REVISTA DE ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

VOLUMEN 37, NÚMERO 2 | JULIO-DICIEMBRE 2025 | PP. 181-193
ISSN: 2250-6101
DOI: https://doi.org/10.55767/2451.6007.v37.n2.51183

Fontes Primárias no Ensino de Ciências: A Reconstrução Racional das Cartas de Poincaré como Recurso Didático

Primary Sources in Science Education: The Rational Reconstruction of Poincaré's Letters as a Didactic Resource

Clair de Luma Capiberibe Nunes [1*], Wellington Pereira de Queirós [1]

[1]Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências do Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Bloco V –Rua Ufms -Vila Olinda–CEP 79070-900 -Campo Grande, MS, Brasil.

***E-mail: clair.capiberibe@ufms.br**

Recibido el 10 de junio de 2025 | Aceptado el 8 de septiembre de 2025

Resumen

Este estudo apresenta uma reconstrução racional das três cartas enviadas por Henri Poincaré a Hendrik Lorentz em 1905, articulando-as aos principais modelos teóricos do elétron discutidos no início do século XX. A análise baseia-se na tradução rigorosa das correspondências originais e nos postulados de Cunningham, buscando reconstituir os encadeamentos matemáticos presentes nas cartas. As reflexões de Poincaré são examinadas à luz das propostas de Voigt, Abraham, Bucherer e Langevin, evidenciando os critérios utilizados para aceitar ou rejeitar modelos com base na conformidade ao Princípio da Relatividade e à invariância das leis físicas. Embora as cartas não apresentem formulações epistemológicas explícitas, elas revelam o esforço de Poincaré em selecionar modelos teóricos coerentes com os resultados da experiência de Michelson-Morley. Mesmo diante da equivalência empírica entre os modelos, Poincaré valoriza a consistência matemática e as simetrias da teoria, antecipando preocupações que marcariam a física moderna. Ao combinar fontes primárias com a metodologia da reconstrução racional, o estudo contribui tanto para a historiografia da ciência quanto para o ensino de ciências. Argumenta-se que essa abordagem permite aos estudantes compreender não apenas os conteúdos científicos, mas também os critérios de avaliação teórica, os modos de justificação e o papel das controvérsias na produção do conhecimento. Assim, defende-se o uso didático de fontes históricas como recurso para o desenvolvimento de competências metacientíficas, especialmente no contexto do ensino superior, voltado à formação acadêmica de estudantes de cursos de Ciências e de licenciatura.

Palabras clave: História da Ciência, Relatividade Especial, Ensino de Ciências. Covariância de Lorentz

Abstract

This study presents a rational reconstruction of the three letters sent by Henri Poincaré to Hendrik Lorentz in 1905, linking them to the main theoretical models of the electron discussed in the early 20th century. The analysis is based on a careful translation of the original correspondence and on Cunningham's postulates, aiming to reconstitute the mathematical reasoning present in the letters. Poincaré's reflections are examined in light of the proposals by Voigt, Abraham, Bucherer, and Langevin, highlighting the criteria used to accept or reject models based on their conformity with the Principle of Relativity and the invariance of physical laws. Although the letters do not contain explicit epistemological formulations, they reveal Poincaré's effort to select theoretical models consistent with the results of the Michelson-Morley experiment. Even in the face of empirical equivalence between models, Poincaré values mathematical consistency and theoretical symmetry, anticipating concerns that would become central to modern physics. By combining primary sources with the methodology of rational reconstruction, the study contributes both to the historiography of science and to science education. It is argued that this approach enables students to understand not only scientific content but also theory evaluation criteria, justification strategies, and the role of controversy in the production of knowledge. Thus, the didactic use of historical sources is advocated as a valuable resource for developing metascientific competencies—especially in the context of higher education aimed at the academic training of students in science and teacher education programs.

Keywords: History of Science, Special Relativity, Science Education, Lorentz Covariance

I. INTRODUÇÃO

A integração entre história da ciência e ensino de ciências tem ganhado crescente atenção na pesquisa educacional. Um estudo recente de Nunes, Queirós e Cunha (2021), que analisou a abordagem da Teoria da Relatividade Especial em livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD-2018), evidenciou a necessidade urgente de uma aproximação maior entre educadores em ciências e historiadores da ciência. Essa conexão visa construir interfaces produtivas entre história e ensino, enriquecendo a compreensão dos processos científicos. Essa demanda, porém, não é nova. Martins (2006), por exemplo, já apontava a carência de materiais acessíveis para professores, alertando para uma lacuna histórica que permanece atual.

Apesar dos avanços históricos recentes (cf. Nunes, Queirós, Bortoletto *in* Stinner et al., 2023), ainda há vasto campo a ser explorado, especialmente no que diz respeito às disputas e divergências na eletrodinâmica do início do século XX (cf. Nunes, Queirós, Cunha, 2021). Esses debates foram cruciais para a formulação da Teoria da Relatividade Especial.

O uso de fontes primárias — como cartas, artigos originais e documentos históricos — tem se mostrado uma estratégia valiosa para aprofundar o entendimento dos processos científicos e desenvolver habilidades críticas nos estudantes (Klopfer, 1969; Matthews, 1989; Stinner *et al,* 2003; Allchin, 2013). Elas oferecem aos alunos um contato direto com o fazer científico, revelando a construção, contestação e refinamento das ideias ao longo do tempo.

Nesse cenário, as reconstruções racionais de episódios históricos se destacam como ferramentas didáticas importantes. Elas evidenciam as estratégias argumentativas, os critérios de avaliação teórica e os contextos envolvidos na aceitação ou rejeição de modelos científicos. Inspiradas na metodologia de Lakatos (1970), essas reconstruções promovem uma compreensão crítica e não linear do desenvolvimento científico, rompendo com narrativas teleológicas simplistas. No ensino, sua utilização pode fomentar competências metacientíficas, como a análise de controvérsias e a avaliação crítica de alternativas teóricas.

Assim, este ensaio propõe uma Reconstrução Racional das cartas de Henri Poincaré a Hendrik Lorentz, escritas em 1905, que tratam do chamado “programa de Lorentz”. O objetivo é explicitar os compromissos teóricos, heurísticos e metodológicos presentes nessas correspondências, servindo de base para discutir os principais programas rivais que buscavam explicar a dinâmica do elétron em movimento no início do século XX.

Destaca-se o papel central do trabalho de Lorentz, em especial o memorando de 1904 que formulou a covariância das equações de Maxwell pelas transformações que hoje levam seu nome. A análise minuciosa de Poincaré a esse trabalho, incluindo a identificação de inconsistências e a busca por uma formulação mais rigorosa baseada na teoria de grupos, revela critérios epistêmicos que levaram Poincaré a favorecer o programa lorentziano frente a rivais como Abraham e Bucherer-Langevin, cujas propostas permitiam a detecção do movimento absoluto da Terra — hipótese refutada pelos dados experimentais disponíveis, como o experimento de Michelson-Morley (cf. Miller, 1997; Martins, 2015).

Ao reconstruir racionalmente essas cartas, este estudo oferece um exemplo valioso para o ensino de ciências, permitindo que os estudantes compreendam a dinâmica interna da elaboração teórica e os debates que precederam o surgimento da física relativística. A tradução criteriosa e a análise formal, incluindo as contribuições de A. W. Cunningham, reforçam a argumentação de que apenas o modelo de Lorentz satisfaz plenamente os requisitos de consistência teórica e invariância exigidos pelo Princípio da Relatividade. Esta proposta é especialmente voltada a estudantes do ensino superior, como os de cursos de licenciatura em ciências e formação de professores.

II. TRANSCRIÇÃO DAS CARTAS DE MAIO DE 1905

Nesta seção, apresentamos a transcrição das cartas de Poincaré a Lorentz (POINCARÉ, 1905a, 1905b, 1905c). É importante notar que Poincaré emprega uma notação pouco usual; contudo, por conta da simplicidade das equações, optamos por preservá-la para manter o máximo de diacronismo.

A. Transcrição da primeira carta

Meu caro colega,

Lamentei enormemente as circunstâncias que me impediram primeiro de ouvir sua conferência e, em seguida, de conversar com você durante sua estadia em Paris.

Há algum tempo venho estudando com mais detalhes seu artigo "Fenômenos eletromagnéticos em um sistema em movimento com qualquer velocidade menor que a da luz", um artigo de extrema importância e cujos principais resultados já citei em minha conferência em St. Louis[1]. Concordo com você em todos os pontos essenciais; no entanto, há algumas divergências de detalhe.

Assim, na página 813, em vez de:

$$\frac{1}{k\ell^3}\rho = \rho'; k^2 u_x = u_x'; k^2 u_y = u_y'$$

parece-me que deve ser colocado:

$$\frac{1}{k\ell^3}\rho(1+\varepsilon v_x) = \rho'; \frac{1}{k\ell^3}\rho(v_x+\varepsilon) = \rho' u_x'$$

onde $\varepsilon = - w/c$ ou $\varepsilon = - w$ se escolhermos as unidades de tal forma que $c = 1$.

Essa modificação me parece necessária se quisermos que a carga aparente do elétron seja conservada.

As fórmulas (10) da página 813 são então modificadas e encontrei para o último termo em vez de:

$$\ell^2 \frac{w}{c^2}\left(u_y' d_y' + u_z' d_z'\right), -\frac{\ell^2}{k}\frac{w}{c^2}u_x' d_y', -\frac{\ell^2}{k}\frac{w}{c^2}u_x' d_z'$$

Eu encontrei:

$$\ell^2 \frac{w}{c^2}\left(u_x' d_x' + u_y' d_y' + u_z' d_z'\right), 0{,}0$$

Essa é a força de Liénard, que você também encontra, mas com diferenças. E então surge a questão de saber se essa força é ou não compensada.

Isso mostra que entre as forças reais X, Y, Z e as forças aparentes X', Y', Z' existem as relações:

$$X' = A\left(X + \varepsilon \sum x v_x\right), Y' = BY, Z' = BZ$$

com A e B sendo coeficientes e $A\varepsilon \Sigma X v_x$ representando a força de Liénard.

Se todas as forças são de origem elétrica, as condições de equilíbrio (ou o princípio de d'Alembert modificado) dão:

$$X = Y = Z = 0$$

donde:

$$X' = Y' = Z' = 0$$

Se todas as forças não são de origem elétrica, ainda haverá compensação, desde que todas se comportem como se fossem de origem elétrica.

Mas há outra coisa.

Você supõe $\ell = 1$.

Langevin supõe $k\,\ell^3 = 1$.

Eu tentei $k\,\ell = 1$ para manter a unidade de tempo, mas isso me levou a consequências inaceitáveis.

Por outro lado, cheguei a contradições (entre as fórmulas da ação e da energia) com todas as hipóteses, exceto as de Langevin.

O raciocínio pelo qual você estabelece que $\ell = 1$ não me parece conclusivo, ou melhor, ele não é mais e deixa ℓ indeterminado quando vejo o cálculo modificando como eu disse as fórmulas da página 813.

O que você acha disso? Você quer que eu lhe comunique mais detalhes ou os que lhe dei são suficientes?

Desculpe-me, em todo caso, por abusar do seu tempo.

Seu devotado colega,
Poincaré

[1] Esta conferência oi transcrita sob o título "O Atual Estado da Física Matemática" (POINCARÉ, 1904) e republicada em "O Valor da Ciência" (POINCARÉ, 1905d).

B. Transcrição da segunda carta

Meu caro colega,

Obrigado pela sua amável carta. Desde que lhe escrevi, minhas ideias mudaram em alguns pontos. Eu encontro como você que ℓ = 1 por outro caminho.

Seja -ε a velocidade de translação, sendo a da luz tomada como unidade.

$$k = (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Temos a transformação

$$x' = k\ell(x + \varepsilon t), \qquad t' = k\ell(t + \varepsilon x)$$
$$y' = \ell y, \qquad z' = \ell z$$

Essas transformações formam um grupo. Sejam duas transformações componentes correspondentes a

$$k, \ell, \varepsilon$$

e

$$k', \ell', \varepsilon'$$

sua resultante corresponderá a

$$k'', \ell'', \varepsilon''$$

onde:

$$k'' = (1 - \varepsilon''^2)^{-\frac{1}{2}}, \ell'' = \ell\ell', \varepsilon'' = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon\varepsilon'}$$

Se quisermos agora tomar:

$$\ell = (1 - \varepsilon^2)^m, \ell' = (1 - \varepsilon'^2)^m$$

teremos:

$$\ell'' = (1 - \varepsilon''^2)^m$$

somente para m = 0.

Por outro lado, não encontro acordo entre o cálculo das massas pelo meio das quantidades de movimento eletromagnético e pelo meio da menor ação, e pelo meio da energia, exceto na hipótese de Langevin.

Espero esclarecer essa contradição em breve, eu o manterei informado dos meus esforços.

Seu devotado colega,
Poincaré

C. Transcrição da terceira carta

Meu caro colega,

Continuei as pesquisas sobre as quais lhe falei. Meus resultados confirmam plenamente os seus, no sentido de que a compensação perfeita (que impede a determinação experimental do movimento absoluto) só pode ocorrer completamente na hipótese ℓ = 1. Porém, para que essa hipótese seja admissível, é necessário admitir que cada elétron esteja sujeito a forças complementares cujo trabalho é proporcional às variações de seu volume.

Ou, se preferir, que cada elétron se comporte como se fosse uma capacidade oca submetida a uma pressão interna constante (além de negativa) e independente do volume.

Nessas condições, a compensação é completa.

Estou feliz por estar em perfeito acordo com você e por ter chegado a uma compreensão completa de seus belos trabalhos.

Seu devotado colega,
Poincaré

III. RECONSTRUÇÃO RACIONAL DO ARGUMENTO DE POINCARÉ EM FAVOR DE LORENTZ

Nesta seção, utilizaremos a análise de Cunningham (1907) para reconstruir racionalmente os argumentos de Poincaré. Assim, empregamos uma abordagem sincrônica. Iniciaremos com o formalismo padrão e, em seguida, faremos a tradução para a notação utilizada por Poincaré em suas correspondências. Por fim, analisaremos os três principais programas de pesquisa: Abraham, Langevin e Lorentz, demonstrando por que este último é superior aos demais.

A. Os postulados de Cunningham

Em 1907, o físico-matemático inglês E. Cunningham publicou um ensaio intitulado "*On the Electromagnetic Mass of a Moving Electron*" onde ele estudou a transformação da inércia de um elétron submetido a um campo eletromagnético. A análise de Cunningham levou-o a concluir que a dedução das transformações de Lorentz poderia ser estabelecida com apenas dois postulados, a saber:

(a) A equação de uma onda esférica é um invariante relativístico.

(b) As transformações de coordenadas devem ser funções lineares.

Do primeiro postulado, segue-se que, para qualquer sistema de referência inercial, uma onda esférica é dada pela equação de D'Alembert:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\ \nabla'^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}$$

O segundo postulado implica que a transformação de coordenadas na direção x e t deve ser dada pelas seguintes relações:

$$x_j = a_j^i x_i \qquad i,j = 0,1,2,3$$

Assumimos que a matriz a_j^i é uma matriz real 4x4, o que implica que existem 16 coeficientes a serem determinados a partir da invariância da equação da onda. Na prática, os autores frequentemente impõem condições físicas para reduzir o número de coeficientes da matriz, como pode ser visto em Resnick (1968). Nosso objetivo é mostrar que esses dois postulados não são suficientes para deduzir a transformação de Lorentz porque eles levam a uma infinidade de transformações. Portanto, procuraremos soluções que satisfaçam as seguintes transformações lineares (Josipovic, 2019, p. 98):

$$x' = Ax + Bt$$
$$t' = Cx + Dt \qquad y' = Ey$$
$$z' = Fz$$

Vamos tomar a diferencial total da função φ:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}dx' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy' + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}dz' + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}dt'$$

Tomando a derivada parcial de *x* assumindo que as variáveis *t*, *y* e *z* são constantes:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{dx'}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\frac{dt'}{dx}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + C\frac{\partial\varphi}{\partial t'}$$

Realizando o mesmo procedimento para as outras variáveis:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = B\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + D\frac{\partial\varphi}{\partial t'},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = E\frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = F\frac{\partial\varphi}{\partial z'}$$

Diferenciando $\partial_x\varphi$ em relação a *x*':

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x'} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t'}$$

O teorema de Schwarz assegura que, se a função estiver definida em um domínio conexo, então a derivada parcial deve comutar:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = A\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + C\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

Aplicando esse método às outras coordenadas,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = B\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + D\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = E\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = F\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Vamos começar operando com a segunda derivada da coordenada x. Se substituirmos o valor da primeira derivada em relação a *x*,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = A\frac{\partial}{\partial x'}\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + C\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\right) + C\frac{\partial}{\partial t'}\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + C\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\right)$$

Levando em conta o teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = A^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + 2AC\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} + C^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}$$

Pelo mesmo método, as equações para as outras variáveis:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + 2BD\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} + D^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = E^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = F^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}$$

Portanto, o laplaciano da função φ pode ser escrito como:

$$\nabla^2\varphi = A^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + E^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + F^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} + C^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2} + 2AC\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'}$$

A invariância da equação da onda impõe que, no referencial S', as equações devem ter a mesma forma que a equação no referencial S.

$$\nabla'^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}$$

Substituindo os valores do laplaciano e da derivada temporal:

$$A^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + E^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + F^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} + C^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2} + 2AC\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} = \frac{1}{c^2}\left(B^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + 2BD\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} + D^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}\right)$$

$$\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + E^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + F^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} + 2\left(AC - \frac{BD}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} = \frac{1}{c^2}(D^2 - c^2C^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{E^2}{\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + \frac{F^2}{\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} + 2\frac{\left(AC - \frac{BD}{c^2}\right)}{\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} = \frac{1}{c^2}\frac{(D^2 - c^2C^2)}{\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}$$

Impondo a invariância da forma da onda:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}$$

Podemos obter a transformação dos coeficientes por inspeção:

$$\frac{E^2}{\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)} = 1, \qquad \frac{F^2}{\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)} = 1,$$

$$\frac{(D^2 - c^2C^2)}{\left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)} = 1, \quad \left(AC - \frac{BD}{c^2}\right) = 0$$

A primeira e quarta equações podem ser escritas como:

$$E^2 = \left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right), \qquad c^2AC = BD$$

Substituindo esses valores nas outras duas equações:

$$F^2 = E^2, \qquad (D^2 - c^2C^2) = E^2$$

E nossas quatro equações serão:

$$E^2 = \left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right), \qquad F^2 = E^2,$$

$$(D^2 - c^2C^2) = E^2, \qquad c^2AC = BD$$

Temos quatro equações e seis coeficientes a serem determinados, sendo que *E* e *F* são iguais em módulo. Isso implica que o sistema possui um grau de liberdade. Em outras palavras, podemos "fixar" um valor e determinar os demais coeficientes em função dessas variáveis. Assim, existem infinitas soluções que atendem aos postulados de Cunningham. Contudo, dado que se trata de um problema físico, existem condições extramatemáticas que podem reduzir o número de graus de liberdade do sistema. Embora não seja o foco principal, é interessante examinar as soluções possíveis desse sistema de equações. Note-se que, ao considerarmos os incrementos diferenciais do espaço, obtemos:

$$dx' = Adx + Bdt$$

Tomando esse acréscimo igual a zero,

$$Adx + Bdt = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{B}{A}$$

A razão no lado esquerdo representa a velocidade de deslocamento do sistema *S'* em relação ao sistema *S,*

$$-v = \frac{B}{A}$$
$$B = -Av$$

Substituindo essa relação na quarta equação dos coeficientes:

$$c^2AC = -ADv$$
$$C = -\frac{Dv}{c^2}$$
$$C^2 = \frac{v^2}{c^4}D^2$$

Substituindo o valor de *B* na equação do coeficiente *E,*

$$E^2 = \left(A^2 - \frac{A^2v^2}{c^2}\right) = A^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$
$$E = A\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

O termo na raiz quadrada é o inverso do fator de Lorentz,

$$E = \frac{A}{\gamma}$$

Substituindo na equação de *F,*

$$F = \frac{A}{\gamma}$$

Substituindo os valores que obtivemos na terceira equação,

$$\left(D^2 - c^2\frac{v^2}{c^4}D^2\right) = \left(\frac{A}{\gamma}\right)^2$$
$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)D^2 = \frac{A^2}{\gamma^2}$$
$$\frac{D^2}{\gamma^2} = \frac{A^2}{\gamma^2}$$
$$D = A$$

Portanto, a solução de nossas equações são:

$$A, \qquad B = -vA, \qquad C = -\frac{Av}{c^2},$$
$$D = A, \qquad E = \frac{A}{\gamma}, \qquad F = \frac{A}{\gamma}$$

Substituindo em nossas transformações lineares, obtemos:

$$x' = A(x - vt)$$
$$t' = A\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$y' = \frac{A}{\gamma}y \qquad z' = \frac{A}{\gamma}z$$

Todas as nossas equações foram determinadas em função do coeficiente *A.*

Observe que o coeficiente *A* é justamente uma função do fator ℓ que Poicaré discute em suas três cartas a Lorentz. Se aplicarmos a notação empregada por Poincaré, iremos obter as seguintes relações:

$$x' = A(\ell)(x - vt)$$
$$t' = A(\ell)\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$y' = \frac{A(\ell)}{k} y \qquad z' = \frac{A(\ell)}{k} z$$

Com base nessa dedução, podemos investigar os raciocínios empregados por Poincaré. Em particular, procuremos entender por que ele descarta as soluções de Abraham e Langevin em favor de Lorentz.

B. O modelo de Abraham

Inicialmente, tomamos a condição *A* = $k\ell$. A partir dessa hipótese, elaboramos a seguinte Reconstrução Racional:

$$x' = k\ell(x - vt)$$
$$t' = k\ell\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$y' = \ell y \quad z' = \ell z$$

Na primeira carta, Poincaré menciona a possibilidade de adotar a condição $k\ell$ =1. Embora não explore explicitamente suas implicações, essa hipótese corresponde ao modelo de elétron esférico e indeformável proposto por Abraham (1903). A partir dessa premissa, desenvolvemos a seguinte Reconstrução Racional:

$$x' = x - vt$$
$$t' = t - \frac{vx}{c^2}$$
$$y' = \frac{1}{k} y, \quad z' = \frac{1}{k} z$$

Embora Poincaré não mencione explicitamente em sua carta, as transformações que ele adota correspondem às deduzidas anteriormente por Voigt (1887). Nossa Reconstrução Racional permitiu, portanto, estabelecer um vínculo conceitual entre as Transformações de Voigt e o modelo de elétron proposto por Abraham — uma associação que, até o momento, não identificamos na literatura especializada. A partir dessa relação com o modelo de Abraham, torna-se possível interpretar as transformações de Voigt como transformações de coordenadas entre referenciais inerciais que preservam a geometria dos corpos.

Sugerimos que o “absurdo” mencionado por Poincaré em sua primeira carta refere-se ao fato de que, nas transformações de Voigt, os eixos perpendiculares ao movimento sofrem uma alteração em seu comprimento devido ao fator *k*. Contudo, os resultados experimentais do experimento de Michelson-Morley indicam que a contração ocorre ao longo do eixo longitudinal do movimento. Por essa razão, esse modelo de elétron revela-se incompatível com as evidências empíricas disponíveis, tornando-se, portanto, inadmissível.

C. O modelo de Langevin

Em 1904, Bucherer (1904) e, independentemente, Langevin (1906 [1904]) propuseram que o elétron poderia sofrer uma contração em virtude do movimento, desde que sua preservação volumétrica fosse mantida. No referencial *S* o elétron se comporta como uma esfera de *R*(1,1,1). No referencial *S’,* o elétron se torna um elispóide achatado. Nesse novo sistema as coordenadas no raio serão $R\left(\frac{1}{A}, \frac{k}{A}, \frac{k}{A}\right)$.

Vamos calcular qual deve ser o valor para que o volume do elétron seja o mesmo em todos os referenciais inerciais:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{k^2}{A^3}$$
$$1 = \frac{k^2}{A^3}$$
$$A^3 = k^2$$

portanto, devemos escolher o coeficiente como $A = k^{\frac{2}{3}}$.

Nessas circunstâncias obtemos um novo tipo de transformação, que chamaremos de transformações de Langevin:

$$x' = k^{\frac{2}{3}}(x - vt)$$
$$t' = k^{\frac{2}{3}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$y' = \frac{y}{k^{\frac{1}{3}}}, \quad z' = \frac{z}{k^{\frac{1}{3}}}$$

As transformações de Lorentz e de Langevin se relacionam pela regra:

$$\Lambda_j^i = k^{1/3} B_j^i$$
$$B_j^i = \begin{pmatrix} k^{\frac{2}{3}} & \mp\varepsilon k^{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ \mp\varepsilon k^{\frac{2}{3}} & k^{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{\frac{-1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{-1/3} \end{pmatrix}$$

Podemos interpretar a transformação de Langevin como a transformação de coordenadas entre referenciais inerciais que preserva o volume dos corpos.

Embora Poincaré argumente, em sua segunda correspondência a Lorentz, que apenas na hipótese de Langevin encontra concordância entre o cálculo das massas por meio das quantidades de movimento eletromagnético, da ação mínima e da energia[2], essa hipótese também deve ser descartada. Isso ocorre porque a transformação de coordenadas não concorda com a compensação dos efeitos nulos observados na experiência de Michelson-Morley.

D. O modelo de Lorentz

O Princípio da Relatividade, que orientou as investigações de Poincaré (1904), impunha que o conjunto de todas as transformações capazes de preservar a forma da onda eletromagnética fossem lineares em relação às variáveis espaciais (x) e temporais (t). Essa restrição implica que as transformações devem ser representadas por operadores lineares que mantêm invariante a estrutura da equação da onda. Formalmente, essas transformações podem ser expressas por meio de uma matriz K, cuja ação sobre os vetores coordenados em x e t garante a invariância da forma da onda.

$$K_j^i = \begin{pmatrix} A & \mp A\varepsilon & 0 & 0 \\ A\varepsilon & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{k} \end{pmatrix}$$

Essa matriz se associa com a matriz de Lorentz pela relação:

$$\Lambda_j^i = \frac{k\ell}{A} K_j^i$$

Como na hipótese de Lorentz $\ell = 1$, obtemos:

$$\Lambda_j^i = \frac{k}{A} K_j^i$$

Partindo das propriedades da matriz de Lorentz:

$$\Lambda_k^i \Lambda_i^k = I$$
$$\Lambda_k^i \Lambda_j^k = \delta_j^i$$
$${\Lambda_k^i}^{-1} = \Lambda_i^k = \Lambda_j^k$$

[2] Como fica implícito na terceira correspondência e explícito nos dois artigos sobre a dinâmica do elétron de Poincaré (1905e, 1906), essa concordância também se verifica na hipótese de Lorentz.

Podemos obter as propriedades gerais da matriz K: em especial vamos provar que para esse caso especial de linearidade nas variáveis *x* e *t,* somente é a transformação de Lorentz é compatível com o princípio da relatividade. A partir dessas relações podemos obter o equivalente para a matriz *K*.

$$\left(\frac{\gamma}{A}K_k^i\right)\left(\frac{\gamma}{A}K_j^k\right) = \delta_j^i$$
$$K_k^i\left(\frac{\gamma}{A}\right)^2 K_j^k = \delta_j^i$$

Portanto, podemos definir a matriz inversa K como:

$$\begin{cases} K_k^{i^{-1}} = \left(\frac{\gamma}{A}\right)^2 K_j^k \\ K_i^k = \left(\frac{\gamma}{A}\right)^2 K_j^k \end{cases}$$

Assim a matriz inversa de Brown é:

$$K_j^{i^{-1}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{k}{A}\right)^2 & \mp\varepsilon\left(\frac{k}{A}\right)^2 & 0 & 0 \\ \mp\varepsilon\left(\frac{k}{A}\right)^2 & \left(\frac{k}{A}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{A} \end{pmatrix}$$

Para que essa matriz se transforme como um grupo, ela deve satisfazer a condição de automorfismo para a métrica do espaço-tempo de Poincaré-Minkowski:

$$K_i^k \eta_{il} K_j^l = \eta_{ij}$$

Usando a relação entre as matrizes de L e K:

$$K_i^k \eta_{il}\left(\frac{k}{A}\right)^2 K_j^l = \eta_{ij}$$

A partir dessa propriedade vamos procurar os valores de *A* para qual relação acima forma um grupo. Para verificarmos esse fato, escreveremos a equação na forma matricial absoluta:

$$K^T\eta\left(\frac{k}{A}\right)^2 K = \eta$$

Para qualquer vetor do espaço K, verifica-se a identidade:

$$K_i^T\eta\left(\frac{k_i}{A_i}\right)^2 V_i = \eta \qquad K_{i+j} = K_i \cdot K_j$$
$$K_{i+j}^T\left(\frac{k_{i+j}}{A_{i+j}}\right)^2 \eta K_{i+j} = \eta$$
$$K_i^T\left[K_j^T\left(\frac{k_{i+j}}{A_{i+j}}\right)^2 \eta K_j\right] V_i = \eta$$

Para que esta relação se mantenha verdadeira devemos supor que $\frac{k_{i+j}}{A_{i+j}} = \frac{k_i k_j}{A_i A_j}$

$$K_i^T\left(\frac{k_i}{A_i}\right)^2\left[K_j^T\left(\frac{k_j}{A_j}\right)^2 \eta K_j\right] K_i = \eta$$

mas o termo em parêntesis é justamente a matriz

$$K_i^T \left(\frac{k_i}{A_i}\right)^2 \eta K_i = \eta$$

que é a nossa identidade fundamental.

Como vimos, na segunda correspondência a Lorentz, Henri Poincaré demonstrou para as transformações formarem um grupo e serem compatíveis com o princípio da relatividade, os fatores gama devem respeitar a seguinte propriedade:

$$k_{i+j} = k_i k_j \left(1 + \frac{v_i v_j}{c^2}\right)$$

Substituindo a relação dos fatores de Lorentz para transformações (endomorfismos) gerais:

$$\frac{k_i k_j}{A_i A_j} = k_i k_j \left(1 + \frac{v_i v_j}{c^2}\right)$$
$$\frac{1}{A_i A_j} = \left(1 + \frac{v_i v_j}{c^2}\right)$$
$$A_i A_j = \left(1 + \frac{v_i v_j}{c^2}\right)^{-1}$$

Para calcularmos o valor de *A* devemos fazer um dos índices ser igual ao aposto:

$$A_i A_{-i} = \left(1 + \frac{v_i v_{-i}}{c^2}\right)^{-1}$$
$$A^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} = k^2$$

Portanto, o único valor do coeficiente *A* que torna a transformação um automorfismo interno e, portanto, um grupo multiplicativo, compatível com o princípio da relatividade será:

$$A = k$$

que é justamente o valor que nos leva a transformação de Lorentz usual.

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos textos originais, especialmente das cartas trocadas entre Poincaré e Lorentz, é fundamental para compreender os processos de construção e validação do conhecimento científico naquele período. Contudo, a complexidade e a densidade conceitual dessas fontes primárias podem dificultar sua compreensão direta, tanto para pesquisadores quanto para estudantes. É aí que a reconstrução racional assume papel crucial. Ela consiste em reconstituir de forma lógica, clara e sistemática os argumentos presentes nos documentos originais, respeitando a sequência histórica dos fatos e ao mesmo tempo proporcionando uma leitura coerente e acessível.

Essa reconstrução racional permite revelar as estratégias argumentativas, as hipóteses testadas e os critérios de avaliação empregados por Poincaré, possibilitando uma compreensão aprofundada do avanço científico que culminou na formulação da teoria da relatividade especial. Além disso, ao utilizar fontes primárias como as cartas de Poincaré, o estudo incentiva uma postura crítica e investigativa no ensino de ciências. Em vez de apresentar o conhecimento científico como um corpo fixo e acabado, essa abordagem evidencia a natureza dinâmica e contestada da ciência, mostrando como teorias são construídas, testadas e eventualmente substituídas em função de argumentos teóricos e evidências experimentais.

Assim, a reconstrução racional, aliada ao uso didático de fontes originais, oferece um caminho promissor para o ensino de ciências. Ela contribui para o desenvolvimento de competências metacientíficas essenciais, tais como a análise crítica de controvérsias científicas, a avaliação de diferentes programas teóricos e a compreensão do papel das justificativas lógicas nas práticas científicas. Em suma, essa metodologia não só enriquece a historiografia da ciência, como também fortalece a formação de estudantes e professores, promovendo uma visão mais completa, reflexiva e contextualizada do conhecimento científico.

REFERÊNCIAS

Abraham (1903). Prinzipien der Dynamik des Elektrons. *Annalen der Physik*, 10, 105–179.

Allchin, D. (2013). *Teaching the nature of science: Perspectives & resources*. SHiPS Education Press.

Bucherer, A. (1904). *Mathematische Einführung in die Elektronentheorie*. Leipzig: Teubner

Cunningham, E. (1907). On the electromagnetic mass of a moving electron. *Philosophical Magazine, Series 6, 14*(82), 538-547.

Josipovic, M. (2019). *Geometric Multiplication of Vectors: An Introduction to Geometric Algebra in Physics*. Cham: Birkhäuser.

Klopfer, L. E. (1969). The teaching of science and the history of science. *Journal of Research in Science Teaching*, *6*(1), 87–95.

Langevin, P. (1906). The relations of physics of electrons to other branches of science. In H. J. Rogers (Ed.), Congress of arts and science, universal exposition, St. Louis, 1904 (Vol. 4, pp. 121–156). Houghton, Mifflin & Co.

Lorentz, H. A. (1904). Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light. *Versl. K. Ak. van Wet.*, 12, 986-1009.

Martins. R. A. (2006). Introdução. A história das ciências e seus usos na educação. In: SILVA, C. C. (ed.). *Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino.* (pp. XXI-XXXIV). São Paulo: Livraria da Física

Martins, R. A. (2015). *A Origem Histórica da Relatividade Especial*. São Paulo: Livraria da Física.

Matthews, M. R. (1989). A role for history and philosophy in science teaching. *Interchange*, 20, 3–15.

Miller, A. I. (1997). *Albert Einstein's special theory of relativity: Emergence (1905) and early interpretation, 1905–1911*. Springer.

Nunes, R. C., Queirós, W. P., & Cunha, J. A. R. da. (2021). Análise histórica do conteúdo de relatividade especial nos livros didáticos de física do PNLD 2018. *História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces*, 24, 112–153.

Poincaré, H. (1904). L'etat et l'avenir de la Physique mathématique. *Bulletin des Sciences Mathématiques, 28*, 302-324.

Poincaré, H. (1905a, Maio). [Carta] Paris para LORENTZ, H. Paris. 1f. Poincaré pede desculpas por não poder ter a palestra de Lorentz e discute a transformação de densidade de carga de seu ensaio de 1904.

Poincaré, H. (1905b, Maio). [Carta] Paris para LORENTZ, H. Paris. 2f. Poincaré informa a Lorentz a descoberta do Grupo de Lorentz, porém informa que ainda não conseguiu conciliar o modelo de Lorentz com a dinâmica do elétron.

Poincaré, H. (1905c, Maio). [Carta] Paris para LORENTZ, H. Paris. 1f. Poincaré anuncia a Lorentz que conseguiu provar que a sua teoria é a única compatível com o princípio da Relatividade e a descoberta das tensões de Poincaré.

Poincaré, H. (1905d). *La Valeur de la Science*. Flammarion.

Poincaré, H. (1905e). Sur la dynamique de l'électron. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 140*, 1504–1508.

Poincaré, H. (1906). Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 21*, 129–176.

Resnick, R. (1968). *Introduction to Special Relativity*. John Wiley & Sons.

Stinner, A., McMillan, B. A., Metz, D., Nelson, M., & Klassen, S. (2003). The renewal of case studies in science education. *Science & Education, 12*(7), 617–643.

Stinner, A., McMillan, B. A., Metz, D., Jilek, J. M., & Klassen, S. (2023). *A renovação dos estudos de caso na educação em ciências: uma tradução comentada* (C. L. C. Nunes, W. P. de Queirós, & A. Bortoletto, Trad. e Com.). In W. P. de Queirós, N. C. G. Errobidart, A. J. Vinholi Júnior, & C. L. C. Nunes (Orgs.), *Perspectivas de construção do conhecimento no ensino de ciências* (pp.16-78). São Paulo: Pimenta Cultural.

Voigt, W. (1887). Ueber das Doppler'sche Princip. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*