

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO  
ENGENHARIA MECÂNICA

MIGUEL LEONARDO DE ARAUJO ALMEIDA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE QUEDA DE CORPOS RÍGIDOS UTILIZANDO O  
MÉTODO IMERSPEC

GOIÂNIA

2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR  
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES  
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**  Dissertação  Tese  
 monografia

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

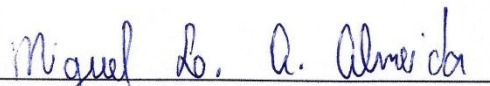
Nome completo do autor: Miguel Leonardo de Araújo Almeida

Título do trabalho: **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE QUEDA DE CORPOS RÍGIDOS  
UTILIZANDO O MÉTODO IMERSPEC**

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

  
Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:



Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 15 / 07 / 2019

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

<sup>2</sup> A assinatura deve ser escaneada.

MIGUEL LEONARDO DE ARAUJO ALMEIDA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE QUEDA DE CORPOS RÍGIDOS UTILIZANDO O  
MÉTODO IMERSPEC

Trabalho de conclusão de curso para  
aprovação na disciplina “Projeto Final de  
Curso”, apresentado na Universidade  
Federal de Goiás, na área de Mecânica  
dos Fluidos

Orientador: Dr. Felipe Pamplona Mariano

Goiânia

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Almeida, Miguel Leonardo de Araujo  
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE QUEDA DE CORPOS RÍGIDOS  
UTILIZANDO O MÉTODO IMERSPEC [manuscrito] / Miguel Leonardo  
de Araujo Almeida. - 2019.  
55 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de  
Computação (EMC), Engenharia Mecânica, Goiânia, 2019.  
Bibliografia. Anexos.  
Inclui gráfico, tabelas.

1. Dinâmica dos fluidos computacional. 2. Sedimentação. 3.  
IMERSPEC. I. Mariano, Felipe Pamplona, orient. II. Título.

CDU 621

MIGUEL LEONARDO DE ARAUJO ALMEIDA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE QUEDA DE CORPOS RÍGIDOS  
UTILIZANDO O MÉTODO IMERSPEC**

Projeto Final de curso, apresentado à Universidade Federal de Goiás, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Goiânia, 15 de julho de 2019.

BANCA EXAMINADORA



*Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano*  
Universidade Federal de Goiás



*Prof. Dr. Joel Roberto Guimarães Vasco*  
Universidade Federal de Goiás



*Prof. Dr. Leonardo de Queiroz Moreira*  
Universidade Federal de Goiás

## Resumo

O presente trabalho trata de simulações numéricas da queda de corpos rígidos em um recipiente contendo fluido, de tal modo que o princípio de físico fundamental de processos de sedimentação pode ser estudado em detalhes. As simulações numéricas foram realizadas utilizando o método IMERSPEC, que consiste no acoplamento dos métodos pseudo-espectral de Fourier com o da fronteira imersa, além disso, o modelo matemático-numérico também contempla a interação fluido-estrutura entre o corpo rígido e o escoamento produzido pela queda do mesmo e a interação entre os próprios corpos, através dos modelos de choque implementados no código computacional. As simulações foram conduzidas com diversas configurações de propriedades físicas do fluido e do corpo rígido, tais como, viscosidade e massa específica, além de parâmetros geométricos e numéricos, como resolução de malha, passo de tempo e número de corpos. Tais variações foram estabelecidas para fins de validação do código utilizado no presente trabalho. No total, são apresentas 15 simulações, divididas em 6 blocos, visando comparar o efeito de cada parâmetro de entrada nos resultados.

Palavras chave: Dinâmica dos Fluidos Computacional, Sedimentação, IMERSPEC.

## Abstract

The present work deals with numerical simulations of the fall of rigid bodies in a vessel containing liquid, in such a way that the principle physics fundamental of sedimentation processes can be studied in detail. Numerical simulations were used using the IMERSPEC methodology, which consists in the coupling of the methods pseudo-spectral of Fourier and Immersed Boundary. Furthermore, the mathematical-numerical model to add the fluid-structure interaction between the physical body and the fluid flow generated by the fall of the body and the interaction between the bodies, from the contact model implemented in the computational code. The simulations are conducted with variation of properties of fluid and body, such as, viscosity and density, in addition, geometry and numerical parameters are changed, such as number of bodies and refinement of meshes and time step. These are made for purposes of validation of the code used in present work. In total, there are 15 simulations are presented, then separated into 6 sections, in order to compare the effect of each input parameter on the results.

Keywords: computational fluid dynamic, Sedimentation, IMERSPEC.

# Sumário

1. Introdução .....	1
1.1. Dinâmica dos Fluidos Computacional.....	1
1.2. Métodos Espectrais .....	5
1.3. Método da Fronteira Imersa.....	7
1.4. Objetivos.....	8
2. Metodologia.....	9
2.1. Modelo Matemático .....	9
2.2. Forças produzidas pelo escoamento de um fluido .....	11
2.3. Método da Fronteira Imersa.....	12
2.3.1. Tratamento dos domínios Eulerianos e Lagrangianos .....	12
2.3.2. Modelagem para o fluido – domínio Euleriano .....	12
2.3.3. Cálculo da força lagrangiana.....	13
2.3.4. Múltipla imposição de força (“ <i>Multi-direct forcing</i> ”).....	14
2.2.1. Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier.....	17
2.2.2. Método pseudoespectral de Fourier.....	18
2.2.3. DFT e FFT .....	19
2.3. Acoplamento entre as metodologias pseudo-espectral de Fourier e fronteira imersa – IMERSPEC.....	19
2.4. Método de Avanço temporal .....	20
2.4.1. Método de Euler.....	21
2.4.2. Método de Taylor .....	21
2.4.3. Métodos de Runge-Kutta.....	22
2.4.4. Implementações computacionais do método de Runge-Kutta.....	23
2.5. Interação fluido-corpo.....	24
3. Resultados .....	30
3.1. Diferentes níveis de refinamento de malha .....	30
3.2. Variação de parâmetros .....	34
3.3. Runge-Kutta .....	37
3.4. Dois corpos.....	39
3.5. Influência da largura .....	43
3.6. Influência do número de corpos .....	46
3.7. Discussão dos resultados .....	50
4. Conclusões e trabalhos futuros.....	52

4.1. Conclusões.....	52
4.1. Trabalhos futuros.....	53
5. Referências.....	53
Apêndice A – Plano de trabalho .....	55

## 1. Introdução

A sedimentação é o processo de separação entre partículas sólidas e um líquido, por ação da gravidade, quando é possível, ou forçada por agentes químicos, denominados floculantes, quando as partículas são muito leves e precisam se aglutinar para ocorrer a sedimentação. Para maiores detalhes sobre sedimentação com floculação, consultar Nunes (2008).

A sedimentação pode ser classificada didaticamente como *espessamento*, quando a substância de interesse é o sólido sedimentado, e *clarificação*, quando a substância de interesse é o líquido sem impurezas.

Sua aplicação tecnológica começou em 1905 nos Estados Unidos com a invenção do espessador de Dorr nas plantas de minérios na Dakota do Sul. Na Figura 1.1 é apresentada a imagem de um sedimentador convencional (NUNES, 2008).

Figura 1.1 – Sedimentador convencional utilizado industrialmente.



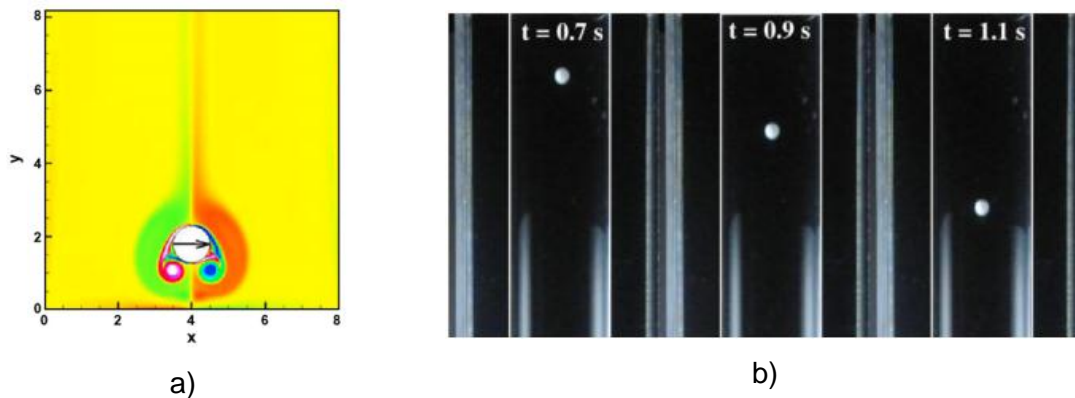
Fonte: Nunes, (2008).

### 1.1. Dinâmica dos Fluidos Computacional

Para estudar a dinâmica da separação entre as partículas sólidas e o líquido e, por consequência, tornar o processo de sedimentação mais eficiente, mais rápido e mais barato, além de projetar sedimentadores otimizados é necessário resolver as equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos, as quais são Equações Diferenciais Parciais (EDPs) que modelam os balanços de massa, quantidade de movimento e de energia. Estas equações descrevem (modelam) a realidade com mais ou menos exatidão, pois são EDP's de alta ordem e não lineares, logo, apenas com simplificações pertinentes alguns problemas simples podem ser resolvidos analiticamente.

Para problemas complexos, deve-se partir para soluções experimentais, que são ensaios físicos instrumentados com objetivo de extrair os dados de interesse, ou soluções numéricas, que são simulações computacionais onde se usam técnicas numéricas para resolver as EDP's com menos simplificações quando comparadas com os métodos analíticos. Na figura 1.2 são mostradas, respectivamente, soluções numérica (Figura 1.2a) e experimental (Figura 1.2b) de sedimentação de corpos rígidos em fluido.

Figura 1.2 – Exemplo de soluções de sedimentação de corpos rígidos em fluido obtidas através de: a) Dinâmica dos Fluidos Computacional, b) Experimentação.



Fonte: a) Wang, Fan e Luo (2008), b) Dash e Lee (2015).

Soluções experimentais nem sempre podem ser utilizadas, pois alguns problemas podem ser tecnicamente ou economicamente inviáveis de serem reproduzidos. Neste caso pode-se recorrer à Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD, do inglês, *Computational Fluid Dynamics*).

O uso de técnicas numéricas para a solução de problemas de engenharia e física se deve ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento. Ao mesmo tempo, desenvolvem-se também novos algoritmos para a solução dos mais diversos tipos de problemas.

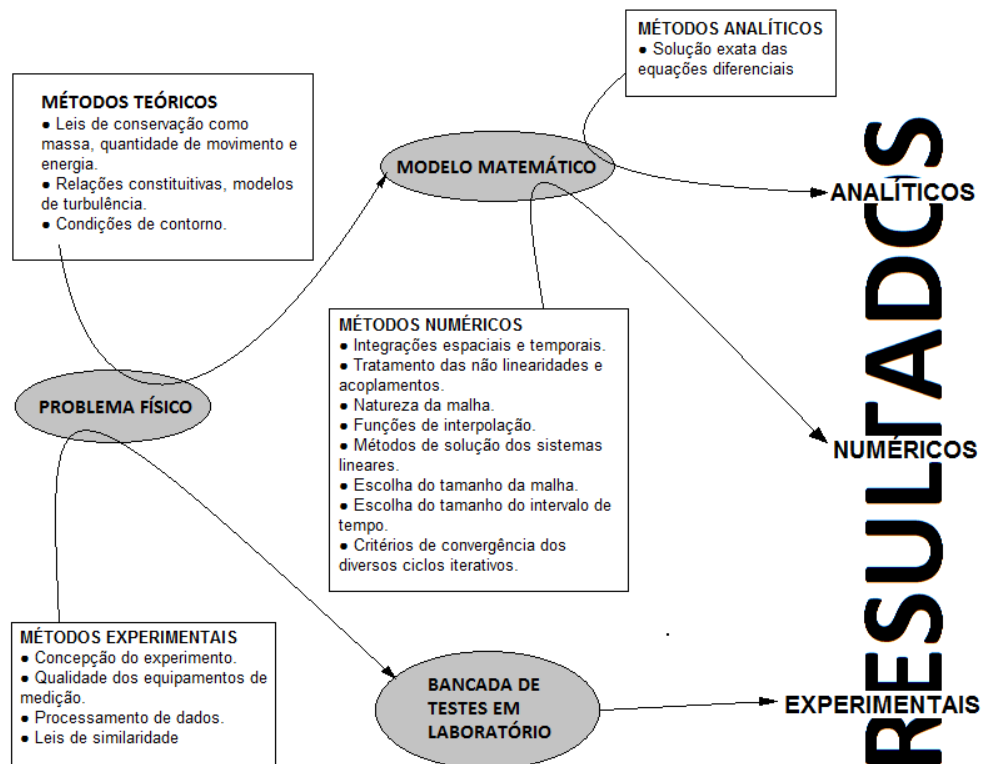
Conforme esquema da figura 1.3, os métodos analíticos e numéricos formam os métodos teóricos, pois ambos objetivam resolver as equações diferenciais que formam o modelo matemático. Os métodos analíticos só são aplicáveis com diversas hipóteses simplificativas que afastam do problema físico real. Uma grande vantagem dos métodos analíticos é o baixo custo computacional para se obter uma solução fechada. Portanto, se uma solução analítica possui exatidão suficiente para um problema físico, ela deve ser preferida.

Quanto ao método experimental, sua grande vantagem é o fato de tratar com a configuração real do problema. Entretanto, pode ser inviável por razões econômicas,

de segurança ou mesmo por dificuldade de reprodução do fenômeno estudado. Na ausência de modelos matemáticos ou condições extremamente complexas, o método experimental é a solução preferida.

A experimentação numérica, por outro lado, possui poucas restrições quanto à complexidade de condições de contorno e geometrias, apresentando resultados com rapidez. Uma vez que o modelo matemático representativo de um fenômeno já é conhecido e validado, não faz sentido utilizar experimentação em laboratório uma vez que os computadores podem oferecer solução para este modelo matemático, consumindo menos tempo e recursos financeiros. A tendência é que experimentos em laboratório investiguem fenômenos complexos e que tarefas repetitivas sejam deixadas a cargo de simulações numéricas.

Figura 1.3 – Ferramentas disponíveis à resolução de um problema físico.



Fonte: Maliska, (2014).

Existem dois tipos de erro em uma simulação numérica: o primeiro é o erro numérico, resultado da má solução das equações diferenciais. Para se mensurar esse erro e atestar a qualidade do método, os resultados devem ser comparados com os resultados de outras soluções, analíticas ou numéricas. Maliska (2014) denomina este processo como validação numérica. O segundo tipo de erro é resultado de equações diferenciais que não são representativas do fenômeno físico. A fidelidade do modelo

matemático ao problema físico é objeto da validação física. Portanto, uma solução numérica é adequada quando as equações diferenciais são resolvidas corretamente e o modelo matemático represente bem o fenômeno físico.

A comparação do resultado numérico com o resultado analítico caracteriza a validação numérica, enquanto a comparação do resultado numérico com o resultado experimental caracteriza a validação física. Os principais métodos numéricos de solução de equações diferenciais são o método dos volumes finitos (MVF), o método das diferenças finitas (MDF) e o método dos elementos finitos (MEF).

Historicamente, o MDF é sempre utilizado na área de Mecânica dos Fluidos, enquanto o MEF é utilizado na área estrutural na solução de problemas de elasticidade (MALISKA, 2014). Por se tratar de fenômenos completamente distintos, os problemas de escoamento são altamente não-lineares, enquanto os de elasticidade não possuem termos advectivos e se assemelham a problemas puramente difusivos de transferência de calor, os quais tem características lineares.

Os pesquisadores do MDF, portanto, se concentraram em dominar as não-linearidades dos termos advectivos e no problema de acoplamento entre as equações de balanços de massa e quantidade de movimento, e acabaram deixando em segundo plano o tratamento de geometrias complexas. Assim, o método teve todo o seu desenvolvimento baseado em sistemas de coordenadas ortogonais, principalmente cartesiano, cilíndrico e esférico (embora o MDF possa ser aplicado em qualquer tipo de malha, até mesmo em malhas não estruturadas).

O MEF, por outro lado, teve seu desenvolvimento na área da elasticidade, empregando malhas não estruturadas do tipo triangular, o que permite que problemas com geometrias complexas possam ser resolvidos. Portanto, o MDF era capaz de lidar com a área dos fluidos, porém, não era apropriado para geometrias complexas, enquanto o MEF lidava bem com geometrias complexas, porém não possuía ferramentas para tratar dos termos advectivos.

Com o desenvolvimento do MVF, no qual as equações aproximadas são obtidas através de balanços de conservação no volume elementar, praticamente todos os pesquisadores envolvidos com MDF migraram para MVF (MALISKA, 2014).

Atualmente, ambos os métodos (MVF e MEF) resolvem problemas fortemente advectivos, inclusive com ondas de choque e em geometrias arbitrárias. No contexto de pacotes comerciais, o MVF é ainda o método empregado em todos aqueles com penetração industrial.

## 1.2. Métodos Espectrais

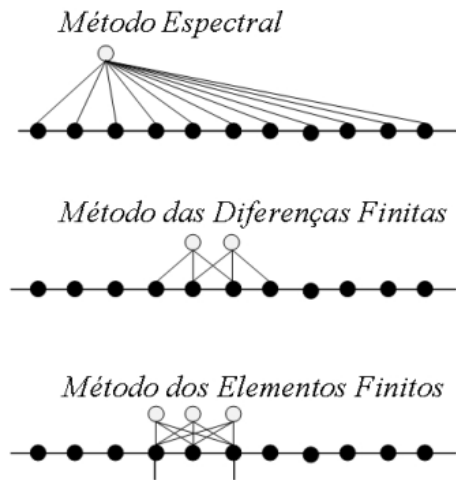
Os métodos espectrais surgiram em meados dos anos 1970, com os métodos transformados (transformações entre espaços físicos e espaços espectrais) em problemas de dinâmica dos fluidos e meteorologia. São caracterizados pela expansão da solução em termos de uma série truncada (série de Fourier, por exemplo) de funções de aproximação globais das variáveis independentes.

A figura 1.4 ilustra como são utilizados os pontos de discretização do domínio, representados pelos pontos fechados, para se calcular uma derivada nas posições indicadas pelos pontos abertos. O método espectral utiliza todos os pontos do domínio, enquanto o MDF utiliza apenas os nós vizinhos da posição onde se deseja calcular a derivada (assim como o MVF) e o MEF utiliza os nós de um elemento.

Por utilizarem todos os pontos no cálculo de uma derivada, os métodos espectrais têm alta acurácia nas simulações numéricas. Os métodos espectrais obtêm 10 dígitos de acurácia onde o MDF ou MEF obteriam dois ou três (THEFETHEN, 2000 apud MARIANO, 2011). Os métodos espectrais não podem, entretanto, ser utilizados diretamente em problemas com geometrias complexas.

Um caso específico de método espectral é o método pseudo-espectral de Fourier (MPEF). Este método possui alta acurácia, alta ordem de convergência e baixos tempo de processamento para realizar uma simulação, comparado com métodos de volumes finitos e elementos finitos, ambos de alta ordem. Este baixo tempo de processamento se deve à transformada rápida de Fourier (do inglês *Fast Fourier Transform*, FFT). Outra grande vantagem, em termo de tempo de processamento, do MPEF é a possibilidade de desacoplar das equações de Navier-Stokes o cálculo da pressão do cálculo das velocidades, de tal forma que o campo de pressão pode ser obtido, se necessário na etapa de pós-processamento.

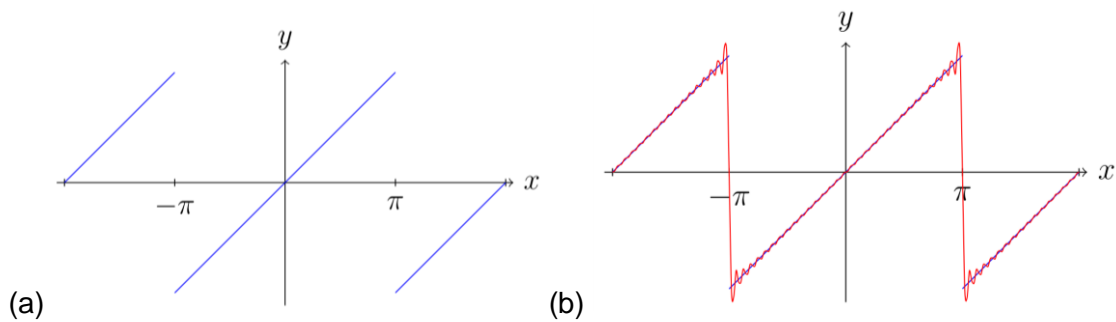
Figura 1.4 – Comparação dos métodos espectral, diferenças finitas e elementos finitos



Fonte: Boyd, (2000) apud Mariano, (2011)

Entretanto, também existem desvantagens no uso dessa metodologia, como o fenômeno de Gibbs, o que apresenta resultados com menor acurácia nas descontinuidades devido ao acúmulo de erros próximo a estas regiões (PUPIN, 2011), como ilustrado nas figuras 1.5 (a) e 1.5 (b).

Figura 1.5 – Exemplo de função periódica e com descontinuidades



Fonte: Pupin (2011)

Além da exigência de condições de contorno periódicas, devido ao uso da transformada discreta de Fourier (DFT). Mariano (2011) cita várias técnicas utilizadas por diversos autores para contornar esses inconvenientes, por exemplo, Mariano (2011) simulou diferentes configurações dos vórtices de Taylor-Green, escoamentos sobre expansões bruscas 2D e 3D, escoamentos sobre cilindro circular bidimensional e queda de um corpo rígido. Cunha (2016) simulou escoamentos sobre aerofólios com diferentes formatos e também analisa a interação de escoamentos em um conjunto de dois aerofólios (configuração biplano). Kinoshita (2015) utilizou o método para simular problemas com efeitos térmicos e convecção natural em cavidade retangular e anular.

Nascimento (2016) comparou os métodos pseudo-espectral de Fourier e dos volumes finitos, com e sem o uso de fronteira imersa, e aplicou o IMERSPEC na simulação de problemas de engenharia de perfuração.

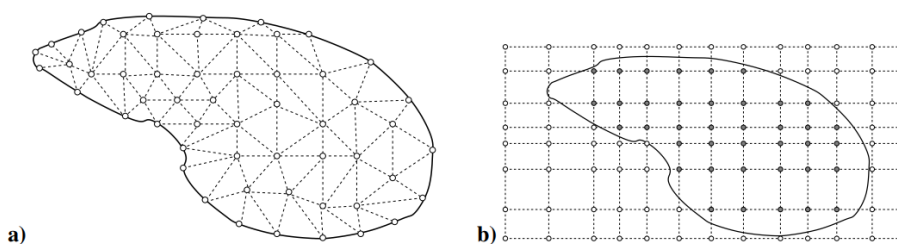
Por fim, o MPEF apresenta alto custo computacional no cálculo dos termos não-lineares. Em termos médios, o MPEF ainda apresenta performance competitiva com outros métodos de alta ordem.

### 1.3. Método da Fronteira Imersa

Para descrever geometrias complexas e móveis são utilizados, basicamente, dois métodos. O primeiro faz uso de malhas não-estruturadas para geometrias complexas e remalhagem para geometrias móveis e deformáveis. Alternativamente, tem-se o Método da Fronteira Imersa (MFI) onde as fronteiras são representadas por um campo de força. No caso de malhas não-estruturadas, o escoamento sobre a fronteira é bem resolvido, porém pode se tornar oneroso quando a geometria é muito complexa ou móvel, tanto na fase de pré-processamento, quanto em processamento. Neste ponto está a vantagem do MFI, pois podem apresentar baixo custo computacional, embora os resultados sobre a fronteira sejam pouco precisos.

Petri (2010) divide os métodos numéricos que utilizam malhas em métodos que respeitam o contorno e métodos de fronteira imersa. A figura 1.6 ilustra estes métodos. No primeiro caso, o domínio coincide com a malha, enquanto o método de fronteira imersa a malha contém o domínio do problema.

Figura 1.6 – a) Malha que respeita o contorno; b) Malha contendo o domínio, adequada a métodos de fronteira imersa



Fonte: Petri, (2010)

O método de fronteira imersa consiste em se utilizar duas malhas: uma malha para o fluido, chamada malha euleriana, e outra para o termo fonte que representará o corpo imerso, chamada de malha lagrangiana (PETRI, 2010).

O MFI ganhou notoriedade com o trabalho de Peskin (1972, apud Mariano, 2011), que simulou o escoamento do sangue através de válvulas cardíacas que, devido à sua complexidade geométrica e flexibilidade, é pouco viável de serem

simuladas por métodos comuns, ou, até mesmo, realizar experimentos. Desde então, a metodologia vem sendo aperfeiçoada e utilizada em diferentes problemas nas mais diversas áreas do estudo de CFD. Mittal e Iaccarino (2005, apud Mariano, 2011) classificam de forma didática o método da fronteira imersa de acordo com o método de imposição de força, que pode ser de forma contínua ou discreta.

Na imposição da força de maneira contínua, os métodos de fronteira imersa incluem o termo fonte de força euleriana nas equações diferenciais governantes antes de serem discretizadas, e podem ser utilizados em problemas do tipo escoamento com fronteiras elásticas e com fronteiras sólidas. Na imposição da força de forma discreta, impõe-se a força euleriana como um esquema numérico que se adapta a forma de como as equações são discretizadas. Para maiores detalhes sobre imposição de força de forma contínua e discreta, consultar Mariano (2011).

Wang, Fan e Luo (2008) utilizaram o método de múltipla imposição direta da força combinada com o método da fronteira imersa para simularem a queda de um corpo, dois corpos e 105 corpos com diferentes parâmetros.

Wan e Turek (2007) utilizaram o método dos elementos finitos multimalha com o método da fronteira fictícia para simular os seguintes experimentos: escoamento ao redor de cilindro circular, sem e com movimento, um disco em rotação dentro de um contêiner circular, queda de um corpo em um canal, queda de três corpos sobre 2000 corpos menores e menos densos, e a sedimentação de 10000 corpos.

Feng e Michalides (2004) utilizaram o método lattice Boltzmann, apropriado para simulações com número grande de corpos, em conjunto com o método da fronteira imersa para simular a queda de dois corpos com variações de rigidez e resolução da malha, e também simularam a queda de 504 corpos.

#### **1.4. Objetivos**

No presente trabalho será utilizada a metodologia IMERSPEC, bem como o código computacional IMERSPEC bidimensional, desenvolvidos no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), com o objetivo geral de verificar a potencialidade dos mesmos para obter resultados de simulações de queda de corpos rígidos em um fluido, modelando, o princípio fundamental de um processo de sedimentação.

Deve-se ter um modelo para a dinâmica de movimentação do fluido, outro para a dinâmica de movimentação do corpo rígido e, lógico, o modelo de acoplamento entre o fluido e o sólido. Os objetivos específicos do presente trabalho são:

- 1) Implementar no código IMERSPEC bidimensional um modelo numérico de alta ordem de avanço temporal (método de Runge-Kutta de quarta ordem) para representar a dinâmica do corpo rígido;
- 2) Realizar os procedimentos de validação da metodologia, com relação a problemas de IFE;
- 3) Simular a queda de mais de um corpo rígido, mostrando a interação entre dois e três corpos rígidos e a dinâmica de movimentação do escoamento do fluido;
- 4) Testar um modelo de choque entre partículas;

## 2. Metodologia

Nesta seção buscam-se revisar alguns conceitos importantes utilizados no presente trabalho com relação às metodologias matemática e numérica utilizadas.

### 2.1. Modelo Matemático

Ao analisar relações diferenciais para escoamento de fluidos, tem-se duas equações diferenciais de interesse para o presente trabalho: equação de continuidade e de quantidade de movimento. Estas equações são dadas, respectivamente, pelas equações 2.1 e 2.2. Para as deduções destas equações diferenciais, consultar White (2011).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_{ij}, \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido em  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ ,  $t$  é o tempo em  $[\text{s}]$ ,  $\vec{V}$  é o vetor velocidade em  $[\text{m}/\text{s}]$ ,  $\vec{g}$  é o vetor gravidade em  $[\text{m}/\text{s}^2]$ ,  $p$  é a pressão em  $[\text{Pa}]$ ,  $\vec{\tau}_{ij}$  é a tensão de cisalhamento em  $[\text{Pa}]$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (X)$  operador divergente da variável  $X$ ,  $\vec{\nabla} X$  operador gradiente da variável  $X$ .

Para um fluido newtoniano, as tensões cisalhantes viscosas são proporcionais às taxas de deformação dos elementos e ao coeficiente de viscosidade. Para escoamento incompressível, escoamentos a número de Mach menores que 0,3, a generalização da equação da tensão de cisalhamento para o escoamento tridimensional é dado pelas equações 2.3 a 2.8:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.3)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.6)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.7)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (2.8)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade em [Pa.s],  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do vetor velocidade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Substituindo estas equações na equação diferencial da quantidade de movimento (Eq. 2.2), tem-se a origem das equações de Navier-Stokes, apresentada nas equações 2.9 a 2.11, nome dado em homenagem a C. L. M. H. Navier (1785-1836) e sir George G. Stokes (1819-1903), aos quais se atribuem a sua dedução:

$$f_x + \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.9)$$

$$f_y + \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2.10)$$

$$f_z + \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (2.11)$$

Onde  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  são os termos fonte de força utilizados no método da fronteira imersa.

As equações de Navier-Stokes (2.9 a 2.11), em conjunto com a relação de continuidade aplicada a escoamentos incompressíveis, apresentada na equação 2.12, formam um sistema de equações com quatro equações e quatro incógnitas ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $p$ ), as quais modelam o escoamento incompressível de um fluido, com variações desprezíveis de viscosidade. Porém, ainda necessitam de condições de contorno e inicial apropriadas para serem resolvidas.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Apesar do limitado número de soluções analíticas conhecidas, principalmente devido as não linearidades presentes, as equações de Navier-Stokes são resolvidas utilizando métodos numéricos apropriados. Dessa forma, a Dinâmica dos Fluidos

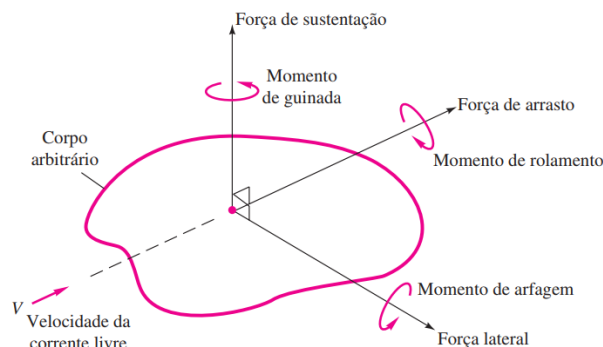
Computacional (CFD) consegue obter resultados mais realísticos do que as soluções analíticas de diversos escoamentos complexos.

## 2.2. Forças produzidas pelo escoamento de um fluido

Um corpo de formato genérico, quando inserido em um escoamento de fluido, fica submetido a três forças e três momentos gerados pelo escoamento. A figura 2.1 (WHITE, 2011) ilustra essas forças e momentos em um corpo arbitrário. É importante ressaltar que não existe atualmente teoria satisfatória para se obter diretamente as forças sobre um corpo arbitrário imerso em um escoamento, a não ser resultados experimentais e os obtidos por CFD (WHITE, 2011).

A força que atua paralelamente ao eixo da corrente livre é chamada arrasto e o momento em torno deste eixo é chamado momento de rolagem. O arrasto é essencialmente a força contrária que o escoamento faz sobre o corpo e deve ser superado se o corpo precisa se mover contra a corrente. Uma segunda força, perpendicular ao eixo da corrente livre, e que pode ser a força útil, dependendo do projeto, é chamada de sustentação e o momento em torno do seu eixo é chamado momento de guinada. Há ainda uma terceira força chamada força lateral e o momento em torno do seu eixo é denominado momento de arfagem.

Figura 2.1 – Definição de forças e momentos sobre um corpo imerso em um escoamento uniforme.



Fonte: White, 2011

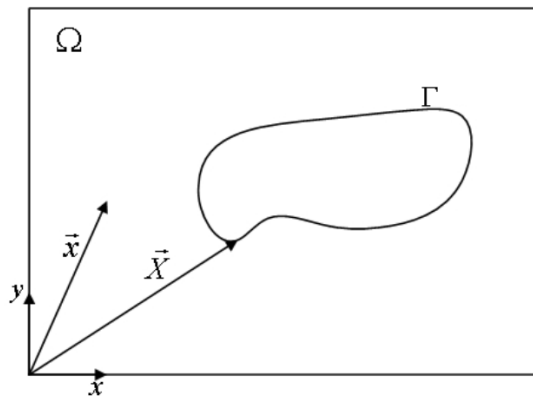
Quando o corpo tem simetria no plano vertical, os momentos de guinada, de rolagem e a força lateral se tornam nulas. Quando, porém, o corpo tem simetria nos planos vertical e horizontal, a única força atuando sobre o corpo é o arrasto.

## 2.3. Método da Fronteira Imersa

### 2.3.1. Tratamento dos domínios Eulerianos e Lagrangianos

O método da fronteira imersa trabalha com dois domínios: o Euleriano ( $\Omega$ ), cartesiano e fixo, onde são resolvidas as equações para o fluido, e o Lagrangiano ( $\Gamma$ ), que representa a interface imersa no escoamento, vide Figura 2.2.

Figura 2.2 – Esboço dos domínios Euleriano e Lagrangiano, onde  $\vec{x}$  representa a posição de um ponto qualquer no domínio Euleriano e  $\vec{X}$  representa a posição de um ponto qualquer no domínio Lagrangiano.



Fonte: Mariano, (2011)

É importante notar que as equações dos fluidos são resolvidas em todo o domínio Euleriano, mesmo nas regiões onde se encontra o domínio Lagrangiano. Também é importante notar que o domínio Lagrangiano representa a fronteira, sendo uma superfície no caso de simulação tridimensional e uma linha no caso bidimensional.

A independência dos domínios Euleriano e Lagrangiano faz com que seja possível simular geometrias complexas no domínio Lagrangiano mantendo o domínio Euleriano cartesiano. Em problemas do tipo interação fluido-estrutura, objeto do presente trabalho, não é necessário remalhagem, mesmo nos casos onde a estrutura se mova, pois apenas a interface Lagrangiana se move.

### 2.3.2. Modelagem para o fluido – domínio Euleriano

Retomando as equações de Navier-Stokes, equações 2.9 a 2.11, o termo fonte de força,  $\vec{f}$ , que aparece nessas equações, é o responsável por representar a interface imersa no domínio euleriano. E é dado pela equação 2.13:

$$f_i(\vec{x}, t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t), & \vec{x} = \vec{X} \\ 0, & \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $F_i(\vec{X}, t)$  é a força lagrangiana, definida no domínio lagrangiano.

Quando não ocorre a coincidência dos pontos da interface com os pontos do domínio euleriano, distribui-se as forças nas vizinhanças de  $\vec{x}$  de acordo com Peskin (2002, apud Mariano, 2011).

### 2.3.3. Cálculo da força lagrangiana

O cálculo da força lagrangiana depende da variação do método da fronteira imersa utilizado. No presente trabalho utilizou-se o método da imposição direta da força (“*direct forcing*” – DF) proposto por Uhlman (2005) apud Mariano (2011). Mariano (2011) adaptou o método “*direct forcing*” para ser usado na metodologia IMERSPEC.

Para facilitar o entendimento do algoritmo utilizado no presente trabalho, apresentam-se as equações 2.14 a 2.18 na ordem que são utilizadas no algoritmo:

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.14)$$

$$U_i^*(\vec{X}, t) = \sum_{\Omega} u_i^* D_h(x_i - X_i) h^2, \quad (2.15)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{U_{FI} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (2.16)$$

$$f_i(\vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_i(\vec{X}) \Delta s^2, \quad (2.17)$$

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + f_i \Delta t. \quad (2.18)$$

A equação 2.14 serve para o cálculo do termo temporário  $u_i^*$ , que apesar de ser mostrado com o método de Euler, pode ser calculado por outros métodos de avanço temporal. No presente trabalho utiliza-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal otimizado (ALLAMPALLI et al, 2009). Assim como a equação 2.14, a equação 2.18 pode ser calculada por outros métodos que não o método de Euler.

Na equação 2.15 é apresentado o cálculo da interpolação das velocidades eulerianas para os pontos lagrangianos. Dessa interpolação surge a velocidade lagrangiana,  $U_i^*$ . A equação 2.16 é o cálculo da força lagrangiana, a qual é usada na

equação 2.13, porém, é necessário conhecer as velocidades nas condições de contorno. Por fim, tem-se na equação 2.17 o cálculo do processo de distribuição da força lagrangiana, onde os valores da força lagrangiana, são espalhados para a malha euleriana e usado nas equações 2.9 a 2.11.

Destaca-se que não é necessário o cálculo do campo de pressão, necessário para satisfazer a equação de continuidade, uma vez que o presente trabalho utiliza o MPEF.

#### 2.3.4. Múltipla imposição de força (“*Multi-direct forcing*”)

Devido aos processos de discretização temporal e espacial, além dos processos de distribuição e interpolação, a velocidade do fluido obtida na equação 2.18 não é exatamente igual a  $U_{FI}$ , nos pontos que deveriam ser as condições de contorno. Para lidar com este problema, Wang, Fan e Luo (2008) utilizaram o método de múltipla imposição de força para melhorar a exatidão dos cálculos. Para isto, faz-se a consideração da equação 2.19:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^{it}, \quad (2.19)$$

onde índice  $it$  é o número da iteração, proposto por Wang, Fan e Luo (2008).

O campo de velocidades  $u_i^{it}$ , antes de avançar para o próximo passo de tempo, é novamente interpolado, conforme a equação 2.20:

$$U_i^{it}(\vec{X}, t) = \sum_{\Omega} u_i^{it} D_h(x_i - X_i) h^2. \quad (2.20)$$

Assim, obtém-se um novo campo de força euleriano,  $f^t$ , que vem da distribuição de  $F^t$ . Daí se obtém a equação 2.21:

$$u_i^{it+1} = u_i^{it} + f_i^{it} \Delta t, \quad (2.21)$$

a qual se aproxima mais da condição de não deslizamento.

Conforme equação 2.22, Wang, Fan e Luo (2008) repetem o processo de  $it=1$  até  $it=NL$ , onde  $NL$  é o número total de iterações, que é um número fixo, até que:

$$U_{FI} - U_i^{it+1} \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Mariano (2011) utiliza como critério de parada a máxima diferença entre as velocidades lagrangianas de duas iterações consecutivas, conforme a equação 2.23. Este critério também é utilizado no presente trabalho, pois é difícil de se determinar o número ideal de iterações, além deste número de iterações variar de acordo com o tipo de escoamento:

$$\max |U_{FI} - U_i^{it+1}| \leq \varepsilon. \quad (2.23)$$

Para se calcular a força sobre o corpo, que é importante para, por exemplo, o cálculo das forças de arrasto e de sustentação, utiliza-se a equação 2.24:

$$F_{C_i} = - \sum_{it=1}^{NL} \int_{\Gamma} F_i(\vec{X}, t) ds. \quad (2.24)$$

Substituindo a integral da equação 2.24 por um somatório, tem-se a equação 2.25:

$$F_{C_i} = - \sum_{it=1}^{NL} \sum_{p=1}^{Np} F_i^p(\vec{X}, t) \Delta s, \quad (2.25)$$

onde  $Np$  é o número de pontos lagrangianos que representam a interface e  $p$  representa cada um dos pontos lagrangianos e  $\Delta s$  a distância entre os pontos lagrangianos.

#### 2.4. Método pseudo-espectral de Fourier

Antes de se definir a transformada de Fourier, é necessário definir a série de Fourier. Seja uma função  $f(x)$  apresentada na forma dada pela equação 2.26, esta pode ser representada por uma série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.26)$$

onde, após utilizar alguns artifícios algébricos, tem seus coeficientes dados pelas equações 2.27 e 2.28:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad \text{se } (n \geq 0) \quad (2.27)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx. \quad \text{se } (n > 0) \quad (2.28)$$

A forma complexa a série de Fourier é apresentada na equação 2.29:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}, \quad (-L \leq x \leq L) \quad (2.29)$$

onde L é meio período da função e  $c_n$  é apresentado na Equação 2.30:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & (n > 0), \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & (n < 0), \\ \frac{1}{2}a_0 & (n = 0). \end{cases} \quad (2.30)$$

A transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier são dadas pelas equações 2.31 e 2.32, respectivamente, como definidas em Butkov (1988):

$$F(k) = \mathfrak{F}\{f(x)\} = \sqrt{2\pi}c(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} \, dx, \quad (2.31)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{-ikx} \, dx. \quad (2.32)$$

O número de onda, k, é definido na equação 2.33:

$$k = \frac{n\pi}{L}. \quad (2.33)$$

É importante ressaltar que as fórmulas das transformadas de Fourier podem ser definidas de forma diferente conforme a bibliografia consultada, porém, são variações triviais. É também importante ressaltar que a transformada de Fourier pode ser aplicada a funções de mais de uma variável (PUPIN, 2011) ou em forma vetorial

(MARIANO, 2011). A tabela 2.1 traz um resumo das propriedades da transformada de Fourier.

Tabela 2.1 – Propriedades da transformada de Fourier

Propriedade da conjugação	$F(-k) = \overline{F(k)}$
Propriedade do amortecimento	$\mathfrak{F}\{f(x)e^{ax}\} = F(k - ai)$
Propriedade do deslocamento	$\mathfrak{F}\{f(x - a)\} = e^{ika}F(k)$
Propriedade da diferenciação	$\mathfrak{F}\{f'(x)\} = -ik\mathfrak{F}\{f(x)\}$
Primeiro teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty}  F(k) ^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}  f(x) ^2 dx$
Segundo teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)G(-k)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$
Propriedade da convolução	$\mathfrak{F}\{(f * g)(x)\} = F(k)G(k)$

Fonte: Butkov, (1988).

As deduções das equações relacionadas à série e à transformada de Fourier e suas propriedades podem ser consultadas com mais detalhes em Butkov (1988).

### 2.2.1. Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier.

A grande vantagem de transformar as equações diferenciais parciais para o espaço de Fourier é que ele simplifica algumas operações mais complexas realizadas no espaço físico, por exemplo, a operação de derivada. Como pode ser visto na tabela 2.1, a operação de derivada é simplificada para uma multiplicação. Entretanto, algumas operações simples no espaço físico podem se tornar mais complexas no espaço transformado.

Aplicando a transformada de Fourier sobre a equação de continuidade (2.12), obtém-se, com a propriedade da diferenciação, a equação 2.34:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = ik_j \hat{u}_i = 0. \quad (2.34)$$

Transformando a equação de Navier-Stokes (equações 2.9 a 2.11), obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + ik_j (\widehat{u_i u_j}) = -ik_i \hat{p} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{f}_i, \quad (2.35)$$

onde  $k^2$  é a norma do vetor número de onda ao quadrado, ou seja,  $k^2 = k_j k_j$ .

É importante ressaltar que a transformada de Fourier é aplicada sobre funções espaciais, fazendo com que as equações 2.34 e 2.35 sejam definidas em função do número de onda, diferentemente de análise de sinais que, normalmente, aplicam sobre o tempo, definindo o domínio da frequência.

A equação 2.35 pode ser manipulada matematicamente para desacoplar o campo de pressão do campo de velocidade. Para compreender este procedimento, denominado processo de projeção do gradiente de pressão, sugere-se consultar a tese de Mariano (2011). Após a manipulação matemática obtém-se:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \hat{u}_i(\vec{k}, t) = \delta_{im} \left[ \hat{f}_m(\vec{k}, t) - ik_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \right]. \quad (2.36)$$

Deve-se fazer duas observações importantes sobre a equação 2.36. Primeiramente, nota-se a ausência do termo do gradiente de pressão em virtude da aplicação do tensor projeção, que, em termos computacionais, significa menor esforço computacional se comparado a métodos tradicionais. De toda forma o campo de pressão pode ser recuperado no processo de pós-processamento.

Em segundo lugar, nota-se a presença de uma integral convolução, que poderia inviabilizar o método. Porém, esta integral de convolução não será resolvida, pois será substituída pelo método pseudo-espectral de Fourier, explanado posteriormente.

### 2.2.2. Método pseudoespectral de Fourier

O método pseudo-espectral de Fourier consiste em realizar o produto de duas funções no espaço físico e transformar o produto já realizado, em vez de transformar as duas funções separadamente e resolver uma integral de convolução no espaço transformado de Fourier.

A grande vantagem do MPEF é não resolver a integral de convolução, sem, entretanto, perder a precisão do método espectral. A alta precisão se dá pela possibilidade de se realizar o produto no espaço físico e de se resolver a derivada no espaço espectral. A desvantagem do método é ter que fazer as transformadas direta e inversa de Fourier a cada passo de tempo.

### 2.2.3. DFT e FFT

A forma de se aplicar a transformada de Fourier de forma discretizada é através da transformada discreta de Fourier (DFT). Sua fórmula aplicada ao presente trabalho é dada pela equação 2.37 (BRIGGS; HENSON, 1995 apud MARIANO, 2011):

$$\hat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{-i2\pi kn/N}, \quad (2.37)$$

onde  $\phi_n$  é o campo de velocidade discretizado com N nós de colocação, os quais representam os nós da malha;  $n$  fornece a posição  $x_n$  dos nós de colocação,  $x_n = n \Delta x$ ;  $\Delta x$  é o espaçamento dos nós de colocação e  $k$  fornece o número de onda.

Deve observar-se que, para se trabalhar com a DFT, a função deve ser necessariamente periódica, o que constitui a grande desvantagem do método pseudo-espectral de Fourier. Para resolver esta restrição, é que se propõe o uso conjunto do método da fronteira e o método pseudo-espectral de Fourier (MARIANO, 2011).

Computacionalmente, para se resolver a equação 2.37, utiliza-se o algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1965, apud Mariano, 2011) denominado transformada rápida de Fourier – FFT. É possível encontrar diversas sub-rotinas FFT em diversas linguagens de programação. No presente trabalho foi utilizada a versão 4.0 da sub-rotina FFTE de Takahashi (2006, apud Mariano, 2011), disponível no site <http://www.ffte.jp>.

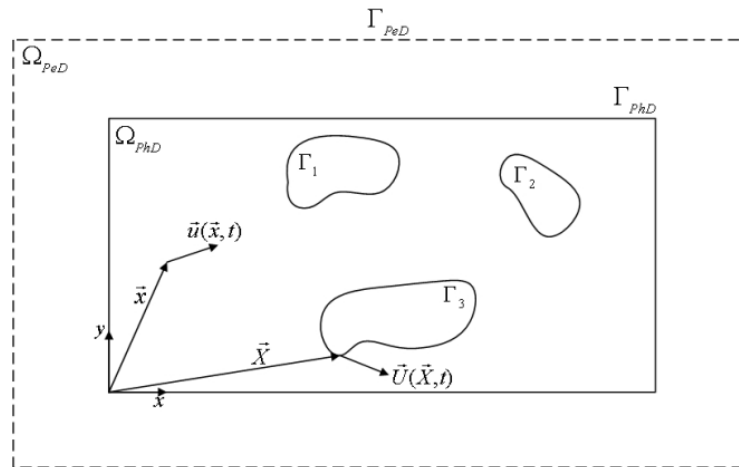
### 2.3. Acoplamento entre as metodologias pseudo-espectral de Fourier e fronteira imersa – IMERSPEC

Nesta seção, mostra-se o desenvolvimento do método IMERSPEC, contornando a restrição das condições de contorno periódicas necessárias para o MPEF e, ao mesmo tempo, obtendo um MFI acurado e com alta taxa de convergência espacial.

A última característica importante do método é a ideia de se utilizar um domínio complementar. Estes domínios são mostrados na figura 2.3.

O domínio físico, considerado domínio euleriano,  $\Omega_{\text{PhD}}$ , delimitado pela fronteira imersa,  $\Gamma_{\text{PhD}}$ , considerado domínio lagrangiano. No interior de  $\Omega_{\text{PhD}}$  ocorrem os fenômenos físicos os quais interessa modelar e simular. Nesse domínio pode-se inserir um ou mais subdomínios delimitados pelas fronteiras imersas  $\Gamma_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,N$ . Sobre o domínio  $\Gamma_{\text{PhD}}$  pode-se modelar quaisquer condições de contorno, mesmo que não sejam periódicas.

Figura 2.3 – Representação esquemática dos domínios de cálculo euleriano e lagrangiano



Fonte: Mariano, (2011).

O domínio complementar euleriano,  $\Omega_{PeD}$ , é delimitado pela fronteira  $\Gamma_{PeD}$ , e serve para se impor as condições de contorno periódicas para as soluções das equações de Navier-Stokes transformadas. O domínio  $\Omega_{PeD}$  é complementar ao domínio  $\Omega_{PhD}$  e possibilita estender a solução do problema não periódico até a fronteira periódica  $\Gamma_{PeD}$ . As condições de contorno periódicas são impostas diretamente sobre  $\Gamma_{PeD}$  através do procedimento pseudo-espectral. Por outro lado, as condições de contorno não periódicas são impostas sobre  $\Gamma_{PhD}$ , de forma indireta, através do campo de força eulerino  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ .

#### 2.4. Método de Avanço temporal

É necessário definir os conceitos de problema valor de contorno (PVC) e problema de valor inicial (PVI). O PVC ocorre quando uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $m \geq 2$  possui  $m$  condições dadas em  $m$  pontos. O PVI ocorre quando a EDO de ordem  $m$ , assim como suas derivadas até a ordem  $m-1$  são especificadas para o mesmo ponto.

A necessidade de se introduzir métodos de aproximação para PVI reside na dificuldade em se encontrar analiticamente as soluções da equação. Há casos onde a teoria garante a existência e a unicidade da solução, mas não se conhece a expressão analítica da solução. O PVI é dado por:

$$y' = f(x, y), \tag{2.38}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.39}$$

onde  $y'$  é a derivada da função  $y$ ,  $f$  é uma função que depende de  $x$  e  $y$ ,  $y_0$  é o valor conhecido da função  $y$  no ponto  $x_0$ .

Define-se os pontos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , onde:

$$y_i \cong y(x_i), \quad (2.40)$$

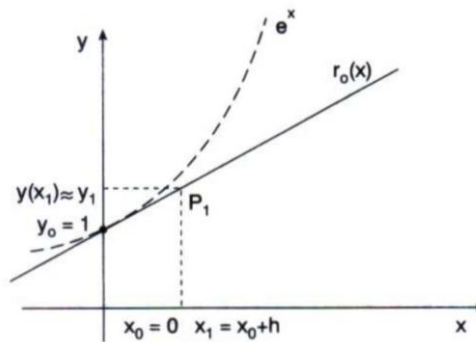
$$x_{i+1} - x_i = h, \quad (2.41)$$

onde  $h$  é o passo e  $y_i$  é a aproximação do valor da função  $y$  no ponto  $x_i$ .

Para se calcular  $y_i$ , utiliza-se apenas  $y_{i-1}$ , diz-se que se trata de um método de passo um, ou passo simples. Caso contrário, chama-se de método de passo múltiplo. Para métodos de passo um, há a necessidade de calcular  $f(x,y)$  e suas derivadas em muitos pontos, além de haver dificuldade para estimar o erro.

#### 2.4.1. Método de Euler

Figura 2.4 – Ilustração gráfica do método de Euler



Fonte: Ruggiero e Lopes, (1996)

Obtém-se então a Equação 2.42, na qual foram inseridas as equações 2.40 e 2.41:

$$y(x_1) \cong y_1 = y_0 + (x - x_0)y'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0). \quad (2.42)$$

#### 2.4.2. Método de Taylor

É dado pela equação 2.43, derivada da expansão de Taylor:

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + y''(x_n)\frac{(x - x_n)^2}{2!} + y'''(x_n)\frac{(x - x_n)^3}{3!} + \dots + y^{(k)}(x_n)\frac{(x - x_n)^k}{k!} + y^{(k+1)}(\xi)\frac{(x - x_n)^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (2.43)$$

Em posse da equação 2.43,  $y(x_n + 1)$  e o erro de truncamento  $e(x_n + 1)$  são definidos por 2.44 e 2.45, respectivamente.

$$y(x_n + 1) \cong y_{n+1} = y_n + y'_n h + y''_n \frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(k)}_n \frac{h^k}{k!}, \quad (2.44)$$

$$e(x_{n+1}) = y^{(k+1)}(\xi_{n+1}) \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (2.45)$$

Este método tem a desvantagem de, ao se derivar  $f(x,y)$ , sua complexidade aumenta consideravelmente e rapidamente, tornando-o computacionalmente inaceitável. Exemplifica-se este fato nas expressões 2.46 e 2.47.

$$y''(x) = f'(x, y) = f_x + f_y f, \quad (2.46)$$

$$y'''(x) = f''(x, y) = f_{xx} + f_{xy}f + (f_{yx} + f_{yy}f)f + f_y(f_x + f_y f). \quad (2.47)$$

### 2.4.3. Métodos de Runge-Kutta

Aproveita-se as qualidades do método de Taylor sem sua maior desvantagem: o cálculo de derivadas de  $f(x,y)$ . Entretanto, é necessário o cálculo de  $f(x,y)$  em vários pontos. Têm também a limitação de não haver estimativa simples para o erro, o que poderia ajudar na escolha do passo.

O método de Runge-Kutta de primeira ordem (RK1) é idêntico ao método de Euler, dado pela equação 2.42, porém com passos intermediários, baseados no método de Taylor para a solução de um PVI.

O método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK2) é dado pela expressão 2.48.

$$y_{n+1} = y_n + ha_1 f(x_n, y_n) + ha_2 f(x_n + b_1 h, y_n + b_2 h y'_n) \quad (2.48)$$

Onde:

$$a_1 + a_2 = 1 \quad (2.49)$$

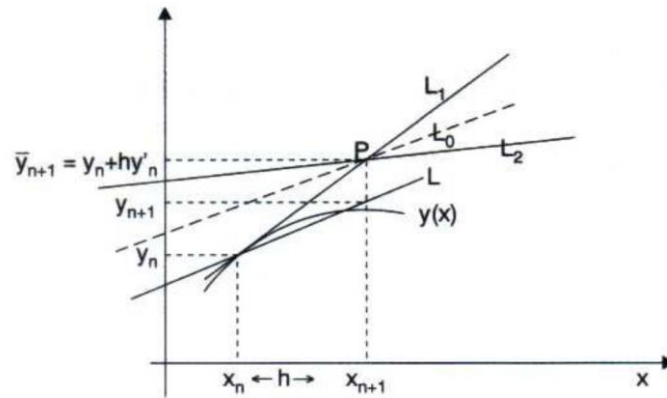
$$a_2 b_1 = 1/2 \quad (2.50)$$

$$a_2 b_2 = 1/2 \quad (2.51)$$

Nota-se que as equações 2.49 a 2.51 formam um sistema de 3 equações e quatro incógnitas, portanto admite infinitas soluções. Um caso particular da aplicação do método de Runge-Kutta de segunda ordem é o método de Heun, também conhecido como método de Euler aperfeiçoado, que utiliza  $a_1 = a_2 = 1/2$  e  $b_1 = b_2 = 1$ . A figura 2.5 ilustra graficamente o método, onde pode-se ver que a aproximação é definida pela reta L em vez de  $L_1$ , como seria pelo método de Euler.

É interessante notar que, para um mesmo nível de aproximação, pode-se utilizar um passo  $h$  maior no método de Heun em relação ao método de Euler. Além disso, pode-se obter Métodos de Runge-Kutta (RK) com mais passos intermediários, por exemplo, nas equações 2.52 a 2.55 tem-se o método de Runge-Kutta de terceira ordem (RK3) e nas equações 2.56 a 2.60 é apresentado o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

Figura 2.5 – Método de Heun, ou método de Euler aperfeiçoado.



Fonte: Ruggiero e Lopes, (1996).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{4}{9}K_3 \quad (2.52)$$

Onde:

$$K_1 = hf(x_n, y_n) \quad (2.53)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \quad (2.54)$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{K_2}{4}\right) \quad (2.55)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.56)$$

Onde:

$$K_1 = hf(x_n, y_n) \quad (2.57)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \quad (2.58)$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) \quad (2.59)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \quad (2.60)$$

#### 2.4.4. Implementações computacionais do método de Runge-Kutta

Existem diversos métodos para se implementar o método de Runge-Kutta computacionalmente. Forsythe et al (1977) apud Ruggiero e Lopes (1996) explica e lista uma rotina baseada em métodos de Runge-Kutta para resolução de PVI que permite o cálculo dos coeficientes para os métodos de 4ª e 5ª ordem, facilitando a escolha de h e fornecendo uma estimativa para o erro.

Outro método, proposto por Allampalli et al (2009) de implementação do método de Runge-Kutta de quarta ordem em seis passos (RK46) foi utilizado no presente trabalho para a discretização temporal, mostrado na equação 2.61.

$$\begin{cases} AUX_i^l = \alpha^l AUX_i^{l-1} + \Delta t \left[ -(vk^2 \hat{u}_i^l)^l + \wp_{im}(\widehat{tnl}_m^l)^l \right], \\ (\hat{u}_i^*)^{l+1} = (\hat{u}_i^*)^l + \beta^l AUX_i^l \end{cases} \quad (2.61)$$

onde  $l$ , que varia de 1 a 6, é o passo do RK46;  $\alpha$  e  $\beta$  constantes da tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Coeficientes do método RK46

Iteração	$\alpha$	$\beta$
1	0,0	0,122
2	-0,691750960670	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381941220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

Fonte: Allampalli, 2009

## 2.5. Interação fluido-corpo

O presente trabalho torna-se complexo à medida que são necessários modelos para os movimentos do fluido, dos corpos submersos e para a interação entre eles. E compreender a queda de um corpo rígido em meio fluido é importante e de grande interesse, como já destacado, para as indústrias química, farmacêutica, alimentícia, além de englobar fenômenos geofísicos importantes (WAN e TUREK, 2008). A figura 2.6 mostra o esboço dos domínios utilizados nas simulações, além do sistema de coordenadas adotado.

O subdomínio  $\Gamma_1$  representa o corpo rígido e se movimenta no sentido negativo de  $x$ , até atingir o fundo do recipiente. No presente trabalho não foram modeladas paredes laterais. Também foi adotada a abordagem particionada (CAMPREGHER, 2005, BORGES, 2010, apud MARIANO, 2011), onde, em um mesmo espaço de tempo, resolve-se primeiro as equações do fluido para depois resolver o movimento da estrutura. A dinâmica da movimentação do fluido é resolvida pelas equações 2.36, discretizada no tempo pela 2.61.

Já a movimentação dos corpos é modelada pelas equações de Newton-Euler, equações 2.62 e 2.63. As forças externas que atuam sobre o corpo são: o peso,  $P_i$ ; o empuxo,  $E_i$ ; e as componentes fluidodinâmicas,  $F_{Ci}$ , dada pela equação 2.25. A figura 2.6 mostra a representação esquemática destas forças. Aparece também uma componente de torque,  $T_i$ , na direção  $i$ , perpendicular ao plano  $xy$  da figura 2.6.

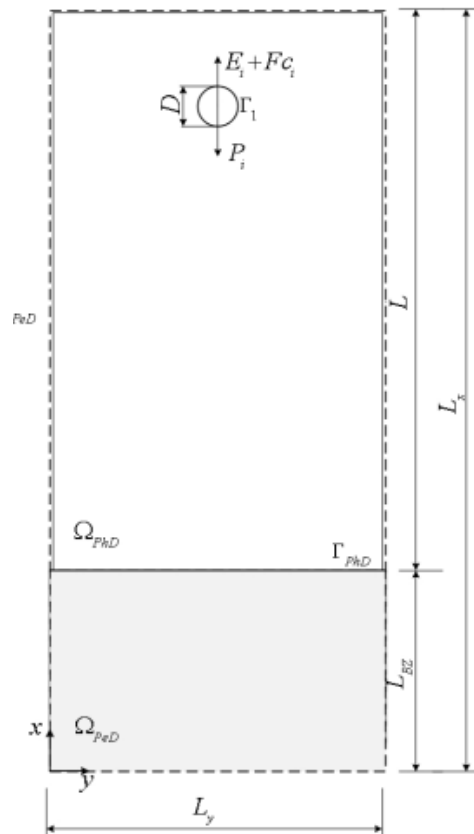
A força de choque é denotada por  $F_i'$ , que pode ser choque contra uma parede ou com outro corpo rígido. Considerando que a dimensão no eixo z é unitária, tem-se:

$$E_i^q + F_{ci}^q - P_i^q + F_i'^q = M^q \frac{dU p_i^q}{dt}, \quad (2.62)$$

$$T_i^q = I^q \frac{d\omega_i^q}{dt}, \quad (2.63)$$

onde  $M^q$  é a massa do corpo q, dada por  $M^q = \rho_p^q \pi R^{q2}$ , em [kg];  $I^q$  é o momento de inércia em torno do eixo z do corpo q, dado por  $I^q = (1/2)M^q R^{q2}$ , em [kg.m<sup>2</sup>];  $\rho_p^q$  é a massa específica do corpo q, em [kg/m<sup>3</sup>];  $R^q$  é o raio do corpo q, em [m];  $U p_i^q$  é a velocidade do centro do corpo q, em [m/s]; e  $\omega_i^q$  é a velocidade de rotação do corpo q na direção i, em [rad/s].

Figura 2.6 – Esboço do domínio de cálculo utilizado nas simulações da queda de um corpo rígido.



Fonte: Mariano, 2011.

As forças de empuxo e peso são dadas pelas equações 2.64 e 2.65, respectivamente:

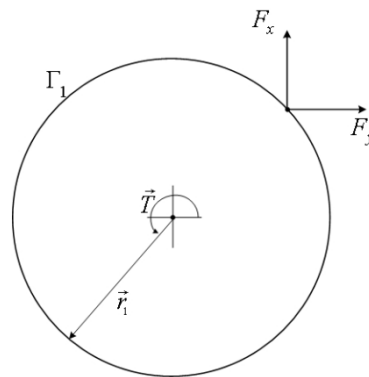
$$E_i^q = \nabla^q \rho g_i, \quad (2.64)$$

$$P_i^q = \nabla^q \rho_p^q g_i, \quad (2.65)$$

onde  $\nabla^q$  é o volume do corpo q, em [m<sup>3</sup>];  $\rho$  é a massa específica do fluido, em [Kg/m<sup>3</sup>]; e  $g_i$  é a aceleração da gravidade na direção i, em [m/s<sup>2</sup>]. Foi adotado para o presente trabalho  $g_y = 0$  [m/s<sup>2</sup>] e  $g_x = -9,81$  [m/s<sup>2</sup>].

As forças hidrodinâmicas resultantes sobre o centro da massa são o somatório das forças que agem sobre cada ponto lagrangiano,  $F_c$ , multiplicada pela massa específica do fluido. O torque,  $T_i^q$ , é dado pelo produto vetorial entre a distância do centro da massa até o ponto lagrangiano onde são aplicadas as forças hidrodinâmicas e a força hidrodinâmica atuante neste ponto, ou seja,  $T_i^q = \sum \vec{r} \times \rho \vec{F}_c$ , conforme a figura 2.7.

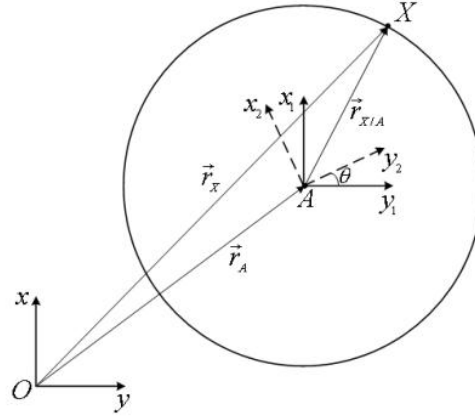
Figura 2.7 – Forças hidrodinâmicas que atuam sobre a interface lagrangiana.



Fonte: Mariano, (2011).

Para realizar a transferência de informação entre os domínios euleriano e lagrangiano, adota-se o uso de eixos auxiliares (BORGES, 2010; apud MARIANO, 2011). A figura 2.8 esquematiza os três eixos utilizados, sendo dois móveis ( $Ax_1y_1$  e  $Ax_2y_2$ ) e um fixo ( $Oxy$ ).

Figura 2.8 – Representação esquemática do corpo e dos eixos utilizados



Fonte: Mariano, (2011).

Os eixos  $Ax_1y_1$  e  $Ax_2y_2$  são animados com os movimentos de translação e rotação, respectivamente. A força  $F_i'^q$  pode ser definida como a soma das forças de choque do corpo  $q$  contra as paredes e com outros corpos. O modelo de choque utilizado é o modelo proposto por Wan e Turek (2007), que prevê forças de repulsão entre partículas conforme a equação 2.66 e choque do corpo com uma parede pela equação 2.67:

$$\vec{F}_{i,j}^p = \begin{cases} 0, & d_{i,j} > R_i + R_j + \rho' \\ \frac{1}{\varepsilon_p} (\vec{X}_{Ci} - \vec{X}_{Cj}) (R_i + R_j + \rho' - d_{i,j})^2, & R_i + R_j + \rho' < d_{i,j} < R_i + R_j \\ \frac{1}{\varepsilon'_p} (\vec{X}_{Ci} - \vec{X}_{Cj}) (R_i + R_j - d_{i,j}), & d_{i,j} < R_i + R_j \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\vec{F}_i^w = \begin{cases} 0, & d_i > 2R_i + \rho' \\ \frac{1}{\varepsilon_w} (\vec{X}_{Ci} - \vec{X}'_{Ci}) (2R_i + \rho' - d_i)^2, & 2R_i + \rho' < d_i < 2R_i \\ \frac{1}{\varepsilon'_w} (\vec{X}_{Ci} - \vec{X}'_{Ci}) (2R_i - d_i), & d_i < 2R_i \end{cases} \quad (2.67)$$

onde  $\vec{X}_{Ci}$  é o vetor posição do  $i$ -ésimo corpo;  $\vec{X}_{Cj}$  é o vetor posição do  $j$ -ésimo corpo;  $\vec{X}'_{Ci}$  é a diferença entre os vetores posição do  $i$ -ésimo corpo e o corpo imaginário mais próximo localizado na fronteira da parede (vide Figura 2.9);  $R_i$  é o raio do  $i$ -ésimo corpo;  $R_j$  é o raio do  $j$ -ésimo corpo;  $\rho'$  é o alcance para o qual há repulsão, que normalmente varia de 0,5 a 2,5 vezes o tamanho da malha euleriana. As constantes

$\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon'_p$ ,  $\varepsilon_w$ ,  $\varepsilon'_w$  e  $\rho'$ , no presente trabalho, são definidas de acordo com as equações 2.68 a 2.72:

$$\varepsilon_w = \frac{1}{2}(dx^2)10^{-4}, \quad (2.68)$$

$$\varepsilon'_w = \frac{1}{2}\varepsilon_w, \quad (2.69)$$

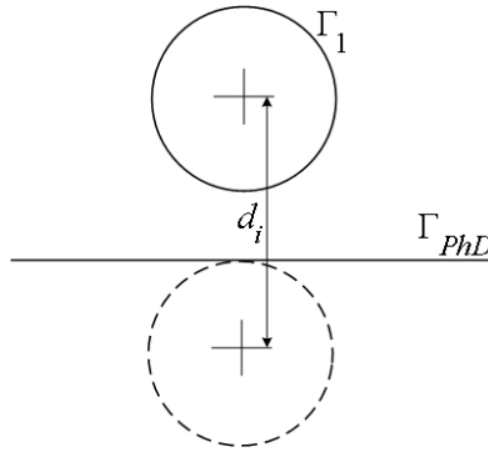
$$\varepsilon_p = \frac{1}{2}\varepsilon_w, \quad (2.70)$$

$$\varepsilon'_p = \varepsilon_w, \quad (2.71)$$

$$\rho' = 1,25dx, \quad (2.72)$$

onde  $dx$  é a distância entre dois pontos eulerianos no eixo  $x$ .

Figura 2.9 – Modelagem da força de choque com a interface inferior.



Fonte: Mariano, (2011).

Substituindo as equações 2.64 e 2.65 na equação 2.62 e realizando as derivadas das equações 2.62 e 2.63 pelo método de Euler, tem-se:

$$\frac{Up_i^{t+\Delta t^q} - Up_i^{t^q}}{\Delta t} = g_i \left( \frac{\rho}{\rho_i^q} - 1 \right) + \frac{F_c^q + F'_i{}^q}{M^q}, \quad (2.73)$$

$$\frac{\omega_z^{t+\Delta t^q} - \omega_z^{t^q}}{\Delta t} = \frac{T_z^q}{I^q}. \quad (2.74)$$

Então, a velocidade de cada ponto lagrangiano passa a ser definida pela equação 2.75:

$$\vec{U}_i^{t+\Delta t} = \vec{U}p_i^{t+\Delta t} + \vec{\omega}_z^{t+\Delta t} \times (\vec{X}_i - \vec{X}_{Ci}). \quad (2.75)$$

A velocidade não é conhecida a priori. A equação 2.75 determina a velocidade que o corpo deve ter no próximo passo de tempo, ou seja,  $U^{FI} = U_i^{t+\Delta t}$ , usado para calcular a equação 2.16.

A nova posição do centro do corpo  $q$  e sua rotação são calculados conforme as equações 2.76 e 2.77:

$$\frac{X_{Ci}^{t+\Delta t} - X_{Ci}^t}{\Delta t} = U_i^{t+\Delta t}, \quad (2.76)$$

$$\frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^t}{\Delta t} = \omega^{t+\Delta t}. \quad (2.77)$$

Para o cálculo da posição dos novos pontos lagrangianos, utiliza-se a matriz de transformação,  $S$ , necessária para contabilizar o efeito da rotação dado pela equação 2.77:

$$S^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos(\theta^{t+\Delta t}) & \text{sen}(\theta^{t+\Delta t}) & 0 \\ -\text{sen}(\theta^{t+\Delta t}) & \cos(\theta^{t+\Delta t}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Assim, a posição de cada ponto lagrangiano é dado pela equação 2.79:

$$X_i^{t+\Delta t} = (X_{Ci}^{t+\Delta t} - X_{Ci}^t) + S^{t+\Delta t} r_i^t. \quad (2.79)$$

E o número de Reynolds do  $i$ -ésimo corpo é definido pela equação 2.80 (WAN e TUREK, 2008) levando em conta o módulo da velocidade do corpo:

$$Re_t = \frac{\rho_i D_i \sqrt{U_i^2 + V_i^2}}{\mu}, \quad (2.80)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido, em [Kg/(m.s)].

### 3. Resultados

Foram realizadas 15 simulações, divididas em 6 blocos, com o objetivo de estudar a variação dos resultados com a variação de determinados parâmetros. A tabela 3.1 traz um resumo destas das simulações e dos parâmetros variados.

Tabela 3.1 – Resumo das simulações realizadas.

Bloco de simulações	Parâmetro variado	Valor adotado	Objetivo
Refinamento de malha	Resolução da malha	512x128	Selecionar melhor resolução, levando em conta acurácia e custo computacional.
		1024x246	
		2048x512	
Variação de parâmetros	Viscosidade e massa específica do corpo	$\mu=0,1$ $\rho=1,5$	Mensurar os efeitos da variação da viscosidade e da massa específica do corpo.
		$\mu=0,1$ $\rho=1,25$	
		$\mu=0,01$ $\rho=1,25$	
Implementação de RK	Método de cálculo da velocidade e passo de tempo	$Dt=10^{-5}$	Tentativa de utilizar o método de Runge-Kutta no cálculo das velocidades
		$Dt=10^{-4}$	
Dois corpos	Número de corpos, passo de tempo e massa específica dos corpos	$Dt=5 \times 10^{-4}$ , $\rho_c=1,01$	Implementar o método para a queda de dois corpos
		$Dt=5 \times 10^{-5}$ , $\rho_c=1,01$	
		$\rho_1=1,25$ e $\rho_2=1,5$	
Influencia da largura	Largura do domínio	$L_y=1$	Observar a influência da largura na simulação da queda de dois corpos
		$L_y=4$	
Influencia do número de corpos	Número de corpos	1 corpo	Observar a influência do número de corpos
		3 corpos	

Fonte: Próprio autor.

#### 3.1. Diferentes níveis de refinamento de malha

Foram realizadas simulações da queda de um corpo com diferentes resoluções de malha. Realizaram-se as simulações com três níveis de refinamento de malha: a primeira simulação com malha de 2048 divisões no eixo x e 512 divisões no y, a

segunda com 1024 no eixo x e 256 no eixo y, e a terceira com 512 no eixo x e 128 no eixo y. Uma simulação com malha mais grosseira (256x64) foi realizada, mas não apresentou níveis aceitáveis de erro e não foi apresentada no presente trabalho.

A tabela 3.2 contém as configurações de cada uma das três simulações. Na figura 3.1 é mostrado o campo de velocidade vertical em diversos tempos para a simulação com 2048x512 (simulação 3 da tabela 3.1).

Tabela 3.2 – Configurações do primeiro bloco de simulações: Refinamento de malha

Dados	Simulação 1	Simulação 2	Simulação 3
Resolução	2048x512	1024x256	512x128
$L_y$ [cm]	3,0	3,0	3,0
$L_x$ [cm]	12,0	12,0	12,0
$L$ [cm]	10,5	10,5	10,5
$L_{bz}$ [cm]	1,5	1,5	1,5
$\rho_{\text{fluido}}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	1,0	1,0	1,0
$\rho_{\text{corpo}}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	1,5	1,5	1,5
$\mu$ [g/(cm.s)]	0,01	0,01	0,01
$X_{\text{inicial}}$ [cm]	10,0	10,0	10,0
$Y_{\text{inicial}}$ [cm]	1,5	1,5	1,5
$D$ [cm]	0,25	0,25	0,25
$\Delta t$ [s]	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
$t_{\text{salvamento}}$ [s]	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$

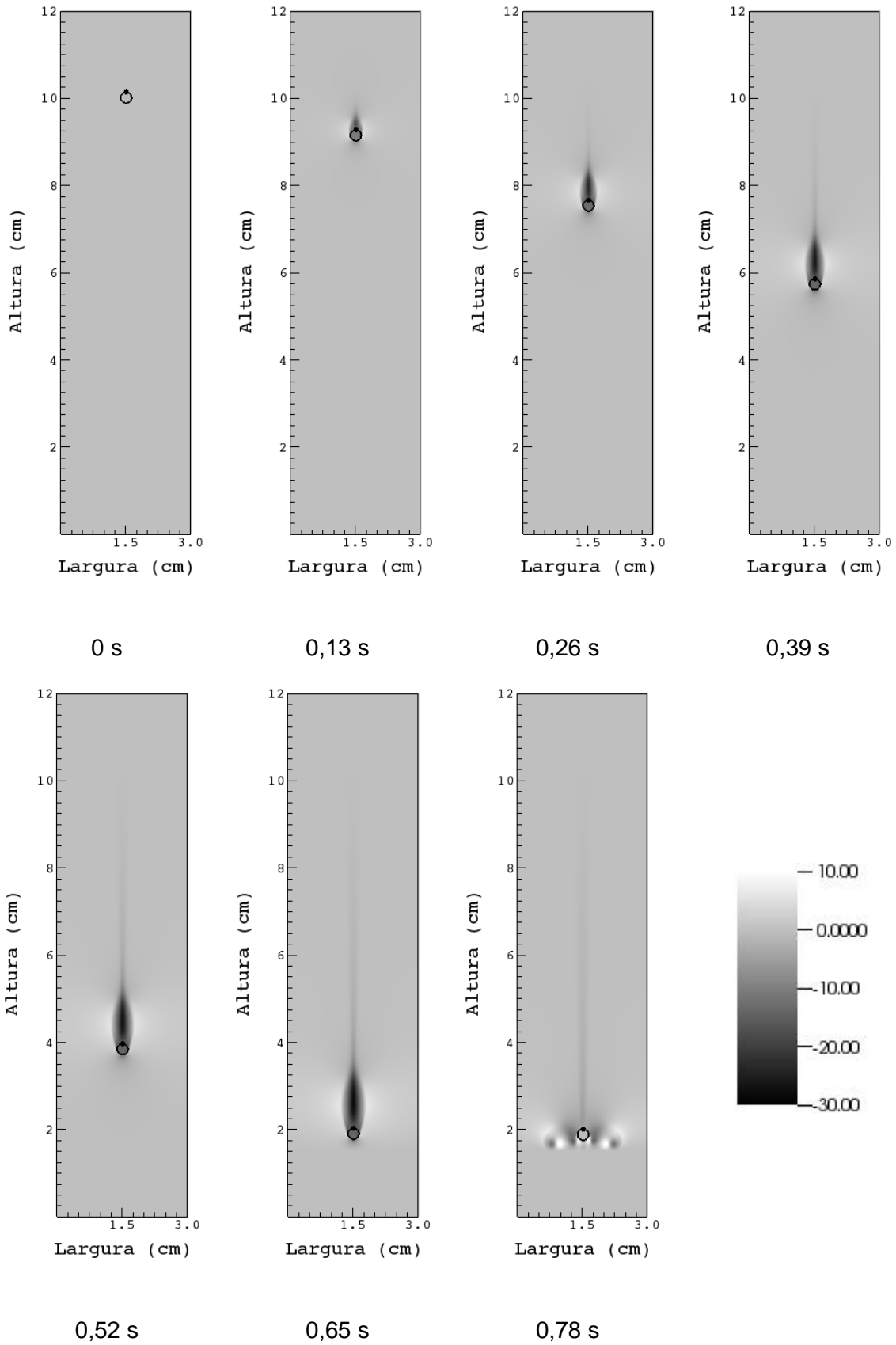
Fonte: Próprio autor.

As simulações com as resoluções 1024x256 e 2048x512 apresentaram resultados satisfatórios e bastante próximos. Por isso, foi decidido utilizar a resolução 1024x256 como padrão, uma vez que esta acumula pouco erro em relação à resolução 2048x512, além do tempo de simulação com resolução 2048x512 ser alto e gerar grande volume de dados.

Quanto ao tempo computacional, a simulação 1 levou 33 dias (o sistema informa apenas a data de criação do arquivo) para simular até o tempo físico de 0,78 s, a simulação 2 levou 7 dias, e a simulação 3 apenas 1 dia. Todas as simulações foram realizadas com processador modelo Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1270 v3 @ 3.50GHz.

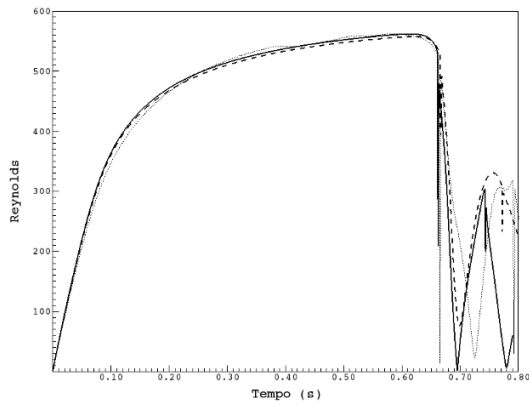
Nota-se que os resultados das simulações têm pouca variação durante a queda do corpo, porém, apresentam variações grandes após o choque com o fundo do recipiente, devido às variações bruscas de velocidade e demais propriedades.

Figura 3.1 – Evolução temporal do campo de velocidade vertical da simulação com malha de 2048x512 nós (simulação 1)

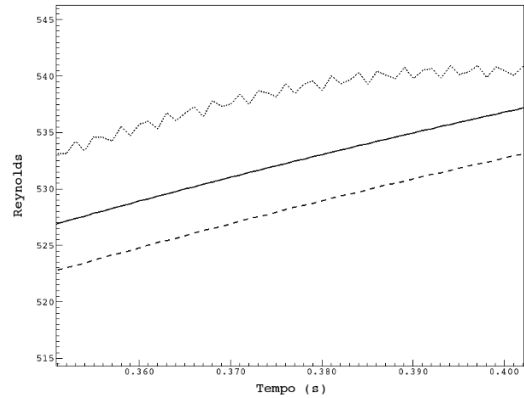


Fonte: próprio autor

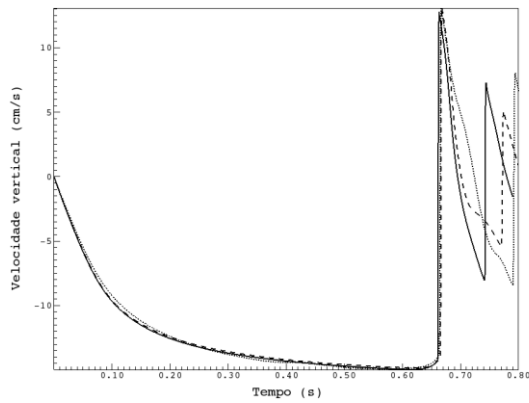
Figura 3.2 – Gráficos referentes às simulações 1,2 e 3 da tabela 3.2.



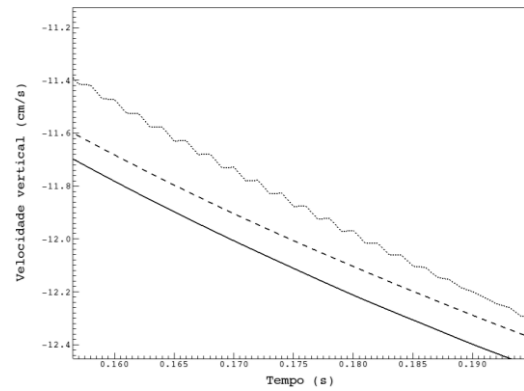
(a)



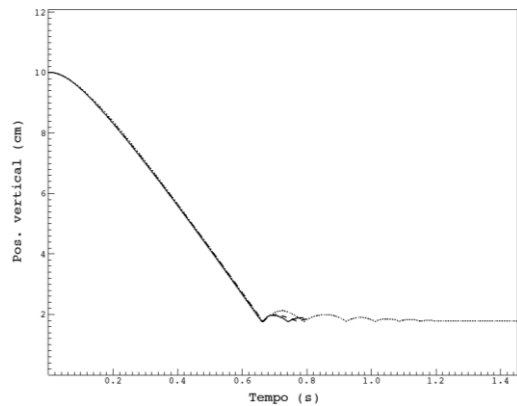
(b)



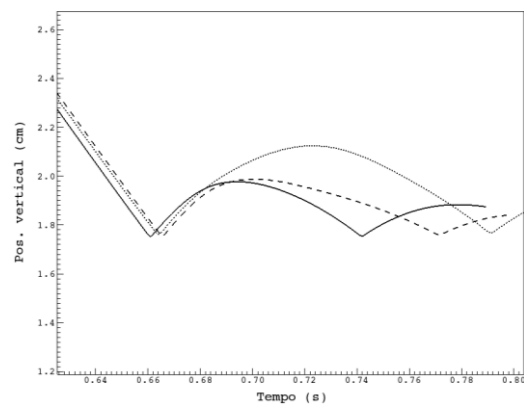
(c)



(d)

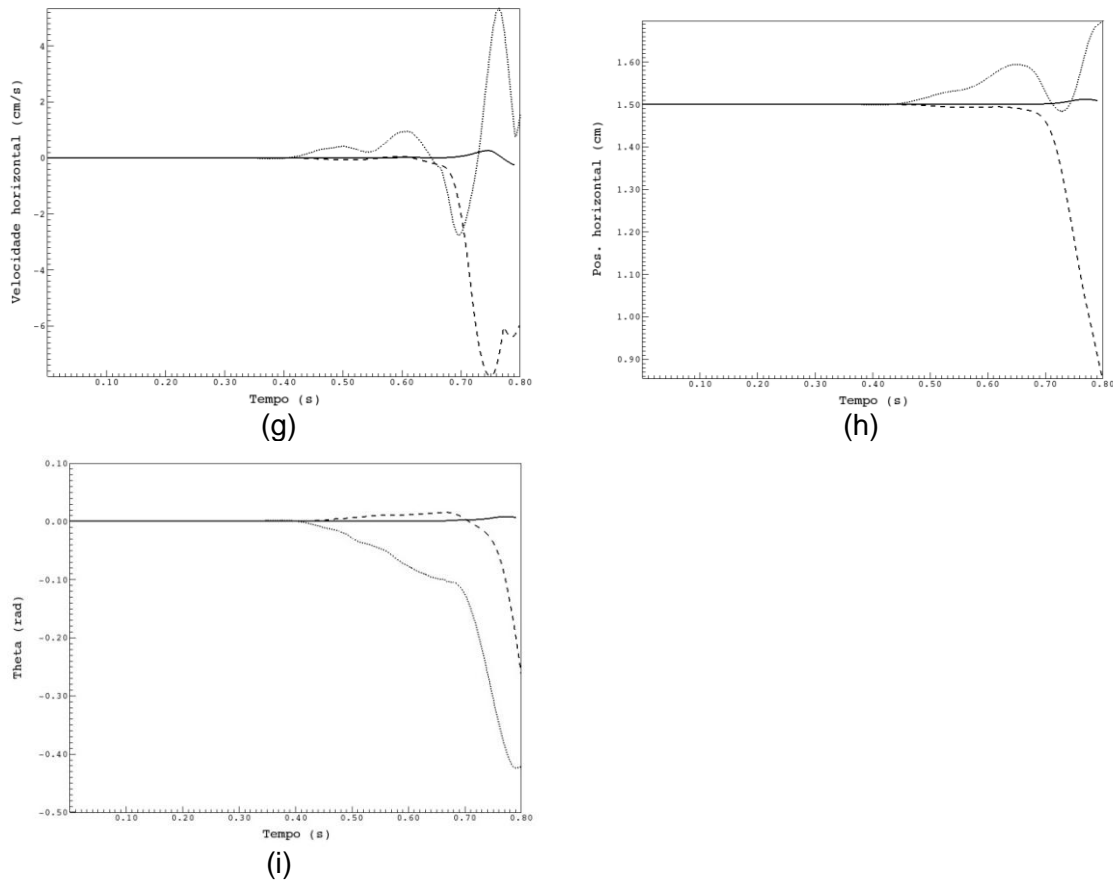


(e)



(f)

Figura 3.2 (continuação) – Gráficos referentes às simulações 1,2 e 3 da tabela 3.2.



Fonte: Próprio autor.

Outro ponto importante a ressaltar é o deslocamento lateral (movimentação em  $y$ ), fenômeno não esperado, pois, como visto na seção 2.2, corpos simétricos lateralmente e verticalmente não produzem força de sustentação. Dois fatores podem explicar o surgimento de velocidade lateral: um erro numérico (a simulação 1, com a maior resolução, tem o menor deslocamento lateral) e número de Reynolds relativamente alto, o que pode caracterizar a mudança de regime de escoamento laminar para turbulento, e quanto mais turbulento, maior o efeito das não linearidades.

### 3.2. Variação de parâmetros

Variando as propriedades físicas do fluido da simulação 2, conforme a tabela 3.3. Os resultados dos campos de velocidade, em diferentes instantes de tempo, são apresentados na figura 3.3. Nas figuras 3.4 (a) até (f) são apresentados os gráficos da evolução temporal das simulações 4, 5 e 6, plotados juntamente com os da simulação 2, onde a linha referente a simulação 2 é a linha contínua (—), referente a simulação 4 é a linha tracejada (---), referente à simulação 5 é linha pontilhada (····) e referente a simulação 6 é linha pontilhada-tracejada (·-·-·).

Observa-se na figura 3.4 (a), a qual apresenta a evolução temporal do número de Reynolds para todas as simulações. As simulações 5 e 6 atingem números de Reynolds da ordem de 20 e 10 respectivamente, o que é considerado escoamento laminar.

Tabela 3.3 – Configuração das simulações 4,5 e 6.

Dados	Simulação 4	Simulação 5	Simulação 6
Resolução	1024x256	1024x256	1024x256
$L_y$	3,0	3,0	3,0
$L_x$	12,0	12,0	12,0
$L$	10,5	10,5	10,5
$L_{bz}$	1,5	1,5	1,5
$\rho_{\text{fluido}}$	1,0	1,0	1,0
$\rho_{\text{corpo}}$	1,25	1,50	1,25
$\mu$	0,01	0,1	0,01
$X_{\text{inicial}}$	10,0	10,0	10,0
$Y_{\text{inicial}}$	1,5	1,5	1,5
$D$	0,25	0,25	0,25
$\Delta t$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
$t_{\text{salvamento}}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$

Fonte: Próprio autor

Figura 3.3 – Campo de velocidade vertical da simulação 5.

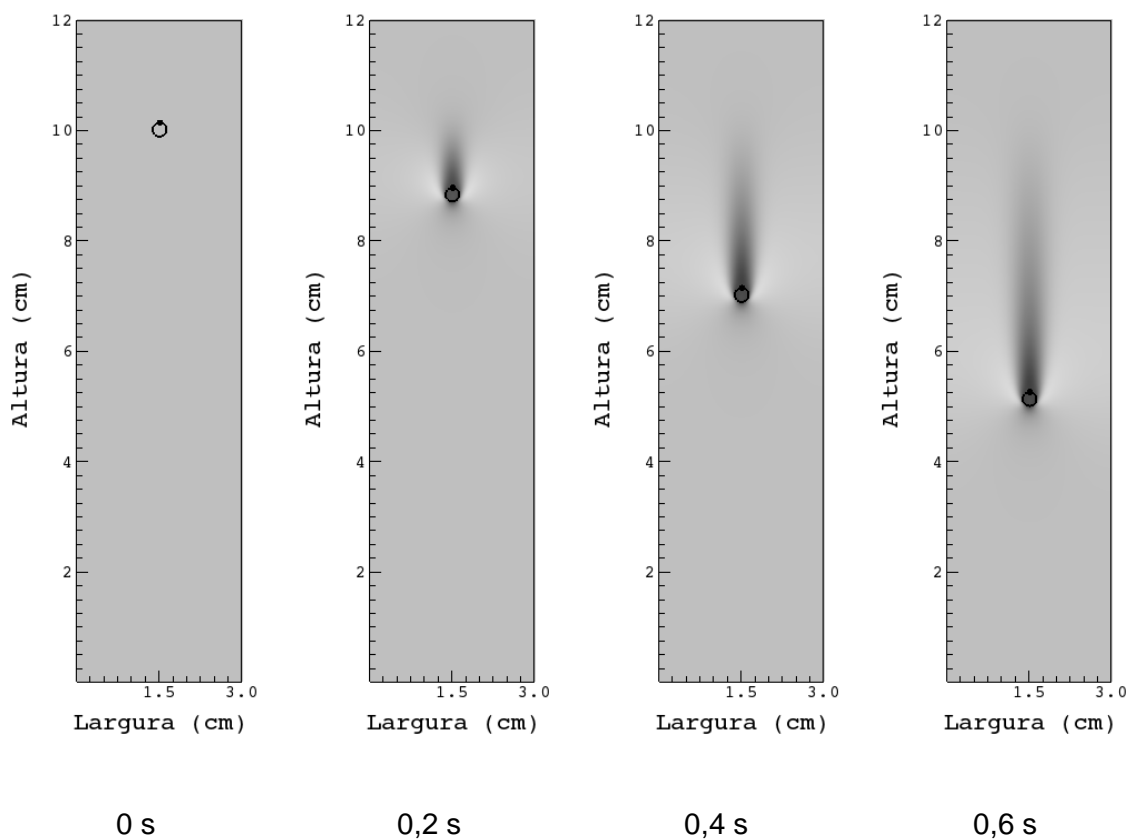
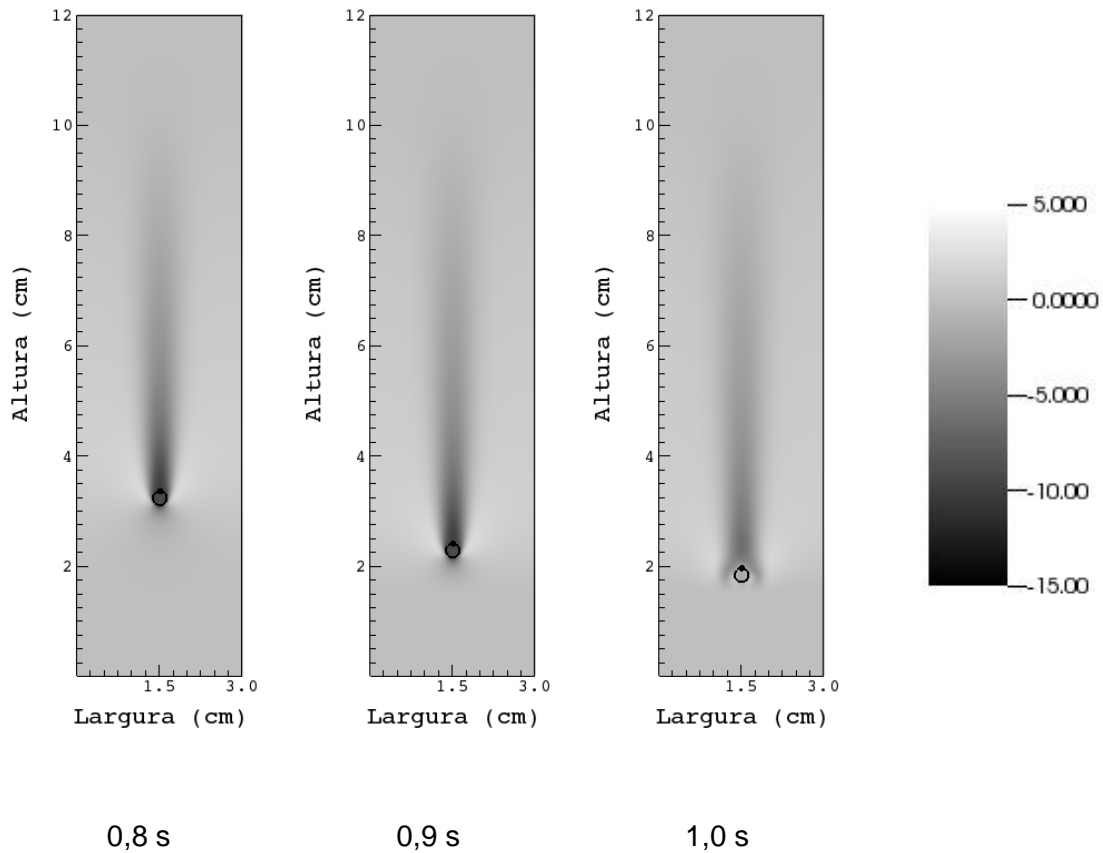


Figura 3.3 (continuação) – Campo de velocidade vertical da simulação 5.

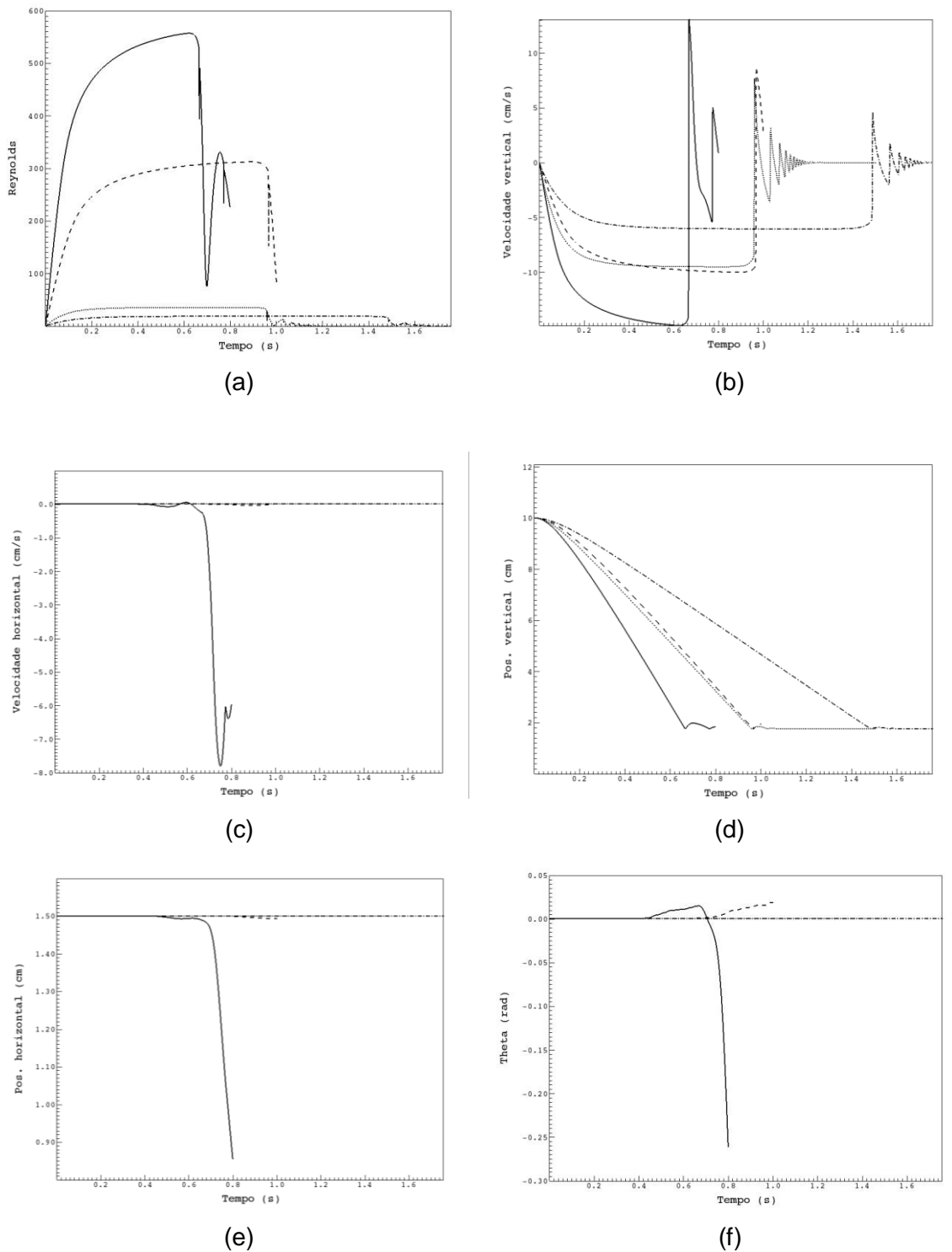


Fonte: Próprio autor.

Na simulação 4 o número de Reynolds atinge o patamar próximo a  $Re=300$ , ainda está dentro da faixa de escoamento laminar, mas já bem próximo da transição para a turbulência. Na simulação 2,  $Re=560$ , aproximadamente, nessa situação o escoamento já é considerado turbulento e efeitos tridimensionais devem ser computados, porém, as simulações são bidimensionais, o que pode levar a resultados enganosos.

O efeito do número de Reynolds é notado na variação temporal dos demais parâmetros apresentados nas figuras 3.4 (b), (c), (d), (e) e (f). Nas figuras 3.4 (c), (e) e (f) a simulação 4 (linha tracejada ---) apresenta variações muito pequenas, enquanto as simulações 5 e 6 não apresentam qualquer variação. Já a simulação 2 muda bruscamente de comportamento no mesmo tempo, aproximadamente em 0,5 s, que o número de Reynolds atinge o patamar de escoamento turbulento, ou seja, aproximadamente  $Re=500$ .

Figura 3.4 – Gráficos referentes às simulações 4, 5 e 6.



Fonte: Próprio autor.

### 3.3. Runge-Kutta

Tentou-se implementar o método de Runge-Kutta, descrito na seção 2.6.3.3 para a resolução das equações de velocidade (equações 73 e 74) e posição (equações 76 e 77) do corpo rígido. Esperava-se a realização da simulação com

incremento temporal maior e acurácia tão boa ou até superior em relação ao método de Euler, conforme apresentado na tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Configuração das simulações 7 e 8.

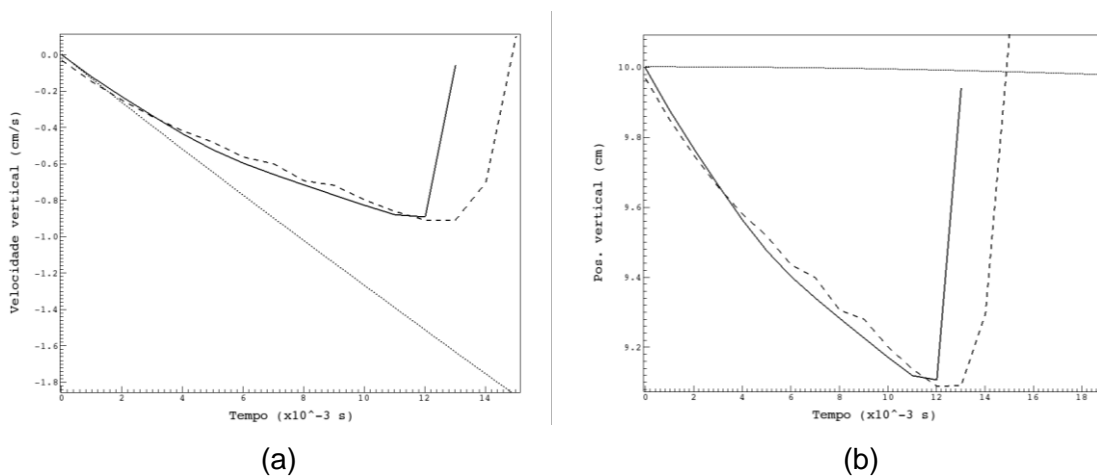
Dados	Simulação 7	Simulação 8
Resolução	1024x256	1024x256
$L_y$	3,0	3,0
$L_x$	12,0	12,0
$L$	10,5	10,5
$L_{bz}$	1,5	1,5
$\rho_{\text{fluido}}$	1,0	1,0
$\rho_{\text{corpo}}$	1,5	1,5
$\mu$	0,01	0,01
$X_{\text{inicial}}$	10,0	10,0
$Y_{\text{inicial}}$	1,5	1,5
$dt$	$10^{-5}$	$10^{-4}$
$t_{\text{salvamento}}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$

Fonte: Próprio autor.

Entretanto, o resultado divergiu consideravelmente a simulação interrompeu-se precocemente. Nas figuras 3.5 (a) e (b), a linha referente à simulação 7 é a linha contínua (—), a linha referente à simulação 8 é a linha tracejada (---) e a linha referente à simulação 2 (simulação de referência) é a linha pontilhada (⋯).

As figuras 3.5 (a) e (b) mostram uma contradição entre os próprios resultados, uma vez que a figura 3.5 (a) mostra velocidades verticais menores, em módulo, para as simulações 7 e 8 em relação à simulação 2, enquanto a figura 3.5 (b) mostra um deslocamento vertical maior nos primeiros instantes para as simulações 7 e 8 em relação à simulação 2.

Figura 3.5 – Gráficos referentes às simulações 7 e 8.



Fonte: Próprio autor

### 3.4. Dois corpos

Introduz-se um segundo corpo nas simulações. Na simulação 9 com dois corpos optou-se por simular com os mesmos valores de entrada utilizados por Feng e Michaelides (2004), mas mantendo os valores dos parâmetros de choque. Esta simulação foi repetida por Wang, Fan e Luo (2007) e comparada à simulação de Feng e Michaelides (2004), as configurações das simulações da presente seção encontra-se na tabela 3.5.

No mais, os centros das partículas são levemente deslocados no eixo horizontal, pois se fossem iguais, haveria uma dificuldade na separação dos corpos, que poderia até não acontecer (UHLMAN, 2005).

Tabela 3.5 – Configurações das simulações 9, 10 e 11.

Dados	Simulação 9	Simulação 10	Simulação 11
Resolução	1280x256	1280x256	512x128
$L_y$	2,0	2,0	2,0
$L_x$	10,0	10,0	8,0
$L$	8,0	8,0	6,0
$L_{bz}$	2,0	2,0	2,0
$\rho_{\text{fluido}}$	1,0	1,0	1,0
$\rho_{\text{corpo1}}$	1,01	1,01	1,5
$\rho_{\text{corpo2}}$	1,01	1,01	1,25
$\mu$	0,001	0,001	0,01
$X^1_{\text{inicial}}$	9,2	9,2	7,0
$X^2_{\text{inicial}}$	8,8	8,8	6,0
$Y^1_{\text{inicial}}$	1,001	1,001	1,001
$Y^2_{\text{inicial}}$	1,0	1,0	0,999
$D$	0,2	0,2	0,25
$\Delta t$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$
$t_{\text{salvamento}}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}$

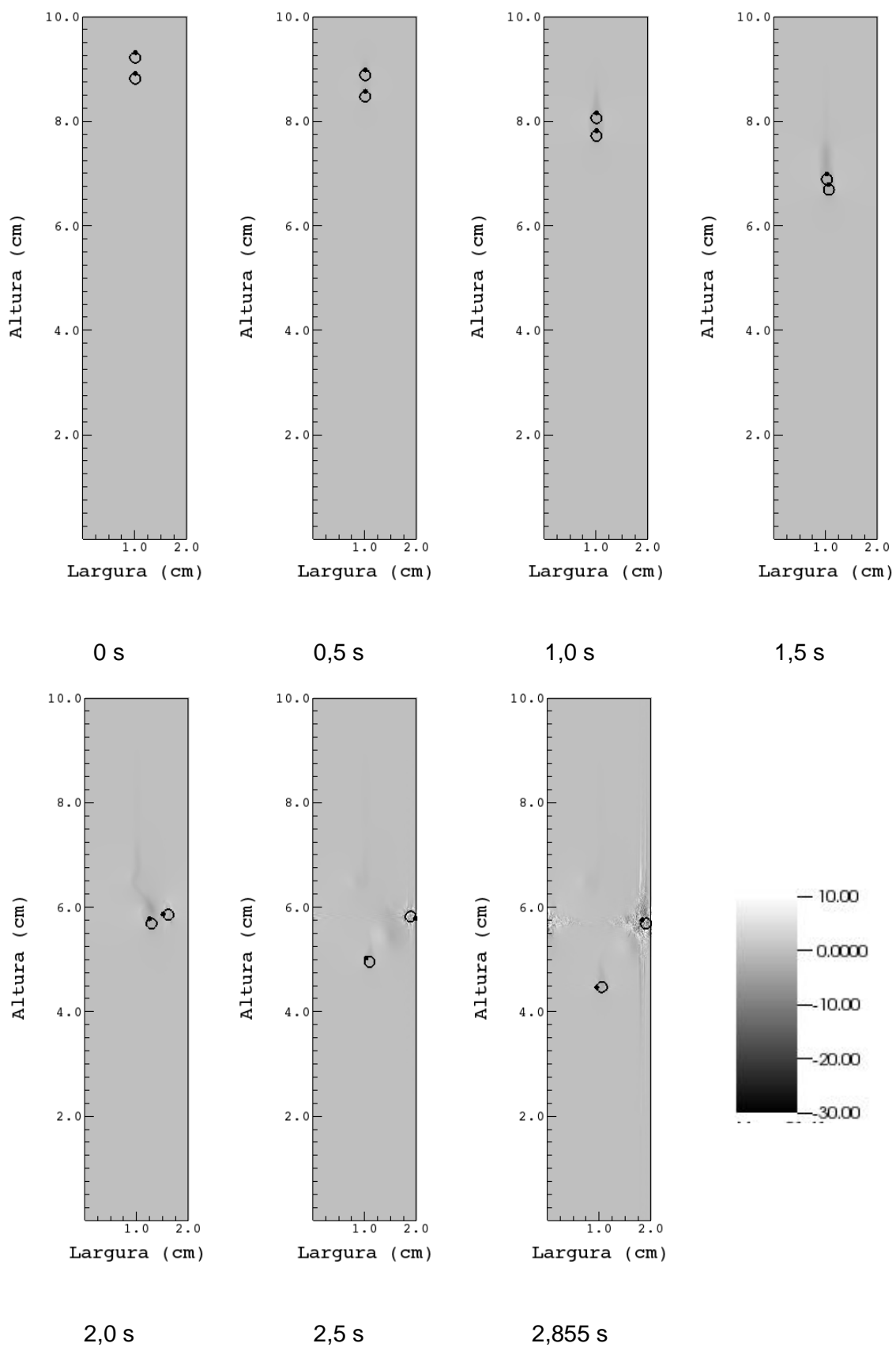
Fonte: Próprio autor.

A simulação 9, porém, não apresentou os fenômenos de atração, toque e repulsão, apenas uma repulsão violenta imediatamente após o choque. A simulação 10 é idêntica à simulação 9, exceto pelo passo de tempo, o qual é menor. A simulação 10 apresentou melhores resultados que a simulação 9, pois foi possível observar os fenômenos de atração, toque e repulsão.

A figura 3.6 é referente ao campo de velocidade vertical da simulação 10, apresentando-a em diferentes instantes de tempo.

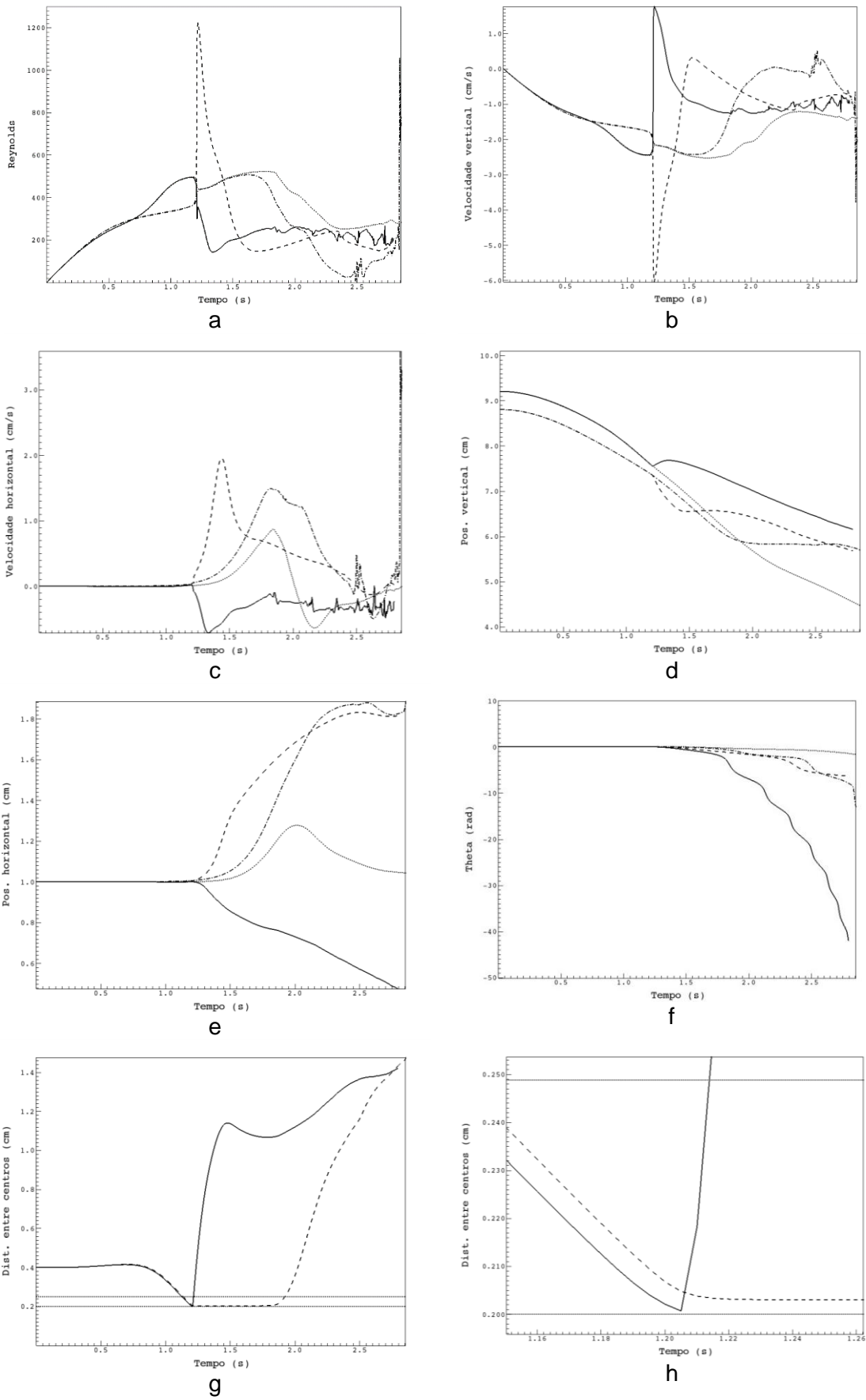
Nas figuras 3.7 (a) até (f), a linha referente ao corpo 1 da simulação 9 é a linha contínua (—), referente ao corpo 2 da simulação 9 é a linha tracejada (---), referente ao corpo 1 da simulação 10 é a linha pontilhada (⋯⋯), e referente ao corpo 2 da simulação 10 é a linha pontilhada-tracejada (⋯---).

Figura 3.6 – Campo de velocidade vertical da simulação 10.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.7 – Gráficos comparativos entre as simulações 9 e 10.



Fonte: Próprio autor.

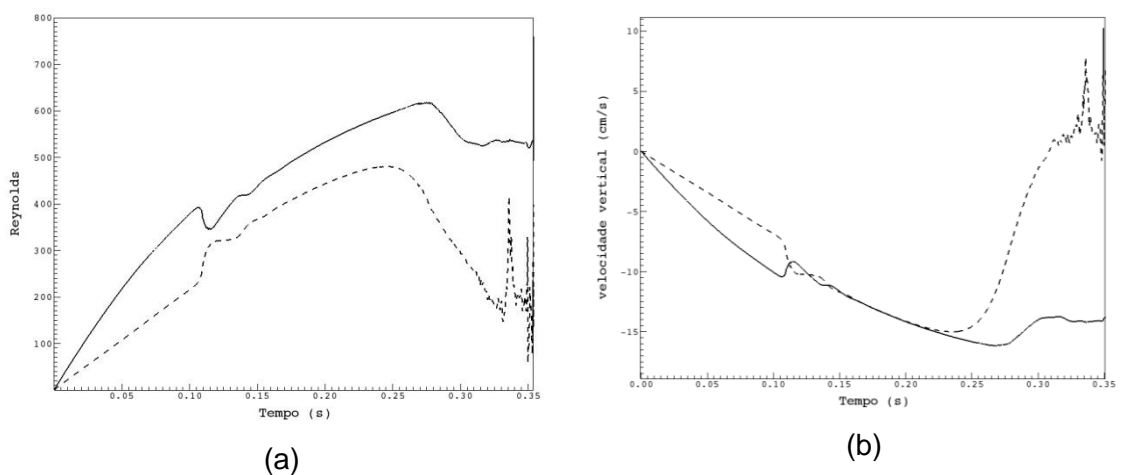
Assim, como nas simulações realizadas para o refinamento de malha, aqui nota-se que o choque, agora entre corpos, é um fenômeno mais sensível à variação de parâmetros, comparado à queda do corpo no fluido. Observando as figuras 3.7 (a) até (h), que as simulações 9 e 10 tem valores quase idênticos antes do toque dos corpos.

Após o toque, entretanto, os resultados são bastante diferentes, pois a sensibilidade do choque dos corpos aos parâmetros de simulação é grande. Na figura 3.7 (h), pode-se notar que a distância entre os centros na simulação 10 se estabiliza em um valor maior que a menor distância, na simulação 9, o que pode explicar a repulsão violenta.

Na simulação 10, vê-se que há um deslocamento horizontal, o que é esperado, uma vez que durante a fase de toque os corpos tem um contato assimétrico, que levaria a uma força de sustentação não nula. Nota-se também que o corpo 1 da simulação 10 ultrapassa o corpo 2, inicialmente mais baixo, pois o corpo 1 está sujeito a uma menor resistência do fluido, comparado ao corpo 2, desenvolvendo assim uma maior velocidade vertical. Nas simulações 9 e 10 ocorreram instabilidades nas velocidades e também, em todas as simulações com mais de um corpo, as simulações divergiram.

Na simulação 11, variou-se os parâmetros de choque da seguinte forma:  $\varepsilon_w = \varepsilon'_w = 10^{-7}$  e  $\varepsilon_p = \varepsilon'_p = 0,5 \cdot 10^{-7}$ . Na figura 3.8, a linha referente ao corpo 1 é a linha contínua (—), e a linha referente ao corpo 2 é a linha tracejada (---).

Figura 3.8 – Gráficos referentes à simulação 11.



Fonte: Próprio autor.

### 3.5. Influência da largura

Realizou-se duas variações da simulação 10 com larguras do domínio diferentes para se observar a variação dos resultados, as configurações das simulações 12 e 13 são apresentadas na tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Configurações das simulações 12 e 13.

Dados	Simulação 12	Simulação 13
Resolução	1280x128	1280x512
$L_y$	1,0	4,0
$L_x$	10,0	10,0
$L$	8,0	8,0
$L_{bz}$	2,0	2,0
$\rho_{\text{fluido}}$	1,0	1,0
$\rho_{\text{corpo}}$	1,01	1,01
$\mu$	0,001	0,001
$X^1_{\text{inicial}}$	9,2	9,2
$X^2_{\text{inicial}}$	8,8	8,8
$Y^1_{\text{inicial}}$	0,501	2,001
$Y^2_{\text{inicial}}$	0,5	2,0
$D$	0,2	0,2
$\Delta t$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
$t_{\text{salvamento}}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Próprio autor.

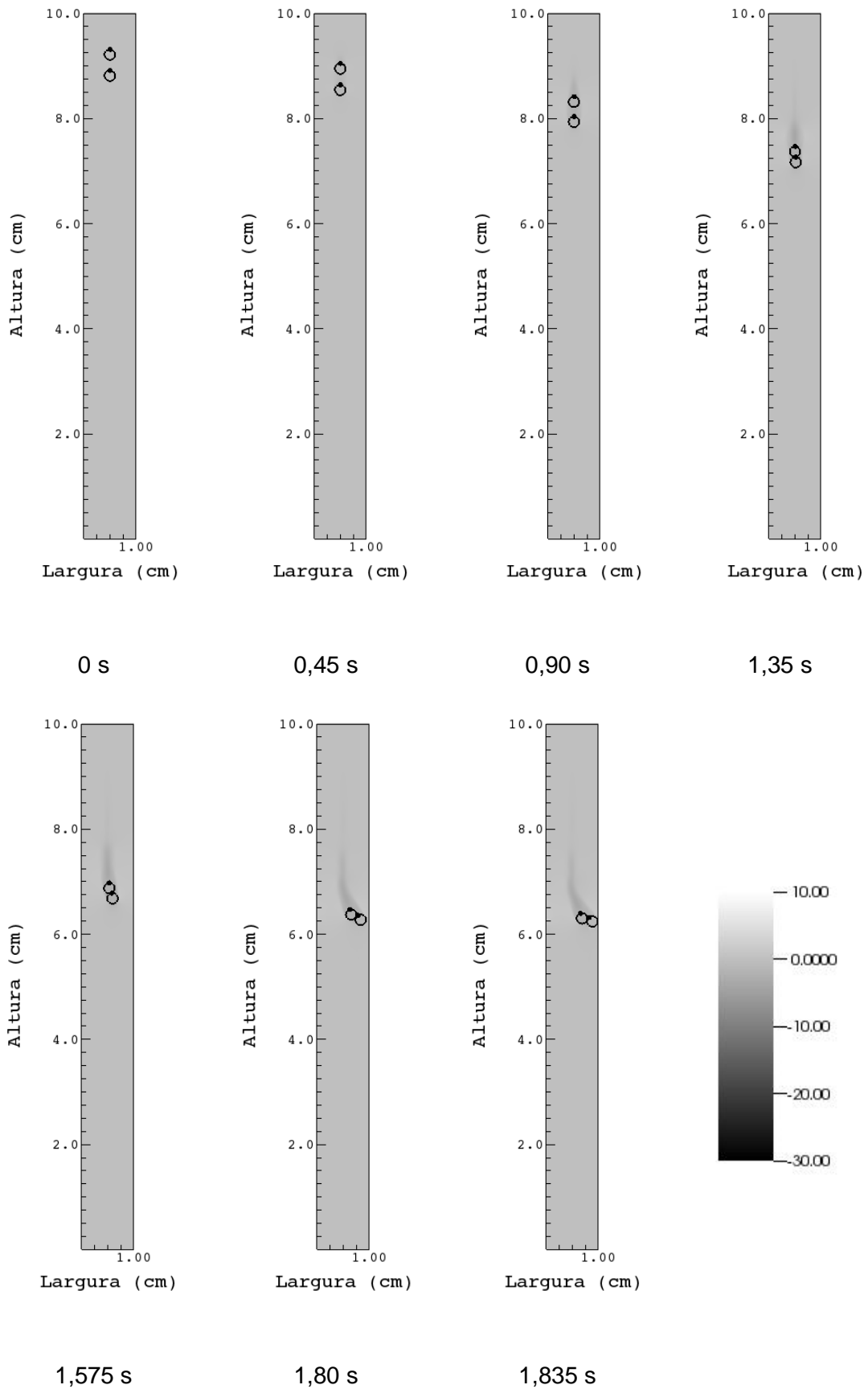
Para efeito de comparação, os gráficos foram plotados em conjunto com a simulação 10. As figuras 3.9 e 3.10 são referentes às simulações 12 e 13, e apresentam os campos de velocidade vertical da queda do corpo rígido.

Na figuras 3.11 (a) até (f), a linha referente ao corpo 1 da simulação 12 é linha contínua (—) preta, referente ao corpo 2 da simulação 12 é a tracejada (---) preta, referente ao corpo 1 da simulação 10 é linha contínua (—) vermelha, referente ao corpo 2 da simulação 10 é a tracejada (---) vermelha, referente ao corpo 1 da simulação 13 é linha contínua (—) azul, e referente ao corpo 2 da simulação 13 é a tracejada (---) azul.

Nota-se que quanto maior a largura, maior a velocidade vertical de queda. Observou-se também que as simulações com maior largura demoram mais para divergir que aquelas com larguras menores, devido ao fato de não haver paredes laterais na simulação, portanto, nas mais largas os corpos demoram mais a alcançar o limite do domínio espacial. Fora estes dois pontos, não se notou diferença significativa em nenhuma das outras grandezas.

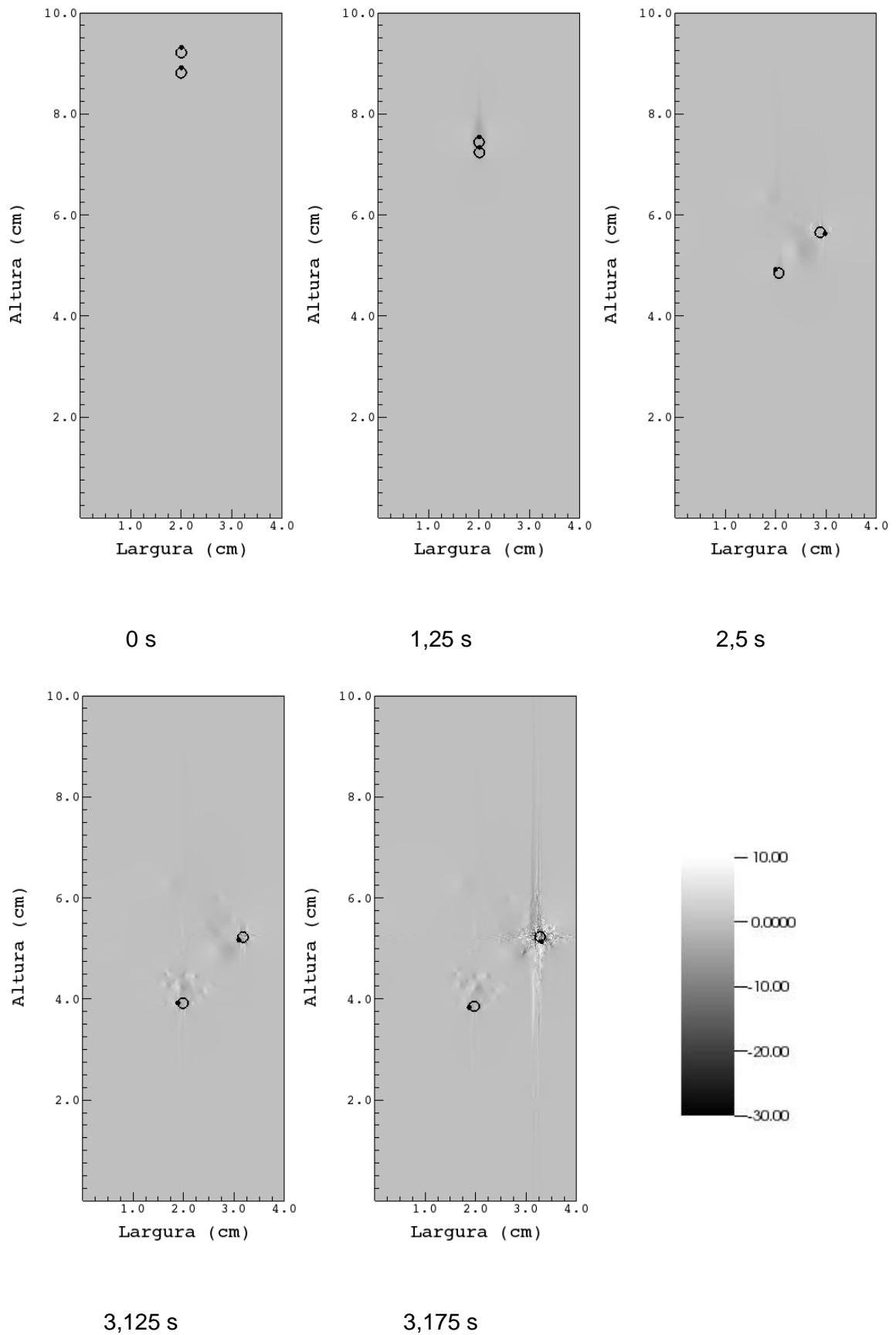
Como nas simulações 9, 10 e 11, a simulação 13 apresenta instabilidade nas velocidades após a repulsão dos corpos. Como na simulação 12, o corpo 2 toca o limite do domínio antes da repulsão, não se observou a instabilidade nas velocidades.

Figura 3.9 – Campo de velocidade vertical da simulação 12.



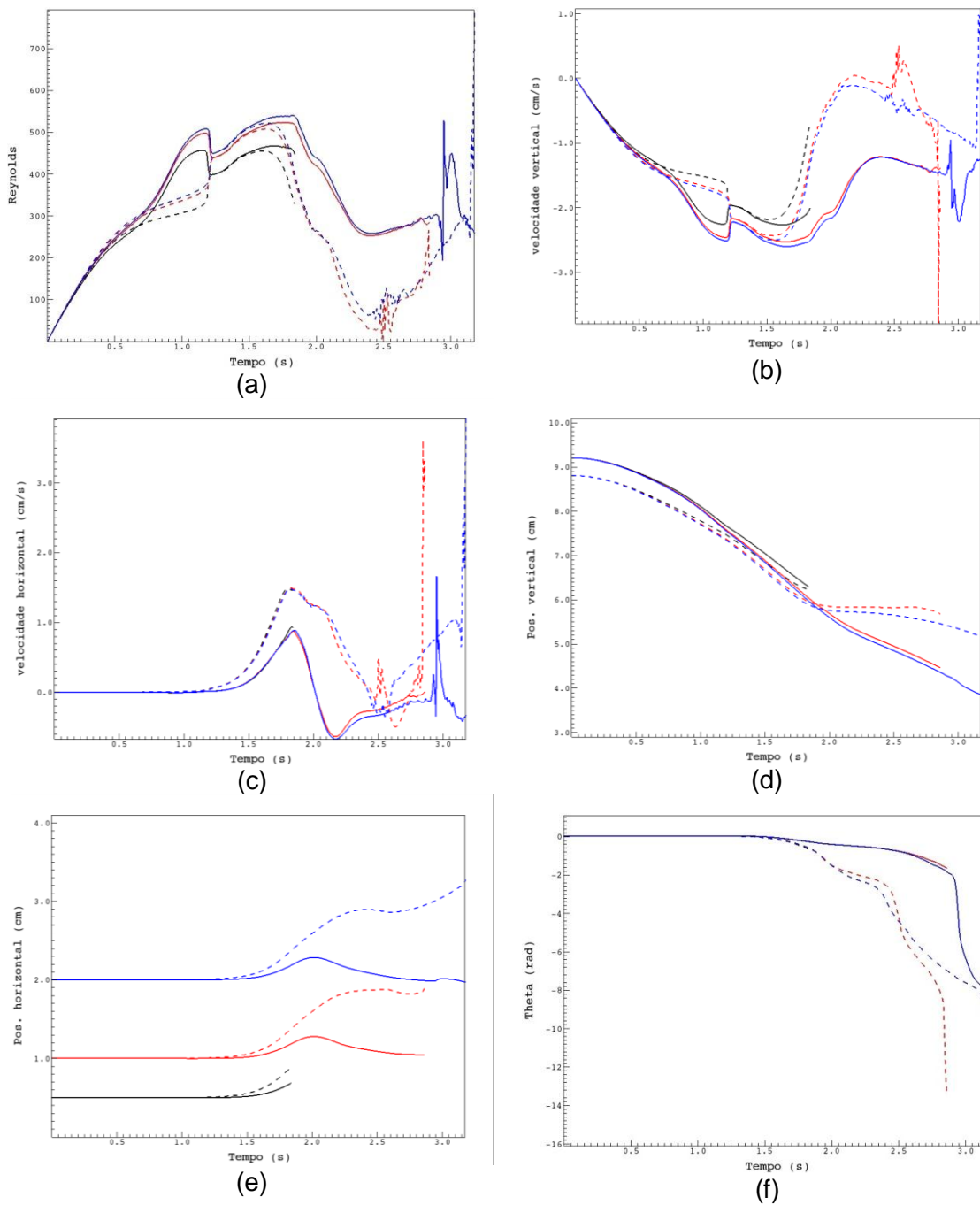
Fonte: Próprio autor.

Figura 3.10 – Campo de velocidade vertical da simulação 13.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.11 – Gráficos referentes às simulações 12 e 13.



Fonte: Próprio autor

### 3.6. Influência do número de corpos

Realizou-se também duas variações da simulação 10, com diferente número de corpos. Para efeito de comparação, os gráficos referentes às simulações 14 e 15 foram plotados em conjunto com os gráficos da simulação 10 e as configurações das simulações 14 e 15 são apresentadas na tabela 3.7.

As figuras 3.12 e 3.13 são referentes às simulações 14 e 15 e apresentam os campos de velocidade vertical.

Tabela 3.7 – Configurações das simulações 12 e 13.

Dados	Simulação 14	Simulação 15
Resolução	1280x256	1280x256
$L_y$	2,0	2,0
$L_x$	10,0	10,0
$L$	8,0	8,0
$L_{bz}$	2,0	2,0
$\rho_{\text{fluido}}$	1,0	1,0
$\rho_{\text{corpo}}$	1,01	1,01
$\mu$	0,001	0,001
$X^1_{\text{inicial}}$	9,2	9,2
$X^2_{\text{inicial}}$	-	8,8
$X^3_{\text{inicial}}$	-	8,4
$Y^1_{\text{inicial}}$	1,0	1,001
$Y^2_{\text{inicial}}$	-	1,0
$Y^3_{\text{inicial}}$	-	1,001
$D$	0,2	0,2
$\Delta t$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
$t_{\text{salvamento}}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

Fonte: Próprio autor.

Figura 3.12 – Campo de velocidade vertical da simulação 14.

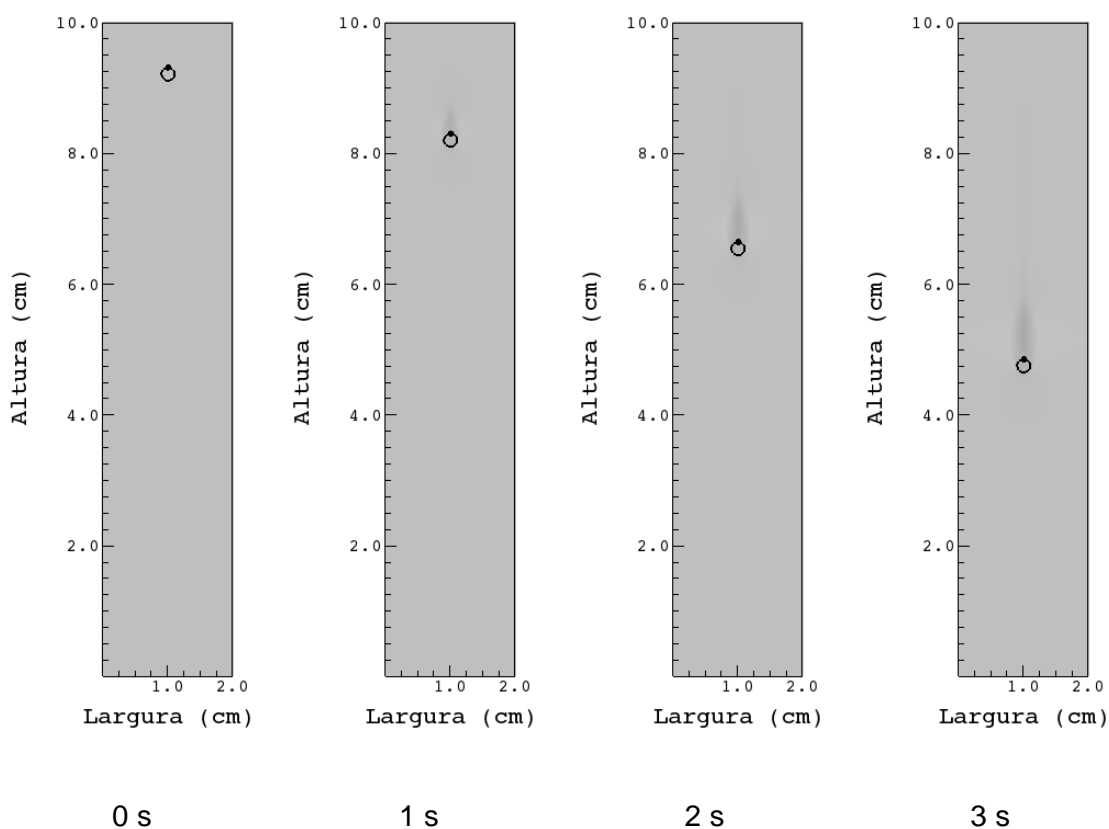
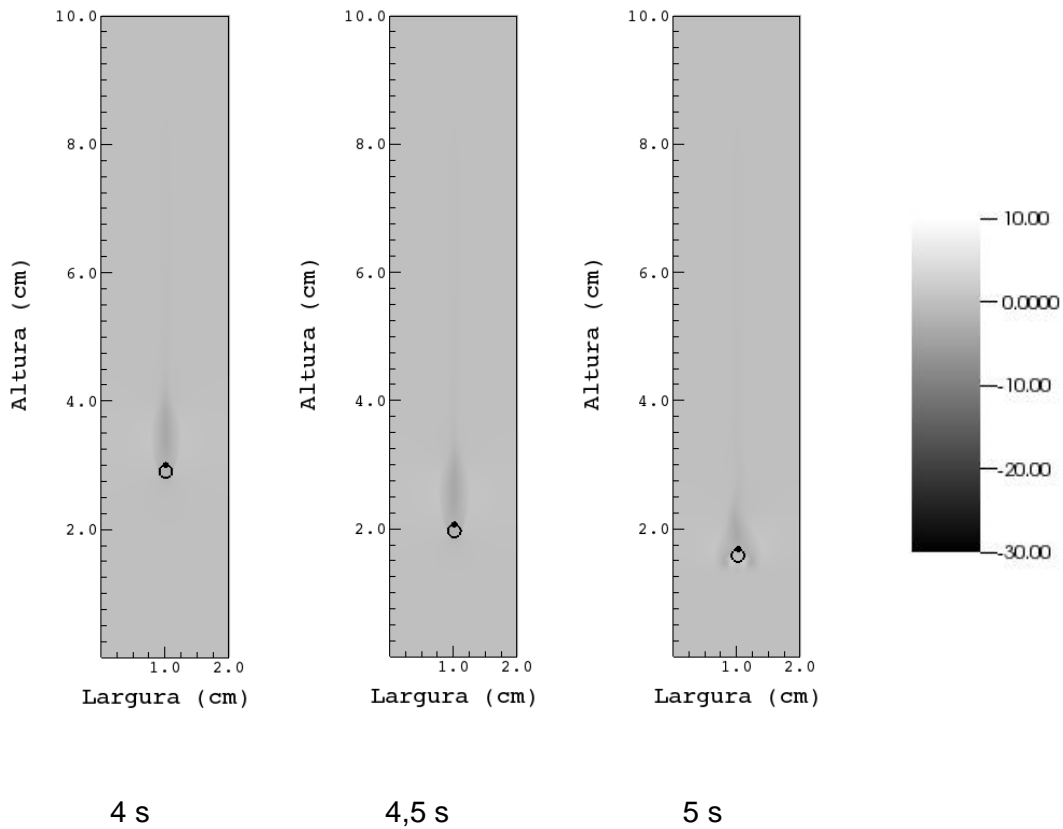


Figura 3.12 (continuação) – Campo de velocidade vertical da simulação 14.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.13 – Campo de velocidade vertical na simulação 15.

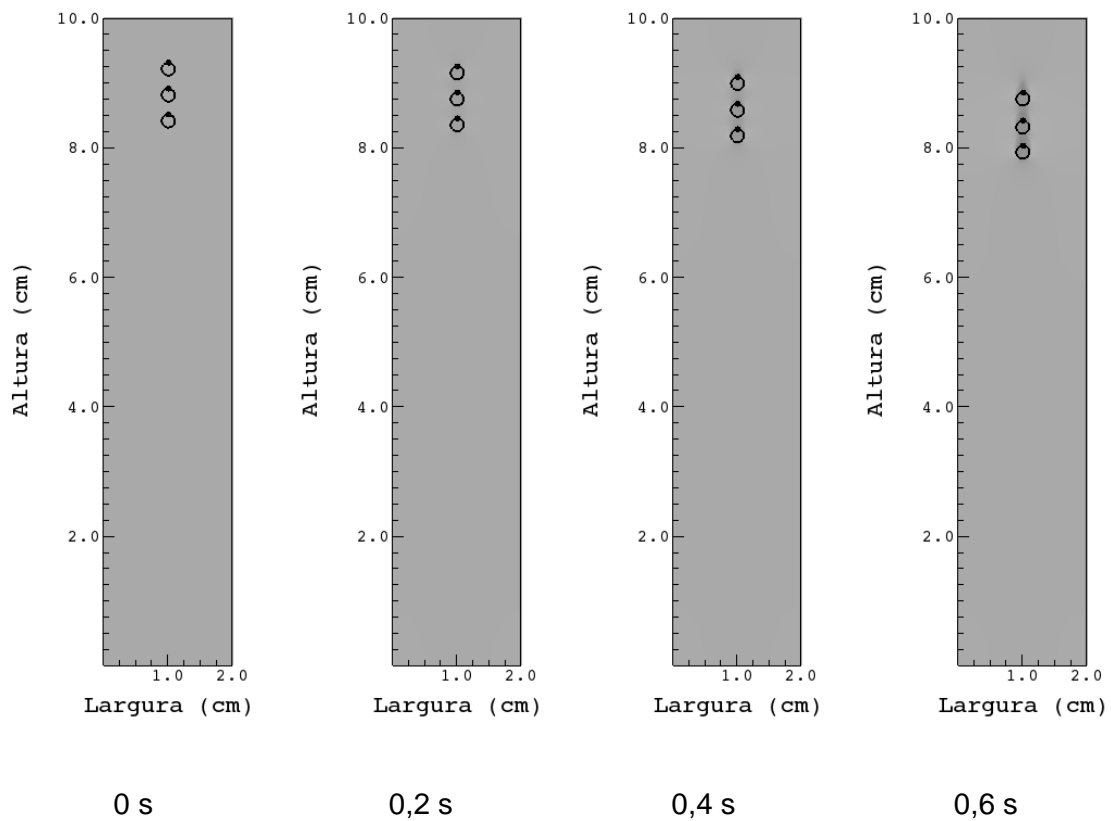
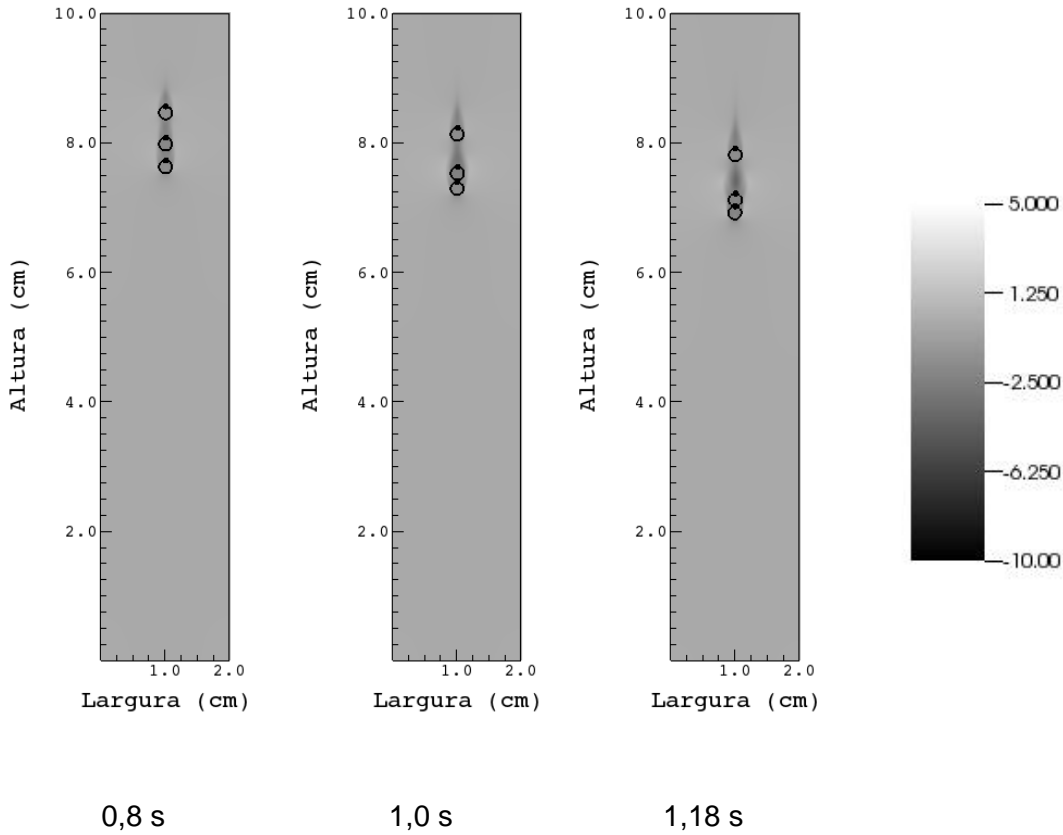


Figura 3.13 (continuação) – Campo de velocidade vertical na simulação 15.



Fonte: Próprio autor.

Nas figuras 3.14 (a) a (f), a linha referente ao corpo 1 da simulação 14 é linha contínua (—) preta, referente ao corpo 1 da simulação 10 é linha contínua (—) vermelha, referente ao corpo 2 da simulação 10 é a tracejada (---) vermelha, referente ao corpo 1 da simulação 15 é linha contínua (—) azul, referente ao corpo 2 da simulação 15 é a tracejada (---) azul, e referente ao corpo 3 da simulação 15 é a pontilhada (⋯) azul.

Figura 3.14 – Gráficos referentes às simulações 14 e 15.

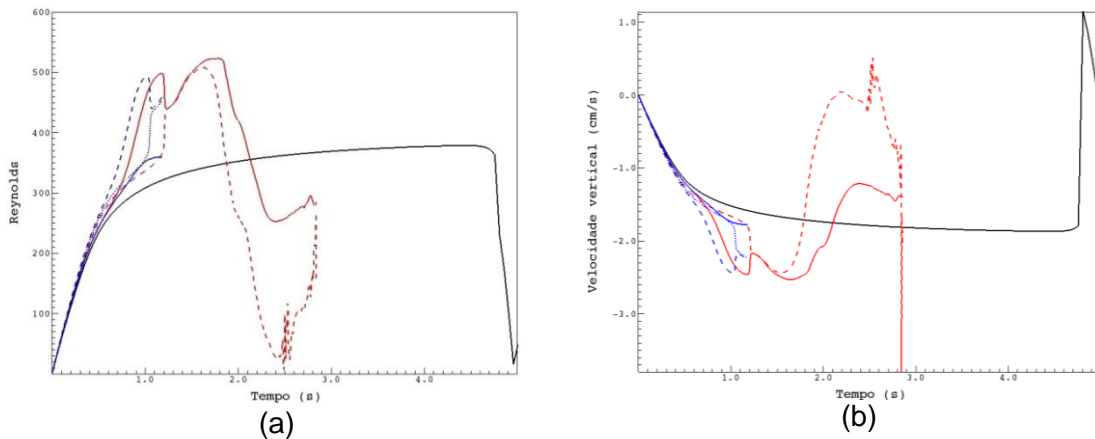
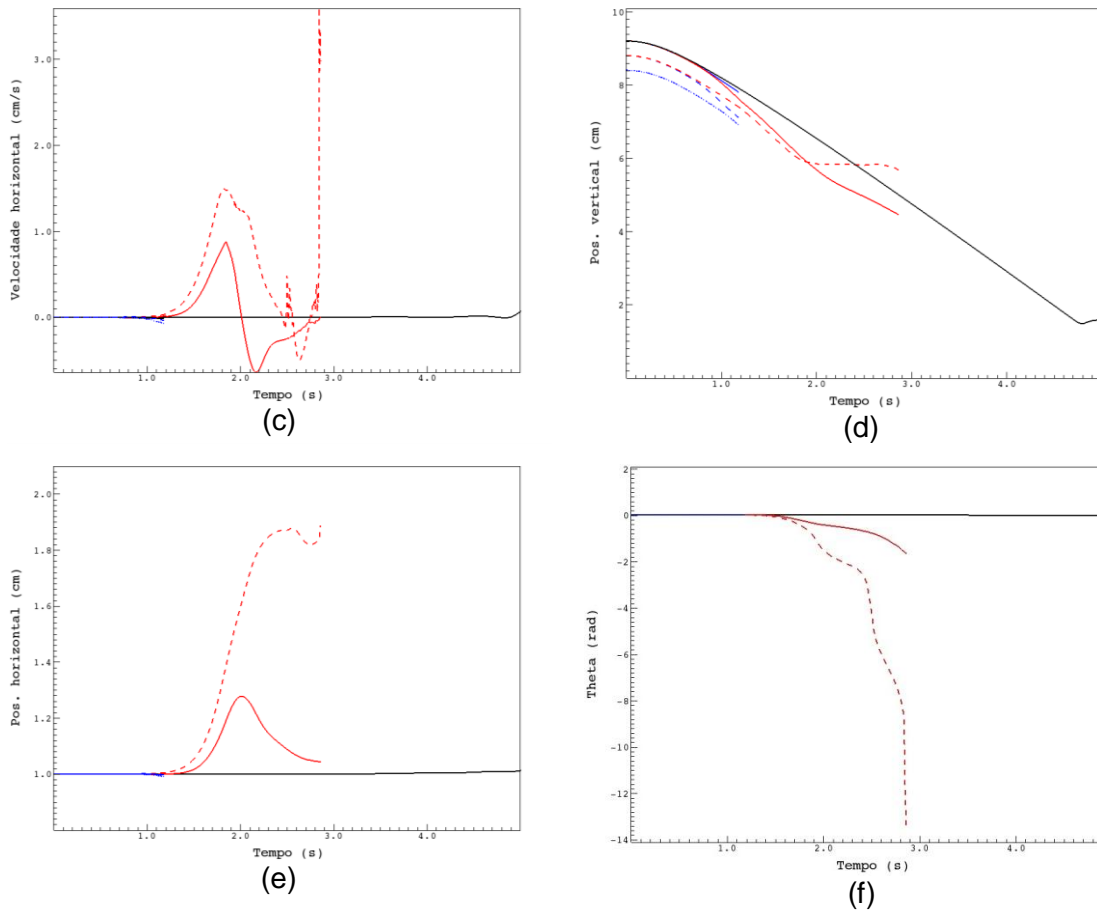


Figura 3.14 (continuação) – Gráficos referentes às simulações 14 e 15.



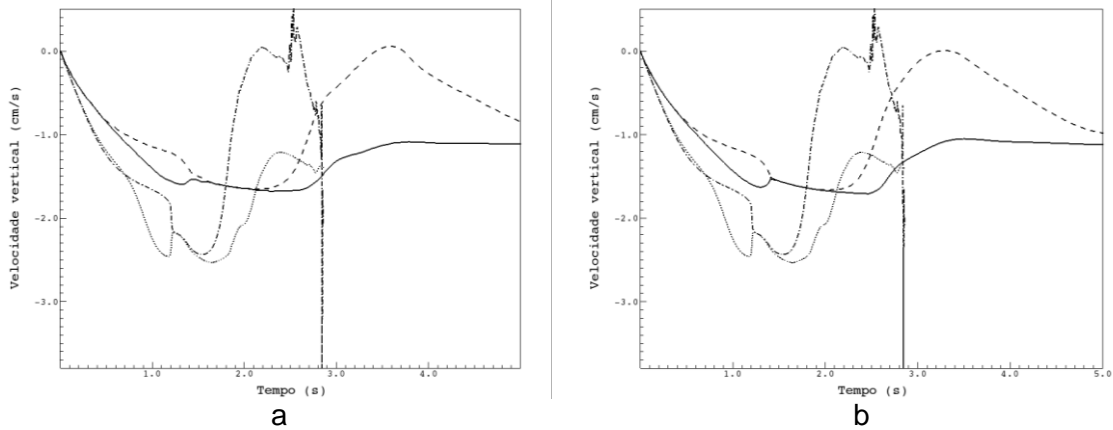
Fonte: Próprio autor

### 3.7. Discussão dos resultados

As figuras 3.15 (a) e (b) mostram, respectivamente, o gráfico da velocidade vertical simulação 10 plotado juntamente com os gráfico de Feng e Michaelides (2004) e Wang, Fan e Luo (2008), onde o corpo 1 das referências é representada pela linha contínua (—), o corpo 2 pela linha tracejada (---), o corpo 1 da simulação 10 é representada pela linha pontilhada (⋯⋯), e o corpo 2 da simulação 10 é representada pela linha pontilhada-tracejada (-⋯-).

Nota-se que a simulação 10 obteve velocidades verticais maiores que as simulações de Feng e Michaelides (2004) e Wang, Fan e Luo (2008). Observa-se que, nas simulações com dois corpos rígidos, o corpo mais alto segue e toca o corpo mais baixo. Este fenômeno também ocorre na simulação 15, porém o corpo 1 fica isolado dos corpos 2 e 3.

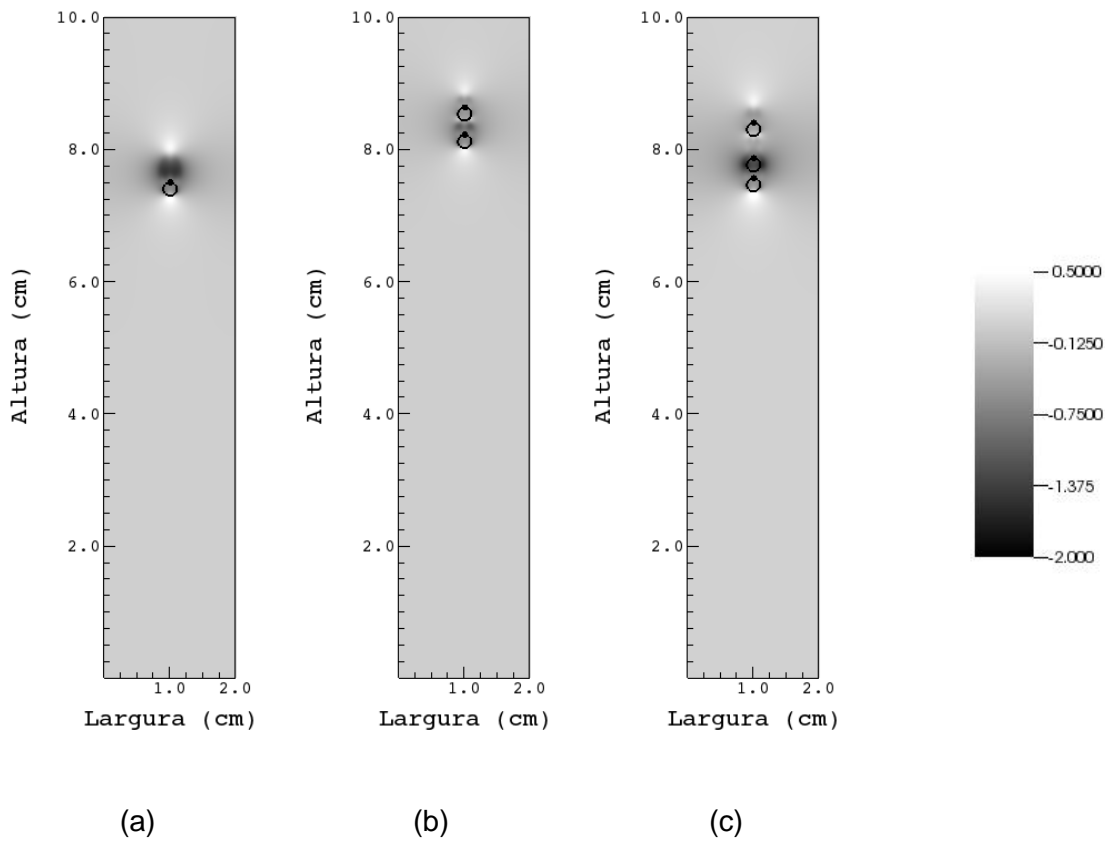
Figura 3.15 – Comparação entre o resultado da simulação 10 e os resultados de Feng e Michaelides (2004) e Wang, Fan e Luo (2008).



Fonte: Feng e Michaelides (2004) e Wang, Fan e Luo (2008)

Pode-se visualizar na figura 3.16 os campos de pressão das simulações 14, 10 e 15, representados respectivamente por 3.16 (a), (b) e (c), nos tempos  $t=1,5$  s,  $t=0,75$  s e  $t=0,9$  s, respectivamente.

Figura 3.16 – Campos de pressão das simulações 14, 10 e 15.



Fonte: Próprio autor.

Nota-se na figura 3.16 (a) que há uma região de alta pressão abaixo do corpo 2, criando uma resistência ao movimento vertical, e uma região de baixa pressão acima do corpo 2. Na figura 3.16 (b), nota-se que a região de baixa pressão do corpo mais baixo neutraliza a região de alta pressão abaixo do corpo superior, o que propicia sua aproximação. O mesmo ocorre na figura 3.16 (c), porém com maior intensidade entre os corpos 2 e 3, enquanto a região de pressão positiva abaixo do corpo 1 ainda é considerável.

Na tabela 3.8 é apresentada a comparação entre os valores do número de Reynolds terminal.

Tabela 3.8 – Comparação do número de Reynolds terminal entre diferentes trabalhos.

	$\mu=0,10$ [g/(cm.s)]		$\mu=0,01$ [g/(cm.s)]	
	$\rho_p/\rho=1,25$	$\rho_p/\rho=1,50$	$\rho_p/\rho=1,25$	$\rho_p/\rho=1,50$
<b>Wan Turek (2007)</b>	17,15	32,76	270,77	465,52
<b>Wang, Fan e Luo (2008)</b>	17,31	-	-	503,38
<b>Uhlman (2005)</b>	-	-	-	495,00
<b>Mariano (2011)</b>	17,73	33,62	293,96	527,51
<b>Presente trabalho</b>	18,88	35,59	312,27	556,58

Fonte: Mariano, 2011 (adaptada).

A diferença no valor do número de Reynolds terminal em relação a Mariano (2011) está listado na tabela 3.9 em valores absoluto e relativo e também graficamente na figura 3.17.

Tabela 3.9 – Variação dos valores de Reynolds terminal em relação aos valores obtidos por Mariano (2011).

	$\mu=0,10$ [g/(cm.s)]		$\mu=0,01$ [g/(cm.s)]	
	$\rho_p/\rho=1,25$	$\rho_p/\rho=1,50$	$\rho_p/\rho=1,25$	$\rho_p/\rho=1,50$
<b>Absoluto</b>	1,15	1,97	18,31	29,07
<b>Relativo</b>	6,49%	5,86%	6,23%	5,51%

Fonte: Próprio autor

A variação tem média de 6% e o principal fator desta variação é o comprimento do domínio no eixo y, que no presente trabalho teve valor de  $L_y/D=12$ , e em Mariano (2011) teve valor de  $L_y/D=8$ .

## 4. Conclusões e trabalhos futuros

### 4.1. Conclusões

O método IMERSPEC utilizado para simular a queda de corpos rígidos demonstrou ser eficaz, principalmente para a queda de um corpo. O refinamento da malha demonstrou que os resultados quase não variam durante a queda, porém, variam consideravelmente quando ocorre o choque com o fundo do recipiente.

Os tempos de simulação, entretanto, variam bastante de acordo com a resolução da malha utilizada. A implementação do método RK46 para o cálculo de velocidades, em substituição ao método de Euler, embora promissora, não obteve êxito até o momento.

As simulações com dois corpos demonstraram, novamente, a forte influência que a força de contato entre os corpos rígidos influencia os resultados da simulação, mais especificamente o passo de tempo. Observou-se também que a falta de paredes laterais e instabilidades levaram ao encerramento precoce das simulações com mais de um corpo.

#### 4.1. Trabalhos futuros

Pode-se investigar, em trabalhos futuros, a influência nos resultados de valores de parâmetros não testados.

Deve-se investigar o motivo do encerramento precoce das simulações com mais de um corpo, além de determinar o motivo da aceleração maior dos corpos na simulação 10 em relação às simulações de Feng e Michaelides (2004) e Wang, Fan e Luo (2008). Pode-se ainda determinar os parâmetros de queda dos corpos, muito importante para as simulações de sedimentação, onde são utilizados floculantes.

E também a implementação do método de Runge-Kutta de alta ordem para o cálculo de velocidades e posições, para se simular com passos de tempo menos restritivos.

## 5. Referências

ALLAMPALLI, V.; HIXON, R.; NALLASAMY, M.; SAWYER, S. **High-accuracy large-step explicit runge - kutta (*hale - rk*) schemes for computational aeroacoustics**. *Journal of Computational Physics*, v. 228, p. 3837-3850, 2009.

BUTKOV, E.; **FÍSICA MATEMÁTICA**; LTC, Rio de Janeiro, 1988.

CUNHA, L. N., **Simulação numérica de escoamentos sobre aerofólios em múltiplas configurações**. 2016. Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

DASH, S. M. LEE, T.S.,. 2015. **Two spheres sedimentation dynamics in a viscous liquid column**. *Computers & Fluids*. 123. 218 - 234. 10.1016/j.compfluid.2015.10.003.

FENG, Z.G., MICHAELIDES, E.E., 2004. **The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems**. *J. Comput. Phys*. 195, 602-628.

KINOSHITA, D., **Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada da fronteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier**. 2015. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

MALISKA, C. R.; **TRANSFERENCIA DE CALOR E MECANICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL**, 2 ed. revista e ampliada – Rio de Janeiro LTC 2014

MARIANO, F. P.; **SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES USANDO UMA HIBRIDAÇÃO DAS METODOLOGIAS FRONTEIRA IMERSA E PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER**; Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2011.

NASCIMENTO, A. A., **Métodos Pseudospectral de Fourier e Fronteira Imersa Aplicado a escoamentos Simplificados de Engenharia de Perfuração**. 2016. 190f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia

NUNES, Janaina Ferreira; **ESTUDO DA SEDIMENTAÇÃO GRAVITACIONAL DE SUSPENSÕES FLOCULENTAS**, Uberlândia, 2008, disponível em <<https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/15108/1/Janaina.pdf>> acesso em 23 de maio de 2019.

PETRI, Larissa Alves; **MÉTODOS DE FRONTEIRA IMERSA EM MECÂNICA DOS FLUIDOS**; Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2010

PUPIN, Josiane. **Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens**. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2011

RUGGIERO, Marcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha; **CÁLCULO NUMÉRICO: ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS**; 2 ed.; São Paulo; Makron Books; 1996

UHLMANN, M. **An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows**. *Journal of Computational Physics*, v. 209, p. 448{476, 2005.

WAN, D., TUREK, S., 2007. **An efficient multigrid-FEM method for the simulation of solid-liquid two phase flows**. *J. Comput. Appl. Math.* 203, 561–580.

WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. **Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles**. *International journal of Multiphase Flow*, v. 34, p. 283{302, 2008.

WHITE, Frank M.; **MECÂNICA DOS FLUIDOS**; ed 6, 2011, AMGH Editora, Porto Alegre

## Apêndice A – Plano de trabalho

### Título: Simulações de sedimentação de partículas usando o método IMERSPEC bidimensional

<b>Dados</b>	<b>Miguel Leonardo de Araújo Almeida</b>	
<b>Nº de Matrícula</b>	201200456	
<b>Telefone</b>		
<b>E-mail</b>		
<b>Orientador:</b>	Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano	
<b>Curso:</b>	Eng. Elétrica ( ) Eng. de Computação ( ) Eng. Mecânica ( X )	

#### Resumo

A sedimentação de partículas envolve a movimentação de corpos sólidos no interior de um meio fluido, caracterizando um escoamento bifásico. É uma classe de problemas relacionados com Interação Fluido-Estrutura (FSI) e de grande interesse para as indústrias química, farmacêutica e alimentícia, além disso, escoamentos ambientais relacionados com dispersão de poluentes também podem ser modelados com esse problema. O método da Fronteira Imersa se destaca no âmbito da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) para resolver problemas de FSI e é proposto no presente trabalho, juntamente com o método pseudo-espectral de Fourier para realizar simulações de sedimentação de partículas. O método pseudo-espectral de Fourier tem uma excelente acurácia e velocidade de processamento quando comparado com outros métodos de alta ordem de convergência justificando o seu uso. O presente projeto visa simular a queda de partículas em um meio fluido e comparar os resultados com demais trabalhos disponíveis.

#### I. Objetivos

Os objetivos macros do presente projeto são:

- Habilitar o estudante a trabalhar com Dinâmica dos Fluidos Computacional;
- Habilitar o aluno na elaboração e execução de projetos.

Os objetivos específicos do presente projeto são:

- Simular escoamento de sedimentação de partículas;
- Simular escoamento de sedimentação de partículas usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência numérica.

#### II. Metodologia

A metodologia utilizada no presente projeto segue:

- 1) Aprender a usar o programa computacional IMERSPEC bidimensional;
- 2) Simular escoamentos de sedimentação de partículas com refinamento de malha;
- 3) Simular escoamentos de sedimentação de partículas alterando o avanço temporal.

#### III. Cronograma

O cronograma das atividades a serem realizadas é apresentado na Tabela 1.

Tabela A.1 – Cronograma para o Primeiro Semestre Letivo de 2019.

<b>Etapas do Projeto</b>	<b>MAR</b>	<b>ABR</b>	<b>MAI</b>	<b>JUN</b>	<b>JUL</b>
1) Pesquisa Bibliográfica	X	X	X		
2) Simular escoamentos de sedimentação de partículas: com mudança nas propriedades físicas.	X	X			
3) Simular escoamentos com sedimentação de duas partículas	X	X	X		
4) Redação do trabalho final			X	X	X
5) Defesa do projeto final de curso					X