principais inovações de Diofanto, que ele considerou o primeiro algebrista, consistiu simplesmente em chamar de aritmética aquilo que se tomou antes dele por logística.

Fica, deste modo, explícito como a leitura de Boutroux poderia ter contribuído para o debate.

Finalizamos o artigo chamando atenção para duas linhas de investigação ainda não exploradas e que podem contribuir para uma compreensão ainda mais apurada dos equívocos da tese da álgebra geométrica.

A primeira diz respeito ao fato de que identificamos, na literatura mais recente sobre o assunto, a ausência de uma análise da influência da sociedade e das forças econômicas que nela atuam no desenvolvimento da cultura, cujo reconhecimento não está restrito ao trabalho de autores marxistas. Unguru menciona a diferença entre as culturas com bastante frequência, mas, como é possível não enxergar a relação entre os modos de produção de cada época e a cultura? Nesse sentido, historiadores como o já mencionado Struik (1954), John Desmond Bernal (1939) e Bento de Jesus Caraça (1971) seriam de grande contribuição para melhor situar o debate.

Conforme essa perspectiva materialista, a álgebra – tal como ela passou a existir a partir do século XVII – é inseparável da Revolução Científica, que teve seu auge neste mesmo século.²⁵ Além disso, ela é inseparável do modo burguês de pensar característico desse período, que exigia, de maneira urgente, a criação de instrumentos para a realização do cálculo preciso com números e de conceitos capazes de representar a mudança e a transformação. Em total oposição, o saber especulativo dos gregos é inseparável da existência, na Grécia Antiga, de um modo de produção baseado no trabalho escravo, o que tem relação direta com uma visão de ciência que buscava mais a harmonia do que a fidelidade aos fatos, e na qual prevaleceu a noção – comum a Platão (428/427 ou 424/423–348 a. C.) e a Aristóteles (384–322 a. C.)²⁶ em suas características fundamentais – estática e não dinâmica e materialista do conhecimento, o que teve como consequência a valorização das formas geométricas e do número enquanto concebidos como objetos ideais (em muitos casos, metafísicos) em detrimento da sua concepção como objetos manipuláveis, como se tornou comum nos trabalhos dos algebristas italianos do século XVI.

A segunda possível linha de investigação diz respeito aos estudos relacionados às revoluções científicas. Não identificamos, em qualquer passagem dos artigos mencionados, referências a Thomas Kuhn (1970) e a Alexandre Koyré (2006), o que é surpreendente, pois a argumentação de que não poderia existir uma álgebra na Grécia Antiga poderia ser

²⁵ A convenção é identificar a Revolução Científica com a série de transformações ocorridas nas ciências no período entre a data da publicação de *De revolutionibus corpus coelestium*, de Nicolau Copérnico, em 1543, e a data da publicação de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de Isaac Newton, em 1687.

²⁶ Não nos delongaremos fornecendo longas citações para discorrer sobre o assunto; fornecemos os seguintes exemplos apenas à guisa de ilustração: conforme o aristotelismo enxerga, “(...) não existe a ciência do acidente (...) [já que toda] ciência refere-se ao que é sempre ou na maioria das vezes: se não fosse assim, como seria possível aprender ou ensinar a outros?” (Aristóteles, *Metafísica*, 1027a); consonante a isso é a visão de Platão segundo a qual a matemática que o cidadão precisa aprender é a das formas eternas, e não a “(...) daqueles que a usam por amor à compra e à venda” (A *República*, 525 c-d).

claramente favorecida se fossem investigadas as relações – mencionadas, em outros termos, no parágrafo anterior – entre as profundas transformações ocorridas na matemática e aquelas ocorridas nas ciências, ao longo da Revolução Científica. Não só isso: sua inserção na discussão serviria, também, de reforço ao argumento de Unguru de que a história não pode ser somente a história da continuidade, mas é também a história das rupturas; afinal, como é possível imaginar que antes da Revolução Científica houvesse um tipo de raciocínio, próprio da álgebra, que fosse capaz de manipular objetos desprovidos de qualquer significado?

Certamente, há muito o que ser investigado e compreendido a respeito da tese da álgebra geométrica e das discussões a ela relacionadas. Esperamos que o leitor de língua portuguesa possa, por meio deste artigo, se familiarizar com o assunto e, eventualmente, desenvolver algumas das linhas de pesquisa acima mencionadas ou outras que possam contribuir para um muito desejado aprofundamento deste tema.

Bibliografia

ABREU, Livia Azelman de Fabia; ALMEIDA, Ana Mary Fonseca Barreto de; FERREIRA, Magno Luiz; OLIVEIRA, Carlos Antonio Assis de; SCHUBRING, Gert. A história da matemática nos livros-texto de Cajori, Eves, Boyer e Struik. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 13, n. 2, p. 280–297, jul./dez. 2020.

ANDERSEN, Kirsti. Review of On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. *Mathematical Reviews*, 1975.

ARISTÓTELES. *Metafísica*. Tradução de Giovanni Reale. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

BICUDO, Irineu. As Figuras nos *Elementos* de Euclides. *Revista Brasileira de História da Matemática*, n. Especial 1, p. 211–213, dez. 2007.

_____. Sobre a História da Matemática. *Bolema*, v. 7, n. ESPECIAL 2, p. 7–25, 1992.

BERNAL, John Desmond. *The Social Function of Science*. Londres: George Routledge & Sons, 1939.

BLÅSJÖ, Viktor. A Critique of the Modern Consensus in the Historiography of Mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics*, v. 4, n. 2, p. 113–123, 2014.

BOUTROUX, Pierre. *L'idéal scientifique des Mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps moderne*. Paris: Felix Alcan, 1920.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. *A history of mathematics*. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons. 2011.

_____. *História da Matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.

CAJORI, Florian. *A History of Mathematics*. 2. ed. Nova Iorque: The Macmillan Company; Londres: Macmillan & Co., Ltd., 1919.

_____. *Uma História da Matemática*. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

CAMPOS, Dilhermando Ferreira; MOREIRA, Plínio Cavalcanti. Inadequação do uso da linguagem algébrica moderna na tradução de enunciados dos elementos de Euclides. *Bolema*, v. 32, n. 62, p. 907–926, dez. 2018.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1971.

_____. *Lições de álgebra e análise*. Lisboa: Bertrand (Irmãos), 1966. v. 2.

DIAS, André Luis Mattedi. Tendências e Perspectivas Historiográficas e Novos Desafios na História da Matemática e da Educação Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 14, n. 13, p. 301–321.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

_____. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Tradução de Thomas Little Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1908. v. 1.

EVES, Howard. *An introduction to the history of mathematics*. 3. ed. Nova Iorque: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

_____. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FLORENZANO, Modesto. A Revolução Russa em perspectiva histórica e comparada. *Lua Nova*, v. 75, p. 41–57, abr. 2009.

FOWLER, David Herbert. *The Mathematics of Plato's Academy: A new Reconstruction*. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1999.

FREUDENTHAL, Hans. What is Algebra and What has it been in History?. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 16, n. 3, p. 189–200, jan. 1977.

_____. Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'antiquité?. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, v. 18, p. 43–55, 1966.

FRIED, Michael N. The Discipline of History and the 'Modern Consensus in the Historiography of Mathematics'. *Journal of Humanistic Mathematics*, v. 4, n. 2, p. 124–136, jul. 2014.

FRIED, Michael N.; UNGURU, Sabetai. *Apollonius of Perga's Conica: Text, Context, Subtext*. Leiden: Brill, 2001.

GARCIADIEGO, Alejandro R. Los *Elementos* de Euclides, una introducción. *Revista Brasileira de História da Matemática*, n. Especial 1, p. 333–348, dez. 2007.

GOMES, Severino Carlos. A Álgebra Geométrica de 'Umar Al-Khayyāmī em sala de aula. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 9, n. 26, p. 333–344, maio 2022.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa. Aspectos Formulares dos Livros de VII a X dos *Elementos* de Euclides. *Revista Brasileira de História da Matemática*, n. Especial 1, p. 281–298, dez. 2007.

_____. Observações sobre A Tradução de Textos Matemáticos Cuneiformes. *Bolema*, v. 24, n. 38, p. 1–15, abr. 2011.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa; POSSANI, Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. *Matemática Universitária*, v. 47, p. 16–24, dez. 2009.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. *The Developments of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge; Londres: MIT Press, 1970.

HASSE, Helmut; SCHOLZ, Heinrich. Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. *Kant Studien*, v. 33, n. 1–2, p. 4–34, 1928.

HEATH, Thomas L. *A history of Greek mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1921. v. 1.

_____. *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Clarendon Press, 1949.

HEIBERG, Johan Ludvig (ed.); MENGE, Heinrich (ed.). *Euclidis opera omnia*. Leipzig: Teubner, 1883.

KATZ, Victor Joseph. *A history of mathematics*. 2. ed. Boston: Pearson Education, 1998.

_____. *História da Matemática*. Tradução de Ana Sampaio e Felipe Duarte. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KATZ, Mikhail. Mathematical Conquerors, Unguru Polarity, and the Task of History. *Journal of Humanistic Mathematics*, v. 10, n. 1, p. 475–515, jan. 2020.

KLEIN, Jacob. Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, pt. 1. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (Abteilung B: Studien)*, v. 3, n. 1, p. 18–105, 1934.

KLEIN, Jacob. Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra, pt. 2. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (Abteilung B: Studien)*, v. 3, n. 2, p. 122–235, 1936.

KNORR, Wilbur Richard. *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for the Early Greek Geometry*. Dordrecht, Boston: D. Reidel, 1975.

KOYRÉ, Alexandre. *Do Mundo Fechado ao Universo Infinito*. 4. ed. Tradução de Donaldson M. Garschagen. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2006.

KUHN, Thomas Samuel. *The structure of scientific revolutions*. 2. ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1970.

LINTZ, Rubens Gouvêa. *História da Matemática*. 2. ed. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007.

MOURA, Anna Regina Lanner de; SOUSA, Maria do Carmo de. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. *Zetetiké*, v. 13, n. 24, p. 11–46, jul./dez. 2005.

NEUGEBAUER, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity*. 2. ed. Nova Iorque: Dover Publications, Inc., 1969.

OTTE, Michael Friedrich. Concepção de História da Matemática. *Bolema*, v. 7, n. ESPECIAL 2, p. 104–115, 1992.

PLATÃO. *A República*. Tradução de Pietro Nasseti. São Paulo: Editora Martin Claret, 2004.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHUBRING, Gert. *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula*. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Editora Autores Associados, 2003.

SIALAROS, Michalis; CHRISTIANIDIS, Jean. Situating the Debate on “Geometrical Algebra” within the Framework of Premodern Algebra. *Science in Context*, v. 29, n. 2, p. 129–150, jun. 2016.

SOUZA, Antônio Carlos Carrera de. Aspectos históricos das Geometrias não-euclidianas. *Bolema*, v. 8, n. 9, p. 75–84, 1993.

STRUIK, Dirk Jan. *A concise history of mathematics*. Londres: G. Bell and Sons, 1954.

_____. *História Concisa das Matemáticas*. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1989.

SZABÓ, Árpád. *The beginnings of Greek mathematics*. Tradução de A. M. Ungar. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1978.

TAISBAK, Christian Marinus. Review of Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of ‘Geometric Algebra’, ‘Application of Areas’ and Related Problems. *Mathematical Reviews*, 1981.

TANNERY, Paul. *Pour l’histoire de la science hellène*. Paris: Gauthier-Villars, 1930.

UNGURU, Sabetai. On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 15, n. 1, p. 67–114, dez. 1975.

_____. History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art. *Isis*, v. 70, n. 4, p. 555–565, dez. 1979.

UNGURU, Sabetai; ROWE, David E. Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of ‘Geometric Algebra’, ‘Application of Areas’ and Related Problems. *Libertas Mathematica*, v. 1, p. 1–49, 1981.

_____. Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of ‘Geometric Algebra’, ‘Application of Areas’ and Related Problems (cont.). *Libertas Mathematica*, v. 2, p. 1–62, 1982.

VIANNA, Carlos Roberto. História da Matemática, Educação Matemática: Entre o Nada e o Tudo. *Bolema*, v. 23, n. 35B, p. 497–514, abr. 2010.

WASCHKIES, Hans-Joachim. Introduction. In: CHRISTIANIDIS, Jean (ed.). *Classics in the History of Greek Mathematics*. Dordrecht: Springer Science+Business Media, p. 3–18, 2004.

WEIL, André. Who Betrayed Euclid? (Extract from a Letter to the Editor). *Archive for History of Exact Sciences*, v. 19, n. 2, p. 91–93, ago. 1978.

_____. History of Mathematics: Why and How. In: WEIL, André. *Ouvres Scientifiques – Collected Papers III (1964–1978)*. Nova Iorque: Springer, 1979.

VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert. Defence of a ‘Shocking’ Point of View. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 15, n. 3, p. 199–210, jun. 1976.

_____. *Science Awakening I*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; Princeton Junction: The Scholar’s Bookshelf, 1975.

_____. Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. *Mathematische Annalen*, v. 117, n. 1, p. 141–161, dez. 1940.

ZEUTHEN, Hyeronimus Georg. *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Copenhagen: Verlag A. F. Hoest, 1896.

Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da Silva
Universidade Federal de Goiás – UFG – Brasil

E-mail: diamantino@discente.ufg.br

Humberto de Assis Clímaco
Universidade Federal de Goiás – UFG – Brasil

E-mail: humberto_climaco@ufg.br