

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

Elis Regina Venancio Quintanilha

Transmissão de Rumores em Redes

Goiânia

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome(s) completo(s) do(a)(s) autor(a)(es)(as): Elis Regina Venancio Quintanilha.

Título do trabalho: Transmissão de Rumores em Redes.

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Junior, Professor do Magistério Superior**, em 28/11/2025, às 19:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Elis Regina Venancio Quintanilha, Discente**, em 05/12/2025, às 23:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5821966** e o código CRC **471E74D3**.

Referência: Processo nº 23070.060279/2025-19

SEI nº 5821966

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

Elis Regina Venancio Quintanilha

Transmissão de Rumores em Redes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Bacharelado em Estatística da Universidade Federal de Goiás para aprovação no componente curricular TCC, como parte das exigências para a obtenção do título de bacharel em Estatística.
Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.

Goiânia

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Quintanilha, Elis Regina Venancio
Transmissão de rumores em redes [manuscrito] / Elis Regina Venancio Quintanilha. - 2025.
78, f.

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Estatística, Goiânia, 2025.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui abreviaturas, símbolos, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Cascata de informação. 2. Transmissão de informação. 3. Probabilidade de extinção. 4. Processos de ramificação. I. Júnior, Valdivino Vargas, orient. II. Título.

CDU 5



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e sete dias do mês de novembro do ano de 2025 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Transmissão de Rumores em Redes”, de autoria de Elis Regina Venancio Quintanilha, do curso de Estatística, do Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. Dr. Valdivino Vargas Junior com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: David Henriques da Matta (IME/UFG) e Tatiane Ferreira do N.M. da Silva (IME/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição da estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 9,3, tendo sido o TCC considerado aprovado.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Junior, Professor do Magistério Superior**, em 27/11/2025, às 09:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **David Henriques Da Matta, Professor do Magistério Superior**, em 27/11/2025, às 11:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tatiane Ferreira Do Nascimento Melo Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 27/11/2025, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5801924** e o código CRC **0289F3C5**.

Dedico este trabalho aos meus pais e meus irmãos, que sempre estiveram presentes durante o processo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Amália e Alcides, pelo apoio em suas infinitas formas, pelas orações e pelo incentivo nas horas difíceis e nos momentos de ansiedade e incerteza.

A Deus por todas as coisas e pelo cuidado que me possibilitou chegar até aqui.

Ao meu orientador, professor Valdivino, pela disponibilidade e comprometimento com a orientação que me possibilitaram um ambiente propício ao aprendizado, com incentivo ao estudo, e se hoje eu consigo imaginar uma continuação para uma pós-graduação, é por todo esse incentivo e pelas nossas conversas.

Aos meus irmãos, meu grupo de torcedores de arquibancada, Ester e Heder, por acreditarem em mim com tanta fé e por me lembrarem do meu potencial.

À minha tia Anália, que sempre foi como uma segunda mãe, acompanhando cada passo meu e dos meus irmãos, desde a preocupação com os materiais escolares até o carinho e apoio em todas as fases da vida.

Aos meus colegas e amigos Rayara, Jackelyne, João Marcos, Vitor, Inácio, Rosimeire, Rafael, Marcos e Danilo, com os quais compartilhei diversos momentos de ansiedade, momentos de alegria e também as melhores conversas. Tenho certeza de que compartilhar minha trajetória na graduação com essas pessoas resultou em deixar o processo todo mais leve. E, em especial, agradeço a Rayara por estar cem por cento do meu período de graduação comigo, foi extremamente gentil ter me aturado por tanto tempo.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram para esse trabalho e me ajudaram, mesmo que de forma indireta, a chegar até aqui.

”Às vezes, a única coisa verdadeira em um jornal é a data.” (Luís Fernando Veríssimo,
Veríssimas, 2016)

Resumo

Com o avanço das tecnologias de comunicação, ficou fácil repassar informações, verdadeiras ou não. Isso traz enormes desafios para que somente informações corretas sejam mantidas em circulação. Neste trabalho, estuda-se como a informação se propaga em quatro modelos probabilísticos aqui propostos. Mais especificamente, utilizam-se processos de ramificação, que ajudam a entender como uma notícia pode crescer ou desaparecer com o tempo. A ideia é a seguinte: cada pessoa que recebe a informação pode repassá-la para outras, e essa dinâmica segue de forma aleatória. Analisam-se várias características importantes do processo. Por exemplo, o número de pessoas que recebem a notícia a partir de um único indivíduo, a altura da cascata (ou seja, até onde a informação chega), o tamanho total da cascata e a probabilidade de a informação parar de se espalhar. Esses modelos ajudam a identificar padrões que podem ser úteis para pensar em estratégias para controlar a disseminação de informações falsas.

Palavras-chave: Cascata de informação. Transmissão de informação. Probabilidade de extinção. Processos de ramificação.

Abstract

With the advancement of communication technologies, it has become easy to pass on information, whether true or not. This brings enormous challenges to ensuring that only correct information remains in circulation. This work studies how information spreads using four probabilistic models proposed in this study. More specifically, branching processes are used, which help to understand how a news item can grow or disappear over time. The idea is as follows: each person who receives the information can pass it on to others, and this dynamic follows a random pattern. Several important characteristics of the process are analyzed. For example, the number of people who receive the news from a single individual, the height of the cascade (i.e., how far the information reaches), the total size of the cascade, and the probability of the information ceasing to spread. These models help to identify patterns that can be useful for developing strategies to control the dissemination of false information.

Keywords: Information cascade. Information transmission. Extinction probability. Branching processes.

Lista de figuras

Figura 1 – Convergência da média simulada à $E[A]$ teórica no primeiro modelo - $M_1(1; 2; 0,49)$	39
Figura 2 – Convergência da média simulada à $E[A]$ teórica no segundo modelo - $M_2(1; 0,5; 2; 0,24)$	42
Figura 3 – Convergência da média simulada à $E[A]$ teórica no terceiro modelo - $M_3(8; 2; 1; 0,12)$	44
Figura 4 – Convergência da média simulada à $E[A]$ teórica no primeiro modelo - $M_4(4; 2; 0,12)$	47

Lista de tabelas

Tabela 1 – Principais resultados de $M_3(w, \theta, \lambda, p)$ para diferentes valores de p , onde $w = 8, \theta = 2$ e $\lambda = 1$	45
Tabela 2 – Principais resultados de $M_4(\tau, \lambda, p)$ para diferentes valores de p , onde $\lambda = 1$ e $\tau = 3$	48

Lista de abreviaturas e siglas

FGP	Função Geradora de Probabilidade
HI	Hipótese de Indução
PS	Princípio da Substituição
iid	Independente e Identicamente Distribuídas
Ind	Independentes
PR	Processo de Ramificação

Lista de símbolos

λ	Parâmetro de taxa do processo de poisson, representando as tentativas de transmissão.
θ	Parâmetro de taxa da distribuição exponencial, representando o tempo até a verificação.
ψ	Probabilidade de extinção do processo de ramificação.
$\Gamma(\cdot)$	A Função Gama.
A	Alcance do processo, definido no processo de ramificação como $T - 1$, onde T é o tempo de extinção.
C	Variável aleatória para o tamanho total do processo (número total de indivíduos).
W	Variável aleatória para o número de verificações até o bloqueio.
w	Parâmetro de forma da distribuição Gama (no modelo mais geral) usado quando o número de verificações é fixo.
m	Número esperado de descendentes diretos de um indivíduo, $E[X]$.
N_l	Número de tentativas de transmissão até o tempo l .
p	Probabilidade de um receptor acreditar na informação e se tornar um propagador.
p_0	Probabilidade de um indivíduo não gerar descendentes, i.e., $P(X = 0)$.
S_n	Soma de n variáveis aleatórias X_i independentes e identicamente distribuídas.
L	Variável aleatória para o tempo até a verificação de um indivíduo.
T	Tempo de extinção do processo de ramificação.
X	Variável aleatória para o número de descendentes diretos de um indivíduo.
$G_Y(s)$	Função Geradora de Probabilidade de uma variável aleatória Y .

Sumário

Lista de figuras	11
Introdução	17
1 Fundamentação Teórica	20
1.1 Função Geradora de Probabilidade	20
1.2 Processo de Ramificação	29
2 Descrição dos Modelos e Resultados	36
2.1 Modelo 1	36
2.1.1 Resultados	38
2.2 Modelo 2	39
2.2.1 Resultados	41
2.3 Modelo 3	42
2.3.1 Resultados	43
2.4 Modelo 4	45
2.4.1 Resultados	46
3 Provas	49
3.0.1 Modelo 1	49
3.0.1.1 Resultados Auxiliares	49
3.0.1.2 Prova do Teorema 13 (Probabilidade de Extinção)	53
3.0.1.3 Prova do Teorema 14 (Tamanho Esperado da Cascata)	53
3.0.1.4 Prova do Teorema 15 (Distribuição da Altura da Cascata)	53
3.0.1.5 Prova do Corolário 4 (Valor Esperado do Tempo de Extinção e Altura da Cascata)	55
3.0.2 Modelo 2	55
3.0.3 Resultados Auxiliares	55
3.0.3.1 Prova do Teorema 16 (Probabilidade de Extinção)	56
3.0.3.2 Prova do Teorema 17 (Tamanho Esperado da Cascata)	57
3.0.3.3 Prova do Teorema 18 (Distribuição da Altura da Cascata)	57
3.0.3.4 Prova do Corolário 5 (Valor Esperado da Altura da Cascata)	57
3.0.4 Modelo 3	57
3.0.5 Resultados Auxiliares	57
3.0.5.1 Prova do Teorema 19 (Probabilidade de Extinção)	60
3.0.5.2 Prova do Teorema 20 (Tamanho Esperado da Cascata)	60
3.0.5.3 Prova do Teorema 21 (Distribuição da Altura da Cascata)	60
3.0.5.4 Prova do Corolário 6 (Valor Esperado do Tempo de Extinção e Altura da Cascata)	61
3.0.6 Modelo 4	61

3.0.6.1	Resultados Auxiliares	61
3.0.6.2	Prova do Teorema 22 (Probabilidade de Extinção)	63
3.0.6.3	Prova do Teorema 23 (Tamanho Esperado da Cascata)	63
3.0.6.4	Prova do Teorema 24 (Distribuição da Altura da Cascata)	63
3.0.6.5	Prova do Corolário 7 (Valor Esperado da Altura da Cascata)	64
Conclusão	65
Referências	67
APÊNDICE A Fundamentos Matemáticos Auxiliares	68
APÊNDICE B Códigos	69

Introdução

Em razão do desenvolvimento e melhorias nas tecnologias de comunicação nas últimas décadas, informações que antes se disseminavam lentamente passaram a ser transmitidas em grande escala, e em um tempo surpreendentemente menor. Hoje, com a habituação das pessoas às redes sociais, é possível ser atualizado sobre a condição de um conflito geopolítico no Oriente Médio em um tempo recorde, e além disso, realizar facilmente campanhas de arrecadação financeira para ajudar famílias que tiveram suas vidas afetadas com desastres naturais, ou ainda, fomentar, organizar e divulgar manifestações para que indivíduos da sociedade vão às ruas protestar contra projetos de lei que não beneficiam grande parte da população. Exemplos como estes são frequentemente encontrados nas mídias e meios de comunicação, e isso resulta por possibilitar a difusão de informação.

Contudo, com essa capacidade rápida de transmissão também vieram os problemas de descontrole de repasse de informações falsas, que possibilitam maiores instabilidades políticas, golpes, violência, e até mesmo, a propagação de caos e desordem, como o mundo presenciou no ano de 2020, durante a pandemia. Nesse contexto, a transmissão de rumores em redes se configura como um tópico e um problema de interesse de diversas empresas de esferas públicas e privadas, assim como de governos no âmbito da geopolítica global. Medidas de combate e de controle são pensadas em diversas áreas do conhecimento, e vão desde conscientização social sobre a necessidade de checar dados e fontes do conteúdo recebido, a estratégias de controle mais específicas com uso de tecnologias de controle e impedimento.

Diante dessa perspectiva, para conter boatos e desinformação espalhados sem controle em uma rede, uma alternativa é recorrer a modelos de probabilidade e estatística como forma de entender o fenômeno e buscar soluções de contenção. Esse trabalho adota essa alternativa, e aqui propõe-se modelos de transmissão de informação fundamentados em processos estocásticos, especificamente tendo como base o processo de ramificação, que por sua vez, tem como alicerce teórico as funções geradoras de probabilidade (FGP).

Quanto ao problema, a principal questão da transmissão de informação é entender: como uma informação se propaga em rede? Isso permite entender o comportamento da propagação para buscar alternativas de contenção ou atenuação. Além disso, a transmissão de informação do trabalho não está sob qualquer propagação de rede específica, ou ainda, a contextos e fatores comportamentais dos indivíduos.

No geral, o objetivo desse trabalho é justamente entender essa dinâmica de propagação de informações em quatro diferentes modelos probabilísticos, baseados em processos de ramificação, onde uma informação falsa tem probabilidade de ser repassada de um indivíduo para outro, durante um período de tempo até que ele seja impedido de continuar a disseminação. Para isso, a

metodologia consiste em calcular para cada modelo algumas características matemáticas que os definem quanto à transmissão. Esses resultados matemáticos permitem responder aos objetivos específicos: é possível que a desinformação desapareça e deixe de ser transmitida? Se sim, qual a distância entre o transmissor inicial na rede e o último indivíduo contactado? Quantos indivíduos são contados ao longo do processo? E quantos são contactados a partir de um único indivíduo?

Neste trabalho, apesar de serem todos fundamentados em processo de ramificação, os modelos propostos trabalham com diferentes mecanismos para conter a disseminação. Os resultados que caracterizam a propagação são diferentes justamente pela forma como ocorre o impedimento à continuidade do repasse, sendo com tempo aleatório no modelo 1, com verificação aleatória no modelo 2, com verificação após w tentativas de transmissão no modelo 3, e posteriormente, com tempo determinístico no modelo 4. Assim, os modelos 1 e 4 são baseados no tempo de atividade, isto é, no tempo em que é possível fazer tentativas de transmissão. Os modelos 2 e 3, por sua vez, usam o controle de propagação com base na atividade, que se resume às tentativas de transmissão.

Assim, para cada modelo proposto, calcula-se: a distribuição do número de novos indivíduos atingidos a partir de um único indivíduo ativo; a distância entre o primeiro indivíduo e o último que recebeu a informação, chamada de cascata; o valor esperado do número total de indivíduos ao longo do tempo; e a probabilidade de extinção, ou seja, de a informação deixar de ser repassada.

Vale ressaltar que diversos estudos têm buscado compreender de forma mais profunda como boatos e informações falsas se espalham em estruturas de rede. Um dos trabalhos recentes nessa área é o de Gomez, Junior e Rodriguez (2024), que investiga a influência de indivíduos conscientes na contenção da desinformação. Os autores mostram que existe uma diferença importante entre apenas deixar de repassar um boato e adotar uma postura ativa, bloqueando sua circulação. Quando um grupo suficiente de pessoas passa a agir dessa forma ativa, a dinâmica do processo muda de maneira significativa, reduzindo o alcance da propagação e tornando o fenômeno mais controlável. Esse resultado reforça como pequenas mudanças comportamentais podem alterar o rumo da disseminação.

Além disso, Puerres, Junior e Rodriguez (2025) analisam como rumores se comportam em diferentes tipos de árvores, tanto regulares quanto estruturadas com hubs — nós altamente conectados que exercem grande influência na rede. O estudo identifica limiares críticos que determinam se o boato tende a se extinguir rapidamente ou se pode sobreviver por muitas gerações. Os autores também destacam que a distância entre esses hubs e o modo como eles interagem influenciam diretamente a persistência do rumor: quando estão muito próximos, a disseminação tende a se prolongar; quando estão distantes, o boato tem maior chance de desaparecer rapidamente.

Em outro estudo, os autores Junior, Rodriguez e Speroto (2021) aplicam o modelo clássico de Maki–Thompson a árvores aleatórias, explorando como o formato da rede interfere no com-

portamento do rumor. Nesse modelo, indivíduos podem estar em diferentes estados — ignorantes, propagadores ou contidos — e o processo evolui conforme eles interagem. O objetivo central do estudo é determinar o parâmetro crítico que separa a extinção quase certa da possibilidade de sobrevivência da informação. Os autores também obtêm estimativas para o alcance médio da propagação, contribuindo para compreender como estruturas aleatórias de rede podem favorecer ou restringir a disseminação de boatos.

Este trabalho, por sua vez, está estruturado em 3 seções fundamentais, além da Introdução e Conclusão, as quais estão dispostas da seguinte maneira: é primeiramente apresentada a introdução da monografia, em seguida a seção 1 apresenta a fundamentação teórica sobre as funções geradoras de probabilidade e sobre o processo de ramificação, as bases teóricas para os modelos construídos; na seção 2 é feita a descrição de cada um dos quatro modelos de transmissão de informação desta monografia, e após a descrição são colocados os resultados fundamentais para a modelagem da propagação. A seção 3 é dedicada à demonstração dos resultados da seção anterior, usando, além da seção 2 de descrição dos modelos, alguns resultados obtidos na seção 1 da fundamentação teórica. Por fim, está apresentada a conclusão do trabalho, e os demais elementos tais quais Referências e Apêndices.

1 Fundamentação Teórica

Nessa seção serão apresentados os principais resultados das funções de probabilidade e dos processos de ramificação, que são a base para a construção e análise dos modelos dispostos no trabalho. Essa seção baseia-se principalmente em Ross (1996) e Junior (2021), onde podem ser encontradas as demonstrações que foram realizadas nessa seção para fins de estudo.

1.1 Função Geradora de Probabilidade

As funções geradoras de probabilidade são fundamentais para a construção da teoria dos processos de ramificação. A seguir, serão apresentadas as definições e os principais resultados das funções geradoras de probabilidade.

Definição 1. *Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores nos inteiros não negativos. A função geradora de probabilidade $G(s)$ de X é definida por:*

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = \mathbb{E}(s^X).$$

Exemplo 1. *Seja X uma variável aleatória geométrica com parâmetro $p \in (0, 1)$. Isto é,*

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)p^{k-1}; k = 1, 2, 3, \dots$$

Então

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)p^{k-1} s^k = \frac{(1 - p)}{p} \sum_{k=1}^{\infty} (ps)^k = \frac{(1 - p)s}{1 - ps}, -1 \leq s \leq 1.$$

Definição 2. *Se a função geradora de probabilidade $G(s)$ é da forma*

$$G(s) = 1 - \frac{b}{1 - c} + \frac{bs}{1 - cs}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

onde $0 \leq b \leq 1, 0 \leq c < 1$ e $b + c \leq 1$, se diz que $G(s)$ é uma função geradora de probabilidade fracional linear.

Proposição 1. *Seja X uma variável aleatória discreta inteira não negativa. Então*

1. $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$.
2. Suponha $\mathbb{P}(X < \infty) = 1$. Temos $G_X(1) = 1$.
3. $|G_X(s)| \leq 1 \quad \forall s \in (-1, 1)$.

Demonstração.

1. $G_X(0) = \sum_k 0^k p_k = p_0 = \mathbb{P}(X = 0).$

2. Temos

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k p_k = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X < \infty) = 1.$$

- 3.

$$|G_X(s)| = |\mathbb{E}(s^X)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s^k p_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \quad \forall s \in (-1, 1).$$

Proposição 2. *Seja X uma variável aleatória discreta inteira não negativa. Então*

1. $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$

2. $G^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1))$

3. $\frac{G^{(k)}(0)}{k!} = \mathbb{P}(X = k)$

4. $G^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n s^{n-k}, \quad |s| < 1.$

Demonstração.

1. $G'_X(1) = \mathbb{E}(X).$

$$G'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-1)!} \mathbb{P}(X = n) \cdot 1^{(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(X).$$

2. $G^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1)).$

$$\begin{aligned} G^{(k)}(1) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{P}(X = n) \cdot 1^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \mathbb{P}(X = n) \\ &= \mathbb{E}(h(X)), \text{ onde } h(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1). \end{aligned}$$

$$3. \frac{G^{(k)}(0)}{k!} = \mathbb{P}(X = k).$$

$$\begin{aligned} G^{(k)}(s) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{P}(X = n) s^{n-k} \\ G^{(k)}(0) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{P}(X = n) \cdot 0^{n-k} \\ &= \frac{k!}{(k-k)!} \mathbb{P}(X = k) \cdot 0^0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{P}(X = n) \cdot 0^{n-k} \\ &= \frac{k!}{0!} \mathbb{P}(X = k) \cdot 1 + 0 \\ &= k! \mathbb{P}(X = k). \end{aligned}$$

Isolando $\mathbb{P}(X = k)$, temos: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$.

$$4. G^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n s^{n-k}, \quad |s| < 1. \text{ Demonstração por Indução:}$$

- Base da Indução ($k = 0$): $G^{(0)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-0)!} p_n s^{n-0} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = G(s)$.

- Hipótese de Indução: Para algum $k \geq 0$, a fórmula é válida:

$$G^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n s^{n-k}.$$

- Passo de Indução ($k + 1$): O objetivo é mostrar que a fórmula é válida para $k + 1$.

$$G^{(k+1)}(s) = \frac{d}{ds} (G^{(k)}(s))$$

Pela hipótese de indução, podemos derivar a série termo a termo, o que é válido para $|s| < 1$ pelo Teorema da Derivada de uma Série de Potências.

$$\begin{aligned} G^{(k+1)}(s) &= \frac{d}{ds} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n s^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n \frac{d}{ds} (s^{n-k}) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n (n-k) s^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n (n-k) s^{n-(k+1)} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-(k+1))!} p_n s^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

Como o termo para $n = k$ na soma é igual a zero, pois $(n - k) = 0$, então a soma começa em $n = k + 1$, portanto, a proposição é demonstrada.

Exemplo 2. Seja $G(s) = e^{\lambda(s-1)}$, $s \in [0; 1]$. Então, $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Sabe-se que a função geradora de probabilidade é $G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$.

Tem-se :

$$G^{(k)}(0) = k! \mathbb{P}(X = k).$$

Para encontrar a k -ésima derivada de $G(s)$:

$$G'(s) = (e^{\lambda(s-1)})' = \lambda e^{\lambda(s-1)}$$

$$G''(s) = (\lambda e^{\lambda(s-1)})' = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$$

$$G'''(s) = (\lambda^2 e^{\lambda(s-1)})' = \lambda^3 e^{\lambda(s-1)}.$$

Assim, suponha que a k -ésima derivada é:

$$G^{(k)}(s) = \lambda^k e^{\lambda(s-1)}.$$

Para provar isso, usando indução:

$$G^{(k+1)}(s) = \frac{\partial}{\partial s} (G^{(k)}(s)) = \frac{\partial}{\partial s} (\lambda^k e^{\lambda(s-1)}) = \lambda^k \cdot \lambda e^{\lambda(s-1)} = \lambda^{k+1} e^{\lambda(s-1)}.$$

O que confirma nossa hipótese.

Agora, avalia-se a k -ésima derivada em $s = 0$:

$$G^{(k)}(0) = \lambda^k e^{\lambda(0-1)} = \lambda^k e^{-\lambda}.$$

Finalmente, substituímos este resultado na equação (1) para obter a função de probabilidade $\mathbb{P}(X = k)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Teorema 1 (Unicidade da função geradora de probabilidade). *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias assumindo valores inteiros não negativos, e sejam $G_X(s)$ e $G_Y(s)$ suas respectivas funções geradoras de probabilidade:*

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k, \quad G_Y(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) s^k.$$

Suponha que exista um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo o ponto $s = 0$, tal que $G_X(s) = G_Y(s)$ para todo $s \in I$. Então:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0.$$

Ou seja, as distribuições de X e Y coincidem.

Proposição 3. *Seja a função geradora de probabilidade fracional linear:*

$$G(s) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

onde $0 \leq b \leq 1, 0 \leq c < 1$ e $b + c \leq 1$. Então, $p_k = \begin{cases} \frac{1-b}{1-c}, & \text{se } k = 0, \\ bc^{k-1}, & \text{se } k = 1, 2, \dots \end{cases}$

Demonstração.

Caso 1: Para $k = 0$: A probabilidade para $k = 0$ é obtida a partir da função geradora de probabilidade $G(s)$, utilizando a propriedade $\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$.

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{G^{(0)}(0)}{0!} = \frac{G(0)}{1} = G(0).$$

Substituindo $s = 0$ na expressão de $G(s)$, temos:

$$G(0) = \left(1 - \frac{b}{1-c} + \frac{b \cdot 0}{1-c \cdot 0} \right) = 1 - \frac{b}{1-c}.$$

Portanto, a probabilidade para $k = 0$ é:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{b}{1-c}.$$

Caso 2: Para $k = 1, 2, \dots$. As primeiras derivadas da função geradora de probabilidade são calculadas para identificar um padrão geral.

$$G'(s) = b(-1)(1-cs)^{-2}(-c) = \frac{bc}{(1-cs)^2}$$

$$G''(s) = bc(-2)(1-cs)^{-3}(-c) = 2bc^2(1-cs)^{-3} = \frac{2bc^2}{(1-cs)^3}$$

$$G'''(s) = 2bc^2(-3)(1-cs)^{-4}(-c) = 6bc^3(1-cs)^{-4} = \frac{2 \cdot 3bc^3}{(1-cs)^4}$$

$$G^{(4)}(s) = 6bc^3(-4)(1-cs)^{-5}(-c) = 24bc^4(1-cs)^{-5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4bc^4}{(1-cs)^5}$$

Com base nesse padrão, a hipótese de indução (HI) para a k -ésima derivada é:

$$G^{(k)}(s) = \frac{k!bc^{k-1}}{(1-cs)^{k+1}}.$$

Para provar a hipótese, calcula-se a $(k+1)$ -ésima derivada:

$$\begin{aligned} G^{(k+1)}(s) &= \frac{\partial}{\partial s} (G^{(k)}(s)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k!bc^{k-1}}{(1-cs)^{k+1}} \right) \\ &= k!bc^{k-1} \cdot \frac{\partial}{\partial s} ((1-cs)^{-(k+1)}) \\ &= k!bc^{k-1}[-(k+1)](1-cs)^{-(k+2)}(-c) \\ &= k!bc^{k-1}(k+1)c(1-cs)^{-(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)!bc^k}{(1-cs)^{k+2}}, \end{aligned}$$

o que confirma a hipótese de indução.

Avaliando a k -ésima derivada em $s = 0$:

$$G^{(k)}(0) = \frac{k!bc^{k-1}}{(1-c \cdot 0)^{k+1}} = k!bc^{k-1}.$$

Substituindo na fórmula de probabilidade, temos:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!} = \frac{k!bc^{k-1}}{k!} = bc^{k-1}.$$

Portanto, a distribuição de probabilidade final é:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 1 - \frac{b}{1-c}, & \text{se } k = 0, \\ bc^{k-1}, & \text{se } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Teorema 2. *Sejam $\{X_i\}_{i=1}^n$ variáveis aleatórias inteiras não negativas independentes com funções geradoras de probabilidade $\{G_i(s)\}_{i=1}^n$, então a soma $S = \sum_{i=1}^n X_i$ tem função geradora de probabilidade*

$$G_S(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s).$$

Demonstração

$$G_S(s) = \mathbb{E}(s^S) = \mathbb{E}\left(s^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n s^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(s^{X_i}).$$

Note que, pela independência das variáveis X_1, \dots, X_n e considerando $\mathbb{E}(s^{X_i}) = G_i(s)$, segue que $G_S(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$.

Teorema 3. *Seja $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com valores nos inteiros não negativos, e seja N outra variável aleatória independente da sequência $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ e com valores nos inteiros não negativos. A variável aleatória*

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

tem função geradora de probabilidade

$$G_S(s) = G_N(G(s))$$

onde $G(s) = G_{X_i}(s)$.

Demonstração

$$\begin{aligned}
G_S(s) &= \mathbb{E}(s^S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^S|N)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^S|N=n)\mathbb{P}(N=n) \\
G_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^{X_1+X_2+\dots+X_n}|N=n)\mathbb{P}(N=n) \quad (\text{Pelo Princípio da Substituição}) \\
G_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^{X_1+X_2+\dots+X_n})\mathbb{P}(N=n) \quad (\text{Por independência entre } N \text{ e cada } X_i) \\
G_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s)\mathbb{P}(N=n) \\
G_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (G(s))^n\mathbb{P}(N=n) = G_N(G(s)).
\end{aligned}$$

Teorema 4. *Suponha que $G(s)$ é uma função geradora de probabilidade fracional linear, isto é, da forma*

$$G(s) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

onde $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c < 1$ e $b+c \leq 1$. Se $m := G'(1) \neq 1$, então, a n -ésima composição de $G(s)$, representada por $G_n(s)$, é

$$G_n(s) = 1 - \frac{m^n(s_0 - 1)}{s_0 - m^n} + \frac{m^n \left(\frac{s_0 - 1}{s_0 - m^n} \right)^2 s}{1 - \left(\frac{1 - m^n}{s_0 - m^n} \right) s},$$

onde

$$s_0 = \frac{1 - b - c}{c(1 - c)}$$

é a solução não negativa da equação $G(s) = s$ diferente de 1.

Por outro lado, se $G(s)$ é uma função geradora de probabilidade linear fracional, tal que $m := G'(1) = 1$, então,

$$G_n(s) = \frac{nc - ((n+1)c - 1)s}{1 + (n-1)c - ncs}.$$

Demonstração.

Caso $m = 1$

Suponha que a n -ésima composição $G_n(s)$ seja

$$G_n(s) = \frac{nc - ((n+1)c - 1)s}{1 + (n-1)c - ncs}. \quad (1.1)$$

A prova é feita por indução.

Base da indução: $n = 1$

$$G_1(s) = G(s) = \frac{c + (1 - 2c)s}{1 - cs}.$$

Comparando com a fórmula (1.1) para $n = 1$:

$$G_1(s) = \frac{1 \cdot c - ((1+1)c - 1)s}{1 + (1-1)c - 1 \cdot cs} = \frac{c - (2c-1)s}{1 - cs} = \frac{c + (1-2c)s}{1 - cs}.$$

Portanto, a base da indução é verdadeira.

Hipótese de indução: Suponha que para algum $n = k$,

$$G_k(s) = \frac{kc - ((k+1)c - 1)s}{1 + (k-1)c - kcs}.$$

Passo de indução: Mostrar que a fórmula vale para $n = k + 1$.

$$G_{k+1}(s) = G(G_k(s)) = \frac{c + (1-2c)G_k(s)}{1 - cG_k(s)}.$$

Substituindo $G_k(s)$:

$$G_{k+1}(s) = \frac{c + (1-2c) \frac{kc - ((k+1)c - 1)s}{1 + (k-1)c - kcs}}{1 - c \frac{kc - ((k+1)c - 1)s}{1 + (k-1)c - kcs}}.$$

Colocando denominador comum em cima e embaixo:

$$G_{k+1}(s) = \frac{c(1 + (k-1)c - kcs) + (1-2c)(kc - ((k+1)c - 1)s)}{(1 + (k-1)c - kcs) - c(kc - ((k+1)c - 1)s)}.$$

Simplificando numerador e denominador:

$$\begin{aligned} \text{Numerador: } & c + (k-1)c^2 - kc^2s + kc - 2kc^2 - ((k+1)c - 1)s + 2c((k+1)c - 1)s \\ & = (k+1)c - ((k+2)c - 1)s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Denominador: } & 1 + (k-1)c - kcs - kc^2 + c((k+1)c - 1)s \\ & = 1 + kc - (k+1)cs. \end{aligned}$$

Portanto:

$$G_{k+1}(s) = \frac{(k+1)c - ((k+2)c - 1)s}{1 + kc - (k+1)cs}.$$

Isso coincide com a fórmula (1.1) para $n = k + 1$, concluindo o passo de indução.

Conclusão: Por indução matemática, a fórmula

$$G_n(s) = \frac{nc - ((n+1)c - 1)s}{1 + (n-1)c - ncs}$$

vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso $m \neq 1$

A prova será feita por etapas.

Etapa 1: Fórmula geral para o quociente

Começamos com

$$G(s) - G(u) = \left(1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}\right) - \left(1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bu}{1-cu}\right) = \frac{bs}{1-cs} - \frac{bu}{1-cu}.$$

$$\frac{bs}{1-cs} - \frac{bu}{1-cu} = \frac{bs(1-cu) - bu(1-cs)}{(1-cs)(1-cu)} = \frac{b(s-u)}{(1-cs)(1-cu)}.$$

De maneira análoga:

$$G(s) - G(v) = \frac{b(s-v)}{(1-cs)(1-cv)}.$$

Portanto:

$$\frac{G(s) - G(u)}{G(s) - G(v)} = \frac{(s-u)(1-cv)}{(s-v)(1-cu)}.$$

Etapa 2: Escolha $u = 1$ e $v = s_0$

Substituindo:

$$\frac{G(s) - G(s_0)}{G(s) - G(1)} = \frac{(s-1)(1-cs_0)}{(s-s_0)(1-c)}.$$

Calculamos

$$1 - cs_0 = 1 - c \cdot \frac{1-b-c}{c(1-c)} = 1 - \frac{1-b-c}{1-c} = \frac{b}{1-c}.$$

Logo,

$$\frac{1-c}{1-cs_0} = \frac{1-c}{b/(1-c)} = \frac{(1-c)^2}{b} = \frac{1}{m}.$$

Portanto:

$$\frac{G(s) - G(s_0)}{G(s) - G(1)} = \frac{s-s_0}{m(s-1)}.$$

Etapa 3: Generalização para a n -ésima composição

Tem-se que $G(s_0) = s_0$ e

$$G_n(s) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_n(s).$$

Então, por indução:

$$\frac{G_n(s) - s_0}{G_n(s) - 1} = \frac{1}{m^n} \cdot \frac{s-s_0}{s-1}.$$

Etapa 4: Isolando $G_n(s)$

A partir de

$$\frac{G_n(s) - s_0}{G_n(s) - 1} = \frac{1}{m^n} \cdot \frac{s - s_0}{s - 1},$$

isolando $G_n(s)$ obtém-se a forma final:

$$G_n(s) = 1 - \frac{m^n(s_0 - 1)}{s_0 - m^n} + \frac{m^n \left(\frac{s_0 - 1}{s_0 - m^n} \right)^2 s}{1 - \left(\frac{1 - m^n}{s_0 - m^n} \right) s}.$$

1.2 Processo de Ramificação

Um processo de ramificação é um modelo probabilístico usado para descrever como uma população evolui ao longo do tempo, onde cada indivíduo da geração atual pode dar origem a novos indivíduos na próxima geração. Ele começa com uma população inicial, geralmente de um único indivíduo. Cada indivíduo age de forma independente e gera um número aleatório de descendentes, seguindo uma mesma regra de reprodução. A cada etapa (ou geração), os descendentes tornam-se os novos "pais" e o processo se repete. Esse tipo de modelo é usado para representar fenômenos como a propagação de espécies, ideias, vírus ou informações. O processo pode crescer, diminuir ou até se extinguir com o tempo. A aleatoriedade torna seu comportamento imprevisível em casos individuais, mas analisável em termos de probabilidades.

Definição 3. *Seja $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de variáveis aleatórias inteiras não negativas. Assuma $Z_0 = 1$ e defina uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas $\{X_{n,i}\}_{n,i \geq 1}$ tais que*

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}.$$

O processo $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ é chamado processo de ramificação. A variável aleatória Z_n é o número de indivíduos na n -ésima geração e $X_{n,i}$ representa o número de filhos do i -ésimo indivíduo da n -ésima geração.

Teorema 5. *Seja $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação tal que $Z_0 = 1$. A função geradora de probabilidade de Z_n é a n -ésima composição de G , onde G é a função geradora de probabilidade de Z_1 .*

Demonstração.

Seja $G_n(s)$ a função geradora de probabilidade de Z_n com $n = 0, 1, \dots$. Suponha $Z_n = k$, então $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ tem função geradora $[G(s)]^k$. De fato,

$$\mathbb{E} \left(s^{Z_{n+1}} | Z_n = k \right) = \mathbb{E} \left(s^{X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,k}} | Z_n = k \right)$$

$$\stackrel{PS}{=} \mathbb{E} \left(s^{X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,k}} \right) \stackrel{Ind}{=} \mathbb{E} \left(s^{X_{n,1}} \right) \dots \mathbb{E} \left(s^{X_{n,k}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=1}^k \mathbb{E}(s^{X_{n,i}}) \right) \stackrel{Ind}{=} \prod_{i=1}^k \mathbb{E}(s^{X_{n,i}}) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{E}(s^X) = [G(s)]^k.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$G_{n+1}(s) = \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}} | Z_n = k) \mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} [G(s)]^k \mathbb{P}(Z_n = k).$$

Isto é,

$$G_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} [G(s)]^k \mathbb{P}(Z_n = k) = G_n(G(s)).$$

A seguir, usando o princípio da indução o resultado é obtido. Primeiro note que $G_0(s) = s\mathbb{P}(Z_0 = 1) = s = G_0(s)$. Suponha que $G_n(s) = G_n(s)$ seja verdadeira, então,

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) = G_n(s) = G_{n+1}(s).$$

Teorema 6. (HARRIS, 1963) *Seja $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação tal que $Z_0 = 1$. Suponha que $m = \mathbb{E}(Z_1) < \infty$ e $\sigma^2 = \text{Var}(Z_1) < \infty$. Então*

$$\mathbb{E}(Z_n) = m^n, \quad \text{Var}(Z_n) = \begin{cases} n\sigma^2, & m = 1, \\ \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & m \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração.

Tem-se $m = \mathbb{E}(Z_1)$. Suponha que $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$. Agora

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_{n+1} | Z_n)) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \middle| Z_n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \middle| Z_n = k \right) \mathbb{P}(Z_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^k X_{n,i} \right) \mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{E}(Z_1) \mathbb{P}(Z_n = k) \\
&= \mathbb{E}(Z_1) \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{E}(Z_1) \mathbb{E}(Z_n) = mm^n = m^{n+1}.
\end{aligned}$$

Segunda parte da prova omitida.

Teorema 7. (ROSS, 1996)

Seja $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação tal que $Z_0 = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(\{\omega | Z_n(\omega) = 0 \text{ para algum } n \geq 0\}) = \psi,$$

onde ψ é a menor raiz não negativa da equação $s = G(s)$. Além disso, $\psi = 1$ se $m \leq 1$ e $\psi < 1$ se $m > 1$ sempre que $0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1$.

Demonstração omitida.

Teorema 8. (DWASS, 1969) *Seja $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação com número total de descendentes Y_∞ . Então, se $m < 1$, $p(0) > 0$ e $Z_0 = 1$,*

$$\mathbb{P}(Y_\infty = k) = \frac{1}{k} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = k - 1),$$

onde X_1, X_2, \dots, X_k são k variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas como Z_1 .

Demonstração omitida.

Teorema 9. (HARRIS, 1963) *Seja $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação com número total de descendentes Y_∞ . Então, se $m < 1$, $p(0) > 0$ e $Z_0 = 1$,*

$$\mathbb{E}(Y_\infty) = \frac{1}{1 - m}.$$

Por outro lado, se $m > 1$, $p(0) > 0$ e $Z_0 = 1$,

$$\mathbb{E}(Y_\infty | V^c) = \frac{1}{1 - G'_{Z_1}(\psi)},$$

onde V é o evento onde o processo não se extingue.

Demonstração omitida.

Teorema 10. (AGRESTI, 1974a) *Seja $T(b, c)$ o tempo de extinção do processo $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ tal que $Z_0 = 1$, cuja função geradora de probabilidade é fracional linear, ou seja,*

$$G(s) = 1 - \frac{b}{1 - c} + \frac{bs}{1 - cs}$$

com $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$ e $b + c \leq 1$. Escreva $G'(1) = m$. Então,

1. Se $m \neq 1$, então $\mathbb{P}(T(b, c) \leq n) = \frac{s_0(1 - m^n)}{s_0 - m^n}$, $n \geq 1$. Sendo $s_0 = \frac{1 - b - c}{c(1 - c)}$.
2. Se $m = 1$, então $\mathbb{P}(T(b, c) \leq n) = \frac{nc}{1 + (n - 1)c}$, $n \geq 1$.

Demonstração omitida.

Corolário 1 (Valor Esperado do Tempo de Extinção e Altura da Cascata). *Seja T o tempo de extinção como $T(b, c)$, e seja $A = T - 1$ a profundidade do processo. Os valores esperados são:*

1. Se $m \geq 1$, o tempo esperado de extinção esperada é infinito:

$$\mathbb{E}[T] = \infty.$$

E, conseqüentemente, $\mathbb{E}[A] = \infty$.

2. Se $m < 1$, o valor esperado é finito, dado pela série:

$$\mathbb{E}[T] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n(s_0 - 1)}{s_0 - m^n}.$$

E, conseqüentemente, $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[T] - 1$.

Observação 1. Na formulação teórica geral dos processos de ramificação (PR), o foco frequentemente é sobre propriedades fundamentais, tais como a probabilidade de extinção do processo ou o número total de descendentes gerados. Neste contexto mais amplo, uma noção de "profundidade" ou "altura" da propagação nem sempre possui uma interpretação estatística significativa ou de interesse direto.

Contudo, para a análise de modelos específicos, como os de propagação discreta de informação abordados neste trabalho, é necessária uma métrica que capture essa dimensão. Define-se, assim, o conceito de alcance A , dado por $A = T - 1$.

Portanto, o alcance A não é uma característica universal da teoria de PR. Ele passa a ter sentido e relevância apenas em contextos nos quais o processo pode ser claramente interpretado como ocorrendo por gerações ou etapas sucessivas, como é precisamente o caso da transmissão de informação em uma rede. Dessa forma, nas seções subsequentes desta monografia, o uso da variável A e de sua esperança $E(A)$ deve ser entendido como restrito a esse tipo de processo.

Demonstração. Tem-se que $\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(T \leq n))$. Há dois casos para m .

1. Caso $m \neq 1$:

Para $n \geq 1$, o termo da soma é:

$$1 - \mathbb{P}(T \leq n) = 1 - \frac{s_0(1 - m^n)}{s_0 - m^n} = \frac{(s_0 - m^n) - (s_0 - s_0m^n)}{s_0 - m^n} = \frac{m^n(s_0 - 1)}{s_0 - m^n}$$

A esperança é dada pela série $\mathbb{E}[T] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n(s_0-1)}{s_0-m^n}$. A convergência da série depende de m :

- Se $m > 1$, o termo geral da série não converge para zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^n(s_0 - 1)}{s_0 - m^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 - 1}{\frac{s_0}{m^n} - 1} = \frac{s_0 - 1}{-1} = 1 - s_0$$

Como $m > 1$ implica $s_0 < 1$, o limite $1 - s_0$ é positivo. Pelo critério do termo geral, a série diverge e $\mathbb{E}[T] = \infty$.

- Se $m < 1$, (o que implica $0 \leq m < 1$), o termo m^n tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Assim, o termo geral da série se comporta como $\frac{s_0-1}{s_0}m^n$. Por comparação com a série geométrica $\sum m^n$ (que converge pois $|m| < 1$), a série para a esperança também converge. Logo, $\mathbb{E}[T]$ é finito.

2. Caso $m = 1$:

Para $n \geq 1$, o termo da soma é:

$$1 - \mathbb{P}(T \leq n) = 1 - \frac{nc}{1 + (n-1)c} = \frac{1 + (n-1)c - nc}{1 + (n-1)c} = \frac{1-c}{1 + (n-1)c}$$

A esperança é $\mathbb{E}[T] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-c}{1+(n-1)c} = 1 + (1-c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-c+nc}$. Para n grande, o termo $\frac{1}{1-c+nc}$ se comporta como $\frac{1}{nc}$, que é um múltiplo do termo da série harmônica. Como a série harmônica diverge, a série para $\mathbb{E}[T]$ também diverge. Logo, $\mathbb{E}[T] = \infty$.

A análise segue o raciocínio apresentado por Stewart (2013, p. 640–641).

□

Teorema 11. (HWANG; WANG, 1979)

Seja $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ um processo de ramificação subcrítico, isto é, com $m < 1$ tal que $Z_0 = 1$. Seja $G(s)$ a função geradora de probabilidade de Z_1 e $m = G'(1)$. Seja $T = \min\{n \geq 0, Z_n = 0\}$, o tempo de extinção do processo. Suponha que

$$h(s) = G'(1)G''(s) - G'(s)G''(1) \geq 0 \quad \text{para todo } s \in [0,1].$$

Então

$$1 - \frac{m^n(s_l - 1)}{s_l - m^n} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq 1 - \frac{m^n(s_u - 1)}{s_u - m^n},$$

onde

$$s_u = \frac{1 - m(1 - c_u)}{c_u} \quad e \quad s_l = \frac{1 - m(1 - c_l)}{c_l},$$

$$c_u = \frac{G'(1) + G(0) - 1}{G'(1)} \quad e \quad c_l = \frac{G''(1)}{2G'(1) + G''(1)} \quad \text{com } G''(1) < \infty.$$

Demonstração omitida.

Corolário 2 (Limites para o Valor Esperado do Tempo de Extinção). *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior para o processo subcrítico $\{Z_n\}$, a esperança do tempo de extinção $\mathbb{E}[T]$ e a profundidade do processo $\mathbb{E}[A] = T - 1$ são limitadas pelas seguintes desigualdades:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n(s_u - 1)}{s_u - m^n} \leq \mathbb{E}[T] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n(s_l - 1)}{s_l - m^n},$$

e, conseqüentemente, $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[T] - 1$.

Demonstração. A esperança do tempo de extinção é dada por $E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)$. Sejam LI e LS as cotas de limite inferior e superior de $\mathbb{P}(T \leq n)$ conforme o teorema 11. Então,

$$\text{LI} = 1 - \frac{m^n(s_l - 1)}{s_l - m^n} \quad e \quad \text{LS} = 1 - \frac{m^n(s_u - 1)}{s_u - m^n}.$$

Assim, tem-se $LI \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq LS$. Como $\mathbb{P}(T > n) = 1 - \mathbb{P}(T \leq n)$ tem-se que:

$$1 - LS \leq \mathbb{P}(T > n) \leq 1 - LI$$

Substituindo as expressões de LI e LS, tem-se:

$$\frac{m^n(s_u - 1)}{s_u - m^n} \leq \mathbb{P}(T > n) \leq \frac{m^n(s_l - 1)}{s_l - m^n}.$$

Finalmente, somando todos os termos de $n = 0$ a ∞ conclui-se que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - LS) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - LI).$$

E segue a prova do corolário.

Consequentemente, $E[A]$ é dada por $E[A] = E[T] - 1$. □

Teorema 12. (AGRESTI, 1974b) *Seja $G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$ a FGP de uma variável aleatória com média $m \leq 1$ e $g''(1) < \infty$. Seja $D = \max[2, m/(p_0 + m - 1)]$. Assim,*

$$\begin{aligned} & \frac{[1 + D(1 - m)](1 - m^n)}{1 + D(1 - m) - m^n} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \\ & \leq \frac{[1 + (m(1 - m)/g''(1))](1 - m^n)}{1 + (m(1 - m)/g''(1)) - m^n}, \quad n \geq 1, m < 1; \\ & \frac{n}{n + D} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq \frac{n}{n + [g''(1)]^{-1}}, \quad n \geq 1, m = 1; \end{aligned}$$

Demonstração omitida.

Corolário 3 (Limites para o Valor Esperado do Tempo de Extinção e Profundidade). *Sob as hipóteses do teorema 12, a esperança do tempo de extinção $\mathbb{E}[T]$ e a profundidade do processo $\mathbb{E}[A]$, com $A = T - 1$, se comportam da seguinte maneira:*

1. *Se $m < 1$ (caso subcrítico), as esperanças são finitas e limitadas por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\left(1 + \frac{m(1-m)}{g''(1)}\right) (1 - m^n)}{1 + \frac{m(1-m)}{g''(1)} - m^n} \right) \leq \mathbb{E}[T] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(1 + D(1 - m)) (1 - m^n)}{1 + D(1 - m) - m^n} \right),$$

e, consequentemente, $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[T] - 1$.

2. *Se $m = 1$ (caso crítico), as esperanças do tempo de extinção e da profundidade do processo são infinitas:*

$$\mathbb{E}[T] = \infty \quad e \quad \mathbb{E}[A] = \infty.$$

Demonstração. Caso 1: $m < 1$ (Subcrítico)

Seja LI e LS definido a partir das expressões do Teorema 12 como:

$$\text{LI} = \frac{(1 + D(1 - m))(1 - m^n)}{1 + D(1 - m) - m^n} \quad \text{e} \quad \text{LS} = \frac{\left(1 + \frac{m(1-m)}{g''(1)}\right)(1 - m^n)}{1 + \frac{m(1-m)}{g''(1)} - m^n}.$$

A partir da desigualdade $\text{LI} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq \text{LS}$, os limites para a probabilidade de sobrevivência $\mathbb{P}(T > n)$ são:

$$1 - \text{LS} \leq \mathbb{P}(T > n) \leq 1 - \text{LI}.$$

Usando a definição $E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \text{LS}) \leq E[T] \leq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \text{LI})$$

Ao substituir as expressões de LI e LS nesta desigualdade resulta na primeira parte do corolário.

Caso 2: $m = 1$ (Crítico)

Para $n \geq 1$, o limite inferior para $\mathbb{P}(T > n)$ de acordo com o Teorema 12 é:

$$\mathbb{P}(T > n) \geq 1 - \frac{n}{n + [g''(1)]^{-1}} = \frac{[g''(1)]^{-1}}{n + [g''(1)]^{-1}}$$

Consequentemente, a esperança $E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)$ também é limitada inferiormente:

$$E[T] \geq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[g''(1)]^{-1}}{n + [g''(1)]^{-1}}$$

A série no limite inferior diverge por comparação com a série harmônica, o que implica que a própria cota inferior é infinita, de acordo com Stewart (2013, p. 640–641). Portanto, $E[T] = \infty$.

□

2 Descrição dos Modelos e Resultados

Um processo de disseminação de notícias falsas em um grafo é um modelo que representa como uma informação enganosa se espalha entre indivíduos conectados em uma rede. Nesse contexto, os nós do grafo representam as pessoas (ou contas, dispositivos etc.), e as arestas representam as conexões entre elas (como amigos em redes sociais, contatos em aplicativos de mensagens ou vínculos de comunicação em geral).

O processo começa quando uma pessoa (nó inicial) compartilha uma notícia falsa. Os vizinhos desse nó, dependendo de certos fatores como confiança, propensão a acreditar ou repassar a informação, podem também decidir compartilhá-la. Isso gera um efeito de "cascata", em que a notícia vai passando de pessoa para pessoa ao longo da rede. Esse tipo de dinâmica é muitas vezes modelado de forma probabilística, para refletir a incerteza do comportamento humano.

Dois conceitos importantes nesse contexto são a altura da cascata e o tamanho da cascata. A altura da cascata se refere ao número máximo de "saltos" ou gerações da informação, isto é, o comprimento do caminho mais longo desde o nó que iniciou a propagação até o último nó que recebeu a notícia. Já o tamanho da cascata corresponde ao número total de indivíduos que foram expostos à notícia falsa (ou seja, todos os nós que, em algum momento, receberam ou repassaram a informação). Ambos os conceitos ajudam a entender o alcance e a profundidade da disseminação.

Definição 4. (*Altura da Cascata*) Considere um processo de transmissão de uma informação numa árvore \mathcal{T} . Seja \mathcal{O} o vértice onde a informação começa a ser transmitida. Definimos a altura da cascata A como

$$A = \max_{v \in \mathcal{I}} d(\mathcal{O}, v),$$

onde \mathcal{I} é o conjunto dos vértices que se transformaram em transmissores ao longo do processo.

Definição 5. (*Tamanho da Cascata*) Considere um processo de transmissão de uma informação em uma árvore \mathcal{T} . Seja \mathcal{O} o vértice onde a informação começa a ser transmitida. Definimos o tamanho da cascata C como

$$C = |\mathcal{I}|,$$

onde \mathcal{I} é o conjunto dos vértices que se transformaram em transmissores ao longo do processo.

2.1 Modelo 1

Considere um processo iniciado por um único indivíduo que deseja propagar uma informação falsa. Esse indivíduo tenta transmitir a informação continuamente ao longo do tempo,

mas está sujeito a uma verificação aleatória realizada por um mecanismo externo. Caso seja verificado, ele é impedido de continuar disseminando a informação.

Os indivíduos que acreditam na informação falsa passam a se comportar da mesma forma que o inicial, dando origem a um processo de ramificação. Esse processo (modelo) é denotado neste trabalho por $M_1(\theta, \lambda, p)$.

Os parâmetros do modelo são:

- $\lambda > 0$: taxa do processo de Poisson que modela as tentativas de transmissão realizadas por cada indivíduo.
- $\theta > 0$: parâmetro da distribuição exponencial que representa o tempo até que um indivíduo seja verificado.
- $p \in [0, 1]$: probabilidade de que um receptor acredite na informação falsa e decida propagá-la.

As regras do processo são as seguintes:

- O processo começa com um único indivíduo ativo.
- Cada indivíduo:
 - Permanece ativo por um tempo aleatório $L \sim \text{Exp}(\theta)$, após o qual é verificado e deixa de transmitir.
 - Durante esse tempo, tenta transmitir a informação a outros indivíduos de acordo com um processo de Poisson com taxa λ .
 - Cada tentativa de transmissão alcança um novo receptor, que reage da seguinte forma:
 - * Com probabilidade p , o receptor acredita na informação e torna-se um novo indivíduo ativo, seguindo as mesmas regras.
 - * Com probabilidade $1 - p$, o receptor não acredita, encerrando a propagação naquela ramificação.

O processo $M_1(\theta, \lambda, p)$ pode ser visto como um processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, associando o número de descendentes diretos de um indivíduo com o número de pessoas que recebem e acreditam na informação passada por uma dada pessoa. Nesse caso, os conceitos de tamanho da cascata e altura da cascata podem ser reescritos em termos de um processo de ramificação.

Definição 6 (Tamanho da Cascata). *A variável aleatória C , chamada de **tamanho da cascata**, representa o número total de indivíduos que já fizeram parte do processo em todas as gerações. Em termos do processo de ramificação, é definida como:*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n.$$

Definição 7 (Altura da Cascata). A *altura da cascata*, em termos do processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, é dada por

$$A = \max\{n \geq 0 : Z_n > 0\},$$

ou seja, corresponde à última geração do processo em que ainda há pelo menos um indivíduo ativo.

2.1.1 Resultados

Definição 8. Diz-se que o processo $M_1(\theta, \lambda, p)$ sobrevive se, em todo instante de tempo, há algum indivíduo transmitindo a informação. Caso contrário, o processo se extingue. Representamos o evento sobrevivência por V e a probabilidade de extinção por ψ . Logo, $\mathbb{P}(V) = 1 - \psi$.

Teorema 13 (Probabilidade de Extinção). A probabilidade de extinção do processo $M_1(\theta, \lambda, p)$ é

$$\psi = \begin{cases} 1, & \text{se } p \leq \frac{\theta}{\lambda}, \\ \frac{\theta}{\lambda p}, & \text{se } p > \frac{\theta}{\lambda}. \end{cases}$$

Teorema 14 (Tamanho Total Esperado da Cascata). Seja C o tamanho da cascata. Se $p < \frac{\theta}{\lambda}$, o tamanho total esperado da cascata é dado por

$$\mathbb{E}(C) = \frac{\theta}{\theta - \lambda p}.$$

Teorema 15 (Distribuição da Altura da Cascata). Para o processo $M_1(\theta, \lambda, p)$, a função de distribuição da Altura da Cascata é limitada por:

$$\mathbb{P}(A \leq n) = \begin{cases} \frac{\frac{\theta}{\lambda p} \left(1 - \left(\frac{\lambda p}{\theta}\right)^{n+1}\right)}{\frac{\theta}{\lambda p} - \left(\frac{\lambda p}{\theta}\right)^{n+1}}, & \text{se } p \neq \frac{\theta}{\lambda} \\ \frac{(n+1)\lambda p}{\lambda p(n+1) + \theta}, & \text{se } p = \frac{\theta}{\lambda}. \end{cases}$$

Corolário 4 (Valor Esperado da Altura da Cascata). Para o processo $M_1(\theta, \lambda, p)$, o valor esperado da altura da cascata é:

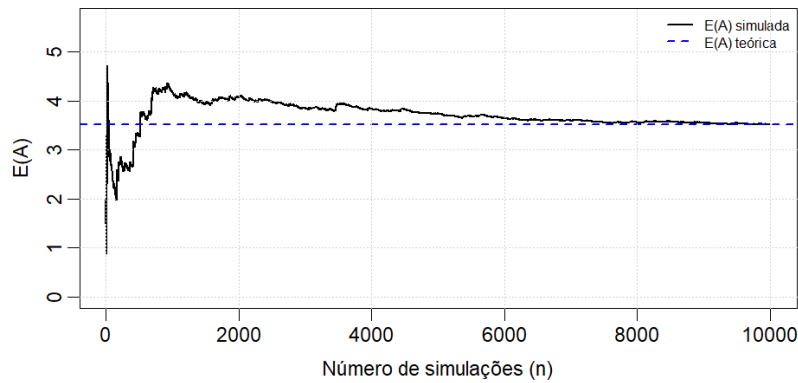
$$\mathbb{E}[A] = \begin{cases} \infty, & \text{se } p \geq \frac{\theta}{\lambda}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n (s_0 - 1)}{s_0 - m^n}, & \text{se } p < \frac{\theta}{\lambda}, \end{cases}$$

onde $m = \frac{\lambda p}{\theta}$, e $s_0 = \frac{\theta}{\lambda p}$.

Após a obtenção do valor esperado da altura da cascata, é possível representar graficamente o comportamento do modelo quanto à propagação, e verificar os resultados teóricos por meio de simulação do processo de transmissão.

Em $M_1(\theta, \lambda, p)$, a esperança de A é obtida de forma exata, ou seja, pode ser calculada a partir de uma expressão explícita que descreve o comportamento médio do processo. Nesse caso, o gráfico é construído a partir da própria realização teórica do modelo, ilustrando o crescimento e o comportamento esperado da altura da cascata conforme o número de gerações.

Figura 1 – Convergência da média simulada à esperança teórica $E[A]$ para $M_1(1; 2; 0,49)$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 1, a curva representa o valor esperado da altura da cascata, ilustrando a convergência das realizações para a média teórica, de forma que as simulações e a geração da figura foram realizadas no software *R* (R Core Team, 2024).

2.2 Modelo 2

Considere um processo iniciado por um único indivíduo que deseja propagar uma informação falsa. Esse indivíduo tenta transmitir a informação continuamente ao longo do tempo, mas está sujeito a **verificações aleatórias** realizadas por um mecanismo externo. Caso seja verificado e identificado, ele é impedido de continuar disseminando a informação.

Os indivíduos que acreditam na informação falsa passam a se comportar da mesma forma que o inicial, dando origem a um processo de ramificação. Esse processo (modelo) é denotado neste trabalho por $M_2(\theta, q, \lambda, p)$.

Os parâmetros do modelo são:

- $\lambda > 0$: taxa do processo de Poisson que modela as tentativas de transmissão realizadas por cada indivíduo.
- $\theta > 0$: parâmetro da distribuição exponencial que representa o tempo entre duas verificações sucessivas;

- $q \in [0,1]$: probabilidade de que uma verificação gere bloqueio do emissor;
- $p \in [0,1]$: probabilidade de que um receptor acredite na informação falsa e decida propagá-la.

As regras do processo são as seguintes:

- O processo começa com um único indivíduo ativo.
- Cada indivíduo:
 - Permanece ativo por um tempo aleatório segundo a seguinte regra: Ocorrem verificações sucessivas, cujos intervalos são modelados por L_1, L_2, \dots , onde cada $L_i \sim \text{Exp}(\theta)$ representa o tempo entre a verificação $(i - 1)$ e a verificação i . Em cada verificação, o emissor é bloqueado com probabilidade q ;
 - Durante esse tempo, tenta transmitir a informação a outros indivíduos de acordo com um processo de Poisson com taxa λ .
 - Cada tentativa de transmissão alcança um novo receptor, que reage da seguinte forma:
 - * Com probabilidade p , o receptor acredita na informação e torna-se um novo indivíduo ativo, seguindo as mesmas regras.
 - * Com probabilidade $1 - p$, o receptor não acredita, encerrando a propagação naquela ramificação.

O processo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ pode ser visto como um processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, associando o número de descendentes diretos de um indivíduo com o número de pessoas que recebem e acreditam na informação passada por uma dada pessoa. Nesse caso, os conceitos de tamanho da cascata e altura da cascata podem ser reescritos em termos de um processo de ramificação.

Definição 9 (Tamanho da Cascata). *A variável aleatória C , chamada de **tamanho da cascata**, representa o número total de indivíduos que já fizeram parte do processo em todas as gerações. Em termos do processo de ramificação, é definida como:*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n.$$

Definição 10 (Altura da Cascata). *A **altura da cascata**, em termos do processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, é dada por*

$$A = \max\{n \geq 0 : Z_n > 0\},$$

ou seja, corresponde à última geração do processo em que ainda há pelo menos um indivíduo ativo.

2.2.1 Resultados

Definição 11. Diz-se que o processo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ sobrevive se, em todo instante de tempo, há algum indivíduo transmitindo a informação. Caso contrário, o processo se extingue. Representamos o evento sobrevivência por V e a probabilidade de extinção por ψ . Logo, $\mathbb{P}(V) = 1 - \psi$.

Teorema 16 (Probabilidade de Extinção). A probabilidade de extinção do processo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ é

$$\psi = \begin{cases} 1, & \text{se } p \leq \frac{\theta q}{\lambda}, \\ \frac{\theta q}{\lambda p}, & \text{se } p > \frac{\theta q}{\lambda}. \end{cases}$$

Teorema 17 (Tamanho Total Esperado da Cascata). Seja C o tamanho da cascata. Se $p < \frac{\theta q}{\lambda}$, o tamanho total esperado da cascata é dado por

$$\mathbb{E}(C) = \frac{\theta q}{\theta q - \lambda p}.$$

Teorema 18 (Distribuição da Altura da Cascata). Para o processo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$, a função de distribuição da Altura da Cascata é limitada por:

$$\mathbb{P}(A \leq n) = \begin{cases} \frac{\frac{\theta q}{\lambda p} \left(1 - \left(\frac{\lambda p}{\theta q} \right)^{n+1} \right)}{\frac{\theta q}{\lambda p} - \left(\frac{\lambda p}{\theta q} \right)^{n+1}}, & \text{se } p \neq \frac{\theta q}{\lambda}, \\ \frac{(n+1)\lambda p}{\lambda p(n+1) + \theta q}, & \text{se } p = \frac{\theta q}{\lambda}. \end{cases}$$

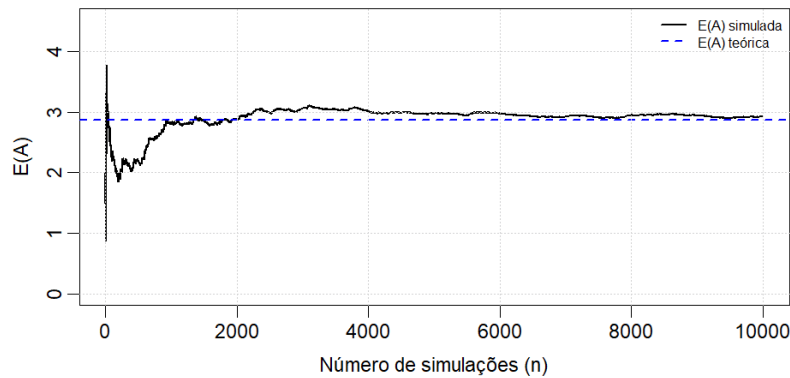
Corolário 5 (Valor Esperado da Altura da Cascata). Para o processo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$, o valor esperado da altura da cascata é:

$$\mathbb{E}[A] = \begin{cases} \infty, & \text{se } p \geq \frac{\theta q}{\lambda}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^n (s_0 - 1)}{s_0 - m^n}, & \text{se } p < \frac{\theta q}{\lambda}. \end{cases}$$

onde $m = \frac{\lambda p}{\theta q}$, e $s_0 = \frac{\theta q}{\lambda p}$.

Em $M_2(\theta, q, \lambda, p)$, a esperança de A assim como em $M_1(\theta, \lambda, p)$ é obtida de forma exata.

Figura 2 – Convergência da média simulada à esperança teórica $E[A]$ para $M_2(1; 0,5; 2; 0.24)$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 2, a curva obtida é similar à do primeiro modelo, de forma que o valor esperado da altura da cascata nas simulações está compreendido dentro das cotas, indicando a convergência do modelo simulado.

2.3 Modelo 3

Considere um processo iniciado por um único indivíduo que deseja propagar uma informação falsa. Esse indivíduo tenta transmitir a informação continuamente ao longo do tempo, mas está sujeito a verificação aleatória realizada por um mecanismo externo. Após ser verificado w vezes, ele é impedido de continuar disseminando a informação. O tempo entre duas verificações sucessivas é $\text{Exp}(\theta)$.

Os indivíduos que acreditam na informação falsa passam a se comportar da mesma forma que o inicial, dando origem a um processo de ramificação. Esse processo (modelo) é denotado neste trabalho por $M_3(w, \theta, \lambda, p)$.

Os parâmetros do modelo são:

- $\lambda > 0$: taxa do processo de Poisson que modela as tentativas de transmissão realizadas por cada indivíduo.
- $\theta > 0$: parâmetro da distribuição exponencial que representa o tempo entre duas verificações sucessivas;
- $w \in \mathbb{N}$: Número de verificações até o bloqueio;
- $p \in [0,1]$: probabilidade de que um receptor acredite na informação falsa e decida propagá-la.

As regras do processo são as seguintes:

- O processo começa com um único indivíduo ativo.
- Cada indivíduo:
 - Permanece ativo por um tempo aleatório determinado por verificações sucessivas, de modo que o intervalo entre a verificação $i - 1$ e a verificação i é modelado por $L_i \sim \text{Exp}(\theta)$, para $i = 1, \dots, w$. O indivíduo é bloqueado após a w -ésima verificação.
 - Cada tentativa de transmissão alcança um novo receptor, que reage da seguinte forma:
 - * Com probabilidade p , o receptor acredita na informação e torna-se um novo indivíduo ativo, seguindo as mesmas regras.
 - * Com probabilidade $1 - p$, o receptor não acredita, encerrando a propagação naquela ramificação.

O processo $M_3(w, \theta, \lambda, p)$ pode ser visto como um processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, associando o número de descendentes diretos de um indivíduo com o número de pessoas que recebem e acreditam na informação passada por uma dada pessoa. Nesse caso, os conceitos de tamanho da cascata e altura da cascata podem ser reescritos em termos de um processo de ramificação.

Definição 12 (Tamanho da Cascata). *A variável aleatória C , chamada de **tamanho da cascata**, representa o número total de indivíduos que já fizeram parte do processo em todas as gerações. Em termos do processo de ramificação, é definida como:*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n.$$

Definição 13 (Altura da Cascata). *A **altura da cascata**, em termos do processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, é dada por*

$$A = \max\{n \geq 0 : Z_n > 0\},$$

ou seja, corresponde à última geração do processo em que ainda há pelo menos um indivíduo ativo.

2.3.1 Resultados

Definição 14. *Diz-se que o processo $M_3(w, \theta, \lambda, p)$ sobrevive se, em todo instante de tempo, há algum indivíduo transmitindo a informação. Caso contrário, o processo se extingue. Representamos o evento sobrevivência por V e a probabilidade de extinção por ψ . Logo, $\mathbb{P}(V) = 1 - \psi$.*

Teorema 19 (Probabilidade de Extinção). *A probabilidade de extinção ψ é a menor raiz positiva da equação $G_X(s) = s$:*

$$\left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p(1 - s)} \right)^w = s.$$

Em particular, se $p \leq \frac{\theta}{w\lambda}$, $\psi = 1$.

Teorema 20 (Tamanho Total Esperado). *O número esperado de descendentes é*

$$m = E[X] = \frac{w\lambda p}{\theta}.$$

Se $p < \frac{\theta}{w\lambda}$, o tamanho total esperado do processo é:

$$\mathbb{E}[C] = \frac{\theta}{\theta - w\lambda p}.$$

Teorema 21 (Distribuição da Altura da Cascata). *Para $p \leq \frac{\theta}{w\lambda}$, a distribuição da altura da cascata satisfaz:*

$$\frac{[1 + D(1 - m)](1 - m^{n+1})}{1 + D(1 - m) - m^{n+1}} \leq \mathbb{P}(A \leq n) \leq \frac{\left[1 + \frac{m(1-m)}{G''_X(1)}\right](1 - m^{n+1})}{1 + \frac{m(1-m)}{G''_X(1)} - m^{n+1}},$$

$$\text{onde } m = \frac{w\lambda p}{\theta} \text{ e } D = \max \left[2, \frac{\frac{w\lambda p}{\theta}}{\left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p}\right)^w + \frac{w\lambda p}{\theta} - 1} \right].$$

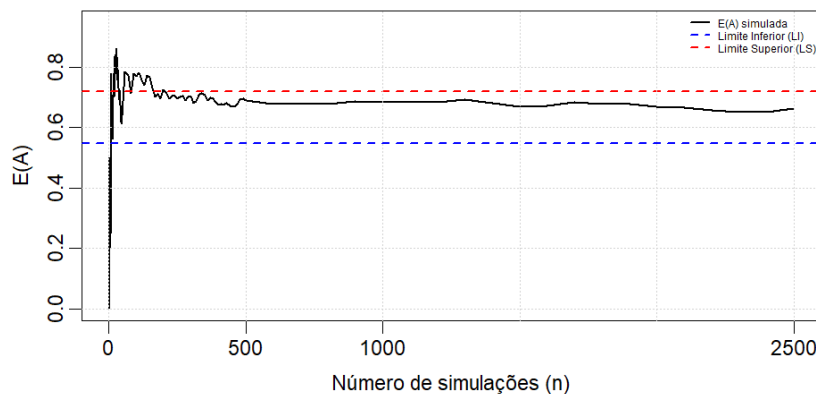
Corolário 6 (Limites para o Valor Esperado da Altura da Cascata). *Para $p \leq \frac{\theta}{w\lambda}$, o valor esperado da altura da cascata satisfaz:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\left(1 + \frac{m(1-m)}{G''(1)}\right)(1 - m^n)}{1 + \frac{m(1-m)}{G''(1)} - m^n} \right) - 1 \leq \mathbb{E}[A] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(1 + D(1 - m))(1 - m^n)}{1 + D(1 - m) - m^n} \right) - 1,$$

$$\text{onde, novamente, } m = \frac{w\lambda p}{\theta}, D = \max \left[2, \frac{\frac{w\lambda p}{\theta}}{\left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p}\right)^w + \frac{w\lambda p}{\theta} - 1} \right] \text{ e } G''(1) = \frac{w(w+1)(\lambda p)^2}{\theta^2}.$$

Em $M_3(w, \theta, \lambda, p)$, a esperança de A não é obtida de forma exata, sendo obtida por meio de cotas, delimitadas por um limite inferior LI e um limite superior LS .

Figura 3 – Convergência da média simulada à esperança teórica $E[A]$ para $M_3(8; 2; 1; 0.12)$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Essa representação permite visualizar que o valor esperado da altura da cascata encontra-se compreendido entre as duas cotas, ou seja, o valor esperado simulado tende a permanecer contido nesse intervalo conforme o esperado.

Tabela 1 – Principais resultados de $M_3(w, \theta, \lambda, p)$ para diferentes valores de p , onde $w = 8$, $\theta = 2$ e $\lambda = 1$.

p	m	LI de E[A]	Estimativa de E[A]	LS de E[A]	E[C]
0.010	0.040000	0.039870	0.040636	0.040763	1.041667
0.060	0.240000	0.245590	0.275165	0.279492	1.315789
0.110	0.440000	0.490412	0.596542	0.625838	1.785714
0.160	0.640000	0.832793	1.096602	1.219664	2.777778
0.210	0.840000	1.468187	2.136878	2.601896	6.250000

Fonte: Elaborado pela autora.

Na Tabela 1, para diferentes valores de p , respeitando a condição subcrítica onde $m < 1$, o comportamento da estimativa da média nas simulações do processo com os parâmetros indicados ilustra que há convergência do modelo simulado, dado que a média simulada está dentro das cotas.

2.4 Modelo 4

Considere um processo iniciado por um único indivíduo que deseja propagar uma informação falsa. Esse indivíduo tenta transmitir a informação continuamente ao longo do tempo, mas está sujeito a uma verificação realizada por um mecanismo externo. Quando ele é verificado, ele é impedido de continuar disseminando a informação.

Os indivíduos que acreditam na informação falsa passam a se comportar da mesma forma que o inicial, dando origem a um processo de ramificação. Esse processo (modelo) é denotado neste trabalho por $M_4(\tau, \lambda, p)$.

Os parâmetros do modelo são:

- $\lambda > 0$: taxa do processo de Poisson que modela as tentativas de transmissão realizadas por cada indivíduo.
- $p \in [0,1]$: probabilidade de que um receptor acredite na informação falsa e decida propagá-la.

Nesse modelo, o tempo até a verificação é um valor determinístico τ

As regras do processo são as seguintes:

- O processo começa com um único indivíduo ativo.

- Cada indivíduo:
 - Permanece ativo por um tempo determinístico τ , após o qual é verificado e deixa de transmitir.
 - Durante esse tempo, tenta transmitir a informação a outros indivíduos de acordo com um processo de Poisson com taxa λ .
 - Cada tentativa de transmissão alcança um novo receptor, que reage da seguinte forma:
 - * Com probabilidade p , o receptor acredita na informação e torna-se um novo indivíduo ativo, seguindo as mesmas regras.
 - * Com probabilidade $1 - p$, o receptor não acredita, encerrando a propagação naquela ramificação.

O processo $M_4(\tau, \lambda, p)$ pode ser visto como um processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, associando o número de descendentes diretos de um indivíduo com o número de pessoas que recebem e acreditam na informação passada por uma dada pessoa. Nesse caso, os conceitos de tamanho da cascata e altura da cascata podem ser reescritos em termos de um processo de ramificação.

Definição 15 (Tamanho da Cascata). *A variável aleatória C , chamada de **tamanho da cascata**, representa o número total de indivíduos que já fizeram parte do processo em todas as gerações. Em termos do processo de ramificação, é definida como:*

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n.$$

Definição 16 (Altura da Cascata). *A **altura da cascata**, em termos do processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$, é dada por*

$$A = \max\{n \geq 0 : Z_n > 0\},$$

ou seja, corresponde à última geração do processo em que ainda há pelo menos um indivíduo ativo.

2.4.1 Resultados

Definição 17. *Diz-se que o processo $M_4(\tau, \lambda, p)$ sobrevive se, em todo instante de tempo, há algum indivíduo transmitindo a informação. Caso contrário, o processo se extingue. Representamos o evento sobrevivência por V e a probabilidade de extinção por ψ . Logo, $\mathbb{P}(V) = 1 - \psi$.*

Teorema 22. (Probabilidade de Extinção)

A probabilidade de extinção do processo $M_4(\tau, \lambda, p)$, definida como ψ , é a menor solução não negativa da equação

$$e^{\lambda\tau p(s-1)} = s.$$

Em particular, se $p \leq \frac{1}{\lambda\tau}$, $\psi = 1$.

Teorema 23. (*Tamanho Total Esperado da Cascata*)

Seja C o tamanho da cascata. Se $p < \frac{1}{\tau\lambda}$, o tamanho total esperado da cascata é dado por

$$E(C) = \frac{1}{1 - \lambda\tau p}.$$

Teorema 24. (*Distribuição da Altura da Cascata*)

Para um processo subcrítico $\left(p < \frac{1}{\tau\lambda}\right)$, a função de distribuição da Altura da Cascata satisfaz:

$$1 - \frac{(\lambda\tau p)^{n+1}(s_l - 1)}{s_l - (\lambda\tau p)^{n+1}} \leq \mathbb{P}(A \leq n) \leq 1 - \frac{(\lambda\tau p)^{n+1}(s_u - 1)}{s_u - (\lambda\tau p)^{n+1}},$$

onde $m = \lambda\tau p$, e

- $s_l = \frac{2-m}{m}$.
- $s_u = \frac{me^{-m}}{m+e^{-m}-1}$.

Corolário 7 (Limites para o Valor Esperado da Altura da Cascata). Para um processo subcrítico $\left(p < \frac{1}{\tau\lambda}\right)$, os limitantes da média da Altura da Cascata são dados por:

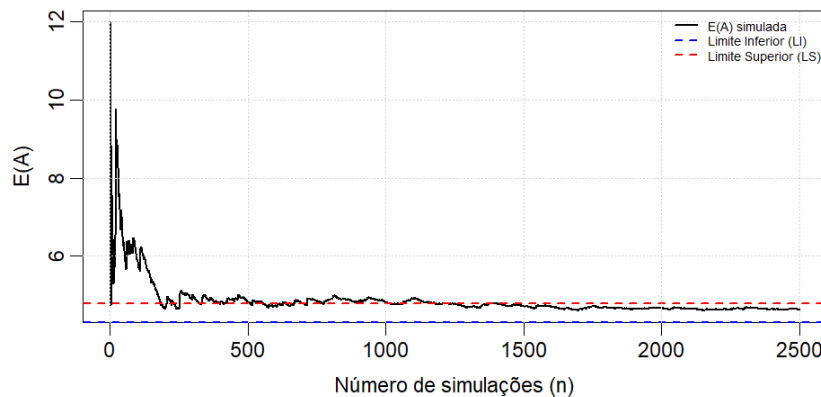
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n(s_u - 1)}{s_u - m^n} - 1 \leq \mathbb{E}[A] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n(s_l - 1)}{s_l - m^n} - 1,$$

onde $m = \lambda\tau p$, e

- $s_l = \frac{2-m}{m}$.
- $s_u = \frac{me^{-m}}{m+e^{-m}-1}$.

Em $M_4(\tau, \lambda, p)$, a esperança de A , assim como em $M_3(w, \theta, \lambda, p)$, também não é dada por uma expressão exata, mas é obtida por meio de cotas, delimitadas por um limite inferior LI e um limite superior LS .

Figura 4 – Convergência da média simulada à esperança teórica $E[A]$ para $M_4(4; 2; 0,12)$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 4, nota-se que o valor esperado da altura da cascata permanece dentro das cotas, o que indica que a média simulada converge para o valor teórico.

Nesse sentido, enquanto os gráficos de $M_1(\theta, \lambda, p)$ e $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ se referem à realização do modelo expressando uma esperança de caráter exatos, os gráficos de $M_3(w, \theta, \lambda, p)$ e $M_4(\tau, \lambda, p)$ representam a esperança entre cotas. Esses resultados complementam a análise teórica apresentada, reforçando a distinção entre os casos em que a esperança é obtida de forma exata e aqueles em que é delimitada por intervalos.

Tabela 2 – Principais resultados de $M_4(\tau, \lambda, p)$ para diferentes valores de p , onde $\lambda = 1$ e $\tau = 3$.

p	m	LI de E[A]	Estimativa de E[A]	LS de E[A]	E[C]
0.200	0.6000	1.0024	1.0087	1.0327	2.50000
0.220	0.6600	1.2028	1.2137	1.2481	2.94118
0.280	0.8400	2.2112	2.2639	2.3652	6.25000
0.310	0.9300	3.4347	3.5846	3.7639	14.28571
0.333	0.9990	10.4944	11.6202	11.9782	1000.00000

Fonte: Elaborado pela autora.

A Tabela 2 evidencia que o modelo $M_4(\tau, \lambda, p)$, cuja $\mathbb{E}(A)$ é dada por cotas, é sensível a pequenos aumentos na probabilidade p quando esta leva a uma média m próxima de 1. Além disso, a estimativa da altura da cascata está compreendida dentro das cotas inferiores e superiores.

3 Provas

Na seção anterior, para cada um dos modelos descritos, foram enunciados os resultados quanto à transmissão de informação. Abaixo estão as demonstrações referentes a cada um deles, sendo os resultados auxiliares, proposições derivadas da descrição do modelo, que posteriormente servem como base nas provas dos teoremas.

3.0.1 Modelo 1

3.0.1.1 Resultados Auxiliares

O modelo $M_1(\theta, \lambda, p)$ pode ser descrito como um processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ com $Z_0 = 1$, em que o número de descendentes diretos de um indivíduo corresponde ao número de pessoas para as quais ele transmite a informação e que acreditam nela. A distribuição do número de descendentes diretos do i -ésimo indivíduo da n -ésima $X_{n,i}$ será dada pela distribuição de uma variável aleatória X .

Proposição 3.1 (Função Geradora de Probabilidade de X). *A função geradora de probabilidade de X é dada por*

$$G_X(s) = \frac{\theta}{\theta + \lambda p - \lambda p s}.$$

Demonstração. De acordo com a descrição do modelo, tem-se:

$$N_l \mid L = l \sim \text{Poisson}(\lambda l), \quad L \sim \text{Exp}(\theta).$$

A função densidade de probabilidade de L é:

$$f_L(l) = \theta e^{-\theta l}, \quad l \geq 0.$$

Pela lei da probabilidade total:

$$\mathbb{P}(N_l = k) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(N_l = k \mid L = l) f_L(l) dl.$$

Substituindo $\mathbb{P}(N_l = k \mid L = l)$ (Poisson) e $f_L(l)$ (Exponencial):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_l = k) &= \int_0^\infty \frac{(\lambda l)^k e^{-\lambda l}}{k!} \cdot \theta e^{-\theta l} dl \\
&= \frac{\theta}{k!} \int_0^\infty (\lambda l)^k e^{-(\lambda+\theta)l} dl \\
&= \frac{\theta \lambda^k}{k!} \int_0^\infty l^k e^{-(\lambda+\theta)l} dl.
\end{aligned}$$

A integral $\int_0^\infty l^k e^{-(\lambda+\theta)l} dl$ é dada pela função Gama. É válido que:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad z > 0$$

Então, seja $x = (\lambda + \theta)l \implies l = \frac{x}{\lambda + \theta}, dl = \frac{dx}{\lambda + \theta}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty l^k e^{-(\lambda+\theta)l} dl &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{\lambda + \theta} \right)^k e^{-x} \frac{dx}{\lambda + \theta} \\
&= \frac{1}{(\lambda + \theta)^{k+1}} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx \\
&= \frac{\Gamma(k + 1)}{(\lambda + \theta)^{k+1}} \\
&= \frac{k!}{(\lambda + \theta)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Substituindo de volta:

$$\mathbb{P}(N_l = k) = \frac{\theta \lambda^k}{k!} \cdot \frac{k!}{(\lambda + \theta)^{k+1}} = \frac{\theta \lambda^k}{(\lambda + \theta)^{k+1}}.$$

Portanto, a distribuição marginal de N_l é

$$\mathbb{P}(N_l = k) = \frac{\theta \lambda^k}{(\lambda + \theta)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pela descrição do modelo, condicionando X a $N_l = k$, segue:

$$X \mid N_l = k \sim \text{Binomial}(k, p).$$

A FGP de X é encontrada usando a lei da esperança total e teorema binomial, conforme (ROSS, 2010, cap. 2, seção 1.4, pg 22) e (ROSS, 2010, cap. 7, seção 7.5.2). Assim,

$$G_X(s) = E[s^X] = E[E[s^X \mid N_l]].$$

Para $E[s^X \mid N_t = k]$, tem-se:

$$\begin{aligned} E[s^X \mid N_t = k] &= \sum_{x=0}^k s^x \binom{k}{x} p^x (1-p)^{k-x} \\ &= \sum_{x=0}^k \binom{k}{x} (sp)^x (1-p)^{k-x} \\ &= (sp + 1 - p)^k \quad (\text{Teorema Binomial}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$E[s^X \mid N_t] = (sp + 1 - p)^{N_t}.$$

Então, calculando a esperança, tem-se:

$$\begin{aligned} G_X(s) &= E[(sp + 1 - p)^{N_t}] = \sum_{n=0}^{\infty} (sp + 1 - p)^n \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (sp + 1 - p)^n \frac{\theta \lambda^n}{(\lambda + \theta)^{n+1}} \\ &= \frac{\theta}{\lambda + \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda(sp + 1 - p)}{\lambda + \theta} \right)^n. \end{aligned}$$

O somatório é uma série geométrica, válida quando $|\lambda(sp + 1 - p)/(\lambda + \theta)| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \implies r = \frac{\lambda(sp + 1 - p)}{\lambda + \theta}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \frac{\theta}{\lambda + \theta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda(sp+1-p)}{\lambda+\theta}} \\ &= \frac{\theta}{\lambda + \theta - \lambda(sp + 1 - p)} \\ &= \frac{\theta}{\theta + \lambda p(1 - s)}. \end{aligned}$$

Como era de interesse demonstrar.

□

Proposição 3.2 (Distribuição de X). A variável X possui distribuição dada por

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\theta}{\theta + \lambda p}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{\theta \lambda p}{(\theta + \lambda p)^2} \right) \left(\frac{\lambda p}{\theta + \lambda p} \right)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

e

$$\mathbb{E}(X) = m = \frac{\lambda p}{\theta}.$$

Demonstração. O resultado é consequência direta da Proposição 3, pois a FGP em questão é fracional linear. Para essa demonstração, seja $b = \frac{\lambda \theta p}{(\theta + \lambda p)^2}$ e $c = \frac{\lambda p}{\theta + \lambda p}$.

Suposições do Teorema 10:

$$b, c \in [0, 1], \quad b + c \leq 1$$

$$b = \frac{\theta \lambda p}{(\theta + \lambda p)^2}.$$

$b > 0$ pois $\theta, \lambda > 0$ e $p > 0$.

$$2^\circ \quad b \leq 1 \implies \frac{\theta \lambda p}{(\theta + \lambda p)^2} \leq 1 \implies \theta \lambda p \leq (\theta + \lambda p)^2 = \theta^2 + 2\theta \lambda p + (\lambda p)^2$$

$$\implies \theta \lambda p \leq \theta^2 + 2\theta \lambda p + (\lambda p)^2 \implies$$

$$0 \leq \theta^2 + \theta \lambda p + (\lambda p)^2 \quad \text{o que é verdade pois } \theta, \lambda > 0 \text{ e } p > 0.$$

$\therefore b \in [0, 1]$

$$c = \frac{\lambda p}{\theta + \lambda p}.$$

1° $c > 0$ pois $\theta, \lambda > 0$ e $p \geq 0$.

$$2^\circ \quad c \leq 1 \implies \frac{\lambda p}{\theta + \lambda p} \leq 1 \quad \text{é verdadeiro pois } \lambda p \leq \theta + \lambda p \text{ senão } \frac{\lambda p}{\lambda p + \theta} \leq 1.$$

$\therefore c \in [0, 1]$

$$b + c \leq 1 \implies \frac{\theta \lambda p}{(\theta + \lambda p)^2} + \frac{\lambda p}{\theta + \lambda p}$$

$$b + c = \frac{\theta \lambda p + \lambda p(\theta + \lambda p)}{(\theta + \lambda p)^2} = \frac{\theta \lambda p + \theta \lambda p + (\lambda p)^2}{(\theta + \lambda p)^2}$$

$$b + c = \frac{2\theta \lambda p + (\lambda p)^2}{(\theta + \lambda p)^2}$$

$$b + c \leq 1 \implies \frac{2\theta \lambda p + (\lambda p)^2}{(\theta + \lambda p)^2} \leq 1 \implies 2\theta \lambda p + (\lambda p)^2 \leq (\theta + \lambda p)^2$$

$$\implies 2\theta \lambda p + (\lambda p)^2 \leq \theta^2 + 2\theta \lambda p + (\lambda p)^2 \implies 0 \leq \theta^2$$

o que é sempre verdadeiro pois $\theta > 0$.

$$\therefore b + c \leq 1$$

Então, a FGP precisa estar escrita na forma de fracional linear, isto é, $G_X(s) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}$. Assim, com b e c tem-se

$$\begin{aligned} G_X(s) &= 1 - \frac{\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}}{1 - \frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}} + \frac{\left(\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}\right)s}{1 - \left(\frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}\right)s} \\ &= 1 - \frac{\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}}{\frac{(\theta+\lambda p) - \lambda p}{\theta+\lambda p}} + \frac{\left(\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}\right)s}{\frac{(\theta+\lambda p) - \lambda ps}{\theta+\lambda p}} = \\ &= 1 - \frac{\lambda p}{\theta + \lambda p} + \frac{\theta\lambda ps}{(\theta + \lambda p)(\theta + \lambda p - \lambda ps)} \\ &= \frac{\theta + \lambda p - \lambda p + \theta\lambda ps}{\theta + \lambda p} = \frac{\theta}{\theta + \lambda p} + \frac{\theta\lambda ps}{(\theta + \lambda p)^2 - \lambda p(\theta + \lambda p)s}. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue o resultado da distribuição de X .

Quanto ao valor esperado, tem-se

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = \theta(-1)(\theta + \lambda p - \lambda ps)^{-2}(-\lambda p) = \theta(\theta + \lambda p - \lambda p1)^{-2}(\lambda p) = \frac{\lambda p}{\theta} = m.$$

□

3.0.1.2 Prova do Teorema 13 (Probabilidade de Extinção)

Demonstração. O resultado segue do Teorema 7 e da Proposição 3.8.

□

3.0.1.3 Prova do Teorema 14 (Tamanho Esperado da Cascata)

Demonstração. Tem-se $m = \frac{\lambda p}{\theta} < 1$. Logo, o resultado segue do Teorema 9. Assim,

$$\mathbb{E}(C) = \frac{\theta}{\theta - \lambda p}.$$

□

3.0.1.4 Prova do Teorema 15 (Distribuição da Altura da Cascata)

Considere o processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ que modela o processo $M_4(\theta, \lambda, p)$. A **altura da cascata**, A , pode ser pensada como a última geração do processo de ramificação com

pelo menos um indivíduo:

$$A = \max\{n; Z_n > 0\}.$$

O **tempo de extinção**, T , do processo é o primeiro momento em que não há mais indivíduos.

Logo,

$$T = A + 1.$$

Demonstração. Este resultado é uma aplicação direta do Teorema 10, que fornece uma cota superior para o tempo de extinção T quando a FGP é fracional linear.

Seja $b = \frac{\lambda\theta p}{(\theta+\lambda p)^2}$ e $c = \frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}$. Então, a FGP precisa estar escrita na forma de fracional linear, isto é, $G_X(s) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}$. Assim, com b e c tem-se

$$\begin{aligned} G_X(s) &= 1 - \frac{\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}}{1 - \frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}} + \frac{\left(\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}\right)s}{1 - \left(\frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}\right)s} \\ &= 1 - \frac{\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}}{\frac{(\theta+\lambda p) - \lambda p}{\theta+\lambda p}} + \frac{\left(\frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2}\right)s}{\frac{(\theta+\lambda p) - \lambda ps}{\theta+\lambda p}} = \\ &= 1 - \frac{\lambda p}{\theta + \lambda p} + \frac{\theta\lambda ps}{(\theta + \lambda p)(\theta + \lambda p - \lambda ps)} \\ &= \frac{\theta + \lambda p - \lambda p + \theta\lambda ps}{\theta + \lambda p} = \frac{\theta}{\theta + \lambda p} + \frac{\theta\lambda ps}{(\theta + \lambda p)^2 - \lambda p(\theta + \lambda p)s} \end{aligned}$$

Dado que FGP está escrita na forma necessária, para obter a distribuição do tempo de extinção para este caso, s_0 é dado por:

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1 - b - c}{c(1 - c)} = \frac{1 - \frac{\theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2} - \frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}}{\frac{\lambda p}{\theta+\lambda p} \left(1 - \frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}\right)} \\ &= \frac{\frac{(\theta+\lambda p)^2 - \theta\lambda p}{(\theta+\lambda p)^2} - \frac{\lambda p}{\theta+\lambda p}}{\frac{\lambda p}{\theta+\lambda p} \left(\frac{\theta+\lambda p - \lambda p}{\theta+\lambda p}\right)} = \frac{\frac{(\theta+\lambda p)^2 - \theta\lambda p - \lambda p(\theta+\lambda p)}{(\theta+\lambda p)^2}}{\frac{\lambda p\theta}{(\theta+\lambda p)^2}} \\ &= \frac{(\theta + \lambda p)^2 - \theta\lambda p - \theta\lambda p - (\lambda p)^2}{\lambda p\theta} \\ &= \frac{\theta^2 + 2\theta\lambda p + (\lambda p)^2 - 2\theta\lambda p - (\lambda p)^2}{\lambda p\theta} = \frac{\theta^2}{\lambda p\theta} = \frac{\theta}{\lambda p} \end{aligned}$$

Assim, com a substituição direta de b , c e s_0 conforme as condições do Teorema 10 está demonstrado. □

3.0.1.5 Prova do Corolário 4 (Valor Esperado do Tempo de Extinção e Altura da Cascata)

Demonstração. O resultado é obtido por meio da relação $T = A + 1$ conforme o Corolário 1, e para isso basta a obtenção de $m = \frac{\lambda p}{\theta}$ e $s_0 = \frac{\theta}{\lambda p}$. □

3.0.2 Modelo 2

3.0.3 Resultados Auxiliares

O modelo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ pode ser descrito como um processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ com $Z_0 = 1$, em que o número de descendentes diretos de um indivíduo corresponde ao número de pessoas para as quais ele transmite a informação e que acreditam nela. A distribuição do número de descendentes diretos do i -ésimo indivíduo da n -ésima $X_{n,i}$ será dada pela distribuição de uma variável aleatória X .

Primeiramente, pela descrição do modelo, em que são realizadas várias tentativas de bloqueio ao transmissor do rumor, é válido notar a equivalência com o $M_1(\theta, \lambda, p)$.

Proposição 3.3. *O $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ é um caso particular de $M_1(\theta^*, \lambda, p)$, para quando $\theta^* = q\theta$.*

Demonstração. Considere L_1, L_2, \dots i.i.d. com $L_i \sim \text{Exp}(\theta)$ (taxa $\theta > 0$). No modelo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ o número de verificações até o bloqueio W satisfaz

$$\mathbb{P}(W = w) = q(1 - q)^{w-1}, \quad w = 1, 2, \dots,$$

isto é, $W \sim \text{Geom}(q)$ (com suporte começando em 1). O tempo total até o bloqueio é a soma

$$L = \sum_{i=1}^W L_i.$$

1. Distribuição condicional de L dado $W = w$. Condicional em $W = w$, L é soma de w exponenciais i.i.d., logo,

$$L | W = w \sim \text{Gamma}(w, \theta),$$

com densidade (para $l > 0$)

$$f_{L|W}(l | w) = \frac{\theta^w}{(w-1)!} l^{w-1} e^{-\theta l}.$$

2. Densidade de probabilidade de L . A densidade marginal é dada pela soma discreta sobre w :

$$f_L(l) = \sum_{w=1}^{\infty} \Pr(W = w) f_{L|W}(l | w) = \sum_{w=1}^{\infty} q(1-q)^{w-1} \frac{\theta^w}{(w-1)!} l^{w-1} e^{-\theta l}.$$

Factorizando termos que não dependem de w :

$$f_L(l) = q\theta e^{-\theta l} \sum_{w=1}^{\infty} \frac{((1-q)\theta l)^{w-1}}{(w-1)!}.$$

Fazendo a mudança de índice $k = w - 1$ obtemos

$$f_L(l) = q\theta e^{-\theta l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-q)\theta l)^k}{k!} = q\theta e^{-\theta l} \exp((1-q)\theta l).$$

Simplificando o expoente:

$$f_L(l) = q\theta \exp(-\theta l + (1-q)\theta l) = q\theta \exp(-q\theta l), \quad l > 0.$$

3. Conclusão. A densidade obtida é exatamente a densidade exponencial com taxa $q\theta$. Logo

$$L \sim \text{Exp}(q\theta).$$

Ou seja, o $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ é um caso particular de $M_1(\theta^*, \lambda, p)$, para quando $\theta^* = q\theta$.

□

Proposição 3.4 (Função Geradora de Probabilidade de X). *A função geradora de probabilidade (FGP) da variável aleatória X é dada por*

$$G_X(s) = \frac{q\theta}{q\theta + \lambda p - \lambda p s}.$$

Demonstração. Segue diretamente das proposições 3.1 e 3.3.

□

Proposição 3.5 (Distribuição de X). *A variável X possui distribuição dada por*

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q\theta}{q\theta + \lambda p}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{q\theta \lambda p}{(q\theta + \lambda p)^2} \right) \left(\frac{\lambda p}{q\theta + \lambda p} \right)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Demonstração. Segue diretamente das proposições 3.2 e 3.3.

□

Além disso, todos os resultados de $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ podem ser demonstrados analogamente ao discutido na menção à prova das Proposições 3.4 e 3.5, usando o fato de $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ ser caso particular de $M_1(\theta, \lambda, p)$.

3.0.3.1 Prova do Teorema 16 (Probabilidade de Extinção)

Demonstração. O resultado segue da Proposição 3.8 e do Teorema 13.

□

3.0.3.2 Prova do Teorema 17 (Tamanho Esperado da Cascata)

Demonstração. Segue da Proposição 3.3 e do Teorema 14. □

3.0.3.3 Prova do Teorema 18 (Distribuição da Altura da Cascata)

Considere o processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ que modela o processo $M_2(\theta, q, \lambda, p)$. A **altura da cascata**, A , pode ser pensada como a última geração do processo de ramificação com pelo menos um indivíduo:

$$A = \max\{n; Z_n > 0\}.$$

O **tempo de extinção**, T , do processo é o primeiro momento em que não há mais indivíduos. Logo,

$$T = A + 1.$$

O resultado é obtido a partir de uma aplicação direta da Proposição 3.3 e do Teorema 15.

3.0.3.4 Prova do Corolário 5 (Valor Esperado da Altura da Cascata)

Demonstração. O resultado é obtido diretamente do Corolário 4 e da Proposição 3.3, por meio da relação $A = T - 1$. □

3.0.4 Modelo 3

3.0.5 Resultados Auxiliares

O modelo $M_3(w, \theta, \lambda, p)$ pode ser descrito como um processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ com $Z_0 = 1$, em que o número de descendentes diretos de um indivíduo corresponde ao número de pessoas para as quais ele transmite a informação e que acreditam nela. A distribuição do número de descendentes diretos do i -ésimo indivíduo da n -ésima $X_{n,i}$ será dada pela distribuição de uma variável aleatória X .

Proposição 3.6 (Função Geradora de Probabilidade de X). *Se $X|N_L = k \sim \text{Binomial}(k, p)$, a FGP de X é:*

$$G_X(s) = \left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p(1 - s)} \right)^w.$$

Demonstração. Pela descrição do modelo, o processo de transmissão de informação inicia com um indivíduo ativo. O tempo entre duas verificações sucessivas é $\text{Exp}(\theta)$ e o indivíduo é bloqueado após w verificações. Assim, o tempo total ativo de um indivíduo é

$$L \sim \text{Gamma}(w, \theta)$$

com densidade

$$f_L(l) = \frac{\theta^w l^{w-1} e^{-\theta l}}{(w-1)!}, \quad l > 0.$$

Durante o tempo L cada indivíduo gera tentativas segundo um Poisson(λL). Se N_L é o número de tentativas, então condicional em $L = l$,

$$N_L | L = l \sim \text{Poisson}(\lambda l).$$

Cada tentativa gera um informado (descendente) com probabilidade p independentemente, logo, dado $N_L = k$, concluí-se que

$$X | N_L = k \sim \text{Binomial}(k, p).$$

A distribuição de N_L é necessária para a obtenção da FGP logo abaixo. Essa distribuição pode ser obtida da seguinte forma:

Para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_L = k) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_L = k | L = l) f_L(l) dl \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda l)^k e^{-\lambda l}}{k!} \cdot \frac{\theta^w l^{w-1} e^{-\theta l}}{(w-1)!} dl \\ &= \frac{\lambda^k \theta^w}{k!(w-1)!} \int_0^\infty l^{k+w-1} e^{-(\lambda+\theta)l} dl \\ &= \frac{\lambda^k \theta^w}{k!(w-1)!} \cdot \frac{\Gamma(k+w)}{(\lambda+\theta)^{k+w}} \\ &= \binom{w+k-1}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta} \right)^k \left(\frac{\theta}{\lambda+\theta} \right)^w. \end{aligned}$$

ou seja, N_L segue uma *binomial negativa* (forma alternativa com parâmetros w e $\lambda/(\lambda+\theta)$).

Feito isso, a função geradora de probabilidade de X pode ser obtida.

Seja $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$. Condicionando em N_L ,

$$\mathbb{E}[s^X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^X | N_L]].$$

Para $N_L = k$, a FGP da binomial é $(sp + 1 - p)^k$. Logo,

$$G_X(s) = \mathbb{E}[(sp + 1 - p)^{N_L}] = \sum_{k=0}^{\infty} (sp + 1 - p)^k \mathbb{P}(N_L = k).$$

Substituindo a forma de $\mathbb{P}(N_L = k)$ obtém-se

$$G_X(s) = \left(\frac{\theta}{\lambda + \theta} \right)^w \sum_{k=0}^{\infty} \binom{w+k-1}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} (sp + 1 - p) \right)^k.$$

Pela série da binomial negativa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{w+k-1}{k} z^k = (1-z)^{-w}, \quad |z| < 1,$$

com $z = \frac{\lambda}{\lambda + \theta}(sp + 1 - p)$. Assim

$$G_X(s) = \left(\frac{\theta}{\lambda + \theta} \right)^w \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \theta}(sp + 1 - p) \right)^{-w}.$$

Fazendo as simplificações,

$$1 - \frac{\lambda}{\lambda + \theta}(sp + 1 - p) = \frac{\theta + \lambda p(1 - s)}{\lambda + \theta},$$

então

$$G_X(s) = \left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p(1 - s)} \right)^w.$$

□

Proposição 3.7 (Distribuição de X). *A variável X segue uma distribuição Binomial Negativa:*

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{w+n-1}{n} \left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p} \right)^w \left(\frac{\lambda p}{\theta + \lambda p} \right)^n, \quad n \geq 0, \lambda > 0, e 0 < p < 1.$$

Demonstração. Sabe-se que $G'(s) = \frac{\theta^w \lambda \rho m}{(\theta + \lambda \rho(1 - s))^{w+1}}$ e $G''(s) = \frac{\theta^w (\lambda \rho)^2 w(w+1)}{(\theta + \lambda \rho(1 - s))^{w+2}}$

$$G'''(s) = \frac{\theta^w (\lambda \rho)^3 w(w+1)(w+2)}{[\theta + \lambda \rho(1 - s)]^{w+3}}$$

HI:

$$G^{(n)}(s) = \frac{\theta^w (\lambda \rho)^n w(w+1)(w+2) \cdots (w+n-1)}{[\theta + \lambda \rho(1 - s)]^{w+n}}$$

Para $(n+1)$: $G^{(n+1)}(s) = (G^{(n)}(s))'$

$$= \frac{\theta^w (\lambda \rho)^{n+1} w(w+1)(w+2) \cdots (w+n)}{[\theta + \lambda \rho(1 - s)]^{w+n+1}} \quad \text{que é } G^{(n)}(s) \text{ p/ } n = n + 1$$

∴ De fato, a n -ésima derivada é $G^{(n)}(s)$.

Sabe-se que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$.

$$G^{(n)}(0) = \frac{\theta^w (\lambda \rho)^n w(w+1) \cdots (w+n-1)}{[\theta + \lambda \rho(1 - 0)]^{w+n}} = \frac{\theta^w (\lambda \rho)^n m \cdots (w+n-1)}{[\theta + \lambda \rho]^{w+n}}.$$

note que $w(w+1) \cdots (w+n-1) = \frac{(w+n-1)!}{(w-1)!}$.

$$= \frac{(w+n-1)!}{(w-1)! n!} n! = \binom{w+n-1}{n} n! \quad \leftarrow \text{combinação.}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow G^{(n)}(0) &= \frac{\theta^w (\lambda\rho)^n}{(\theta + \lambda\rho)^w (\theta + \lambda\rho)^n} \binom{w+n-1}{n} n! \\ &= \left(\frac{\theta}{\theta + \lambda\rho}\right)^w \left(\frac{\lambda\rho}{\theta + \lambda\rho}\right)^n \binom{w+n-1}{n} n!\end{aligned}$$

Então,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\left[\left(\frac{\theta}{\theta + \lambda\rho}\right)^w \left(\frac{\lambda\rho}{\theta + \lambda\rho}\right)^n \binom{w+n-1}{n} n!\right]}{n!}.$$

$$\therefore \mathbb{P}(X = n) = \binom{w+n-1}{n} \left(\frac{\theta}{\theta + \lambda\rho}\right)^w \left(\frac{\lambda\rho}{\theta + \lambda\rho}\right)^n.$$

□

3.0.5.1 Prova do Teorema 19 (Probabilidade de Extinção)

Demonstração. O resultado segue do Teorema 7 e da Proposição 3.8. □

3.0.5.2 Prova do Teorema 20 (Tamanho Esperado da Cascata)

Demonstração. Nesse modelo tem-se que $m = \frac{w\lambda p}{\theta} < 1$. Logo, o resultado segue do Teorema 9. Assim,

$$\mathbb{E}(C) = \frac{1}{1 - \left(\frac{w\lambda p}{\theta}\right)} = \frac{1}{\frac{\theta}{\theta} - \frac{w\lambda p}{\theta}} = \frac{1}{\frac{\theta - w\lambda p}{\theta}} = \frac{\theta}{\theta - w\lambda p}.$$

□

3.0.5.3 Prova do Teorema 21 (Distribuição da Altura da Cascata)

Considere o processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ que modela o processo $M_3(w, \theta, \lambda, p)$. A **altura da cascata**, A , pode ser pensada como a última geração do processo de ramificação com pelo menos um indivíduo:

$$A = \max\{n; Z_n > 0\}.$$

O **tempo de extinção**, T , do processo é o primeiro momento em que não há mais indivíduos. Logo,

$$T = A + 1.$$

O resultado é obtido a partir de uma aplicação direta do teorema 12.

Dessa forma, para a média do modelo, tem-se

$$m \leq \frac{w\lambda p}{\theta} < 1 \implies p \leq \frac{\theta}{w\lambda}$$

e

$$G''(1) = \frac{w(w+1)(\lambda p)^2}{\theta^2} < \infty,$$

pelo resultado de $G^{(n)}(s)$ na demonstração da Proposição 3.7

O parâmetro D é definido como o máximo entre dois valores:

$$D = \max \left[2, \frac{m}{(p_0 + m - 1)} \right]$$

Onde, para o modelo em questão, a média de descendentes é:

$$m = \frac{w\lambda p}{\theta} \implies p \leq \frac{\theta}{w\lambda}$$

e

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = G_X(0) = \left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p} \right)^w.$$

Note que

$$\frac{m}{p_0 + m - 1} = \frac{\frac{w\lambda p}{\theta}}{\left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p} \right)^w + \frac{w\lambda p}{\theta} - 1}$$

Logo,

$$D = \max \left[2, \frac{\frac{w\lambda p}{\theta}}{\left(\frac{\theta}{\theta + \lambda p} \right)^w + \frac{w\lambda p}{\theta} - 1} \right],$$

que implica no resultado que pretendia-se demonstrar.

3.0.5.4 Prova do Corolário 6 (Valor Esperado do Tempo de Extinção e Altura da Cascata)

Demonstração. O resultado é obtido diretamente do Corolário 3, basta identificar o valor de m e D e usar a relação $T = A + 1$. □

3.0.6 Modelo 4

3.0.6.1 Resultados Auxiliares

O modelo $M_4(\tau, \lambda, p)$ pode ser descrito como um processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ com $Z_0 = 1$, em que o número de descendentes diretos de um indivíduo corresponde ao número de pessoas para as quais ele transmite a informação e que acreditam nela. A distribuição do número de descendentes diretos do i -ésimo indivíduo da n -ésima $X_{n,i}$ será dada pela distribuição de uma variável aleatória X .

Proposição 3.8. (*Função Geradora de Probabilidade de X*)

A função geradora de probabilidade (FGP) da variável aleatória X é dada por

$$G_X(s) = \exp(\lambda\tau p(s - 1)).$$

Demonstração. O número de tentativas de transmissão por um indivíduo, N , durante o tempo fixo τ , segue um processo de Poisson com taxa λ . Portanto, a distribuição de N é Poisson com média $\lambda\tau$.

$$N \sim \text{Poisson}(\lambda\tau).$$

Cada uma dessas tentativas resulta em um novo indivíduo ativo com probabilidade p . O número de novos informantes gerados por um dado transmissor, X , condicionado a $N = k$ tentativas, segue uma distribuição Binomial. Isto é,

$$X|N = k \sim \text{Binomial}(k, p).$$

A Função Geradora de Probabilidades (FGP) de X é encontrada usando a lei da esperança total e teorema binomial, conforme (ROSS, 2010, cap. 2, seção 1.4, pg 22) e :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= E[E[s^X|N]] \\ &= \sum_{n=0}^k s^n \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \\ &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (sp)^n (1-p)^{k-n} \quad (\text{Pelo Teorema Binomial}) \\ &= (sp + 1 - p)^k \\ &= E[(sp + 1 - p)^N] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (sp + 1 - p)^k \cdot \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (sp + 1 - p)^k \cdot \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(\lambda\tau)(ps + 1 - p)]^k}{k!} \end{aligned}$$

Pela soma da série de Taylor para e^z , onde $z = (\lambda\tau)(ps + 1 - p)$:

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda\tau} \cdot \exp((\lambda\tau)(ps + 1 - p)) \\ &= \exp(-\lambda\tau + \lambda\tau ps + \lambda\tau - \lambda\tau p) \\ &= \exp(\lambda\tau p(s - 1)). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.9. (Distribuição de X)

A variável aleatória X possui distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda\tau p$. Sua função de probabilidade é dada por:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda\tau p}(\lambda\tau p)^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.8, basta usar o Teorema 1 e o Exemplo 2. Assim,

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda\tau p),$$

e sua função de probabilidade é

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda\tau p}(\lambda\tau p)^n}{n!}.$$

□

3.0.6.2 Prova do Teorema 22 (Probabilidade de Extinção)

Demonstração. O resultado segue do Teorema 7 e da Proposição 3.8.

□

3.0.6.3 Prova do Teorema 23 (Tamanho Esperado da Cascata)

Demonstração. Sabe-se que $m = \lambda\tau p < 1$. Logo, o resultado segue do Teorema 9. Assim,

$$\mathbb{E}(C) = \frac{1}{1 - m} = \frac{1}{1 - \lambda\tau p}.$$

□

3.0.6.4 Prova do Teorema 24 (Distribuição da Altura da Cascata)

Considere o processo de ramificação $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ que modela o processo $M_4(\tau, \lambda, p)$. A **altura da cascata**, A , pode ser pensada como a última geração do processo de ramificação com pelo menos um indivíduo:

$$A = \max\{n; Z_n > 0\}.$$

O **tempo de extinção**, T , do processo é o primeiro momento em que não há mais indivíduos. Logo,

$$T = A + 1.$$

Demonstração. Este resultado é uma aplicação direta do Teorema 11, que fornece limites para o tempo de extinção T de um processo subcrítico. Primeiro observe que

$$\begin{aligned} h(s) &= G'(1) \cdot G''(s) - G'(s) \cdot G''(1) \\ &= (\lambda p \tau)(\lambda p \tau)^2 e^{\lambda p \tau (s-1)} - \lambda p \tau e^{\lambda p \tau (s-1)} \cdot (\lambda p \tau)^2 \\ &= (\lambda p \tau)^3 e^{\lambda p \tau (s-1)} - (\lambda p \tau)^3 e^{\lambda p \tau (s-1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $h(s) \geq 0$ para todo $s \in [0; 1]$ o teorema pode ser aplicado. Para finalizar a prova do teorema é necessário calcular os coeficientes c_u , c_l , s_u e s_l .

Para a FGP $G(s) = e^{m(s-1)}$, onde $m = \lambda\tau p$:

- $G(0) = e^{-m}$
- $G'(1) = m$
- $G''(1) = m^2$

Os coeficientes são:

$$c_u = \frac{G'(1) + G(0) - 1}{G'(1)} = \frac{m + e^{-m} - 1}{m}$$

$$c_l = \frac{G''(1)}{2G'(1) + G''(1)} = \frac{m^2}{2m + m^2} = \frac{m}{2 + m}$$

A partir destes, calculamos s_u e s_l :

$$s_l = \frac{1 - m(1 - c_l)}{c_l} = \frac{1 - m\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\frac{m}{2+m}} = \frac{m + 2 - 2m}{m} = \frac{2 - m}{m}$$

$$s_u = \frac{1 - m(1 - c_u)}{c_u} = \frac{1 - (1 - e^{-m})}{\frac{m + e^{-m} - 1}{m}} = \frac{e^{-m}}{\frac{m + e^{-m} - 1}{m}} = \frac{me^{-m}}{m + e^{-m} - 1}$$

O Teorema 11 estabelece que $1 - \frac{m^n(s_l - 1)}{s_l - m^n} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq 1 - \frac{m^n(s_u - 1)}{s_u - m^n}$.

A altura da cascata é definida como $A = T - 1$, então $\mathbb{P}(A \leq n) = \mathbb{P}(T \leq n + 1)$.

Substituindo n por $n + 1$ na inequação acima, obtem-se o resultado. \square

3.0.6.5 Prova do Corolário 7 (Valor Esperado da Altura da Cascata)

Demonstração. O resultado é obtido diretamente do Corolário 2, por meio da relação $T = A + 1$, quando uma vez obtidos os valores de s_l e s_u e tendo a média m . \square

Conclusão

Este trabalho propôs-se a analisar a dinâmica da transmissão de rumores em redes, adotando como alternativa a modelagem por processos estocásticos para entender o fenômeno da propagação e possibilitar soluções para o controle dessa transmissão. O objetivo geral foi alcançado através da construção e análise de quatro modelos probabilísticos distintos, todos fundamentados na teoria dos Processos de Ramificação e tendo como alicerce as Funções Geradoras de Probabilidade. A partir de um ponto de vista teórico, foram encontrados resultados para diferentes mecanismos de impedimento à disseminação que afetam o comportamento da propagação.

Para cada um dos quatro modelos, as características matemáticas que definem a transmissão foram calculadas. A principal contribuição teórica deste estudo foi a derivação formal da Função Geradora de Probabilidade (FGP) específica para o número de descendentes diretos de cada modelo. Esta etapa foi crucial, pois a natureza da FGP obtida — seja Fracional Linear ($M_1(\theta, \lambda, p)$ e $M_2(\theta, q, \lambda, p)$), Binomial Negativa ($M_3(w, \theta, \lambda, p)$) ou Poisson ($M_4(\tau, \lambda, p)$) — ditou os resultados subsequentes.

Com as FGPs estabelecidas, foi possível responder matematicamente aos objetivos específicos delineados na introdução. Para cada modelo, calculou-se o número esperado de descendentes (m), que define a condição crítica ($m \leq 1$) sob a qual a desinformação certamente desaparece. Demonstrou-se como m depende diretamente dos parâmetros de contenção, como a taxa de verificação (θ), a probabilidade de bloqueio (q) ou o número de verificações (w).

Adicionalmente, foram derivadas as equações que definem a probabilidade de extinção (ψ) nos casos supercríticos ($m > 1$), o valor esperado do tamanho da cascata ($E[C]$) nos regimes subcríticos, e a distribuição ou cotas para a altura da cascata (A). Com isso, demonstrou-se que os modelos $M_1(\theta, \lambda, p)$ e $M_2(\theta, q, \lambda, p)$ permitem o cálculo exato da distribuição do tempo de extinção, enquanto nos Modelos 3 e 4 foram estabelecidos limites para essa distribuição.

As fórmulas para m (como $m = \lambda p / \theta$ em $M_1(\theta, \lambda, p)$ ou $m = w \lambda p / \theta$ em $M_3(w, \theta, \lambda, p)$) quantificam a eficácia das estratégias de controle: para garantir a extinção, as intervenções devem focar em reduzir a taxa de transmissão (λ) e a probabilidade de crença (p), ou em aumentar a eficácia dos mecanismos de verificação (aumentando θ ou q , ou reduzindo w).

Reconhece-se que os modelos aqui propostos se baseiam em pressupostos que simplificam a dinâmica real; um exemplo disso é que os parâmetros assumidos como homogêneos para todos os indivíduos. Como sugestão para trabalhos futuros, os parâmetros como λ, p, θ, q poderiam ser estimados a partir de dados reais de disseminação, comparando as distribuições de cascata observadas com as derivadas neste trabalho. Teoricamente, uma possível extensão destes modelos de contenção é operar sobre grafos (possivelmente mais complexos), que superam a estrutura

de árvore implícita ao PR, onde cada indivíduo contatado é novo e não há fatores relativos à integração ou conexão prévia dos indivíduos envolvidos.

Referências

- AGRESTI, A. Bounds on the extinction time distribution of a branching process. **Advances in Applied Probability**, London, v. 6, n. 2, p. 322–335, 1974. Citado na página 31.
- AGRESTI, A. Bounds on the extinction time distribution of a branching process. **Advances in Applied Probability**, v. 6, p. 331, 1974. Citado na página 34.
- DWASS, M. The total progeny in a branching process and a related random walk. **Journal of Applied Probability**, v. 6, n. 3, p. 682–686, 1969. Citado na página 31.
- GOMEZ, L. M.; JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M. The impact of effective participation in stopping misinformation: an approach based on branching processes. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, v. 2024, p. 033402, 2024. Citado na página 18.
- HARRIS, T. E. **The Theory of Branching Processes**. Berlin; Englewood Cliffs, N.J.: Springer-Verlag; Prentice-Hall, 1963. v. 119. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, v. 119). Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- HWANG, T.-Y.; WANG, N.-S. On best fractional linear generating function bounds. **Journal of Applied Probability**, Cambridge University Press (CUP), v. 16, n. 2, p. 449–453, June 1979. Citado na página 33.
- JUNIOR, V. V. **Funções Geradoras de Probabilidade e Processos de Ramificação**. 2021. Minicurso apresentado na Semana do Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Citado na página 20.
- JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M.; SPEROTO, A. Stochastic rumors on random trees. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, v. 2021, p. 123403, 2021. Citado na página 18.
- PUERRRES, J. F.; JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M. Critical thresholds in stochastic rumors on trees. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 201, p. 117373, 2025. Citado na página 18.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, 2024. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado na página 39.
- ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. 8. ed. [S.l.]: Bookman, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 50, 62 e 68.
- ROSS, S. M. **Stochastic Processes**. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 1996. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics). Citado 2 vezes nas páginas 20 e 30.
- STEWART, J. **Cálculo: Volume 2**. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 33, 35 e 68.

APÊNDICE A – Fundamentos Matemáticos Auxiliares

Teorema A. 1 (Lei da Esperança Total). *Seja X uma variável aleatória e N uma variável aleatória com valores nos inteiros não negativos (caso discreto). A esperança de X pode ser calculada como a esperança condicional de X em relação a N , ou seja:*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N]].$$

A expansão no caso discreto é dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X|N = n] \mathbb{P}(N = n).$$

A demonstração pode ser encontrada em (ROSS, 2010, cap. 7, seção 7.5.2).

Teorema A. 2 (Série de Maclaurin para a Função Exponencial). *A função exponencial e^z pode ser representada pela seguinte série de potências, que converge para todo $z \in \mathbb{R}$:*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

A demonstração pode ser encontrada em (STEWART, 2013, v. 2, p. 681).

Teorema A. 3 (Teorema Binomial). *Para qualquer número real x e y , e para qualquer número inteiro não negativo k , a potência k do binômio $(x + y)$ é dada por:*

$$(x + y)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n y^{k-n},$$

onde $\binom{k}{n}$ é o coeficiente binomial definido por:

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}.$$

A demonstração pode ser encontrada em (ROSS, 2010, cap. 2, seção 1.4, pg 22).

APÊNDICE B – Códigos

Listing B.1 – Simulação do Modelo 1 – Convergência de $E(A)$

```

# Modelo 1
rm(list=ls())
set.seed(2025)
# Funcao para gerar n amostras da distribuicao mista de X
rdistX <- function(n, lambda, theta, p) {
  p0 <- theta / (theta + lambda * p)
  u <- runif(n)
  resultados <- numeric(n)
  casos_geometricos <- u >= p0
  num_geometricos <- sum(casos_geometricos)
  if (num_geometricos > 0) {
    resultados[casos_geometricos] <- rgeom(num_geometricos, prob = p0
    ) + 1
  }
  return(resultados)
}
# Funcao para simular uma realizacao da altura A do Modelo 1
simular_uma_realizacao_mod1 <- function(lambda, theta, p) {
  a <- 0
  contador <- sum(rdistX(1, lambda, theta, p))
  if (contador > 0) a <- 1
  while (contador > 0) {
    zn <- rdistX(contador, lambda, theta, p)
    contador <- sum(zn)
    if (contador > 0) a <- a + 1
  }
  return(a)
}
# Calculo do valor teorico de E[A]
calc_EA_teorico_mod1 <- function(lambda, theta, p, N = 1e6, tol = 1e
-10) {
  m <- (lambda * p) / theta
  if (p >= theta / lambda) {
    return(Inf)
  }
  s0 <- theta / (lambda * p)
  total <- 0

```

```

for (n in 1:N) {
  termo <- (m^n * (s0 - 1)) / (s0 - m^n)
  total <- total + termo
  if (abs(termo) < tol) break
}
return(total)
}
# Parametros
lambda <- 2
theta <- 1
p <- 0.49
# Esperanca teorica
EA_teorico <- calc_EA_teorico_mod1(lambda, theta, p)
# Simulacao para LGN
N <- 10000
media_acumulada <- numeric(N)
soma_A <- 0
for (i in 1:N) {
  Ai <- simular_uma_realizacao_mod1(lambda, theta, p)
  soma_A <- soma_A + Ai
  media_acumulada[i] <- soma_A / i
}
png("grafico_modelo1_LGN.png", width=1000, height=600, res=140)
par(mgp = c(2, 0.6, 0)) # aproxima os eixos dos rotulos
plot(1:N, media_acumulada, type="l", lwd=2, col="black",
      xlab="Numero_de_simulacoes_(n)",
      ylab="E(A)",
      ylim=c(0, max(media_acumulada, EA_teorico)*1.2))
abline(h=EA_teorico, col="blue", lwd=2, lty=2)
legend("topright",
      legend=c("E(A)_simulada", "E(A)_teorica"),
      col=c("black", "blue"),
      lwd=c(2,2), lty=c(1,2), bty="n", cex=0.7)
grid()
dev.off()

```

Listing B.2 – Simulacao do Modelo 2 – Convergencia de E(A)

```

rm(list=ls())
set.seed(2025)
# Funcao para gerar n amostras da distribuicao mista de X (muda
  somente theta para q*theta)
rdistX_mod2 <- function(n, lambda, theta, q, p) {

```

```

theta_q <- q * theta
p0 <- theta_q / (theta_q + lambda * p)
u <- runif(n)
resultados <- numeric(n)
casos_geometricos <- u >= p0
num_geometricos <- sum(casos_geometricos)
if (num_geometricos > 0) {
  resultados[casos_geometricos] <- rgeom(num_geometricos, prob = p0
    ) + 1 }
return(resultados)}
# Funcao para simular uma realizacao da altura A do Modelo 2
simular_uma_realizacao_mod2 <- function(lambda, theta, q, p) {
  a <- 0
  contador <- sum(rdistX_mod2(1, lambda, theta, q, p))
  if (contador > 0) a <- 1
  while (contador > 0) {
    zn <- rdistX_mod2(contador, lambda, theta, q, p)
    contador <- sum(zn)
    if (contador > 0) a <- a + 1
  }
  return(a)}
# Calculo do valor teorico de E[A]
calc_EA_teorico_mod2 <- function(lambda, theta, q, p, N = 1e6, tol =
  1e-10) {
  m <- (lambda * p) / (theta * q)
  if (p >= (theta * q) / lambda) {
    return(Inf)
  }
  s0 <- (theta * q) / (lambda * p)
  total <- 0
  for (n in 1:N) {
    termo <- (m^n * (s0 - 1)) / (s0 - m^n)
    total <- total + termo
    if (abs(termo) < tol) break
  }
  return(total)
}
# Parametros
lambda <- 2
theta <- 1
q <- 0.5
p <- 0.24

```

```

(lambda * p) / (q*theta)
# Esperanca teorica
EA_teorico <- calc_EA_teorico_mod2(lambda, theta, q, p)
cat("E[A]_teorico_(Modelo_2)_=", round(EA_teorico, 6), "\n\n")
# Simulacao para LGN
N <- 10000
media_acumulada <- numeric(N)
soma_A <- 0
for (i in 1:N) {
  Ai <- simular_uma_realizacao_mod2(lambda, theta, q, p)
  soma_A <- soma_A + Ai
  media_acumulada[i] <- soma_A / i
}
png("grafico_modelo2_LGN.png", width=1000, height=600, res=140)
par(mgp = c(2, 0.6, 0)) # aproxima os rotulos dos eixos
plot(1:N, media_acumulada, type="l", lwd=2, col="black",
      xlab="Numero_de_simulacoes_(n)",
      ylab="E(A)",
      ylim=c(0, max(media_acumulada, EA_teorico)*1.2))
abline(h=EA_teorico, col="blue", lwd=2, lty=2)
legend("topright",
      legend=c("E(A)_simulada", "E(A)_teorica"),
      col=c("black", "blue"),
      lwd=c(2,2), lty=c(1,2), bty="n", cex=0.7)
grid()
dev.off()

```

Listing B.3 – Simulacao do Modelo 3 – Convergencia de E(A)

```

rm(list=ls())
set.seed(2025)
w = 8
theta = 2
lambda = 1
p = 0.12
(w * lambda * p) / theta #somente para conferir a media menor que um
# funcao para simular a altura (A) de UMA rodada do Modelo 3
simula_altura_m3 <- function(w, theta, lambda, p, max_geracoes = 100)
{
  prob_sucesso_nb <- theta / (theta + lambda * p)
  if (prob_sucesso_nb <= 0 || prob_sucesso_nb > 1) { return(0) }
  pop_geracao_atual <- 1
  altura_cascata <- 0

```

```

geracao_atual <- 0
while (pop_geracao_atual > 0 && geracao_atual < max_geracoes) {
  num_pais <- pop_geracao_atual
  # Simula o total de filhos de todos os pais da geracao
  num_filhos_total_geracao <- rnbinom(1, size = num_pais * w, prob
    = probb_sucesso_nb)
  pop_geracao_atual <- num_filhos_total_geracao
  if (pop_geracao_atual > 0) {
    altura_cascata <- altura_cascata + 1
  }
  geracao_atual <- geracao_atual + 1
}
return(altura_cascata)}
# funcao que calcula os limites teoricos de E[A] do Modelo 3
calcula_limites_E_A_M3 <- function(w, theta, lambda, p, max_n = 5000,
  tol = 1e-15) {
  m <- (w * lambda * p) / theta
  if (m >= 1) {
    cat("Caso_critico_ou_supercritico_(m_>=1).\n")
    return(c(E_A_Lower = NA, E_A_Upper = NA))
  }
  p0 <- (theta / (theta + lambda * p))^w
  D_component <- m / (p0 + m - 1)
  D <- max(2, D_component)
  # G''(1)
  G_xx_1 <- (w * (w + 1) * (lambda * p)^2) / (theta^2)
  # Constantes C_L e C_S
  C_L <- (m * (1 - m)) / G_xx_1
  C_S <- D * (1 - m)
  E_A_lower <- 0
  E_A_upper <- 0
  # Somatorio de n=1 ate max_n
  for (n in 1:max_n) {
    m_n <- m^n
    term_lower <- 1 - ((1 + C_L) * (1 - m_n)) / (1 + C_L - m_n)
    term_upper <- 1 - ((1 + C_S) * (1 - m_n)) / (1 + C_S - m_n)

    E_A_lower <- E_A_lower + term_lower
    E_A_upper <- E_A_upper + term_upper

    if (term_upper < tol) { break }
  }
}

```

```

return(c(E_A_Lower = E_A_lower, E_A_Upper = E_A_upper))}

# SIMULACAO LGN
# parametros fixos
w_sim <- 8
theta_sim <- 2
lambda_sim <- 1
p_sim <- 0.12
# Sequencia de passos
passos <- c(1:50,
            seq(60, 500, by=10),
            seq(600, 2500, by=100))
passos <- unique(passos)
maxN <- max(passos)
limites_teoricos <- calcula_limites_E_A_M3(w_sim, theta_sim, lambda_
sim, p_sim) # Calcula a faixa [LI, LS]
LI <- limites_teoricos["E_A_Lower"]
LS <- limites_teoricos["E_A_Upper"]
media_acumulada <- numeric(length(passos))
soma_A <- 0
idx <- 0
E_A_simulado_final <- 0 # Para armazenar o valor final
for (i in 1:maxN) {
  Ai <- simula_altura_m3(w_sim, theta_sim, lambda_sim, p_sim)
  soma_A <- soma_A + Ai
  if (i %in% passos) { # armazena a media acumulada somente nos
    passos definidos
    idx <- idx + 1
    media_acumulada[idx] <- soma_A / i
  }
  if (i == maxN) {
    E_A_simulado_final <- soma_A / i # armazena o valor final }}
output_filename <- "grafico_modelo3_final.png"
png(output_filename, width=1000, height=600, res=140)
par(mgp = c(2, 0.6, 0))
ylim_plot <- c(min(media_acumulada, LI) * 0.9, max(media_acumulada,
  LS) * 1.1)
plot(passos, media_acumulada, type="l", lwd=2, col="black",
  xlab="Numero_de_simulacoes_(n)",
  ylab="E(A)",
  xaxt="n",
  ylim=ylim_plot

```

```

)
xticks <- c(0, 500, 1000, 2500, 5000) # Tiques do eixo X
xticks <- xticks[xticks <= max(passos)]
axis(1, at=xticks, labels=xticks)
abline(h=LI, col="blue", lwd=2, lty=2) # Linhas dos limites
abline(h=LS, col="red", lwd=2, lty=2)
legend("topright",
      legend=c("E(A)_simulada", "Limite_Inferior_(LI)", "Limite_
      Superior_(LS)"),
      col=c("black", "blue", "red"),
      lwd=2, lty=c(1,2,2), bty="n", cex = 0.5)
grid()
dev.off()

```

Listing B.4 – Simulacao do Modelo 4 – Convergencia de E(A)

```

rm(list=ls())
set.seed(2025)

# Funcao de calculo dos limites teoricos
calc_bounds <- function(lambda, theta, p, N = 1000000, tol = 1e-10) {
  m <- lambda * theta * p
  s_l <- (2 - m) / m
  s_u <- (m * exp(-m)) / (m + exp(-m) - 1)
  partial_sum <- function(s) {
    total <- 0
    for (n in 1:N) {
      term <- (m^n * (s - 1)) / (s - m^n)
      total <- total + term
      if (abs(term) < tol) break
    }
    return(total)
  }
  LI <- partial_sum(s_u)
  LS <- partial_sum(s_l)
  return(list(LI = LI, LS = LS))
}

# Funcao de simulacao do Modelo 4
simular_uma_realizacao_mod4 <- function(lambda, tau, p){
  a <- 0
  param <- lambda * tau * p
  contador <- rpois(1, param)
  if(contador > 0) a <- 1
}

```

```

while(contador > 0){
  zn <- rpois(contador, param)
  contador <- sum(zn)
  if(contador > 0) a <- a + 1
}
return(a)
}
# Parametros
lambda <- 2
tau <- 4
p <- 0.12
theta <- tau # apenas para compatibilidade da funcao de limite

# Calculo dos limites teoricos (somente uma vez)
bounds <- calc_bounds(lambda, theta, p)
LI <- bounds$LI
LS <- bounds$LS
cat("Limite_inferior_(LI)_=", round(LI, 4), "\n")
cat("Limite_superior_(LS)_=", round(LS, 4), "\n")

# Simulacao da media acumulada
N <- 2500 # numero de repeticoes
media_acumulada <- numeric(N)
soma_A <- 0
for (i in 1:N) {
  Ai <- simular_uma_realizacao_mod4(lambda, tau, p)
  soma_A <- soma_A + Ai
  media_acumulada[i] <- soma_A / i
}
png("grafico_modelo4_final.png", width=1000, height=600, res=140)
par(mgp = c(2, 0.6, 0))
plot(1:N, media_acumulada, type="l", lwd=2, col="black",
     xlab="Numero_de_simulacoes_(n)",
     ylab="E(A)")
abline(h=LI, col="blue", lwd=2, lty=2)
abline(h=LS, col="red", lwd=2, lty=2)
legend("topright",
      legend=c("E(A)_simulada",
              "Limite_Inferior_(LI)",
              "Limite_Superior_(LS)"),
      col=c("black", "blue", "red"),
      lwd=c(2,2,2), lty=c(1,2,2), bty="n", cex = 0.6)

```

```
grid()  
dev.off()
```