

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

PEDRO AUGUSTO SERAFIM BELO

Conjuntos dominantes localizadores em algumas subclasses de grafos split

Goiânia
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome(s) completo(s) do(a)(s) autor(a)(es)(as): Pedro Augusto Serafim Belo

Título do trabalho: Conjuntos dominantes localizadores em algumas subclasses de grafos split

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Marcia Rodrigues Cappelle Santana, Professora do Magistério Superior**, em 05/06/2025, às 17:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Augusto Serafim Belo, Usuário Externo**, em 05/06/2025, às 17:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5421247** e o código CRC **D949889B**.

Referência: Processo nº 23070.062626/2024-67

SEI nº 5421247

PEDRO AUGUSTO SERAFIM BELO

Conjuntos dominantes localizadores em algumas subclasses de grafos split

Trabalho de Conclusão apresentado à Coordenação do Curso de Ciência da Computação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Área de concentração: Teoria dos Grafos.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana

Goiânia
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Belo, Pedro Augusto Serafim
Conjuntos dominantes localizadores em algumas subclasses de grafos split [manuscrito] / Pedro Augusto Serafim Belo. - 2024.
lix, 59 f.

Orientador: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Informática (INF), Ciência da Computação, Goiânia, 2024.

Bibliografia.

Inclui tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Teoria dos grafos. 2. Conjuntos dominantes. 3. Conjuntos dominantes localizadores. 4. Grafos split. I. Santana, Márcia Rodrigues Cappelle, orient. II. Título.

CDU 004



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

BANCA EXAMINADORA

PEDRO AUGUSTO SERAFIM BELO

Conjuntos dominantes localizadores em algumas subclasses de grafos split

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Goiás como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientadora: Profa. Dra.: Márcia Rodrigues Cappelle Santana

Aprovado em 09/12/2024.

Examinadores:

Prof(a) Dr(a) Márcia Rodrigues Cappelle Santana
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Informática

Prof. Dr. Humberto José Longo
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Informática



Documento assinado eletronicamente por **Marcia Rodrigues Cappelle Santana, Professora do Magistério Superior**, em 11/12/2024, às 07:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Humberto Jose Longo, Professor do Magistério Superior**, em 11/12/2024, às 08:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5024479** e o código CRC **92434093**.

Referência: Processo nº 23070.062626/2024-67

SEI nº 5024479

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Pedro Augusto Serafim Belo

Graduando em Ciência da Computação

Ao amigo que para mim era um irmão, Leonardo (*in memoriam*).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por orientar meus passos e me dar forças nos momentos em que mais precisei.

Agradeço à minha mãe e ao meu pai, as pessoas que mais amo na vida, por todo o carinho, amor e apoio que sempre me deram. Vocês não só me trouxeram à vida como também fizeram parte dela toda, me acompanhando em todos os momentos, nas conquistas e dificuldades. Obrigado por tudo.

Agradeço à minha família por me proporcionar momentos tão felizes ao longo da minha vida. Agradeço muito a cada um de vocês, obrigado por me amarem e por serem tão especiais.

Agradeço aos amigos que fiz antes e durante a faculdade por fazerem da minha vida uma experiência muito mais alegre e divertida, por me trazerem companhia e por me ajudarem a enfrentar desafios e evoluir como estudante.

Agradeço à profa. Márcia Cappelle por ter sido minha orientadora, por tudo que me ensinou ao longo da minha graduação e pelo grande auxílio que me deu durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao prof. Humberto Longo por compor a banca examinadora e pelos valiosos conselhos que me fizeram evoluir muito ao longo da graduação.

Agradeço à Fundação de Apoio à Pesquisa (FUNAPE) pelo apoio financeiro concedido durante o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço ao Instituto de Informática (INF) e à Universidade Federal de Goiás (UFG) pelo ambiente e estrutura proporcionados, que me possibilitaram adquirir muito conhecimento desde a minha entrada.

A tecnologia move o mundo.

Steve Jobs,
Fundador da Apple.

Resumo

BELO, Pedro Augusto Serafim. **Conjuntos dominantes localizadores em algumas subclasses de grafos split**. 2024. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Instituto de Informática (INF), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2024.

Um conjunto dominante de um grafo G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que todo vértice que não pertence a S é adjacente a pelo menos um vértice que pertence a S . Um conjunto dominante localizador de um grafo G é um subconjunto $L \subseteq V(G)$ tal que L é um conjunto dominante e, para todo par de vértices u, v que não pertencem a L , $N(u) \cap L \neq N(v) \cap L$, onde $N(u)$ e $N(v)$ são os vértices adjacentes a u e a v , respectivamente. Um grafo split é um grafo G cujo conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em dois subconjuntos Q e S tais que Q é uma clique e S é um conjunto independente. Neste trabalho, foi construída uma proposição para simplificar grafos split que possuem vértices mutuamente gêmeos, transformando-os em grafos com menos gêmeos e reduzindo a cardinalidade mínima do conjunto dominante localizador em uma unidade a cada vértice removido. Ademais, foram apresentadas fórmulas fechadas para a cardinalidade mínima de conjuntos dominantes localizadores em grafos split completos e grafos split corona.

Palavras-chave

Teoria dos grafos, Conjuntos dominantes, Conjuntos dominantes localizadores, Grafos split.

Abstract

BELO, Pedro Augusto Serafim. **Locating-dominating sets in some subclasses of split graphs**. 2024. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2024.

A dominating set of a graph G is a subset $S \subseteq V(G)$ such that every vertex not in S is adjacent to at least one vertex in S . A locating-dominating set of a graph G is a subset $L \subseteq V(G)$ such that L is a dominating set and, for every pair of vertices u, v not in L , $N(u) \cap L \neq N(v) \cap L$, where $N(u)$ and $N(v)$ are the vertices adjacent to u and v , respectively. A split graph is a graph G whose vertex set $V(G)$ can be partitioned in two subsets Q and S such that Q is a clique and S is an independent set. In this work, a proposition was constructed to simplify split graphs that have mutually twin vertices, transforming them into graphs with fewer twins and reducing the minimum cardinality of the locating-dominating set by one unit for each removed vertex. Furthermore, closed formulas for the minimum cardinality of locating-dominating sets in complete split graphs and split corona graphs were presented.

Keywords

Graph theory, Dominating sets, Locating-dominating sets, Split graphs.

Sumário

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	12
1 Introdução	13
2 Conceitos preliminares	18
3 Grafos split e subclasses	28
4 Revisão bibliográfica	36
5 Resultados	39
6 Conclusão	52
Referências	58

Lista de Figuras

1.1	Sete pontes de Königsberg. Fonte: SciLogs.	13
1.2	Abstração para o problema das sete pontes de Königsberg, conforme idealizado por Euler.	14
1.3	Grafo construído a partir da abstração de Euler.	14
1.4	Exemplo de um grafo split.	15
1.5	Ambiente fechado composto por salas visto de cima.	15
1.6	Grafo que modela o ambiente da Figura 1.5.	16
2.1	Grafo G_1 .	18
2.2	Grafos isomorfos.	19
2.3	Grafo S subgrafo induzido de G .	20
2.4	Grafos complementares.	20
2.5	Em (a), os vértices pretos constituem a vizinhança aberta de d . Em (b), os vértices pretos constituem a vizinhança fechada de c e de f , mostrando que são gêmeos fechados.	21
2.6	O conjunto de vértices $\{b, c, d\}$, em destaque, é uma cobertura de vértices.	22
2.7	O conjunto de vértices $\{a, b, d, e\}$, em destaque, é uma clique.	22
2.8	O conjunto de vértices $\{b, d, f\}$, em destaque, é um conjunto independente.	22
2.9	Exemplos de grafos de algumas classes.	23
2.10	Grafo bipartido representado de duas formas diferentes. Em (b), fica evidente que os dois conjuntos independentes são $X = \{A, B, C\}$ e $Y = \{1, 2\}$.	24
2.11	Grafo cobipartido representado de duas formas diferentes. Em (b), fica evidente que as duas cliques são $X = \{A, B, C\}$ e $Y = \{1, 2\}$.	24
2.12	Grafo G' .	25
2.13	Grafo de Petersen cujos vértices destacados em preto formam um conjunto dominante.	25
2.14	Grafo de Petersen cujos vértices destacados em preto formam um código identificador.	26
2.15	Grafo de Petersen cujos vértices destacados em preto formam um conjunto dominante localizador.	27
3.1	Família de grafos proibidos utilizados na caracterização de grafos split e suas subclasses.	28
3.2	Grafo split onde os conjuntos Q e S constituem, respectivamente, a clique e o conjunto independente.	29
3.3	O grafo em (a) é um grafo comparabilidade pois pode ser orientado transitivamente, conforme em (b).	29
3.4	O grafo em (a) é um grafo permutação caracterizado pelo diagrama em (b).	30

3.5	O grafo em (a) é um grafo intervalo relativo ao conjunto de intervalos em (b).	30
3.6	Grafo split-comparabilidade. As arestas da clique foram omitidas para melhor visualização.	31
3.7	Grafo split-permutação. As arestas da clique foram omitidas para melhor visualização.	32
3.8	O grafo em (a) é um grafo split-intervalo relativo ao conjunto de intervalos em (b).	32
3.9	Grafo threshold representado de duas formas diferentes. Em (b), fica evidente que o grafo é também split-permutação.	33
3.10	Grafo split completo.	34
3.11	Produto corona.	34
3.12	Grafo split corona.	35
5.1	Exemplos de grafos para cada caso. O caso exibido em (e) não satisfaz a hipótese do teorema.	40
5.2	Exemplos de grafos split livres de gêmeos com $\gamma_L = \frac{n}{2}$.	41
5.3	Exemplo do caso 1.1.	43
5.4	Exemplo do caso 1.2 quando y pertence à clique de G .	44
5.5	Exemplo do caso 1.2 quando y pertence ao conjunto independente de G .	44
5.6	Exemplo do caso 2.1 quando $y \in Q$.	45
5.7	Exemplo do caso 2.1 quando $y \in S$.	46
5.8	Exemplo do caso 2.2.	46
5.9	Esquema dos grafos G e G' quando u, v e w são gêmeos abertos.	47
5.10	Esquema dos grafos G e G' quando u, v e w são gêmeos fechados.	47
5.11	Grafo split completo com $ Q = 1$ e $ S = 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .	48
5.12	Grafo split completo com $ Q = 1$ e $ S > 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .	49
5.13	Grafo split completo com $ S = 1$ e $ Q > 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .	49
5.14	Grafo split completo com $ Q > 1$ e $ S > 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .	50
5.15	Casos base de grafos split corona. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .	51

Lista de Tabelas

3.1	Relação entre classes e subgrafos induzidos proibidos.	34
4.1	Complexidade de CDL em algumas classes de grafos.	37

Introdução

Durante o século XVIII, na antiga cidade prussiana de Königsberg, atual Kaliningrado, na Rússia, tornou-se conhecido um quebra-cabeça envolvendo sete pontes que atravessavam o Rio Prególia, localizado na cidade. A ideia do quebra-cabeça era determinar se um cidadão poderia caminhar pela cidade, passando por cada uma das pontes exatamente uma vez, sem repetir uma ponte.

Esse problema tornou-se parte do imaginário popular do local, e durante algum tempo ninguém obteve uma resposta para ele. Na Figura 1.1, há um mapa da cidade de Königsberg onde é possível visualizar as sete pontes que atravessam o rio.

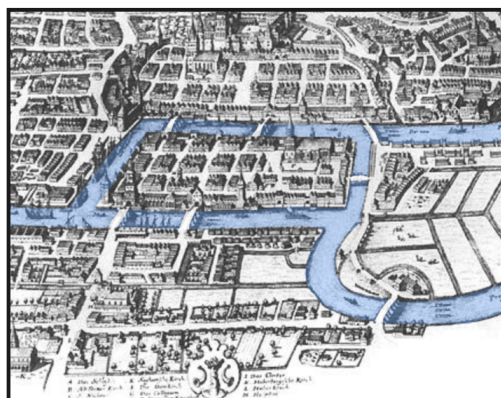


Figura 1.1: Sete pontes de Königsberg. Fonte: SciLogs.

O desafio acabou despertando a curiosidade de um matemático e físico suíço chamado Leonhard Euler. Em 1736, Euler publicou um artigo provando que é impossível realizar tal façanha. Ele propôs uma abstração para o problema, desenhando as pontes como linhas que conectavam as porções de terra, que por sua vez eram representadas como pontos, conforme ilustra a Figura 1.2.

Euler percebeu que, para que fosse possível percorrer todo o caminho passando apenas uma vez por cada linha, deveria haver nenhum ou exatamente dois pontos com uma quantidade ímpar de linhas que partem dele. Isso porque, ao entrar em um ponto, será preciso outra linha para sair, de modo que não haja repetição de linhas. Com apenas dois pontos contendo uma quantidade ímpar de linhas, deve-se iniciar o trajeto em um

deles e terminar no outro. Caso não haja pontos com uma quantidade ímpar de linhas, basta iniciar e terminar o percurso no mesmo ponto. Contudo, todos os quatro pontos do modelo apresentam uma quantidade ímpar de linhas que partem deles, o que torna inviável a realização do percurso proposto pelo problema. Dessa forma, o quebra-cabeça das sete pontes de Königsberg foi resolvido.

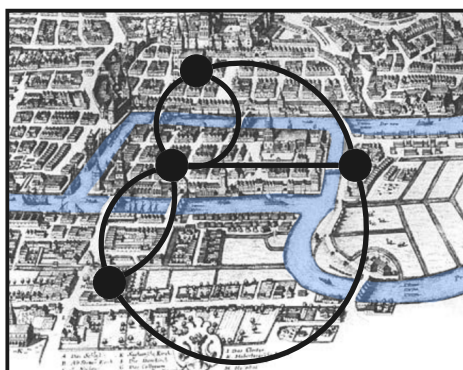


Figura 1.2: Abstração para o problema das sete pontes de Königsberg, conforme idealizado por Euler.

Essa abstração feita por Euler possivelmente é primeiro registro na história do que hoje em dia é conhecido como grafo. Um grafo é definido como um par ordenado (V, E) onde V é um conjunto de elementos chamados vértices e E é um conjunto de arestas, que são conexões entre dois elementos não necessariamente distintos de V . Na Figura 1.3, há um desenho de um grafo construído com base na abstração de Euler para o problema das sete pontes, onde os vértices são representados por círculos e as arestas por linhas.

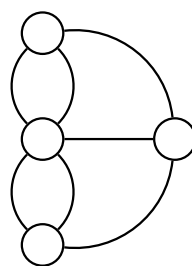


Figura 1.3: Grafo construído a partir da abstração de Euler.

Desde sua conceitualização, grafos têm sido utilizados em aplicações reais de diversas áreas do conhecimento humano. Na ciência da computação, grafos são fundamentais para a construção de algoritmos, incluindo busca em largura, busca em profundidade, encontrar o menor caminho entre dois pontos, algoritmos para roteamento eficiente de pacotes pela rede, entre outros. Na biologia, grafos auxiliam na modelagem

de redes genéticas regulatórias e de redes de interação proteína-proteína. Na sociologia, a teoria dos grafos é aplicada na análise de redes de interações sociais, para a compreensão da complexidade das relações humanas. Na área de transportes, modelos baseados em grafos são usados na logística de roteamento e otimização de tráfego. De maneira geral, problemas que envolvem conexões ou relacionamento entre elementos podem ser modelados por meio de grafos.

Existem diversos tipos diferentes de grafos, cada um com características e propriedades específicas. Na área de teoria dos grafos, classifica-se formalmente alguns tipos especiais de grafos. Uma classe frequentemente estudada é a de grafos split, que são caracterizados por poderem ser divididos em dois conjuntos, um contendo vértices que possuem uma aresta entre cada par de vértices, e outro cujos vértices não possuem nenhuma aresta entre eles. Além disso, podem haver conexões entre vértices de conjuntos distintos.

A classe de grafos split pode ser aplicada para modelar problemas em que há um grupo de elementos fortemente conectados e outro cujos elementos não interagem entre si. Na Figura 1.4, há um exemplo de um grafo split, onde, na região A, há uma aresta entre cada par de vértices e, na região B, não há nenhuma aresta entre dois vértices.

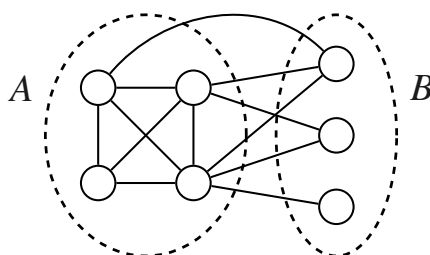


Figura 1.4: Exemplo de um grafo split.

Além de classes especiais, na teoria dos grafos foram definidos alguns conjuntos de vértices com propriedades específicas. Dentre eles, temos os conjuntos dominantes localizadores, que podem ser compreendidos com a seguinte analogia. Suponha que exista um ambiente fechado composto por salas, conforme ilustra a Figura 1.5.

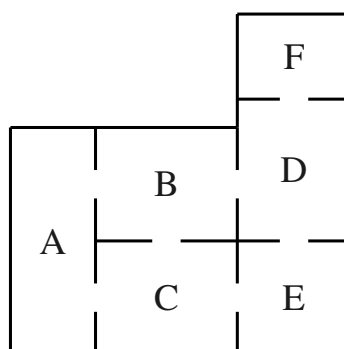


Figura 1.5: Ambiente fechado composto por salas visto de cima.

Nesse ambiente, cada sala, identificada por uma letra, possui entradas ou corredores para dar acesso a algumas outras salas, que serão chamadas de vizinhas. Além disso, esse ambiente é restrito, de modo que existem sensores posicionados em algumas salas. Cada sensor é capaz de detectar a presença de um intruso se ele estiver em sua própria sala ou em salas vizinhas; porém, a detecção não identifica em qual sala vizinha o intruso se encontra, apenas determina se ele está na mesma sala do sensor ou não.

Considere o problema de preencher o ambiente com sensores de modo que seja possível identificar a presença de um intruso e também a sala em que está localizado. Uma solução óbvia seria colocar um sensor em cada sala, pois cada sensor pode determinar se o intruso está em sua própria sala. No entanto, supondo que haja um custo para implantação de um sensor, o problema pode incluir o objetivo de minimizar a quantidade de sensores instalados.

Diante disso, uma forma de modelar esse problema é utilizar grafos. Cada vértice do grafo representa uma sala e uma aresta entre dois vértices indicam que as salas correspondentes são vizinhas. A Figura 1.6 apresenta um modelo de grafo para o ambiente da Figura 1.5, onde os vértices destacados em preto indicam que um sensor foi instalado naquela sala.

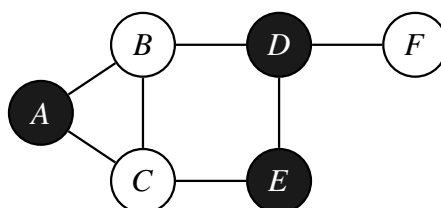


Figura 1.6: Grafo que modela o ambiente da Figura 1.5.

Foram selecionados vértices estrategicamente de modo que é possível detectar e localizar um intruso. Caso o intruso esteja nas salas A , D ou E , o próprio sensor respectivo à sala poderá localizá-lo. Um intruso na sala B será localizado se os sensores das salas A e D forem acionados, na sala C pelos sensores presentes em A e E e, por fim, na sala F pelo sensor presente em D . Esse conjunto de vértices que possui a propriedade de detectar e localizar um intruso é conhecido como conjunto dominante localizador.

Alguns estudos na literatura de teoria dos grafos abordam conjuntos dominantes localizadores. Em geral, esses estudos costumam abordar questões de complexidade, caracterizações e limites para a cardinalidade mínima desse conjunto em grafos. Charon et al. [2] demonstraram que o problema de se determinar se um grafo qualquer admite um conjunto dominante localizador de tamanho máximo k , onde $k \in \mathbb{Z}^+$, pertence à classe de complexidade NP-completo.

Foucaud [6] demonstrou que esse problema se mantém NP-completo para grafos grafos cobipartidos e grafos split. O mesmo resultado foi obtido por Foucaud et al. [8] para

grafos intervalos e grafos permutação. Por outro lado, o problema pode ser resolvido em tempo linear com relação ao tamanho da entrada para árvores, conforme demonstrado por Slater [15]. Diante disso, muitos pesquisadores vêm buscando caracterizações para o problema, restringindo-o para classes mais específicas de grafos. Uma bibliografia contendo referências a mais de 500 artigos sobre conjuntos dominantes localizadores e conceitos relacionados foi disponibilizada por Jean [11].

Neste trabalho, primeiramente foi feito um estudo a respeito de conjuntos dominantes localizadores, reunindo resultados importantes presentes na literatura para diferentes classes de grafos. Em seguida, realizou-se uma revisão de grafos split e algumas de suas principais subclasses, e foram citadas caracterizações existentes para essas subclasses a fim de auxiliar na descrição desses grafos. Foi identificado um pequeno equívoco na demonstração de Foucaud et al. [7] para o limite superior de $\frac{n}{2}$ para conjuntos dominantes localizadores em grafos split, e uma versão didática dessa demonstração, com os devidos ajustes, foi apresentada neste trabalho.

Ademais, a partir dos conceitos estudados, foi construída uma proposição para simplificar grafos split que possuem vértices mutuamente gêmeos, transformando-os em grafos com menos vértices e reduzindo a cardinalidade mínima do conjunto dominante localizador em uma unidade a cada vértice removido. Por fim, foram apresentadas fórmulas fechadas para a cardinalidade mínima de conjuntos dominantes localizadores em grafos split completos e grafos split corona.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, serão apresentados os conceitos fundamentais da teoria dos grafos para o entendimento do trabalho, incluindo definições básicas, algumas classes especiais de grafos e alguns tipos de conjuntos de vértices especiais comumente estudados. No Capítulo 3, aprofundaremos os conceitos, abordando com mais detalhes a classe de grafos split, incluindo também as suas principais subclasses. O Capítulo 4, por sua vez, tem como objetivo trazer uma visão geral dos estudos já feitos na literatura a respeito de conjuntos dominantes localizadores em algumas das principais classes de grafos, incluindo resultados de complexidade computacional e limites para cardinalidade mínima desses conjuntos. No Capítulo 5, serão apresentados os resultados do estudo de conjuntos dominantes localizadores em subclasses de grafos split. Por fim, o Capítulo 6 traz as considerações finais do trabalho, com um resumo do estudo feito e comentários sobre trabalhos futuros.

Conceitos preliminares

Um *vértice* pode ser entendido como um simples objeto ou elemento, representado por um símbolo. Se u e v são dois vértices, pode-se estabelecer uma conexão entre eles, denotada por $\{u, v\}$ ou uv , que é chamada de *aresta*.

Um *grafo* G é um par ordenado (V, E) , onde V é um conjunto de vértices e $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ é um conjunto de arestas. Utiliza-se a notação $V(G)$ e $E(G)$ para explicitar o grafo G ao qual o conjunto de vértices e de arestas fazem parte, respectivamente. A *quantidade de vértices* de um grafo G , representada por n , é igual a $|V(G)|$, e a *quantidade de arestas* de G , denotada por m , é igual a $|E(G)|$. A *ordem* de um grafo é igual à sua quantidade de vértices.

Um grafo pode ser representado visualmente por meio de um diagrama em que pontos ou círculos representam os vértices e segmentos de reta interligando dois pontos representam as arestas. A Figura 2.1 ilustra um grafo G_1 cujo conjunto de vértices é $V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$ e o conjunto de arestas é $E(G_1) = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$.

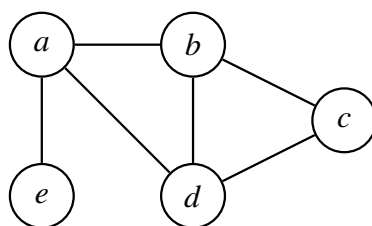


Figura 2.1: Grafo G_1 .

Um grafo G é dito *não orientado* se $\{u, v\} = \{v, u\}$ para toda aresta $\{u, v\} \in E\{G\}$. Caso contrário, ou seja, se $\{u, v\} \neq \{v, u\}$, então G é *orientado*. Se um grafo for orientado, utiliza-se a notação (u, v) ou uv para representar uma aresta direcionada do vértice u ao vértice v .

Uma aresta $\{u, v\} \in E(G)$ tal que $u = v$ é chamada de *laço* ou *loop*. Se duas arestas $\{u, v\}$ e $\{u', v'\}$ pertencem a $E(G)$ e $u = u'$ e $v = v'$, dizemos que essas arestas são *múltiplas* ou *paralelas*. Um grafo G é um *grafo simples* se não possuir laços ou arestas múltiplas.

Dizemos que um grafo é *finito* quando seu conjunto de vértices V e seu conjunto de arestas E são conjuntos finitos; caso contrário, ele é *infinito*. O grafo da Figura 2.1 é um grafo finito, simples e não orientado. A partir deste ponto do trabalho, a não ser que seja dito o contrário, todos os grafos serão finitos, simples e não orientados.

Se $uv \in E(G)$, dizemos que os vértices u e v são *vizinhos* ou *adjacentes* entre si e são *incidentes* à aresta uv . Dizemos também que u e v são os *extremos* da aresta uv . O *grau* de um vértice v , denotado por $\deg(v)$, representa a quantidade de arestas incidentes a ele. Um vértice de grau 0 é chamado de *vértice isolado*, um vértice de grau 1 é chamado de *vértice pendente* ou *folha*, e um vértice adjacente a um vértice folha é chamado de *vértice suporte*. O *grau mínimo* de um grafo G , representado por $\delta(G)$, é definido como $\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$. O *grau máximo* de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é definido como $\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$. Na Figura 2.1, por exemplo, o grafo G_1 possui grau mínimo $\delta(G_1) = 1$ pois o vértice de menor grau é o vértice e .

Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G e H são *isomorfos* se existir uma função bijetora $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que, para todos os vértices $u, v \in V(G)$, u e v são adjacentes em G se e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H . Se G e H são isomorfos, dizemos que há um *isomorfismo* entre G e H e utilizamos a notação $G \cong H$. Na Figura 2.2, é possível visualizar dois grafos isomorfos G e H .

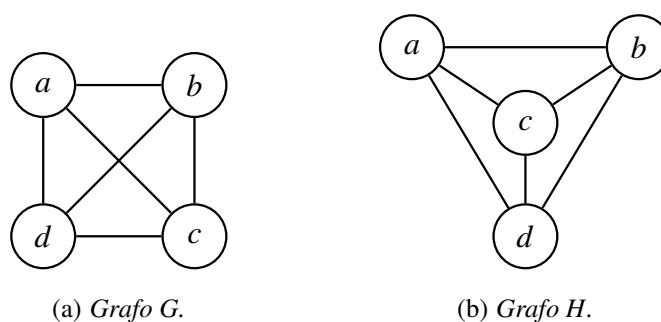


Figura 2.2: Grafos isomorfos.

Seja G um grafo. Um grafo H é dito *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ e utiliza-se a notação $H \subseteq G$ para representar essa relação. Quando $H \subseteq G$ e $H \neq G$, dizemos que H é um *subgrafo próprio* de G e denota-se essa relação por $H \subset G$. Um *subgrafo gerador* H de G é um subgrafo de G tal que $V(H) = V(G)$.

Um subgrafo de G cujo conjunto de vértices V' é um subconjunto não vazio de $V(G)$ e o conjunto de arestas E' são todas as arestas de G cujas extremidades pertencem a V' é chamado *subgrafo induzido* de G por V' , representado por $G[V']$. Utiliza-se a notação $G \setminus V'$, onde $V' \subseteq V(G)$, para representar um subgrafo induzido de G obtido pela remoção dos vértices pertencentes ao conjunto V' juntamente com as arestas incidentes a algum $v \in V'$. Analogamente, utiliza-se a notação $G \setminus E'$, onde $E' \subseteq E(G)$, para representar um subgrafo induzido de G obtido pela remoção das arestas pertencentes ao conjunto E' .

Na Figura 2.3, há um exemplo de um subgrafo S , que é um subgrafo de G induzido por $V' = \{a, c, d\}$.

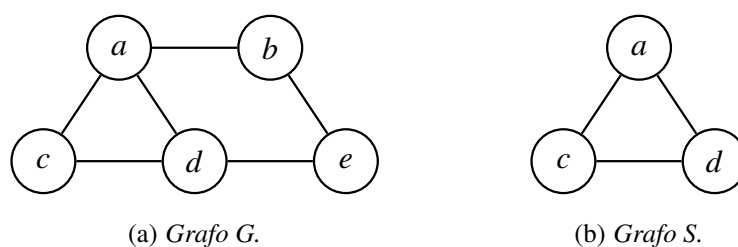


Figura 2.3: Grafo S subgrafo induzido de G .

O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} , é o grafo que contém todos os vértices de G , e seus vértices são adjacentes se e somente se eles não são adjacentes em G , ou seja, $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{uv \mid u, v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$. Se um grafo H é complemento de um grafo G , dizemos que G e H são grafos *complementares*. Na figura 2.4, há um exemplo de grafos complementares.

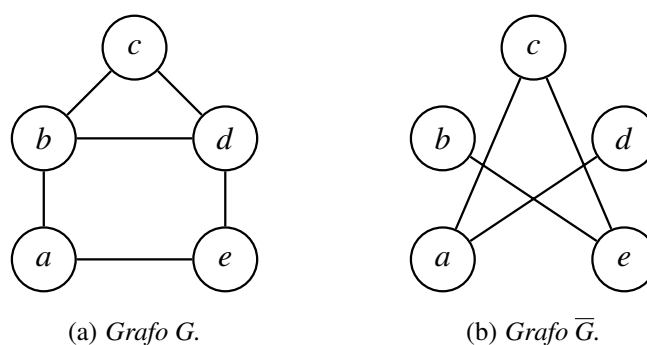


Figura 2.4: Grafos complementares.

Um *passaio* em um grafo G é uma sequência finita v_0, v_1, \dots, v_k , onde $k \in \mathbb{Z}^+$, tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k$, e o inteiro k é o *tamanho do passaio*. Uma *trilha* é um passaio v_0, v_1, \dots, v_k tal que todas as arestas (v_{i-1}, v_i) , $1 \leq i \leq k$, são distintas. Um *caminho* é um passaio v_0, v_1, \dots, v_k tal que todos os vértices v_i , $1 \leq i \leq k$, são distintos. Um *uv-caminho* é um caminho v_0, v_1, \dots, v_k em que $v_0 = u$ e $v_k = v$. Um *ciclo* é um passaio v_0, v_1, \dots, v_k tal que v_0, v_1, \dots, v_{k-1} é um caminho e $v_0 = v_k$. Na Figura 2.4 (a), por exemplo, temos um *ec-caminho* e, a, b, c .

Um grafo é dito *cíclico* se possuir um ou mais ciclos, e *acíclico* caso contrário. A *cintura* de um grafo G é comprimento do ciclo mais curto contido em G , isto é, com a menor quantidade de vértices. Se G é um grafo acíclico, define-se sua cintura como sendo infinita. O grafo G da Figura 2.4 (a), por exemplo, é um grafo cíclico de cintura 3, pois possui o ciclo c, b, d, c , que é um ciclo de menor comprimento.

Um grafo G é dito *conexo* se há um uv -caminho, $u, v \in V(G)$, entre cada par de vértices distintos de G , e *desconexo* caso contrário. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo maximal conexo de G , isto é, um subgrafo conexo que não é subgrafo próprio de outro subgrafo conexo. A *quantidade de componentes conexas* de um grafo G é denotado por $\omega(G)$. O grafo G_1 da Figura 2.1 é um exemplo de grafo conexo, logo $\omega(G_1) = 1$.

A distância entre dois vértices u e v de um grafo G , denotada por $d(u, v)$, é definida como sendo o tamanho do caminho mais curto entre u e v . A *excentricidade* de um vértice $v \in V(G)$, representada por $\varepsilon(v)$, é o valor da maior distância entre v e qualquer outro vértice $u \in V(G)$, isto é, $\varepsilon(v) = \max_{u \in V(G)} d(v, u)$. O *raio* de um grafo G , denotado por $r(G)$, é o valor da menor excentricidade dentre todos os vértices $v \in V(G)$, isto é, $r(G) = \min_{v \in V(G)} \varepsilon(v)$. O *diâmetro* de um grafo G , denotado por $\text{diam}(G)$, é o valor da maior excentricidade dentre todos os vértices $v \in V(G)$, isto é, $\text{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \varepsilon(v)$. Na Figura 2.1, por exemplo, o grafo G_1 possui diâmetro $\text{diam}(G_1) = 3$, pois a maior excentricidade é a do vértice e , cujo valor é resultado da distância entre e e c .

Seja G um grafo e $v \in V(G)$ um vértice desse grafo. A *vizinhança aberta* de v , denotada por $N(v)$, é definida como o conjunto de vértices adjacentes a v , isto é, $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. A *vizinhança fechada* de v , denotada por $N[v]$, é definida como a união da vizinhança aberta de v com o próprio vértice v , isto é, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Na Figura 2.5 (a), por exemplo, a vizinhança aberta do vértice d é $N(d) = \{a, b, e\}$.

Dois vértices distintos u e v são *gêmeos abertos* se $N(u) = N(v)$ e *gêmeos fechados* se $N[u] = N[v]$. Dizemos que u e v são *gêmeos* se forem gêmeos abertos ou fechados. Um grafo é dito *livre de gêmeos* se não possuir vértices gêmeos. Os vértices c e f do grafo da Figura 2.5 (b) são exemplos de gêmeos fechados, pois $N[c] = N[f] = \{b, c, e, f\}$.

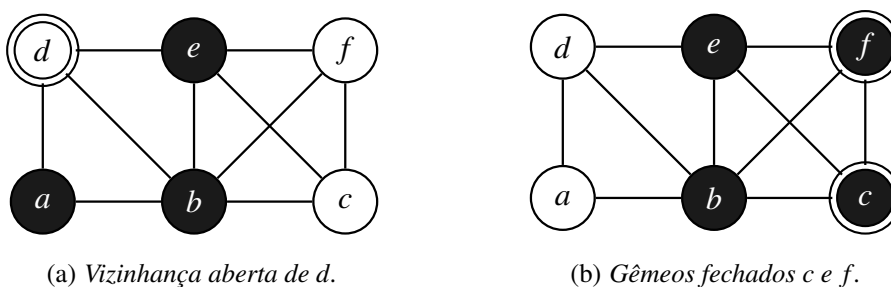


Figura 2.5: Em (a), os vértices pretos constituem a vizinhança aberta de d . Em (b), os vértices pretos constituem a vizinhança fechada de c e de f , mostrando que são gêmeos fechados.

Uma *cobertura de vértices* de um grafo G é um subconjunto $V' \subseteq V(G)$ tal que

toda aresta pertencente a $E(G)$ possui pelo menos um vértice $v \in V'$. Uma *cobertura de arestas* de um grafo G é um subconjunto $E' \subseteq E(G)$ tal que todo vértice pertencente a $V(G)$ é incidente a pelo menos uma aresta $uv \in E'$. Na Figura 2.6, há um exemplo de uma cobertura de vértices.

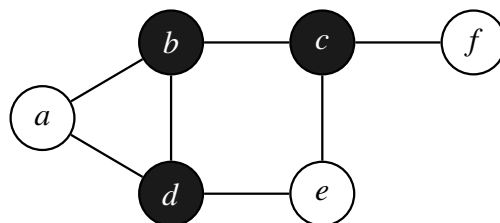


Figura 2.6: O conjunto de vértices $\{b, c, d\}$, em destaque, é uma cobertura de vértices.

Uma *clique* é um subconjunto de vértices Q de um grafo em que os vértices são dois a dois adjacentes, isto é, se u e v são dois vértices quaisquer pertencentes a Q , então há uma aresta entre eles. Na Figura 2.7, há um exemplo de uma clique.

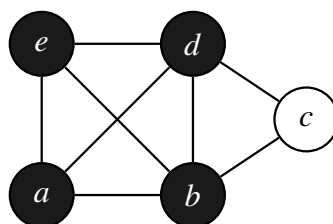


Figura 2.7: O conjunto de vértices $\{a, b, d, e\}$, em destaque, é uma clique.

Um *conjunto independente* é um subconjunto de vértices S de um grafo em que os vértices são dois a dois não adjacentes, isto é, se u e v são dois vértices quaisquer pertencentes a S , então não há uma aresta entre eles. Na Figura 2.8, há um exemplo de um conjunto independente.

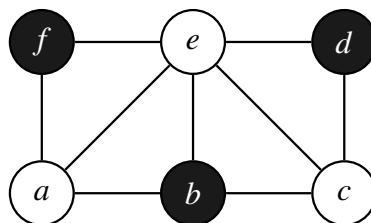


Figura 2.8: O conjunto de vértices $\{b, d, f\}$, em destaque, é um conjunto independente.

Na literatura de teoria dos grafos, existem diversas classes especiais de grafos que são comumente estudadas no contexto de problemas específicos. A seguir, serão definidas algumas das principais classes.

Um *grafo caminho* de n vértices, denotado por P_n , é um grafo cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência linear v_0, v_1, \dots, v_{n-1} tal que dois vértices v_i e v_j são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência. Um *grafo ciclo* de n vértices, denotado por C_n , é um grafo com $n \geq 3$ cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência linear cíclica v_0, v_1, \dots, v_n , onde $v_n = v_0$, tal que dois vértices v_i e v_j são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na sequência. Uma *árvore* é um grafo conexo acíclico. Na Figura 2.9 os grafos P_3 (a), C_6 (b) e T (c) são exemplos de grafo caminho, grafo ciclo e árvore, respectivamente. Ademais, P_3 também é uma árvore.

Um *grafo regular* é um grafo em que todos os vértices possuem o mesmo grau, isto é, $\deg(v) = k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, para todo v pertencente ao conjunto de vértices. Um grafo regular com vértices de grau k também é chamado de *grafo k -regular*. Um *grafo completo* de n vértices, denotado por K_n , é um tipo especial de grafo regular em que há uma aresta entre cada par de vértices distintos. Um *grafo cúbico* é um grafo 3-regular, ou seja, todos os seus vértices possuem grau 3. Um *grafo subcúbico* é um grafo tal que todos os seus vértices possuem grau menor ou igual a 3. O grafo K_4 presente na Figura 2.9 (d) é um grafo completo, cúbico e subcúbico.

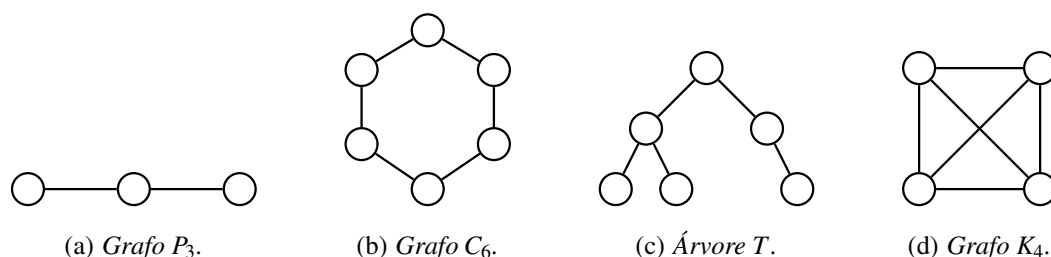


Figura 2.9: Exemplos de grafos de algumas classes.

Um *grafo bipartido* é um grafo G tal que seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes disjuntos X e Y , de modo que cada aresta é incidente a um vértice em X e a outro vértice em Y . Utiliza-se a notação $G[X, Y]$ para grafos bipartidos sobre os subconjuntos X e Y . Se $G[X, Y]$ é um grafo bipartido em que todo vértice em X é adjacente a todo vértice em Y , dizemos que $G[X, Y]$ é um *grafo bipartido completo*, e utiliza-se a notação $K_{m,n}$, onde $m = |X|$ e $n = |Y|$. Na Figura 2.10, há um exemplo de um grafo bipartido.

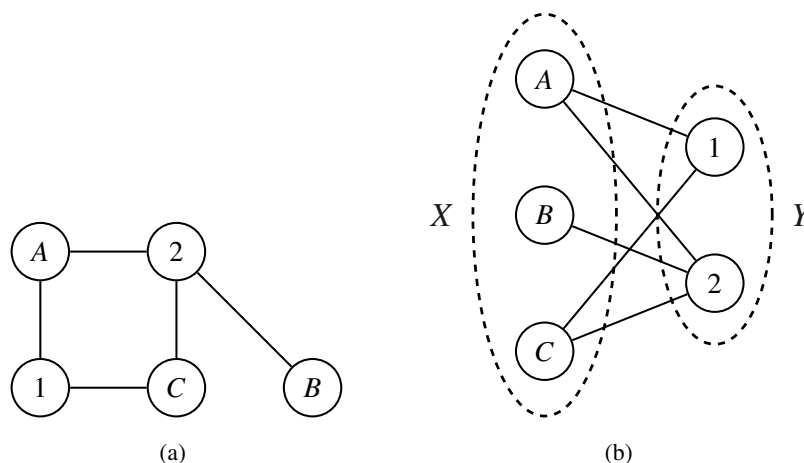


Figura 2.10: Grafo bipartido representado de duas formas diferentes. Em (b), fica evidente que os dois conjuntos independentes são $X = \{A, B, C\}$ e $Y = \{1, 2\}$.

Um grafo *cobipartido* é um grafo G tal que seu conjunto de vértices pode ser particionado em duas cliques disjuntas X e Y . Grafos cobipartidos são complementos de grafos bipartidos, e vice-versa. Na Figura 2.11, há um exemplo de um grafo cobipartido, que é um grafo complementar ao grafo da Figura 2.10.

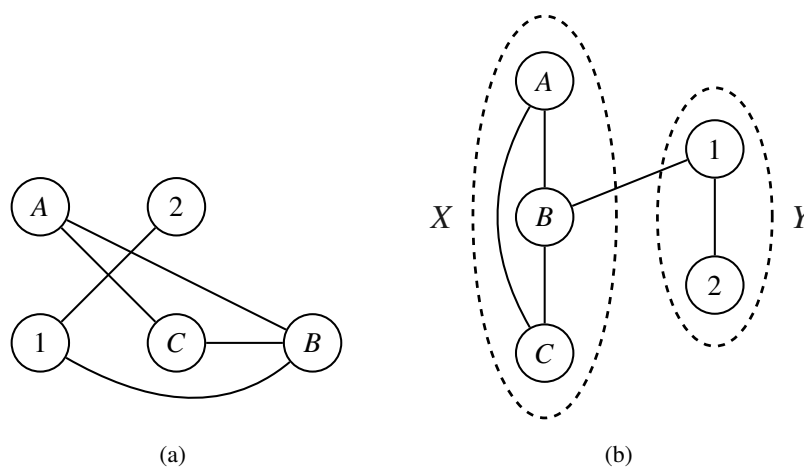


Figura 2.11: Grafo cobipartido representado de duas formas diferentes. Em (b), fica evidente que as duas cliques são $X = \{A, B, C\}$ e $Y = \{1, 2\}$.

Um grafo *planar* é um grafo que pode ser representado visualmente em um plano de modo que suas arestas não se cruzam. O grafo da Figura 2.11 é um exemplo de grafo planar, pois em (b) há uma representação em que não há cruzamento de arestas.

Na literatura de teoria dos grafos, também existem alguns conjuntos especiais de vértices. A seguir, serão definidos os conjuntos dominantes, os códigos identificadores, os conjuntos dominantes localizadores e conceitos relacionados.

Seja G um grafo tal que $u, v, w \in V(G)$. Dizemos que u *domina* v se $v \in N[u]$, ou seja, u domina a si mesmo e todos os vértices $v \in V(G)$ tais que $uv \in E(G)$. No grafo G' da Figura 2.12, por exemplo, o vértice x domina os vértices x, a e y pois $x, a, y \in N[x]$. Se um vértice w pertence à diferença simétrica entre $N[u]$ e $N[v]$, isto é, se w domina exatamente um vértice dentre u e v , dizemos que w *separa* u e v . Dois vértices u e v são *separados* se existe algum vértice w que separa u e v . Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto separador* se $\forall u, v \in V(G) - S$, u e v são separados por algum $w \in S$. Na Figura 2.12, por exemplo, x separa a e b , pois x domina a mas não domina b ; por outro lado, y não separa a e b , pois y domina ambos os vértices.

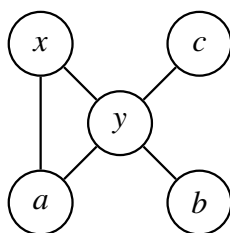


Figura 2.12: Grafo G' .

Um *conjunto dominante* de um grafo G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $N[v] \cap S \neq \emptyset$ para todo $v \in V(G)$, isto é, todo vértice do grafo é dominado por algum $x \in S$. O *número de dominação* de um grafo G , denotado por $\gamma(G)$, é a cardinalidade do menor conjunto dominante possível de G , isto é, $\gamma(G) = |S|$ onde S é um conjunto dominante tal que $\nexists S'$ em que S' é um conjunto dominante e $|S'| < |S|$. Um conjunto dominante S tal que $|S| = \gamma(G)$ é chamado de *conjunto dominante mínimo* ou *conjunto- γ* .

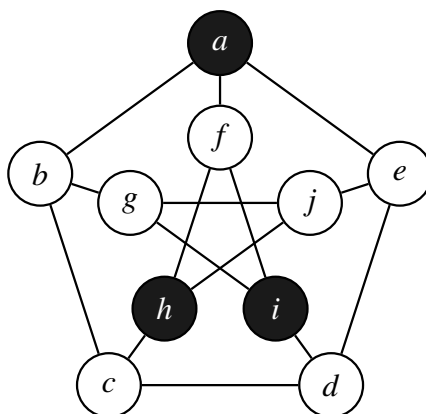


Figura 2.13: Grafo de Petersen cujos vértices destacados em preto formam um conjunto dominante.

Um *conjunto dominante total* de um grafo G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $N(v) \cap S \neq \emptyset$ para todo $v \in V(G)$. O *número de dominação total* de um grafo G , denotado por $\gamma_T(G)$, é a cardinalidade do menor conjunto dominante total possível de G , isto é, $\gamma_T(G) = |S|$ onde S é um conjunto dominante total tal que $\nexists S'$ em que S' é um conjunto

dominante total e $|S'| < |S|$. Um conjunto dominante total S tal que $|S| = \gamma_T(G)$ é chamado de *conjunto dominante total mínimo* ou *conjunto- γ_T* .

Na Figura 2.13, há um exemplo de um conjunto dominante para o grafo de Petersen, cujo γ é igual a 3. Esse conjunto, que chamaremos de S , é formado pelos vértices $\{a, h, i\}$, e é possível verificar que ele é dominante porque $N[a] \cap S = \{a\}$, $N[b] \cap S = \{a\}$, $N[c] \cap S = \{h\}$, $N[d] \cap S = \{i\}$, $N[e] \cap S = \{a\}$, $N[f] \cap S = \{a, h, i\}$, $N[g] \cap S = \{i\}$, $N[h] \cap S = \{h\}$, $N[i] \cap S = \{i\}$ e $N[j] \cap S = \{h\}$, ou seja, $N[v] \cap S \neq \emptyset$ para todo vértice v do grafo.

Um *código identificador* de um grafo G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que S é um conjunto dominante de G e $N[u] \cap S \neq N[v] \cap S$ para todos os vértices $u, v \in V(G)$. O *número de identificação* de um grafo G , denotado por $\gamma_{ID}(G)$, é a cardinalidade do menor código identificador possível de G , isto é, $\gamma_{ID}(G) = |S|$ onde S é um código identificador tal que $\nexists S'$ em que S' é um código identificador e $|S'| < |S|$. Um código identificador S tal que $|S| = \gamma_{ID}(G)$ é chamado de *código identificador mínimo* ou *conjunto- γ_{ID}* .

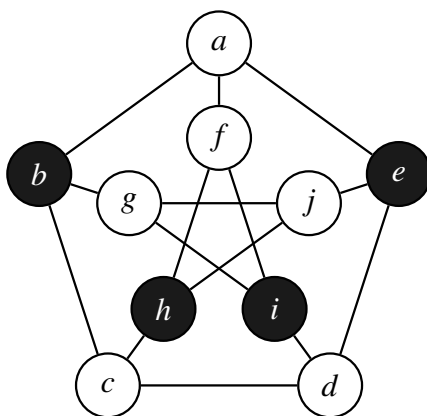


Figura 2.14: Grafo de Petersen cujos vértices destacados em preto formam um código identificador.

Observe que $N[u] \cap S \neq N[v] \cap S$ se e somente se u e v são separados por ao menos um vértice de S . Dessa forma, temos que um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é um código identificador de G se S é um conjunto dominante e todo par de vértices u e v pertencentes a $V(G)$ são separados por pelo menos um vértice de S .

Na Figura 2.14, há um exemplo de um código identificador para o grafo de Petersen, cujo γ_{ID} é igual a 4. Esse conjunto, que chamaremos de S , é formado pelos vértices $\{b, e, h, i\}$, e é possível verificar que ele é um código identificador porque $N[a] \cap S = \{b, e\}$, $N[b] \cap S = \{b\}$, $N[c] \cap S = \{b, h\}$, $N[d] \cap S = \{e, i\}$, $N[e] \cap S = \{e\}$, $N[f] \cap S = \{h, i\}$, $N[g] \cap S = \{b, i\}$, $N[h] \cap S = \{h\}$, $N[i] \cap S = \{i\}$ e $N[j] \cap S = \{e, h\}$, ou seja, $N[v] \cap S \neq \emptyset$ para todo vértice v do grafo, de modo que ele é dominante, e $N[u] \cap S \neq N[v] \cap S$ para todos os vértices u e v do grafo.

Um *conjunto dominante localizador* de um grafo G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que S é um conjunto dominante de G e $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$ para todos os vértices $u, v \in V(G) - S$. O *número de dominação localizadora* de um grafo G , denotado por $\gamma_L(G)$, é a cardinalidade do menor conjunto dominante localizador possível de G , isto é, $\gamma_L(G) = |S|$ onde S é um conjunto dominante localizador tal que $\nexists S'$ em que S' é um conjunto dominante localizador e $|S'| < |S|$. Um conjunto dominante localizador S tal que $|S| = \gamma_L(G)$ é chamado de *conjunto dominante localizador mínimo* ou *conjunto- γ_L* .

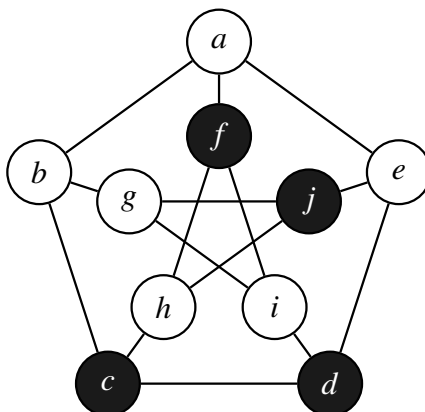


Figura 2.15: Grafo de Petersen cujos vértices destacados em preto formam um conjunto dominante localizador.

Observe que $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$ se e somente se u e v são separados por ao menos um vértice de S . Dessa forma, temos que um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é um conjunto dominante localizador de G se e somente se S é um conjunto dominante e separador.

Na Figura 2.15, há um exemplo de um conjunto dominante localizador para o grafo de Petersen, cujo γ_L é igual a 4. Esse conjunto, que chamaremos de S , é formado pelos vértices $\{c, d, f, j\}$. É possível verificar que esse conjunto é dominante conforme foi visto nos exemplos anteriores. Ademais, podemos verificar que $N(a) \cap S = \{f\}$, $N(b) \cap S = \{c\}$, $N(e) \cap S = \{d, j\}$, $N(g) \cap S = \{j\}$, $N(h) \cap S = \{c, f, j\}$ e $N(i) \cap S = \{d, f\}$, ou seja, $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$ para todos os vértices u e v do grafo que não pertencem ao conjunto S , de modo que ele também é localizador. No entanto, esse conjunto não é identificador, pois $N[a] \cap S = N[f] \cap S = \{f\}$, o que não satisfaz a condição de $N[u] \cap S \neq N[v] \cap S, \forall u, v \in V(G)$.

Grafos split e subclasses

Neste capítulo, serão definidas algumas classes de grafos presentes na literatura. Algumas delas são caracterizadas por não conterem nenhum subgrafo induzido isomorfo a alguns grafos especiais. A seguir, na Figura 3.1, há uma coleção de alguns desses grafos especiais, os chamados grafos proibidos, que serão utilizados nas caracterizações mencionadas.

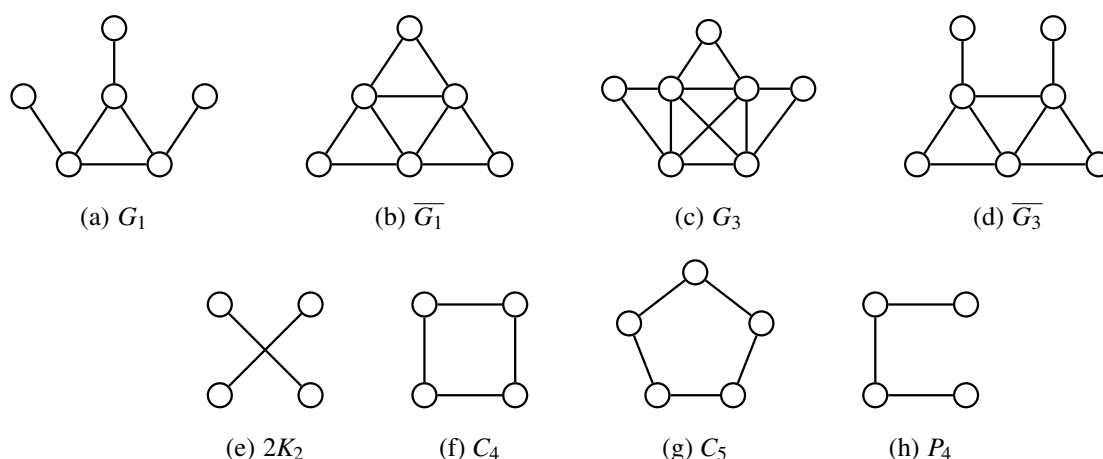


Figura 3.1: Família de grafos proibidos utilizados na caracterização de grafos split e suas subclasses.

Um *grafo split* é um grafo G cujo conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos Q e S tais que Q é uma clique e S é um conjunto independente. Foldes e Hammer [5] mostraram que G é um grafo split se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$, C_4 ou C_5 , presentes na Figura 3.1. Na Figura 3.2, é possível visualizar um exemplo de um grafo split, no qual a clique é o conjunto $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ e o conjunto independente é o conjunto $S = \{s_1, s_2, s_3\}$.

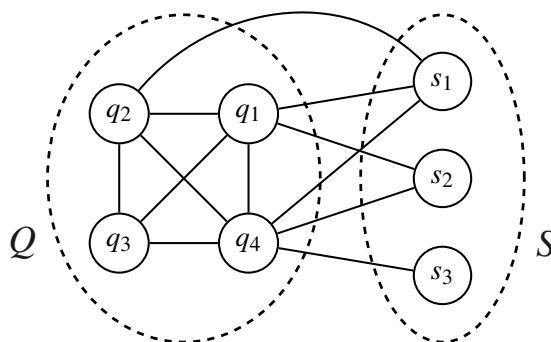


Figura 3.2: Grafo split onde os conjuntos Q e S constituem, respectivamente, a clique e o conjunto independente.

Um grafo é dito *grafo comparabilidade* se ele for orientável transitivamente, ou seja, se for possível atribuir direções nas arestas de modo que a relação de adjacência do grafo orientado resultante seja transitiva, isto é, se existem arestas direcionadas (a, b) e (b, c) , então existe uma aresta direcionada (a, c) . Na Figura 3.3, há um exemplo de um grafo comparabilidade.

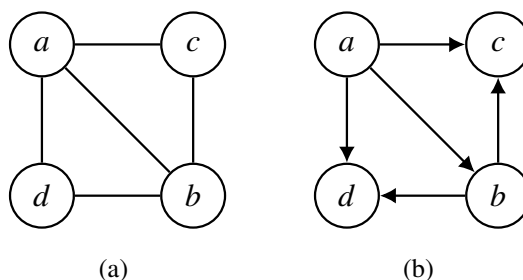


Figura 3.3: O grafo em (a) é um grafo comparabilidade pois pode ser orientado transitivamente, conforme em (b).

Seja $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$ uma permutação dos números $1, 2, \dots, n$, onde π_i representa o número da posição i e π_i^{-1} representa a posição na sequência onde o número i se encontra. Um grafo G é dito *grafo permutação* se existe uma permutação π tal que $G \cong G[\pi]$, onde $G[\pi]$ é um grafo cujo conjunto de vértices é igual a $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\{i, j\}$ é uma aresta de $G[\pi]$ se e somente se $(i - j)(\pi_i^{-1} - \pi_j^{-1}) < 0$. Um grafo G é um grafo permutação se e somente se G e \bar{G} são grafos comparabilidade.

Um grafo permutação também pode ser caracterizado por meio de um diagrama constituído por duas retas paralelas, em que uma reta contém uma sequência de números e a outra uma permutação desses números, e há um segmento de reta u entre os números correspondentes presentes em cada reta. Nesse caso, existe uma aresta $\{u, v\}$ no grafo se e somente se há uma interseção entre o segmento de reta u e o segmento de reta v no diagrama. Na Figura 3.4, há um exemplo de grafo permutação e seu respectivo diagrama. No diagrama em (b), o segmento 3 faz interseção com os segmentos 1 e 2, o que justifica a presença das arestas $\{3, 1\}$ e $\{3, 2\}$ no grafo em (a).

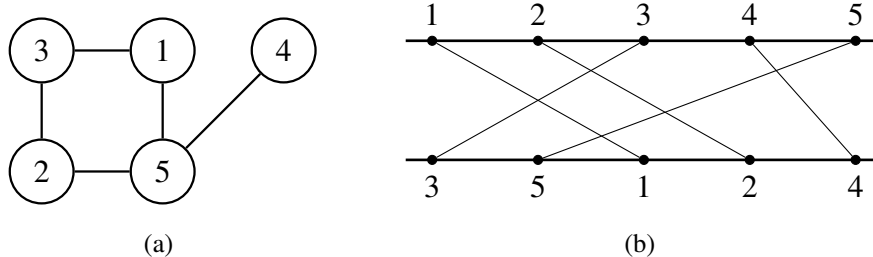


Figura 3.4: O grafo em (a) é um grafo permutação caracterizado pelo diagrama em (b).

Um *grafo intervalo* é um grafo formado a partir de um conjunto de intervalos contidos em uma reta real, onde cada vértice representa um dos intervalos e existe uma aresta entre dois vértices se e somente se os respectivos intervalos possuem uma interseção não vazia.

Um grafo é intervalo se e somente se ele não contém um ciclo C_4 como um subgrafo induzido e seu complemento é um grafo comparabilidade. Além disso, o complemento de qualquer grafo intervalo é um grafo comparabilidade. Há um exemplo de grafo intervalo na Figura 3.5. Em 3.5 (b), é possível ver que o intervalo C possui interseção com os intervalos B e D , por isso em 3.5 (a) o vértice C é adjacente a B e a D , e o mesmo vale para os demais intervalos.

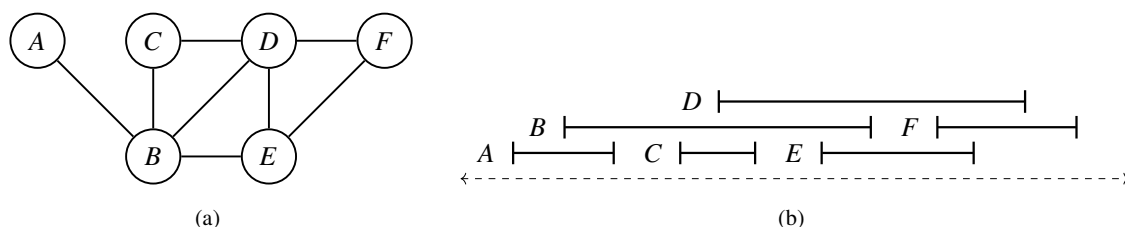


Figura 3.5: O grafo em (a) é um grafo intervalo relativo ao conjunto de intervalos em (b).

Se um grafo é split e comparabilidade simultaneamente, então dizemos que ele é um *grafo split-comparabilidade*. Ortiz e Villanueva [12] apresentaram a seguinte caracterização para grafos split-comparabilidade. Se $G = (V, E)$ é um grafo split em que $V = Q \cup S$, sendo Q uma clique e S um conjunto independente, então G é um grafo comparabilidade se e somente se o conjunto Q pode ser ordenado em v_1, v_2, \dots, v_r e particionado em três subconjuntos disjuntos, vazios ou não, $Q_\ell = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$, $Q_r = \{v_q, v_{q+1}, \dots, v_r\}$ e $Q_t = Q - (Q_\ell \cup Q_r)$, tais que, para todo vértice $s \in S$, $N(s)$ possui uma das seguintes formas:

- (i) $\{v_1, \dots, v_i\}$, $i \leq \ell$;
- (ii) $\{v_j, \dots, v_r\}$, $q \leq j \leq r$;
- (iii) $\{v_1, \dots, v_i\} \cup \{v_j, \dots, v_r\}$, $i \leq \ell$ e $q \leq j \leq r$.

Os conjuntos de vértices em S que possuem vizinhança da forma (i), (ii) e (iii) são denotados, respectivamente, por S_ℓ , S_r e S_t .

Foldes e Hammer [5] mostraram que um grafo split G é um grafo comparabilidade se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a G_1 , $\overline{G_1}$ ou $\overline{G_3}$, presentes na Figura 3.1, o que implica que G é split-comparabilidade se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a G_1 , $\overline{G_1}$, $\overline{G_3}$, $2K_2$, C_4 ou C_5 . Há um exemplo de um grafo split-comparabilidade na Figura 3.6, onde as arestas entre os vértices da clique $Q = \{Q_\ell \cup Q_t \cup Q_r\}$ foram omitidas para uma melhor visualização.

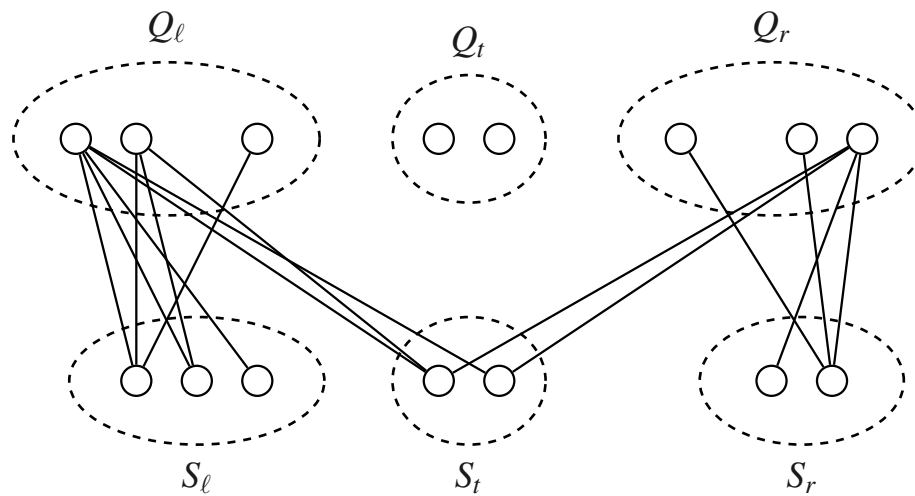


Figura 3.6: Grafo split-comparabilidade. As arestas da clique foram omitidas para melhor visualização.

Se um grafo é split e permutação simultaneamente, então dizemos que ele é um *grafo split-permutação*. Grafos split-permutação são uma subclasse de grafos split-comparabilidade. Ortiz e Villanueva [13] apresentaram a seguinte caracterização para grafos split-permutação. Se $G = (V, E)$ é um grafo split-comparabilidade em que $V = Q \cup S$, sendo Q uma clique e S um conjunto independente, então G é um *grafo split-permutação* se e somente se o conjunto S pode ser particionado em dois subconjuntos S_1 e S_2 tais que cada um deles possa ser ordenado de modo que s_i precede s_j se $N(s_i) \subseteq N(s_j)$ para $s_i, s_j \in S_1$ ou $s_i, s_j \in S_2$.

Um grafo G é split-permutação se e somente se G e \overline{G} são ambos grafos intervalo. Ortiz e Villanueva [13] também provaram que um grafo G é split-permutação se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a G_1 , $\overline{G_1}$, G_3 , $\overline{G_3}$, $2K_2$, C_4 ou C_5 , presentes na Figura 3.1. Na Figura 3.7, há um exemplo de um grafo split-permutação, onde as arestas entre os vértices da clique $Q = \{Q_\ell \cup Q_t \cup Q_r\}$ foram omitidas para uma melhor visualização.

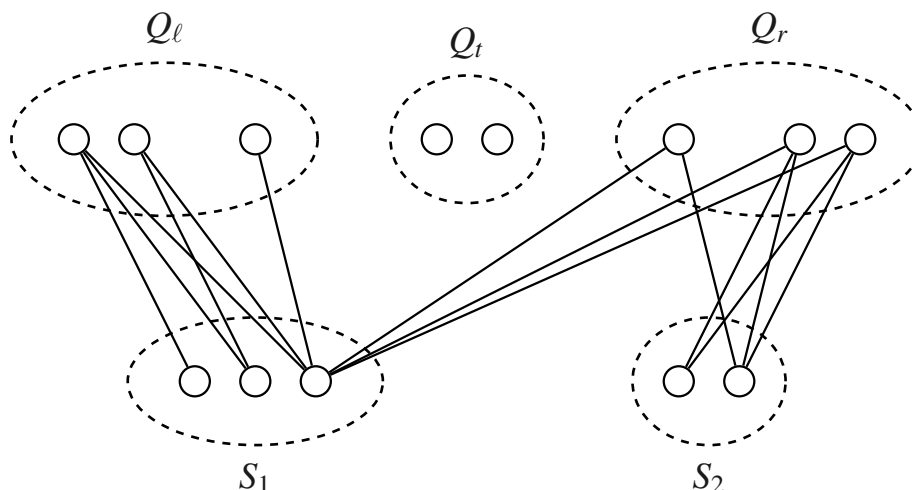


Figura 3.7: Grafo split-permutação. As arestas da clique foram omitidas para melhor visualização.

Se um grafo é split e intervalo simultaneamente, então ele é um *grafo split-intervalo*. Um conjunto de vértices V de um grafo possui uma ordem de inclusão de vizinhança se seus vértices podem ser ordenados em $v_0, v_1, \dots, v_{|V|-1}$ de modo que $N(v_0) \subseteq N(v_1) \subseteq \dots \subseteq N(v_{|V|-1})$. Da Soledade Gonzaga et al. [4] mostraram que se $G = (Q \cup S, E)$ é um grafo split-intervalo, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente, então existe uma partição de S em duas partes, S_1 e S_2 , possivelmente vazias, tais que cada uma possui uma ordem de inclusão de vizinhança.

Conforme demonstrado por Foldes e Hammer [5], um grafo split G é um grafo intervalo se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a $G_1, \overline{G_1}$ ou G_3 , presentes na Figura 3.1, o que implica que G é split-intervalo se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a $G_1, \overline{G_1}, G_3, 2K_2, C_4$ ou C_5 . Há um exemplo de um grafo split-intervalo na Figura 3.8, onde os vértices pretos formam uma clique e os vértices brancos formam um conjunto independente.

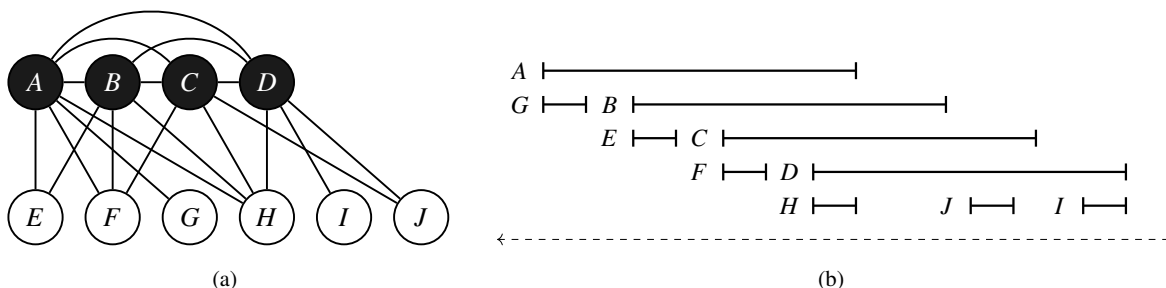


Figura 3.8: O grafo em (a) é um grafo split-intervalo relativo ao conjunto de intervalos em (b).

Um *grafo threshold* é um grafo que pode ser construído a partir de um grafo de um único vértice pela aplicação sucessiva das seguintes operações, em qualquer ordem:

- (i) Adição de um único vértice isolado ao grafo.
- (ii) Adição de um único vértice dominante ao grafo, isto é, um vértice que é adjacente a todos os demais vértices.

Na Figura 3.9, há um exemplo de grafo threshold em que o número dos vértices representa a ordem em que foram adicionados, os vértices brancos foram inseridos pela operação (i) e os vértices pretos foram inseridos pela operação (ii).

Grafos threshold são uma subclasse de grafos split-permutação em que os conjuntos Q_t , Q_r e S_2 são vazios. Nesse caso, cada vértice do grafo inserido pela operação (i) pertence ao conjunto S_1 e cada vértice inserido pela operação (ii) faz parte do conjunto Q_ℓ , como pode ser visto na Figura 3.9 (b).

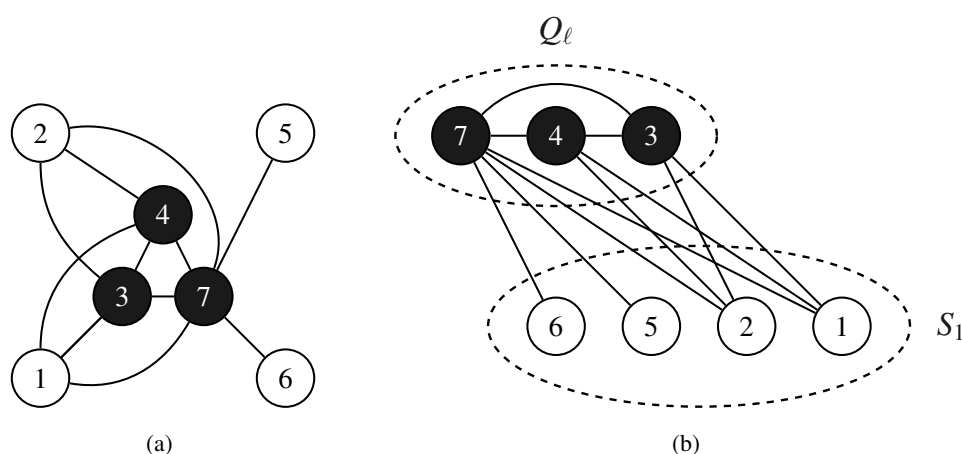


Figura 3.9: Grafo threshold representado de duas formas diferentes. Em (b), fica evidente que o grafo é também split-permutação.

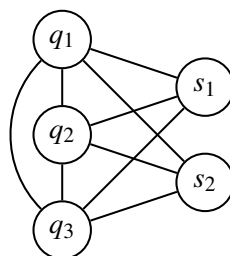
Chvátal e Hammer [3] mostraram que G é um grafo threshold se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$, P_4 ou C_4 . Uma vez que grafos threshold não podem conter caminhos P_4 , conseqüentemente eles não podem conter C_5 , G_1 , $\overline{G_1}$, G_3 ou $\overline{G_3}$, presentes na Figura 3.1, visto que P_4 é subgrafo induzido desses grafos.

A Tabela 3.1 sintetiza quais são os subgrafos induzidos proibidos referentes aos grafos split e às subclasses vistas até agora. A marcação indica que a classe de grafos daquela linha não pode conter o grafo daquela coluna como subgrafo induzido.

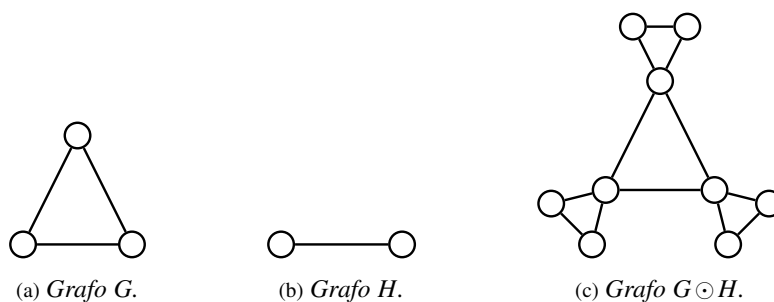
Tabela 3.1: Relação entre classes e subgrafos induzidos proibidos.

	P_4	$2K_2$	C_4	C_5	G_1	$\overline{G_1}$	G_3	$\overline{G_3}$
Split		X	X	X				
Split-comparabilidade		X	X	X	X	X		X
Split-intervalo		X	X	X	X	X	X	
Split-permutação		X	X	X	X	X	X	X
Threshold	X	X	X	X	X	X	X	X

Seja G um grafo split tal que $V(G) = (Q \cup S)$, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente. Dizemos que G é um *grafo split completo* se $\{q, s\} \in E(G)$, $\forall q \in Q, s \in S$, isto é, se existe uma aresta entre cada par de vértices q e s onde q pertence à clique e s pertence ao conjunto independente. Grafos split completos são um tipo especial de grafo threshold em que realizam-se operações de adição de vértice isolado antes de toda operação de adição de vértice dominante. Na Figura 3.10, há um exemplo de um grafo split completo, em que $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ e $S = \{s_1, s_2\}$.

**Figura 3.10:** Grafo split completo.

Um produto de grafos é uma operação binária entre dois grafos. O *produto corona* entre dois grafos G e H é o grafo obtido por meio de uma cópia de G e $|V(G)|$ cópias de H , conectando-se o i -ésimo vértice de G a cada vértice da i -ésima cópia de H . Utiliza-se a notação $G \odot H$ para o produto corona entre G e H . Na Figura 3.11, o grafo em (c) é obtido pelo produto corona entre os grafos G e H representados em (a) e (b), respectivamente.

**Figura 3.11:** Produto corona.

Um *grafo split corona* é um grafo split G tal que $G = K_{n_1} \odot \overline{K_{n_2}}$, isto é, é um grafo split obtido pelo produto corona entre um grafo completo e o complemento de um grafo completo. Na Figura 3.12, o grafo split corona em (c) é obtido pelo produto corona entre os grafos K_3 e $\overline{K_2}$ representados em (a) e (b), respectivamente.

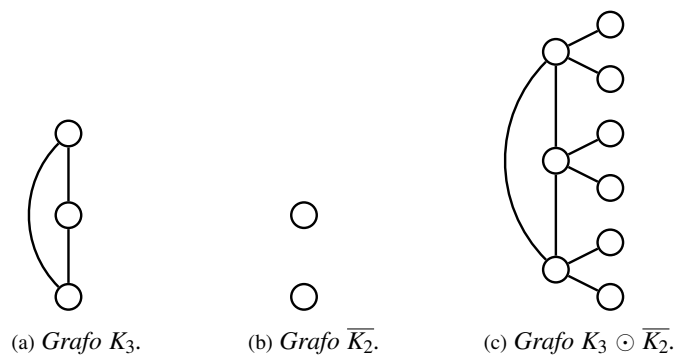


Figura 3.12: Grafo split corona.

Revisão bibliográfica

Atualmente, os estudos presentes na literatura de teoria dos grafos a respeito de conjuntos dominantes localizadores costumam abordar questões de complexidade, caracterizações e limites para a cardinalidade mínima desse conjunto em grafos.

Em geral, costuma-se estudar problemas envolvendo conjuntos dominantes localizadores apenas em grafos conexos, uma vez que, dado um grafo desconexo, basta analisar cada componente conexa separadamente. Sendo assim, a não ser que se afirme o contrário, todos os grafos apresentados deste ponto em diante serão grafos conexos.

Considere o seguinte problema de decisão:

CONJUNTO DOMINANTE LOCALIZADOR (CDL)

Instância: Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro $k \leq |V|$

Questão: G admite um conjunto dominante localizador de tamanho máximo k ?

Esse problema já foi provado ser NP-completo por Charon et al. [2] mediante a redução do problema 3-SAT para CDL em tempo polinomial. Na demonstração, os grafos construídos para a redução eram bipartidos, de modo que CDL permanece NP-completo para grafos bipartidos como entrada. Desde então, muitos pesquisadores vêm buscando caracterizações para o problema considerando outras classes de grafos.

Foucaud [6] demonstrou que CDL se mantém NP-completo para grafos bipartidos planares subcúbicos, grafos cobipartidos e grafos split. O mesmo resultado foi obtido por Foucaud et al. [8] para grafos intervalos e grafos permutação, ainda que ambos tenham diâmetro 2.

Por outro lado, o problema pode ser resolvido em tempo linear para árvores, conforme algoritmo apresentado por Slater [15]. A Tabela 4.1 sumariza a complexidade de CDL para algumas das principais classes de grafos, onde NP-C representa NP-completo e P polinomial.

Tabela 4.1: Complexidade de CDL em algumas classes de grafos.

Classe	Complexidade
Bipartido	NP-C [2]
Bipartido planar subcúbico	NP-C [6]
Cobipartido	NP-C [6]
Split	NP-C [6]
Intervalo	NP-C [8]
Permutação	NP-C [8]
Árvore	P [15]

Além de questões da complexidade do problema, pesquisadores também estudaram limites para a cardinalidade mínima de conjuntos localizadores (γ_L) para diferentes classes de grafos.

Slater [15, 16] demonstrou que, para grafos caminhos e grafos ciclos de ordem n , temos que $\gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. Considerando árvores como instância, Slater [16] encontrou um limite inferior e superior para árvores de ordem $n \geq 2$, e Sewell e Slater [14] encontraram um limite inferior para árvores de ordem $n \geq 3$. Se T é uma árvore de ordem $n \geq 2$, então $\frac{(n+1)}{3} \leq \gamma_L(T) \leq n - 1$. Se T é uma árvore de ordem $n \geq 3$, então $\gamma_L(T) \geq \frac{(n+2(\ell(T)-s(T))+1)}{3}$, onde $\ell(T)$ é a quantidade de vértices folhas e $s(T)$ é a quantidade de vértices suportes.

Alguns limites foram estabelecidos para grafos regulares por Gafur e Saputro [9]. Se G é um grafo $(n - 2)$ -regular, para $n \geq 4$, então $\gamma_L(G) = \frac{n}{2}$. Se G é um grafo tal que $G = K_m \setminus E(C_m)$ para $m \geq 7$, então $\gamma_L(G) = \left\lceil \frac{2m-2}{5} \right\rceil$.

Garijo et al. [10] propuseram a conjectura de que se G é um grafo livre de gêmeos de ordem n , então $\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}$, e desde então pesquisadores da área de grafos vêm tentando provar esse resultado ou se aproximar cada vez mais dele. Em 2016, Foucaud et al. [7] publicaram um artigo demonstrando que se G é um grafo livre de gêmeos de ordem n , então $\gamma_L(G) \leq \frac{2n}{3}$. Posteriormente, em 2024, Bousquet et al. [1] publicaram uma nota sobre esse artigo trazendo uma melhoria para o limite proposto, provando que $\gamma_L(G) \leq \left\lceil \frac{5n}{8} \right\rceil$ sob essas condições.

Além da conjectura, Garijo et al. [10] também trouxeram a seguinte proposição para conjuntos dominantes localizadores em grafos livre de gêmeos, que será utilizada em demonstrações futuras neste trabalho.

Proposição 4.1 (Garijo et al. [10]). *Se G é um grafo livre de gêmeos, então toda cobertura de vértices de G é também um conjunto dominante localizador.*

Um último resultado importante a ser mencionado foi proposto por Foucaud et al. [7], que conseguiram provar a conjectura de Garijo et al. [10] considerando grafos split ou cobipartidos como entrada. Formalmente, eles demonstraram que se G é um grafo split ou cobipartido livre de gêmeos de ordem n , então $\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}$.

Conforme visto no Capítulo 1, conjuntos dominantes localizadores podem ser compreendidos como vértices capazes de detectar intrusos em sua vizinhança fechada, podendo distinguir ele próprio de seus vértices vizinhos. Na área de teoria dos grafos, além de problemas envolvendo conjuntos dominantes localizadores, também são estudados outros tipos de conjuntos com propriedades parecidas. Um exemplo, cuja definição foi apresentada no Capítulo 2, são os códigos identificadores, em que, diferentemente dos conjuntos dominantes localizadores, um vértice detector não consegue distinguir ele próprio de um vértice vizinho.

Ademais, existem variações de conjuntos dominantes localizadores, sendo que as mais estudadas dentre elas são os conjuntos dominantes localizadores abertos e os redundantes. Os abertos são aqueles em que cada vértice detector só pode detectar intrusos em sua vizinhança, e não nele próprio. Os redundantes, por sua vez, são similares aos conjuntos dominantes localizadores tradicionais, com a diferença de que o conjunto mantém a propriedade de ser dominante localizador mesmo com a remoção de qualquer um dos seus vértices, e por essa razão é dito ser tolerante a falhas.

Uma bibliografia contendo referências a diversos artigos sobre códigos identificadores, conjuntos dominantes localizadores e outros conceitos relacionados foi disponibilizada por Jean [11].

Resultados

Neste capítulo, serão apresentados os resultados deste trabalho após o estudo de conjuntos dominantes localizadores em grafos split. Nos grafos exibidos nas figuras, os vértices pretos são aqueles que pertencem ao conjunto dominante localizador, os brancos são os que não pertencem e os cinzas não estão sendo analisados no grafo em questão. Os grafos a serem analisados são não triviais, isto é, são grafos com pelo menos dois vértices.

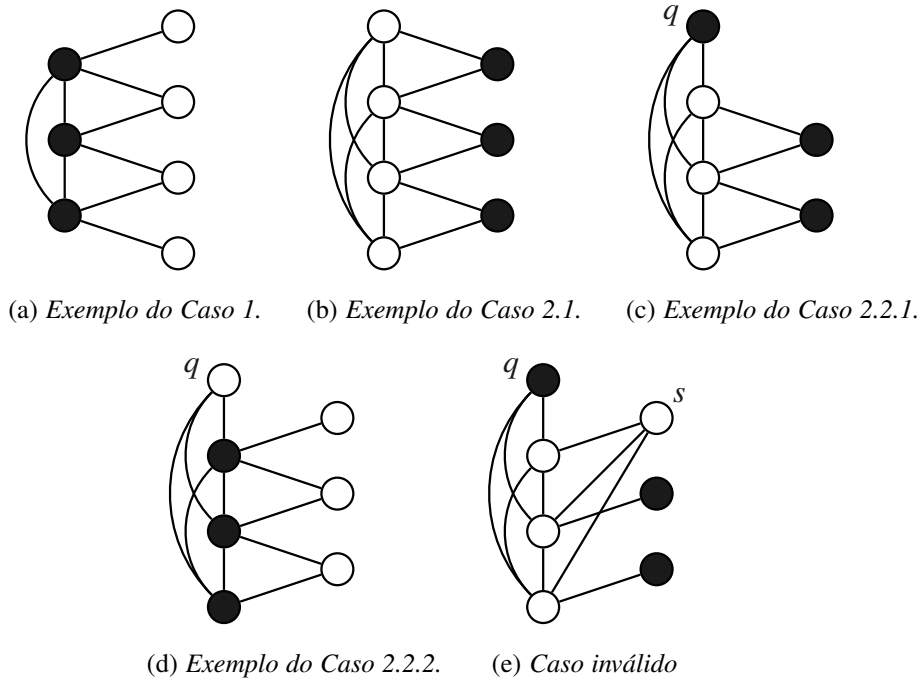
Primeiramente, trataremos a respeito do limite superior encontrado por Foucaud et al. [7] para γ_L em grafos split. Em sua demonstração, há um pequeno equívoco que será mostrado neste trabalho. Contudo, o erro não compromete o resultado final obtido para γ_L . A seguir, será apresentada uma versão didática dessa prova, incluindo figuras e os devidos ajustes a fim de corrigir o equívoco, que serão indicados logo após a demonstração.

Teorema 5.1 (Foucaud et al. [7]). *Seja G um grafo livre de gêmeos de ordem n . Se G é um grafo split, então $\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Prova. Seja G um grafo split livre de gêmeos de ordem n , em que $V(G) = Q \cup S$, sendo Q uma clique e S um conjunto independente.

Primeiramente, suponha que $|S| \geq \frac{n}{2}$ (Caso 1), como na Figura 5.1 (a). Como $|Q| + |S| = n$, temos que $|Q| \leq \frac{n}{2}$. Além disso, Q é uma cobertura de vértices de G , pois toda aresta $e \in E(G)$ possui dois extremos em Q ou um extremo em Q e outro em S . Sendo assim, pela Proposição 4.1, o conjunto Q é um conjunto dominante localizador de G , então $\gamma_L(G) \leq |Q| \leq \frac{n}{2}$.

Por outro lado, se $|S| < \frac{n}{2}$ (Caso 2), temos os seguintes cenários. Só pode haver um único vértice em Q que não possui vizinhos em S , pois G é livre de gêmeos. Se não há um vértice em Q sem vizinhos em S (Caso 2.1), como na Figura 5.1 (b), então todo vértice em Q possui uma vizinhança não vazia e também distinta, uma vez que G é livre de gêmeos. Isso implica que S é um conjunto dominante localizador, de modo que $\gamma_L(G) \leq |S| < \frac{n}{2}$. Em contrapartida, isto é, se existe um vértice q em Q que não possui vizinhos em S (Caso 2.2), então $S \cup \{q\}$ é um conjunto dominante localizador, de modo que $\gamma_L(G) \leq |S| + 1$. Existem duas possibilidades para esse caso, que serão descritas a seguir.



(a) Exemplo do Caso 1. (b) Exemplo do Caso 2.1. (c) Exemplo do Caso 2.2.1.

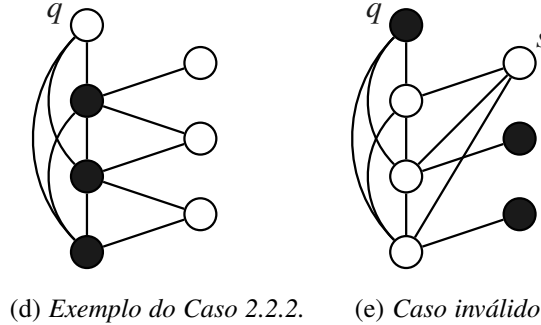


Figura 5.1: Exemplos de grafos para cada caso. O caso exibido em (e) não satisfaz a hipótese do teorema.

Se $|Q| - |S| \geq 2$ (Caso 2.2.1), como na Figura 5.1 (c), isso implica que $|S| + 1 \leq \frac{n}{2}$, de modo que $\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}$. Então, vamos assumir que $|Q| - |S| \leq 1$ (Caso 2.2.2), como na Figura 5.1 (d). Não pode haver um outro caso em que há um vértice $s \in S$ que seja adjacente a todo vértice de $Q - \{q\}$, pois s e q seriam gêmeos abertos, o que não satisfaz a hipótese de G ser livre de gêmeos. Sendo assim, o conjunto $Q - \{q\}$ é um conjunto dominante localizador, de modo que $\gamma_L(G) \leq |Q| - 1$. Como $|Q| - |S| \leq 1$, então $|Q| - 1 \leq |S|$, o que implica que $\gamma_L(G) \leq |S| < \frac{n}{2}$.

Portanto, se G é um grafo split livre de gêmeos de ordem n , o seu conjunto dominante localizador de cardinalidade mínima é limitado superiormente por $\frac{n}{2}$. \square

No artigo em questão, os autores consideram que, no último caso, onde é assumido que $|Q| - |S| \leq 1$, existe a possibilidade de termos um grafo em que há um vértice $s \in S$ adjacente a todo vértice em $Q - \{q\}$, como na Figura 5.1 (e). Em seguida, eles trazem o conjunto $(S - \{s\}) \cup \{q\}$ como um conjunto dominante localizador. No entanto, esse conjunto não é nem sequer dominante, uma vez que o vértice s só é adjacente aos vértices do conjunto $Q - \{q\}$.

Apesar do equívoco, o resultado continua sendo válido, pois não existe a possibilidade de termos esse grafo, já que s e q seriam gêmeos abertos, não satisfazendo a hipótese inicial de G ser livre de gêmeos. Portanto, basta analisar o caso em que esse vértice s não existe, sendo essa a alteração feita na demonstração apresentada neste trabalho.

Ademais, o limite apresentado por Foucaud et al. [7] é justo. Considere, por exemplo, os grafos split livres de gêmeos da Figura 5.2, que possuem $\gamma_L = \frac{n}{2}$.

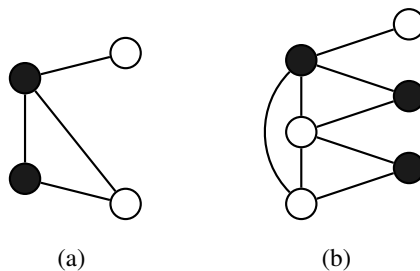


Figura 5.2: Exemplos de grafos split livres de gêmeos com $\gamma_L = \frac{n}{2}$.

Até o momento, falamos a respeito de grafos livres de gêmeos. A partir de agora, vamos incluir em nossas análises grafos que possuem gêmeos. Primeiramente, na Proposição 5.6, será apresentada uma forma de simplificar grafos que possuem vértices mutuamente gêmeos, transformando-os em grafos com menos vértices e reduzindo o γ_L em uma unidade a cada vértice removido. As Observações e o Lema a seguir serão utilizados na demonstração da proposição mencionada.

Observação 5.2 *Seja G um grafo e $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 2$, um conjunto de vértices mutuamente gêmeos de G . Se L é um conjunto dominante localizador mínimo de G , então $V' \cap L \geq k - 1$, isto é, todos os vértices mutuamente gêmeos em G , com exceção de no máximo um, devem pertencer a L .*

Observação 5.3 *Seja G um grafo split tal que $V(G) = (Q \cup S)$, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente. Sendo assim, se existe um vértice $v \in S$ tal que $uv \in E(G)$, $\forall u \in Q$, isto é, v é adjacente a todo vértice da clique, então $G' = (Q' \cup S', E(G))$, onde $Q' = Q \cup \{v\}$ é uma clique e $S' = S - \{v\}$ é um conjunto independente, é um grafo isomorfo a G . Em outras palavras, v pode ser considerado pertencente à clique ou ao conjunto independente.*

Observação 5.4 *Seja G um grafo split tal que $V(G) = (Q \cup S)$, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente. Considere que, pela Observação 5.3, se $\exists v \in S$ tal que $uv \in E(G)$, $\forall u \in Q$, então v será pertencente a Q em vez de S . Sendo assim, se $x, y \in V(G)$ e x e y são gêmeos abertos, então $x, y \in S$. Por outro lado, se $x, y \in V(G)$ e x e y são gêmeos fechados, então $x, y \in Q$.*

Lema 5.5 *Se G é um grafo split que possui um conjunto $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 2$, de vértices mutuamente gêmeos, então existe um conjunto L tal que L é um conjunto- γ_L de G e $V' \cap L = k - 1$.*

Prova. Dado o grafo G definido na hipótese, considere $V(G) = (Q \cup S)$, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente, e L um conjunto- γ_L de G . Pela Observação 5.2, temos que $V' \cap L \geq k - 1$. Diante disso, se $V' \cap L = k - 1$, a implicação do Lema é verdadeira. Sendo assim, vamos considerar o cenário em que $V' \cap L = k$.

Por hipótese, L é um conjunto- γ_L de G em que $V' \cap L = k$. Vamos construir um conjunto L' a partir de L de tal forma que L' seja um conjunto- γ_L e atenda à condição de $V' \cap L' = k - 1$. Primeiramente, tomamos todos os vértices de L como sendo parte do novo conjunto L' , isto é, $L' = L$. Em seguida, como $V' \cap L = k$ e $k \geq 2$, temos que $V' \cap L' = k$ e existem $v_i, v_j \in V'$ tais que $v_i, v_j \in L'$, de modo que podemos escolher um vértice dentre v_i e v_j , digamos, v_i , e então o removemos de L' , isto é, $L' = L - \{v_i\}$.

Entretanto, sabemos que L é um conjunto- γ_L de G . Sendo assim, ao remover v_i , é evidente que algum outro vértice deve ser incluído em L' para garantir que L' também seja um conjunto- γ_L de G . Diante disso, iremos dividir o cenário que estamos analisando em dois casos, que serão descritos a seguir.

Caso 1: Por hipótese, V' é um conjunto de vértices mutuamente gêmeos. Pela Observação 5.4, temos que se os vértices de V' são mutuamente gêmeos abertos, então $V' \subseteq S$.

Seja N a vizinhança aberta dos vértices $v_i \in V'$, isto é, $N = N(v_1) = N(v_2) = \dots = N(v_k)$. Conforme dito anteriormente, estamos em um cenário em que $\exists v_i, v_j \in V'$ tais que $v_i, v_j \in L'$. Sendo assim, após a remoção de v_i de L' , todos os vértices adjacentes a v_i , isto é, os vértices $u \in N$, continuam sendo dominados por v_j , de modo que todos os vértices em N continuam sendo dominados. Além disso, se há no grafo dois vértices u e v , tais que $u \neq v \neq v_i$, que são separados por v_i , eles também são separados por v_j , de modo que u e v permanecem separados.

Diante do que foi apresentado, resta apenas analisar se v_i permanece dominado e separado dos demais vértices. Neste ponto, como $|L'| < |L|$ e L é um conjunto- γ_L , sabemos que L' não é um conjunto dominante localizador, o que implica que v_i não é dominado ou não é separado dos demais. Foi dito anteriormente que um vértice deveria ser inserido em L' para que ele se tornasse um conjunto- γ_L . Nesse sentido, a ideia do próximo passo é inserir um vértice justamente para garantir que v_i seja dominado e separado dos demais. Existem dois subcasos que serão analisados a seguir.

Caso 1.1: Nenhum vértice de N pertence ao conjunto L' , isto é, $N \cap L' = \emptyset$. Neste cenário, temos que v_i não é dominado por nenhum vértice. Sendo assim, basta escolhermos algum vértice $x \in N$ e inseri-lo em L' , de modo que v_i agora é dominado por x . Além disso, não existe algum vértice y diferente de v_i tal que $y \notin L'$ e $N(y) \cap L' = \{x\}$, pois, como L é um conjunto dominante localizador e $x \notin L$, o vértice y já era

dominando por algum vértice diferente de x . Dessa forma, concluímos que v_i também é separado de qualquer outro vértice de $V(G) - L'$.

Portanto, neste caso, temos que $L' = (L - \{v_i\}) \cup \{x\}$, $v_i \in V'$, $x \in N$ é um conjunto- γ_L . Um exemplo deste cenário pode ser visualizado na Figura 5.3.

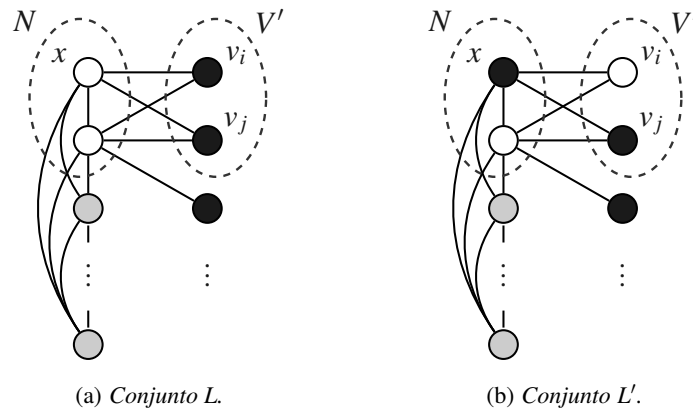


Figura 5.3: Exemplo do caso 1.1.

Caso 1.2: Existe um subconjunto de vértices x_1, \dots, x_p , $p \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq p \leq |N|$, em N que está contido em L' , isto é, $N \cap L' \neq \emptyset$. Sendo assim, temos que v_i é dominado por x_1, \dots, x_p . Neste cenário, existe um vértice y tal que $y \notin L'$ e $N(y) \cap L' = \{x_1, \dots, x_p\}$ pois, caso contrário, o conjunto L não seria mínimo, visto que v_i poderia ser simplesmente removido. Além disso, esse vértice é único, pois a existência de um y' tal que $y' \neq y$ e $N(y') \cap L' = \{x_1, \dots, x_p\}$ implicaria que L' não é um conjunto dominante localizador, já que y e y' são vértices não separados.

Tendo em vista a existência de y , temos que $N(v_i) \cap L' = N(y) \cap L' = \{x_1, \dots, x_p\}$, ou seja, v_i e y não são separados. Sendo assim, basta incluir y no conjunto L' , de modo que não existe mais nenhum outro vértice em $V(G) - L'$ que não seja separado de v_i .

Portanto, neste caso, temos que $L' = (L - \{v_i\}) \cup \{y\}$, $v_i \in V'$, $y \in V(G)$ é um conjunto dominante localizador mínimo. Exemplos deste cenário podem ser visualizados nas Figuras 5.4 e 5.5.

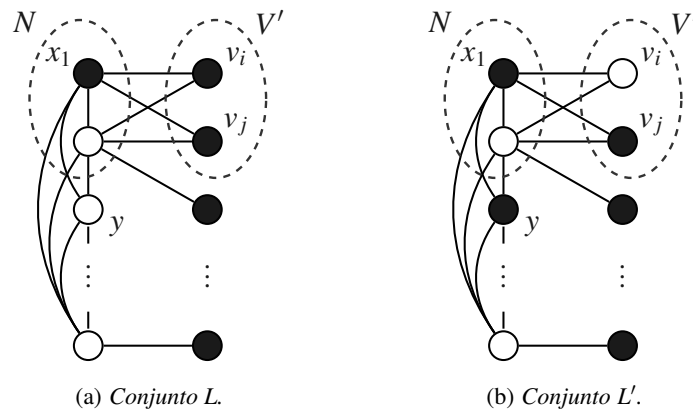


Figura 5.4: Exemplo do caso 1.2 quando y pertence à clique de G .

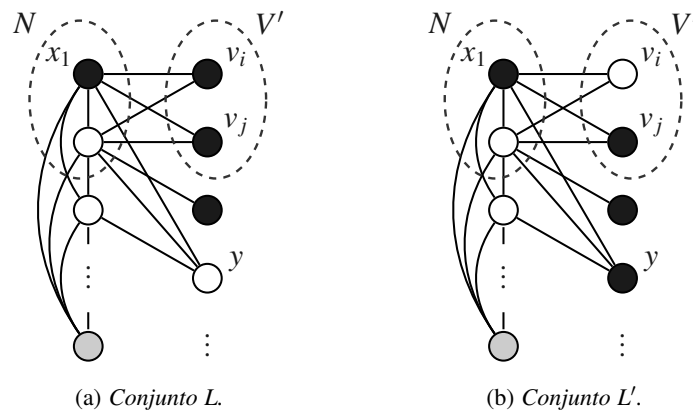


Figura 5.5: Exemplo do caso 1.2 quando y pertence ao conjunto independente de G .

Dessarte, em ambos os subcasos foi demonstrada a existência de L' como sendo um conjunto- γ_L tal que $V' \cap L' = k - 1$.

Caso 2: Pela Observação 5.4, se os vértices de V' são mutuamente gêmeos fechados, então $V' \subseteq Q$.

Seja N a vizinhança fechada dos vértices $v_i \in V'$, isto é, $N = N[v_1] = N[v_2] = \dots = N[v_k]$. Considere que $N = N_Q \cup N_S$ onde $N_S = N \cap S$ e $N_Q = N \cap Q$. Conforme visto anteriormente, estamos em um cenário em que $\exists v_i, v_j \in V'$ tais que $v_i, v_j \in L'$. Sendo assim, após a remoção de v_i de L' , todos os vértices adjacentes a v_i e o próprio v_i , isto é, os vértices $u \in N$, continuam sendo dominados por v_j , de modo que todos os vértices em N continuam sendo dominados. Além disso, se há no grafo dois vértices u e v , tais que $u \neq v \neq v_i$, que são separados por v_i , eles também são separados por v_j , de modo que u e v permanecem separados.

Diante do que foi apresentado, resta apenas analisar se v_i permanece separado dos demais vértices. Assim como no Caso 1, a ideia do próximo passo é inserir um vértice para garantir que v_i seja separado dos demais, assim garantindo também que L' seja um conjunto- γ_L . Existem dois subcasos que serão analisados a seguir. Considere que $L' = L'_Q \cup L'_S$ onde $L'_S = L' \cap S$ e $L'_Q = L' \cap Q$.

Caso 2.1: Nenhum vértice do conjunto N_S pertence a L' , isto é, $N_S \cap L' = \emptyset$.

Dadas essas condições, temos que $N(v_i) \cap L' = L'_Q$. Uma vez que sabemos que a remoção de v_i de L' fez com que L' deixasse de ser um conjunto dominante localizador, fica evidente que deve existir um $y \in V(G)$ tal que $y \notin L'$ e $N(y) \cap L' = L'_Q$, isto é, y e v_i não são separados. Além disso, esse vértice é único, pois a existência de um y' tal que $y' \neq y$ e $N(y') \cap L' = L'_Q$ implicaria que L , o conjunto original, não é dominante localizador.

Sendo assim, basta incluir y em L' para garantir que v_i seja separado de todos os vértices em $V(G) - L'$. Portanto, neste caso, temos que $L' = (L - \{v_i\}) \cup \{y\}$, $v_i \in V'$, $y \in V(G)$ é um conjunto- γ_L . Exemplos deste cenário podem ser visualizados nas Figuras 5.6 e 5.7.

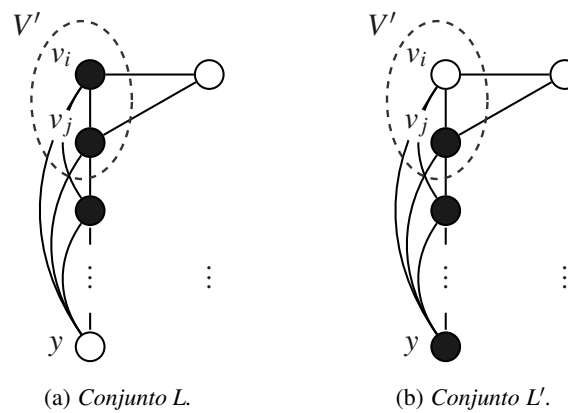


Figura 5.6: Exemplo do caso 2.1 quando $y \in Q$.

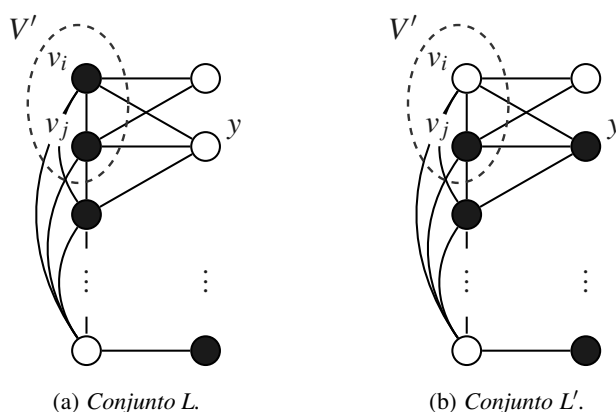


Figura 5.7: Exemplo do caso 2.1 quando $y \in S$.

Caso 2.2: Existe um subconjunto de vértices x_1, \dots, x_p , $1 \leq p \leq |N_S|$, em N_S que está contido em L' , isto é, $N_S \cap L' \neq \emptyset$. Dadas essas condições, temos que $N(v_i) \cap L' = L'_Q \cup \{x_1, \dots, x_p\}$. Analogamente ao Caso 2.1, deve existir um único $y \in V(G)$ tal que $y \notin L'$ e $N(y) \cap L' = L'_Q \cup \{x_1, \dots, x_p\}$, de modo que v_i e y não são separados. Além disso, $y \in Q$, pois como y é adjacente aos vértices $x_1, \dots, x_p \in N_S$, y não pode pertencer a S .

Dessa forma, assim como no Caso 2.1, basta incluir y em L' para garantir que v_i seja separado de todos os vértices em $V(G) - L'$. Portanto, neste caso, temos que $L' = (L - \{v_i\}) \cup \{y\}$, $v_i \in V'$, $y \in Q$ é um conjunto- γ_L . Um exemplo deste cenário pode ser visualizado na Figura 5.8.

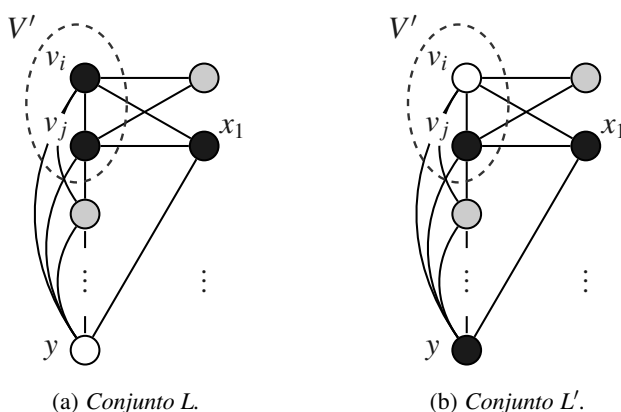


Figura 5.8: Exemplo do caso 2.2.

Dessarte, em ambos os subcasos foi demonstrada a existência de L' como sendo um conjunto- γ_L tal que $V' \cap L = k - 1$. Uma vez provados os Casos 1 e 2, temos que o Lema é verdadeiro. \square

Proposição 5.6 *Seja G um grafo split que possui vértices u, v e w mutuamente gêmeos e $\gamma_L(G) = k, k \in \mathbb{Z}^+$. Sendo assim, existe um grafo G' tal que $G' \cong G \setminus \{w\}$ e $\gamma_L(G') = k - 1$.*

Prova. Para demonstrar a existência de G' , iremos provar que $\gamma_L(G) = k$ se e somente se $\gamma_L(G') = k - 1$. Um esquema dos grafos G e G' pode ser visualizado nas Figuras 5.9 e 5.10. Primeiramente, vamos mostrar que se $\gamma_L(G) = k$, então $\gamma_L(G') = k - 1$.

Por hipótese, se $\gamma_L(G) = k$, então existe um conjunto dominante localizador L tal que $|L| = k$. Sabemos que, conforme a Observação 5.2, pelo menos dois vértices dentre u, v e w devem pertencer a L . Sendo assim, assumiremos que v e w pertencem a L .

O grafo G' é obtido a partir de G com a remoção do vértice w . Ao remover w de G' , todos os vértices adjacentes a w continuam sendo dominados por v , já que w e v são gêmeos. Além disso, se haviam dois vértices x_1 e x_2 no grafo que eram separados por w , eles também eram separados por v , de modo que x_1 e x_2 permanecem separados.

Dessa forma, podemos construir um conjunto $L' = L - \{w\}$, que é um conjunto dominante localizador mínimo de G' . Uma vez que $L' = L - \{w\}$, temos que $|L'| = |L| - 1 = k - 1$. Logo, $\gamma_L(G') = k - 1$.

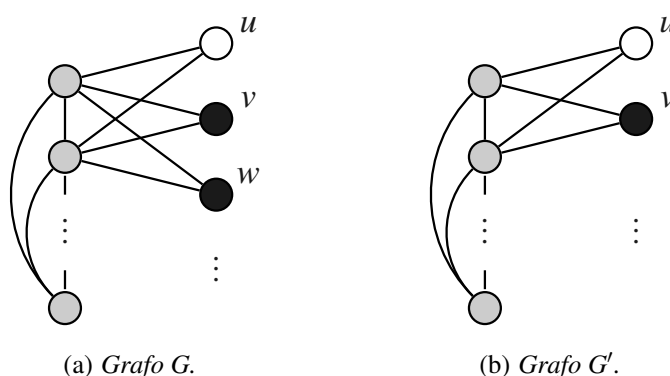


Figura 5.9: Esquema dos grafos G e G' quando u, v e w são gêmeos abertos.

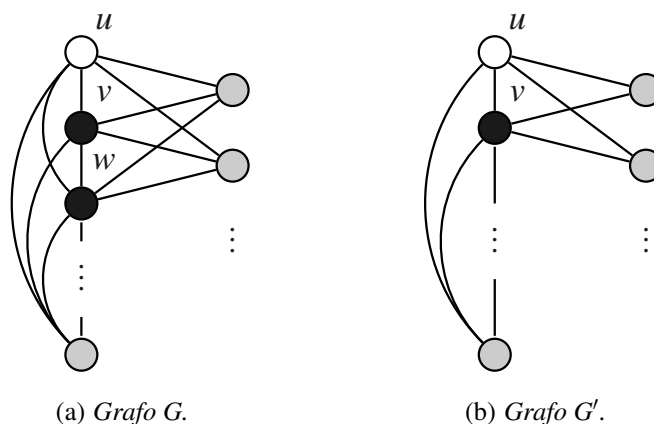


Figura 5.10: Esquema dos grafos G e G' quando u, v e w são gêmeos fechados.

Agora, vamos mostrar que se $\gamma_L(G') = k - 1$, então $\gamma_L(G) = k$. Por hipótese, se $\gamma_L(G') = k - 1$, então existe um conjunto dominante localizador L' tal que $|L'| = k - 1$. O grafo G inclui um vértice w tal que w é gêmeo dos vértices u e v .

Como L' é um conjunto dominante localizador mínimo, podemos considerar que, conforme o Lema 5.5, algum vértice dentre os vértices mutuamente gêmeos a u e v não pertence a L' . Considere que u é o vértice que não pertence a L' .

Sendo assim, a inclusão de w tal que $w \notin L'$ faz com que a definição de conjunto dominante localizador não seja atendida, pois, nesse cenário, $u, w \in V(G) - L'$ e $N(u) \cap L' = N(w) \cap L'$, ou seja, u e w não são separados. Logo, para que a definição seja satisfeita, w deve ser incluído em L' .

Dessa forma, podemos construir um conjunto $L = L' \cup \{w\}$, que é um conjunto dominante localizador mínimo de G . Uma vez que $L = L' \cup \{w\}$, temos que $|L| = |L'| + 1 = (k - 1) + 1 = k$. Logo, $\gamma_L(G) = k$.

Portanto, uma vez demonstrado que $\gamma_L(G) = k$ se e somente se $\gamma_L(G') = k - 1$, temos que a proposição é verdadeira. \square

A partir deste ponto, serão apresentados alguns resultados obtidos para a cardinalidade mínima de conjuntos dominantes localizadores em algumas subclasses de grafos split.

Teorema 5.7 *Seja G um grafo split completo de n vértices tal que $V(G) = (Q \cup S)$, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente. Se $|Q| = 1$ ou $|S| = 1$, então $\gamma_L(G) = n - 1$.*

Prova. Considere L como sendo um conjunto- γ_L de G e $n = |V(G)|$. A demonstração será dividida em três subcasos, a serem descritos a seguir.

Se $|Q| = 1$ e $|S| = 1$, conforme ilustra a Figura 5.11, basta incluir um dos dois vértices de G no conjunto dominante localizador para obter um conjunto- γ_L . Sendo assim, nesse grafo, $\gamma_L(G) = n - 1$.

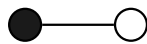


Figura 5.11: Grafo split completo com $|Q| = 1$ e $|S| = 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .

Se $|Q| = 1$ e $|S| > 1$, conforme ilustra a Figura 5.12, então temos um grafo bipartido completo $K_{1,n-1}$ com k vértices mutuamente gêmeos abertos $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$, $k = |S|$. Sendo assim, conforme a Observação 5.2, todos os gêmeos, com a exceção de no máximo um, devem pertencer a L . Isso traz um limite inferior de $n - 2$ para $\gamma_L(G)$. Contudo, se tanto o vértice $q \in Q$ e quanto algum vértice $s_i \in S$ não pertencerem a L , então o vértice s_i não seria dominado. Portanto, um dos dois também deve pertencer a

L . Isso aumenta o limite inferior de $\gamma_L(G)$ para $n - 1$. Além disso, $L = V(G) - \{v\}$, para algum $v \in V(G)$, é um conjunto dominante localizador de G . Com isso, temos um limite superior de $n - 1$ para $\gamma_L(G)$. Uma vez que $n - 1 \leq \gamma_L(G) \leq n - 1$, podemos concluir que $\gamma_L(G) = n - 1$.

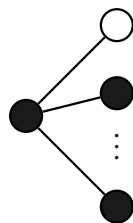


Figura 5.12: Grafo split completo com $|Q| = 1$ e $|S| > 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .

Se $|S| = 1$ e $|Q| > 1$, conforme ilustra a Figura 5.13, então temos um grafo isomorfo a K_n , isto é, um grafo completo de n vértices. Sendo assim, como todos os vértices do grafo são mutuamente gêmeos fechados, então todos, com a exceção de no máximo um, devem pertencer a um conjunto dominante localizador de G , conforme a Observação 5.2. Isso traz um limite inferior de $n - 1$ para $\gamma_L(G)$. Além disso, $L = V(G) - \{v\}$, para algum $v \in V(G)$, é um conjunto dominante localizador de G . Com isso, temos um limite superior de $n - 1$ para $\gamma_L(G)$. Uma vez que $n - 1 \leq \gamma_L(G) \leq n - 1$, podemos concluir que $\gamma_L(G) = n - 1$.

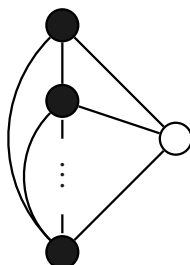


Figura 5.13: Grafo split completo com $|S| = 1$ e $|Q| > 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .

Em todos os subcasos foi provado que $\gamma_L(G) = n - 1$. Portanto, a proposição é verdadeira. \square

Teorema 5.8 *Seja G um grafo split completo de n vértices tal que $V(G) = (Q \cup S)$, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente. Se $|Q| > 1$ e $|S| > 1$, então $\gamma_L(G) = n - 2$.*

Prova. Considere L como sendo um conjunto- γ_L de G e $n = |V(G)|$. Uma representação para o grafo G em questão pode ser visualizada na Figura 5.14.

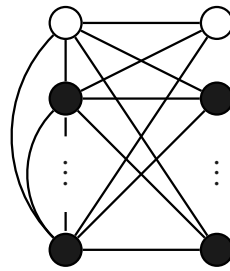


Figura 5.14: Grafo split completo com $|Q| > 1$ e $|S| > 1$. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .

Como G é um grafo split completo, sabemos que cada vértice do conjunto independente é adjacente a cada vértice da clique. Sendo assim, os vértices q_1, q_2, \dots, q_k , $k = |Q|$, são mutuamente gêmeos fechados e os vértices s_1, s_2, \dots, s_k , $k = |S|$, são mutuamente gêmeos abertos.

Dito isso, conforme a Observação 5.2, temos que $Q - \{q_i\} \subseteq L$ e $S - \{s_j\} \subseteq L$, para algum $1 \leq i \leq |Q|$ e $1 \leq j \leq |S|$. Isso traz um limite inferior de $n - 2$ para $\gamma_L(G)$. Neste ponto, L já é um conjunto dominante localizador, uma vez que q_i é dominado por $(Q - \{q_i\}) \cup (S - \{s_i\})$ e s_i é dominado por $Q - \{q_i\}$, isto é, q_i e s_i são dominados e separados entre si. Sendo assim, temos que $L = (Q - \{q_i\}) \cup (S - \{s_i\})$ é um conjunto dominante localizador de G e $|L| = n - 2$. Como isso, temos um limite superior de $n - 2$ para $\gamma_L(G)$. Uma vez que $n - 2 \leq \gamma_L(G) \leq n - 2$, podemos concluir que $\gamma_L(G) = n - 2$. \square

Teorema 5.9 *Seja G um grafo split tal que $V(G) = (Q \cup S)$, onde Q é uma clique e S é um conjunto independente. Se G é um grafo split corona, então $\gamma_L(G) = |S|$.*

Prova. Considere L como sendo um conjunto- γ_L de G e $n = |V(G)|$. A demonstração será dividida em dois subcasos, a serem descritos a seguir.

Primeiramente, analisaremos o caso em que $G \cong K_{n_1} \odot \overline{K_1}$, onde $n_1 \in \mathbb{Z}^+$. Neste caso, cada vértice do conjunto independente é adjacente a um único e distinto vértice da clique. Sendo assim, para que cada vértice $s_i \in S$ seja dominado, s_i ou o vértice $q_i \in Q$ tal que q_i é adjacente a s_i deve pertencer ao conjunto dominante localizador, para $1 \leq i \leq |S|$. Isso traz um limite inferior de $|S|$ para $\gamma_L(G)$.

Além disso, $L = Q$, conforme ilustra a Figura 5.15 (a), é um conjunto dominante localizador de G , visto que todo vértice $q \in Q$ pertence a L e todo vértice $s \in S$ é dominado e separado dos demais. Veja que $|L| = |Q| = |S|$; com isso, temos que $|S|$ é um limite superior para $\gamma_L(G)$. Uma vez que $|S| \leq \gamma_L(G) \leq |S|$, temos que $\gamma_L(G) = |S|$.

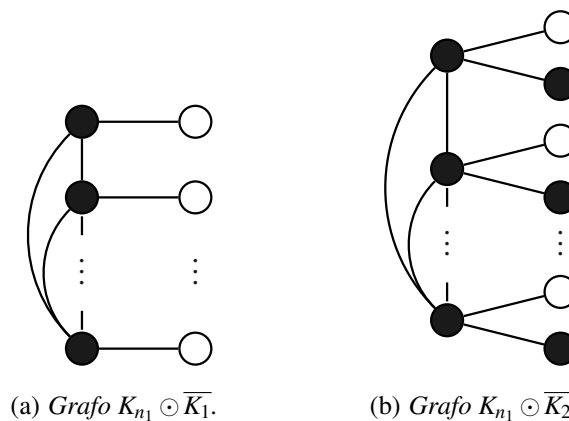


Figura 5.15: Casos base de grafos split corona. Os vértices destacados formam um conjunto- γ_L .

Agora, analisaremos o caso em que $G \cong K_{n_1} \odot \overline{K_{n_2}}$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, $n_2 \geq 2$. Neste caso, para cada vértice $q_i \in Q$, teremos n_2 vértices mutuamente gêmeos abertos $s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{n_2} \in S$ adjacentes a q_i . Sendo assim, conforme a Observação 5.2, todos os gêmeos, com a exceção de no máximo um, devem pertencer ao conjunto dominante localizador. Contudo, se um vértice $s_i^j \in S$ não pertencer ao conjunto dominante localizador, então q_i , o vértice adjacente a s_i^j , deve pertencer ao conjunto para que s_i^j seja dominado. Isso traz um limite inferior de $|S|$ para $\gamma_L(G)$.

Além disso, $L = V(G) - \{s_1^1, s_2^1, \dots, s_k^1\}$, $k = |Q|$, conforme ilustra a Figura 5.15 (b), é um conjunto dominante localizador de G , visto que os vértices $s_1^1, s_2^1, \dots, s_k^1$, que não pertencem a L , são dominados e separados entre si. Veja que $|L| = n - |Q| = |S|$; com isso, temos que $|S|$ é um limite superior para $\gamma_L(G)$. Uma vez que $|S| \leq \gamma_L(G) \leq |S|$, temos que $\gamma_L(G) = |S|$.

Portanto, temos a generalização do resultado para grafos split corona $G \cong K_{n_1} \odot \overline{K_{n_2}}$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, o que implica que $\gamma_L(G) = |S|$. \square

Conclusão

Neste trabalho, realizamos um estudo a respeito de conjuntos dominantes localizadores, reunindo resultados importantes presentes na literatura para diferentes classes de grafos. Durante o estudo, foi constatado que o problema de se determinar se o grafo admite um conjunto dominante localizador de tamanho máximo k é NP-completo para grafos split, conforme Foucaud [6]. Isso motivou o estudo do problema para subclasses de grafos split.

No Capítulo 3, fizemos uma revisão de grafos split e algumas de suas principais subclasses, e foram citadas caracterizações existentes na literatura para essas subclasses a fim de auxiliar na descrição desses grafos. Em seguida, a fim de centralizar os principais resultados encontrados referentes a conjuntos dominantes localizadores, escrevemos o Capítulo 4, que contém uma revisão bibliográfica sobre esse tema.

Durante o estudo da literatura, foi identificado um pequeno equívoco na demonstração de Foucaud et al. [7] para o limite superior de $\frac{n}{2}$ para conjuntos dominantes localizadores em grafos split, e uma versão didática e com os devidos ajustes foi apresentada neste trabalho, no começo do Capítulo 5.

Ademais, a partir dos conceitos estudados, foi construída uma proposição para simplificar grafos split que possuem vértices mutuamente gêmeos, transformando-os em grafos com menos vértices e reduzindo a cardinalidade mínima do conjunto dominante localizador em uma unidade a cada vértice removido.

Por fim, foram apresentadas fórmulas fechadas para a cardinalidade mínima de conjuntos dominantes localizadores em subclasses mais simples de grafos split. Foi demonstrado que grafos split completos com $|Q| = 1$ ou $|S| = 1$ possuem γ_L igual a $n - 1$, grafos split completo com $|Q| > 1$ e $|S| > 1$ possuem γ_L igual a $n - 2$ e grafos split corona possuem γ_L igual a $|S|$.

Em trabalhos futuros, poderiam ser estudados limites ou fórmulas fechadas para as demais subclasses apresentadas neste trabalho, incluindo grafos threshold, split-permutação, split-intervalo e split-comparabilidade. Além disso, poderiam ser exploradas outras subclasses de split que não foram mencionadas aqui. A Proposição 5.6 para simplificação de grafos split apresentada também poderia ser aplicada em algumas dessas

subclasses para uma melhor análise das mesmas. Uma última sugestão seria estudar quais grafos split atingem o limite superior de $\frac{n}{2}$ provado por Foucaud et al. [7].

Durante o desenvolvimento do trabalho, foram encontradas dificuldades no estudo de algumas demonstrações presentes na literatura, incluindo a prova de NP-completude de CDL para grafos split. Ainda sim, considero que o trabalho me proporcionou bastante experiência e aprendizado tanto no campo de teoria dos grafos quanto na escrita de trabalhos acadêmicos.

Referências

- [1] BOUSQUET, N.; CHUET, Q.; FALGAS–RAVRY, V.; JACQUES, A.; MORELLE, L. **A note on locating-dominating sets in twin-free graphs.** *Discrete Mathematics*, 348(2):114297, 2025.
- [2] CHARON, I.; HUDRY, O.; LOBSTEIN, A. **Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is np-hard.** *Theoretical Computer Science*, 290(3):2109–2120, 2003.
- [3] CHVÁTAL, V.; HAMMER, P. L. **Aggregation of inequalities in integer programming.** *Annals of discrete mathematics*, 1:145–162, 1975.
- [4] DA SOLEDADE GONZAGA, L. G.; DE SOUSA CRUZ, J. B.; DE ALMEIDA, S. M.; DA SILVA, C. N. **The overfull conjecture on split-comparability and split-interval graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 340:228–238, 2023.
- [5] FOLDES, S.; HAMMER, P. L. **Split graphs having dilworth number two.** *Canadian Journal of Mathematics*, 29(3):666–672, 1977.
- [6] FOUCAUD, F. **Decision and approximation complexity for identifying codes and locating-dominating sets in restricted graph classes.** *Journal of Discrete Algorithms*, 31:48–68, 2015. 24th International Workshop on Combinatorial Algorithms (IWOCA 2013).
- [7] FOUCAUD, F.; HENNING, M. A.; LÖWENSTEIN, C.; SASSE, T. **Locating–dominating sets in twin-free graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 200:52–58, 2016.
- [8] FOUCAUD, F.; MERTZIOS, G. B.; NASERASR, R.; PARREAU, A.; VALICOV, P. **Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. ii. algorithms and complexity.** *Algorithmica*, 78(3):914–944, July 2016.
- [9] GAFUR, A.; SAPUTRO, S. **On locating-dominating set of regular graphs.** *Journal of Mathematics*, 2021:1–6, 09 2021.

- [10] GARIJO, D.; GONZÁLEZ, A.; MÁRQUEZ, A. **The difference between the metric dimension and the determining number of a graph.** *Applied Mathematics and Computation*, 249:487–501, 2014.
- [11] JEAN, D. **Watching systems, identifying, locating-dominating and discriminating codes in graphs.** <https://dragazo.github.io/bibdom/main.pdf>, 2023. Last accessed on: November 27, 2024.
- [12] ORTIZ, C.; VILLANUEVA, M. **On split-comparability graphs.** *Proc. II ALIO-EURO Workshop on Practical Combinatorial Optimization*, p. 91–105, 1996.
- [13] ORTIZ, C.; VILLANUEVA, M. **Threshold dimension of split-permutation graphs.** *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, p. 75, 117–127, 2010.
- [14] SEWELL, J. L.; SLATER, P. J. **A sharp lower bound for locating-dominating sets in trees.** *Australas. J Comb.*, 60:136–149, 2014.
- [15] SLATER, P. J. **Domination and location in acyclic graphs.** *Networks*, 17(1):55–64, 1987.
- [16] SLATER, P. J. **Dominating and reference sets in graphs.** *Journal of Mathematical Physics*, 22:445–445, 1988.