

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

Vinicius Ferreira Amorim Santana

**Avaliação de Testes de Hipóteses Assintóticos
no Modelo de Regressão Lindley-Unitária: Um
Estudo de Simulação e aplicação**

Goiânia

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome(s) completo(s) do(a)(s) autor(a)(es)(as): Vinicius Ferreira Amorim Santana.

Título do trabalho: Avaliação de Testes de Hipóteses Assintóticos no Modelo de Regressão Lindley-Unitária: Um Estudo de Simulação e aplicação.

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Tatiane Ferreira Do Nascimento Melo Da Silva**, Professor do Magistério Superior, em 02/12/2025, às 20:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Ferreira Amorim Santana**, Discente, em 03/12/2025, às 19:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

Vinicius Ferreira Amorim Santana

**Avaliação de Testes de Hipóteses Assintóticos no
Modelo de Regressão Lindley-Unitária: Um Estudo de
Simulação e aplicação**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Bacharelado em Estatística da Universidade Federal de Goiás para aprovação no componente curricular TCC, como parte das exigências para a obtenção do título de bacharel em Estatística.
Orientadora: Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva

Goiânia

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santana, Vinicius Ferreira Amorim

Avaliação de Testes de Hipóteses Assintóticos no Modelo de Regressão Lindley-Unitária [manuscrito] : Um Estudo de Simulação e aplicação / Vinicius Ferreira Amorim Santana. - 2025.
34, f.

Orientador: Profa. Dra. Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Estatística, Goiânia, 2025.

Bibliografia. Anexos.

Inclui gráfico, tabelas, lista de tabelas.

1. Modelo Lindley-Unitária. 2. Refinamentos assintóticos. 3. Simulação de Monte Carlo. 4. Testes estatísticos. I. Silva, Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da, orient. II. Título.

CDU 519.22



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e oito dias do mês de novembro do ano de 2025 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Avaliação de Testes de Hipóteses Assintóticos no Modelo de Regressão Lindley-Unitária: Um Estudo de Simulação e aplicação”, de autoria de Vinicius Ferreira Amorim Santana, do curso de Estatística, do Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Profa. Dra. Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Amanda Buosi Gazon Milani (IME/UFG) e Renata Mendonça Rodrigues Vasconcelos (IME/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 9,6, tendo sido o TCC considerado aprovado.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Amanda Buosi Gazon Milani, Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 17:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renata Mendonça Rodrigues Vasconcelos, Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 18:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tatiane Ferreira Do Nascimento Melo Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 20:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5807915** e o código CRC **80A49A13**.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho, em primeiro lugar, à memória do Professor Doutor Tiago Moreira Vargas, docente deste Instituto de Matemática e Estatística (IME). Tendo sido meu orientador de Iniciação Científica, sua orientação, incentivo e paixão pela estatística foram fundamentais para minha formação e para o delineamento inicial deste projeto. Este trabalho seria, originalmente, conduzido sob sua supervisão. Sua ausência, decorrente de uma trágica fatalidade, é profundamente sentida. A ele, minha eterna gratidão e homenagem póstuma.

Expresso minha mais profunda gratidão à minha orientadora, Professora Doutora Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva. Agradeço imensamente por ter aceitado me orientar e me acompanhar nesta jornada, especialmente dadas as circunstâncias. Sua paciência, disposição, rigor técnico e orientação precisa foram os pilares que me deram segurança para a concepção e finalização deste trabalho. Sem seu apoio e confiança, esta etapa não seria concluída.

Por fim, estendo meus agradecimentos a todos os meus colegas e amigos de graduação. A jornada no curso de Estatística foi repleta de desafios, e o apoio mútuo, as discussões acadêmicas e o companheirismo foram essenciais para superar cada semestre. Agradeço por tornarem essa trajetória, por vezes árdua, muito mais leve. Sem essas pessoas, eu certamente não teria conseguido chegar até aqui.

*quem há de ser um criador no bem e no mal, em verdade
há de ser primeiro um aniquilador, e quebrar valores.*

(Friedrich Nietzsche, Assim Falou Zaratustra)

RESUMO

A inferência em modelos de regressão pode ser comprometida em amostras pequenas ou moderadas, uma vez que testes clássicos, como razão de verossimilhança, Wald, escore e gradiente, tendem a apresentar distorções de tamanho, levando a decisões estatísticas incorretas. Este trabalho tem como objetivo avaliar e comparar o desempenho desses quatro testes, além de uma versão corrigida do teste de Wald com refinamentos de segunda ordem no modelo de regressão Lindley-Unitária, apropriado para variáveis contínuas restritas ao intervalo $(0,1)$. Para isso, foi conduzido um estudo de simulação de Monte Carlo, variando o tamanho amostral, o número de parâmetros do modelo e o comprimento do vetor de parâmetros sob teste. Os resultados indicam que a performance dos testes assintóticos piora com o aumento da complexidade do modelo, especialmente em amostras pequenas. Em geral, o teste de Wald tradicional mostrou-se sistematicamente liberal, elevando o risco de erros do tipo I, enquanto o teste escore apresentou comportamento marcadamente conservador, o que implica em perda de poder estatístico. A versão corrigida do teste de Wald apresentou melhorias significativas, mas o teste gradiente destacou-se por sua robustez e consistência superiores. Ele manteve taxas de rejeição muito próximas aos níveis nominais, mesmo nos cenários mais exigentes, e se beneficia de uma maior simplicidade computacional por não exigir o cálculo da matriz de informação. Uma aplicação com dados reais do IDEB e do PIB *per capita* das unidades federativas brasileiras ilustra os achados. Conclui-se que o teste gradiente representa a alternativa mais recomendável para análises práticas neste contexto, oferecendo uma combinação de precisão e eficiência.

Palavras-chave: Modelo Lindley-Unitária. Refinamentos assintóticos. simulação de Monte Carlo. Testes estatísticos.

ABSTRACT

Inference in regression models can be compromised in small or moderate samples, since classical tests such as the likelihood ratio, Wald, score, and gradient tests tend to exhibit size distortions, leading to incorrect statistical decisions. This study aims to evaluate and compare the performance of these four tests, as well as a corrected version of the Wald test with second-order refinements, within the Unit-Lindley regression model, which is suitable for continuous variables restricted to the interval $(0,1)$. For this purpose, a Monte Carlo simulation study was conducted, varying the sample size, the number of model parameters, and the length of the parameter vector under test. The results indicate that the performance of the asymptotic tests deteriorates as model complexity increases, especially in small samples. In general, the traditional Wald test was systematically liberal, increasing the risk of type I errors, whereas the score test showed markedly conservative behavior, implying a loss of statistical power. The corrected version of the Wald test presented significant improvements, but the gradient test stood out for its superior robustness and consistency. It maintained rejection rates very close to nominal levels, even in the most demanding scenarios, and benefits from greater computational simplicity, as it does not require the computation of the information matrix. It is concluded that the gradient test represents the most advisable alternative for practical analyses in this context, offering a combination of accuracy and efficiency.

Keywords: Asymptotic refinements. Monte Carlo simulation. Statistical tests. Unit-Lindley model.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 1$ com diferentes valores de n e p .	23
Tabela 2	– Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 2$ com diferentes valores de n e p .	24
Tabela 3	– Viés das Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 1$, em relação aos Níveis Nominais	25
Tabela 4	– Viés das Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 2$, em relação aos Níveis Nominais	26
Tabela 5	– Resultados do Ajuste do Modelo Lindley-Unitária (via Wald padrão) para o IDEB ($n = 27$).	28
Tabela 6	– Comparação dos Testes de Hipóteses para o Efeito do PIB per capita no IDEB ($q = 1$).	29

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3	METODOLOGIA	17
3.1	Modelo de regressão Lindley-Unitária	17
3.2	Testes de hipóteses assintóticos	19
3.3	Estudo de Simulação de Monte Carlo	20
3.4	Aplicação em dados reais	21
4	RESULTADOS	23
4.1	Análise das Taxas de Rejeição Empíricas	23
4.2	Análise do Viés das Taxas de Rejeição	25
4.3	Aplicação em Dados Reais	26
4.3.1	Os Dados: IDEB e Desenvolvimento Socioeconômico	27
4.3.2	Ajuste do Modelo e Análise Inferencial	27
5	CONCLUSÃO	30
	Referências	32
	ANEXO A Código-Fonte	34

1 INTRODUÇÃO

A análise de dados contínuos restritos ao intervalo $(0,1)$, como proporções, taxas ou índices, é de grande importância em diversas áreas, como economia, saúde e ciências sociais. Para lidar com essas variáveis, modelos de regressão específicos são necessários. Enquanto modelos clássicos como a regressão Beta são amplamente utilizados, a literatura recente tem investigado alternativas capazes de capturar diferentes formas de assimetria nos dados, muitas vezes com menor complexidade paramétrica. Entre elas, destaca-se o modelo de regressão Lindley-Unitária (UL), proposto por Mazucheli, Menezes e Chakraborty (2019), que oferece uma estrutura adequada para modelar tais dados. Na área educacional e econômica, por exemplo, tais modelos são úteis para analisar proporções e índices restritos ao intervalo $(0,1)$, como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) e a participação de determinado setor no Produto Interno Bruto (PIB) nacional.

Nesse contexto, a inferência estatística desempenha um papel fundamental. Os testes de hipóteses paramétricos constituem ferramentas centrais para avaliar os efeitos e as relações entre variáveis explicativas e a variável resposta. Em grandes amostras, os procedimentos mais empregados são aqueles baseados nas estatísticas da Razão de Verossimilhanças (RV), de Wald (W), de Escore (E) e de Gradiente (G). A ampla utilização e a equivalência assintótica desses testes decorrem do fato de que, sob condições de regularidade e sob a hipótese nula, todos aproximam a função de log-verossimilhança por uma parábola (aproximação quadrática). Consequentemente, as estatísticas convergem para uma mesma distribuição qui-quadrado, tornando-se alternativas práticas quando as distribuições exatas são desconhecidas.

Contudo, a confiança nesses testes assintóticos pode ser comprometida quando o tamanho da amostra é pequeno ou moderado, pois os termos de ordem superior da expansão de Taylor, negligenciados na aproximação assintótica, tornam-se relevantes. Nessas condições, as estatísticas clássicas diferem na forma como avaliam a discrepância entre os dados e a hipótese nula: o teste de Wald baseia-se na curvatura da log-verossimilhança no estimador irrestrito; o Escore, na inclinação no ponto restrito; a RV, na diferença de alturas da função; e o Gradiente, numa combinação entre inclinação e distância das estimativas. Essas diferenças geométricas levam a distorções de tamanho distintas. O teste de Wald, por exemplo, tende a ser liberal (rejeição excessiva) pois a variância estimada tende a ser subestimada em pequenas amostras, além de não ser invariante a reparametrizações. Em contrapartida, o teste Escore frequentemente exibe comportamento conservador (perda de poder) devido à rigidez da informação de Fisher avaliada sob a hipótese nula. A estatística da Razão de Verossimilhanças, por sua vez, tende a apresentar um desempenho mais equilibrado. Isso ocorre porque ela utiliza informações de ambos os estimadores (restrito e irrestrito) para mensurar a evidência contra a hipótese nula e possui a propriedade

de invariância sob reparametrizações, o que lhe confere maior estabilidade inferencial. Ainda assim, em amostras finitas, ela também pode apresentar viés devido à imprecisão da aproximação qui-quadrado.

A necessidade de aprimorar a inferência em amostras finitas motivou o desenvolvimento de refinamentos assintóticos e correções de ordem superior. Já nos trabalhos pioneiros de Bartlett (1937) e Lawley (1956), foi apontada a necessidade de correções para a estatística da razão de verossimilhanças. Seguindo essa linha, diversos pesquisadores propuseram ajustes para diferentes modelos, como os Modelos Lineares Generalizados e os modelos de regressão Beta.

Especificamente para o modelo de regressão Lindley-Unitária, o trabalho de Oliveira *et al.* (2025) serve como ponto de partida para a presente investigação. Os autores obtiveram expressões para correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança e desenvolveram um teste de Wald modificado baseado em uma matriz de covariâncias de segunda ordem. Os resultados numéricos mostraram que os estimadores corrigidos são menos viesados e que o teste de Wald modificado é mais preciso em amostras pequenas.

Apesar desses avanços, e considerando que o modelo Lindley-Unitária tem se destacado como uma alternativa vantajosa à regressão Beta por sua parcimônia (apenas um parâmetro de forma) e tratabilidade matemática, uma avaliação comparativa e abrangente do desempenho dos testes clássicos de escore e gradiente, frente às alternativas de Wald, Wald corrigido e razão de verossimilhanças, ainda não foi realizada para este modelo. Embora estudos análogos em modelos de regressão Beta de Ferrari e Cribari-Neto (2004) e Modelos Lineares Generalizados do Vargas, Ferrari e Lemonte (2014) tenham evidenciado que, em amostras finitas, a falha na aproximação quadrática da log-verossimilhança torna o teste de Wald liberal e o teste Escore conservador, este trabalho se insere nesse campo de pesquisa com o objetivo de verificar se tais padrões de distorção persistem ou se alteram no modelo Lindley-Unitária. O propósito é avaliar e comparar o desempenho dos quatro testes assintóticos clássicos e da versão corrigida do teste de Wald. Para isso, foi conduzido um estudo de simulação de Monte Carlo, explorando cenários com variação no tamanho amostral, no número de parâmetros do modelo e no número de parâmetros sob teste. Adicionalmente, a metodologia será aplicada a um conjunto de dados reais para ilustrar a relevância prática dos achados. A partir dos resultados, este estudo pretende oferecer recomendações sobre qual teste de hipótese é mais confiável e robusto, mitigando o risco de inferências inválidas decorrentes das discrepâncias assintóticas em modelos para dados contínuos restritos ao intervalo $(0,1)$.

A elaboração deste trabalho, desde a sua concepção teórica, análise metodológica e implementação, foi conduzida integralmente pelo autor¹. O trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta a revisão bibliográfica, abordando os principais conceitos relacionados

¹ O assistente Gemini (Google) foi empregado exclusivamente para a revisão textual e sugestões de estruturação em \LaTeX . Não houve interferência no conteúdo técnico, científico ou nas decisões de análise estatística apresentadas. Ver Google (2025).

aos modelos de regressão para variáveis contínuas no intervalo $(0,1)$, bem como fundamentos teóricos dos testes de hipóteses assintóticos utilizados neste estudo. O Capítulo 2 descreve a metodologia adotada, incluindo a formulação do modelo de regressão Lindley-Unitária, as expressões das estatísticas de teste de Wald, razão de verossimilhanças, escore e gradiente, além dos procedimentos empregados no estudo de simulação e na aplicação aos dados reais. No Capítulo 3, são apresentados e discutidos os resultados obtidos tanto nas simulações quanto na análise dos dados reais. Por fim, são expostas as conclusões do trabalho, destacando as principais contribuições e possíveis direções para pesquisas futuras.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os testes de hipóteses constituem uma das principais ferramentas da inferência estatística, permitindo avaliar suposições acerca de parâmetros populacionais com base em informações amostrais. Na prática, o objetivo é verificar, a partir dos dados, se há evidências suficientes para aceitar ou rejeitar uma hipótese formulada sobre um ou mais parâmetros do modelo. Em muitos casos, as distribuições exatas das estatísticas de teste são desconhecidas, especialmente em modelos de regressão, o que torna a teoria assintótica uma alternativa essencial. Assim, quando o tamanho amostral tende ao infinito, essas estatísticas convergem para distribuições conhecidas, usualmente a distribuição qui-quadrado, o que permite a construção de testes com propriedades bem definidas.

Em situações de grandes amostras, os procedimentos mais empregados são aqueles baseados nas estatísticas da razão de verossimilhança (Wilks, 1938), de Wald (Wald, 1943), de escore (Rao, 1948) e de gradiente (Terrell, 2002). Esses testes são amplamente utilizados, pois, na maioria dos modelos estatísticos, as distribuições exatas das estatísticas de teste não são conhecidas, e os métodos assintóticos oferecem uma solução prática e eficiente. Sob a hipótese nula, todas essas estatísticas convergem assintoticamente para uma distribuição qui-quadrado, o que as torna comparáveis entre si.

Cada uma dessas estatísticas apresenta características específicas. O teste de Wald é um dos mais utilizados devido à sua simplicidade computacional, pois depende apenas dos estimadores de máxima verossimilhança e da matriz de informação observada. Contudo, é conhecido por seu comportamento liberal em pequenas amostras, tendendo a rejeitar a hipótese nula excessivamente devido à subestimação da variância dos estimadores. O teste escore, também chamado de teste de Rao, requer apenas o cálculo do vetor escore e da matriz de informação sob a hipótese nula, sendo particularmente útil quando a estimação sob a hipótese alternativa é complexa. O teste da razão de verossimilhanças é baseado na comparação entre as log-verossimilhanças sob as hipóteses nula e alternativa, e costuma apresentar desempenho equilibrado em diferentes contextos por utilizar a informação completa da função de verossimilhança em ambos os pontos. Por fim, o teste de gradiente, proposto por Terrell (2002), tem como vantagem a simplicidade de cálculo, pois dispensa a inversão da matriz de informação observada. Esta característica representa uma vantagem computacional significativa, pois evita problemas de instabilidade numérica comuns na inversão de matrizes mal condicionadas, além de conferir ao teste um desempenho robusto em amostras finitas, comparável à razão de verossimilhanças.

Nos últimos anos, diversos autores têm estudado as propriedades dessas estatísticas em pequenas amostras, uma vez que, em muitas aplicações práticas, o tamanho da amostra não é suficientemente grande para assegurar a validade da teoria assintótica. Nessa linha, os trabalhos

clássicos de Bartlett (1937) e Lawley (1956) já haviam apontado a necessidade de correções de ordem finita para a estatística da razão de verossimilhanças, conhecidas como correções de Bartlett. Tais correções visam reduzir o viés da média da estatística em relação à distribuição qui-quadrado teórica, melhorando a precisão dos testes em amostras pequenas ou moderadas. Seguindo essa linha, Cordeiro e Ferrari (1991) e Pace e Salvan (1997) propuseram ajustes e alternativas que buscam melhorar o desempenho das estatísticas de teste em amostras finitas, generalizando as correções para diferentes modelos e contextos.

Diversos estudos posteriores investigaram a aplicabilidade dessas correções em diferentes classes de modelos. Vargas, Ferrari e Lemonte (2014) compararam o desempenho das estatísticas de razão de verossimilhança, Wald, escore e gradiente em Modelos Lineares Generalizados, destacando limitações em amostras pequenas e propondo versões corrigidas. De maneira semelhante, Medeiros, Ferrari e Lemonte (2017) analisaram o desempenho desses testes em modelos de dispersão, mostrando que as correções de segunda ordem podem melhorar significativamente o controle do erro tipo I. No contexto de dados restritos ao intervalo $(0,1)$, Ferrari e Pinheiro (2010) propuseram um ajuste para a estatística da razão de verossimilhanças no modelo de regressão Beta, evidenciando que as correções de Bartlett são eficazes para reduzir distorções em amostras pequenas. Posteriormente, Melo *et al.* (2022) aplicaram técnicas semelhantes no contexto dos modelos de regressão Dirichlet Multivariado, ampliando o escopo de aplicação dessas melhorias.

Modelos de regressão para variáveis contínuas restritas ao intervalo $(0,1)$ têm recebido atenção crescente na literatura estatística, especialmente após o desenvolvimento do modelo de regressão Beta por Ferrari e Cribari-Neto (2004). Esses modelos são amplamente utilizados em diversas áreas, como economia, educação, biologia e saúde, para analisar proporções, taxas e índices. Diferentes extensões e alternativas à distribuição Beta foram propostas, como as distribuições Kumaraswamy, Logística Unitária e, mais recentemente, a Lindley-Unitária, cada uma buscando maior flexibilidade para modelar dados assimétricos e com diferentes graus de dispersão.

A distribuição Lindley-Unitária foi recentemente proposta como uma alternativa flexível para modelar variáveis contínuas restritas ao intervalo $(0,1)$, representando uma alternativa à tradicional distribuição Beta. Sua construção é motivada a partir da distribuição Lindley (Lindley, 1958), adaptada para o contexto unitário por meio de transformação adequada. Mazucheli, Menezes e Chakraborty (2019) apresentam a distribuição Lindley-Unitária como uma alternativa à distribuição Beta para modelar dados proporcionais no intervalo $(0,1)$. Os autores destacam a flexibilidade da distribuição e sua capacidade de incorporar covariáveis diretamente na média, permitindo quantificar suas influências na variável resposta. Além disso, esses autores também propõem um modelo de regressão associado, permitindo relacionar a média da variável resposta contínua em $(0,1)$ a um conjunto de covariáveis.

Nos últimos anos, os modelos ou distribuição Lindley-Unitária têm sido estudados por

alguns autores, por exemplo, Akdur (2020) propõe modelo de efeitos mistos com distribuição Lindley-Unitária para dados de proporção com hierarquia/cluster. Özonur (2022) propôs um teste de aderência suave para avaliar a adequação do modelo de regressão Lindley-Unitária, mostrando por meio de simulações e de dados reais que ele ajusta melhor variáveis contínuas em $(0,1)$ do que os modelos Beta e Simplex. Karakaya e Saglam (2025) propuseram a distribuição Gamma Lindley-Unitária, uma extensão flexível para modelar variáveis contínuas restritas ao intervalo $(0,1)$. No contexto de refinamentos assintóticos, Oliveira *et al.* (2025) obtiveram uma expressão para correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança no modelo de regressão Lindley-Unitária. As evidências numéricas mostraram que os estimadores corrigidos têm vieses menores e que o teste de Wald corrigido, baseado em covariância de segunda ordem, é mais preciso em amostras pequenas.

Apesar dos avanços recentes, a literatura sobre testes assintóticos aplicados ao modelo de regressão Lindley-Unitária ainda é pouco desenvolvida. As revisões e correções em pequenas amostras destacadas ao longo deste capítulo reforçam a importância de refinamentos assintóticos, garantindo inferência estatística confiável mesmo em cenários com limitações amostrais.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, detalhamos os procedimentos metodológicos empregados para avaliar o desempenho de testes de hipóteses assintóticos no contexto do modelo de regressão Lindley-Unitária. A metodologia está dividida em três partes principais: a apresentação do modelo de regressão e dos testes estatísticos de interesse, o desenho do estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar o comportamento dos testes em amostras finitas, e, por fim, a aplicação da metodologia a um conjunto de dados reais para ilustrar sua relevância prática.

3.1 MODELO DE REGRESSÃO LINDLEY-UNITÁRIA

A distribuição Lindley-Unitária (UL) foi proposta por Mazucheli, Menezes e Chakraborty (2019). Estes autores usaram a transformação $Y = X/(1 + X)$ na distribuição Lindley (Lindley, 1958), cuja função de densidade de probabilidade (f.d.p) é dada por

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 1}(x + 1)e^{-x\theta}, \quad x > 0, \quad \theta \geq 0.$$

Assim, a f.d.p da Lindley-Unitária é dada por

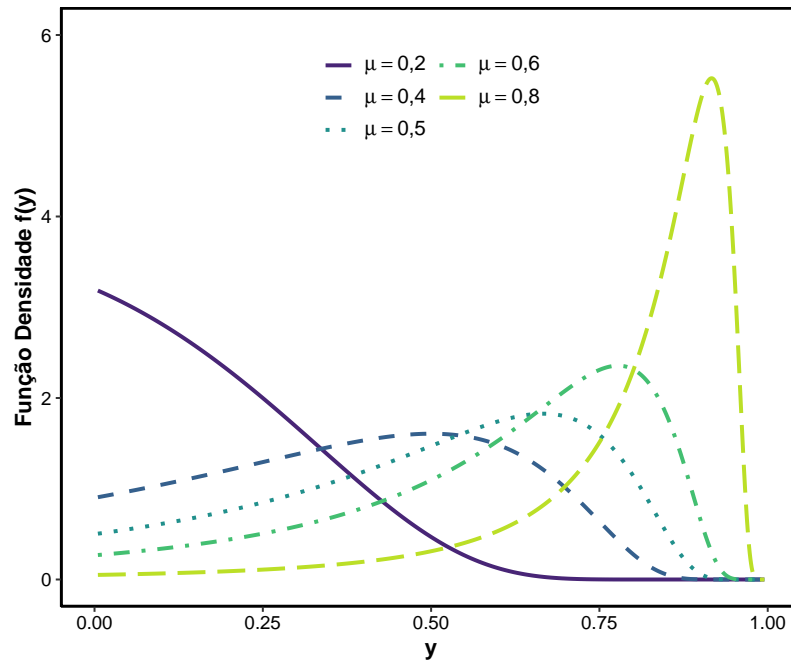
$$f(y|\theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta}(1 - y)^{-3} \exp\left(-\frac{\theta y}{1 - y}\right), \quad 0 < y < 1, \quad \theta > 0. \quad (3.1)$$

Mazucheli, Menezes e Chakraborty (2019) também propuseram uma reparametrização da equação (3.1) utilizando a média, resultando na seguinte expressão:

$$f(y|\mu) = \frac{(1 - \mu)^2}{\mu(1 - y)^3} \exp\left[-\frac{y(1 - \mu)}{\mu(1 - y)}\right], \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \mu < 1.$$

A Figura 1 ilustra o comportamento da função de densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Unitária para diferentes valores da média μ . Nota-se a flexibilidade da distribuição em acomodar diferentes formas de assimetria.

Figura 1 – Função de densidade de probabilidade da distribuição Lindley-Unitária reparametrizada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para definição do modelo utilizado neste trabalho, considere que Y_1, \dots, Y_n sejam variáveis aleatórias independentes, tais que $Y_i \sim \text{UL}(\mu_i)$, para $i = 1, \dots, n$. O modelo de regressão pode ser estabelecido assumindo-se uma relação funcional entre a média de Y_i e um preditor linear da seguinte forma:

$$g(\mu_i) = \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta} = \eta_i, \quad (3.2)$$

onde $g : (0, 1) \rightarrow \Re$ representa uma função de ligação conhecida, estritamente crescente e com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas. O vetor de parâmetros desconhecidos é dado por $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$, enquanto $\mathbf{X}_i^\top = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ corresponde às observações de p variáveis explicativas conhecidas.

O logaritmo da função de verossimilhança do modelo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left[2 \log(1 - \mu_i) - \log(\mu_i) - 3 \log(1 - y_i) - \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)} \right]. \quad (3.3)$$

As quantidades necessárias para a estimação dos parâmetros e os testes estatísticos de Wald, razão de verossimilhanças, escore e gradiente — vetor escore e matriz de informação de Fisher — são definidas, respectivamente, como:

$$U_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}) = X^\top \mathbf{v} \quad \text{e} \quad I(\boldsymbol{\beta}) = X^\top Q X, \quad (3.4)$$

onde X representa a matriz contendo as covariáveis, e o vetor v tem seu i -ésimo componente definido por:

$$v_i = \left[\frac{y_i(1 - \mu_i) - \mu_i(1 + \mu_i)(1 - y_i)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)(1 - y_i)} \right] h'(\eta_i),$$

com $h'(\eta_i)$ sendo a primeira derivada de $h(\eta_i) = g^{-1}(\eta_i)$ em relação ao parâmetro β_j , para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, p$. No caso particular em que a função de ligação escolhida é a logito, obtemos:

$$h'(\eta_i) = \frac{e^{\eta_i}}{(1 + e^{\eta_i})^2}.$$

A matriz diagonal $Q = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ tem os seguintes elementos diagonais:

$$q_i = \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] h'(\eta_i)^2.$$

As expressões matemáticas apresentadas acima foram extraídas do trabalho de Oliveira et al. (2025), no qual são detalhados os principais resultados analíticos relacionados ao modelo em estudo.

3.2 TESTES DE HIPÓTESES ASSINTÓTICOS

Para a realização dos testes de hipóteses, particionamos o vetor de parâmetros β como $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$, sendo $\beta_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)^\top$ o vetor de parâmetros de interesse e $\beta_2 = (\beta_{q+1}, \beta_{q+2}, \dots, \beta_p)^\top$ o vetor de parâmetros de perturbação. O teste de hipótese de interesse é dado por

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_1^{(0)} \quad \text{versus} \quad \mathcal{H}_1 : \beta_1 \neq \beta_1^{(0)},$$

em que $\beta_1^{(0)}$ é um vetor de constantes com dimensão q . Denotamos por $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1^\top, \hat{\beta}_2^\top)^\top$ o estimador de máxima verossimilhança irrestrito de β , e por $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1^\top, \tilde{\beta}_2^\top)^\top$ o correspondente estimador sob a hipótese nula, com $\tilde{\beta}_1 = \beta_1^{(0)}$.

A estatística de Wald é dada por

$$\lambda_W = \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)} \right)^\top \left\{ \hat{I}^{\beta_1 \beta_1} \right\}^{-1} \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)} \right),$$

em que $\hat{I}^{\beta_1 \beta_1}$ é a submatriz da inversa da matriz de informação de Fisher avaliada em $\hat{\beta}$, correspondente aos parâmetros de interesse.

A estatística do teste de Wald modificado, conforme apresentado por Oliveira et al. (2025), é dada por

$$\lambda_{W_c} = \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)} \right)^\top \left\{ \widehat{Cov}_2^{11}(\hat{\beta}) \right\}^{-1} \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)} \right).$$

A sua construção difere da estatística de Wald padrão pela substituição da matriz de covariâncias de primeira ordem, $\{\hat{I}^{\beta_1 \beta_1}\}$, pela inversa de uma matriz de covariâncias de segunda ordem, $\{\widehat{Cov}_2^{11}(\hat{\beta})\}$, que incorpora refinamentos assintóticos para melhor precisão em amostras finitas.

A estatística da razão de verossimilhanças é dada por

$$\lambda_{RV} = 2 \left\{ \ell(\hat{\beta}) - \ell(\tilde{\beta}) \right\},$$

onde $\ell(\cdot)$ representa a log-verossimilhança.

A estatística de escore é dada por

$$\lambda_E = \tilde{\mathbf{U}}_1^\top \tilde{I}^{\beta_1 \beta_1} \tilde{\mathbf{U}}_1,$$

em que $\tilde{\mathbf{U}}_1$ é o vetor escore com respeito aos parâmetros de interesse avaliado sob \mathcal{H}_0 , e $\tilde{I}^{\beta_1 \beta_1}$ é a submatriz correspondente da matriz de informação de Fisher avaliada em $\tilde{\beta}$.

A estatística do teste gradiente é dada por

$$\lambda_G = \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)} \right)^\top \mathbf{U}_1 \left(\beta_1^{(0)} \right),$$

onde $\mathbf{U}_1 \left(\beta_1^{(0)} \right)$ é o vetor escore com respeito aos parâmetros de interesse, avaliado em $\beta_1^{(0)}$.

Sob a hipótese nula \mathcal{H}_0 , as estatísticas λ_W , λ_{Wc} , λ_{RV} , λ_E e λ_G possuem, assintoticamente, distribuição qui-quadrado com q graus de liberdade.

3.3 ESTUDO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Para avaliar o desempenho empírico dos testes de hipóteses em amostras finitas, foi conduzido um extenso estudo de simulação de Monte Carlo. Os cenários de simulação foram sistematicamente definidos pela combinação de diferentes tamanhos amostrais, com $n \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$; da complexidade do modelo, variando o número total de parâmetros com $p \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$; e da dimensão da hipótese, com o número de parâmetros sob teste sendo $q \in \{1, 2\}$.

Para cada uma das configurações, foram geradas 10.000 réplicas independentes. Em cada réplica, os valores das covariáveis foram obtidos de uma distribuição Uniforme no intervalo $(-0.5, 0.5)$, sendo mantidos fixos ao longo das replicações para cada cenário, e a variável resposta Y_i foi gerada a partir do modelo de regressão Lindley-Unitária, com parâmetros verdadeiros definidos de modo a garantir a vigência da hipótese nula H_0 . Subsequentemente, as cinco estatísticas de teste de interesse — razão de verossimilhanças (λ_{RV}), Wald (λ_W), Wald corrigido (λ_{Wc}), escore (λ_E) e gradiente (λ_G) — foram calculadas.

A performance dos testes foi então mensurada por meio das taxas de rejeição empíricas, que foram comparadas com os quantis da distribuição qui-quadrado com q graus de liberdade para os níveis de significância nominais α de 1%, 5% e 10%. Adicionalmente, foi analisado o viés do tamanho do teste, calculado como a diferença entre a taxa de rejeição empírica e o nível nominal, o que permitiu classificar o comportamento de cada teste como liberal ou conservador.

Toda a implementação computacional foi desenvolvida no R Core Team (2025)¹, e a otimização numérica necessária para a estimação de máxima verossimilhança foi realizada com o algoritmo BFGS.

3.4 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS

Para ilustrar a relevância prática dos achados do estudo de simulação e avaliar o comportamento dos testes de hipóteses assintóticos em um cenário de amostra finita, propõe-se uma aplicação empírica. Esta aplicação utiliza o modelo de regressão Lindley-Unitária para analisar a relação entre o desempenho educacional e o desenvolvimento socioeconômico nas Unidades da Federação (UF) do Brasil.

A escolha deste contexto é deliberada: ao utilizar os dados das 26 UFs e do Distrito Federal, obtemos um tamanho amostral fixo de $n = 27$. Este é um cenário clássico de amostra pequena, alinhado aos tamanhos amostrais investigados na simulação ($n \leq 50$), onde se espera que as distorções de tamanho dos testes assintóticos sejam mais pronunciadas.

A variável resposta (Y) adotada é o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), o principal indicador de qualidade da educação no Brasil, conforme aferido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). O IDEB é uma métrica contínua no intervalo $[0, 10]$. Para adequá-la ao domínio $(0,1)$ do modelo Lindley-Unitária, a variável será transformada através da divisão por 10 ($Y_i = \text{IDEB}_i/10$). Serão utilizados os dados mais recentes disponíveis no momento do estudo, referentes ao ano de 2019, para os anos iniciais (1º ao 5º ano) da rede pública de ensino.

Como variável explicativa, selecionou-se o Produto Interno Bruto (PIB) per capita, um indicador macroeconômico amplamente utilizado para mensurar o nível de riqueza e desenvolvimento econômico de uma região. A hipótese subjacente, vastamente explorada na literatura de economia da educação, é que um maior desenvolvimento econômico pode se associar a um melhor desempenho educacional.

Os dados para esta análise (IDEB e PIB) são de domínio público e originários das fontes oficiais primárias, sendo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), respectivamente.

Para a obtenção e tratamento destes dados, optou-se por utilizar o pacote `basedosdados` para a linguagem R. Esta biblioteca atua como um cliente de consulta ao *data lake* público mantido pelo projeto *Basedosdados*, que armazena, trata e disponibiliza centenas de conjuntos de dados públicos brasileiros. Conforme detalhado no código-fonte, uma consulta SQL foi executada por meio deste pacote para extrair precisamente os dados do IDEB e do PIB referentes

¹ Para garantir a total reprodutibilidade dos resultados, todos os códigos-fonte desenvolvidos para este trabalho estão disponíveis no Anexo A e em um repositório público no GitHub: <<https://github.com/VFASantana/unit-lindley-asymptotic-inference>>.

ao escopo deste trabalho.

Para garantir a estabilidade numérica durante o processo de estimação de máxima verossimilhança, a variável PIB per capita passará por um reescalonamento, sendo dividida por 1.000. Essa transformação não altera o ajuste do modelo em termos de significância estatística, mas melhora a convergência dos algoritmos de otimização e a interpretabilidade dos coeficientes.

O objetivo da análise, que será detalhada no Capítulo 4, é ajustar o modelo de regressão Lindley-Unitária e, subsequentemente, testar a significância estatística do parâmetro associado ao PIB per capita ($H_0 : \beta_1 = 0$) utilizando as cinco estatísticas de teste avaliadas neste trabalho (W, Wc, RV, E e G), comparando seus resultados na prática.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos e discutimos os resultados obtidos tanto no estudo de simulação de Monte Carlo quanto na aplicação a um conjunto de dados reais. O objetivo é avaliar e comparar o desempenho dos testes de hipóteses assintóticos: Razão de Verossimilhanças (RV); Wald (W); Escore (E); Gradiente (G) e de uma versão corrigida do teste de Wald (W_c) no modelo de regressão Lindley-Unitária.

4.1 ANÁLISE DAS TAXAS DE REJEIÇÃO EMPÍRICAS

As taxas de rejeição empíricas dos testes foram avaliadas sob a hipótese nula para investigar o controle do erro tipo I em amostras finitas. Os resultados, apresentados nas Tabelas 1 e 2 (correspondentes aos testes para $q = 1$ e $q = 2$ parâmetros, respectivamente), revelam padrões importantes.

Tabela 1 – Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 1$ com diferentes valores de n e p .

p	n	W			W_c			RV			E			G		
		1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
2	10	2.19	7.23	12.34	1.34	5.02	9.42	1.18	5.32	10.22	0.87	3.51	7.36	1.05	5.08	9.92
	20	1.37	5.74	10.99	1.07	4.91	9.70	0.81	4.75	9.50	1.11	4.73	9.10	0.91	4.95	9.68
	30	1.23	5.39	11.29	0.91	4.80	10.30	0.87	4.77	9.79	1.03	4.86	9.32	0.96	4.87	9.98
	40	1.30	5.47	10.60	1.19	5.13	9.98	1.05	4.88	9.94	1.08	4.66	9.56	1.10	4.94	9.99
	50	1.12	5.41	10.61	1.01	5.03	10.13	1.00	5.01	9.79	1.23	4.91	9.56	1.05	5.06	9.84
3	10	2.31	7.40	12.91	1.28	5.05	9.67	1.20	5.37	10.52	0.72	3.58	7.73	1.10	5.27	10.10
	20	1.43	6.45	12.01	1.03	5.00	10.06	0.95	4.80	9.61	0.90	3.91	8.30	0.96	4.80	9.73
	30	1.24	6.14	11.33	0.96	5.19	10.16	0.90	4.80	9.63	1.09	4.37	8.86	0.98	4.90	9.74
	40	1.27	5.77	10.93	1.07	5.16	9.94	0.83	4.86	9.91	0.90	4.44	9.11	0.86	4.93	10.00
	50	1.25	5.69	10.90	1.09	5.20	10.40	1.03	5.12	9.96	1.13	5.04	9.48	1.08	5.21	9.99
4	10	2.65	7.86	14.09	1.38	5.03	9.81	1.22	5.28	10.77	0.55	3.04	6.90	1.08	5.10	10.40
	20	1.47	6.57	12.06	0.96	4.77	9.89	0.71	4.46	9.37	0.66	3.50	7.76	0.79	4.69	9.45
	30	1.27	6.40	11.89	0.98	5.24	10.34	0.95	4.74	9.67	0.98	4.14	8.62	1.01	4.87	9.81
	40	1.17	5.78	11.00	0.90	5.05	9.96	0.69	4.89	9.74	0.63	4.08	8.76	0.72	4.85	9.82
	50	1.31	5.48	11.13	1.13	4.84	10.13	1.05	4.66	9.64	1.02	4.34	8.92	1.09	4.78	9.65
5	10	3.13	8.85	15.46	1.74	5.56	10.21	1.17	5.12	10.26	0.43	2.50	5.93	0.95	4.80	9.79
	20	1.76	7.08	12.04	0.99	5.09	9.81	0.73	4.66	9.32	0.36	3.22	6.86	0.73	4.64	9.29
	30	1.40	5.74	11.03	0.98	4.57	9.04	0.89	4.07	8.70	0.78	3.37	7.28	0.96	4.19	8.84
	40	1.51	6.35	11.78	1.11	5.39	10.49	1.04	5.19	10.21	1.00	4.47	8.82	1.07	5.14	10.27
	50	1.33	5.63	11.22	0.98	4.84	9.98	0.88	4.49	9.60	0.77	4.06	8.53	0.91	4.63	9.66
6	10	2.62	8.02	14.00	1.23	4.90	9.31	1.38	5.90	11.27	0.63	2.98	7.45	1.20	5.38	10.78
	20	1.75	6.80	12.35	0.95	4.86	9.64	0.85	4.56	9.51	0.45	2.86	7.08	0.82	4.52	9.51
	30	1.67	6.45	11.74	0.93	5.00	9.48	0.67	4.39	8.61	0.62	3.41	6.86	0.74	4.52	8.86
	40	1.39	6.28	11.53	1.06	5.04	9.92	0.85	4.73	9.64	0.68	3.65	7.93	0.88	4.74	9.59
	50	1.28	6.13	11.24	1.08	5.35	10.36	0.92	4.87	9.64	0.79	4.19	8.44	0.98	4.90	9.71

Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme esperado pela teoria assintótica, à medida que o tamanho da amostra (n) aumenta, as taxas de rejeição de todos os testes convergem para os níveis de significância nominais ($\alpha \in \{1\%, 5\%, 10\%\}$). No entanto, para amostras pequenas e moderadas (especialmente $n \leq 40$), foram observadas distorções significativas no tamanho dos testes. Essas distorções mostraram-se mais severas em modelos com maior número de parâmetros (p), indicando que a complexidade do modelo agrava os problemas de inferência em amostras finitas.

Tabela 2 – Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 2$ com diferentes valores de n e p .

p	n	W			W_c			RV			E			G		
		1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
3	10	3.62	9.56	15.22	1.96	6.02	10.25	1.30	5.60	10.99	1.79	4.58	7.60	1.09	5.27	10.39
	20	1.70	7.22	12.57	1.09	5.27	10.00	0.83	4.77	9.51	1.61	5.20	9.57	1.08	5.25	9.95
	30	1.57	6.12	11.69	1.20	5.13	9.98	1.12	4.77	9.74	1.56	4.94	9.58	1.23	5.05	10.01
	40	1.44	6.24	11.74	1.15	5.42	10.44	0.96	5.17	10.16	1.15	5.18	9.74	1.07	5.28	10.37
	50	1.25	5.61	10.33	1.03	4.99	9.59	0.88	4.56	9.57	1.10	4.89	9.69	0.93	4.84	9.77
4	10	4.17	10.74	16.80	2.10	6.26	11.17	1.28	5.86	11.50	0.91	3.39	6.17	1.01	5.28	10.50
	20	1.98	7.34	12.66	1.06	5.29	10.07	0.80	4.48	9.26	1.08	4.51	8.70	0.98	4.85	9.67
	30	1.59	6.56	12.04	1.16	5.35	10.14	0.97	4.81	9.60	1.21	4.68	9.08	1.04	5.02	9.82
	40	1.55	6.64	12.41	1.23	5.56	10.74	0.90	5.31	10.46	0.98	4.88	9.57	0.97	5.31	10.66
	50	1.28	6.22	11.74	1.11	5.37	10.53	1.03	5.06	10.15	1.27	4.95	9.70	1.08	5.22	10.29
5	10	5.07	12.73	19.19	2.32	7.27	12.72	1.48	6.59	12.36	0.69	2.40	4.88	1.00	5.23	10.71
	20	2.17	7.83	13.58	1.34	5.21	10.11	0.79	4.36	8.75	0.77	3.41	7.05	0.85	4.68	9.03
	30	1.54	6.36	12.16	1.05	4.84	9.78	0.87	4.22	8.93	0.89	3.83	7.73	0.90	4.37	9.15
	40	1.62	6.80	12.56	1.18	5.44	10.30	0.92	4.85	10.07	0.96	4.20	8.28	0.95	4.75	9.98
	50	1.38	6.00	11.38	1.05	4.94	10.02	0.93	4.77	9.30	0.96	4.41	8.94	0.98	4.91	9.51
6	10	4.32	11.94	18.96	1.74	6.17	11.48	1.47	6.17	12.28	0.44	2.04	5.14	1.15	5.56	11.69
	20	2.21	7.86	13.49	1.33	5.28	9.99	0.85	4.58	9.39	0.82	3.63	7.26	0.93	4.70	9.52
	30	1.80	7.19	13.08	1.26	5.19	10.41	0.81	4.47	9.59	0.83	3.78	7.79	0.84	4.69	9.71
	40	1.78	7.02	12.75	1.24	5.67	10.35	0.95	5.14	9.97	0.76	4.05	8.15	0.93	5.16	9.96
	50	1.68	6.29	11.62	1.26	5.41	9.77	1.06	5.03	9.32	1.03	4.36	8.38	1.11	5.15	9.51

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando os testes individualmente, a estatística de Wald (λ_W) demonstrou o comportamento mais problemático, apresentando-se consistentemente liberal ao rejeitar a hipótese nula com frequência superior ao nível nominal. Em um dos cenários mais extremos, com $q = 2$, $p = 6$ e $n = 10$, a taxa de rejeição para $\alpha = 5\%$ foi de 11,94%, valor mais que o dobro do esperado. Este liberalismo eleva o risco de erros do tipo I, podendo levar a conclusões de que existem efeitos estatisticamente significativos quando, na verdade, não existem. Em oposição direta ao teste de Wald, a estatística escore (λ_E) apresentou um comportamento marcadamente conservador em amostras pequenas, rejeitando a hipótese nula com menos frequência do que o esperado. No mesmo cenário ($q = 2$, $p = 6$, $n = 10$, $\alpha = 5\%$), sua taxa de rejeição foi de apenas 2,04%. Embora tal característica proteja contra o erro tipo I, ela implica uma perda de poder estatístico, tornando mais difícil a detecção de efeitos verdadeiros.

Diante do desempenho do teste de Wald, a versão corrigida (λ_{Wc}), que incorpora uma correção de segunda ordem, representou uma melhora substancial. A taxa de rejeição para o exemplo citado ($q = 2$, $p = 6$, $n = 10$, $\alpha = 5\%$) foi reduzida de 11,94% para 6,17%, uma

redução notável que aprimora significativamente o controle do erro tipo I. Isso posiciona o teste λ_{Wc} como uma alternativa muito mais confiável que sua versão clássica.

Finalmente, os testes da razão de verossimilhanças (λ_{RV}) e de gradiente (λ_G) exibiram um desempenho mais equilibrado. O teste λ_{RV} também se mostrou liberal em amostras pequenas, porém com uma distorção consideravelmente menor que a do teste de Wald. O teste gradiente (λ_G), por sua vez, destacou-se pelo desempenho impressionante, mantendo taxas de rejeição muito próximas dos níveis nominais em quase todos os cenários avaliados. Como exemplo, para $q = 2$, $p = 5$ e $n = 10$, suas taxas de rejeição para α de 1%, 5% e 10% foram, respectivamente, 1,00%, 5,23% e 10,71%, demonstrando um controle quase perfeito do erro tipo I. Além da precisão, a estatística gradiente apresenta a vantagem de ser computacionalmente mais simples, pois não requer o cálculo e a inversão da matriz de informação de Fisher, uma etapa exigida pelos testes de Wald e escore.

4.2 ANÁLISE DO VIÉS DAS TAXAS DE REJEIÇÃO

Os resultados, detalhados nas Tabelas 3 e 4, corroboram os comportamentos observados na análise das taxas de rejeição.

Tabela 3 – Viés das Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 1$, em relação aos Níveis Nominais

p	n	Viés (W)			Viés (W_c)			Viés (RV)			Viés (E)			Viés (G)		
		1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
2	10	1.19	2.23	2.34	0.34	0.02	-0.58	0.18	0.32	0.22	-0.13	-1.49	-2.64	0.05	0.08	-0.08
	20	0.37	0.74	0.99	0.07	-0.09	-0.30	-0.19	-0.25	-0.50	0.11	-0.27	-0.90	-0.09	-0.05	-0.32
	30	0.23	0.39	1.29	-0.09	-0.20	0.30	-0.13	-0.23	-0.21	0.03	-0.14	-0.68	-0.04	-0.13	-0.02
	40	0.30	0.47	0.60	0.19	0.13	-0.02	0.05	-0.12	-0.06	0.08	-0.34	-0.44	0.10	-0.06	-0.01
	50	0.12	0.41	0.61	0.01	0.03	0.13	0.00	0.01	-0.21	0.23	-0.09	-0.44	0.05	0.06	-0.16
3	10	1.31	2.40	2.91	0.28	0.05	-0.33	0.20	0.37	0.52	-0.28	-1.42	-2.27	0.10	0.27	0.10
	20	0.43	1.45	2.01	0.03	0.00	0.06	-0.05	-0.20	-0.39	-0.10	-1.09	-1.70	-0.04	-0.20	-0.27
	30	0.24	1.14	1.33	-0.04	0.19	0.16	-0.10	-0.20	-0.37	0.09	-0.63	-1.14	-0.02	-0.10	-0.26
	40	0.27	0.77	0.93	0.07	0.16	-0.06	-0.17	-0.14	-0.09	-0.10	-0.56	-0.89	-0.14	-0.07	0.00
	50	0.25	0.69	0.90	0.09	0.20	0.40	0.03	0.12	-0.04	0.13	0.04	-0.52	0.08	0.21	-0.01
4	10	1.65	2.86	4.09	0.38	0.03	-0.19	0.22	0.28	0.77	-0.45	-1.96	-3.10	0.08	0.10	0.40
	20	0.47	1.57	2.06	-0.04	-0.23	-0.11	-0.29	-0.54	-0.63	-0.34	-1.50	-2.24	-0.21	-0.31	-0.55
	30	0.27	1.40	1.89	-0.02	0.24	0.34	-0.05	-0.26	-0.33	-0.02	-0.86	-1.38	0.01	-0.13	-0.19
	40	0.17	0.78	1.00	-0.10	0.05	-0.04	-0.31	-0.11	-0.26	-0.37	-0.92	-1.24	-0.28	-0.15	-0.18
	50	0.31	0.48	1.13	0.13	-0.16	0.13	0.05	-0.34	-0.36	0.02	-0.66	-1.08	0.09	-0.22	-0.35
5	10	2.13	3.85	5.46	0.74	0.56	0.21	0.17	0.12	0.26	-0.57	-2.50	-4.07	-0.05	-0.20	-0.21
	20	0.76	2.08	2.04	-0.01	0.09	-0.19	-0.27	-0.34	-0.68	-0.64	-1.78	-3.14	-0.27	-0.36	-0.71
	30	0.40	0.74	1.03	-0.02	-0.43	-0.96	-0.11	-0.93	-1.30	-0.22	-1.63	-2.72	-0.04	-0.81	-1.16
	40	0.51	1.35	1.78	0.11	0.39	0.49	0.04	0.19	0.21	0.00	-0.53	-1.18	0.07	0.14	0.27
	50	0.33	0.63	1.22	-0.02	-0.16	-0.02	-0.12	-0.51	-0.40	-0.23	-0.94	-1.47	-0.09	-0.37	-0.34
6	10	1.62	3.02	4.00	0.23	-0.10	-0.69	0.38	0.90	1.27	-0.37	-2.02	-2.55	0.20	0.38	0.78
	20	0.75	1.80	2.35	-0.05	-0.14	-0.36	-0.15	-0.44	-0.49	-0.55	-2.14	-2.92	-0.18	-0.48	-0.49
	30	0.67	1.45	1.74	-0.07	0.00	-0.52	-0.33	-0.61	-1.39	-0.38	-1.59	-3.14	-0.26	-0.48	-1.14
	40	0.39	1.28	1.53	0.06	0.04	-0.08	-0.15	-0.27	-0.36	-0.32	-1.35	-2.07	-0.12	-0.26	-0.41
	50	0.28	1.13	1.24	0.08	0.35	0.36	-0.08	-0.13	-0.36	-0.21	-0.81	-1.56	-0.02	-0.10	-0.29

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para quantificar a direção e a magnitude das distorções, foi analisado o viés das taxas de rejeição empíricas, definido como a diferença entre a taxa de rejeição observada e o nível de significância nominal.

O viés consistentemente positivo e elevado do teste de Wald (λ_W) confirmou seu caráter liberal, em nítido contraste com o viés predominantemente negativo do teste escore (λ_E), que evidenciou seu conservadorismo.

Tabela 4 – Viés das Taxas de Rejeição Empíricas (%) para $q = 2$, em relação aos Níveis Nominais

p	n	Viés (W)			Viés (W_c)			Viés (RV)			Viés (E)			Viés (G)		
		1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
3	10	2.62	4.56	5.22	0.96	1.02	0.25	0.30	0.60	0.99	0.79	-0.42	-2.40	0.09	0.27	0.39
	20	0.70	2.22	2.57	0.09	0.27	0.00	-0.17	-0.23	-0.49	0.61	0.20	-0.43	0.08	0.25	-0.05
	30	0.57	1.12	1.69	0.20	0.13	-0.02	0.12	-0.23	-0.26	0.56	-0.06	-0.42	0.23	0.05	0.01
	40	0.44	1.24	1.74	0.15	0.42	0.44	-0.04	0.17	0.16	0.15	0.18	-0.26	0.07	0.28	0.37
	50	0.25	0.61	0.33	0.03	-0.01	-0.41	-0.12	-0.44	-0.43	0.10	-0.11	-0.31	-0.07	-0.16	-0.23
4	10	3.17	5.74	6.80	1.10	1.26	1.17	0.28	0.86	1.50	-0.09	-1.61	-3.83	0.01	0.28	0.50
	20	0.98	2.34	2.66	0.06	0.29	0.07	-0.20	-0.52	-0.74	0.08	-0.49	-1.30	-0.02	-0.15	-0.33
	30	0.59	1.56	2.04	0.16	0.35	0.14	-0.03	-0.19	-0.40	0.21	-0.32	-0.92	0.04	0.02	-0.18
	40	0.55	1.64	2.41	0.23	0.56	0.74	-0.10	0.31	0.46	-0.02	-0.12	-0.43	-0.03	0.31	0.66
	50	0.28	1.22	1.74	0.11	0.37	0.53	0.03	0.06	0.15	0.27	-0.05	-0.30	0.08	0.22	0.29
5	10	4.07	7.73	9.19	1.32	2.27	2.72	0.48	1.59	2.36	-0.31	-2.60	-5.12	0.00	0.23	0.71
	20	1.17	2.83	3.58	0.34	0.21	0.11	-0.21	-0.64	-1.25	-0.23	-1.59	-2.95	-0.15	-0.32	-0.97
	30	0.54	1.36	2.16	0.05	-0.16	-0.22	-0.13	-0.78	-1.07	-0.11	-1.17	-2.27	-0.10	-0.63	-0.85
	40	0.62	1.80	2.56	0.18	0.44	0.30	-0.08	-0.15	0.07	-0.04	-0.80	-1.72	-0.05	-0.25	-0.02
	50	0.38	1.00	1.38	0.05	-0.06	0.02	-0.07	-0.23	-0.70	-0.04	-0.59	-1.06	-0.02	-0.09	-0.49
6	10	3.32	6.94	8.96	0.74	1.17	1.48	0.47	1.17	2.28	-0.56	-2.96	-4.86	0.15	0.56	1.69
	20	1.21	2.86	3.49	0.33	0.28	-0.01	-0.15	-0.42	-0.61	-0.18	-1.37	-2.74	-0.07	-0.30	-0.48
	30	0.80	2.19	3.08	0.26	0.19	0.41	-0.19	-0.53	-0.41	-0.17	-1.22	-2.21	-0.16	-0.31	-0.29
	40	0.78	2.02	2.75	0.24	0.67	0.35	-0.05	0.14	-0.03	-0.24	-0.95	-1.85	-0.07	0.16	-0.04
	50	0.68	1.29	1.62	0.26	0.41	-0.23	0.06	0.03	-0.68	0.03	-0.64	-1.62	0.11	0.15	-0.49

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse contexto, a correção de segunda ordem aplicada ao teste de Wald mostrou-se altamente eficaz na mitigação de sua liberalidade. Em um cenário ilustrativo com $q = 2$, $p = 5$, $n = 10$ e $\alpha = 5\%$, o viés do λ_W foi de +7,73%, enquanto o do λ_{W_c} foi de apenas +2,27%, o que representa uma redução de quase 70%. Apesar da melhora significativa do teste de Wald corrigido, o teste gradiente (λ_G) novamente se sobressaiu, apresentando vieses notavelmente baixos na maioria das situações e evitando os extremos dos demais testes. Mesmo o eficaz λ_{W_c} apresentou distorções maiores que o λ_G em alguns dos cenários mais críticos. Essa consistência posiciona o teste gradiente como a alternativa mais robusta e recomendável para análises práticas neste contexto.

4.3 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS

Para ilustrar a relevância prática dos achados do estudo de simulação, o modelo de regressão Lindley-Unitária e os testes de hipóteses avaliados foram aplicados a um conjunto de dados reais.

A análise está estruturada em três etapas: primeiramente, a descrição e contextualização dos dados; em seguida, o ajuste do modelo e a interpretação de seus parâmetros; e, por fim, uma análise de diagnóstico para validar a adequação do modelo.

4.3.1 Os Dados: IDEB e Desenvolvimento Socioeconômico

Nesta aplicação, investiga-se a relação entre o desempenho da educação básica e o nível de desenvolvimento socioeconômico nas Unidades da Federação (UF) do Brasil. A escolha por dados estaduais (26 estados e o Distrito Federal) resulta em uma amostra de tamanho $n = 27$, um cenário ideal para avaliar o comportamento dos testes assintóticos em condições de amostras finitas, conforme discutido nos capítulos anteriores.

A variável resposta utilizada é o **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)**, o principal indicador de qualidade da educação no Brasil. Criado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), o IDEB sintetiza em um único valor duas dimensões cruciais: o fluxo escolar (taxas de aprovação) e o desempenho dos estudantes em avaliações de larga escala (Saeb). O índice varia de 0 a 10 e, para esta análise, foi transformado para o intervalo (0,1) através da divisão por 10, tornando-se uma variável proporcional adequada ao modelo Lindley-Unitária. Foram utilizados os dados referentes ao ano de 2019 para os anos iniciais (1º ao 5º ano) da rede pública.

Como variável explicativa, foi selecionado o **Produto Interno Bruto (PIB) per capita**, um indicador amplamente utilizado para mensurar o nível de riqueza e desenvolvimento econômico de uma região. A hipótese subjacente, vastamente explorada na literatura de economia da educação, é que unidades federativas com maior desenvolvimento econômico tendem a apresentar melhores condições de investimento em infraestrutura e capital humano, o que pode se refletir em um desempenho educacional superior.

Dessa forma, o objetivo desta aplicação é modelar a proporção do IDEB em função do PIB per capita, utilizando o modelo de regressão Lindley-Unitária para verificar se existe uma associação estatisticamente significativa entre essas duas variáveis no contexto brasileiro. Os dados foram obtidos a partir de fontes públicas oficiais, por meio da plataforma *Basedosdados*, que agrega informações do INEP e do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

4.3.2 Ajuste do Modelo e Análise Inferencial

Com os dados devidamente preparados (Seção 3.3.1), procedemos ao ajuste do modelo de regressão Lindley-Unitária (UL), conforme a formulação teórica da Seção 2.1. O modelo visa explicar a proporção do IDEB (Y_i) como função do PIB per capita escalonado (X_{i1}).

Utilizamos a função de ligação logito, que é uma escolha padrão e robusta para modelar

proporções no intervalo (0,1). Assim, o modelo ajustado assume a seguinte forma:

$$g(\mu_i) = \log\left(\frac{\mu_i}{1 - \mu_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_{i1}$$

onde $Y_i \sim UL(\mu_i)$, Y_i representa o `ideb_prop` (IDEB dividido por 10), e X_{i1} representa o `pib_per_capita_scaled` (PIB per capita dividido por 1000). A estimação dos parâmetros $\beta = (\beta_0, \beta_1)^\top$ foi realizada por máxima verossimilhança (MV), conforme implementado no código-fonte (Anexo A).

O principal objetivo inferencial desta aplicação é testar a significância estatística da variável explicativa, ou seja, verificar se o PIB per capita tem um efeito detectável sobre o IDEB. Isso se traduz no seguinte teste de hipóteses para o parâmetro β_1 :

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Este é um teste com um único parâmetro de interesse, portanto $q = 1$.

A Tabela 5 apresenta os resultados do ajuste do modelo, incluindo as estimativas de MV para os parâmetros, seus erros-padrão (baseados na matriz de informação de Fisher observada) e o p-valor correspondente ao teste de Wald padrão.

Tabela 5 – Resultados do Ajuste do Modelo Lindley-Unitária (via Wald padrão) para o IDEB ($n = 27$).

Termo	Estimativa	Erro Padrão	Valor z	Pr(> z)
(Intercept)	-0.3592	0.3275	-1.0969	0.2727
PIB per capita (scaled)	0.0070	0.0096	0.7216	0.4706

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Analisando a Tabela 5, observamos que a estimativa para o coeficiente β_1 é positiva (0.0070), sugerindo que um maior PIB per capita está associado a um IDEB ligeiramente maior. Contudo, o erro-padrão associado é relativamente alto (0.0096). O teste de Wald padrão resulta em um p-valor de 0.4706, que é substancialmente superior aos níveis de significância usuais (e.g., $\alpha = 0.05$). Isso indica que, sob a ótica deste teste, não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar H_0 , ou seja, não se pode afirmar que exista uma associação estatisticamente significativa entre o PIB per capita e o IDEB neste contexto.

Para uma análise inferencial robusta, calculamos as cinco estatísticas de teste discutidas neste trabalho (Wald, Wald Corrigido, Razão de Verossimilhanças, Escore e Gradiente) para a hipótese $H_0 : \beta_1 = 0$. Os resultados estão consolidados na Tabela 6.

A observação imediata da Tabela 6 é que, para este conjunto de dados, todas as cinco estatísticas de teste levam à mesma conclusão inequívoca: a falha em rejeitar H_0 em níveis de significância usuais (1%, 5% ou 10%). Os valores-p são notavelmente consistentes, situando-se todos no intervalo [0.4481, 0.4816].

Tabela 6 – Comparação dos Testes de Hipóteses para o Efeito do PIB per capita no IDEB ($q = 1$).

Estatística de Teste	Valor Calculado	Graus de Liberdade (q)	Valor-p
Wald	0.5207	1	0.4706
Wald Corrigido	0.4952	1	0.4816
Razão de Verossimilhanças	0.5505	1	0.4581
Escore	0.5755	1	0.4481
Gradiente	0.5700	1	0.4503

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Este resultado é particularmente interessante quando contrastado com os achados do estudo de simulação (Seção 3.1 e 3.2). As simulações estabeleceram que, em amostras finitas, as distorções de tamanho dos testes podem ser severas. O fato de todos os testes convergirem na prática não invalida as conclusões da simulação; pelo contrário, isso sugere que a evidência contra H_0 é tão fraca (i.e., o valor-p “verdadeiro” é tão distante do limiar α) que as diferentes distorções de tamanho de cada teste (a liberalidade do λ_W ou o conservadorismo do λ_E) não são suficientes para levar a decisões conflitantes.

Em um cenário onde os valores-p estivessem próximos do limiar de significância (e.g., 0.04 ou 0.06), as diferentes propriedades dos testes seriam críticas. Um p-valor de 0.4706 (do Wald) versus 0.4481 (do Escore) não altera a decisão prática. No entanto, o estudo de simulação demonstrou que o teste Gradiente (λ_G) e o Wald Corrigido (λ_{Wc}) possuem o controle mais preciso das taxas de erro tipo I, sendo as alternativas mais confiáveis.

Portanto, a análise inferencial da aplicação real, alinhada aos achados da simulação, nos permite concluir com elevada confiança que, para os dados de 2019 das unidades da federação brasileira, não há evidência de que o PIB per capita, modelado como covariável linear, seja um preditor estatisticamente significativo para o IDEB no contexto do modelo Lindley-Unitária.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo central avaliar e comparar o desempenho de testes de hipóteses assintóticos de Wald, Wald corrigido, Razão de Verossimilhanças, Escore e Gradiente no modelo de regressão Lindley-Unitária, um modelo apropriado para variáveis contínuas no intervalo $(0,1)$. A motivação foi a conhecida distorção que estes testes podem apresentar em amostras pequenas ou moderadas, levando a inferências estatísticas imprecisas.

O estudo de simulação de Monte Carlo, conduzido sob diversos cenários (variando n , p e q), foi fundamental para quantificar o desempenho desses testes. Os resultados confirmaram, as deficiências teóricas esperadas em amostras finitas. O teste de Wald demonstrou ser liberal, rejeitando a hipótese nula mais frequentemente que o nível nominal e elevando o risco de erros do Tipo I. Em contrapartida, o teste Escore revelou um comportamento marcadamente conservador, implicando uma perda de poder estatístico.

As alternativas mais confiáveis, o teste de Wald Corrigido e o teste Gradiente se destacaram. O teste de Wald Corrigido, ao incorporar refinamentos de segunda ordem, corrigiu com sucesso grande parte da liberalidade de sua versão padrão. No entanto, o teste Gradiente apresentou o desempenho mais impressionante, mantendo suas taxas de rejeição empíricas próximas dos níveis nominais, mesmo nos cenários mais desafiadores (amostras pequenas e maior número de parâmetros). Esta precisão, aliada à sua maior simplicidade computacional por não exigir a inversão da matriz de informação, posiciona o teste Gradiente como a alternativa mais recomendável para análises práticas.

A aplicação em dados reais, que investigou a relação entre o IDEB e o PIB per capita nas 27 unidades da federação brasileira, serviu como uma ilustração prática. Neste cenário de amostra finita, todos os testes convergiram para a mesma conclusão de não significância estatística. Conforme discutido na Seção 3.3.2, isso se deu não por invalidação dos achados da simulação, mas porque a evidência contra H_0 era tão fraca que as distorções de tamanho dos testes não foram suficientes para alterar a decisão. Este cenário realçou a importância de se ter um teste confiável, pois se os resultados fossem limítrofes, a escolha do teste (por exemplo, o teste liberal de Wald versus o teste robusto Gradiente) poderia ter levado a conclusões científicas opostas.

Em resumo, este trabalho contribui para a literatura ao prover uma análise comparativa e demonstrar que, para inferências no modelo de regressão Lindley-Unitária sob amostras finitas, os testes de Gradiente e Wald Corrigido são superiores aos testes clássicos de Wald, RV e Escore. Recomenda-se, portanto, a adoção preferencial do teste Gradiente em aplicações práticas envolvendo este modelo.

Para trabalhos futuros, sugere-se a extensão desta análise comparativa para outros modelos de regressão para dados no intervalo $(0,1)$, como o Beta ou Kumaraswamy, bem como a investigação de outras formas de correção, como as baseadas em reamostragem (bootstrap), para validar os achados aqui apresentados.

REFERÊNCIAS

- AKDUR, H. T. K. Unit-lindley mixed-effect model for proportion data. **Journal of Applied Statistics**, v. 48, n. 13–15, p. 2389–2405, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/02664763.2020.1823946>>. Citado na página 16.
- BARTLETT, M. Properties of sufficiency and statistical tests. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A**, The Royal Society, v. 160, n. 901, p. 268–282, 1937. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.
- CORDEIRO, G.; FERRARI, S. Bias correction in generalized linear models. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B**, Wiley, v. 53, n. 3, p. 629–643, 1991. Citado na página 15.
- FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 31, n. 7, p. 799–815, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.
- FERRARI, S.; PINHEIRO, E. Improved likelihood inference in the beta regression model. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 81(4), p. 431—443, 2010. Citado na página 15.
- Google. **Gemini: Modelo de Linguagem de IA em Larga Escala**. 2025. Online. Versão 2.5 Pro. Disponível em: <<https://gemini.google.com/>>. Acesso em: 21 out. 2025. Citado na página 12.
- KARAKAYA, K.; SAGLAM, Şule. Unit gamma-lindley distribution: Properties, estimation, regression analysis, and practical applications. **Gazi University Journal of Science**, Gazi University, v. 38, n. 2, p. 1021–1040, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.35378/gujs.1549073>>. Citado na página 16.
- LAWLEY, D. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. **Biometrika**, v. 43, p. 295—303, 1956. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.
- LINDLEY, D. Fiducial distributions and bayes' theorem. **Journal of the Royal Statistical Society B**, Wiley, v. 20, p. 102–107, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- MAZUCHELI, J.; MENEZES, A.; CHAKRABORTY, S. On the one parameter unit-lindley distribution and its associated regression model for proportion data. **Journal of Applied Statistics**, Taylor & Francis, v. 46, n. 4, p. 700–714, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 11, 15 e 17.
- MEDEIROS, F. M. C.; FERRARI, S. L. P.; LEMONTE, A. J. Improved inference in dispersion models. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 51, p. 317–328, 2017. Citado na página 15.
- MELO, T. F. N. *et al.* Higher-order asymptotic refinements in the multivariate dirichlet regression model. **Communications in Statistics – Simulation and Computation**, v. 51, n. 1, p. 53–71, 2022. First published online 2019. Citado na página 15.
- NIETZSCHE, F. **Assim falava Zaratustra: livro para toda a gente e para ninguém**. Edição especial. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2016. Obra utilizada para a epígrafe do trabalho. Nenhuma citação no texto.

OLIVEIRA, P. R. G. d. *et al.* Refinamento de métodos assintóticos nos modelos de regressão lindley-unitária: uma aplicação em dados de crescimento econômico. **DRd - Desenvolvimento Regional em Debate**, [S.l.], v. 15, p. 427–445, 2025. Disponível em: <<https://www.periodicos.unc.br/index.php/drd/article/view/5431>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 16 e 19.

PACE, L.; SALVAN, A. **Principles of Statistical Inference: From a Neo-Fisherian Perspective**. Singapore: World Scientific, 1997. Citado na página 15.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2025. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado na página 21.

RAO, C. Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 44, p. 50–57, 1948. Citado na página 14.

TERRELL, G. The gradient statistic. **Computing Science and Statistics**, Elsevier, v. 34, p. 206–215, 2002. Citado na página 14.

VARGAS, T.; FERRARI, S.; LEMONTE, A. Improved likelihood inference in generalized linear models. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 74, p. 110–124, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

WALD, A. Tests of statistical hypothesis concerning several parameters when the number of observations is large. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 54, n. 3, p. 426–482, 1943. Citado na página 14.

WILKS, S. The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 9, p. 60–62, 1938. Citado na página 14.

ÖZONUR, D. Testing distributional assumption of unit-lindley regression model. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, Hacettepe University, v. 51, n. 3, p. 882–899, 2022. Disponível em: <<https://dergipark.org.tr/en/pub/hujms/issue/69920/932811>>. Citado na página 16.

ANEXO A – CÓDIGO-FONTE

Para garantir a total transparência e a reprodutibilidade dos achados deste Trabalho de Conclusão de Curso, todos os códigos-fonte em linguagem R utilizados para o estudo de simulação de Monte Carlo e para a aplicação em dados reais estão publicamente disponíveis.

Os *scripts* podem ser acessados e baixados no seguinte repositório GitHub:

<<https://github.com/VFASantana/unit-lindley-asymptotic-inference>>

O repositório inclui os arquivos `TCC_Monte_Carlo.Rmd` e `TCC_IDEB_PIB.Rmd`, bem como um arquivo `README.md` detalhado com instruções para a execução e replicação dos resultados apresentados.