

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**

**Equações clássicas de Yang Mills com fontes**

**Davi de Assis Camargos**

Goiânia, Goiás

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

### 1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome(s) completo(s) do(a)(s) autor(a)(es)(as): **Davi de Assis Camargos**

Título do trabalho: **Equações clássicas de Yang Mills com fontes**

### 2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [ X ] SIM [ ] NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

#### Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

**Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Luis Braghin, Professor do Magistério Superior**, em 08/02/2024, às 17:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Davi De Assis Camargos, Discente**, em 08/02/2024, às 17:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4366384** e o código CRC **72D9764F**.

---

Referência: Processo nº 23070.059764/2023-88

SEI nº 4366384

**Davi de Assis Camargos**

## **Equações clássicas de Yang Mills com fontes**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Goiás como pré-requisito para a obtenção do título de bacharel no curso de Física.

**Orientador: Prof. Dr. Fábio Luís Braghin**

Goiânia, Goiás

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Camargos, Davi de Assis  
Equações clássicas de Yang Mills com fontes [manuscrito] / Davi de Assis Camargos. - 2024.  
Ix, 60 f.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Luís Braghin.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Física, Goiânia, 2024.  
Bibliografia. Apêndice.  
Inclui lista de figuras.

1. Teoria Clássica de Campos. 2. Equações de Yang-Mills com fontes . 3. Cromodinâmica . I. Braghin, Fábio Luís, orient. II. Título.

CDU 539.12



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 02 dias do mês de fevereiro de 2024, a partir das 10h00min, **na sala 231 do bloco II do IF**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do estudante do curso de Física, Bacharelado, **Davi de Assis Camargos**, matrícula 202005184, para apresentar sua monografia intitulada: “**Equações clássicas de Yang Mills com fontes**”. A banca examinadora foi composta pelos professores **Fábio Luis Braghin** (IF/UFG), **Salviano de Araújo Leão** (IF/UFG) e **Rômulo Cesar Rougemont Pereira** (IF/UFG). A sessão pública de Defesa de TCC foi aberta pelo Presidente da Banca Examinadora, Professor Fábio Luis Braghin (Orientador), que na sequência passou a palavra para o estudante apresentar sua monografia. Após a exposição, a Banca Examinadora realizou a arguição do estudante. Ao finalizar a arguição, a Banca reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da monografia. A Banca atribuiu ao estudante a nota **9,00**, este foi **APROVADO** na disciplina de TCC. Proclamados os resultados pelo Professor Fábio Luis Braghin (Presidente), foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Luis Braghin, Professor do Magistério Superior**, em 02/02/2024, às 17:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Salviano De Araujo Leao, Professor do Magistério Superior**, em 02/02/2024, às 18:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Romulo Cesar Rougemont Pereira, Professor do Magistério Superior**, em 02/02/2024, às 18:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4343730** e o código CRC **286EF41D**.

---

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus pais, Osmar e Noemi, a minha irmã, Luiza, por todo o apoio que me deram durante o curso. Um agradecimento também a todos os outros familiares, avôs (Raimundo e Gasparino), vó (Coraci), tios e primos pelos conselhos que me deram, em especial aos meus primos e amigos Gustavo e Lucas.

Agradeço também a todos os meus amigos de faculdade, em especial ao Carlos, Olegário, Guilherme e Lucas Ferreira por todo o tempo divertido que passamos ao longo da graduação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Luís Braghin, por toda a paciência, auxílio e conhecimento compartilhado durante esse período da iniciação científica.

A todos os outros professores que contribuíram para a minha formação.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro durante boa parte da iniciação científica.

”Em algum lugar, algo incrível está  
esperando para ser descoberto.”

---

Carl Sagan

---

# RESUMO

Fundamentada no formalismo Lagrangiano, a teoria de campos de forma geral tem vastas aplicações dentro de diversas áreas da física. Nesse sentido, ao aplicá-la em conceitos relacionados às interações fortes no nível fundamental, formula-se a Cromodinâmica, com base nisso é possível estabelecer equações de movimento como as de Yang-Mills (1). Nesse trabalho analisamos suas aplicações na teoria clássica de campos em conjunto com outras expressões onde chegamos em equações diferenciais não abelianas. A motivação principal deste trabalho é verificar se o monopolo cromo-magnético abeliano (o monopolo de Schwinger) pode ser considerado como solução das equações não abelianas de Yang-Mills com fontes.

**Palavras-chave:** Teoria Clássica de Campos, Equações de Yang-Mills com fontes e Cromodinâmica.

---

# ABSTRACT

Structured in the Lagrangian formalism, the field theory has extensive applications inside many areas of physics. In this way, when used in concepts associated with Chromodynamics, it is possible to establish motion equations such as those of Yang-Mills (1). In this work, we analyze the consequences of these ideas in classical field theory with other mathematical expressions, thus, we deduce non-abelian differential equations. The main of this work is verify if the abelian chromo-magnetic monopole (the Schwinger monopole) could be considered as solution of the Yang-Mills non-abelian equations with sources.

**Key-Words:** Classical Field Theory, Yang-Mills Equations with sources and Chromodynamics.

# Lista de Figuras

4.1	Caminho fechado orientado positivamente e centrado no ponto $(a_0, b_0)$ .	23
4.2	Dois caminhos fechados $C_1$ e $C_2$ orientados positivamente e centrados, respectivamente, em $(a_0, b_0)$ e $(a'_0, b'_0)$ .	24
6.1	Monopolo com a corda de Dirac.	37
6.2	Sistema de coordenadas esféricas.	38

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Teoria de grupos</b>	<b>12</b>
2.1	Definição de grupo . . . . .	12
2.1.1	Subgrupos . . . . .	13
2.2	Grupos de Lie . . . . .	13
2.2.1	Exemplo de gerador . . . . .	13
2.3	Álgebra de Lie . . . . .	15
2.3.1	Constantes de estrutura e representação adjunta . . . . .	15
2.4	Grupo SU(N) e SU(3) . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Teoria de campos</b>	<b>18</b>
3.1	Equação de Euler-Lagrange . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Transformações de gauge e equações de Yang-Mills</b>	<b>21</b>
4.1	Campo de gauge e derivada covariante . . . . .	21
4.2	Tensor intensidade de campo . . . . .	22
4.3	Lagrangiana da cromodinâmica clássica . . . . .	26
4.4	Equações de Yang-Mills . . . . .	27
4.5	Identidade de Jacobi . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Cromodinâmica</b>	<b>29</b>
5.1	Cores . . . . .	29
5.2	Sabores . . . . .	30
5.3	Campos da cromodinâmica . . . . .	31
5.4	Equações em termos dos campos cromo-elétricos e cromo-magnéticos	32
5.4.1	Potenciais . . . . .	34

---

<b>6 Monopolo</b>	<b>36</b>
6.1 Corda de Dirac . . . . .	36
6.2 Monopolo de Schwinger . . . . .	40
6.3 Conexões com a cromodinâmica . . . . .	41
<b>7 Soluções</b>	<b>42</b>
7.1 Análise das componentes do campo de calibre no espaço interno de cores	42
7.2 Equações dos subgrupos . . . . .	43
7.2.1 Simetrias entre as equações dos subgrupos . . . . .	44
7.2.2 Soluções para o subgrupo I-spin . . . . .	45
7.2.3 Ansatz a cerca da densidade de corrente . . . . .	47
7.2.4 Análise para o potencial $\vec{A}_8$ . . . . .	48
<b>8 Conclusão</b>	<b>51</b>
<b>Apêndice</b>	<b>55</b>

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

A teoria quântica de campos explica e concilia 3 forças fundamentais do universo: forte, fraca e eletromagnética. Em específico, a QCD<sup>1</sup> fundamenta e explica como que ocorrem as interações entre partículas elementares conhecidas como quarks e glúons, diretamente relacionadas com a força forte.

Com base nisso, há também o que pode ser chamado de cromodinâmica clássica, que pode ser considerada uma aproximação da QCD, como quando há, por exemplo, um alto número de partículas (2,3), além de ser um ponto de partida para se entender a QCD. Com base nisso, esse trabalho tem como intuito analisar a Cromodinâmica fundamentada na teoria clássica de campos.

Nesse sentido, o capítulo 2 analisa conceitos gerais acerca da teoria de grupos e algumas aplicações na Cromodinâmica, como esse trabalho trata sobre teoria de campos também, o capítulo 3 fundamenta algumas ideias a cerca do formalismo Lagrangiano, no capítulo 4 discorremos sobre transformações de calibre e obtemos algumas equações de movimento incluindo as equações de Yang-Mills com fontes, alguns aspectos gerais da Cromodinâmica são discutidos no capítulo 5, ideias a cerca do monopolo cromo-magnético são discutidos no capítulo 6, logo com o uso de expressões como a equação de Yang-Mills com fontes e a identidade de Jacobi (4) no capítulo 7 é possível achar soluções que estabelecem alguns sentidos físicos dentro das aproximações já consideradas por ser uma teoria clássica de campos, algumas

---

<sup>1</sup>QCD em inglês refere-se a Quantum Chromodynamics (Cromodinâmica Quântica).

conclusões e análises são feitas no capítulo 8.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## TEORIA DE GRUPOS

A teoria de grupos é de fundamental importância dentro da cromodinâmica, pois a ideia de simetria levou a conceitos como cor e sabor<sup>1</sup> (5). Em específico, será mostrado nesse capítulo, conceitos gerais de teorias de grupos e depois associá-los ao grupo especial unitário SU(3).

### 2.1 Definição de grupo

Um grupo  $G$  é um conjunto de elementos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , que é definido por meio de quatro condições (6):

- Os elementos do grupo  $G$   $a$  e  $b$  devem estabelecer a relação de fechamento sobre a operação denominada como 'multiplicação'<sup>2</sup> dado pelo carácter  $*$ , ou seja,  $a*b=c$  sendo que  $c$  pertence à  $G$ .
- Multiplicação é associativa, ou seja,  $(a*b)*c=a*(b*c)$ .
- O conjunto deve conter um elemento identidade ( $e$ ), tal que  $e*b=b=b*e$ , sendo  $b$  qualquer elemento do grupo.
- Deve haver a inversa para cada elemento do grupo, de modo que  $a * a^{-1} = e$ .

---

<sup>1</sup>Conceitos que serão mais detalhados no capítulo 5.

<sup>2</sup>O termo multiplicação está entre aspas para evidenciar que a operação colocada não é a multiplicação usualmente feita, e sim uma denominação para uma lei de combinação estabelecida dentro do grupo, mas a partir de agora será colocada apenas como multiplicação sem aspas.

Quando os elementos de um grupo comutam entre si, ou seja,  $a*b=b*a$ , eles são denominados *abelianos*. Do mesmo modo, quando a ordem das componentes afetam no resultado, o grupo é *não abeliano*.

### 2.1.1 Subgrupos

Vamos considerar um conjunto  $H$  tal que  $H \subset G$ . Se  $H$  cumprir todas as quatro condições que devem ser feitas para um grupo, logo  $H$  é um subgrupo de  $G$ . Um grupo sempre tem 2 subgrupos triviais, um é composto pelo próprio grupo  $G$  e outro é constituído apenas pelo elemento identidade (6).

Estruturando alguns conceitos fundamentais de teoria de grupos e dada a abrangência desse assunto dentro da matemática e da física, iremos focar nesse trabalho apenas em uma parte dessa teoria, que são os grupos de Lie e a Álgebra de Lie.

## 2.2 Grupos de Lie

O grupo de Lie é um grupo cujo seus elementos são funções suaves, ou seja, contínuas e diferenciáveis de modo que podem ser escritas como (7):

$$l = \exp[i\epsilon_a T^a] \quad (2.1)$$

Sendo  $l$  um elemento do grupo de Lie,  $\epsilon_a$  parâmetros reais e  $T^a$  os geradores do grupo<sup>3</sup>. Para termos uma melhor compreensão do que são geradores, podemos colocar o seguinte exemplo para o grupo relacionado às rotações  $SO(2)$ .

### 2.2.1 Exemplo de gerador

Ao analisar os grupos de Lie é possível estudar elementos infinitesimalmente próximos. Pegando uma componente do grupo de Lie  $SO(2)$  (8), sendo representado pela matriz:

$$l(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

<sup>3</sup>Nota-se a presença da convenção de Einstein para somatórios, que é mais detalhado no Apêndice Alguns aspectos sobre relatividade.

De modo que pode ser dividido na forma matricial da seguinte maneira:

$$l(\theta) = \mathbb{I}\cos(\theta) + i\sigma_2\text{sen}(\theta) \quad (2.3)$$

Sendo  $\mathbb{I}$  a matriz identidade e  $\sigma_2$  a matriz de Pauli  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ .

Logo, é possível relacionar com uma exponencial complexa em função de matrizes dado pela expansão de Taylor (9):

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} \quad (2.4)$$

$$\text{sen}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.5)$$

Para a expansão na exponencial:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (2.6)$$

Ao fazer a relação para  $e^{i\sigma_2\theta}$  e levando em consideração que  $\sigma_2^2 = \mathbb{I}$ :

$$e^{i\sigma_2\theta} = \mathbb{I} + i\sigma_2\theta - \mathbb{I}\frac{\theta^2}{2} - \frac{i\sigma_2\theta^3}{3!} + O(\theta^4) \quad (2.7)$$

Se compararmos os primeiros termos de (2.7) com (2.4) e (2.5) em conjunto com (2.3), chegamos que:

$$l(\theta) = e^{i\sigma_2\theta} = \mathbb{I}\cos(\theta) + i\sigma_2\text{sen}(\theta) \quad (2.8)$$

Cogitando que  $\theta \cong 0$ , podemos estruturar que  $\sigma_2\theta = \varepsilon T$ , sendo  $T$  uma matriz e  $\varepsilon$  uma componente infinitesimal, de forma que em uma maneira generalizada a relação será:

$$f = e^{i\varepsilon T} \quad (2.9)$$

Sendo  $T$  definido como os geradores do grupo. No caso do exemplo que utilizamos, o grupo  $SO(2)$  tem como gerador a matriz de Pauli:  $\sigma_2$ . Onde ele cumpre também a propriedade que deve ser satisfeita por todos os geradores que é:  $\text{Tr}(T)=0$ , onde é possível demonstrar considerando  $L$  uma álgebra de Lie, de modo que  $e^L \rightarrow G$ , onde

$G$  é o grupo de Lie associado. Sendo  $L$  uma álgebra de Lie, temos que  $[L, L] \rightarrow L$ , ou seja, o comutador de 2 elementos de  $L$  é um elemento de  $L$ ; como o comutador definindo  $L$  é antissimétrico,  $[T_a, T_b] = -[T_b, T_a]$ , ele possui traço nulo. Como qualquer elemento de  $L$  pode ser escrito em termos de combinações lineares de comutadores de outros elementos de  $L$  e dada a linearidade do traço, segue que  $\text{Tr}[T] = 0$  para todo  $T$  em  $L$ .

## 2.3 Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial  $G$ , onde  $G \times G \rightarrow G$ , ou seja, o produto de elementos de  $G$  levará a um outro elemento pertencente ao mesmo espaço vetorial  $G$  (6). Levando em consideração os seus elementos dados por  $A, B$  e  $C$ , ao fazer os produtos dados pelo comutador  $[ , ]$ , eles devem estabelecer as seguintes propriedades que toda álgebra deve ter, a relação entre os grupos de Lie e a álgebra de Lie é que a álgebra é definida por meio dos geradores relacionados aos elementos do grupo:

- Bilinearidade:

$$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C] \quad (2.10)$$

$$[A, aB + bC] = a[A, B] + b[A, C] \quad (2.11)$$

- Anti-simetria:

$$[A, B] = -[B, A] \quad (2.12)$$

- A identidade de Jacobi, dada por:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (2.13)$$

### 2.3.1 Constantes de estrutura e representação adjunta

É pertinente destacar que os geradores obedecem às relações da Álgebra de Lie, que podem ser colocadas em termos das constantes de estrutura que são fundamen-

tadas por meio da representação adjunta<sup>4</sup> (5) construídas por meio da expressão:

$$[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k \quad (2.14)$$

Onde a constante de estrutura tem a seguinte propriedade antissimétrica:

$$f_{ijk} = -f_{jik} \quad (2.15)$$

## 2.4 Grupo SU(N) e SU(3)

Um grupo de Lie de extremo interesse para a análise na área da cromodinâmica está relacionado ao grupo especial unitário SU(3). Para o compreendermos melhor, devemos destacar o grupo unitário U(N) (5), que é composto por matrizes  $N \times N$  complexas  $U$ , que devem seguir a condição  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$ , onde  $U^\dagger$  é o transposto conjugado de  $U$ , e sua dimensão  $n$  será  $n=N^2$ .

Um subgrupo de U(N) é o SU(N) que apresenta as mesmas condições que são colocadas para o grupo unitário, com o detalhe de que há mais uma relação a ser satisfeita que é  $\det U = 1$ .

As simetrias associadas aos grupos SU(N) podem ser globais (sabor) ou locais (cor). A simetria local requer a introdução dos campos de gauge, tal que de acordo com o teorema de Noether (10), a simetria implementada por meio de sua lagrangiana deverá se manifestar, antes de mais nada, na conservação de quantidades de fundamental importância para a física. Uma simetria global ocorre quando a transformação sobre os campos é feita da mesma forma em cada ponto do espaço-tempo, enquanto que uma simetria local atua de forma diferente em cada ponto do espaço-tempo e, por essa razão, sendo transformações geralmente dependentes de ponto, requerem a introdução de campos de calibre para compensar as diferentes formas da transformação em pontos diferentes do espaço-tempo mantendo a teoria invariante.

É válido destacar também que essas são simetrias internas, ou seja, não são simetrias nas coordenadas espaço-temporais, e sim nos campos, portanto, uma operação

<sup>4</sup>A representação fundamental é a representação irredutível não-trivial de dimensão mais baixa de um grupo, já a representação adjunta tem a mesma dimensão da álgebra de Lie associada ao grupo considerado, correspondendo ao número de geradores desta álgebra.

de transformação que atua sobre os campos da teoria sem alterar suas coordenadas espaço-temporais, mantendo a teoria invariante.

Nessa perspectiva, o grupo  $SU(3)$  é de fundamental importância para a análise da cromodinâmica, visto que ele está associado às simetrias de cor e de sabor, que são propriedades importantes para as partículas presentes na interação forte: os quarks e os glúons. No caso da simetria de sabores,  $SU(3)$  dita o setor quarks leves com apenas 3 sabores<sup>5</sup> (5), sendo que estes quarks são definidos na representação fundamental. Levando em consideração que  $SU(3)$  apresenta 8 geradores  $T_a$ , sendo  $a=1,\dots,8$ , que são dadas pela representação adjunta, cuja a álgebra é melhor detalhada no Apêndice Grupo  $SU(3)$ .

---

<sup>5</sup>Os sabores são: down, up e strange.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# TEORIA DE CAMPOS

As teorias de campos estão presentes em diversas áreas da Física, que vão desde a gravitação até os estudos de partículas subatômicas. A interação à distância representada por um campo começou com a teoria da gravitação e ficou em evidência no século XIX com a estruturação da teoria eletromagnética (11). No século XX, com o advento da mecânica quântica, surgiu a necessidade de compatibilizar essa nova teoria com a relatividade dado que as velocidades das partículas subatômicas podem chegar a valores muito altos, próximos aos da luz. Com esse intuito de conciliar essas duas ideias houve o surgimento da teoria quântica de campos (12).

Dentro da teoria de campos, o Eletromagnetismo se tornou muito bem estruturado (13). Nesse sentido, inspirado nele, para as interações fortes (QCD) foi estabelecida uma fundamentada teoria que possibilitou entender como que ocorrem as relações entre partículas elementares que sentem as interações fortes, como os quarks e os glúons, chamada de Cromodinâmica.

Como normalmente as teorias de campos são fundamentadas por meio do formalismo Lagrangiano, iremos aprofundar um pouco a cerca desse conceito nesse capítulo.

### 3.1 Equação de Euler-Lagrange

Sabemos que na mecânica clássica a Lagrangiana pode ser escrita em termos das coordenadas generalizadas  $q_k(t)$ , de suas respectivas velocidades  $\dot{q}_k(t)$  e também do tempo. Para um sistema discreto, com partículas no espaço Euclidiano, a Lagrangiana é associada às suas componentes  $k$ , que representam seus graus de liberdade e variam apenas por números inteiros. Para o caso contínuo, a coordenada é associada a cada ponto do espaço<sup>1</sup>, tendo, portanto, infinitos graus de liberdade, que para o caso unidimensional seria a coordenada  $x$ , sendo representada por:  $\varphi_x(t)$  ou por  $\varphi(x, t)$ . O termo cinético é expresso por  $\dot{\varphi}_x(t) = \partial_t \varphi(x, t)$ . Para o caso de termos finitos há a Lagrangiana em termos de um somatório das componentes  $k$ , já para um sistema contínuo ela será escrita na forma de uma integral no espaço de uma função chamada de densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}$ <sup>2</sup>. Supomos que densidade de lagrangiana depende das primeiras derivadas espaciais e temporais, de modo que a ação é expressa como (10):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \mathcal{L} \left( \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (3.1)$$

Fazendo uma variação da ação:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \mathcal{L} = 0 \quad (3.2)$$

Logo:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta \varphi' \right) = 0 \quad (3.3)$$

Estabelecendo a notação:

$$\delta \dot{\varphi} = \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial t} \quad \delta \varphi' = \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} \quad (3.4)$$

Calculando a integral para a segunda componente usando integral por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>No caso de uma teoria de campos relativística, um campo definido no espaço-tempo tem infinitos graus de liberdade, para todos os pontos dessas 4 dimensões.

<sup>2</sup>A densidade de Lagrangiana é estabelecida de acordo com a relação com a Lagrangiana:  $L = \int dx \mathcal{L}$ . para um dimensão e  $L = \int d^3x \mathcal{L}$ . para 3 dimensões espaciais

Impondo que nos extremos as variações das funções irão zerar<sup>3</sup>, logo o resultado será:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi \quad (3.6)$$

Fazendo um raciocínio análogo para o terceiro termo chega-se que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}'} \delta \varphi' = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \delta \varphi \quad (3.7)$$

Desse modo chegamos na variação da ação dada por:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \right) \delta \varphi = 0 \quad (3.8)$$

Dado que a variação nos campos  $\delta \varphi$  é arbitrária, chegamos na conclusão que o termo dentro da integral deve ser nulo, resultando na equação de Euler-Lagrange (10):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) = 0 \quad (3.9)$$

É possível fazer uma generalização para 3 dimensões na equação (3.9), de modo que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \varphi)} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Podemos fazer uma generalização para a relatividade (esquematizada no Apêndice Alguns aspectos sobre relatividade), onde chegamos que no espaço de Minkowski a equação (3.10) fica (14):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Onde já está sendo estabelecida a convenção de Einstein, em que índices repetidos representam um somatório (essa ideia será feita ao longo de todo o trabalho). No caso de quatro dimensões, temos que as letras gregas variam de 0 a 3, sendo 0 a componente temporal e 1, 2 e 3 as componentes espaciais (8).

<sup>3</sup>Semelhante ao problema de uma corda vibrante, onde seus extremos irão estar fixos (10).

---

---

## CAPÍTULO 4

---

# TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE E EQUAÇÕES DE YANG-MILLS

As transformações de gauge são de extremo interesse na física, tendo evidência significativa quando foi aplicada ao eletromagnetismo, quando elas são aplicadas pode ocorrer o que é conhecido como invariância de gauge<sup>1</sup>. Nesse capítulo será destacada essa teoria de calibre, logo após será estabelecida a Lagrangiana, que quando aplicada na equação de Euler-Lagrange, fornecerá as equações de Yang-Mills.

### 4.1 Campo de gauge e derivada covariante

Ao tratar de uma teoria com férmions (os quarks), para que seja invariante de gauge, deve existir campos de bósons vetoriais  $A_\mu$ . Onde são chamados de campos de gauge dados pelo somatório:

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_a \quad (4.1)$$

Sendo  $T_a$  os geradores do grupo, sendo 'a' um índice interno de simetria de calibre local de cor.

---

<sup>1</sup>Onde gauge é traduzido do inglês como calibre.

A transformação do campo é dada a seguir (12, 14):

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (4.2)$$

Onde  $U^\dagger = U^{-1}$ , sendo operadores unitários<sup>2</sup> que são dados por:

$$U = e^{-i\alpha(x)^a T^a} \quad (4.3)$$

Nesse sentido, é válido destacar uma derivada que é invariante sobre essa transformação (1) (demonstrado no Apêndice Transformação de gauge). Desse modo, podemos definir a derivada covariante  $D_\mu$  como:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (4.4)$$

Quando são aplicadas essas transformações e há uma invariância de alguma expressão sobre essas modificações nos campos há o que são chamadas de simetrias de gauge.

Com esses conceitos estabelecidos, vamos introduzir outra expressão importante dentro da cromodinâmica que é o tensor intensidade de campo .

## 4.2 Tensor intensidade de campo

Façamos uma transformação finita de gauge em um caminho fechado C (12, 14):

$$g(C, A) = Pexp \left( i \oint_C d\vec{x} \cdot \vec{A}(x) \right) \quad (4.5)$$

Onde P é a orientação do caminho.

Vamos analisar aqui para o caso de 2 dimensões, mas que contém a parte essencial do cálculo e pode ser generalizado para 4 dimensões. Desse modo, iremos realizar uma expansão de até segunda ordem para essa exponencial (12):

$$g(C, A) = \mathbb{I} + i \oint_C dx \cdot A(x) - \oint_{C_2} \oint_{C_1} dx_2 \cdot A_2(x) dx_1 \cdot A_1(x) + O(l^3) \quad (4.6)$$

<sup>2</sup>Sendo  $U^\dagger$  o conjugado transposto de U.

Para calcular a primeira integral de linha de caminho fechado foi utilizada a seguinte trajetória:

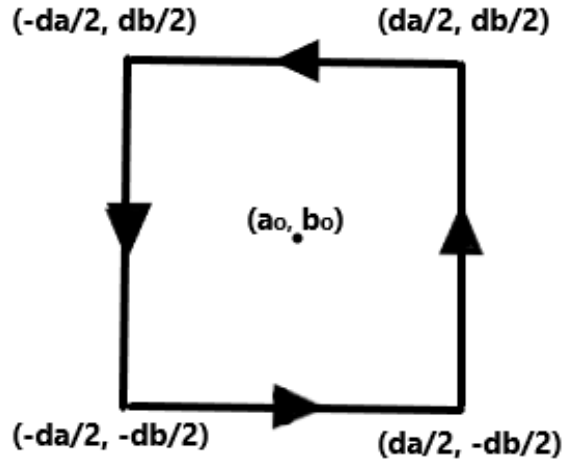


Figura 4.1: Caminho fechado orientado positivamente e centrado no ponto  $(a_0, b_0)$ .

Considerando esse percurso da figura 4.1, foi feita uma expansão:

$$A(x) \cdot dx = A_a \left( a_0, b_0 - \frac{db}{2} \right) da + A_b \left( a_0 + \frac{da}{2}, b_0 \right) db - \\ - A_a \left( a_0, b_0 + \frac{db}{2} \right) da - A_b \left( a_0 - \frac{da}{2}, b_0 \right) db \quad (4.7)$$

Fazendo uso da expansão em série de Taylor até segunda ordem nos potenciais  $A_a$  e  $A_b$ :

$$\left( A_a + \frac{1}{2} \partial_b A_a db \right) da + \left( A_b - \frac{1}{2} \partial_a A_b da \right) db - \left( A_a - \frac{1}{2} \partial_b A_a db \right) da - \left( A_b + \frac{1}{2} \partial_a A_b da \right) db \quad (4.8)$$

Logo:

$$A_a da + \frac{1}{2} \partial_b A_a db da + A_b db - \frac{1}{2} \partial_a A_b da db - A_a da + \frac{1}{2} \partial_b A_a db da - A_b db - \frac{1}{2} \partial_a A_b da db \quad (4.9)$$

Chegamos, portanto, em:

$$(\partial_b A_a - \partial_a A_b) db da \quad (4.10)$$

Para a segunda integral, fazemos os seguintes caminhos fechados infinitesimalmente próximos:

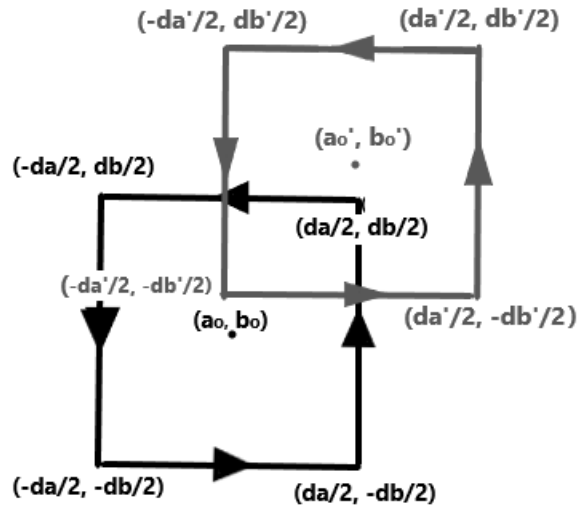


Figura 4.2: Dois caminhos fechados  $C_1$  e  $C_2$  orientados positivamente e centrados, respectivamente, em  $(a_0, b_0)$  e  $(a'_0, b'_0)$ .

Levando em consideração que as partes dos caminhos que sofrem intersecção serão desconsiderados por causa do ordenamento <sup>3</sup>, logo chegou-se que:

$$P(A_a \left( a_0, b_0 - \frac{db}{2} \right) da - A_b \left( a_0 - \frac{da}{2}, b_0 \right) db)(A_{b'} \left( a'_0 + \frac{da'}{2}, b'_0 \right) db' - A_{a'} \left( a'_0, b'_0 + \frac{db'}{2} \right) da') \quad (4.11)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor novamente:

$$P(A_a da + \frac{1}{2} \partial_b A_a db da - A_b db - \frac{1}{2} \partial_a A_b da db)(A_{b'} db' - \frac{1}{2} \partial_{a'} A_{b'} da' db' - A_{a'} da' + \frac{1}{2} \partial_{b'} A_{a'} db' da') \quad (4.12)$$

Estabelecendo a relação de ordenamento P, no qual coloca que haverá uma associação de termos de acordo com a orientação do caminho estabelecido na figura 4.2, em uma relação semelhante a uma multiplicação distributiva, sendo feita, nesse caso, da esquerda para a direita, chegamos na seguinte expressão para termos de até segunda

<sup>3</sup>Em específico o ordenamento temporal, dado que há coordenadas temporais, não poderá haver duas contribuições ao mesmo tempo.

ordem:

$$A_a A_{b'} da db' + A_b A_{a'} db da' \quad (4.13)$$

Da forma que os caminhos foram criados podemos considerar que eles foram distanciados por caminhos infinitesimalmente próximos, logo podemos fazer  $da \rightarrow da'$  e  $db \rightarrow db'$ , pela relação estabelecida na figura 4.1, o vetor área  $dad b$  é positivo de forma que  $dad b = -db da^4$ , portanto, a equação 4.13 pode ser escrita como:

$$(A_b A_a - A_a A_b) db da \quad (4.14)$$

Ao pegar os resultados da equação 4.10 e 4.14:

$$g(C, A) = \mathbb{I} + i \left[ \int \int_S dx_a dx_b (\partial_b A_a - \partial_a A_b + i[A_b, A_a]) \right] + O(l^3) \quad (4.15)$$

Temos, portanto, o fluxo de uma área, obtendo o que poderíamos colocar como um teorema de Stokes generalizado (15), pois ao fazer a integração em caminhos fechados foi possível chegar em um rotacional com termos não abelianos em uma integral de área.

Generalizando para quatro dimensões, dado que os eixos  $a$  e  $b$  são quaisquer eixos perpendiculares, pode-se colocar que  $a = \mu$  e  $b = \nu$ , onde  $\mu$  e  $\nu$  variam de 0 a 3. Portanto, chegamos que:

$$g(C, A) = \mathbb{I} + i \left[ \int \int_S dx^\nu dx^\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + i[A^\mu, A^\nu]) \right] + O(l^3) \quad (4.16)$$

Onde o termo dentro da integral de área pode ser reescalonado em termos de uma constante de acoplamento (16):

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu \quad (4.17)$$

Logo, podemos definir o tensor de força para a cromodinâmica (1):

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig[A^\mu, A^\nu] \quad (4.18)$$

<sup>4</sup>Algo que não foi feito para a integral de apenas um caminho fechado, pois para calculá-la já foi considerada a direção da trajetória, logo não foi preciso fazer essa relação.

Levando em conta a relação entre os geradores do grupo SU(3) que estabelecem a seguinte condição:  $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$ .

É viável escrever o tensor intensidade de campo em termos das constantes de estrutura:

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - gf_a^{bc}A_b^\mu A_c^\nu \quad (4.19)$$

### 4.3 Lagrangiana da cromodinâmica clássica

Com o uso do formalismo Lagrangiano conseguimos impor já na Lagrangiana as simetrias que o sistema físico possa ter. Toda a teoria respeitará estas simetrias (com algumas exceções), como por exemplo: a invariância de Lorentz e conservações de cargas. Logo, iremos analisar a densidade de Lagrangiana para a Cromodinâmica.

Tendo em vista o tensor intensidade de campo  $F_{\mu\nu}$  para a Cromodinâmica, podemos construir a Lagrangiana<sup>5</sup>  $\mathcal{L}$ , de modo que utilizamos a densidade da Lagrangiana de Yang-Mills (1), invariante sobre transformação de gauge, dada por:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}Tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \quad (4.20)$$

Há uma segunda componente que é invariante sobre transformações relativísticas que é o uso da densidade da Lagrangiana de Dirac (7), inspirada na Lagrangiana de Dirac, pois tem acoplamento com campo de gauge de forma a ser invariante de gauge:

$$\bar{\psi}(i\lambda^\mu D_\mu - m)\psi \quad (4.21)$$

Sendo  $D_\mu$  a derivada covariante,  $\lambda^\mu$  as matrizes de Dirac,  $m$  a massa dos quarks e  $\psi$  os spinor de Dirac. Logo chegamos em uma densidade de lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + \bar{\psi}(i\lambda^\mu D_\mu - m)\psi \quad (4.22)$$

Onde ela é invariante sobre transformações de gauge não abelianas ( Apêndice Transformação de gauge).

<sup>5</sup>Lagrangiana agora pode ser entendido como densidade de Lagrangiana.

## 4.4 Equações de Yang-Mills

Utilizando a densidade de Lagrangiana para a cromodinâmica em conjunto com a equação de Euler-Lagrange (3.11), que pode ser colocada em termos dos campos de gauge  $A_\sigma$  (17):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} \right) = 0 \quad (4.23)$$

Foi possível chegar nas equações de movimentos para essas interações. Realizando o cálculo para cada componente da Lagrangiana, chegou-se que:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] = ig\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (4.24)$$

O termo do lado esquerdo da igualdade foi definido como densidade de corrente fermiônica<sup>6</sup>:

$$J^\nu = ig\bar{\psi}\gamma^\nu\psi.$$

Chega-se, dessa maneira, nas equações de Yang-Mills com fontes (17):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu \quad (4.25)$$

Escrevendo por meio das constantes de estrutura:

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu} + gf_{abc}A_\mu^b F_c^{\mu\nu} = J_a^\nu \quad (4.26)$$

## 4.5 Identidade de Jacobi

Podemos utilizar também a identidade de Jacobi estabelecida por meio da Álgebra de Lie escritas em termos da derivada covariante e do tensor intensidade de campo:

$$[D_\mu, F^{\nu\rho}] + [D_\nu, F^{\rho\mu}] + [D_\rho, F^{\mu\nu}] = 0 \quad (4.27)$$

Que usando a definição da derivada covariante:

$$\partial_\mu F^{\nu\rho} + \partial_\nu F^{\rho\mu} + \partial_\rho F^{\mu\nu} = ig([A_\mu, F^{\nu\rho}] + [A_\nu, F^{\rho\mu}] + [A_\rho, F^{\mu\nu}]) \quad (4.28)$$

<sup>6</sup>Férmions são partículas que apresentam spin semi-inteiro.

## CAPÍTULO 4. TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE E EQUAÇÕES DE YANG-MILLS

---

Escrevendo o comutador em termos das constantes de estrutura (16), o resultado será:

$$\partial_\mu F_a^{\nu\rho} + \partial_\nu F_a^{\rho\mu} + \partial_\rho F_a^{\mu\nu} = -g(f_a^{bc} A_\mu^b F_c^{\nu\rho} + f_a^{bc} A_\nu^b F_c^{\rho\mu} + f_a^{bc} A_\rho^b F_c^{\mu\nu}) \quad (4.29)$$

Com o uso dessa expressão e da (4.26) chegamos em equações de movimento que iremos utilizá-las no capítulo 5.

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## CROMODINÂMICA

Será analisado nesse capítulo alguns aspectos gerais da Cromodinâmica, colocando de maneira introdutória os conceitos de cor e sabor e a aplicação de campos dentro das equações de movimento.

### 5.1 Cores

Considerando o estudo das interações fortes, em 1964 Gell-Mann e George Zweig, propuseram que partículas conhecidas como bárions e mesóns, são constituídas de elementos mais fundamentais que apresentavam spin 1/2 conhecidos como quarks (18). Os bárions, como, por exemplo, os nêutrons e os prótons, apresentam 3 quarks<sup>1</sup> no seu interior. Para obedecer o princípio da exclusão de Pauli, foram apresentadas as cargas de cor. Onde existem 3 cores: azul (b), vermelho (r) e verde (g) (5), de modo que ao juntar essas 3 cores haverá a cor branca<sup>2</sup>, que está associada com o confinamento de cor, onde até hoje não foram achados quarks isolados na natureza, apenas em conjunto.

Com base nessas ideias, é possível estruturar essas cargas de cor por meio do grupo SU(3) (16), que apresenta 8 geradores ( Apêndice Grupo SU(3)), onde  $T_3$  e  $T_8$

---

<sup>1</sup>Há hoje estudos apresentando a existência de partículas com mais de 3 quarks, como os pentaquarks.

<sup>2</sup>Vale destacar que a escolha de nomes não é associada ao significado das cores que usualmente colocamos, mas uma analogia com as combinações.

são diagonais e estabelecem a relação  $[T_3, T_8] = 0$ , de modo que as cargas serão fundamentadas por meio das direções relacionadas à  $T_3$  e  $T_8$ :

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} \delta^{a8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \delta^{a3} \right) \quad (5.1)$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} \delta^{a8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta^{a3} \right) \quad (5.2)$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{a8} \quad (5.3)$$

Onde  $\delta^{a8}$  e  $\delta^{a3}$  denotam a direção que as cargas estarão (4).

Note que ao juntar as 3 cores a cor resultante será igual a 0, ou seja, branco. Os mésons são compostos de uma cor e anti-cor de modo que o valor resultante será o branco (19).

Há também partículas mediadoras dessas interações fortes: os glúons, que apresentam spin 1<sup>3</sup>. Essa partícula carrega sempre uma carga de cor e uma de anti-cor.

## 5.2 Sabores

Outra propriedade importante dos quarks que é válido destacar de forma breve é a quantidade conhecida como sabor<sup>4</sup>, apresentando 6 sabores: up, down, strange, charm, bottom e top (5).

Essas características possibilitam analisar interessantes simetrias associadas a elas. O grupo SU(3), está relacionado à simetria de cor e de sabor, onde a simetria de sabor para quarks leves está associada com os 3 sabores: up, down e strange, conhecida como representação fundamental. É válido destacar que os glúons não apresentam sabores.

Tendo isso em vista, podemos analisar os campos presentes na cromodinâmica.

<sup>3</sup>Por terem essas característica podem ser chamados de bósons.

<sup>4</sup>Da mesma forma que a cor, o sabor não tem o significado que usamos no cotidiano.

### 5.3 Campos da cromodinâmica

Vamos utilizar nesse capítulo as definições de campos análogos ao que seriam os elétricos e magnéticos para a cromodinâmica (20):

$$E_a^i = F_a^{i0} \quad (5.4)$$

$$B_a^i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}^i F_a^{jk} \quad (5.5)$$

Onde  $\epsilon$  é o símbolo de Levi-Cevita (8). Podemos abrir os tensores  $F^{\mu\nu}$  presentes nas equações, de modo que para o campo  $\vec{E}_a$  temos:

$$E_a^i = \partial^i A_a^0 - \partial^0 A_a^i - g f_a^{bc} A_b^0 \vec{A}_c \quad (5.6)$$

Onde ao analisar o Apêndice Alguns aspectos sobre a relatividade, é possível ver que  $\partial^i = (0, -\vec{\nabla})$ , logo:

$$\vec{E}_a = -\vec{\nabla} A_a^0 - \partial^0 \vec{A}_a - g f_a^{bc} A_b^0 \vec{A}_c \quad (5.7)$$

Fazendo uma comparação com o campo elétrico em termos dos potenciais:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \partial^0 \vec{A} \quad (5.8)$$

Vemos que há apenas uma leve diferença entre os dois campos, sendo que (5.7) é mais generalizado que (5.8) por apresentar termos não abelianos. Logo, iremos chamar a expressão da equação (5.7) como campo cromo-elétrico.

Já para o caso magnético (equação (5.5)) podemos analisar o campo para o índice 1:

$$B_a^1 = -\frac{1}{2}(F_a^{23} - F_a^{32}) \quad (5.9)$$

$$B_a^1 = -\frac{1}{2}(\partial^2 A_a^3 - \partial^3 A_a^2 - g f_a^{bc} A_b^2 A_c^3 - \partial^3 A_a^2 + \partial^2 A_a^3 + g f_a^{bc} A_b^3 A_c^2) \quad (5.10)$$

$$B_a^1 = \partial^3 A_a^2 - \partial^2 A_a^3 + (g f_a^{bc} A_b^2 A_c^3 - g f_a^{bc} A_b^3 A_c^2) \quad (5.11)$$

Logo, se fizermos para os outros índices correspondentes às componente espaci-

ais  $i=2$  e  $3$ . Chegamos em uma equação para o campo cromo-magnético dada por (21):

$$\vec{B}_a = \vec{\nabla} \times \vec{A}_a + g f_a^{bc} \vec{A}_b \times \vec{A}_c \quad (5.12)$$

Que também difere para o caso eletromagnético, cujo o campo é descrito por:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.13)$$

Logo, a diferença entre (5.12) e (5.13) são as componentes não abelianas relacionadas com a constante de estrutura  $f_a^{bc}$ .

Com os campos cromo-elétricos e cromo-magnéticos estabelecidos, é possível associar cada componente espacial ao tensor  $F^{\mu\nu}$ :

$$E_a^1 = F_a^{10} \quad E_a^2 = F_a^{20} \quad E_a^3 = F_a^{30} \quad (5.14)$$

$$B_a^1 = F_a^{32} \quad B_a^2 = F_a^{13} \quad B_a^3 = F_a^{21} \quad (5.15)$$

Onde a representação matricial do tensor pode ser colocada como:

$$F_a^{\mu\nu} T^a = \begin{bmatrix} 0 & -E_a^1 & -E_a^2 & -E_a^3 \\ E_a^1 & 0 & -B_a^3 & B_a^2 \\ E_a^2 & B_a^3 & 0 & -B_a^1 \\ E_a^3 & -B_a^2 & B_a^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Que é análogo à representação matricial do tensor intensidade de campo para o caso eletromagnético (13).

## 5.4 Equações em termos dos campos cromo-elétricos e cromo-magnéticos

Estabelecidos os campos cromo-elétricos e cromo-magnéticos, conseguimos associá-los às equações de Yang-Mills (4.25). Analisando as equações para  $\nu = 0$  e

abrindo o somatório para o índice  $\mu$ , obtemos:

$$\partial_1 F_a^{10} + \partial_2 F_a^{20} + \partial_3 F_a^{30} = J_a^0 - g(f_a^{bc} A_1^b F_c^{10} + f_a^{bc} A_2^b F_c^{20} + f_a^{bc} A_3^b F_c^{30}) \quad (5.17)$$

Fazendo as relações entre o tensor  $F_{\mu\nu}$  e o campo  $\vec{E}$  (equações 5.14) chega-se:

$$\boxed{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})_a = J_a^0 - g(f_a^{bc} \vec{A}_b \cdot \vec{E}_c)} \quad (5.18)$$

Ao fazer da mesma forma fixando agora  $\nu = 1$ :

$$\partial_0 F_a^{01} + \partial_2 F_a^{21} + \partial_3 F_a^{31} = J_a^1 - g(f_a^{bc} A_0^b F_c^{01} + f_a^{bc} A_1^b F_c^{11} + f_a^{bc} A_2^b F_c^{21} + f_a^{bc} A_3^b F_c^{31}) \quad (5.19)$$

$$-\partial_0 E_a^1 + \partial_2 B_a^3 - \partial_3 B_a^2 = J_a^1 - g(-f_a^{bc} A_0^b E_c^1 + f_a^{bc} A_2^b B_c^3 - f_a^{bc} A_3^b B_c^2) \quad (5.20)$$

Percebe-se que o termo acima seria a componente 1 da equação:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}_a - \partial_0 \vec{E}_a = \vec{J}_a - g(f_a^{bc} \vec{A}_b \times \vec{B}_c - f_a^{bc} A_0^b \vec{E}_c)} \quad (5.21)$$

Utilizando ainda os campos cromo-elétrico e cromo-magnético, podemos relacioná-los à identidade de Jacobi (equação (4.27)).

Levando em conta a equação 4.29 e fixando os seguintes índices:

$$\rho = 3, \nu = 2 \text{ e } \mu = 1$$

$$\partial_1 F_a^{23} + \partial_2 F_a^{31} + \partial_3 F_a^{12} = -g f_a^{bc} (A_1^b F_c^{23} + A_2^b F_c^{31} + A_3^b F_c^{12}) \quad (5.22)$$

Estabelecendo as relações das equações 5.15, resultando em:

$$\boxed{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})_a = -g f_a^{bc} \vec{A}_b \cdot \vec{B}_c} \quad (5.23)$$

Do mesmo modo, abrindo a equação (4.29) por meio de outros índices:

$$\rho = 0, \nu = 2 \text{ e } \mu = 1$$

Logo:

$$\partial_1 F_a^{20} + \partial_2 F_a^{01} + \partial_0 F_a^{21} = -g(f_a^{bc} A_1^b F_c^{20} + f_a^{bc} A_2^b F_c^{01} + f_a^{bc} A_0^b F_c^{12})$$

$$\partial_1 E_a^2 - \partial_2 E_a^1 + \partial_0 B_a^3 = -g(f_a^{bc} A_1^b E_c^2 - f_a^{bc} A_2^b E_c^1 + f_a^{bc} A_0^b B_c^3)$$

Nesse caso, constata-se que esse termo seria a componente 3 da expressão:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}_a + \partial_0 \vec{B}_a = -g(f_a^{bc} A_b^0 \vec{B}_c + f_a^{bc} \vec{A}_b \times \vec{E}_c)} \quad (5.24)$$

Note que as equações (5.18), (5.21), (5.23) e (5.24) são muito semelhantes às equações de Maxwell para o eletromagnetismo, porém há o acréscimo de termos que não comutam, o que poderia dizer que essas são as equações de Maxwell generalizadas para o caso não abeliano.

### 5.4.1 Potenciais

Com a dedução dessas equações, é possível substituir os valores dos campos cromo-elétrico e cromo-magnético em termos dos potenciais (equações (5.7) e (5.12)) e substituí-los nas equações 5.18, 5.21, 5.23 e 5.24 é possível chegar em quatro relações apenas em termos dos campos  $\vec{A}$  e  $A_0$ .

Desse modo, teremos, portanto:

- Para a equação (5.18):

$$\nabla^2 A_a^0 + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a) + g f_{abc} \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_b) A_c^0 - \vec{A}_b \cdot \frac{\partial \vec{A}_c}{\partial t} \right) - g^2 f_{abc} f_{cde} \vec{A}_b \cdot \vec{A}_d A_e^0 = -J_a^0 \quad (5.25)$$

- Para a equação (5.21):

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}_a + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} A_a^0 + \frac{\partial^2 \vec{A}_a}{\partial t^2} \\ & + g f_{abc} \left( \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) - \vec{A}_b \times \vec{\nabla} \times \vec{A}_c + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_b A_c^0) \right. \\ & \left. + A_b^0 \vec{\nabla} A_c^0 + A_b^0 \frac{\partial \vec{A}_c}{\partial t} \right) + g^2 f_{abc} f_{cde} \left( A_b^0 \vec{A}_d A_e^0 - \frac{1}{2} \vec{A}_b \times \vec{A}_d \times \vec{A}_e \right) = \vec{J}_a \end{aligned} \quad (5.26)$$

- Para a equação (5.23):

$$g f_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_b \cdot \vec{A}_c - 3 \vec{A}_b \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_c - g^2 f_{cde} \vec{A}_b \cdot (\vec{A}_d \times \vec{A}_e)) = 0 \quad (5.27)$$

- Para a equação (5.24):

$$gf_{abc}(\vec{\nabla} \times (\vec{A}_b A_c^0) + \vec{A}_b \times \vec{\nabla} A_c^0 + \vec{A}_b \times \frac{\partial \vec{A}_c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{A}_b \times \vec{A}_c}{2} \right) - A_b^0 \vec{\nabla} \times \vec{A}_c - \quad (5.28)$$

$$-gf_{cde}(\vec{A}_b \times \vec{A}_d A_e^0 + \frac{1}{2} A_b^0 \vec{A}_d \times \vec{A}_e) = 0$$

Chegando, portanto em equações que podem ser analisadas em termos apenas dos potenciais, conseguindo achar possíveis soluções para determinadas configurações de cargas de cor.

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## MONOPOLO

A existência de monopolos magnéticos é até os dias de hoje um conceito importante dentro da física teórica, embora ainda não haja resultados experimentais comprovando essa hipótese. Em 1931, Paul Dirac estruturou a ideia de monopolo magnético por meio da quantização do campo eletromagnético (22). Iremos analisar nesse capítulo o conceito de monopolo magnético e logo depois as suas possíveis aplicações para a cromodinâmica. Desse modo vamos começar com a ideia conhecida como corda de Dirac.

### 6.1 Corda de Dirac

A corda de Dirac pode ser idealizada como um solenoide extremamente fino e semi-infinito onde uma extremidade tenderia ao infinito e a outra estaria conectada a um monopolo (23), como representado na seguinte figura:

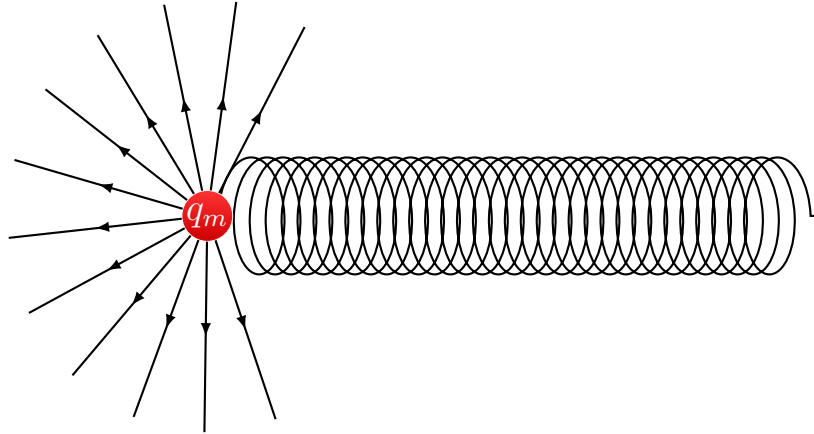


Figura 6.1: Monopolo com a corda de Dirac.

Com base nessa ideia, para compreendermos melhor como que podemos interpretar matematicamente e fisicamente a corda de Dirac, podemos fundamentar como colocado na referência (23) onde utilizamos um campo relacionado ao potencial vetor  $\vec{A}$  denotado por  $\vec{B}_A$ , com o campo magnético  $\vec{B}$  e o representado pela corda de Dirac ( $\vec{B}_C$ ) na figura 6.1 <sup>1</sup>, onde é possível escrever:

$$\vec{B}_A = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} + \vec{B}_C \quad (6.1)$$

Considerando o fluxo magnético:

$$\phi = \oint_S (\vec{B} + \vec{B}_C) \cdot \hat{n} dS \quad (6.2)$$

Sendo  $\hat{n}$  a direção normal ao vetor área.

Pode-se definir  $\vec{B}_C$  como:

$$\vec{B}_C = -4\pi q_m \theta(z) \delta(x) \delta(y) \hat{n} \quad (6.3)$$

Sendo  $\theta(z)$  a função degrau (9),  $\delta(x)$  e  $\delta(y)$  como as funções deltas de Dirac e  $q_m$  a carga magnética.

Com base nisso, o fluxo ficará:

$$\phi = \oint_S (\vec{B} + \vec{B}_C) \cdot \hat{n} dS = 4\pi q_m - 4\pi q_m \theta(0) = 0 \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Essa imagem foi feita por meio das duas figuras em (24).

Sendo  $\vec{B}_A$  um campo que está na direção radial, logo é possível fazer algumas considerações a cerca do potencial  $\vec{A}$ , dado que há uma relação com um produto vetorial (equação (6.1)):

- O campo  $\vec{A}$  depende do ângulo  $\theta$  e aponta na direção de  $\phi$  que está em função de  $x$  e  $y$ , de modo que  $\phi(x, y)$ .

Levando essas ideias em consideração, podemos escrever o potencial vetor como:

$$\vec{A} = \Theta(\theta)\vec{\nabla}\phi(x, y) \quad (6.5)$$

Levando em consideração as coordenadas esféricas:

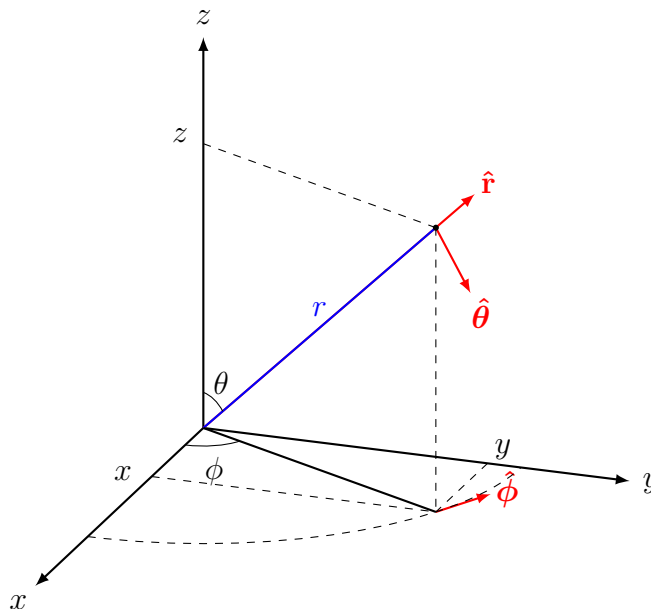


Figura 6.2: Sistema de coordenadas esféricas.

Analisando a figura 6.2<sup>2</sup> percebemos que:

$$\phi = \text{arctag}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6.6)$$

Calculando o gradiente:

$$\vec{\nabla}\phi = -\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\frac{y}{x^2}\hat{x} + \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\frac{1}{x}\hat{y} \quad (6.7)$$

<sup>2</sup>Obtida por meio da referência (25).

Logo:

$$\vec{\nabla}\phi = -\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\hat{x} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{y} \quad (6.8)$$

Tendo em vista que  $x$  e  $y$  podem ser escritos como (26):

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \quad (6.9)$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \quad (6.10)$$

Chegamos que:

$$\vec{\nabla}\phi = -\left(\frac{\operatorname{sen}\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\right)\hat{x} + \left(\frac{\cos\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\right)\hat{y} \quad (6.11)$$

Utilizando os valores dos vetores unitários temos:

$$\hat{x} = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \hat{r} + \cos\theta \cos\phi \hat{\theta} - \operatorname{sen}\phi \hat{\phi} \quad (6.12)$$

$$\hat{y} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \hat{r} + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \hat{\theta} + \cos\phi \hat{\phi} \quad (6.13)$$

De modo que os valores relacionados à  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  irão se anular sobrando apenas o termo:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \hat{\phi} \quad (6.14)$$

Fazendo um ansatz para  $\Theta(\theta)$ :

$$\Theta(\theta) = q_m(1 - \cos\theta) \quad (6.15)$$

Onde é possível chegar no potencial vetor do monopolo de Dirac (23):

$$\vec{A} = \frac{q_m(1 - \cos\theta)}{r \operatorname{sen}\theta} \hat{\phi} \quad (6.16)$$

A singularidade presente em  $\theta = \pi$  pode ser entendida como uma corda de Dirac que se estende ao longo da parte negativa do eixo  $z$ .

Com esse potencial podemos calcular o rotacional em coordenadas esféricas:

$$\vec{B}_A = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \partial_\theta \left( \frac{q_m \operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta)}{r \operatorname{sen}\theta} \right) \hat{r} - \left( \frac{1}{r} \partial_r \left( r \frac{q_m(1 - \cos\theta)}{r \operatorname{sen}\theta} \right) \right) \hat{\theta} \quad (6.17)$$

Logo, o resultado será:

$$\vec{B}_A = \frac{q_m}{r^2} \hat{r} \quad (6.18)$$

Após essa breve introdução à esse conceito, é válido destacar que o monopolo de Dirac ainda tem muitas aplicações dentro da física teórica (27).

## 6.2 Monopolo de Schwinger

Tendo em vista o monopolo de Dirac é possível construir outro vetor potencial, considerando uma transformação de gauge como na equação (4.2) para 3 dimensões onde o elemento do grupo  $U = e^{igq_m\lambda}$  com  $\lambda = \phi$ :

$$\vec{A}' = e^{igq_m\phi} \vec{A} e^{-igq_m\phi} - \frac{1}{ig} (\vec{\nabla} e^{igq_m\phi}) e^{-igq_m\phi} \quad (6.19)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} - q_m e^{igq_m\phi} e^{-igq_m\phi} \vec{\nabla} \phi \quad (6.20)$$

Onde pela equação (6.14) e (6.16) temos:

$$\vec{A}_{sch} = \frac{-q_m \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta} \hat{\phi} \quad (6.21)$$

Conhecido como o monopolo de Schwinger (28), que calculando  $B_A$ :

$$\vec{B}_A = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \partial_\theta \left( \frac{-q_m \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{r \operatorname{sen}\theta} \right) \hat{r} - \left( \frac{1}{r} \partial_r \left( r \frac{-q_m \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta} \right) \right) \hat{\theta} \quad (6.22)$$

Logo:

$$B_A = \frac{q_m}{r^2} \hat{r} \quad (6.23)$$

### 6.3 Conexões com a cromodinâmica

Um dos maiores problemas que permeia a cromodinâmica atualmente está no confinamento de cor. Quarks nunca foram achados sozinhos, apenas em estados confinados uns com os outros, ou seja, apenas as cores brancas são achadas na natureza. Esse assunto ainda é um problema em aberto na física de partículas.

Nessa perspectiva, há algumas propostas e tentativas de explicar o confinamento, dentre uma delas estaria associada ao que seria considerado como monopolo cromomagnético (29).

Logo, podemos esperar que monopolos magnéticos de cor tenham contribuições para dinâmica e mecanismos na QCD como o de confinamento.

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## SOLUÇÕES

Ao considerar o espaço interno de cor, vamos analisar soluções para as equações diferenciais da subseção 5.4.1.

### 7.1 Análise das componentes do campo de calibre no espaço interno de cores

Podemos fazer uma escolha ou seleção de componentes de campos de modo que os potenciais vetoriais ficam na direção 3 e 8 e os potenciais escalares nas direções 1, 2, 4, 5, 6 e 7. Nesse momento, é válido destacar os subgrupos SU(2) em SU(3), onde os índices 1 e 2 estão relacionados com o subgrupo I-spin, para 4 e 5 o subgrupo V-spin e 6 e 7 o subgrupo U-spin (5).

Como dito anteriormente, os índices 3 e 8 são as únicas que são diagonais das matrizes de Gell-Mann (ver Apêndice Apêndice do Grupo SU(3), seus autovalores estão associados com quantidades que se conservam na cromodinâmica, que são o isospin e a hipercarga, eles estabelecem a relação  $[T_3, T_8] = 0$ , essas associações as diferem dos outros índices que pertencem aos subgrupos de SU(3) (4).

Logo, fizemos a seguinte suposição com relação aos campos escalares e potenciais:

$$\vec{A}_a(\vec{r}, t) = -i(\delta_{a3}\vec{A}_3(\vec{r}, t) + \delta_{a8}\vec{A}_8(\vec{r}, t)) \quad (7.1)$$

$$A_a^0(\vec{r}, t) = -i \sum_{j \neq 3,8} \delta_{aj} A_j^0(\vec{r}, t) \quad (7.2)$$

## 7.2 Equações dos subgrupos

Levando em consideração esses alinhamentos no espaço interno e os subgrupos de SU(2), utilizando as constantes de estrutura nas equações em termos dos potenciais da subseção 5.4.1, analisando também os seus valores como colocado no Apêndice do Grupo SU(3). Consideramos que para a equação referente a densidade de carga de cor os campos variam no tempo e que para a expressão referente a densidade de corrente os campos irão ser estáticos de forma que a corrente será estática com relação ao tempo<sup>1</sup> e utilizando a fixação do gauge de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  é possível chegar nas seguintes expressões.

- I – spin

Para  $A_{1,2}^0 \neq 0$  e  $\vec{A}_{3,8} \neq 0$ :

$$\nabla^2 A_{1,2}^0 + g^2 (\vec{A}_3 \cdot \vec{A}_3 A_{1,2}^0) = -J_{1,2}^0 \quad (7.3)$$

$$-\nabla^2 \vec{A}_3 + g(-A_2^0 \vec{\nabla} A_1^0 + A_1^0 \vec{\nabla} A_2^0) + g^2 (A_2^0 \vec{A}_3 A_2^0 + A_1^0 \vec{A}_3 A_1^0) = \vec{J}_3 \quad (7.4)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_8 = -\vec{J}_8 \quad (7.5)$$

- V – spin

Para  $A_{4,5}^0 \neq 0$  e  $\vec{A}_{3,8} \neq 0$ :

$$\nabla^2 A_{4,5}^0 - g^2 \left( -\frac{1}{4} \vec{A}_8 \cdot \vec{A}_8 A_{4,5}^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{A}_8 \cdot \vec{A}_3 A_{4,5}^0 - \frac{1}{4} \vec{A}_3 \cdot \vec{A}_3 A_{4,5}^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{A}_3 \cdot \vec{A}_8 A_{4,5}^0 \right) = -J_{4,5}^0 \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{A}_3 + g \left( \frac{1}{2} A_4^0 \vec{\nabla} A_5^0 - \frac{1}{2} A_5^0 \vec{\nabla} A_4^0 \right) + g^2 \left( \frac{1}{4} A_4^0 \vec{A}_3 A_4^0 + \frac{\sqrt{3}}{4} A_4^0 \vec{A}_8 A_4^0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} A_5^0 \vec{A}_3 A_5^0 + \frac{\sqrt{3}}{4} A_5^0 \vec{A}_8 A_5^0 \right) = \vec{J}_3 \end{aligned} \quad (7.7)$$

<sup>1</sup>Semelhante à magnetostática no eletromagnetismo.

$$\begin{aligned}
 -\nabla^2 \vec{A}_8 + g\left(\frac{\sqrt{3}}{2} A_4^0 \vec{\nabla} A_5^0 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_5^0 \vec{\nabla} A_4^0\right) + g^2\left(\frac{3}{4} A_4^0 \vec{A}_8 A_4^0 + \frac{\sqrt{3}}{4} A_4^0 \vec{A}_3 A_4^0 + \right. \\
 \left. + \frac{3}{4} A_5^0 \vec{A}_8 A_5^0 + \frac{\sqrt{3}}{4} A_5^0 \vec{A}_3 A_5^0\right) = \vec{J}_8
 \end{aligned} \quad (7.8)$$

• U – spin

Para  $A_{6,7}^0 \neq 0$  e  $\vec{A}_{3,8} \neq 0$ :

$$\nabla^2 A_{6,7}^0 - g^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \vec{A}_3 \cdot \vec{A}_8 A_{6,7}^0 - \frac{1}{4} \vec{A}_3 \cdot \vec{A}_3 A_{6,7}^0 - \frac{1}{4} \vec{A}_8 \cdot \vec{A}_8 A_{6,7}^0 + \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{A}_8 \cdot \vec{A}_3 A_{6,7}^0\right) = -J_{6,7}^0 \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned}
 -\nabla^2 \vec{A}_3 + g\left(-\frac{1}{2} A_6^0 \vec{\nabla} A_7^0 + \frac{1}{2} A_7^0 \vec{\nabla} A_6^0\right) + g^2\left(\frac{1}{4} A_6^0 \vec{A}_3 A_6^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} A_6^0 \vec{A}_8 A_6^0 + \right. \\
 \left. + \frac{1}{4} A_7^0 \vec{A}_3 A_7^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} A_7^0 \vec{A}_8 A_7^0\right) = \vec{J}_3
 \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}
 -\nabla^2 \vec{A}_8 + g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} A_7^0 \vec{\nabla} A_6^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} A_6^0 \vec{\nabla} A_7^0\right) + g^2\left(\frac{3}{4} A_7^0 \vec{A}_8 A_7^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} A_7^0 \vec{A}_3 A_7^0 + \right. \\
 \left. + \frac{3}{4} A_6^0 \vec{A}_8 A_6^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} A_6^0 \vec{A}_3 A_6^0\right) = \vec{J}_8
 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Chegando, portanto, nas equações para cada subgrupo <sup>2</sup>. Os índices colocados para os potenciais escalares como, por exemplo, no caso  $A_{1,2}^0$ , são para mostrar que as equações tanto para  $A_1^0$  quanto para  $A_2^0$  são iguais.

## 7.2.1 Simetrias entre as equações dos subgrupos

Ao analisar as equações podemos ver que as expressões para cada subgrupo são semelhantes, de forma que se resolvermos para um subgrupo, as soluções para os outros serão equivalentes.

As equações para cada subgrupo são simétricas.

<sup>2</sup>As outras equações que não estão relacionadas com as densidades de carga e corrente de cor, levando em consideração essa configuração, levam à vínculos triviais, como, por exemplo,  $\vec{J}_1 = 0$ .

Considerando a matriz de rotação:

$$\begin{bmatrix} \vec{A}'_3 \\ \vec{A}'_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_3 \\ \vec{A}_8 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Logo, percebemos que há um ângulo associado com cada rotação, fazendo uma relação de simetria e equivalência para cada equação de cada subgrupo. Para as equações com  $J_0$ :

- Entre o I-spin para V-spin:

$$\theta = 5\pi/3 \quad (7.13)$$

- Entre o I-spin para U-spin:

$$\theta = 4\pi/3 \quad (7.14)$$

Para as equações com  $\vec{J}$ :

- Entre o V-spin para I-spin:

$$\theta = \pi/3 \quad (7.15)$$

- Entre o U-spin para I-spin:

$$\theta = 5\pi/3 \quad (7.16)$$

## 7.2.2 Soluções para o subgrupo I-spin

Vamos analisar o subgrupo I-spin. Fazendo a consideração de que:  $A_1^0 = \pm A_2^0$  (30), as equações (7.3), (7.4) e (7.5) ficarão:

$$\nabla^2 A_1^0 + g^2(\vec{A}_3 \cdot \vec{A}_3 A_1^0) = -J_1^0 \quad (7.17)$$

$$-\nabla^2 \vec{A}_3 + 2g^2(A_1^0)^2 \vec{A}_3 = \vec{J}_3 \quad (7.18)$$

$$-\nabla^2 \vec{A}_8 = \vec{J}_8 \quad (7.19)$$

Abrindo a equação (7.18) em coordenadas esféricas (31):

- Para componente  $r$  será:

$$\begin{aligned} \partial_r^2 A_r + \frac{2}{r} \partial_r A_r - \frac{2A_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_r + \frac{\cot\theta}{r^2} \partial_\theta A_r + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 A_r - \\ - \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_\theta - \frac{2\cot\theta}{r^2} A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \partial_\phi A_\phi + 2g^2 (A_2^0)^2 A_{r3} = J_{r3} \end{aligned} \quad (7.20)$$

- Para a componente  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \partial_r^2 A_\theta + \frac{2}{r} \partial_r A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_\theta + \frac{\cot\theta}{r^2} \partial_r A_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 A_\theta + \\ + \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_r - \frac{2\cot\theta}{r^2 \sin\theta} \partial_\phi A_\phi + 2g^2 (A_2^0)^2 A_{\theta3} = J_{\theta3} \end{aligned} \quad (7.21)$$

- Para a componente  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \partial_r^2 A_\phi + \frac{2}{r} \partial_r A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_\phi + \frac{\cot\theta}{r^2} \partial_\theta A_\phi + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 A_\phi + \\ + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \partial_\phi A_r + \frac{2\cot\theta}{r^2 \sin\theta} \partial_\phi A_\theta + 2g^2 (A_2^0)^2 A_{\phi3} = J_{\phi3} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Se considerar o potencial vetor relacionado com o monopolo magnético:

$$\vec{A}_3 = \vec{A}_{sch} = \frac{-q_m \cos\theta}{r \sin\theta} \hat{\phi} \quad (7.23)$$

Desse modo, apenas a componente  $\phi$  do laplaciano vetor não irá se anular. Ao calcular a parte do laplaciano da equação (7.22), iremos ver que ela irá zerar. Sobrando apenas o termo:

$$\boxed{A_1^0 = \left( \frac{-J_{\phi3} r \tan\theta}{2g^2 q_m} \right)^{1/2}} \quad (7.24)$$

Analisando essa equação, podemos ver os domínios do ângulo  $\theta$  em que  $A_1^0$  não será complexo, mas podemos também analisar as equações com base em um ansatz e achar os valores dos potenciais e das densidades de corrente e de carga de cor.

### 7.2.3 Ansatz a cerca da densidade de corrente

Analisando (7.3) em coordenadas esféricas (26).

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r A_1^0) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta A_1^0) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi^2 A_1^0 + g^2 \vec{A}^2 A_1^0 = -J_1^0 \quad (7.25)$$

Iremos fazer um ansatz tal que:

$$J_{\phi 3} = -\frac{F \cos(\theta)}{r^3} \quad (7.26)$$

Sendo que  $J_{\phi 3}$  tem uma singularidade na origem e onde  $F$  é uma constante de tal modo que mantém as unidades de medida para a densidade de corrente, a equação (7.24), agora pode ser escrita como:

$$A_1^0 = \frac{1}{g r} \left( \frac{F \sin \theta}{2 q_m} \right)^{1/2} \quad (7.27)$$

Notamos a dependência com relação à  $1/r$ , típico de muitos potenciais escalares, há também uma relação associada a carga de monopolo cromo-magnético ( $1/\sqrt{q_m}$ ).

Fazendo essa substituição em (7.24) e colocando em (7.25) teremos:

$$J_1^0 = -\sqrt{\frac{F \sin \theta}{2 q_m} \frac{[6 + 2 \cos^2 \theta + (4g^2 q_m^2 - 1) \cot^2 \theta]}{4 g r}} \quad (7.28)$$

Vemos que a densidade de carga se comporta de forma semelhante ao potencial escalar em alguns aspectos, uma delas é que ele é proporcional a  $1/r$  e  $\sqrt{F}$ . É válido destacar que por essas considerações, todas as funções apresentam um comportamento proporcional à  $1/r$ .

Esse caso de ansatz é para mostrar certas relações que as equações dependentes das densidades de corrente e de carga podem fornecer. Cálculos mais profundos podem ser feitos considerando apenas o monopolo abeliano, considerando, por exemplo, função de Green para solução dessas equações não homogêneas (11).

### 7.2.4 Análise para o potencial $\vec{A}_8$

Para o caso da equação (7.19) temos uma equação de Poisson vetorial, de forma que se desconsiderarmos a densidade de corrente e fizermos a suposição de simetria azimutal:

$$\vec{A}_8 = A(r, \theta) \hat{\phi} \quad (7.29)$$

Logo a equação (7.5) ficará homogênea:

$$\partial_r^2 A_\phi + \frac{2}{r} \partial_r A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \text{sen}^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_\phi + \frac{\cot \theta}{r^2} \partial_\theta A_\phi + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \partial_\phi^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \text{sen} \theta} \partial_\phi A_r + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \text{sen} \theta} \partial_\phi A_\theta = 0 \quad (7.30)$$

Usando o método de separação de variáveis:

$$\vec{A}_8 = R(r) \Theta(\theta) \hat{\phi} \quad (7.31)$$

Logo:

$$r^2 \partial_r^2 R + 2r \partial_r R - \beta R = 0 \quad (7.32)$$

$$\partial_\theta^2 \Theta + \cot \theta \partial_\theta \Theta - \frac{\Theta}{\text{sen}^2 \theta} - \eta \Theta = 0 \quad (7.33)$$

Onde pelo método de separação de variáveis:

$$\eta + \beta = 0 \quad (7.34)$$

Esse problema já foi resolvido pela referência (16), mas ainda é válido destacá-lo nesse trabalho como forma de resolução para a única equação que não estabelece vínculos com as outras duas ((7.3) e (7.4)).

Para a (7.32) temos que:

$$R(r) = Ar^\alpha \quad (7.35)$$

Onde a (7.32) ficará:

$$\alpha^2 + \alpha - C_1 = 0 \quad (7.36)$$

Resolvendo a equação de segundo grau,  $\alpha$  fornecerá dois valores resultando:

$$R(r) = Ar^{-\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2}} + Br^{-\frac{1-\sqrt{1+4\beta}}{2}} \quad (7.37)$$

Onde  $1 + 4\beta \geq 0$  para não ser complexa, por questões físicas para não existir um potencial com dependência em  $r > 0$ , e sim que haja uma singularidade em  $r=0$ , logo  $A = 0$ .

Para a parte angular podemos fazer:

$$\cos\theta = u \quad (7.38)$$

Logo:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} \frac{d}{du} = -\text{sen}\theta \frac{d}{du} = -\sqrt{1-u^2} \frac{d}{du} \quad (7.39)$$

Do mesmo modo:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{du}{d\theta} \frac{d}{du} \left( -\sqrt{1-u^2} \frac{d}{du} \right) = \frac{u\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{du} + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-u^2} \frac{d^2}{du^2} \quad (7.40)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = u \frac{d}{du} + (1-u^2) \frac{d^2}{du^2} \quad (7.41)$$

Chegamos, portanto na seguinte equação diferencial:

$$(1-u^2)\partial_u^2\Theta - 2u^2\partial_u\Theta + \left(-\eta - \frac{1}{1-u^2}\right)\Theta = 0 \quad (7.42)$$

Onde  $-\eta = l(l+1)^3$ , logo é possível relacioná-las com as funções associadas de Legendre:

$$\Theta = P_l^1(\cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{1/2} \frac{d}{d\cos\theta} P_l(\cos\theta) \quad (7.43)$$

<sup>3</sup>De modo que pela relação da (7.34)  $\beta = l(l+1)$ .

De modo que a solução para a equação diferencial será:

$$\vec{A}_8 = Br^{\frac{-1-\sqrt{1+4\beta}}{2}} (1 - \cos^2\theta)^{1/2} \frac{d}{d\cos\theta} P_l(\cos\theta) \hat{\phi} \quad (7.44)$$

Nesse caso o potencial  $\vec{A}_8$  tem dependência proporcional à  $1/r^n$  sendo  $n$  qualquer número, vale lembrar também que para o caso mais generalizado se não houvesse simetria azimutal seria necessário o uso de harmônicos esféricos.

---

---

## CAPÍTULO 8

---

### CONCLUSÃO

Utilizando os conceitos de teorias de grupos, formalismo tensorial, simetria de gauge e ideias da teoria de Yang Mills para  $N_c = 3$ , foi possível fazer análises a cerca dessas ideias para a Cromodinâmica.

Com o uso das definições dos campos cromo-elétricos e cromo-magnéticos em termos dos seus potenciais foi possível chegar em equações diferenciais não abelianas. Estabelecendo certas escolhas do setor das componentes do campo  $A_\mu$  que os campos poderiam seguir ao analisar as componentes do espaço interno de cor, fomos capazes de simplificar as equações para o subgrupo I-spin, foram analisados os campos:  $A_1^0 = \pm A_2^0$ ,  $\vec{A}_3$  e  $\vec{A}_8$ .

A solução analítica para o potencial vetor  $\vec{A}_8$  que não proporcionava vínculos foi feita desconsiderando a densidade de corrente. As soluções para as outras equações foram analisadas considerando potencial vetor  $\vec{A}_3$  dado pelo monopolo cromo-magnético de Schwinger. Dessa forma, usando também considerações a cerca de como a densidade de corrente poderia se comportar, foi possível obter o comportamento da densidade de carga. Uma equação diferencial geral para a densidade de corrente foi obtida e uma solução foi proposta supondo uma configuração de corrente. Soluções mais gerais e com motivações físicas específicas, poderão ser investigadas em trabalhos futuros.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 96, p. 191–195, Oct 1954. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.191>.
- 2 BAZAK, S.; MRÓWCZYŃSKI, S. Stability of classical chromodynamic fields. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 105, p. 034023, Feb 2022. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.034023>.
- 3 GELIS, F. Color glass condensate and glasma. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 28, n. 01, p. 1330001, jan. 2013. ISSN 1793-656X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X13300019>.
- 4 FROLDI, I. d. M.; BRAGHIN, F. L. Classical yang mills equations with sources: Consequences of specific scalar potentials. **Annals of Physics**, Elsevier BV, v. 444, p. 169026, set. 2022. ISSN 0003-4916. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2022.169026>.
- 5 COSTA, G.; FOGLI, G. **Symmetries and Group Theory in Particle Physics: An Introduction to Space-time and Internal Symmetries**. [S.l.]: Nova York: Springer, 2012.
- 6 HAMERMESH, M. **Group theory and its application to physical problems**. [S.l.]: Dover Publications, 1989.
- 7 DAS, A. **Lectures on quantum field theory**. [S.l.]: World Scientific Publishing, 2008.
- 8 ARFKEN, G. B.; HARRIS, F. E.; WEBER, H. J. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- 9 BUTKOV, E. **Física matemática**. [S.l.]: [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- 10 LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. [S.l.]: 2<sup>a</sup> Ed. Editora Livraria da Física, 2007.
- 11 JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. [S.l.]: Wiley, 1998.
- 12 ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Singapore: McGraw-Hill, 1980.

- 13 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The classical theory of fields**. [S.l.]: 3<sup>a</sup> Ed. Moscou: Pergamon, 1980.
- 14 CHENG, T.-P.; LI, L.-F. **Gauge theory of elementary particle physics**. [S.l.]: Reino Unido: Oxford University Press, 2011.
- 15 AREFEVA, I. Y. Non-abelian stokes formula. **Theor Math Phys**, v. 43, p. 353–356, 1980. Disponível em: [〈https://doi.org/10.1007/BF01018469〉](https://doi.org/10.1007/BF01018469).
- 16 FROLDI, I. de M. **Teoria Clássica de Yang Mills Aspectos Gerais e Soluções com 3 Cores**. [S.l.]: Monografia - Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2021.
- 17 MORYASU, K. A classical primer for qcd. **European Journal of Physics, IOP Publishing**, v. 2, n. 4, p. 232 -243, 1981.
- 18 GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. **Physics Letters**, v. 8, n. 3, p. 214-215, 1964.
- 19 MOREIRA, M. A. A física dos quarks e a epistemologia. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 2, p. 161-173, 2007. Disponível em: [〈https://doi.org/10.1590/S1806-11172007000200001〉](https://doi.org/10.1590/S1806-11172007000200001).
- 20 SILVA, A. C. P. J. da. **Uma introdução à Teorias Clássicas de Campos: Aspectos da cromodinâmica**. [S.l.]: Monografia - Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2018.
- 21 MENDES, J. G. M. **Equações dinâmicas de Yang-Mills em 4D para SU(3)**. [S.l.]: Monografia - Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás. Goiânia., 2021.
- 22 DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. **Proc. Roy. Soc. (London) A** 133, 60, 1931.
- 23 JESUS, A. L. de; SCHMIDT, A. G.; PORTUGAL, L. L. S. Introdução à física do monopolo magnético: uma abordagem clássica. **Rev. Bras. Ensino Fís.** 45, 2023. Disponível em: [〈https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0335〉](https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0335).
- 24 NEUTELINGS, I. **TikZ.net Graphics with TikZ in LaTeX**. 2023. O solenoide está disponível em: [〈https://tikz.net/solenoid/〉](https://tikz.net/solenoid/). Já a parte de monopolo em: [〈https://tikz.net/electric\\_field\\_sphere/〉](https://tikz.net/electric_field_sphere/) Acesso em 8 de janeiro de 2024.
- 25 TSAGKAROPOULOS, A. **TikZ.net Graphics with TikZ in LaTeX**. 2023. Disponível em: [〈https://tikz.net/spherical\\_1/〉](https://tikz.net/spherical_1/) Acesso em 8 de janeiro de 2024.
- 26 GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. [S.l.]: 3 ed. São Paulo: Pearson, 2010.
- 27 ROUGEMONT, R.; GUIMARAES, M.; WOTZASEK, C.; ZARRO, C. Massive photons and dirac monopoles: Electric condensate and magnetic confinement. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 723, n. 4–5, p. 422–426, jun. 2013. ISSN 0370-2693. Disponível em: [〈http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2013.05.032〉](http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2013.05.032).
- 28 SCHWINGER, J. Magnetic charge and quantum field theory. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 144, p. 1087–1093, Apr 1966. Disponível em: [〈https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.144.1087〉](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.144.1087).

- 29 HOOFT, G. 't. Magnetic charge quantization and fractionally charged quarks. **Nuclear Physics B**, v. 105, p. 538–547, 1976. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(76\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(76)90031-6).
- 30 SIKIVIE, P.; WEISS, N. Classical yang-mills theory in the resence of external sources. **Physical review D**, v. 18, n. 10, p. 3809 -3821, 1978. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.3809> Acesso em 8 de janeiro de 2024.
- 31 MOON, P.; SPENCER, D. E. The meaning of the vector laplacian. **Journal of the Franklin Institute**, v. 256, n. 6, p. 551–558, 1953. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0016003253911600>.

---

# APÊNDICES

## Alguns aspectos sobre relatividade

Ao fazer uma conexão com a relatividade, devemos considerar a quantidade invariante sob a transformação de Lorentz:

$$c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (8.1)$$

Um espaço quadridimensional com essa métrica é denominado como espaço de Minkowski (13), cujo o tensor métrico associado é:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Com o uso desse tensor métrico, é possível fazer uma relação entre índices contra-variante e covariantes, de modo que:  $x^\mu = (x_0, \vec{x})$ , onde baseado na notação tensorial e utilizando a convenção de Einstein para somatório <sup>1</sup>, chegamos que:  $x_\mu = x^\nu g_{\mu\nu} = (x_0, -\vec{x})$ , onde a métrica quadrivetorial é fundamentada por:  $x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = x_0^2 - \vec{x}^2$ .

Com essas ideias estabelecidas em torno dos quadrivetores, pode-se colocar o

---

<sup>1</sup>Essa convenção será utilizada ao longo de todo o trabalho

gradiente em 4 dimensões como:

$$\partial^\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla}) \quad (8.3)$$

Onde a derivada covariante fica:

$$\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla}) \quad (8.4)$$

Comparando com a equação (3.10) chega-se na equação de Euler-Lagrange escrita em termos da notação tensorial:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (8.5)$$

## Grupo SU(3)

Analisando o grupo SU(3) que é de fundamental importância para a análise da cromodinâmica, visto que ele está associado às simetrias de cor e de sabor. Levando em consideração que SU(3) (5) apresenta 8 geradores  $T_a$ , sendo  $a=1, \dots, 8$ , eles são dados por meio das matrizes de Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Onde:

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (8.7)$$

Vamos pegar os únicos geradores diagonais  $T_3$  e  $T_8$  que estabelecem a relação  $[T_3, T_8] = 0$ . É possível notar que para  $T_3$  os seus autovalores correspondem às duas quantidades permitidas de isospin, já para  $T_8$  há uma relação com os valores de hipercarga.

Vale ressaltar que os geradores estabelecem a relação dada por (2.14), onde as suas constantes de estrutura são:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, f_{147} = \frac{1}{2}, f_{156} = -\frac{1}{2}, \\ f_{246} &= \frac{1}{2}, f_{257} = \frac{1}{2}, f_{345} = \frac{1}{2}, \\ f_{367} &= -\frac{1}{2}f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Há também a relação de índices com o *espaço interno de cor*, que está ligado diretamente com a álgebra de Lie associada ao grupo SU(3). Desse modo, iremos trabalhar também com os índices a,b e c vinculados aos termos das constantes de estrutura (16).

Como dito anteriormente, adotando a convenção de Einstein, os índices de Lorentz apresentam um somatório com a contração de índices covariantes com contravariantes, ou seja:  $\sum_{\mu} A^{\mu} A_{\mu} = A^{\mu} A_{\mu}$ , havendo, portanto, uma associação direta com a métrica do espaço. Já para os índices a, b e c o somatório pode ser escrito como:  $\sum_a A_a A_a = A_a A_a$ .

## Transformação de gauge

### Tensor intensidade de campo

Levando em conta o tensor de força:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + ig(A_{\mu} A_{\nu} - A_{\nu} A_{\mu}) \quad (8.9)$$

Fazendo a transformação de gauge no tensor temos (7):

- Para os termos  $\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ :

$$\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu}(U A_{\nu} U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_{\nu} U)U^{-1}) - \partial_{\nu}(U A_{\mu} U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_{\mu} U)U^{-1}) \quad (8.10)$$

De modo que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow \partial_\mu U A_\nu U^{-1} + U \partial_\mu A_\nu U^{-1} + U A_\nu \partial_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu \partial_\nu U) U^{-1} - \\ - \frac{1}{ig} (\partial_\nu U) (\partial_\mu U^{-1}) - \partial_\nu U A_\mu U^{-1} - U \partial_\nu A_\mu U^{-1} - \\ - U A_\mu \partial_\nu U^{-1} + \frac{1}{ig} (\partial_\nu \partial_\mu U) U^{-1} + \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) (\partial_\nu U^{-1}) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow U \partial_\mu A_\nu U^{-1} - U \partial_\nu A_\mu U^{-1} + \partial_\mu U A_\nu U^{-1} + U A_\nu \partial_\mu U^{-1} - \partial_\nu U A_\mu U^{-1} \\ - U A_\mu \partial_\nu U^{-1} + \frac{1}{ig} [-(\partial_\nu U) (\partial_\mu U^{-1}) + (\partial_\mu U) (\partial_\nu U^{-1})] \end{aligned} \quad (8.12)$$

• Para os termos  $ig(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)$ :

$$ig(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \rightarrow ig[(U A_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) U^{-1} U) (A_\nu U^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\nu U) U^{-1}) - \quad (8.13)$$

$$(U A_\nu U^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\nu U) U^{-1} U) (A_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) U^{-1})] \quad (8.14)$$

Fazendo essas relações chega-se que:

$$\begin{aligned} ig(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \rightarrow igU[A_\mu, A_\nu]U^{-1} - \frac{1}{ig} [(\partial_\mu U) (\partial_\nu U^{-1}) - (\partial_\nu U) (\partial_\mu U^{-1})] - \\ - (\partial_\mu U A_\nu U^{-1} + U A_\nu \partial_\mu U^{-1} - \partial_\nu U A_\mu U^{-1} - U A_\mu \partial_\nu U^{-1}) \end{aligned} \quad (8.15)$$

Onde somando as equações chega-se que:

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \rightarrow U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)U^{-1} + igU[A_\mu, A_\nu]U^{-1} \quad (8.16)$$

Chegamos, portanto que a transformação de  $F_{\mu\nu}$  será:  $F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^{-1}$ . Utilizando a seguinte relação por meio do traço:

$$Tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \rightarrow Tr[U F_{\mu\nu} U^{-1} U F^{\mu\nu} U^{-1}] = Tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \quad (8.17)$$

Utilizando a propriedade cíclica do traço, que diz que a permutação entre os termos

não irá afetar no resultado do traço, ou seja,  $Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$ , sendo A, B e C matrizes. Logo chegamos que a seguinte componente é invariante de gauge:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}Tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \quad (8.18)$$

Sendo  $\mathcal{L}_{YM}$  a densidade de lagrangiana de Yang-Mills.

## Derivada covariante

- Para a derivada covariante:

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - igA_\mu\psi \quad (8.19)$$

Onde a transformação para o campo  $\psi$  é:

$$\psi' \rightarrow U\psi \quad (8.20)$$

Logo, levando as transformações desse campo do potencial  $A_\mu$ :

$$\partial_\mu\psi' - igA_\mu\psi' \rightarrow \partial_\mu(U\psi) - ig(UA_\mu U^{-1}U\psi - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}U\psi) \quad (8.21)$$

$$\partial_\mu\psi' - igA_\mu\psi' \rightarrow \partial_\mu U\psi + U\partial_\mu\psi - ig(UA_\mu U^{-1}U\psi) + (\partial_\mu U)U^{-1}U\psi \quad (8.22)$$

Logo:

$$\partial_\mu\psi' - igA_\mu\psi' \rightarrow \partial_\mu U\psi + U\partial_\mu\psi - ig(UA_\mu\psi) - \partial_\mu U\psi \quad (8.23)$$

Portanto, chegamos que a transformação de gauge ficará:

$$\partial_\mu\psi' - igA_\mu\psi' \rightarrow U(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \quad (8.24)$$

Desse modo,  $D_\mu$  se transforma como:  $D_\mu = U(\partial_\mu - igA_\mu)\psi$ . Segue que a compo-

nente invariante de gauge será dada por:

$$\bar{\psi}_i(i\lambda^\mu D_\mu^{ij} - \delta_{ij}m)\psi_j \rightarrow \bar{\psi}_i U^{-1}(U(\partial_\mu - igA_\mu))\psi_j = \bar{\psi}_i(i\lambda^\mu D_\mu^{ij} - \delta_{ij}m)\psi_j \quad (8.25)$$