

Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística

Luís Fernando Pereira Artuzi

**Introdução a Sistemas Suaves por Partes com Duas ou Três Zonas no Plano**

Goiânia

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

### 1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Luís Fernando Pereira Artuzi

Introdução a sistemas suaves por partes com duas ou três zonas no plano

### 2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento:

SIM  NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

#### Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

**Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Fernando Goncalves, Professor do Magistério Superior**, em 01/12/2025, às 08:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luís Fernando Pereira Artuzi, Discente**, em 09/12/2025, às 14:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Luís Fernando Pereira Artuzi

## **Introdução a Sistemas Suaves por Partes com Duas ou Três Zonas no Plano**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás para aprovação no componente curricular TCC, como parte das exigências para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Gonçalves

Área de Concentração: Matemática

Goiânia

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Artuzi, Luís Fernando Pereira  
Introdução a Sistemas Suaves por Partes com Duas ou Três Zonas no Plano [manuscrito] / Luís Fernando Pereira Artuzi. - 2025.  
85 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Gonçalves .  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Matemática, Goiânia, 2025.

Bibliografia.

Inclui símbolos, lista de figuras.

1. Existência e unicidade de soluções de edo's. 2. Ciclos limite. 3. Campos descontinuos. I. Gonçalves , Luiz Fernando , orient. II. Título.

CDU 517.938



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

### ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos três dias do mês de dezembro do ano de 2025 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “*Introdução a Sistemas Suaves por partes com duas ou três zonas no plano*”, de autoria de Luís Fernando Pereira Artuzi, do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. Dr. Luiz Fernando Gonçalves (IME/UFG), membro da banca e orientador do discente, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Prof. Dr. Gregory Duran Cunha (IME/UFG) e Prof. Dr. Alacyr José Gomes (IME/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 9.5, tendo sido o TCC considerado aprovado.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Fernando Goncalves, Professor do Magistério Superior**, em 03/12/2025, às 15:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gregory Duran Cunha, Professor do Magistério Superior**, em 03/12/2025, às 15:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alacyr Jose Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 03/12/2025, às 15:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5801946** e o código CRC **1E929BDF**.

Dedico este trabalho às pessoas que me criaram,  
meus pais que sempre se esforçaram para me educar,  
aos meus avós que cuidaram muito bem de mim,  
a toda minha família  
que me ensinou a buscar ser uma pessoa melhor a cada dia.

## Agradecimentos

---

Sei que sem o apoio que tive não conseguiria ter chegado até aqui. Principalmente, de meus pais, Kênia e Rogério, que sempre acreditaram em mim, me incentivando a tentar coisas novas, a manter disciplina para não ficar todo tempo ocioso e enfrentar os obstáculos que aparecem a minha frente. Agradeço imensamente por, como eles dizem, "serem chatos" e me cobrarem a ser uma pessoa melhor e a não ficar parado. Ao meu irmão, Vinícius, meu companheiro de jogos, de treino, e de divagações.

Aos meus padrinhos e madrinhas, tios e tias, que cuidaram de mim e me ensinaram as mais diversas coisas, seja cortar lenha, "panhar" e limpar morango, cuidar do meu irmão e dos meus primos, entre outras coisas, coisas essas que me ensinaram a ter mais responsabilidade.

Aos meus primos, Allan Jhones, Artur Jeferson, Heitor Rafael, Isabel, Maria Eduarda e Victor Luiz. Que a convivência sempre foi muito importante para mim, mesmo às vezes ficando longe, passar um tempo, (conversar), com todos vocês me inspirou e me ajudou a enxergar o porquê de escolher esse curso.

Aos amigos que consegui durante esse curso, que me ajudaram a passar por todo o período da graduação, proporcionando ótimos momentos, a Cler, a Timpurim, o Hantares, a Bruna, os Brunos, Augusto, João Pedro, Daniel, Sabrina, Lorena, Luana, Antônio, Evelin, Thiago, Tiago, Gustavo, Déborah, em especial, Julio César e Glauber, amigos que espero levar para vida toda.

Ao meu orientador, Luiz Fernando, agradeço imensamente a paciência ao me orientar. Me ajudou muito me guiando no conteúdo matemático, propondo disciplinas optativas que poderiam me ajudar nessa jornada e incentivando a participar de iniciação científica, além da organização das ideias e estrutura desse trabalho.

## Resumo

---

Este trabalho tinha como objetivo a introdução à Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e Sistemas Suaves por Partes. Primeiramente, faz-se necessário o contato com definições básicas e teoremas principais da teoria. Posteriormente, inicia-se o estudo dos sistemas suaves por partes, em particular, na busca de ciclos limite em sistemas lineares por partes. Foram utilizadas técnicas tradicionais de pesquisa matemática, consistindo no estudo direcionado das referências bibliográficas propostas e reuniões de acompanhamento com o desenvolvimento dos problemas sugeridos por meio de análises e discussões das principais definições e demonstrações de teoremas que englobam o tema e, através do estudo do artigo [12], investigamos a existência de ciclos limite em sistemas diferenciais por partes formados por centros lineares e selas Hamiltonianas. A princípio, consideram-se sistemas contínuos ou descontínuos divididos por uma única reta, onde prova-se a não existência de ciclos limite. Em seguida, investiga-se o caso de sistemas contínuos e descontínuos com três zonas, separadas por duas retas paralelas. Neste contexto, observa-se que nos casos contínuos não há ciclos limite, ao contrário dos casos descontínuos, que apresentam no máximo um ciclo limite. Dessa forma, esse plano de pesquisa proporcionou o contato e aprofundamento teórico acerca do conteúdo de sistemas dinâmicos, além da introdução ao ambiente de pesquisa científica, trabalhando o estudo crítico e a capacidade de investigação.

**Palavras-chave:** Existência e Unicidade de Soluções de EDOs; Ciclos Limite; Campos Descontínuos.

## *Abstract*

---

This work had as its objective the introduction to the Qualitative Theory of Differential Equations and Discontinuous Systems. Firstly, contact with the basic definitions and principal theorems of the theory is necessary. Subsequently, the study of piecewise smooth systems begins, in particular, in the search for limit cycles in piecewise linear systems. Traditional techniques of mathematical research were used, consisting of the focused study of the proposed bibliographical references and follow-up meetings with the development of the problems suggested through analyses and discussions of the main definitions and proofs of theorems that encompass the theme, through the study of the article [12], we investigate the existence of limit cycles in piecewise differential systems formed by linear centers and Hamiltonian saddles. Initially, continuous or discontinuous systems divided by a single line are considered, where the non-existence of limit cycles is proven. Next, the study proceeds to continuous and discontinuous systems with three zones, separated by two parallel lines. In this context, it is observed that in the continuous cases there are no limit cycles, contrary to the discontinuous cases, which present at most one limit cycle. In this way, this research plan provided contact and theoretical deepening regarding the content of dynamic systems, in addition to the introduction to the scientific research environment, working on critical study and the capacity for investigation.

**Keywords:** Existence and Uniqueness of Solutions of ODEs. Limit Cycles. Discontinuous Fields.

## Lista de Figuras

---

2.1	Retrato de fase de um exemplo de Nó atrator representado pelo campo vetorial $X=(-x,-3y)$ . . . . .	35
2.2	Retrato de fase de um exemplo de Sela formada pelo campo vetorial $X = (x, -y)$	37
2.3	Retrato de fase de um exemplo de Nó estrelado formado pelo campo vetorial $X = (-x, -y)$ . . . . .	38
2.4	Retrato de fase de um exemplo de Nó Impróprio formado pelo campo vetorial $X = (4x + 2y, -2x)$ . . . . .	40
2.5	Retrato de fase de um exemplo de Centro formada pelo campo vetorial $X = (-y, x)$ . . . . .	41
2.6	Retrato de fase de um exemplo de Foco Atrator formada pelo campo vetorial $X = \left(-\frac{1}{2}x - y, x - \frac{1}{2}y\right)$ . . . . .	41
2.7	Retrato de fase de um exemplo de Foco Repulsor formada pelo campo vetorial $X = \left(\frac{1}{2}x - y, x + \frac{1}{2}y\right)$ . . . . .	42
2.8	Aplicação de Poincaré. . . . .	43
3.1	Arcos de costura, deslize e escape, respectivamente. . . . .	46
3.2	Campo de Filippov. . . . .	47
3.3	Retrato de fase do campo $Z_1$ dado em (3.2) . . . . .	49
3.4	Retrato de fase do campo $Z_2$ dado por (3.3). . . . .	51
3.5	Retrato de fase do campo $Z_3$ dado por (3.4). . . . .	52
3.6	Aplicação de Poincaré em Sistemas Suaves por Partes. . . . .	53
4.1	Retrato de fase dos sistemas diferenciais dados em (4.0.1), respectivamente. . .	58
4.2	Retrato de fase do campo vetorial suave por partes formado pelo sistemas dados em (4.0.1) separados pela reta em $x = 0$ . . . . .	59
4.3	Exemplo de sistema diferencial linear por partes descontínuo formado por um centro e uma sela Hamiltoniana. . . . .	62

---

4.4	Exemplo de um campo vetorial suave por partes contínuo separado por duas curvas de separação. . . . .	66
4.5	Ciclo limite do sistema diferencial descontínuo por partes (4.20) formado por dois centros lineares e uma sela Hamiltoniana linear. . . . .	72
4.6	Ciclo limite do sistema diferencial descontínuo por partes (4.31) formado por dois centros lineares e uma sela Hamiltoniana linear. . . . .	81

## Sumário

---

<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>Sumário</b>	<b>11</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Metodologia</b>	<b>13</b>
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>15</b>
2.1 Espaços Métricos e Normados . . . . .	15
2.2 Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	21
2.3 Sistemas Bidimensionais Simples . . . . .	33
<b>3 Sistemas Suaves Por Partes</b>	<b>44</b>
<b>4 Ciclos Limite em Sistemas Descontínuos com Centros e Selas Hamiltonianas Lineares</b>	<b>54</b>
<b>Considerações Finais</b>	<b>83</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>84</b>

## Introdução

---

As Equações Diferenciais Ordinárias (ou simplesmente EDO's) são importantes ferramentas que modelam vários fenômenos do mundo real, englobando diversas áreas, como Física, engenharias, Biologia e economia, permitindo analisar e prever o comportamento dos sistemas dinâmicos estudados. Entretanto, não há uma forma geral de se encontrar a solução de uma EDO, e apesar de se ter formas analíticas de se resolver alguns tipos de EDO's, ainda há incontáveis equações que resistiram a esses métodos, o que levou à investigação de métodos e aproximação numérica, que obteve certo êxito, mas tinha difícil implementação já que os cálculos eram manuais ou utilizando equipamentos muito primitivos. Essa falta de equipamento adequado sofre uma mudança após a Segunda Guerra Mundial, período em que houve diversos avanços na área da computação.

Outra mudança na forma de se estudar EDO's foi a adoção de métodos geométricos ou topológicos, buscando entender as soluções da equação diferencial qualitativamente. Assim, nasce a base do que conhecemos hoje como Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, através de Henri Poincaré, ao publicar seu trabalho *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* (veja [17]), onde ele introduz esta forma de se estudar as EDO's, gerando importantes resultados e ferramentas que permitem o estudo do comportamento das trajetórias e os retratos de fase de equações diferenciais utilizando aspectos geométricos, topológicos, analíticos, dentre outros.

Nas últimas décadas, notou-se que diversas aplicações relacionadas a engenharia (como teoria de controle e circuitos elétricos), biologia (como, por exemplo, mudanças bruscas na dieta alimentar) poderiam ser melhor modelados por sistemas diferenciais por partes, isto é, diferentes campos vetoriais definidos em regiões distintas com uma curva (ou variedade) de transição. Tais sistemas foram chamados de sistemas diferenciais por partes ou sistemas de Filippov.

Esses sistemas foram apontados, pioneiramente, por Andronov (veja [1]) que trouxe aplicações desta classe de sistemas e, em sequência, por Filippov (veja [7]) que conduziu a uma fundamentação teórica. Veja [5] para teoria e aplicações de campos descontínuos.

---

Um dos conjuntos triviais mais importantes na teoria dos sistemas dinâmicos são as órbitas periódicas isoladas, chamadas de ciclos limite. Um dos tópicos estudados na teoria qualitativa engloba bifurcações de ciclos limite e o número máximo de ciclos limite que podem surgir em uma família de campos vetoriais, ou seja sua ciclicidade, devido a sua relevância tanto para matemática quanto em aplicações em modelos reais. A análise desses ciclos limite em campos vetoriais planares  $X_\lambda$  próximos a um contínuo de órbitas periódicas ou um equilíbrio do tipo centro pode ser feita examinando os pontos fixos de um mapa de retorno  $P_\lambda$  ou, ainda, identificando os zeros da função conhecida como função de deslocamento ( $\delta_\lambda = P_\lambda I_d$ ). Esta técnica tem importante papel no estudo de ciclos limite de cruzamento em campos vetoriais descontínuos.

Este trabalho de conclusão de curso se baseia no estudo de sistemas suave por partes com duas ou três zonas e está organizado da seguinte maneira. No primeiro capítulo, (1), é exposta a metodologia usada para construir as ideias aqui trabalhadas, como esse trabalho foi escrito e estruturado, quais as ferramentas foram usadas para auxiliar no desenvolvimento e análise do conteúdo. O segundo capítulo, (2), se ocupa em expor um resumo da base teórica usada para introduzir o conteúdo de sistemas dinâmicos voltado ao estudo da Teoria Qualitativa das EDO's. Assim, são apresentados conceitos necessários abordados em Análise e Espaços Métricos, cuja finalidade é a demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf, que confere existência e unicidade de soluções de EDO's. No capítulo 3 introduzimos a teoria de sistemas suaves por partes, apresentando as definições básicas para determinar o contato dos campos com a curva de descontinuidade e a definição de suas órbitas e ciclos limite. Por fim, no Capítulo 4 analisamos os resultados do artigo [12] onde investiga-se a existência de ciclos limite para um sistema suave por partes com duas ou três zonas no plano, formado por centros ou selas lineares Hamiltonianas.

---

## Metodologia

---

Neste trabalho foram usadas técnicas tradicionais de pesquisa e investigação matemática. Segundo Ponte, Brocado e Oliveira em [18], investigação matemática é buscar relações entre objetos matemáticos, sejam eles conhecidos ou não, definindo antes qual o problema que se queira solucionar, ainda, apresenta um quadro que enumera quatro momentos principais que envolvem a investigação matemática.

Vemos que a investigação matemática, como abordado no quadro apresentado em [18], em um primeiro momento, inicia-se a exploração e formulação de questões, partindo para as conjecturas, onde organizamos os dados e formulamos hipóteses para serem estudadas. Seguindo para a realização de testes e reformulações nas suposições iniciais, onde teremos justificativas que corroborem ou não para essas formulações produzidas de início permitindo uma avaliação do raciocínio construído e dos resultados obtidos.

Dessa forma, a investigação matemática no contexto dos sistemas dinâmicos aqui abordados, se refere ao estudo da existência de ciclos limite em sistemas diferenciais por partes lineares formados por um centro e uma sela Hamiltoniana divididos por uma reta em um primeiro momento, e em seguida, analisa um sistema com três zonas no plano, sendo a questão norteadora do trabalho. Assim, direcionado por referências bibliográficas recomendadas pelo orientador e reuniões de acompanhamento com o desenvolvimento dos problemas sugeridos, foram realizadas análises e discussões das principais definições e demonstrações de teoremas que englobam o tema, formulamos as hipóteses da possibilidade de existência de ciclos limite considerando a continuidade ou descontinuidade nas formas de se construir os sistemas diferenciais citados. Pela análise do artigo de Libre e Valls em [12], conseguimos acompanhar o caminho e resultados para essas hipóteses inicialmente levantadas.

Ainda, uma das preocupações para esse trabalho, foi a utilização de ferramentas para estruturar e desenvolver o trabalho em si e das ideias nele contidas. Para a escrita e estruturação do trabalho nos moldes acadêmicos, o uso do Overleaf (um editor online em  $\text{\LaTeX}$ ) foi funda-

mental, possibilitando a produção da redação, usando símbolos e representações matemáticas diversas, e propiciando a formatação adequada exigida.

Para visualizar e esboçar ilustrações de definições e outras ideias englobadas no trabalho, foram usados recursos digitais, buscando sempre uma representação clara e precisa desses temas. Para tanto, foi usado o Inkscape, uma aplicação de desenho vetorial, que permitiu a elaboração manual das representações, conferindo um minucioso controle da qualidade de cada uma delas.

Ademais, foram utilizadas ferramentas para realizar cálculos mais elaborados, ou com equações maiores e mais complexas. Portanto, o uso de uma inteligência computacional que ajuda a fazer cálculos elaborados, e também de um software de computação técnica, que serviu de grande ajuda para efetuar alguns dos cálculos, que demandariam grande esforço e tempo para serem realizados, de forma rápida. Contudo, o uso dessas ferramentas também possibilitou gerar retratos de fase de alguns sistemas observados no decorrer do trabalho.

Dessa forma, a metodologia empregada nesse trabalho consiste no estudo e nas discussões de definições e resultados teóricos, para proporcionar um trabalho rigoroso e bem estruturado. Ainda, contamos com o uso de ferramentas digitais para melhor apresentar, compor e ilustrar a teoria abordada.

## Fundamentação Teórica

Neste capítulo reunimos definições e resultados básicos que dão suporte às demonstrações envolvendo os resultados de existência e unicidade de soluções de EDO's.

## 2.1 Espaços Métricos e Normados

**Definição 2.1.1.** (*Espaço Métrico*) É um par  $(X, d)$ , com  $X$  sendo um conjunto não vazio e  $d$  uma métrica, ou seja, uma função:

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

que satisfaz:

1.  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ , onde  $d = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ ;
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ .

Uma sequência em um espaço métrico  $(X, d)$ , ou simplesmente em  $X$ , é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  que associa a cada  $n \in \mathbb{N}$  a um  $x_n \in X$ . Usaremos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(x_n)$  como notação para essas sequências.

Uma sequência é dita convergente em  $X$  se  $\exists p \in X$ , tal que, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , com  $|x_n - p| < \varepsilon$ , ou seja,  $d(x_n, p) < \varepsilon$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$  ou  $x_n \rightarrow p$ . Ainda, uma sequência é dita de Cauchy, se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que se  $m, n > n_0$ , então,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Alguns importantes resultados sobre o conceito de sequências são os seguintes:

1. O limite de uma sequência é único;
2. Toda sequência convergente em  $X$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ ;

3. Toda sequência de Cauchy é limitada;
4. Se uma sequência de Cauchy em  $X$  possui uma subsequência que converge a um certo  $L$ , então a sequência de Cauchy em  $X$  também convergirá à  $L$ ;
5. Se  $X$  é compacto, então toda sequência de Cauchy em  $X$  será convergente;
6. Em  $\mathbb{R}^n$ , toda sequência de Cauchy é convergente.

**Definição 2.1.2.** (*Espaço Normado*) Um par  $(X, d)$  é um espaço vetorial normado se  $X$  é um espaço vetorial (real ou complexo) e

$$\begin{aligned} d: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x|, \end{aligned}$$

é uma norma em  $X$ , isto é, uma função que satisfaz:

1.  $|x| \geq 0, \forall x \in X$  e  $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$ ;
2.  $|\alpha x| = |\alpha||x|, \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ;
3.  $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in X$ .

Portanto, se  $(X, d)$  é um espaço vetorial normado, então a função

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |y - x|, \end{aligned}$$

é uma métrica em  $X$ , chamada de métrica induzida pela norma.

**Definição 2.1.3.** (*Espaço de Banach*) É um espaço métrico  $(X, d)$  completo com a métrica induzida pela norma, isto é, toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente em  $X$  com respeito à métrica:

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |y - x|, \end{aligned}$$

induzida pela norma.

Uma propriedade que será central no contexto de existência de soluções de EDO's é a propriedade Lipschitziana.

**Definição 2.1.4.** *Sejam  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  espaços métricos. Uma função*

$$\begin{aligned} F: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto F(x), \end{aligned}$$

*é dita lipschitziana em  $X$  se existe  $k > 0, k \in \mathbb{R}$ , tal que  $d_y(F(x), F(y)) \leq kd_x(x, y), \forall x, y \in X$ .*

**Exemplo 2.1.1.** *Considere o espaço normado  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . A função*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

*é lipschitziana em  $\mathbb{R}$ , com  $k = 1$ .*

De fato, sabemos que  $f$  é contínua em todo intervalo fechado  $[x, y]$  de  $\mathbb{R}$  e diferenciável em todo intervalo aberto  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}$ . Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in (x, y)$ , tal que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)|.$$

Dessa forma, obtemos que

$$|f(x) - f(y)| = |\sin(x) - \sin(y)| = |f'(c)||x - y| = |\cos(c)||x - y| \leq 1|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, temos um exemplo de uma função lipschitziana com constante  $k = 1$ .

Veremos a seguir que a condição de Lipschitz desempenha papel central na prova de unicidade de soluções de EDO's.

**Definição 2.1.5.** *Sejam  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  espaços métricos. Dizemos que  $F : X \rightarrow Y$  é localmente lipschitziana em  $X$  se, para cada  $z \in X$ , existem números reais  $r > 0$  e  $k > 0$ , tais que:*

$$d_y(F(x), F(y)) \leq kd_x(x, y), \forall x, y \in B(z, r),$$

sendo  $B(z, r) = \{w \in X : d_x(w, z) < r\}$ .

**Definição 2.1.6.** *Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow X$  em um espaço métrico  $(X, d)$ , é chamada de contração em  $X$  se existir em número real positivo  $k$ , com  $0 \leq k < 1$ .*

$$d(f(x), f(y)) = kd(x, y), \forall x, y \in X.$$

Resulta que toda contração  $F : X \rightarrow X$  é uma função lipschitziana em  $X$ , ou seja, toda contração em  $X$  é uma função uniformemente contínua em  $X$ , logo ela é contínua em  $X$ .

Um resultado que é muito importante para o Teorema de Existência e Unicidade é o famoso Teorema do Ponto Fixo de Banach que apresentaremos a seguir.

**Teorema 2.1.1.** *(Teorema de Banach - Teorema do Ponto Fixo para Contrações) Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Se  $F : X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$ , então  $F$  possui um único ponto fixo em  $X$ , isto é, existe um único  $p \in X$ , tal que  $F(p) = p$ . Além disso,  $p$  é atrator para a função  $F$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p, \forall x \in X$ .*

**Demonstração:** Seja  $F$  uma contração em  $X$ , logo existe  $k \in \mathbb{R}$  com  $0 \leq k < 1$ , tal que  $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X$ . Tome  $x \in X$  unitário e fixado. Ainda, defina  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $X$  dada por:

$$x_0 = x, x_1 = F(x), x_2 = F(F(x)), \dots, x_n = F^n(x) = F(F^{n-1}(x)), \dots,$$

Afirmção:  $(x_n)_n = (F^n(x))_n$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ . De fato, sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m > n$ , logo temos que  $m = n + r$ , para  $r \in \mathbb{N}$ . Como  $F$  é uma contração em  $X$ , temos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = d(F^n(x), F^m(x)) &= d(F^n(x), F^{n+r}(x)) \\ &= d(F^n(x), F^n(F^r(x))) \\ &= d\left(F\left(F^{n-1}(x), F\left(F^{n-1}(F^r(x))\right)\right)\right) \\ &\leq kd\left(F^{n-1}(x), F^{n-1}(F^r(x))\right) \\ &= kd\left(F\left(F^{n-2}(x), F\left(F^{n-2}(F^r(x))\right)\right)\right) \quad (2.1) \\ &\leq k^2d\left(F^{n-2}(x), F^{n-2}(F^r(x))\right) \\ &= kd\left(F\left(F^{n-3}(x), F\left(F^{n-3}(F^r(x))\right)\right)\right) \\ &\leq k^3d\left(F^{n-3}(x), F^{n-3}(F^r(x))\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

repetindo o processo  $n$  vezes chegamos à:

$$d(x_n, x_m) \leq k^n d\left(F^0(x), F^0(F^r(x))\right) = k^n d(x, F^r(x)).$$

Usando a Desigualdade Triangular, teremos que

$$\begin{aligned}
 d(x, F^r(x)) &\leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + d(F^2(x), F^3(x)) + \dots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \\
 &\leq d(x, F^r(x)) + k \cdot d(x, F^r(x)) + k^2 \cdot d(x, F^r(x)) + \dots + k^{r-1} d(x, F^r(x)) \\
 &= (1 + k + k^2 + \dots + k^{r-1}) d(x, F^r(x)) \\
 &\leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} k^i \right) d(x, F^r(x)).
 \end{aligned}$$

Como  $0 \leq k < 1$ , a série  $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$  é convergente e converge para  $\frac{1}{1-k}$ . Assim,

$$d(x, F^r(x)) \leq \frac{1}{1-k} d(x, F^r(x)),$$

ou seja,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x, F^r(x)) \leq k^n d(x, F^r(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F^r(x)),$$

com  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $m > n$ . Como  $0 \leq k < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ , assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{1-k} d(x, F^r(x)) = 0.$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que, se  $n > n_0$ , então:

$$\left| \frac{k^n}{1-k} d(x, F^r(x)) \right| < \varepsilon.$$

Portanto,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall m, n > n_0$ . Assim,  $(x_n)_n$  é uma sequência de Cauchy, o que demonstra a afirmação. Como  $(x_n)_n$  é uma sequência de Cauchy e  $(X, d)$  é completo, então  $(x_n)_n$  é convergente em  $X$ . Portanto, existe um único  $p_x = p \in X$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p$ . Ainda,  $p \in X$  é ponto fixo da função  $F$ , já que como  $F : X \rightarrow X$  é contínua em  $X$  (por ser contração), temos que:

$$F(p) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p.$$

Agora, para provar a unicidade, suponha que  $p_1$  e  $p_2$  são pontos fixos de  $F$  em  $X$ . Então,  $F(p_1) = p_1$  e  $F(p_2) = p_2$ . Assim,  $d(p_1, p_2) = d(F(p_1), F(p_2)) \leq kd(p_1, p_2)$ . Logo,  $(1-k)d(p_1, p_2) \leq 0$ . Como,  $0 \leq k < 1$  e  $d$  é métrica, segue que  $0 \leq d(p_1, p_2) \leq 0$ , e, portanto,  $p_1 = p_2$ . Da unicidade

do ponto fixo  $p \in X$  de  $F$  temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p, \forall x \in X.$$

Portanto,  $p$  é atrator (único) para a função  $F$ . ■

**Corolário 2.1.1.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F: X \rightarrow X$  uma função contínua em  $X$ . Se existir  $m \in \mathbb{N}$ , tal que  $F^m: X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$  então  $F$  possui um único ponto fixo em  $X$ . Ainda,  $p \in X$  é atrator para a função  $F$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p, \forall x \in X$ .*

**Demonstração:** De fato, se  $m \in \mathbb{N}$  é tal que  $F^m: X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$ , então, pelo Teorema do Ponto Fixo, existe um único ponto fixo  $p \in X$  da função  $F^m$ , isto é,  $F^m(p) = p$ . Ainda,  $p \in X$  é atrator para a função  $F^m$ , ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (F^m)^k(x) = p, \forall x \in X$ .

Tome  $x \in X$  arbitrário e fixado, ainda, construa uma sequência  $(x_n)$  em  $X$  da forma  $x_n = F^n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$  e com  $n \geq m$ . Pelo algoritmo da divisão, temos que existem números naturais  $k$  e  $l$ , onde  $0 \leq l < m$ , tais que  $n = mk + l$ . Assim,

$$F^n(x) = F^{mk+l}(x) = F^{mk}(F^l(x)) = (F^m)^k(F^l(x)).$$

Observe que o conjunto  $\{F^l(x): 0 \leq l < m\} = \{x, F(x), \dots, F^{m-1}(x)\} \subset X$  é finito. Como  $p \in X$  é um atrator para a função  $F^m$ , resulta que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F^m)^k(F^l(x)) = p$$

com  $0 \leq l < m$ , e  $(l \in \{0, 1, \dots, m-1\})$ . Dessa forma, dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $0 \leq l < m$  existe  $n_l \in \mathbb{N}$ , tal que se  $k > n_l$ , então

$$d\left(\left((F^m)^k\right)(F^l(x)), p\right) < \varepsilon.$$

Seja,  $\mathcal{N} = \max\{n_l: 0 \leq l < m\}$  e  $N = m \cdot \mathcal{N}$ . Logo, se  $k > \mathcal{N}$ , então

$$d\left(\left(F^m\right)^k(F^l(x)), p\right) < \varepsilon, \forall 0 \leq l < m.$$

Observe que se  $k < \mathcal{N}$  então  $mk > m.\mathcal{N} = N$ . Portanto,

$$n = mk + l > N + l \leq N.$$

Logo, se  $k > \mathcal{N}$ , então  $n \geq N$  e

$$\begin{aligned} d((F^m)^k(F^l(x)), p) &= d(F^{mk}(F^l(x)), p) \\ &= d(F^{mk+l}(x), p) \\ &= d(F^n(x), p) < \varepsilon, \forall n > N \end{aligned}$$

Portanto,  $d(F^n(x), p) < \varepsilon, \forall n > N$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p$ . Ainda, o ponto  $p \in X$  é ponto fixo de  $F$ , pois sendo  $F$  contínua,

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = F(p).$$

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} (F^m)^k(F^l(x)) = p, \forall x \in X$  e  $\forall 0 \leq l < m$  segue que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F^{mk+l}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (F^m)^k(F^l(x)) = p, \forall x \in X,$$

o que garante que  $p \in X$  é um atrator para  $F$ . Dessa forma, da unidade do ponto fixo de  $F^m$ , temos que se  $p, q$  são pontos fixos de  $F$ , então  $F^m(p) = p$  e  $F^m(q) = q$ . Logo são pontos fixos de  $F^m$ . Pela unicidade do ponto fixo de  $F^m$ ,  $p = q$ . ■

## 2.2 Existência e Unicidade de Soluções

Nesse trabalho iremos tratar de equações diferenciais ordinárias seguindo o livro [6] e o texto universitário [19]. Dado que dada uma aplicação  $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ , definida em cada ponto de  $(t, x(t))$ , onde  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dizemos que:

$$x' = f(t, x)$$

é a Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem em  $\mathbb{R}^n$  definida por  $f$ . Assim, podemos definir que uma solução dessa EDO é uma curva  $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida e derivável num intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , tal que para cada  $x \in I$ ,  $(t, x(t)) \in \Omega$  e satisfaz  $x'(t) = f(t, x(t))$ . Como de costume, usaremos o sinal de derivação "''" para a derivada em relação à

variável escalar, ou temporal, nesse caso o  $t$ . Fixando  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , considerando  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  solução de  $x' = f(t, x)$ , dizemos que essa solução satisfaz a *condição inicial*  $x(t_0) = x_0$ , ou o *problema de valor inicial*  $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ .

**Teorema 2.2.1.** (Picard-Lindelöf) *Sejam  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  um aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  e considere  $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  contínua e Lipschitziana com relação à segunda variável em  $\Omega = I_a \times B_b$  com  $I_a = \{t \in \mathbb{R}: |t - t_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{x \in \mathbb{E}: |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , existe uma única solução do problema de valor inicial (PVI)*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

definida em  $I_\alpha$ , com  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .

**Demonstração:** Dado  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , como  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ , existem números reais positivos  $a$  e  $b$  tais que  $I_a \times B_b \subset \Omega$ , com  $I_a = \{t \in \mathbb{R}: |t - t_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{x \in \mathbb{E}: |x - x_0| \leq b\}$ . Como  $f$  é contínua em  $\Omega$ , então  $f$  é contínua no compacto  $I_a \times B_b$ . Assim,  $f$  é limitada em  $I_a \times B_b$ , isto é, existe  $M > 0$ , tal que  $|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in I_a \times B_b$ . Defina  $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}: |t - t_0| \leq \alpha\}$  com  $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ . Vamos mostrar que a equação integral

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, (t, x) \in \Omega,$$

que é equivalente a encontrar as soluções da equação diferencial (2.2), possui uma solução única  $\varphi: I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ , isto é, procuramos uma função satisfazendo:

1.  $\varphi: I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$  contínua em  $I_\alpha$ ;
2.  $\{t, \varphi(t)\} \subset \Omega, \forall t \in I_\alpha$ ;
3.  $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \forall t \in I_\alpha$ .

Seja  $\mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{E})$  o conjunto das funções contínuas  $\xi: I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ . Em tal conjunto, consideramos a métrica

$$\begin{aligned} d: \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{E}) \times \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\psi_1, \psi_2) &\longmapsto d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{t \in I} |\psi_1(t), \psi_2(t)| \end{aligned}$$

Decorre que  $(\mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{E}), d)$  é um espaço métrico completo. Seja também  $\mathcal{C}(I_\alpha, B_b) \subset \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{E})$  o conjunto das funções contínuas de  $I_\alpha$  em  $B_b$ . Com a mesma métrica  $d$ ,  $X = (\mathcal{C}(I_\alpha, B_b), d)$  é

um espaço métrico completo. De fato, se  $(\psi_n)$  é uma sequência em  $\mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ , de Cauchy, então existe  $\psi \in \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{E})$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi$  já que  $\mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{E})$  é completo. Note que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_n: I_\alpha \rightarrow B_b$  satisfaz

$$|\psi_n(t) - x_0| \leq b, \forall t \in I_\alpha.$$

Assim,  $|\psi(t) - x_0| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) - x_0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n(t) - x_0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b = b, \forall t \in I_\alpha$ . Portanto,  $\psi \in (\mathcal{C}(I_\alpha, B_b), d)$ . Logo, é um espaço métrico completo. Considere agora:

$$F: X \rightarrow X$$

$$\psi \mapsto F(\psi): I_\alpha \rightarrow B_b$$

$$t \mapsto F(\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds.$$

Temos que:

1.  $F$  está bem definida, isto é,  $F(X) \subset X$ . De fato, se  $\psi \in X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ , então

$$\begin{aligned} |F(\psi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \psi(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| \\ &= M(t - t_0) \leq M\alpha, \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Como  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ , então

- se  $a \leq \frac{b}{M} \Rightarrow Ma \leq M \frac{b}{M} = b$ ;
- se  $a > \frac{b}{M} \Rightarrow M\alpha = \frac{Mb}{M} = b$ .

Portanto,  $|F(\psi)(t) - x_0| \leq M\alpha \leq b, \forall t \in I$ , e, portanto,  $F(\psi)(t) \in B_b$ .

Ainda,  $F(\psi)$  é lipschitziana em  $I_\alpha$  e assim uniformemente contínua em  $I_\alpha$ , pois, dados  $t_1, t_2 \in I_\alpha$ , temos

$$\begin{aligned}
|F(\psi)(t_2) - F(\psi)(t_1)| &= \left| \int_{t_0}^{t_2} f(s, \psi(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s, \psi(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \psi(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(s, \psi(s))| ds \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M ds \right| = M|t_2 - t_1|
\end{aligned}$$

Dessa forma,  $|F(\psi)(t_2) - F(\psi)(t_1)| \leq M|t_2 - t_1|$ ,  $\forall t_1, t_2 \in I_\alpha$  e assim,  $F(\psi)$  é lipschitziana em  $I_\alpha$ . Logo,

$$F(\mathcal{C}(I_\alpha, B_b)) \subset \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$$

2.  $F$  é contínua em  $X$ . Como  $f$  é lipschitziana em  $I_\alpha \times B_b$  com respeito a variável  $x$ , existe  $k > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, \forall (t, x), (t, y) \in I_\alpha \times B_b. \quad (2.3)$$

Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{M\alpha}$ . Assim, se  $\psi_1, \psi_2 \in X$  e  $d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| < \delta$  então

$$\begin{aligned}
|F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \psi_2(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^t (f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))| ds \right| \\
&\stackrel{(2.3)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t k |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \right| \\
&< \left| \int_{t_0}^t k\delta ds \right| = k\delta |t - t_0| \leq k\delta\alpha = \frac{k\varepsilon\alpha}{k\alpha} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,  $|F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t)| < \varepsilon$ ,  $\forall t \in I_\alpha$  e assim,

$$d(F(\psi_1), F(\psi_2)) = \sup_{t \in I_\alpha} |F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t)| < \varepsilon.$$

Dessa forma,  $F$  é uniformemente contínua em  $X$ .

3. Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $F^m : X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$ . De fato, considere  $\psi_1, \psi_2 \in X$ .

Provemos que

$$|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} d(\psi_1, \psi_2), \forall t \in I_\alpha. \quad (2.4)$$

Provemos por indução em  $n$ .

Para  $n = 1$  : De (2) temos que

$$\begin{aligned} |F(\psi_1)(t) - F(\psi_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t k d(\psi_1 - \psi_2) \right| ds \\ &= kd(\psi_1, \psi_2) |t - t_0|, \forall t \in I_\alpha \end{aligned}$$

Assim, vale (2.4) para  $n = 1$ . Suponhamos agora que (2.4) vale para  $n = j$ , isto é,

$$|F^j(\psi_1)(t) - F^j(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^j |t - t_0|^j}{j!} d(\psi_1, \psi_2), \forall t \in I_\alpha. \quad (2.5)$$

Então, para  $n = j + 1$ .

$$\begin{aligned} |F^{j+1}(\psi_1)(t) - F^{j+1}(\psi_2)(t)| &= |F(F^j(\psi_1)(t)) - F(F^j(\psi_2)(t))| \\ &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^j(\psi_1)(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, F^j(\psi_2)(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, F^j(\psi_1)(s)) - f(s, F^j(\psi_2)(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, F^j(\psi_1)(s)) - f(s, F^j(\psi_2)(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k |F^j(\psi_1)(s) - F^j(\psi_2)(s)| ds \right| \\ &\stackrel{(hip)}{\leq} \left| \int_{t_0}^t k \frac{k^j |s - t_0|^j}{j!} d(\psi_1, \psi_2) ds \right| \\ &= \frac{k^{j+1}}{j!} d(\psi_1, \psi_2) \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^j ds \right| \\ &= \frac{k^{j+1} |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!} d(\psi_1, \psi_2), \forall t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Por indução, (2.4) é válido para todo  $n$ . Assim, de (2.4) vem que:

$$|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} d(\psi_1, \psi_2) \leq \frac{k^n \alpha^n}{n!} d(\psi_1, \psi_2), \forall t \in I.$$

Portanto,  $\forall n \geq 0$ , vale que:

$$d(F^n(\psi_1), F^n(\psi_2)) = \sup_{t \in I_\alpha} |F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{k^n \alpha^n}{n!} d(\psi_1, \psi_2),$$

$\forall \psi_1, \psi_2 \in X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ . Como,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n \alpha^n}{n!} = 0$ . Dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que

$$0 \leq L = \frac{k^m \alpha^m}{m!} < 1.$$

Portanto,  $d(F^m(\psi_1), F^m(\psi_2)) \leq L d(\psi_1, \psi_2)$ ,  $\forall \psi_1, \psi_2 \in X$ . Assim,  $F^m : X \rightarrow X$  é uma contração em  $X$ .

De (1), (2) e (3) e do corolário do Teorema do Ponto Fixo para contrações ((2.1.1)), segue que a função  $F : \mathcal{C}(I_\alpha, B_b) \rightarrow \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$  possui um único ponto fixo em  $\mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ , ou seja, existe uma única função  $\varphi \in \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ , tal que:

1.  $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$  é contínua em  $I_\alpha$ ;
2.  $(t, \varphi(t)) \in I_\alpha \times B_\varepsilon \Omega$ ,  $\forall t \in I_\alpha$  pois  $\varphi(t) \in B_b$ ,  $\forall t \in I_\alpha$ ;
3.  $F(\varphi)(t) = \varphi(t)$ , isto,  $\varphi(t) = F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ ,  $\forall t \in I_\alpha$ .

Além disso,  $\varphi \in \mathcal{C}(I, B)$  é atrator para a função  $F$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\psi) = \varphi$ ,  $\forall \psi \in X$  e  $(F^n(\psi))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para  $\varphi$  em  $I_\alpha$ . ■

A seguir, enunciaremos outro famoso teorema, o Teorema de Peano, que garante a existência de soluções de uma EDO, caso assumimos que  $f$  é apenas contínua.

**Teorema 2.2.2.** *Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  e*

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{E} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

*contínua em  $\Omega$ . Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $(t_0, x_0) \in \Omega$ ,  $(t_0, x_0) \in I_a \times B_b \subset \Omega$  e  $M > 0$ , tal que*

$|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in I \times B$ . Então, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite uma solução em  $I$ ,  $\varphi: I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ , com  $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}: (t-t_0) \leq \alpha\}$  e  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ .

O próximo resultado traz a existência e unicidade de soluções de um sistema diferencial linear. Tal tipo de sistema tem importante papel para se compreender o comportamento de uma equação não linear, pois a partir da derivada de uma equação não linear podemos utilizar uma equação diferencial linear que a aproxima de seu comportamento. Por isso, o conhecimento das propriedades das soluções de EDO's lineares é muito importante. Dessa forma, faz-se necessário a construção de uma definição para esse tipo de EDO. Portanto, seja  $I$  um intervalo não-degenerado de  $\mathbb{R}$ , considere

$$\begin{aligned} a_{ij}: I &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{e} & & b_i: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a_{ij}(t) & & & t &\longmapsto b_i(t), \end{aligned}$$

funções contínuas em  $I_i$  com  $i, j = 1, \dots, n$ . Considere o sistema de EDO's

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x'_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots = \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

com  $x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Ainda, podemos escrever o sistema (2.6) da forma

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t), i = 1, \dots, n.$$

**Definição 2.2.1.** Uma família de funções  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  definidas em  $I_0 \subset I$  e assumindo valores reais (ou  $\mathbb{C}$ ) é uma solução em  $I_0$  de (2.6) quando:

- i)  $\varphi_i \in \mathcal{C}^1(I_0), i = 1, \dots, n;$
- ii)  $(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in I \times \mathbb{E}, \forall t \in I_0;$

$$\text{iii) } \varphi_1'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\varphi_j(t) + b_i(t), \forall t \in I_0, \forall i = 1, \dots, n.$$

A equação (2.6) pode ser escrita vetorialmente da forma

$$x' = A(t)x^T + B(t), \quad (2.7)$$

com  $x^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}$ ,  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$  uma matriz  $n \times n$  e  $B(t) = (b_i(t))_{i=1}^n$  uma matriz  $n \times 1$ . Resulta que uma família de funções  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  é solução em  $I_0$  de (2.6) se, e somente se,

$$\begin{aligned} \varphi: I_0 &\longrightarrow \mathbb{E} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{aligned}$$

é solução em  $I_0$  da equação linear (2.7).

**Teorema 2.2.3.** (Existência e Unicidade para Equações Lineares): Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}$ , existe uma única solução em  $I$ ,

$$\begin{aligned} \varphi: I &\longrightarrow \mathbb{E} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0), \end{aligned}$$

da equação linear  $x' = A(t)x + b(t)$  que satisfaz  $\varphi(t_0) = x_0$  com  $x \in \mathbb{E}$ ,  $A: I \longrightarrow \mathbb{M}_{n \times n}$  e  $b: I \longrightarrow \mathbb{M}_{n \times 1}$  funções contínuas em  $I$ .

**Demonstração:** Utilizaremos o método de aproximações sucessivas. Tome  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}$  e seja  $\{\varphi_n\}$  a sequência da aplicação dada por  $\varphi_n: I \longrightarrow \mathbb{E}$  com

$$\begin{cases} \varphi_0 = x_0 \\ \varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\varphi_{i-1}(s) + b(s))ds, \quad i \leq 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Como  $A$  e  $b$  são funções contínuas em  $I$ , então segue que  $\{\varphi_n\}$  é uma sequência de funções contínuas em  $I$ . Tome  $[a, b] \subset I$  com  $t_0 \in [a, b]$ . Mostremos que  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função  $\varphi$  solução do PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x^T + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Defina  $k = \sup_{t \in [a, b]} \{|A(t)|\}$  e  $c = \sup_{t \in [a, b]} \{|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\}$ . Temos que:

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_1(s) - \varphi_0(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)(\varphi_1(s) - \varphi_0(s))| ds \leq kc|t - t_0|$$

$$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)(\varphi_2(s) - \varphi_1(s))| ds \leq \frac{k^2c}{2!}|t - t_0|$$

Por indução temos que

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{k^i c}{i!} |t - t_0|^i.$$

Portanto, segue que

$$\sup_{[a, b]} |\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{k^i c}{i!} |b - a|^i.$$

Note que para cada  $i = 1, \dots, n$ , vale que

$$\varphi_i(t) = \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^i (\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)), \quad t \in [a, b].$$

Ainda,

$$|\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)| \leq M_{j-1} = \frac{k^{j-1} c}{(j-1)!} |b - a|^{j-1}.$$

Como a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k^{j-1} c}{(j-1)!} |b - a|^{j-1} = ce^{k(b-a)},$$

é convergente, pelo teste de Weierstrass, a série de funções  $\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t))$  converge uniformemente em  $[a, b]$ . Logo, existe o limite

$$\varphi(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^i (\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Mostremos que  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$  é solução em  $a, b$  do PVI:

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Com efeito, mostremos que, de forma equivalente, é solução da equação integral dada em (2.8).

Temos que  $\varphi$  é contínua, já que é o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas.

Ainda, como  $\{\varphi_n\}$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para  $\varphi$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $|\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t)| < \frac{\varepsilon}{k(b-a)}, \forall t \in [a, b]$ . Assim,  $\forall i > n_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \varphi_j(t) - \left( x_0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s) + b(s)ds \right) \right| &\leq \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_i(s) - \varphi(s))ds \right| \\ &\leq k \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_i(s) - \varphi(s))ds \right| \\ &< k \frac{\varepsilon}{k(b-a)} |t - t_0| \leq \varepsilon, \forall t \in [a, b], \forall i > n_0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s) + b(s)ds.$$

Pela unicidade

$$\varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s) + b(s)ds.$$

Do mesmo modo, tal limite existe em  $I$  (caso  $I$  não seja compacto), pois podemos escrever  $I = U[a, b]$  com  $b \in [a, b]$ . Assim,  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{E}$  é solução de

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Agora para unicidade, suponha que exista outra aplicação  $\psi: I \rightarrow \mathbb{E}$  solução do PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Logo,

$$\psi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)\psi(s) + b(s)ds, \forall t \in I.$$

Seja  $m = \sup_{[a,b]} |\psi(t) - \varphi_1(t)|$ . Logo, temos que:

$$|\psi(t) - \varphi_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s)(\psi(s) - \varphi_1(s))ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)||\psi(s) - \varphi_1(s)|ds \right| \leq km|t - t_0|$$

Do mesmo modo,  $|\psi(t) - \varphi_3(t)| \leq \frac{k^2 m}{2!} |t - t_0|^2$ . Por indução,

$$|\psi(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{k^{i-1} m}{(i-1)!} |t - t_0|^{i-1} \leq \frac{k^{i-1} m}{(i-1)!} |b - a|^{i-1}.$$

Como a série  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{m(k(b-a))^i}{i!} = me^{k(b-a)}$  é convergente, seu termo geral tende a zero quando

$i \rightarrow \infty$ . Logo, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{|\psi(t) - \varphi_i(t)| \varepsilon m(k(b-a))^{i-1}}{i-1} < \varepsilon, \forall t \in [a, b]$ .

Portanto,  $\{\varphi_i\}$  converge uniformemente para  $\psi$ , isto é,  $\psi(t) = \varphi(t), \forall t \in [a, b]$ . ■

O próximo resultado mostra que o espaço das soluções de uma EDO linear homogênea possui propriedades de espaço vetorial.

**Corolário 2.2.1.** *Sejam  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{E}$  e  $\psi: I \rightarrow \mathbb{E}$  soluções em  $I$  da equação linear homogênea  $x' = A(t)x, x \in \mathbb{E}$  com  $A: I \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}$  contínua em  $I$ .*

1. *Se  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias, reais ou complexas, então a função*

$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow \mathbb{E} \\ t &\mapsto \gamma(t) = a\varphi(t) + b\psi(t), \end{aligned}$$

*é também solução em  $I$  da equação linear homogênea.*

2. *Se  $\varphi(s) = 0$  para algum  $s \in I$ , então  $\varphi(t) = 0, \forall t \in I$ .*

**Demonstração:**

1. De fato, como  $\varphi$  e  $\psi$  são soluções em  $I$ :

- (a)  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{E})$ ;
- (b)  $(t, \varphi(t)), (t, \psi(t)) \in I \times \mathbb{E}, \forall t \in I$ ;
- (c)  $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$  e  $\psi'(t) = A(t)\psi(t), \forall t \in I$

Logo, dada  $\gamma(t) = a\varphi + b\psi(t)$  temos que:

- (a)  $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{E})$ , pois  $\varphi$  e  $\psi$  o são;
- (b)  $(t, \gamma(t)) \in I \times \mathbb{E}, \forall t \in I$ , pois  $a\varphi(t) + b\psi(t) \in \mathbb{E}, \forall t \in I$  já que  $\mathbb{E}$  é espaço vetorial;

(c) De (a) e (b), (c) vem que:

$$\begin{aligned}
 \gamma'(t) &= (a\varphi(t) + b\psi(t))' = a\varphi'(t) + b\psi'(t) \\
 &= aA(t)\varphi(t) + bA(t)\psi(t) \\
 &= A(t)(a\varphi(t) + b\psi(t)) \\
 &= A(t)\gamma(t), \forall t \in I.
 \end{aligned}$$

Logo,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}$  é solução e  $I$  de  $x' = A(t)x$ .

2. Seja  $s \in I$  tal que  $\varphi(s) = 0$ . Considere o PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(s) = \varphi(s) = 0. \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
 \theta: I &\rightarrow \mathbb{E} \\
 t &\mapsto \theta(t) \equiv 0,
 \end{aligned}$$

é solução deste PVI em  $I$ . Pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções de EDO's lineares, segue que  $\varphi(t) = \theta(t), \forall t \in I$ . Portanto,  $\varphi(t) = 0, \forall t \in I$ .

■

Seja  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathbb{E})$  o conjunto das funções contínuas  $f: I \rightarrow \mathbb{E}$ , munido das operações de adição e multiplicação por escalar, real ou complexa conforme o caso, por uma função. Dessa forma, um conjunto  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é dito ser linearmente dependente se existe constantes  $c_1, \dots, c_n$ , não todas nulas, tais que  $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i = 0 \in \mathcal{C}$ , isto é,  $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) = 0 \in \mathbb{E}, \forall t \in I$ .

**Observação 2.2.1.** *Observemos que a primeira parte do Corolário (2.2.1), mostra que o conjunto  $A$  das soluções em  $I$  da equação linear homogênea forma um subespaço vetorial de  $\mathcal{C}$  (sobre os reais ou complexos, conforme o caso) cuja dimensão é a mesma de  $\mathbb{E}$ .*

Mais especificamente, temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.2.4.** *O conjunto  $A$  de todas as soluções de  $x' = A(t)x$  é subespaço vetorial de dimensão igual à dimensão de  $\mathbb{E}$ . Mais ainda, para cada  $s \in I$ , a aplicação que a cada  $x \in \mathbb{E}$  associa a solução  $\varphi = \varphi(t, s, x) \in I$ , passando por  $(s, x) \in I \times \mathbb{E}$ , é um isomorfismo de  $\mathbb{E}$  sobre  $A$ . Em particular, se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  é uma base de  $\mathbb{E}$ , então  $\varphi_1 = \varphi(t, s, v_1), \dots, \varphi_n =$*

$\varphi(t, s, v_n)$  formam uma base de  $A$ , ou seja, toda solução em  $I$  de  $x' = A(t)x$  se exprime como combinação linear única de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  com constantes reais ou complexas, conforme o caso.

### 2.3 Sistemas Bidimensionais Simples

No caso de uma EDO linear com uma matriz constante, podemos obter a solução geométrica de todas as soluções dos sistemas lineares bidimensionais simples, isto é, cujo determinante de  $A$  é não nulo. Vejamos o enunciado do próximo Teorema.

**Teorema 2.3.1.** *Se a matriz complexa (respectivamente, real)  $A$  de ordem  $n \times n$  tem valores próprios complexos (respectivamente, valores próprios reais)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são vetores próprios linearmente independentes, com  $Av_i = v_i e^{\lambda_i t}$ , então a matriz  $V(t)$ , cuja coluna  $i$ -ésima,  $i = 1, \dots, n$ , é  $\varphi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ , é uma matriz fundamental de  $x' = Ax$ . Em particular,  $e^{tA} = V(t)V^{-1}(0)$ .*

**Observação 2.3.1.** *Sejam  $A$  uma matriz real,  $\lambda = \alpha + i\beta$  um valor próprio e  $v = v_1 + iv_2$  um vetor próprio de  $A$  correspondente a  $\lambda$ . Então,  $\bar{v} = v_1 - iv_2$  é um vetor próprio correspondente a  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ , pois  $\bar{\lambda}\bar{v} = \bar{A}v = A\bar{v}$ , por  $A$  ser real.*

A seguir usaremos o Teorema (2.3.1) e a Observação (2.3.1) na determinação da configuração geométrica de todas as soluções dos sistemas lineares bidimensionais.

Seja um sistema bidimensional da forma:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (2.9)$$

com  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Temos que este sistema bidimensional é equivalente à equação linear homogênea do tipo  $x' = Ax$ , com  $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , e  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Seja  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  solução do sistema bidimensional (2.9), com este sendo simples, temos que a origem,  $0 \in \mathbb{R}^2$ , é o único ponto fixo do fluxo linear  $\varphi(t, x) = e^{tA}x$ , ou seja, onde  $A$  se anula. O polinômio característico de  $A$  é dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0,$$

$\tau$  sendo o traço de  $A$  e  $\delta$  o determinante de  $A$ . Dessa forma, os autovalores de  $A$  são raízes de  $P$ , isto é,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\tau \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \text{ sendo } \Delta = (\tau)^2 - 4\delta.$$

Deste modo, iremos distinguir os seguintes casos:

- (a)  $\Delta > 0$ , isto é,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ ;
- (b)  $\Delta = 0$ , isto é,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ ;
- (c)  $\Delta < 0$ , isto é,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ .

Queremos estudar o retrato de fase da equação linear homogênea  $x' = Ax$ , quando  $\det(A) \neq 0$ .

**Caso (a):** Temos que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$  e  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Sejam os autovetores  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  de  $A$ , associados à  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , ou seja,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2.$$

Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então  $\{v_1, v_2\}$  é base de  $\mathbb{R}^2$ , ainda, temos  $\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2\}$  como base do espaço de soluções em  $\mathbb{R}$  de  $x' = Ax$ . Logo, toda solução dessa equação linear homogênea pode ser escrita na forma:

$$\varphi(t, x) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Denotemos,  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = s v_1\}$  e  $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = s v_2\}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , sendo retas geradas pelos vetores  $v_1$  e  $v_2$ . Assim,  $(A - \lambda_j I_d)x = (A - \lambda_j I_d)(s v_j) = s(A - \lambda_j I_d)v_j = 0$ ,  $j = \{1, 2\}$ .

Logo,

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (A - \lambda_1 I_d)x = 0\} = \ker(A - \lambda_1 I_d);$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (A - \lambda_2 I_d)x = 0\} = \ker(A - \lambda_2 I_d).$$

**(a<sub>1</sub>)**  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ :

Segue que:

1.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2) = 0$ ;
2.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = +\infty$ ;
3. Se  $c_1 = 0$ , então  $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \in E_2, \forall t \in \mathbb{R}$ ;
4. Se  $c_2 = 0$ , então  $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 \in E_1, \forall t \in \mathbb{R}$ ;

5. Se  $c_1, c_2 \neq 0$ , por (2.10), ainda  $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t)), \forall t \in \mathbb{R}$ , as soluções tendem para a origem de  $\mathbb{R}^2$ . Prosseguindo utilizando os cálculos da observação (2.3.2), a seguir, temos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{v_{12}}{v_{11}} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{v_{22}}{v_{21}}.$$

Dessa forma, quando  $t \rightarrow +\infty$  a inclinação da reta tangente à trajetória tende a inclinação de  $E_1$ , e quando  $t \rightarrow -\infty$  a trajetória tende a inclinação de  $E_2$ .

Veja a Figura 2.1

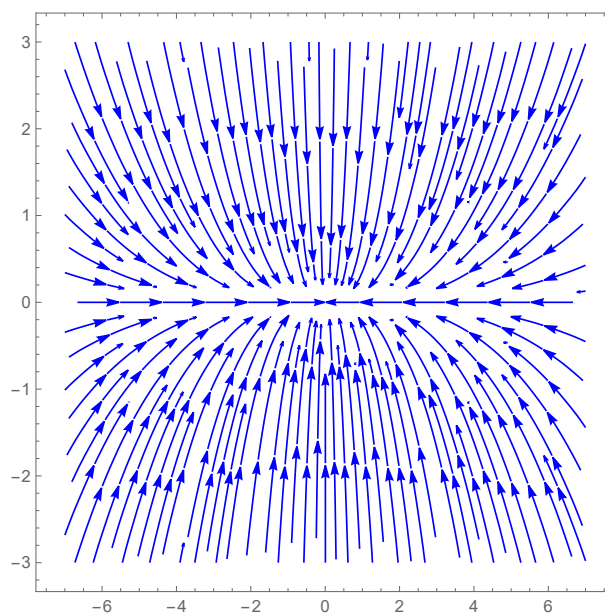


Figura 2.1: Retrato de fase de um exemplo de Nó atrator representado pelo campo vetorial  $X = (-x, -3y)$ .

**Observação 2.3.2.** Seja  $v_1 = (v_{11}, v_{12})$  e  $v_2 = (v_{21}, v_{22})$ , então:

$$\varphi' = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{21} \\ c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{12} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{12} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{21}},$$

multiplicando esse limite por  $\frac{e^{-\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_1 t}}$ , teremos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1 \lambda_1 v_{12} + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{22}}{c_1 \lambda_1 v_{11} + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{21}},$$

como  $t \rightarrow +\infty$  e  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , teremos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{c_1 \lambda_1 v_{12}}{c_1 \lambda_1 v_{11}} = \frac{v_{12}}{v_{11}}.$$

Ainda,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{12} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{21}}$$

multiplicando esse limite por  $\frac{e^{-\lambda_2 t}}{e^{-\lambda_2 t}}$ , teremos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_{12} + c_2 \lambda_2 v_{22}}{c_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_{11} + c_2 \lambda_2 v_{21}},$$

como  $t \rightarrow -\infty$  e  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , teremos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{c_2 \lambda_2 v_{22}}{c_2 \lambda_2 v_{21}} = \frac{v_{22}}{v_{21}}.$$

**(a<sub>2</sub>)**  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ :

Segue que:

1.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$
2.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ ;
3. Se  $c_1 = 0$ , então  $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \in E_2, \forall t \in \mathbb{R}$ ;
4. Se  $c_2 = 0$ , então  $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 \in E_1, \forall t \in \mathbb{R}$ ;
5. Se  $c_1 \neq 0 \neq c_2$ , ainda  $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t)), \forall t \in \mathbb{R}$ , então, fazendo o cálculo semelhante ao da observação (2.3.2) teremos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{v_{22}}{v_{21}} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{v_{12}}{v_{11}}$$

Logo, a inclinação da reta tangente à trajetória tende a inclinação  $E_2$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ , e, tende a inclinação de  $E_1$ , quando  $t \rightarrow -\infty$ .

**(a<sub>3</sub>)**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ :

1. Se  $c_1 = 0$ , então  $\varphi(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \in E_2, \forall t \in \mathbb{R}$ ;

2. Se  $c_2 = 0$ , então  $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 \in E_1, \forall t \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t) - c_2 e^{\lambda_2 t} v_2| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |c_1 e^{\lambda_1 t} v_1| = 0$ ;
4.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\varphi(t) - c_1 e^{\lambda_1 t} v_1| = \lim_{t \rightarrow -\infty} |c_2 e^{\lambda_2 t} v_2| = 0$ ;

Nesse caso, a origem é dita ponto de sela. Podemos observar seu comportamento na Figura 2.2.

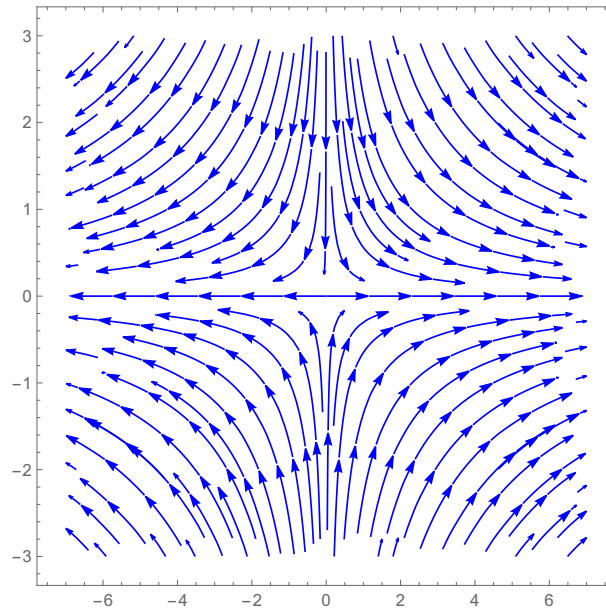


Figura 2.2: Retrato de fase de um exemplo de Sela formada pelo campo vetorial  $X = (x, -y)$

**Caso (b):** Temos que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ . Considerando que os autovalores são reais e iguais, analisaremos a dimensão do núcleo do operador linear

$$A - \lambda I_d: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Assim, teremos duas possibilidades, as quais veremos a seguir.

**(b<sub>1</sub>)**  $\dim(\ker(A - \lambda I_d)) = 2$ :

Nesse caso, temos  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ , tais que  $\{v_1, v_2\}$  é base do núcleo de  $A - \lambda I_d$ . Logo, teremos:

$$\begin{cases} (A - \lambda I_d)v_1 = 0 \iff Av_1 = \lambda v_1; \\ (A - \lambda I_d)v_2 = 0 \iff Av_2 = \lambda v_2. \end{cases}$$

Ainda, devido a  $v_1$  e  $v_2$  serem linearmente independentes, segue que  $\{e^{\lambda t} v_1, e^{\lambda t} v_2\}$  é a base para

o espaço das soluções em  $\mathbb{R}$ . Assim, toda solução em  $\mathbb{R}$  de  $x' = Ax$  é dada por

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2), c_1, c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

**(b<sub>1.1</sub>):** Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$  :

1.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = 0, \forall t \in \mathbb{R};$
2.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = +\infty, \forall t \in \mathbb{R};$
3. Com  $\varphi(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$ , temos que  $\varphi(t) = e^{\lambda t} \varphi(0), \forall t \in \mathbb{R}.$

**(b<sub>1.2</sub>):** Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$  :

1.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = +\infty, \forall t \in \mathbb{R};$
2.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = 0, \forall t \in \mathbb{R};$
3. Com  $\varphi(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$ , temos que  $\varphi(t) = e^{\lambda t} \varphi(0), \forall t \in \mathbb{R}.$

Esses dois últimos se referem ao caso que nomeamos como nó estrelado, veja a Figura 2.3.

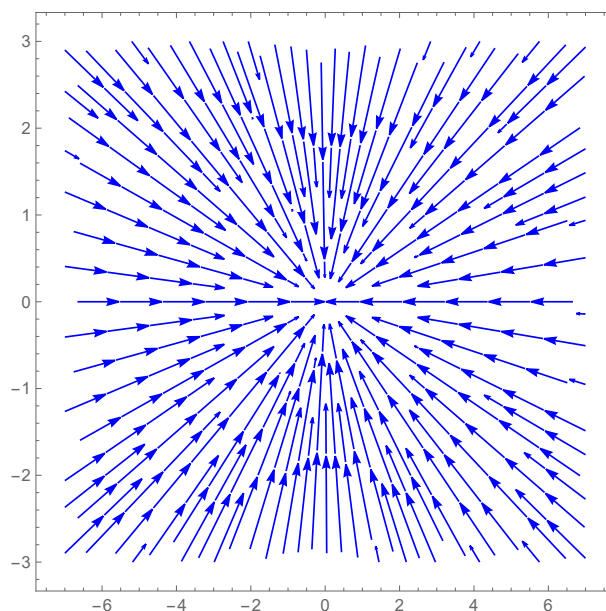


Figura 2.3: Retrato de fase de um exemplo de Nó estrelado formado pelo campo vetorial  $X = (-x, -y)$

**(b<sub>2</sub>):**  $\dim(\ker(A - \lambda I_d)) = 1$  :

Nesse caso, temos  $v \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $\{v\}$  é a base do núcleo de  $A - \lambda I_d$ . Assim, temos:

$$(A - \lambda I_d)v = 0 \iff Av = \lambda v.$$

Defina:

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & e & & \varphi_2: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_1(t) = e^{\lambda t} v_1 & & & t &\longmapsto \varphi_2(t) = te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2 \end{aligned}$$

com  $v_1$  e  $v_2$  linearmente independentes, formando uma base,  $\{e^{\lambda t} v_1, e^{\lambda t} v_2\}$ .

Assim, temos:

1.  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ;
2.  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são soluções em  $\mathbb{R}$  de  $\dot{x} = Ax$ . De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (e^{\lambda t} v_1)' = \lambda e^{\lambda t} v_1 = e^{\lambda t} (\lambda v_1) = e^{\lambda t} (Av_1) = A(e^{\lambda t} v_1) = A\varphi_1, \forall t \in \mathbb{R}. \\ \varphi_2 &= (te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2)' \\ &= e^{\lambda t} v_1 + t\lambda e^{\lambda t} v_1 + \lambda e^{\lambda t} v_2 \\ &= te^{\lambda t} (\lambda v_1) + e^{\lambda t} (v_1 + \lambda v_2) \\ &= te^{\lambda t} (Av_1) + e^{\lambda t} (Av_2) = A(te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2) = A\varphi_2, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.  $\varphi_1(0) = v_1$  e  $\varphi_2(0) = v_2$ , com base  $\{v_1, v_2\}$  em  $\mathbb{R}$ . Dessa forma,  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  é base para  $A$ , o espaço das soluções em  $\mathbb{R}$  da equação linear homogênea  $x' = Ax$ , que terá toda solução da forma:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 (te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2) \\ &= e^{\lambda t} v_1 (c_1 + c_2 t) + c_2 e^{\lambda t} v_2. \end{aligned}$$

Esse caso se refere ao que chamamos de nó impróprio, veja na Figura 2.4.

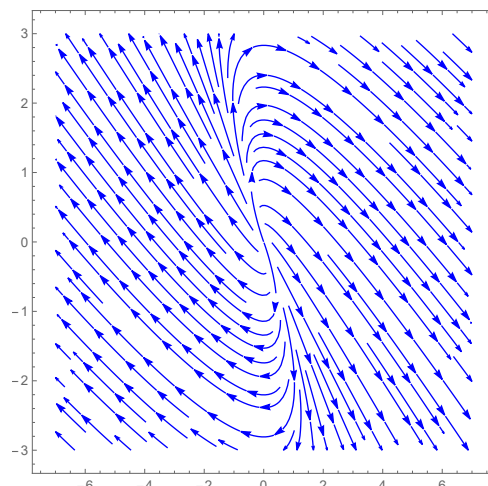


Figura 2.4: Retrato de fase de um exemplo de Nó Impróprio formado pelo campo vetorial  $X = (4x + 2y, -2x)$

**Caso (c):** Sejam  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  e  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ . Seja  $v = v_1 + v_2 i \in \mathbb{C}^2$ , com  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$  de  $A$ , isto é,  $Av = \lambda v$ . Ainda, temos que  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  é base para o espaço de soluções  $A$  de  $\dot{x} = Ax$ , com

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)v_1 + \text{sen}(\beta t)v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_2(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)v_1 - \text{sen}(\beta t)v_2). \end{aligned}$$

Assim, toda solução em  $\mathbb{R}$  de  $\dot{x} = Ax$  pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**(c<sub>1</sub>):**  $\alpha = 0$  Nesse caso, excluindo a solução constante, na origem, todas as soluções em  $\mathbb{R}$  da equação linear homogênea  $x' = Ax$  são periódicas e possuem período  $\tau = 2\pi$ , ou seja,  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Assim, para  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ ,  $\varphi(\mathbb{R})$  são circunferências, com a orientação dada pelo campo vetorial:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto F(x) = Ax. \end{aligned}$$

A origem é dita centro linear. Veja na Figura 2.5.

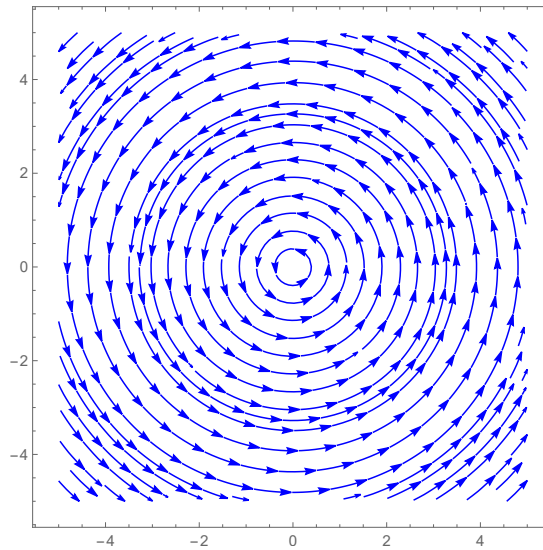


Figura 2.5: Retrato de fase de um exemplo de Centro formada pelo campo vetorial  $X = (-y, x)$ .

**(c<sub>2</sub>):**  $\alpha < 0, \beta > 0$ . Nesse caso, observa-se que a trajetória  $\varphi(t)$  tende ao ponto de equilíbrio na origem quando  $t$  tende a  $+\infty$ , entretanto quando tende a  $-\infty$ , ocorre um afastamento ilimitado da origem fazendo com que  $\varphi$  tenda ao infinito. Esse comportamento caracteriza um foco estável, ou atrator, o qual as trajetórias se aproximam da origem de maneira espiralada. Veja a Figura 2.6.

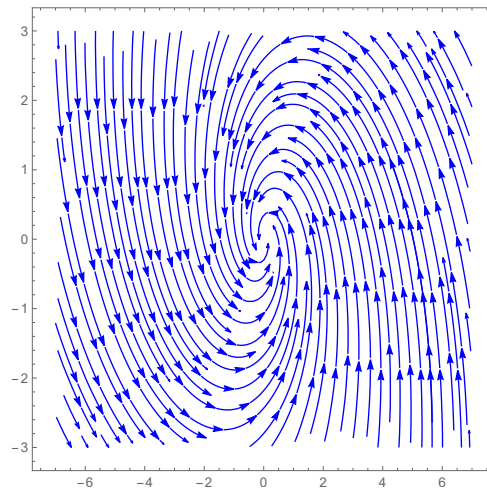


Figura 2.6: Retrato de fase de um exemplo de Foco Atrator formada pelo campo vetorial  $X = \left(-\frac{1}{2}x - y, x - \frac{1}{2}y\right)$

**(c<sub>3</sub>):**  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Por outro lado, nesse caso a trajetória tem um comportamento oposto do anterior. Quando  $t$  tende a  $+\infty$  a trajetória diverge indefinidamente, afastando-se da origem, enquanto quando  $t$  tende a  $-\infty$  as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio.

Esse comportamento corresponde a um foco instável, ou repulsor, no qual a origem atua como ponto de repulsão. Veja na Figura 2.7.

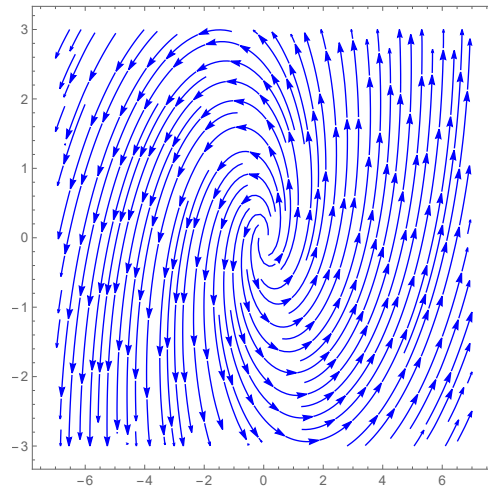


Figura 2.7: Retrato de fase de um exemplo de Foco Repulsor formada pelo campo vetorial  $X = \left( \frac{1}{2}x - y, x + \frac{1}{2}y \right)$

**Definição 2.3.1.** Uma solução  $\varphi(t)$  de uma equação diferencial  $\dot{x} = f(x)$ ,  $\varphi(t)$  é dita periódica, se existe  $T > 0$ , tal que

$$x(t + T) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

O menor  $T$  é dito ser o período.

Seção Transversal é uma superfície de codimensão um usada para analisar o comportamento das trajetórias de sistemas dinâmicos. Tal superfície é escolhida de forma que a trajetória do sistema a cruze em vários pontos, nos permitindo estudar o comportamento dessa trajetória ao longo do tempo.

Seja  $\Gamma$  uma trajetória que descreve uma órbita periódica do sistema

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.11}$$

que passa através de uma seção  $\Sigma$  no ponto  $x_0$ . Suponha, ainda, que exista  $\Sigma_0 \subset \Sigma$ , dita seção transversal ou seção de Poincaré, de forma que cada ponto de  $\Sigma_0$  retorne a  $\Sigma$  pelo fluxo de (2.11). Temos que a solução do sistema dado através de  $x$  no instante onde  $t = 0$ ,  $\varphi_t(x)$ , irá retornar e atravessar a seção  $\Sigma$  novamente em um ponto  $p(x)$  próximo a  $x_0$ . A aplicação  $x \rightarrow p(x)$  é chamada de Aplicação de Poincaré ou Aplicação do Primeiro Retorno. Veja mais detalhes em [19]. Veja a Figura 2.8.

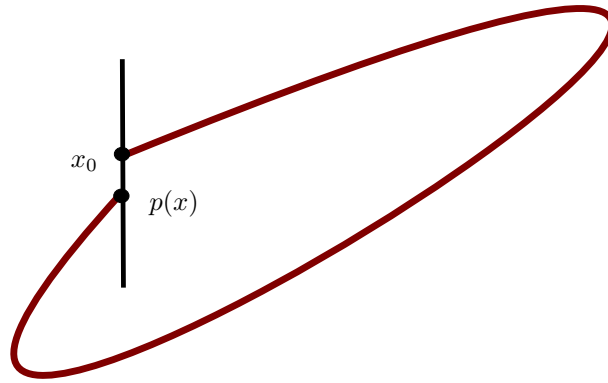


Figura 2.8: Aplicação de Poincaré.

**Definição 2.3.2.** (*Ciclo Limite*): Seja  $\mathbb{E}$  um aberto em  $\mathbb{R}^2$  e  $x: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Chamamos de ciclo limite uma órbita periódica  $\varphi_t(x_0)$  se existe uma vizinhança  $V$  de  $\varphi_t(x_0)$ , tal que, essa órbita periódica é fechada e única. Ou seja, trata-se de uma órbita periódica isolada.

## Sistemas Suaves Por Partes

A modelagem de diversos sistemas abordados em problemas aplicados à biologia e à engenharia, são descritos por sistemas não inteiramente diferenciáveis, mas em diferentes partes. Ou seja, a lei de evolução desses sistemas é regida por diferentes leis de evolução em partes diferentes, onde uma lei é substituída por outra abruptamente. Tais modelos são constituídos por diferentes campos vetoriais definidos em regiões distintas separadas por uma variedade de comutação e são conhecidos como campos vetoriais suaves por partes, sistemas descontínuos ou sistemas de Filippov.

Os estudos iniciais feitos por Andronov [1] e por Filippov [7] construíram uma base teórica para esse tipo de problema ao elaborar convenções para a transição de órbitas entre as regiões de um sistema suave por partes, para assim, definir conceitos fundamentais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e a análise da sua dinâmica.

Assim, podemos definir um campo vetorial suave por partes considerando dois campos vetoriais suaves, ou seja, de classe  $C^1$ ,  $r \geq 1$ ,  $X$  e  $Y$ , ambos definidos em um aberto conexo  $M \subset \mathbb{R}^2$ , contendo a origem. Ainda, seja  $f: M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave tal que 0 é valor regular. Iremos supor  $\Sigma = f^{-1}(0) \cap M$  é um conjunto conexo e divide  $M$  em duas regiões conexas distintas dadas por

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in M : f(x, y) > 0\} \quad e \quad \Sigma^- = \{(x, y) \in M : f(x, y) < 0\}.$$

Dados  $X$  e  $Y$  campos vetoriais suaves definidos em  $M \subset \mathbb{R}^2$  e dada  $f: M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , define-se um campo vetorial suave por partes  $Z$  como:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & f(x, y) > 0, \\ Y(x, y), & f(x, y) < 0. \end{cases}$$

Indicaremos:

- $Z = (X, Y)$  para esclarecer as componentes do campo vetorial;
- $\Omega^r(M, f)$  como o conjunto dos campos vetoriais suaves por partes com duas zonas no plano definidos em  $M$  com auxílio de  $f$ .

O conjunto  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = 0\}$  é chamado de curva de separação ou curva de descontinuidade. Para o estudo das transições de órbitas, entre  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$  pela curva de separação  $\Sigma$ , precisaremos de um critério. Nesse sentido usaremos os critérios de Filippov [7]. Nas regiões,  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^-$ , a trajetória local de um ponto  $p$  é dada pela trajetória usual dadas pelos campos suaves  $X$  ou  $Y$ . Assim, segundo o Capítulo (2) falta entender o comportamento da trajetória em  $\Sigma$ , sendo necessário o uso das convenções de Filippov. Dado um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  e um campo vetorial suave:

$$\begin{aligned} X: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

denotaremos por:

$$Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = X_1(p) \frac{\partial f(p)}{\partial x} + X_2(p) \frac{\partial f(p)}{\partial y}$$

a derivada parcial de  $f$  ao longo do campo vetorial  $X$ , conhecida como Derivada de Lie. Analogamente,

$$\begin{aligned} X^2 f(p) &= \langle X(p), \nabla Xf(p) \rangle = X_1(p) \frac{\partial Xf(p)}{\partial x} + X_2(p) \frac{\partial Xf(p)}{\partial y} \quad \text{e} \\ X^n f(p) &= \langle X(p), \nabla X^{n-1} f(p) \rangle = X_1(p) \frac{\partial X^{n-1} f(p)}{\partial x} + X_2(p) \frac{\partial X^{n-1} f(p)}{\partial y} \end{aligned}$$

**Definição 3.0.1.** *Seja  $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, f)$ . Então,*

- Um conjunto  $\Sigma^C \subset \Sigma$  é dito ser de costura se,  $\forall p \in \Sigma^C$ , tivermos  $Xf(p)Yf(p) > 0$ ;
- Um conjunto  $\Sigma^D \subset \Sigma$  é dito ser de deslize se,  $\forall p \in \Sigma^D$ , temos  $Xf(p) < 0$  e  $Yf(p) > 0$ ;
- Um conjunto  $\Sigma^E \subset \Sigma$  é dito ser de escape se,  $\forall p \in \Sigma^E$ , temos  $Xf(p) > 0$  e  $Yf(p) < 0$ .

Veja na Figura 3.1 a ilustração das regiões definidas acima. Note que os arcos de costura, escape e deslize definem abertos em  $\Sigma$ . Logo, essa definição exclui todo ponto  $p \in \Sigma$ , tais que  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$ , pontos esses nomeados de pontos de tangência.

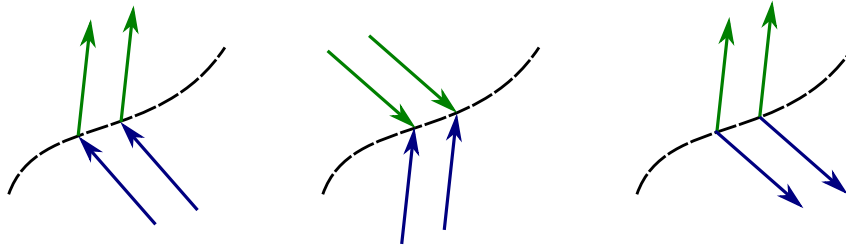


Figura 3.1: Arcos de costura, deslize e escape, respectivamente.

**Definição 3.0.2.** Seja  $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, f)$ . O campo vetorial suave  $X$  possui uma dobra, ou tangência quadrática com  $\Sigma$  em  $p \in \Sigma$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$ . Dizemos que  $p$  é uma dobra:

1. *Invisível* de  $Z$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) < 0$ .
2. *Visível* de  $Z$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) > 0$ .

A mesma definição de dobra se aplica ao campo  $Y$ , tendo atenção que os sinais das segundas derivadas de Lie se alteram, visto que a direção do vetor normal a  $\Sigma$ .

Um campo vetorial suave  $X$  possui tangência cúbica com  $\Sigma$  em  $p \in \Sigma$  se  $Xf(p) = X^2f(p) = 0$  e  $X^3f(p) \neq 0$ .

**Definição 3.0.3.** Seja  $Z = (X, Y) \in \Omega^r(M, f)$ . Dizemos que uma singularidade  $p$  de  $X$  é real para  $Z$  se  $p \in \Sigma^+$ , e virtual se  $p \in \Sigma^-$ .

Em um ponto de costura, para que definamos suas trajetórias, basta justapor as trajetórias de  $X$  e  $Y$  naquele ponto, já que ambos têm o mesmo sentido. Entretanto, para os arcos de escape e deslize é necessário construir um campo vetorial auxiliar chamado Campo de Filippov ou Campo Deslizante.

Considere um campo vetorial  $F_Z$  em que cada ponto  $p \in \Sigma^E \cup \Sigma^D$  é dado por uma combinação linear convexa de  $X(p)$  e  $Y(p)$  de modo que  $F_Z$  seja tangente a  $\Sigma$ , ou seja,  $F_Z(p)$  é o único vetor tangente a  $\Sigma$  no cone por  $X(p)$  e  $Y(p)$ . Veja a Figura 3.2.

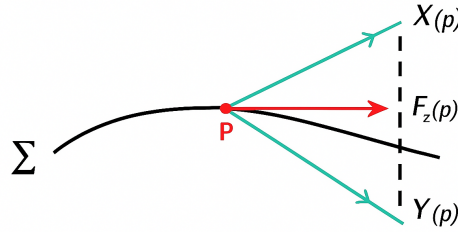


Figura 3.2: Campo de Filippov.

Dessa forma,  $F_Z(p) = (1 - \alpha(p))X(p) + \alpha(p)Y(p)$  em que  $\alpha(p) = \frac{Xf(p)}{Xf(p) - Yf(p)}$ .

Logo, temos que  $F_Z(p)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
 F_Z(p) &= \left(1 - \frac{Xf(p)}{Xf(p) - Yf(p)}\right) X(p) + \frac{Xf(p)}{Xf(p) - Yf(p)} Y(p) \\
 &= \frac{(Xf(p) - Yf(p) - Xf(p))X(p) + Xf(p)Y(p)}{Xf(p) - Yf(p)} \\
 &= \frac{X^2f(p) - Yf(p)X(p) - X^2f(p) + Xf(p)Y(p)}{Xf(p) - Yf(p)} \\
 &= \frac{Xf(p)Y(p) - Yf(p)X(p)}{Xf(p) - Yf(p)} \\
 &= \frac{Yf(p)X - Xf(p)Y}{Yf(p) - Xf(p)}.
 \end{aligned}$$

assim, para demonstrar que  $F_Z(p)$  é tangente à  $\Sigma$  basta mostrar que  $F_Z(p)$  é ortogonal a  $\nabla f(p)$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle F_Z(p), \nabla f(p) \rangle &= \left\langle (1 - \alpha(p))X(p) + \alpha(p)Y(p); \left(\frac{\partial f(p)}{\partial x}, \frac{\partial f(p)}{\partial y}\right) \right\rangle \\
 &= \left\langle (1 - \alpha)(X_1, X_2) + \alpha(Y_1, Y_2); \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle \\
 &= \left\langle X_1 - \alpha X_1 + X_2 - \alpha X_2 + \alpha Y_1 + \alpha Y_2; \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle \\
 &= \left\langle X_1 + X_2 - \alpha(X_1 + X_2) + \alpha(Y_1 + Y_2); \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \right\rangle \\
 &= (X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial x} - \alpha(X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(Y_1 + Y_2) \frac{\partial f}{\partial x} \\
 &\quad + (X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial y} - \alpha(X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha(Y_1 + Y_2) \frac{\partial f}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial x} + (X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial y} - \alpha(X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial x} \\
&\quad - \alpha(X_1 + X_2) \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha(Y_1 + Y_2) \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(Y_1 + Y_2) \frac{\partial f}{\partial y} \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} Xf - \alpha Xf + \alpha Yf \\
&= Xf - \frac{Xf}{Xf - Yf} \cdot Xf + \frac{Xf}{Xf - Yf} \cdot Yf \\
&= \frac{Xf(Xf - Yf) - (Xf)^2 + Xf \cdot Yf}{Xf - Yf} \\
&= \frac{(Xf)^2 - Xf \cdot Yf - (Xf)^2 + Xf \cdot Yf}{Xf - Yf} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Os pontos singulares do campo de Filippov são chamados de pseudo-equilíbrios.

Dessa forma, as órbitas do campos descontínuo  $Z$  são dadas pela concatenação das órbitas de  $X$ ,  $Y$  e do campo deslizante  $F_Z$ .

Seja  $\gamma$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$  composta por arcos regulares de trajetórias de  $X$  em  $\Sigma^+$ , e/ou  $Y$  em  $\Sigma^-$ , e/ou trajetórias de  $F_Z$  em  $Z$ , dizemos que  $\gamma$  é uma politrajétoria de  $Z$  se:

1.  $\gamma$  contém arcos de trajetória de pelo menos dois entre os campos  $X$ ,  $Y$  e  $F_Z$ , ou é formado por um arco de  $F_Z$ ;
2. A transição de arcos de trajetória de  $X$  para arcos de trajetória  $Y$  é feita através de pontos de costura;
3. A transição de arcos de trajetória de  $X$ , ou de  $Y$ , para arcos de trajetória de  $F_Z$  é feita através de tangências ou pontos regulares de arco de escape, ou do arco deslizante, respeitando o sentido dos arcos de trajetória.

Perceba que não temos unicidade de soluções, já que os arcos de trajetória do campo de Filippov podem pertencer a infinitas politrajétórias.

Vejamos a seguir alguns exemplos de campos descontínuos.

**Exemplo 3.0.1.** Considere o sistema associado ao campo vetorial  $Z_1 = (X_1, Y_1) \in \Omega^r(\mathbb{R}^2, f)$  dado por:

$$Z_1(x, y) = \begin{cases} X_1(x, y) = (1, x^2), y \geq 0; \\ Y_1(x, y) = (1, 1), y \leq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Note que os campos  $X_1$  e  $Y_1$  não possuem equilíbrios. Além disso, da lei de formação de  $Z$  podemos observar que  $f(x, y) = y$  neste caso. Assim, nos campos  $X_1$  e  $Y_1$  é possível perceber que o conjunto  $\Sigma$  que divide  $\mathbb{R}^2$  em duas regiões conexas é  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = 0\}$ . Encontrando as tangências temos que

$$X_1 f(p) = \langle (1, x^2), (0, 1) \rangle = x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$Y_1 f(p) = \langle (1, 1), (0, 1) \rangle = 1.$$

Portanto, o ponto  $(0, 0)$  é uma tangência de  $X$  com  $\Sigma$ , porém o campo  $Z$  não possui tangências em  $Y$ . Analisando qual o tipo de contato (quadrático ou cúbico) temos

$$\begin{aligned} X_1^2 f(p) &= \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \langle (1, x^2), (2x, 0) \rangle |_{p=(0,0)} = \langle (1, 0), (0, 0) \rangle = 0; \\ X_1^3 f(p) &= \langle X(p), \nabla^2 f(p) \rangle = \langle (1, x^2), (2, 0) \rangle = \langle (1, 0), (2, 0) \rangle = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $p = (0, 0)$  é ponto de tangência cúbica somente de  $X_1$  com  $\Sigma$ .

Veja na Figura 3.3 o esboço desse campo:

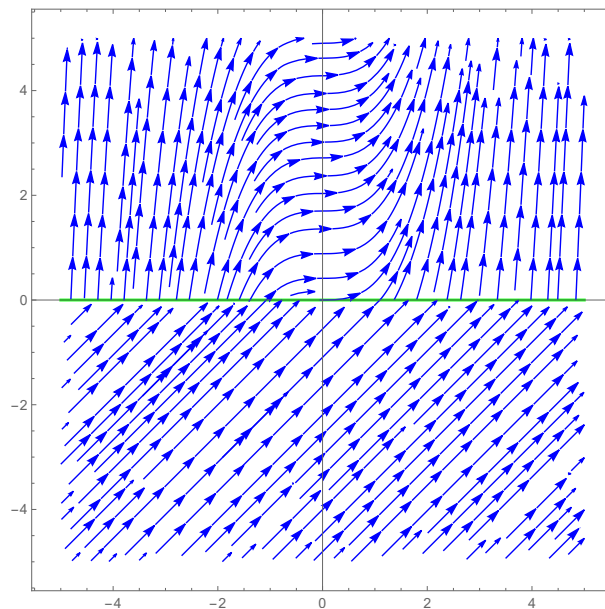


Figura 3.3: Retrato de fase do campo  $Z_1$  dado em (3.2)

**Exemplo 3.0.2.** Considere o sistema associado ao campo vetorial  $Z_2 = (X_2, Y_2)$  dado por:

$$Z_2(x, y) = \begin{cases} X_2(x, y) = (1, 2x), & y \geq 0; \\ Y_2(x, y) = (-2, -7x), & y \leq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Novamente,  $f(x, y) = y$  e o conjunto  $\Sigma$  que divide  $\mathbb{R}^2$  em duas regiões conexas é  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ .

Encontrando as tangências temos que

$$X_2 f(p) = \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = 2x = 0, \text{ se, e somente se } x = 0;$$

$$Y_2 f(p) = \langle (-2, -7x), (0, 1) \rangle = -7x = 0, \text{ se, e somente se } x = 0.$$

Portanto, o ponto  $p = (0, 0)$  é tangência de ambos  $X_2$  e  $Y_2$  com  $\Sigma$ . Analisando qual o tipo de contato (quadrático ou cúbico) temos

$$X_2 f(p) = \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = (2x)|_{p=(0,0)} = 0$$

$$X_2^2 f(p) = \langle (1, 2x), (2, 0) \rangle = (2)|_{p=(0,0)} = 2 \neq 0$$

Ainda,

$$Y_2 f(p) = \langle (-2, -7x), (0, 1) \rangle = (-7x)|_{p=(0,0)} = 0$$

$$Y_2^2 f(p) = \langle (-2, -7x), (-7x, 0) \rangle = (14)|_{p=(0,0)} = 14 \neq 0$$

Logo, temos que o ponto  $p$  é ponto de tangência quadrática de  $\Sigma$  com  $X_2$  e  $Y_2$ , sendo visível para  $X_2$  e invisível para  $Y_2$ .

Para calcular o campo deslizante desse sistema, faremos:

$$\begin{aligned} F_Z(x, y) &= \frac{Yf(x, y)X(x, y) - Xf(x, y)Y(x, y)}{Yf(x, y) - Xf(x, y)} = \frac{-7x(1, 2x) - 2x(-2, -7x)}{-7x - (2x)} \\ &= \frac{(-7x, -14x^2) + (4x, 14x^2)}{-9x} \\ &= \frac{(-3x, 0)}{-9x} = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

Observe que ambas as tangências de  $X_2$  e  $Y_2$  são quadráticas e positivas, logo temos que para o campo  $X_2$  teremos uma tangência quadrática visível e para  $Y_2$  uma tangência quadrática invisível. Ainda, note que para  $x < 0$  teremos valores negativos no campo  $X_2$  e positivos no campo  $Y_2$  caracterizando uma região de deslize, entretanto, quando  $x > 0$  teremos um resultado oposto, logo teremos uma região de escape. Veja na Figura 3.5 o esboço desse campo:

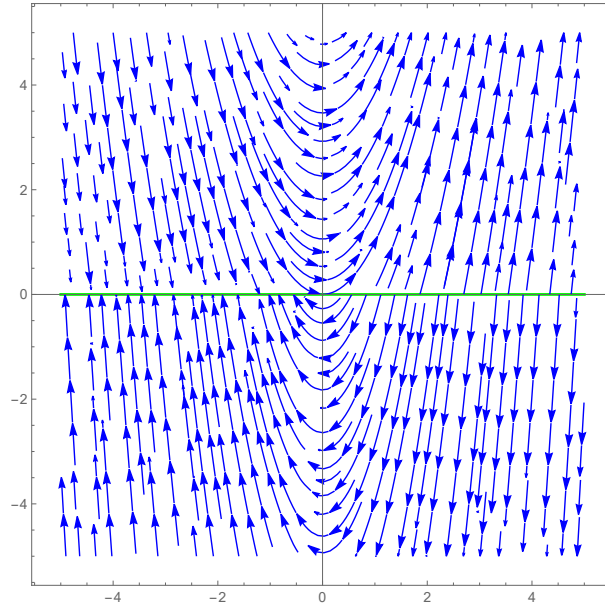


Figura 3.4: Retrato de fase do campo  $Z_2$  dado por (3.3).

**Exemplo 3.0.3.** Considere o sistema associado ao campo vetorial  $Z_3 = (X_3, Y_3)$  dado por:

$$Z_3(x, y) = \begin{cases} X_3(x, y) = (1, -2x), & y \geq 0; \\ Y_3(x, y) = (-1, -x + x^2), & y \leq 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Novamente,  $f(x, y) = y$  e  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ .

Encontrando as tangências temos que

$$X_3 f(p) = \langle (1, -2x), (0, 1) \rangle = (-2x)|_{p=(0,0)} = 0, \text{ se, e somente se } x = 0;$$

$$Y_3 f(p) = \langle (-1, -x + x^2), (0, 1) \rangle = (-x + x^2)|_{p=(0,0)} = 0, \text{ se, e somente se } y = 0;$$

Logo,  $p = (0, 0)$  é um ponto de tangência em ambos os campos.

$$X_3 f(q) = \langle (1, -2x), (0, 1) \rangle = (-2x)|_{q=(1,0)} = -2$$

$$Y_3 f(q) = \langle (-1, -x + x^2), (0, 1) \rangle = (-x + x^2)|_{q=(1,0)} = 0, \text{ se, e somente se } y = 0.$$

Logo,  $q = (1, 0)$  é ponto de tangência apenas para o campo  $Y_3$ .

Analisando qual o tipo de contato (quadrático ou cúbico) temos

- para  $p = (0, 0)$

$$X_3 f(p) = \langle (1, -2x), (0, 1) \rangle = (-2x)|_{p=(0,0)} = 0$$

$$X_3^2 f(p) = \langle (1, -2x), (-2, 0) \rangle = (-2)|_{p=(0,0)} = -2 \neq 0$$

$$Y_3 f(p) = \langle (-1, -x + x^2), (0, 1) \rangle = (-x + x^2)|_{p=(0,0)} = 0$$

$$Y_3^2 f(p) = \langle (-1, -x + x^2), (-1 + 2x, 0) \rangle = (1 - 2x)|_{p=(0,0)} = 1 \neq 0$$

Portanto,  $p$  é ponto de tangência quadrática de  $\Sigma$  em  $X_3$  e  $Y_3$ .

- para  $q = (1, 0)$

$$X_3 f(q) = \langle (1, -2x), (0, 1) \rangle = (-2x)|_{q=(1,0)} = -2$$

$$Y_3 f(q) = \langle (-1, -x + x^2), (0, 1) \rangle = (-x + x^2)|_{q=(1,0)} = 0$$

$$Y_3^2 f(q) = \langle (-1, -x + x^2), (-1 + 2x, 0) \rangle = (1 - 2x)|_{q=(1,0)} = -1 \neq 0$$

Portanto,  $q$  é ponto de tangência quadrática em  $\Sigma$  apenas em  $Y_3$ .

Observe que para  $x < 0$ , ambas as trajetórias de  $X_3$  e  $Y_3$  têm derivada de Lie positivas, logo teremos uma região de costura, já para o caso de  $0 < x < 1$  ambas terão trajetórias negativas, o que configura outro arco de costura. Por fim, quando  $x > 1$  a trajetória de  $X_3$  permanece negativa, mas a trajetória de  $Y_3$  está positiva, logo nessa região teremos um arco de deslize.

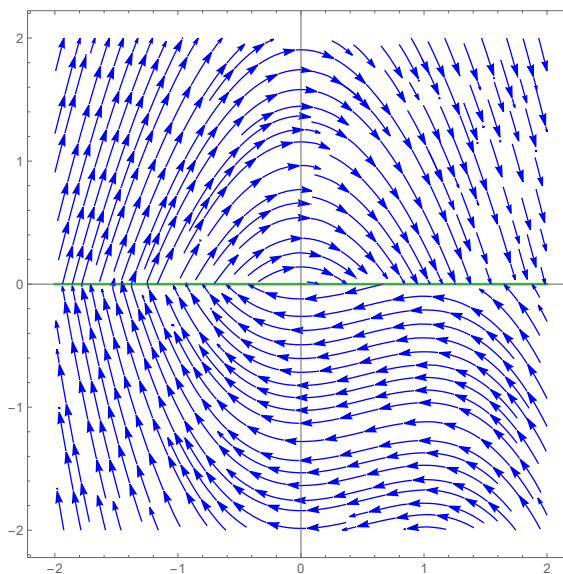


Figura 3.5: Retrato de fase do campo  $Z_3$  dado por (3.4).

Considere o campo descontínuo  $Z = (X, Y)$  e uma trajetória de  $Z$  começando em  $p \in \Sigma^C$ .

Quando a trajetória de  $X$  atravessa  $p \in \Sigma$  retorna a  $\Sigma$  após um tempo positivo  $t_1(p)$ , definimos a aplicação de transição de  $X$  por  $\Pi_X(p) = \varphi_X(t_1(p), p) = p_1 \in \Sigma$ . Quando a trajetória de  $Y$  passa por  $p_1 \in \Sigma$  retorna a  $\Sigma$  depois de um tempo positivo  $t_2(p_1)$ , definimos a aplicação de transição de  $Y$  por  $\Pi_Y(p_1) = \varphi_Y(t_2(p_1), p_1) \in \Sigma$ . A aplicação de primeiro retorno associada ao campo descontínuo  $Z$  é definida pela composição das duas aplicações de transição:

$$\Pi_Z(p) = (\Pi_Y \circ \Pi_X)(p) = \varphi_Y(t_2(p_1), \varphi_X(t_1(p), p)),$$

ou na ordem inversa, aplicando primeiro o fluxo de  $Y$  e depois o fluxo de  $X$ . Veja a Figura 3.6

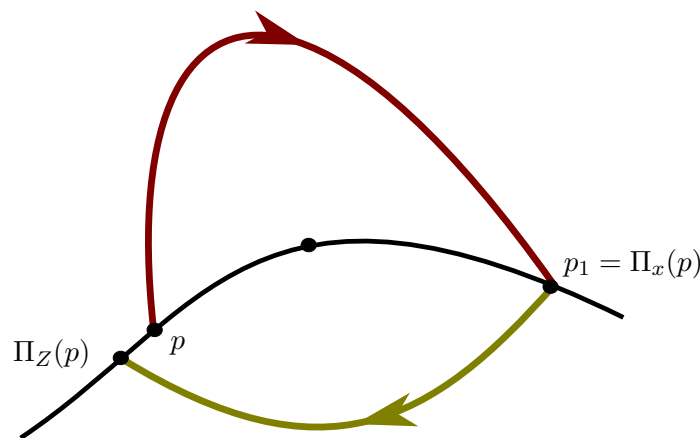


Figura 3.6: Aplicação de Poincaré em Sistemas Suaves por Partes.

No caso em que os campos vetoriais  $X$  e  $Y$  (associados a  $Z$ ) são Hamiltonianos, as curvas de solução das equações diferenciais ficam restritas aos conjuntos de nível das respectivas funções. Isso permite um cálculo mais prático do mapa de primeiro retorno: basta procurar pontos em  $\Sigma$  que estejam nas mesmas curvas de nível das funções Hamiltonianas. Assim, a necessidade de calcular os tempos de voo é eliminada. Neste sentido, podemos procurar por ciclos limite de costura de um campo descontínuo  $Z$  através dos pontos fixos da aplicação  $\Pi Z(p)$  ou através dos zeros isolados da aplicação deslocamento dada por  $\delta(p) = \Pi Z(p) - p$ .

## Ciclos Limite em Sistemas Descontínuos com Centros e Selas Hamiltonianas Lineares

No artigo [12], Llibre e Valls realizam uma análise de sistemas diferenciais planos por partes contínuos e descontínuos formados pela combinação de centros lineares e selas Hamiltonianas separados por uma ou por duas retas paralelas. Nessa análise eles investigaram quais as situações em que esses sistemas podem apresentar ciclos limite de costura, ou seja, órbitas periódicas isoladas. Para realizar essa investigação são usadas formas normais de um centro e uma sela Hamiltoniana linear.

**Proposição 4.0.1.** *Todo sistema linear possuindo um centro pode ser escrito da forma*

$$\dot{x} = -bx - \Omega y + d, \quad \dot{y} = x + by + c, \quad (4.1)$$

onde  $\Omega = b^2 + \omega^2$ , com  $\omega \neq 0$ .

E a integral primeira do sistema é  $F(x, y) = \frac{-x^2}{2} - bxy - \frac{\Omega}{2}y^2 - cx + dy$ .

**Demonstração:**

Considere um sistema diferencial linear no plano da forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By + d, \quad \frac{dy}{dt} = ax + by + c.$$

Faremos a Jacobiana desse sistema. Consideremos

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Para que esse sistema seja um centro na origem, os autovalores têm de ser puramente imaginários. Para que isso ocorra precisamos que:

- O traço seja igual a zero:  $A + b = 0 \Rightarrow A = -b$ ;

- Determinante positivo:  $Ab - aB > 0 \Rightarrow -aB > b^2 \Rightarrow aB < -b^2$ .

Os autovalores desse sistema serão dados por:

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda) &= \lambda^2 - (A + b)\lambda + (Ab - aB) = 0 \\ \lambda &= \frac{A + b \pm \sqrt{(A - b)^2 + 4aB}}{2}\end{aligned}$$

Para que os autovalores sejam imaginários puros devemos ter:  $-\omega^2 = (A - b)^2 + 4aB$ , e  $A = -b$ . Logo,  $-\omega^2 = 4b^2 + 4aB \Rightarrow B = \frac{-4b^2 - \omega^2}{4a}$ . Assim, obtemos que

$$\dot{x} = Ax + By + d = -b - \frac{(4b^2 + \omega^2)}{4a}y + d.$$

Porém, ainda faremos uma reparametrização do tempo para fixar  $a = 1$ . Façamos, assim,

$$\tau = a.t \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{a}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{-b}{a}x - \frac{(4b^2 + \omega^2)}{4a^2}y + \frac{d}{a}, \\ y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Façamos  $b_* = \frac{b}{a}$ ,  $c_* = \frac{c}{a}$ ,  $d_* = \frac{d}{a}$ ,  $\omega_* = \frac{\omega}{2a}$ , assim, obtemos a forma

$$\begin{cases} x' = -b_*x - (b_*^2 + \omega_*^2)y + d_* \\ y' = x + b_*y + c_*. \end{cases}$$

Para aprimorar a forma do nosso sistema façamos  $\Omega_* = (b_*^2 + \omega_*^2)$ , obtendo

$$\begin{cases} x' = -b_*x - \Omega_*y + d_* \\ y' = x + b_*y + c_*, \end{cases}$$

como se queria, com  $\omega \neq 0$ .

De fato, esse sistema descreve um centro, note que podemos escrever esse sistema da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -\Omega \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante da parte linear  $A = \begin{bmatrix} -b & -\Omega \\ 1 & b \end{bmatrix}$ , e sabendo que  $\Omega = b^2 + \omega^2$ , obtemos que  $\det(A) = -b^2 + \Omega = \omega^2 > 0$ .

Ainda, temos que o traço de  $A$  é  $\text{tr}(A) = -b + b = 0$ . Logo, temos, de fato, um centro, de acordo com os fatos observados na seção (2.3).

A integral primeira do sistema (4.1) é de fato  $F(x, y) = \frac{-x^2}{2} - bxy - \frac{\Omega}{2}y^2 - cx + dy$ .

Considere o sistema (4.1) e denote por  $X = (-bx - \Omega y + d, x + by + c)$ . Temos que uma função  $F$  é integral primeira desse sistema se  $\nabla F \cdot X = 0$ , isto é, se

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \dot{y} = 0.$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \dot{y} &= 0 \\ (-x - by - c)(-bx - \Omega y + d) + (-bx - \Omega y + d)(x + by + c) &= 0 \\ bx^2 + \Omega xy - dx + b^2xy + b\Omega y^2 - bdy + bcx + \Omega cy - cd & \\ -bx^2 - b^2xy - bcx - \Omega xy - b\Omega y^2 - c\Omega y + dx + bdy + dc &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a função  $F(x, y)$  dada é de fato integral primeira do sistema dado. ■

**Proposição 4.0.2.** *Todo sistema possuindo uma sela Hamiltoniana linear pode ser escrito da forma*

$$\dot{x} = -\beta x - \delta y + \mu, \quad \dot{y} = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad (4.2)$$

com  $\alpha \in \{0, 1\}$ . Ainda, quando  $\alpha = 0$ , temos  $\gamma = 0$  e  $\beta \neq 0$ , e quando  $\alpha = 1$ , então  $\delta = \beta^2 - \omega^2$ , com  $\omega \neq 0$ . A integral primeira do sistema é:

$$H(x, y) = -\frac{\alpha}{2}x^2 - \beta xy - \frac{\delta}{2}y^2 - \gamma x + \mu y. \quad (4.3)$$

**Demonstração:** A demonstração é análoga a da Proposição (4.0.2). Mas faremos aqui algumas considerações. De fato, esse sistema descreve uma sela, note que podemos escrever esse sistema da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -\delta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Calculando o traço da parte linear  $B = \begin{bmatrix} -\beta & -\delta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$  obtemos  $\text{tr}(B) = -\beta + \beta = 0$ . Ainda, temos que o determinante é  $\det(B) = -\beta^2 + \delta\alpha$ .

Logo, esse sistema possui uma sela nos pontos de equilíbrio nos casos em que:

- $\alpha = 0$ , onde  $\det(B) = -\beta^2 < 0$ ;
- $\alpha = 1$ , onde  $\det(B) = -\beta^2 + \delta$ , porém, como  $\alpha = 1$  temos que  $\delta = \beta^2 - \omega^2$ , dessa forma,  $\det(B) = -\beta^2 + \beta^2\omega^2 \Rightarrow -\omega^2 < 0$ .

Portanto, de fato esse sistema descreve uma sela nos pontos críticos, esse fator é assegurado pelas condições impostas sobre  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ , de acordo com os fatos observados na seção (2.3).

A primitiva do sistema (4.2) é de fato  $H(x, y) = -\frac{\alpha}{2}x^2 - \beta xy - \frac{\delta}{2}y^2 - \gamma x + \mu y$ .

Considere o sistema (4.2) e denote por  $Y = (-\beta x - \delta y + \mu, \alpha x + \beta y + \gamma)$ . Temos que uma função  $H$  é integral primeira desse sistema se  $\langle \nabla H \cdot Y \rangle = 0$ , isto é, se

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \dot{y} = 0$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} (-\alpha x - \beta y - \gamma)(-\beta x - \delta y + \mu) + (-\beta x - \delta y + \mu)(\alpha x + \beta y + \gamma) &= 0 \\ \alpha\beta x^2 + \alpha\delta xy - \alpha\mu x + \beta^2 xy + \beta\delta y^2 - \beta\mu y + \beta\gamma x + \delta\gamma y - \mu\gamma & \\ -\beta\alpha x^2 - \beta^2 xy - \beta\gamma x - \delta\alpha xy - \beta\delta y^2 - \delta\gamma y + \mu\alpha x + \beta\mu y + \mu\gamma &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a função  $H(x, y)$  dada é de fato uma primitiva do sistema dado. ■

No contexto de campos de vetores suaves por partes, algumas características podem alterar o número de ciclos limite de costura de determinado campo. Nesse sentido, faz-se necessário definir o que vem a ser um campo de vetores suave por partes contínuo.

**Definição 4.0.1.** Um campo vetorial suave por partes  $Z = (X, Y, \Sigma)$  é dito contínuo se suas partes  $X$  e  $Y$  coincidem na curva de descontinuidade  $\Sigma$ .

**Exemplo 4.0.1.** Considere o campo vetorial suave por partes contínuo formado pelos seguintes sistemas diferenciais, separados por uma linha reta em  $x = 0$ , que descrevem respectivamente um centro e uma sela,

- $x < 0$ :  $X = (2 + 2x - 5y, x - 2y)$ ;
- $x > 0$ :  $Y = (2 + 2x - 5y, -2y)$ .

Utilizando um software de resolução algébrica é possível obter os pontos de equilíbrio desses sistemas, fazendo  $x' = 0$  e  $y' = 0$  para ambos os casos, adquirindo os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(x_1, y_1) = (4, 2) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2) = (1, 0),$$

ainda, com o auxílio desse software, conseguimos observar o comportamento das trajetórias desses sistemas, veja na Figura 4.1.

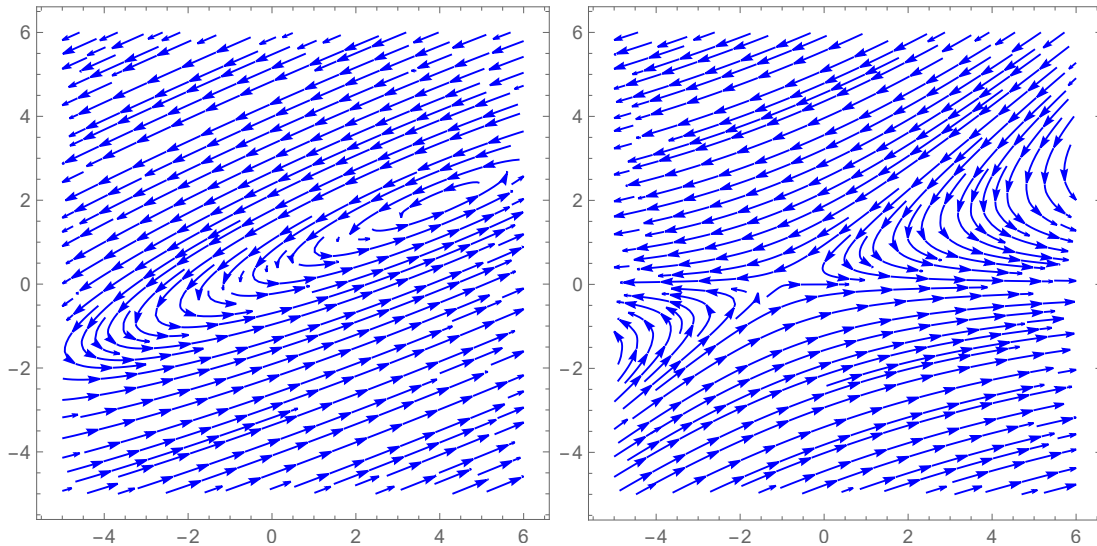


Figura 4.1: Retrato de fase dos sistemas diferenciais dados em (4.0.1), respectivamente.

Ao considerar esse campo vetorial da forma contínua e considerando os dois sistemas que o formam, teremos que seus pontos de equilíbrio são invisíveis (representados pelos pontos pretos na Figura 4.2) e teremos as trajetórias observadas na Figura 4.2.

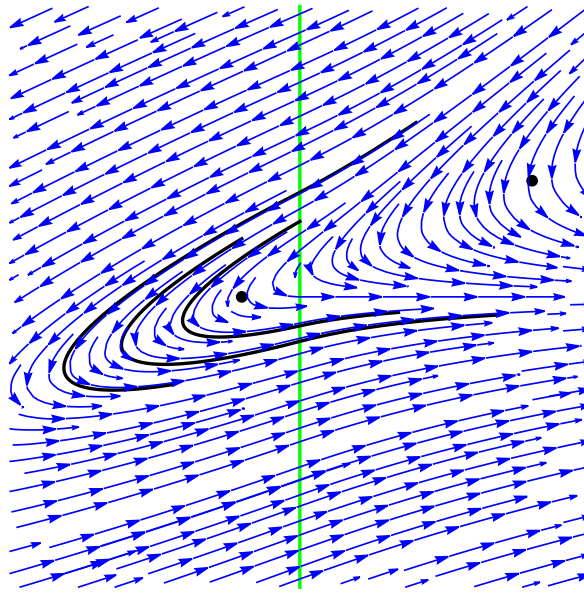


Figura 4.2: Retrato de fase do campo vetorial suave por partes formado pelo sistemas dados em (4.0.1) separados pela reta em  $x = 0$ .

Esse exemplo ilustra como a introdução de uma descontinuidade entre dois sistemas pode alterar significativamente a topologia das órbitas, sendo possível visualizar claramente os efeitos da descontinuidade de campo vetorial suave por partes contínuo.

No caso planar, se a curva de descontinuidade não se trata de uma reta, para cada inteiro positivo  $n$ , é possível encontrar um sistema linear por partes com exatamente  $n$  ciclos limite (veja [3],[15]). Contudo, se a curva de separação é uma reta, temos que os sistemas lineares por partes contínuos podem apresentar no máximo um ciclo limite, essa ideia foi conjecturada por Lum e Chua [13] e mais tarde provada em [8], ainda, mostrou-se válida para sistemas lineares por partes de costura (veja [14]). Nesse sentido, iremos investigar classes de campos vetoriais suaves por partes separados por uma reta e possuindo centros ou selas Hamiltonianas lineares. Sob esse olhar, temos os seguintes resultados.

**Teorema 4.0.1.** *Um Sistema diferencial linear por partes, contínuo ou descontínuo separado por uma linha reta, formado por um centro e uma sela Hamiltoniana não possui ciclos limite.*

**Demonstração:** Considere um sistema diferencial linear por partes separado por uma linha, fixada em  $x = 0$ , onde o sistema (4.1) que descreve um centro linear está à esquerda da linha fixada e o que descreve uma sela Hamiltoniana linear, (4.2), está à direita da linha. Note que, se esses sistemas diferenciais lineares por partes (sejam eles contínuos ou descontínuos) têm uma órbita periódica candidata a ser ciclo limite, então essa órbita deve interceptar a linha de separação em dois pontos  $(0, y_1)$  e  $(0, y_2)$ , com  $y_1 < y_2$ . Então, para encontrarmos ciclos limite

podemos fazer uso das integrais primeiras  $F$  e  $H$  dadas pelas Proposições (4.0.1) e (4.0.2). Nessa perspectiva, precisamos encontrar soluções isoladas do seguinte sistema, chamado de equações de fechamento,

$$\begin{cases} F(0, y_1) - F(0, y_2) = 0, \\ H(0, y_1) - H(0, y_2) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

Da primeira equação de (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} F(0, y_1) - F(0, y_2) &= -\frac{\Omega}{2}y_1^2 + dy_1 + \frac{\Omega}{2}y_2^2 - dy_2 \\ &= -\Omega y_1^2 + 2dy_1 + \Omega y_2^2 - 2dy_2 \\ &= 2d(y_1 - y_2) - \Omega(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \\ &= (y_1 - y_2)(2d - \Omega(y_1 + y_2)) \end{aligned}$$

Da segunda equação de (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} H(0, y_1) - H(0, y_2) &= -\frac{\delta}{2}y_1^2 + \mu y_1 + \frac{\delta}{2}y_2^2 - \mu y_2 \\ &= -\delta y_1^2 + 2\mu y_1 + \delta y_2^2 - 2\mu y_2 \\ &= 2\mu(y_1 - y_2) - \delta(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \\ &= (y_1 - y_2)(2\mu - \delta(y_1 + y_2)) \end{aligned}$$

Portanto, o problema se reduz as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)(2d - \Omega(y_1 + y_2)) = 0 \\ (y_1 - y_2)(2\mu - \delta(y_1 + y_2)) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Note que  $y_1 = y_2$  não corresponde a um ciclo limite. Por isso estamos interessados nas soluções do sistema

$$\begin{cases} 2d - \Omega(y_1 + y_2) = 0 \\ 2\mu - \delta(y_1 + y_2) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Primeiramente, vamos considerar que sistema vetorial suave por partes  $Z = (X, Y)$  é contínuo, então ambos os sistemas  $X = (-bx - \Omega y + d, x + by + c)$  e  $Y = -\beta x - \delta y + \mu, \alpha x + \beta y + \gamma$

devem coincidir em  $x = 0$ . Comparando os dois campos em  $x = 0$ , teremos:

$$X(0, y) = (-\Omega y + d, -by + c) \quad \text{e} \quad Y(0, y) = (-\delta y + \mu, -\beta y + \gamma),$$

Assim,  $\Omega = \delta, d = \mu, b = \beta$  e  $c = \gamma$ . Logo, a solução  $(y_1, y_2)$  do sistema (4.5) que satisfaz a condição  $y_1 < y_2$ , é  $y_1 = \frac{2d}{\Omega} - y_2$ ; visto que

$$2d - \Omega(y_1 + y_2) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 2d - \Omega(y_1 + y_2) &= 0 \\ 2d &= \Omega y_1 + \Omega y_2 \\ y_1 &= \frac{2d}{\Omega} - y_2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Logo, para cada  $(0, y_1)$ , existe um  $y_2$  tal que a órbita é fechada, formando um contínuo de órbitas periódicas. Portanto, não existe um ciclo limite (uma órbita periódica isolada).

Analisemos, agora, o caso descontínuo. Se esse sistema for descontínuo, devemos encontrar as soluções da equação (4.6)  $(y_1, y_2)$  tal que  $y_1 < y_2$  são:

$$\mu = \frac{\delta d}{\Omega} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{2d}{\Omega} - y_2.$$

De fato, da equação  $2\mu - \delta(y_1 + y_2) = 0$ , temos

$$2\mu - \delta(y_1 + y_2) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad y_1 + y_2 = \frac{2\mu}{\delta}, \tag{4.8}$$

usando a solução de (4.7) temos que  $y_1 + y_2 = \frac{2d}{\Omega}$ , assim,  $\mu = \frac{\delta}{2} \frac{2d}{\Omega} \Rightarrow \mu = \frac{\delta d}{\Omega}$ .

Ainda, considerando a solução de (4.7) e (4.8) temos duas equações que descrevem retas que podem ser paralelas, quando  $\frac{2d}{\Omega} = \frac{2\mu}{\delta}$ , ou então possuem infinitas soluções, quando  $\frac{2d}{\Omega} \neq \frac{2\mu}{\delta}$ . Dessa forma, pode-se concluir que ou não temos solução ou temos infinitas soluções. Em ambos os casos não há ciclos limite. Veja a Figura 4.3

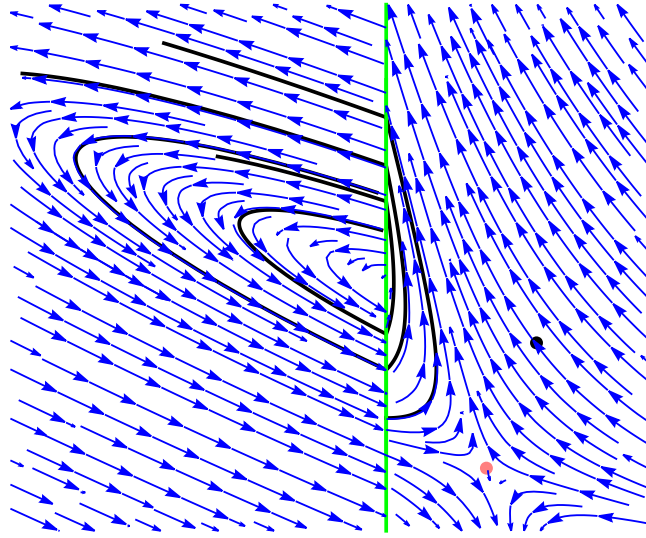


Figura 4.3: Exemplo de sistema diferencial linear por partes descontínuo formado por um centro e uma sela Hamiltoniana.

■

No que se segue, iremos considerar um campo de vetores suave por partes com três zonas, cujas retas de descontinuidade são dadas pelas retas  $x = 1$  e  $x = -1$ .

**Proposição 4.0.3.** *Um sistema diferencial linear por partes contínuo separado por duas retas paralelas formado por centros lineares, nas regiões  $x < -1$  e  $x > 1$ , e uma sela Hamiltoniana linear em  $-1 < x < 1$  não possui ciclos limite.*

**Demonstração:** Note que se o sistema diferencial linear por partes tem uma órbita periódica candidata a ser ciclo limite, então essa órbita intercepta as retas  $x = \pm 1$  em exatamente quatro pontos, digamos  $(-1, y_1)$ ,  $(-1, y_2)$ ,  $(1, y_3)$  e  $(1, y_4)$ , com  $y_2 < y_1$  e  $y_3 < y_4$ . Sejam  $F_1 = \frac{-x_1^2}{2} - bx_1y_1 - \frac{\Omega}{2}y_1^2 - cx_1 + dy_1$  e  $F_2 = \frac{-x_2^2}{2} - bx_2y_2 - \frac{\Omega}{2}y_2^2 - cx_2 + dy_2$  as integrais primeiras dos centros lineares e  $H_1 = -\frac{\alpha}{2}x^2 - \beta xy - \frac{\delta}{2}y^2 - \gamma x + \mu y$  a integral primeira da sela Hamiltoniana linear, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(-1, y_1) - F_1(-1, y_2) = 0 \\ H_1(-1, y_2) - H_1(1, y_3) = 0 \\ F_2(1, y_3) - F_2(1, y_4) = 0 \\ H_1(1, y_4) - H_1(-1, y_1) = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Manipulando a primeira equação do sistema (4.9) obtemos

$$\begin{aligned}
 F_1(-1, y_1) - F_1(-1, y_2) &= -\frac{1}{2} + b_1 y_1 - \frac{\Omega_1}{2} y_1^2 + c_1 + d_1 y_1 + \frac{1}{2} \\
 &\quad - b_1 y_2 - \frac{\Omega_1}{2} y_2^2 - c_1 - d_1 y_2 \\
 &= 2b_1(y_1 - y_2) + 2d_1(y_1 - y_2) - \Omega_1(y_1^2 - y_2^2) \\
 &= 2(b_1 + d_1)(y_1 - y_2) - \Omega_1(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) \\
 &= (y_1 - y_2)(2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2)) = 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Manipulando a segunda equação do sistema (4.9) obtemos

$$\begin{aligned}
 H_1(-1, y_2) - H_1(1, y_3) &= -\frac{\alpha}{2} + \beta y_2 - \frac{\delta}{2} y_2^2 + \gamma + \mu y_2 + \frac{\alpha}{2} + \beta y_3 + \frac{\delta}{2} y_3^2 + \gamma - \mu y_3 \\
 &= 4\gamma + 2y_2(\beta + \mu) + 2y_3(\beta - \mu) - \delta(y_2^2 - y_3^2)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Manipulando a terceira equação do sistema (4.9) obtemos

$$\begin{aligned}
 F_2(1, y_3) - F_2(1, y_4) &= -\frac{1}{2} - b_2 y_3 - \frac{\Omega_2}{2} y_3^2 - c_2 + d_2 y_3 + \frac{1}{2} + b_2 y_4 + \frac{\Omega_2}{2} y_4^2 + c_2 - d_2 y_4 \\
 &= -2b_2(y_3 - y_4) + 2d_2(y_3 - y_4) - \Omega_2(y_3^2 - y_4^2) \\
 &= -(2(b_2 - d_2)(y_3 - y_4) + \Omega_2(y_3 + y_4)(y_3 - y_4)) \\
 &= (y_3 - y_4)(2(b_2 - d_2) + \Omega_2(y_3 + y_4))
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Manipulando a quarta equação do sistema (4.9) obtemos

$$\begin{aligned}
 H_1(1, y_4) - H_1(-1, y_1) &= -\frac{\alpha}{2} - \beta y_4 - \frac{\delta}{2} y_4^2 - \gamma + \mu y_4 + \frac{\alpha}{2} - \beta y_1 + \frac{\delta}{2} y_1^2 - \gamma - \mu y_1 \\
 &= -4\gamma - 2y_1(\beta + \mu) - 2y_4(\beta - \mu) + \gamma(y_1^2 - y_4^2)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Assim, nosso problema se reduz a encontrar soluções do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (y_1 - y_2)(2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2)) = 0 \\
 4\gamma + 2y_2(\beta + \mu) + 2y_3(\beta - \mu) - \delta(y_2^2 - y_3^2) = 0 \\
 (y_3 - y_4)(2(b_2 - d_2) + \Omega_2(y_3 + y_4)) = 0 \\
 -4\gamma - 2y_1(\beta + \mu) - 2y_4(\beta - \mu) + \gamma(y_1^2 - y_4^2) = 0
 \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Note que  $y_1 = y_2$  e  $y_3 = y_4$  não correspondem a um ciclo limite. Por isso, estamos interessados nas soluções do sistema

$$\begin{cases} 2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2) = 0 \\ 4\gamma + 2y_2(\beta + \mu) + 2y_3(\beta - \mu) - \delta(y_2^2 - y_3^2) = 0 \\ 2(b_2 - d_2) + \Omega_2(y_3 + y_4) = 0 \\ -4\gamma - 2y_1(\beta + \mu) - 2y_4(\beta - \mu) + \gamma(y_1^2 - y_4^2) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Como estamos assumindo que o sistema diferencial por partes é contínuo, temos que ambos os sistemas de  $F_1$  e  $H_1$  devem coincidir em  $x = -1$ , e os sistemas de  $F_2$  e  $H_1$  devem coincidir em  $x = 1$ . Nomeando os sistemas de  $F_1$ ,  $F_2$  e  $H_1$ , respectivamente, de  $X = (-b_1x - \Omega_1y + d_1, x + b_1y + c_1)$ ,  $Y = (-b_2x - \Omega_2y + d_2, x + b_2y + c_2)$  e  $Z = (-\beta x - \delta y + \mu, \alpha x + \beta y + \gamma)$ , aplicando nos campos e os comparando, teremos:

$$\begin{cases} X(-1, y) = (b_1 - \Omega_1y + d_1, -1 + b_1y + c_1), \\ Z(-1, y) = (\beta - \delta y + \mu, -\alpha + \beta y + \gamma). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z(1, y) = (-\beta - \delta y + \mu, \alpha + \beta y + \gamma), \\ Y(1, y) = (-b_2 - \Omega_2y + d_2, 1 + b_2y + c_2). \end{cases}$$

Comparando essas igualdades, devemos ter,

$$\beta = b_1 = b_2, \gamma = \Omega_1 = \Omega_2, \mu_1 = d_1 = d_2, c_1 = 1 + \gamma - \alpha, c_2 = -1 + \gamma + \alpha.$$

Resolvendo o sistema (4.15) fazendo as substituições que obtemos considerando o caso contínuo:

$$\begin{aligned} 2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2) &= 0 \\ 2(b_1 + d_1) &= \Omega_1(y_1 + y_2) \\ 2(\beta + \mu) &= \delta_1(y_1 + y_2) \\ y_2 &= \frac{2(\beta + \mu)}{\delta} - y_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Agora, substituindo o resultado obtido na equação (4.16) na segunda equação do sistema (4.15), obtemos:

$$\begin{aligned}
4\gamma + 2y_2(\beta + \mu) + 2y_3(\beta - \mu) - \delta(y_2^2 - y_3^2) &= 0 \\
4\gamma + 2\left(\frac{2(\beta + \mu)}{\delta} - y_1\right)(\beta + \mu) + 2y_3(\beta - \mu) - \delta\left(\left(\frac{2(\beta + \mu)}{\delta} - y_1\right)^2 - y_3^2\right) &= 0 \\
\delta y_3^2 + 2(\beta - \mu)y_3 + 4\gamma + \frac{4(\beta + \mu)^2}{\delta} - 2(\beta + \mu)y_1 - \frac{4(\beta + \mu)^2}{\delta} + 4(\beta + \mu)y_1 - \delta y_1^2 &= 0 \\
\delta y_3^2 + 2(\beta - \mu)y_3 + 4\gamma + 2(\beta + \mu) - \delta y_1^2 &= 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{-2(\beta - \mu) \pm \sqrt{4(\beta - \mu)^2 - 4\delta(\gamma + 2(\beta + \mu)y_1 + \delta y_1^2)}}{2\delta} \\
&= \frac{-2(\beta - \mu) \pm \sqrt{4(\beta^2 - 2\beta\mu + \mu^2 - 4\delta\gamma - 2\delta\beta y_1 - 2\delta\mu y_1 + \delta y_1^2)}}{2\delta} \\
&= \frac{-2(\beta - \mu) \pm 2\sqrt{\beta^2 - 4\gamma\delta + (\mu - \delta y_1)^2 - 2\beta(\mu + \delta y_1)}}{2\delta} \\
&= \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

com  $\Delta = \beta^2 - 4\gamma\delta + (\mu - \delta y_1)^2 - 2\beta(\mu + \delta y_1)$ .

Manipularemos, também, a quarta equação do sistema (4.15), obtendo:

$$\begin{aligned}
-4\gamma - 2y_1(\beta + \mu) - 2y_4(\beta - \mu) + \gamma(y_1^2 - y_4^2) &= 0 \\
-\delta y_4^2 - 2(\beta - \mu)y_4 - 4\gamma - 2(\beta + \mu)y_1 + \delta y_1^2 &= 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
y_4 &= \frac{-2(\beta - \mu) \pm \sqrt{4(\beta - \mu)^2 + 4\delta(-4\gamma - 2(\beta + \mu)y_1 + \delta y_1^2)}}{-2\delta} \\
&= \frac{-2(\beta - \mu) \pm \sqrt{4(\beta^2 - 2\beta\mu + \mu^2 - 4\delta\gamma - 2\delta\beta y_1 - 2\delta\mu y_1 + \delta y_1^2)}}{-2\delta} \\
&= \frac{-2(\beta - \mu) \pm 2\sqrt{\beta^2 - 4\gamma\delta + (\mu - \delta y_1)^2 - 2\beta(\mu + \delta y_1)}}{2\delta} \\
&= \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

com  $\Delta = \beta^2 - 4\gamma\delta + (\mu - \delta y_1)^2 - 2\beta(\mu + \delta y_1)$ .

Se manipularmos a terceira equação do sistema (4.15), isolando o  $y_3$  e igualar pelo resultado obtido em (4.17), iremos obter o mesmo resultado para  $y_4$  obtido em (4.18).

Então, as soluções  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  do sistema (4.15) que satisfazem as condições  $y_2 < y_1$  e  $y_3 < y_4$  são:

$$y_2 = \frac{2(\beta + \mu)}{\delta} - y_1 \quad y_3 = \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta} \quad y_4 = \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta},$$

onde  $\Delta = \beta^2 - 4\gamma\delta + (\mu - \delta y_1)^2 - 2\beta(\mu + \delta y_1)$ . Portanto, se existe uma órbita periódica, então existe um contínuo de órbitas periódicas e, conseqüentemente, esse sistema não possui ciclo limite, pois para cada  $y_1$  é gerado um conjunto contínuo de soluções  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ . ■

Veja a Figura 4.4.

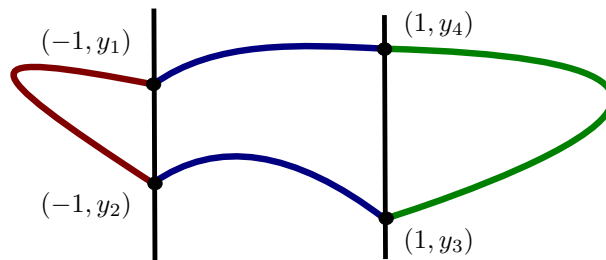


Figura 4.4: Exemplo de um campo vetorial suave por partes contínuo separado por duas curvas de separação.

**Proposição 4.0.4.** *Um sistema diferencial linear por partes descontínuo separado por duas retas paralelas formado por centros lineares nas regiões  $x < -1$  e  $x > 1$ ; e uma sela Hamiltoniana linear em  $-1 < x < 1$ , pode ter no máximo um ciclo limite. Além disso, há sistemas dessa classe que têm um ciclo limite.*

**Demonstração:** Agora, usaremos alguns resultados da proposição anterior e assumiremos que esse sistema diferencial por partes é descontínuo. Desde que  $\Omega_1, \Omega_2 > 0$ , as soluções da primeira e da terceira equação de (4.15), com  $y_1 \neq y_2$  e  $y_3 \neq y_4$ , são:

$$\begin{aligned} 2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 - y_2) &= 0 \Rightarrow y_1 = \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_2; \\ 2(b_2 - d_2) + \Omega_2(y_3 + y_4) &= 0 \Rightarrow y_3 = \frac{2(d_2 - b_2)}{\Omega_2} - y_4. \end{aligned}$$

Substituindo essas relações na segunda e na quarta equações de (4.15), temos:

$$\begin{aligned} e_1 &= 4((d_2 - b_2)\beta\Omega_2 + \gamma\Omega_2^2 + (b_2 - d_2)\Omega_2\mu + (b_2 - d_2)^2\delta) + 2\Omega_2^2(\beta + \mu)y_2 \\ &\quad - 2\Omega_2(\beta\Omega_2 - \Omega_2\mu - 2(b_2 - d_2)\delta)y_4 - \Omega_2^2\delta(y_2^2 - y_4^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

e

$$e_2 = 4(-(b_1 + d_1)\beta\Omega_1 - \gamma\Omega_1^2 - (b_1 + d_1)\Omega_1\mu + (b_1 + d_1)^2\delta) - 2\Omega_1^2((\beta - \Omega_1)y_4 + 2\Omega_1((\beta + \mu)\Omega_1 - 2(b_1 + d_1)\delta)y_2 + \Omega_1^2\delta(y_2^2 - y_4^2)) = 0$$

Tome  $e_3 = \Omega_1^2 e_1 + \Omega_2^2 e_2$ , e faça  $e_3 = 0$  em  $y_4$ . Note que ambas as equações têm um termo parecido das potências de  $y_2^2 - y_4^2$ . Ao fazer isso, retiramos esse termo, deixando a equação linear, com auxílio do Wolfram Mathematica obtemos:

$$y_4 = \frac{A_0}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} y_2,$$

onde

$$A_0 = -\Omega_1\Omega_2((\mu - \beta)d_2\Omega_1 + \beta(b_1 + d_1)\Omega_2 + b_2\Omega_1(\beta - \mu) + (b_1 + d_1)\Omega_2\mu) + ((b_2 - d_2)^2\Omega_1^2 + (b_1 + d_1)^2\Omega_2^2)\delta,$$

$$A_1 = \Omega_1^2\Omega_2((\beta - \mu)\Omega_2 + (d_2 - b_2)\delta),$$

$$A_2 = \Omega_1\Omega_2^2((\beta + \mu)\Omega_1 - (d_1 + b_1)\delta),$$

caso  $A_1 \neq 0$ . O caso com  $A_1 = 0$  fornece  $\beta_1 = \frac{\mu_1 + (b_2 - d_2)\delta_1}{\Omega_2}$ . Introduzindo essa igualdade em  $e_3 = 0$  e resolvendo em  $y_2$ , obtemos  $y_2 = y_1 = \frac{(b_1 + d_1)}{\Omega_1}$ , o que não é uma solução plausível. Portanto, podemos assumir que  $A_1 \neq 0$ . Agora, introduzindo  $y_4$  na (4.19) e resolvendo em  $y_2$  obtemos

$$y_{2\pm} = \frac{b_1 + d_1}{\Omega_1} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2A_3},$$

onde

$$A_3 = \Omega_1^2\Omega_2^2\delta_1 \left( 2\Omega_1\Omega_2\mu_1 + (b_2 - d_2)\Omega_1\delta_1 - (b_1 + d_1)\Omega_2\delta_1 \right) (2\beta_1\Omega_1\Omega_2 - ((b_2 + d_2)\Omega_1 + (b_1 + d_1)\Omega_2)\delta_1),$$

$$\begin{aligned} \Delta = & 4\Omega_1^2\Omega_2^2\delta_1^2((\beta_1 - \mu_1)\Omega_2 + (-b_2 + d_2)\delta_1)^2(2\Omega_1\Omega_2\mu_1 + (b_2 - d_2)\Omega_1\delta_1 - (b_1 + d_1)\Omega_2\delta_1) \\ & - 2\beta_1\Omega_1\Omega_2 + (b_2\Omega_1 - d_2\Omega_1 + (b_1 + d_1)\Omega_2\delta_1)(2\Omega_1((\beta_1 - \mu_1)d_2\Omega_1 + \beta_1(b_1 + d_1)\Omega_2) \\ & + 2\gamma_1\Omega_1\Omega_2 + (b_1 + d_1)\Omega_2\mu_1 + b_2\Omega_1(-\beta_1 + \mu_1) + (b_2 - d_2)\Omega_1 \\ & - (b_1 + d_1)\Omega_2)((b_2 - d_2)\Omega_1 + (b_1 + d_1)\Omega_2)\delta_1), \end{aligned}$$

caso  $A_3 \neq 0$ . Se  $A_3 = 0$ , então existe no máximo uma solução  $y_2$ . Quando  $A_3 \neq 0$ , uma vez que

$$y_{1\pm} = \frac{2(d_1 + b_1)}{\Omega_1} - y_{2\pm} = \frac{d_1 + b_1}{\Omega_1} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2A_3} = y_{2\mp},$$

existe no máximo uma solução com  $y_1 > y_2$  e  $y_3 < y_4$ . Em resumo, provamos que pode haver no máximo um ciclo limite. ■

Observe a seguir um caso que ilustra o modelo do Proposição (4.0.4):

**Exemplo 4.0.2.** *Considere as seguintes Hamiltonianas de três sistemas lineares, como visto nesse primeiro caso,*

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= -8y - \frac{y^2}{4} - 4(x + 2y)^2; \\ H(x, y) &= x - y + x^2 - y^2; \\ F_2(x, y) &= -8x + 8y - 4x^2 - 8xy - 5y^2; \end{aligned} \tag{4.20}$$

as quais obteremos os seguintes sistemas diferenciais nos intervalos estipulados:

- Para  $x < -1$ :

$$\dot{x} = -8 - 16x - \frac{65}{2}y \quad e \quad \dot{y} = 8(x + 2y);$$

- Para  $-1 < x < 1$ :

$$\dot{x} = -1 - 2y \quad e \quad \dot{y} = -1 - 2x;$$

- Para  $x > 1$ :

$$\dot{x} = 8 - 8x - 10y \quad e \quad \dot{y} = 8 + 8x + 8y$$

Agora, iremos verificar se há solução da forma  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  para tal sistema diferencial por

partes descontínuo formado por essas três sistemas diferenciais lineares aplicando no sistema (4.9) com  $y_2 < y_1$  e  $y_3 < y_4$ . Logo, teremos:

i)

$$\begin{aligned} F_1(-1, y_1) - F_1(-1, y_2) &= -8y_1 - 4 + 16y_1 - \frac{65}{4}y_1^2 + 8y_2 + 4 - 16y_2 + \frac{65}{4}y_2^2 \\ &= -8(y_1 - y_2) + 16(y_1 - y_2) - \frac{65}{4}(y_1^2 - y_2^2) \\ &= 8(y_1 - y_2) - \frac{65}{4}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \\ &= (y_1 - y_2) \left( 8 - \frac{65}{2}(y_1 + y_2) \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 = y_2 \quad \text{ou} \quad 8 - \frac{65}{2}(y_1 + y_2) &= 0 \\ y_2 &= \frac{32}{65} - y_1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} H_1(-1, y_2) - H_1(1, y_3) &= -1 - y_2 + 1 - y_2^2 - 1 + y_3 - 1 + y_3^2 \\ &= -2 - y_2 + y_3 - y_2^2 + y_3^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8 + 4y_2 + 4y_2^2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4y_2 + 4y_2^2}}{2} \end{aligned}$$

Substituindo  $y_2 = \frac{32}{65} - y_1$ , teremos:

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4 \left( \frac{32}{65} - y_1 \right) + 4 \left( \frac{32}{65} - y_1 \right)^2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{713}{65} - 4y_1 + \frac{4096}{4225} - \frac{256}{65}y_1 + 4y_1^2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{46345 - 16900y_1 + 4096 - 16640y_1 + 16900y_1^2}{4225}}}{2} \\ &= \frac{-65 \pm \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}}{65} \\ &= \frac{-65 \pm \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}}{2} \\ &= \frac{-65 \pm \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}}{130} \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
F_2(1, y_3) - F_2(1, y_4) &= -8 + 8y_3 - 4 - 8y_3 - 5y_3^2 + 8 - 8y_4 + 4 + 8y_4 + 5y_4^2 \\
&= 5y_4^2 - 5y_3^2 \\
&= (y_4 - y_3)(y_4 + y_3) \\
\Rightarrow y_4 &= y_3 \quad \text{ou} \quad y_4 = -y_3.
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
H_1(1, y_4) - H_1(-1, y_1) &= 1 - y_4 + 1 - y_4^2 + 1 + y_1 - 1 + y_1^2 \\
&= y_4^2 + y_4 - y_1 - y_1^2 - 2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y_4 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y_1 + 4y_1^2 + 8}}{2} \\
y_4 &= \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}}{2} = -y_3
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado obtido de  $y_3$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}}{2} &= \frac{65 \mp \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}}{130} \\
-65 \pm 65\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2} &= 65 \mp \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2} \\
\left(-130 \pm 65\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}\right)^2 &= \left(\mp \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4225(9 + 4y_1 + 4y_1^2) \mp 16900\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2} + 16900 &= 50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2 \\
38025 + 16900y_1 + 16900y_1^2 \mp 16900\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2} + 16900 &= 50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2 \\
4484 + 50440y_1 &= \pm 16900\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2} \\
(1121 + 12610y_1)^2 &= \left(\pm 4225\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}\right)^2 \\
1256641 + 169012100y_1^2 + 28271620y_1 &= 17850625(9 + 4y_1 + 4y_1^2) \\
-159398984 + 87609600y_1^2 - 43130880y_1 &= 0 \\
10951200y_1^2 - 5391360y_1 - 19924873 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{5391360 \pm \sqrt{(5391360)^2 + 872805076790400}}{21902400} \\
&= \frac{16}{65} \pm \frac{\sqrt{901871839440000}}{21902400} \\
&= \frac{16}{65} \pm \sqrt{\frac{4873}{2592}} \\
&= \frac{16}{65} + \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Voltando em (i) e substituindo o resultado de  $y_1$ , teremos:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \frac{32}{65} - y_1 \\
&= \frac{32}{65} - \frac{16}{65} - \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}} \\
&= \frac{16}{65} - \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Voltando em (ii) e substituindo o resultado de  $y_1$ , teremos:

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{-65 \pm \sqrt{50441 - 33540 \left( \frac{16}{65} + \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}} \right) + 16900 \left( \frac{16}{65} + \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}} \right)^2}}{130} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{\frac{3278665}{65} - \frac{536640}{65} - \frac{33540\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}} + 16900 \left( \frac{256}{4225} + \frac{32\sqrt{4873}}{2340\sqrt{2}} + \frac{4873}{2592} \right)^2}}{130} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{\frac{2742025}{65} - \frac{33540\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}} + \frac{4326400}{4225} + \frac{540800\sqrt{4873}}{2340\sqrt{2}} + \frac{82353700}{2592}}}{130} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{43209 - \frac{2795\sqrt{4873}}{3\sqrt{2}} + \frac{2080\sqrt{4873}}{9\sqrt{2}} + \frac{20588425}{648}}}{130} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{\frac{27999432 + 20588425}{648} + \frac{(-8385 + 2080)\sqrt{4873}}{9\sqrt{2}}}}{130} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{\frac{48587857}{648} - \frac{6305\sqrt{4873}}{9\sqrt{2}}}}{130}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-65 \pm \sqrt{\frac{48587857}{648} - \frac{6305\sqrt{9746}}{18}}}{130} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{\frac{48587857 - 226980\sqrt{9746}}{648}}}{130} \\
&= \frac{-65 \pm \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{18\sqrt{2}}}{130} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{2340\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Como estamos considerando que  $y_3 < y_4$ , então assumiremos

$$y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{2340\sqrt{2}}.$$

Logo, teremos que  $y_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{2340\sqrt{2}}$ .

Assim, temos que o sistema diferencial por partes descontínuo formado por dois centros lineares, nas regiões  $x < -1$  e  $x > 1$ , e uma sela Hamiltoniana linear, em  $-1 < x < 1$ , possui apenas um ciclo limite interceptando duas retas descontínuas em  $x = \pm 1$ , tem apenas uma solução  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  satisfazendo  $y_1 > y_2$  e  $y_3 < y_4$ , que seria

$$\left( \frac{16}{65} + \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}}, \frac{16}{65} - \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{2340\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{2340\sqrt{2}} \right).$$

Podemos observar o comportamento do Exemplo (4.0.2) na Figura 4.5.

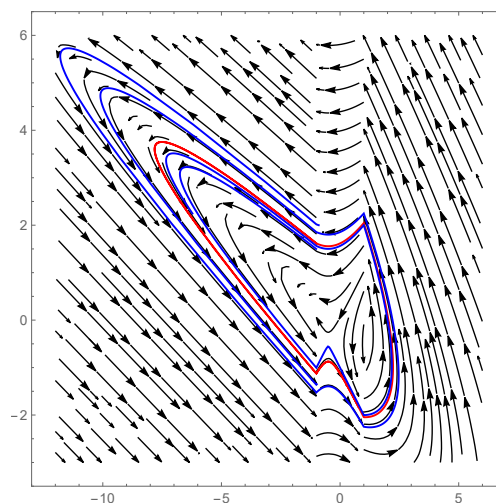


Figura 4.5: Ciclo limite do sistema diferencial descontínuo por partes (4.20) formado por dois centros lineares e uma sela Hamiltoniana linear.

**Proposição 4.0.5.** *Um sistema diferencial linear por partes contínuo separado por duas retas paralelas formado por centros lineares nas regiões  $x < -1$  e  $-1 < x < 1$ , e uma sela Hamiltoniana linear em  $x > 1$  não possui ciclos limites.*

**Demonstração:** Se o sistema diferencial linear por partes tem uma órbita periódica candidata a ser ciclo limite, então essa órbita intercepta as retas  $x = \pm 1$  em exatamente quatro pontos, digamos  $(-1, y_1)$ ,  $(-1, y_2)$ ,  $(1, y_3)$  e  $(1, y_4)$ , com  $y_2 < y_1$  e  $y_3 < y_4$ . Sejam  $F_1 = \frac{-x_1^2}{2} - bx_1y_1 - \frac{\Omega}{2}y_1^2 - cx_1 + dy_1$  e  $F_2 = \frac{-x_2^2}{2} - bx_2y_2 - \frac{\Omega}{2}y_2^2 - cx_2 + dy_2$  as integrais primeiras dos centros lineares e  $H_1 = -\frac{\alpha}{2}x^2 - \beta xy - \frac{\delta}{2}y^2 - \gamma x + \mu y$  a integral primeira da sela Hamiltoniana linear, temos que

$$\begin{cases} F_1(-1, y_1) - F_1(-1, y_2) = 0 \\ F_2(-1, y_2) - F_2(1, y_3) = 0 \\ H_1(1, y_3) - H_1(1, y_4) = 0 \\ F_2(1, y_4) - F_2(-1, y_1) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Manipulando a primeira equação do sistema (4.21) obtemos:

$$\begin{aligned} F_1(-1, y_1) - F_1(-1, y_2) &= -\frac{1}{2} + b_1y_1 - \frac{\Omega_1}{2}y_1^2 + c_1 + d_1y_1 + \frac{1}{2} \\ &\quad - b_1y_2 - \frac{\Omega_1}{2}y_2^2 - c_1 - d_1y_2 \\ &= 2b_1(y_1 - y_2) + 2d_1(y_1 - y_2) - \Omega_1(y_1^2 - y_2^2) \\ &= 2(b_1 + d_1)(y_1 - y_2) - \Omega_1(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) \\ &= (y_1 - y_2)(2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Manipulando a segunda equação do sistema (4.21) obtemos:

$$\begin{aligned} F_2(-1, y_2) - F_2(1, y_3) &= -\frac{1}{2} + b_2y_2 - \frac{\Omega_2}{2}y_2^2 + c_2 + d_2y_2 + \frac{1}{2} \\ &\quad + b_2y_3 + \frac{\Omega_2}{2}y_3^2 + c_2 - d_2y_3 \\ &= 2(b_2 + d_2)y_2 + 4c_2 + 2(b_2 - d_2)y_3 - \Omega_2(y_2^2 + y_3^2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Manipulando a terceira equação do sistema (4.21) obtemos:

$$\begin{aligned}
H_1(1, y_3) - H_1(1, y_4) &= -\frac{\alpha}{2} - \beta y_3 - \frac{\delta}{2} y_3^2 - \gamma + \mu y_3 + \frac{\alpha}{2} + \beta y_4 + \frac{\delta}{2} y_4^2 + \gamma - \mu y_4 \\
&= -2\beta(y_3 - y_4) + 2\mu(y_3 - y_4) - \delta(y_3^2 - y_4^2) \\
&= -2\beta(y_3 - y_4) + 2\mu(y_3 - y_4) - \delta(y_3 - y_4)(y_3 + y_4) \\
&= (y_3 - y_4)(2(\beta + \mu) + \delta(y_3 + y_4))
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Manipulando a quarta equação do sistema (4.21) obtemos:

$$\begin{aligned}
F_2(1, y_4) - F_2(-1, y_1) &= -\frac{1}{2} - b_2 y_4 - \frac{\Omega_2}{2} y_4^2 - c_2 + d_2 y_4 + \frac{1}{2} - b_2 y_1 + \frac{\Omega_2}{2} y_1^2 - c_2 - d_2 y_1 \\
&= -4c_2 - 2(b_2 + d_2)y_1 - 2(b_2 - d_2)y_4 + \Omega_2(y_1^2 - y_4^2) \\
&= +4c_2 + 2(b_2 + d_2)y_1 + 2(b_2 - d_2)y_4 - \Omega_2(y_1^2 - y_4^2)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Assim, nosso problema se reduz a encontrar soluções do sistema

$$\begin{cases}
(y_1 - y_2)(2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2)) = 0 \\
2(b_2 + d_2)y_2 + 4c_2 + 2y_3(b_2 - d_2) - \Omega_2(y_2^2 + y_3^2) = 0 \\
(y_3 - y_4)(2(\beta - \mu) + \delta(y_3 + y_4)) = 0 \\
4c_2 + 2y_1(b_2 + d_2) + 2y_4(b_2 - d_2) - \Omega_2(y_1^2 - y_4^2) = 0
\end{cases} \tag{4.26}$$

Note que  $y_1 = y_2$  e  $y_3 = y_4$  não correspondem a um ciclo limite. Por isso, estamos interessados nas soluções do sistema

$$\begin{cases}
2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2) = 0 \\
2(b_2 + d_2)y_2 + 4c_2 + 2y_3(b_2 - d_2) - \Omega_2(y_2^2 + y_3^2) = 0 \\
2(\beta - \mu) + \delta(y_3 + y_4) = 0 \\
4c_2 + 2y_1(b_2 + d_2) + 2y_4(b_2 - d_2) - \Omega_2(y_1^2 - y_4^2) = 0
\end{cases} \tag{4.27}$$

Assumindo que o sistema diferencial por partes é contínuo. Temos que ambos os sistemas de  $F_1$  e  $F_2$  devem coincidir em  $x = -1$ , e os sistemas de  $H_1$  e  $F_2$  devem coincidir em  $x = 1$ . Aplicando nos campos, de  $F_1$ ,  $F_2$  e  $H_1$ , que nomearemos de  $X = (-b_1x - \Omega_1y + d_1, x + b_1y + c_1)$ ,  $Y = (-b_2x - \Omega_2y + d_2, x + b_2y + c_2)$  e  $Z = (-\beta x - \delta y + \mu, \alpha x + \beta y + \gamma)$ , respectivamente,

temos:

$$\begin{cases} X(-1, y) = (b_1 - \Omega_1 y + d_1, -1 + b_1 y + c_1), \\ Y(-1, y) = (b_2 - \Omega_2 y + d_2, -1 + b_2 y + c_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z(1, y) = (-\beta - \delta y + \mu, \alpha + \beta y + \gamma), \\ Y(1, y) = (-b_2 - \Omega_2 y + d_2, 1 + b_2 y + c_2). \end{cases}$$

Comparando essas igualdades, devemos ter:

$$\beta = b_1 = b_2, \quad \delta = \Omega_1 = \Omega_2, \quad \mu_1 = d_1 = d_2, \quad c_1 = c_2 = \gamma, \quad \alpha = 1.$$

Resolvendo o sistema (4.27) fazendo as substituições que obtemos considerando o caso contínuo:

Da primeira equação do sistema (4.27), obtemos que

$$\begin{aligned} 2(b_1 + d_1) - \Omega_1(y_1 + y_2) &= 0 \\ 2(b_1 + d_1) &= \Omega_1(y_1 + y_2) \\ y_2 &= \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_1 \end{aligned}$$

Agora, substituindo o resultado obtido na equação (4) na segunda equação do sistema (4.27), obtemos:

$$\begin{aligned} 2(b_2 + d_2)y_2 + 4c_2 + 2y_3(b_2 - d_2) - \Omega_2(y_2^2 + y_3^2) &= 0 \\ 2(b_2 + d_2) \left( \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_1 \right) + 4c_2 + 2y_3(b_2 - d_2) \\ - \Omega_2 \left( \left( \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_1 \right)^2 + y_3^2 \right) &= 0 \\ 4c_1 + 2(b_1 + d_1) \left( \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_1 \right) + 2y_3(b_1 - d_1) \\ - \Omega_1 \left( \left( \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_1 \right)^2 + y_3^2 \right) &= 0 \\ 4c_1 + \frac{4(b_1 + d_1)^2}{\Omega_1} - 2y_1(b_1 + d_1) + 2y_3(b_1 - d_1) \\ - \frac{4(b_1 + d_1)^2}{\Omega_1} + 4(b_1 + d_1)y_1 - \Omega_1 y_1^2 + \Omega_1 y_3^2 &= 0 \\ \Omega_1 y_3^2 + 2y_3(b_1 - d_1) + 2y_1(b_1 + d_1) - \Omega_1 y_1^2 + 4c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{-2(b_1 - d_1) \pm \sqrt{4(b_1 - d_1)^2 - 4\Omega_1(4c_1 + 2(b_1 + d_1)y_1 - \Omega_1 y_1^2)}}{2\Omega_1} \\
&= \frac{-2(b_1 - d_1) \pm \sqrt{4(b_1^2 - 2b_1d_1 + d_1^2 - 4\Omega_1c_1 - 2\Omega_1(b_1 + d_1)y_1 + \Omega_1^2 y_1^2)}}{2\Omega_1} \\
&= \frac{-2(\beta - \mu) \pm 2\sqrt{\beta^2 - 2\beta\mu + \mu^2 - 4\delta\gamma - 2\delta(\beta + \mu)y_1 + \delta^2 y_1^2}}{2\delta} \\
&= \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

com  $\Delta = \beta^2 - 2\beta\mu + \mu^2 - 4\delta\gamma - 2\delta(\beta + \mu)y_1 + \delta^2 y_1^2$

Manipularemos, também, a quarta equação do sistema (4.27), obtendo:

$$\begin{aligned}
4c_2 + 2y_1(b_2 + d_2) + 2y_4(b_2 - d_2) - \Omega_2(y_1^2 - y_4^2) &= 0 \\
4\gamma + 2(\beta + \mu)y_1 + 2(\beta - \mu)y_4 - \delta(y_1^2 - y_4^2) &= 0 \\
\delta y_4^2 + 2(\beta - \mu)y_4 + 4\gamma + 2(\beta + \mu)y_1 - \delta y_1^2 &= 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y_4 &= \frac{2(\mu - \beta) \pm \sqrt{4(\beta - \mu)^2 - 4\delta(4\gamma + 2(\beta + \mu)y_1 - \delta y_1^2)}}{2\delta} \\
&= \frac{2(\mu - \beta) \pm \sqrt{4(\beta^2 - 2\beta\mu + \mu^2 - 4\delta\gamma - 2\delta(\beta + \mu)y_1 + \delta^2 y_1^2)}}{2\delta} \\
&= \frac{2(\mu - \beta) \pm 2\sqrt{\beta^2 - 2\beta\mu + \mu^2 - 4\delta\gamma - 2\delta(\beta + \mu)y_1 + \delta^2 y_1^2}}{2\delta} \\
&= \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

com  $\Delta = \beta^2 - 2\beta\mu + \mu^2 - 4\delta\gamma - 2\delta(\beta + \mu)y_1 + \delta^2 y_1^2$ .

Se manipularmos a terceira equação do sistema (4.27), isolando o  $y_3$  e igualar pelo resultado obtido em (4.28), iremos obter o mesmo resultado para  $y_4$  obtido em (4.29).

Então, as soluções  $y_1, y_2, y_3$  e  $y_4$  do sistema (4.27) satisfaz as condições  $y_2 < y_1$  e  $y_3 < y_4$  são:

$$y_2 = \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_1 \quad y_3 = \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta} \quad y_4 = \frac{\mu - \beta \pm \sqrt{\Delta}}{\delta},$$

onde  $\Delta = \beta^2 - 4\gamma\delta + -2\beta\mu + \mu^2 - 2\delta(\beta + \mu)y_1 + y_1^2\delta^2$ . Portanto, se uma órbita periódica existe, então existe um contínuo de órbitas periódicas e, conseqüentemente, não possui ciclo limite, pois para cada  $y_1$  é gerado um conjunto contínuo de soluções  $y_1, y_2, y_3$  e  $y_4$ .

■

**Proposição 4.0.6.** *Um sistema diferencial linear por partes descontínuo separado por duas retas paralelas formado por centros lineares nas regiões  $x < -1$  e  $-1 < x < 1$ , e uma sela Hamiltoniana linear em  $x > 1$ , pode ter no máximo um ciclo limite. Além disso, há sistemas dessa forma que possuem um ciclo limite.*

**Demonstração:** Agora, assumiremos que o sistema diferencial por partes da proposição anterior é descontínuo. Considerando  $\delta = 0$  teremos na terceira equação do sistema (4.27) que  $y_3 = y_4$  ou  $\beta = \mu$ , e qualquer solução das outras equações produz um contínuo de soluções. Mas se  $\delta \neq 0$ . Desde que  $\Omega_1, \Omega_2 > 0$ , as soluções da primeira e da terceira equação de (4.27), com  $y_1 \neq y_2$  e  $y_3 \neq y_4$ , são:

$$\begin{aligned} 2(b_1 + d_1)\Omega_1(y_1 - y_2) &= 0 \Rightarrow y_2 = \frac{2(b_1 + d_1)}{\Omega_1} - y_1 \\ 2(\beta - \mu) + \delta(y_3 + y_4) &= 0 \Rightarrow y_3 = \frac{2(\mu - \beta)}{\delta} - y_4 \end{aligned}$$

Substituindo essas relações na segunda e na quarta equações de (4.27), temos:

$$\begin{aligned} e_1 &= 4(\beta_1 - \mu_1)^2\Omega_2 - 4(b_2 - d_2)(\beta_1 - \mu_1)\delta_1 + 4c_2\delta_1^2 + 4c_2\Omega_1^2 \\ &\quad + 2(b_2 + d_2)\delta_1^2 y_2 2\delta_1(2(\beta_1 - \mu_1)\Omega_2 + (d_2 - b_2)\delta_1)y_4 - \Omega_2\delta_1^2(y_2^2 - y_4^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

e

$$\begin{aligned} e_2 &= 4(b_1 + d_1)(b_2 + d_2)\Omega_1 + 4c_2\Omega_1^2 - 4(b_1 + d_1)^2\Omega_2 + 2(b_2 - d_2)\Omega_2 y_4 \\ &\quad - 2\Omega_1((b_2 + d_2)\Omega_1 - 2(b_1 + d_1)\Omega_2)y_2 - \Omega_1^2\Omega_2(y_2^2 - y_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Tomando  $e_3 = \Omega_1^2 e_1 - \delta^2 e_2$ , e resolvendo  $e_3 = 0$  em  $y_4$  obtemos

$$y_4 = \frac{A_0 + A_2 y_2}{\delta_1 \Omega_1^2 ((b_2 - d_2)\delta_1 + (\mu_1 - \beta_1)\Omega_2)},$$

onde,

$$\begin{aligned} A_0 &= (\beta - \mu)^2\Omega_2^2\Omega_1^2 - (b_2 - d_2)(\beta - \mu)\Omega_2\delta^2 \\ &\quad + (b_1 + d_1)((b_1 + d_1)\Omega_2 - (b_2 + d_2)\Omega_1)\delta^2, \\ A_2 &= \Omega_1((b_2 + d_2)\Omega_1 - (b_1 + d_1)\Omega_2)\delta^2, \end{aligned}$$

caso que  $\mu \neq \beta + \frac{(d_2 - b_2)\delta}{\Omega_2}$ . Caso  $\mu = \beta + \frac{(d_2 - b_2)\delta}{\Omega_2} = 0$ , resolvendo  $e_3 = 0$  em  $y_2$  obtemos  $y_2 = y_1 = \frac{2(\mu + \beta)}{\delta}$ , o que não é uma solução plausível. Assim, podemos assumir

que  $\mu \neq \beta + \frac{(d_2 - b_2)\delta}{\Omega_2}$ . Agora, introduzindo  $y_4$  na (4.30) e resolvendo em  $y_2$ , obtemos

$$y_{2\pm} = \frac{b_1 + d_1}{\Omega_1} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2A_3},$$

onde

$$\begin{aligned} A_3 &= -\Omega_1^2 \Omega_2 \delta^2 ((\beta - \mu)\Omega_1 \Omega_2 + 2d_2 \Omega_1 \delta - (b_1 + d_1)\Omega_2 \delta) \\ &\quad ((\beta - \mu)\Omega_1 \Omega_2 - 2b_2 \Omega_1 \delta + (b_1 + d_1)\Omega_2 \delta), \\ \Delta &= 4\Omega_1^2 \Omega_2 \delta^2 (\beta \Omega_2 - \mu \Omega_2 + (d_2 - b_2)\delta)^2 ((\beta - \mu)^2 \Omega_1 \Omega_2 + 2d_2 \Omega_1 \delta - (b_1 + d_1)\Omega_2 \delta) \\ &\quad (\beta \Omega_1 \Omega_2 - \mu \Omega_1 \Omega_2 - 2b_2 \Omega_1 \delta + (b_1 + d_1)\Omega_2 \delta) ((\beta - \mu)^2 \Omega_1^2 \Omega_2 - 2(b_2 - d_2) \\ &\quad (\beta - \mu)\Omega_1^2 \delta + (2\Omega_1((b_1 + d_1)(b_2 + d_2) + 2c_2 \Omega_1) - (b_1 + d_1)^2 \Omega_2)\delta^2), \end{aligned}$$

caso  $A_3 \neq 0$ . Se  $A_3 = 0$  então existe no máximo uma solução  $y_2$ . Quando  $A_3 \neq 0$ , como

$$y_{1\pm} = \frac{b_1 + d_1}{\Omega_1} - y_{2\pm} = \frac{b_1 + d_1}{\Omega_1} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2A_3} = y_{2\mp},$$

existe no máximo uma solução com  $y_1 > y_2$  e  $y_3 < y_4$ . Em resumo, provamos que pode haver no máximo um ciclo limite. ■

Observe a seguir um caso que ilustra o modelo da Proposição (4.0.6).

**Exemplo 4.0.3.** *Considere as seguintes Hamiltonianas de três sistemas lineares, como visto nesse primeiro caso,*

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= -8y - \frac{1}{4}y^2 - 4(x + 2y)^2 \\ F_2(x, y) &= x - y - x^2 - y^2 \\ H_1(x, y) &= -4x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned} \tag{4.31}$$

as quais obteremos os seguintes sistemas diferenciais nos intervalos estipulados:

- Para  $x < -1$ :

$$\dot{x} = -8 - 16x - \frac{65}{2}y \quad e \quad \dot{y} = 8x + 16y = 8(x + 2y);$$

- Para  $-1 < x < 1$ :

$$\dot{x} = -1 - 2y \quad e \quad \dot{y} = -1 + 2x;$$

- Para  $x > 1$ :

$$\dot{x} = -y \quad e \quad \dot{y} = 4 - x$$

Agora, iremos verificar se há uma solução da forma  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  para tal sistema diferencial por partes descontínuo formado por essas três sistemas diferenciais lineares aplicando no sistema (4.21) com  $y_2 < y_1$  e  $y_3 < y_4$ . Logo, teremos:

i)

$$\begin{aligned} F_1(-1, y_1) - F_1(-1, y_2) &= -8y_1 - 4 + 16y_1 - \frac{65}{4}y_1^2 + 8y_2 + 4 - 16y_2 + \frac{65}{4}y_2^2 \\ &= -8(y_1 - y_2) + 16(y_1 - y_2) - \frac{65}{4}(y_1^2 - y_2^2) \\ &= 8(y_1 - y_2) - \frac{65}{4}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \\ &= (y_1 - y_2) \left( 8 - \frac{65}{2}(y_1 + y_2) \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 = y_2 \quad ou \quad 8 - \frac{65}{2}(y_1 + y_2) &= 0 \\ y_2 &= \frac{32}{65} - y_1 \end{aligned}$$

ii) Para  $F_2(-1, y_2) - F_2(1, y_3) = 0$ :

$$\begin{aligned} F_2(-1, y_2) - F_2(1, y_3) &= -1 - y_2 - 1 - y_2^2 - 1 + y_3 + 1 + y_3^2 \\ &= y_3^2 + y_3 - y_2^2 - y_2 - 2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8 + 4y_2 + 4y_2^2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4y_2 + 4y_2^2}}{2} \end{aligned}$$

Substituindo  $y_2 = \frac{32}{65} - y_1$ , teremos:

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4 \left( \frac{32}{65} - y_1 \right) + 4 \left( \frac{32}{65} - y_1 \right)^2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{713}{65} - 4y_1 + \frac{4096}{4225} - \frac{256}{65}y_1 + 4y_1^2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{46345 - 16900y_1 + 4096 - 16640y_1 + 16900y_1^2}{4225}}}{2} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}}{65} \\
&= \frac{-65 \pm \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}}{130}
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
H_1(1, y_3) - H_1(1, y_4) &= -4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_3^2 + 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_4^2 \\
&= \frac{1}{2}(y_4^2 - y_3^2) \\
&= (y_4 - y_3)(y_4 + y_3) \\
\Rightarrow y_4 &= y_3 \quad \text{ou} \quad y_4 = -y_3.
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
F_2(1, y_4) - F_2(-1, y_1) &= 1 - y_4 - 1 - y_4^2 - (-1 - y_1 - 1 - y_1^2) \\
&= y_4^2 + y_4 - y_1 - y_1^2 - 2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y_4 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y_1 + 4y_1^2 + 8}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}}{2} = -y_3
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado obtido de  $y_3$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}}{2} &= \frac{65 \mp \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}}{130} \\
-65 \pm 65\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2} &= 65 \mp \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2} \\
\left(-130 \pm 65\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}\right)^2 &= \left(\mp \sqrt{50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4225(9 + 4y_1 + 4y_1^2) \mp 16900\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2} + 16900 &= 50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2 \\
38025 + 16900y_1 + 16900y_1^2 \mp 16900\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2} + 16900 &= 50441 - 33540y_1 + 16900y_1^2 \\
4484 + 50440y_1 &= \pm 16900\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1121 + 12610y_1)^2 &= (\pm 4225\sqrt{9 + 4y_1 + 4y_1^2})^2 \\
1256641 + 169012100y_1^2 + 28271620y_1 &= 17850625(9 + 4y_1 + 4y_1^2) \\
-159398984 + 87609600y_1^2 - 43130880y_1 &= 0 \\
10951200yy_1^2 - 5391360y_1 - 19924873 &= 0
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{5391360 \pm \sqrt{(5391360)^2 + 872805076790400}}{21902400} \\
&= \frac{16}{65} \pm \frac{\sqrt{901871839440000}}{21902400} \\
&= \frac{16}{65} \pm \sqrt{\frac{4873}{2592}} \\
&= \frac{16}{65} + \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Assim, note que os resultados serão semelhantes ao do Exemplo (4.0.2), portanto temos que o sistema diferencial por partes descontínuo formado por dois centros lineares, nas regiões  $x < -1$  e  $-1 < x < 1$ , e uma sela Hamiltoniana linear, em  $x > 1$ , possui apenas um ciclo limite interceptando duas retas descontínuas em  $x = \pm 1$ , tem apenas uma solução  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  satisfazendo  $y_1 > y_2$  e  $y_3 < y_4$ , que seria

$$\left( \frac{16}{65} + \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}}, \frac{16}{65} - \frac{\sqrt{4873}}{36\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{2340\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{48587857 - 226980\sqrt{9746}}}{2340\sqrt{2}} \right).$$

Podemos observar o comportamento do Exemplo (4.0.3) na Figura 4.6.

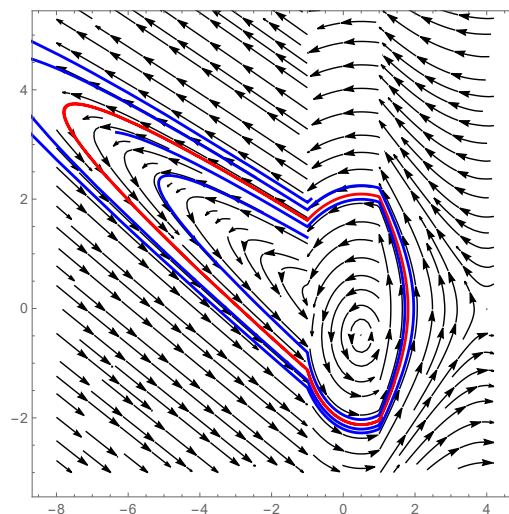


Figura 4.6: Ciclo limite do sistema diferencial descontínuo por partes (4.31) formado por dois centros lineares e uma sela Hamiltoniana linear.

Portanto, provamos que as seguintes afirmações são verdadeiras:

**Teorema 4.0.2.** .

- (a) *Um sistema diferencial linear por partes contínuo separado por duas retas paralelas formadas por dois centros e uma sela Hamiltoniana não possui ciclos limites.*
- (b) *Um sistema diferencial linear por partes descontínuo separado por duas retas paralelas formadas por dois centros e uma sela Hamiltoniana pode ter no máximo um ciclo limite. Além disso, há sistemas dessa classe que têm um ciclo limite.*

*Assumindo que temos um sistema diferencial linear por partes separado por duas retas paralelas e formadas por dois centros e uma sela Hamiltoniana, consideramos os dois casos possíveis*

- I) *Temos centros lineares nas regiões  $x < -1$  e  $x > 1$ ; e uma sela Hamiltoniana linear em  $-1 < x < 1$ .*
- II) *Temos centros lineares nas regiões  $x < -1$  e  $-1 < x < 1$ , e uma sela Hamiltoniana linear em  $x > 1$ .*

Ainda, podemos fazer um adendo aos resultados obtidos. Em [10] e [11], os autores obtiveram o número máximo de ciclos limite de sistemas diferenciais por partes contínuos e descontínuos formados apenas por centros lineares e separados por uma ou duas retas paralelas e formados somente por selas Hamiltonianas lineares, respectivamente. Quando esses sistemas são contínuos e são separados por uma ou duas linhas retas paralelas, é provado que eles não têm ciclos limite. No entanto, quando os sistemas diferenciais por partes são descontínuos, separados por duas linhas retas paralelas, mostramos que eles podem ter no máximo um ciclo limite, e que existem sistemas com zero ou um ciclo limite, porém, no caso em que esses sistemas são descontínuos e são separados por apenas uma linha reta, eles não podem ter ciclos limite. O mesmo acontece para o terceiro teorema apresentado no artigo [12], onde é estudado sistemas suaves por partes lineares formados por duas selas Hamiltonianas e apenas um centro. Dessa forma, podemos dizer que a descontinuidade é um fator determinante para se ter ciclos limite mesmo nesses casos.

## Considerações Finais

---

O estudo bibliográfico realizado ao longo deste trabalho foi fundamental para proporcionar ao autor uma introdução mais profunda a um campo específico da matemática, que não é abordado de maneira tão detalhada nos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFG). Embora a grade curricular seja bastante completa, com disciplinas que abrangem tanto aspectos matemáticos quanto pedagógicos, temas como sistemas dinâmicos geralmente não são apresentados de forma tão aprofundada.

Além disso, a pesquisa proporcionou um maior contato com a pesquisa científica, o que ampliou o conhecimento do autor em diversas disciplinas de matemática, como Álgebra Linear, Cálculo, Espaços Métricos, Teoria Qualitativa das EDOs, Geometria Analítica e Análise. Esse processo contribuiu para uma melhor familiarização com a pesquisa acadêmica, permitindo a construção de um estudo que, além de ser um avanço para o autor, também pode servir como referência inicial para outros interessados no tema, incentivando o estudo e a exploração de sistemas dinâmicos.

Do estudo do artigo [12], podemos concluir que a descontinuidade é o elemento essencial para o surgimento de ciclos limite em sistemas diferenciais lineares por partes. Em sistemas contínuos, o comportamento tende a ser regular e não gera órbitas periódicas isoladas, mas ao considerarmos o sistema suave por partes altera-se qualitativamente seu comportamento, com implicações importantes tanto para teoria quanto para possíveis aplicações veja em [4]. Este estudo, oferece um ponto de partida para investigações futuras.

## Referências Bibliográficas

---

- [1] A. A. Andronov, C. E. Khaikin, and A. Vitt. *Theory of Oscillators*. Princeton University Press, 1966.
- [2] W. E. Boyce, R. C. Diprima, and D. B. Meade. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro : LTC, 11 edition, 2020. tradução e revisão técnica Valeria de Magalhães.
- [3] D. D. C. Braga and L. F. Mello. More than three limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(04):1450056, 2014.
- [4] T. Carvalho, D. D. Novaes, and L. F. Gonçalves. Sliding Shilnikov connection in Filippov-type predator–prey model. *Nonlinear Dynamics*, 100(3):2973–2987, 2020.
- [5] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. Piecewise–smooth dynamical systems. *Theory and applications*, Springer–Verlag, London, 2008.
- [6] C. Doering and A. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, 2014.
- [7] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right Hand Sides*. Kluwer, 1988.
- [8] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo, and F. Torres. Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(11):2073–2097, 1998.
- [9] L. F. Gonçalves. Campos de vetores suaves por partes: aspectos teóricos e aplicações. 2020. Dissertação de Mestrado.
- [10] J. Llibre and M. A. Teixeira. Piecewise linear differential systems with only centers can create limit cycles? *Nonlinear Dynamics*, 91(1):249–255, 2018.

- 
- [11] J. Llibre and C. Valls. Limit cycles of planar piecewise differential systems with linear hamiltonian saddles. *Symmetry*, 13(7):1128, 2021.
- [12] J. Llibre and C. Valls. Limit cycles of piecewise differential systems with linear hamiltonian saddles and linear centres. *Dynamical Systems*, 37(2):262–279, 2022.
- [13] R. Lum and L. O. Chua. Global properties of continuous piecewise linear vector fields. part I: Simplest case in  $\mathbb{R}^2$ . *International journal of circuit theory and applications*, 19(3):251–307, 1991.
- [14] J. C. Medrado and J. Torregrosa. Uniqueness of limit cycles for sewing planar piecewise linear systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 431(1):529–544, 2015.
- [15] D. D. Novaes and E. Ponce. A simple solution to the Braga–Mello conjecture. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(01):1550009, 2015.
- [16] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (7(3)):375–422, 1881.
- [18] J. P. Ponte, J. Brocado, and H. Oliveira. *Investigação Matemática na Sala de Aula*. Autêntica Editora, 3<sup>a</sup> edition, 2016.
- [19] J. Sotomayor. Equações diferenciais ordinárias. *Textos Universitarios do IME–USP, Livraria da Física, São Paulo*, 2011.