



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA,
MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO**



**Estudo de Transitórios Eletromagnéticos Por meio de Simulações nos Softwares
Simulink/MATLAB e Script/MATLAB**

Discentes: André Luiz Martins Castro e Lara Rebeca Alcebíades Ferreira

Professor orientador: Prof^ª. Dra. Maria Leonor Silva de Almeida

Julho

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nomes completos dos autores: André Luiz Martins Castro e Lara Rebeca Alcebíades Ferreira

Título do trabalho: Estudo de Transitórios Eletromagnéticos Por meio de Simulações nos Softwares Simulink/MATLAB e Script/MATLAB

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Maria Leonor Silva De Almeida, Professor do Magistério Superior**, em 02/08/2024, às 20:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lara Rebeca Alcebiades Ferreira, Discente**, em 02/08/2024, às 21:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



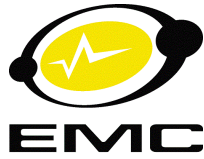
Documento assinado eletronicamente por **Andre Luiz Martins Castro, Discente**, em 03/08/2024, às 10:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4717088** e o código CRC **2E5C8C68**.

Referência: Processo nº 23070.013825/2024-41

SEI nº 4717088



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA,
MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO**



**Estudo de Transitórios Eletromagnéticos Por meio de Simulações nos Softwares
Simulink/MATLAB e Script/MATLAB**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado para a conclusão do Curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Goiás, UFG.

Discentes: André Luiz Martins Castro e Lara Rebeca Alcebíades Ferreira

Professor orientador: Prof^ª. Dra. Maria Leonor Silva de Almeida

Jullho

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Estudo de Transitórios Eletromagnéticos Por meio de Simulações nos Softwares Simulink/MATLAB e Script/MATLAB [manuscrito] / , André Luiz Martins Castro, Lara Rebeca Alcebiades Ferreira. - 2024. CLXV, 165 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Maria Leonor Silva de Almeida.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Engenharia Elétrica, Goiânia, 2024.

Bibliografia. Anexos. Apêndice.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, algoritmos, lista de figuras.

1. Transitórios Eletromagnéticos. 2. MATLAB. 3. Script. 4. Simulink. 5. Chaveamentos de Circuitos RL e RLC. I. Castro, André Luiz Martins . II. Ferreira, Lara Rebeca Alcebiades . III. Almeida, Maria Leonor Silva de, orient. IV. Título.

CDU 621.3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ao primeiro dia do mês de agosto do ano de 2024 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Estudo de Transitórios Eletromagnéticos Por meio de Simulações nos Softwares Simulink/MATLAB e Script/MATLAB”, de autoria de André Luiz Martins Castro e Lara Rebeca Alcebiades Ferreira, do curso de Engenharia Elétrica, da EMC da UFG. Os trabalhos foram instalados pela Profª. Dra. Maria Leonor Silva de Almeida(EMC/UFG) – orientadora, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Prof. Dr. Igor Kopcak (EMC/UFG) e Prof. Dr. Fernando Nunes Belchior (FCT/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição dos estudantes. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 10,0, tendo sido o TCC considerado aprovado.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Maria Leonor Silva De Almeida, Professor do Magistério Superior**, em 01/08/2024, às 15:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Igor Kopcak, Professor do Magistério Superior**, em 01/08/2024, às 15:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Nunes Belchior, Professor do Magistério Superior**, em 01/08/2024, às 15:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lara Rebeca Alcebiades Ferreira, Discente**, em 02/08/2024, às 21:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Luiz Martins Castro, Discente**, em 02/08/2024, às 21:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4713314** e o código CRC **E4AB4C2C**.

Agradecimentos

André Luiz Martins Castro

A conclusão deste trabalho só foi possível graças ao apoio de muitas pessoas às quais sou profundamente grato. Primeiramente, agradeço a Deus pela saúde, perseverança em todos os momentos da jornada e minha gratidão pelas forças que me foram concedidas.

À minha mãe, Judit José, fica o meu agradecimento por sempre me incentivar e me dar forças nos momentos difíceis. Desde muito pequeno, ela me deu todo o apoio do mundo para estudar, sempre me entregando condições favoráveis para estudar e palavras carinhosas, com o seu jeitinho, para me animar. Ao meu pai, José Agmar, que sempre me motivou e me apoiou em todas as decisões de estudo. Foi ele quem me levou para fazer vestibulares e o ENEM, acompanhou minha primeira matrícula em um curso superior no IF Goiano e, posteriormente, passou uma tarde inteira ansioso no centro de eventos da UFG até que eu consegui ingressar na UFG pela chamada pública. Muitos momentos marcam, muitas frases ficam na mente mas em especial a famosa frase "Estuda! A caneta é mais leve que a enxada" que ele sempre me dizia, em tom de brincadeira, nas vezes que eu o ajudava com serviços de pedreiro. À minha irmã, Deborah Fernanda, que também sempre me apoiou nas decisões acadêmicas e me deu forças em momentos que difíceis. Agradeço também a ela pois nos momentos que precisávamos ajudar em casa e ela fazia alguns serviços no meu lugar nas vezes que eu não podia.

À minha namorada, Rafaela Campos, que também me deu muitas forças e me incentivou ao máximo para aproveitar todas etapas acadêmicas. Desde os momentos que passávamos tardes juntos estudando na biblioteca da faculdade até os momentos que fazíamos ligações por vídeo para estudarmos juntos em plena pandemia. Agradeço por sempre estar ao meu lado e aguentar meus momentos de ansiedade e incertezas, obrigado por tudo.

À minha dupla de TCC, Lara Rebeca, uma amizade que fiz durante o curso de Engenharia Elétrica. Desde o início do curso sempre fizemos os trabalhos juntos e sempre deu bastante certo e fica aqui minha admiração pela pessoa inteligente e dedicada que é. Não poderia deixar

de citar também os nossos outros dois amigos que completam nosso grupo de amizade que vem desde o início do curso, obrigado André França e Jordanna Neves.

Tenho muitas amizades durante o curso de graduação e fora do ambiente da graduação também que sempre me apoiaram. Sendo assim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu mais sincero obrigado.

Por fim, gostaria de expressar minha gratidão à nossa orientadora, Dra. Maria Leonor Silva de Almeida, por seu apoio, paciência e orientação ao longo desses dois semestres de desenvolvimento do trabalho. Em momentos de tirar dúvidas, apoiar, elogiar, criticar ela sempre foi bem respeitosa, buscando sempre o nosso desenvolvimento acadêmico. Muito obrigado!

Agradecimentos

Lara Rebeca Alcebíades Ferreira

Primeiramente, gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram para a realização deste trabalho. Agradeço à minha orientadora, Dra. Maria Leonor Silva de Almeida, cujo suporte e compreensão foram essenciais para o desenvolvimento e sucesso deste projeto.

Agradeço aos meus pais, Neide e Alteme, por sua incansável dedicação e trabalho árduo desde a juventude. Sua determinação em proporcionar uma vida digna e cheia de oportunidades, bem como garantir uma educação de qualidade, é um testemunho de seu amor incondicional e sacrifício. Cada passo da minha trajetória foi sustentado pelo apoio deles, e este trabalho é uma extensão do esforço e carinho que sempre me ofereceram.

Ao meu irmão, Breno, meu primeiro exemplo na engenharia, sou imensamente grata. Sua trajetória acadêmica e profissional demonstrou o valor de uma carreira construída com esforço e comprometimento. Seu exemplo me inspirou a vislumbrar um futuro repleto de possibilidades e desafios.

Agradeço também à minha cunhada, Roberta, que esteve ao meu lado desde minha infância, oferecendo carinho e cuidado. Sua dedicação e apoio foram fundamentais para meu percurso acadêmico, e sua influência positiva moldou minha trajetória com zelo e empenho.

Agradeço ao meu namorado, Gabriel Dias. Ao longo desses dois anos, compartilhamos não apenas o mesmo caminho acadêmico, mas também enfrentamos desafios e celebramos vitórias lado a lado. Sua paciência e sabedoria me ensinaram valiosas lições, tanto profissionais quanto pessoais.

Ao meu colega de TCC, André Luiz, sou profundamente grata. Sua inteligência, foco e dedicação foram fontes constantes de inspiração. Nos momentos bons e difíceis, seu apoio foi essencial, e nossa amizade se fortaleceu ao longo dessa jornada acadêmica.

Não poderia deixar de mencionar meus amigos Jordanna Neves e André Luiz França, que

estiveram comigo desde o início da graduação. Mesmo durante a pandemia, nossa amizade se manteve firme e inabalável, enfrentando desafios e celebrando conquistas juntas. A presença e o apoio de vocês foram inestimáveis, e nossa conexão se aprofundou com o tempo.

Resumo

O trabalho de conclusão de curso aborda o estudo dos transitórios eletromagnéticos em sistemas modelados como circuitos RL e RLC. Primeiramente, é analisado o chaveamento de um circuito RL com dois resistores, dois indutores e uma fonte de tensão. A análise inicial ocorre antes do chaveamento, sem corrente circulante para a falta ao terra, considerando o circuito como um resistor em série com um indutor e uma fonte. Após o chaveamento, o circuito é dividido em duas partes: uma com a fonte de tensão e outra apenas com um resistor e um indutor em série. Em seguida, o trabalho aborda o chaveamento de um circuito RLC série com uma fonte de tensão. No primeiro instante, ocorre um chaveamento entre a fonte e o circuito RLC, esse chaveamento gera uma corrente composta por uma solução homogênea e uma solução particular. São analisados os gráficos da frequência natural e do amortecimento em diferentes fases da fonte de tensão. Além disso, é realizada uma análise dos gráficos do módulo e da fase da impedância equivalente do circuito RLC. O estudo explora conceitos fundamentais de circuitos RL e RLC, destacando as implicações do resistor na resposta do sistema, como a dissipação da energia transitória. Além disso, a importância da escolha dos valores dos componentes é enfatizada, uma vez que eles afetam diretamente a resposta do circuito. As análises são realizadas utilizando o *software* MATLAB com seus ambientes de trabalho *Script* e *Simulink*. No método utilizando *Script*, são empregadas as equações matemáticas do circuito e os valores fornecidos, gerando gráficos para análise das correntes em regimes permanente e transitório. O *Simulink* permite desenhar e simular o circuito, obtendo gráficos relevantes para a análise. O trabalho contribui para a compreensão dos transitórios eletromagnéticos, suas causas e impactos, e a importância de medidas de proteção eficazes. Ele demonstra a aplicação de métodos numéricos e ferramentas de simulação para estudar o comportamento transitório em circuitos elétricos, oferecendo uma base sólida para pesquisas e aplicações futuras.

Palavras-chave: Transitórios Eletromagnéticos, MATLAB, Simulink, Script, Chaveamentos de Circuitos RL e RLC.

Abstract

This final graduation project examines electromagnetic transients in systems modeled as RL and RLC circuits. Initially, the switching of an RL circuit with two resistors, two inductors, and a voltage source is analyzed. The initial analysis occurs before the switching, with no circulating current for the ground fault, considering the circuit as a resistor in series with an inductor and a voltage source. After switching, the circuit is divided into two parts: one with the voltage source and the other with only a resistor and an inductor in series. Subsequently, the study addresses the switching of a series RLC circuit with a voltage source. Initially, there is a switching between the source and the RLC circuit, which generates a current composed of a homogeneous solution and a particular solution. The graphs of natural frequency and damping in different phases of the voltage source are analyzed. Additionally, an analysis of the graphs of the magnitude and phase of the equivalent impedance of the RLC circuit is performed. The study explores fundamental concepts of RL and RLC circuits, highlighting the implications of the resistor on the system's response, such as the dissipation of transient energy. Furthermore, the importance of choosing component values is emphasized, as they directly affect the circuit's response. Analyses are conducted using MATLAB software with its Script and Simulink work environments. In the Script method, the circuit's mathematical equations and provided values are used, generating graphs for the analysis of steady-state and transient currents. Simulink allows for the drawing and simulation of the circuit, obtaining relevant graphs for the analysis. The project contributes to the understanding of electromagnetic transients, their causes and impacts, and the importance of effective protection measures. It demonstrates the application of numerical methods and simulation tools to study transient behavior in electrical circuits, providing a solid foundation for future research and practical applications in electrical engineering.

Keywords: Transients Electromagnetic, MATLAB, Simulink, Script, RL and RLC Circuit Switching.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Transitórios Eletromagnéticos	2
1.2	Motivação	4
1.3	Objetivo	4
1.4	Estrutura do Texto	4
2	Fundamentação Teórica	6
2.1	Integração Numérica: Regra Trapezoidal	6
2.1.1	Discretização dos Indutores	11
2.1.2	Discretização dos Resistores	13
2.2	Circuito RL série	14
2.2.1	Momento antes da ocorrência do curto-circuito	20
2.2.2	Momento após a ocorrência do curto-circuito	21
2.3	Circuito RL série método discreto	23
2.3.1	Momento antes da ocorrência do curto-circuito	23
2.3.2	Momento após a ocorrência do curto-circuito	27
2.4	Circuito RLC série	30
2.4.1	Solução Particular	32
2.4.2	Solução Homogênea	38
2.5	Frequência de Ressonância	41
3	Metodologia	44
3.1	MATLAB/ <i>Script</i>	44
3.2	MATLAB/Simulink	45

3.2.1	Chaveamento RL	45
3.2.2	Chaveamento RLC - Instante Zero	46
4	Resultados	48
4.1	Circuito RL Série	48
4.1.1	Solução Matemática da Equação Homogênea Mínima	49
4.1.2	Solução Gráfica da Equação Homogênea Mínima	53
4.1.3	Solução Matemática da Equação Homogênea Máxima	57
4.1.4	Solução Gráfica da Equação Homogênea Máxima	61
4.2	Circuito RL Série - Método Discreto	63
4.2.1	Solução da Equação Homogênea Mínima	64
4.2.2	Solução da Equação Homogênea Máxima	69
4.3	Circuito RLC série	72
4.3.1	Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 0°	72
4.3.2	Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 30°	76
4.3.3	Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 90°	80
4.3.4	Segundo Circuito - Ângulo de Fase 0°	82
4.3.5	Segundo Circuito - Ângulo de Fase 30°	88
4.3.6	Segundo Circuito - Ângulo de Fase 90°	92
4.4	Circuito RLC Série - Frequência de Ressonância	94
4.4.1	Descrição da Corrente - Primeiro Circuito	95
4.4.2	Descrição do Módulo da Impedância - Primeiro Circuito	101
4.4.3	Descrição do Ângulo da Impedância - Primeiro Circuito	102
4.4.4	Descrição da Corrente - Segundo Circuito	103
4.4.5	Descrição do Módulo da Impedância	109
4.4.6	Descrição do Ângulo da Impedância	109
5	Conclusão	111
6	Sugestões de Estudos Futuros	114

Bibliografia	115
A Anexos	117
A.1 Script/MATLAB	117
A.1.1 Script Chaveamento RL - Gráficos das Correntes - Regra Analítica . . .	117
A.1.2 Script Chaveamento RL - Gráficos das Corrente - Regra Trapezoidal . .	118
A.1.3 Script Chaveamento RLC - Gráficos de Frequência de Oscilação Natural e Amortecimento	121
A.1.4 Script Chaveamento RLC - Gráficos de Módulo e Fase da Impedância .	123
A.1.5 Script para a Plotagem de Gráficos do Simulink	125
A.2 Circuito RLC série	126
A.2.1 Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 60°	126
A.2.2 Segundo Circuito - Ângulo de Fase 60°	129
A.3 Respostas de Sistemas de 2ª Ordem	131
A.3.1 Sistema Superamortecido	131
A.3.2 Sistema Criticamente Amortecido	132
A.3.3 Sistema Sub-Amortecido	133
A.4 Alternative Transients Program - ATP	136

Lista de Figuras

2.1	Explicação da Regra do Trapézio [1].	7
2.2	Representação Elétrica de um Indutor.	11
2.3	Equivalente do Indutor em Elementos Concentrados.	13
2.4	Representação Elétrica de um Resistor.	13
2.5	Circuito RL.	14
2.6	Circuito RL antes da ocorrência do curto-circuito.	20
2.7	Parte 1 do circuito RL em que a corrente $i(t)$ percorre o circuito.	21
2.8	Parte 1 do circuito RL em que a corrente $i'(t)$ percorre o circuito.	21
2.9	Circuito RL.	24
2.10	Circuito RL série.	24
2.11	Circuito RL série discreto.	25
2.12	Circuito RL série discreto com transformação de fonte.	25
2.13	Nomeação dos nós do circuito	26
2.14	Circuito com as polaridades e correntes indicadas	26
2.15	Parte 1 do circuito RL em que a corrente $i(t)$ percorre o circuito.	27
2.16	Parte 2 do circuito RL em que a corrente $i'(t)$ percorre o circuito.	27
2.17	Circuito RL série equivalente discreto junto com transformação de fonte.	28
2.18	Circuito RL série com indicação de polaridades e sentido das correntes.	28
2.19	Circuito RL série equivalente discreto.	29
2.20	Circuito RLC	30
3.1	Modelagem Circuito RL no Simulink.	45
3.2	Modelo do Simulink	46
3.3	Modelo do Simulink - Circuito à Direita	46

3.4	Modelo do Simulink - Circuito à Esquerda	47
4.1	Solução matemática da Equação homogênea mínima - Simulink	50
4.2	Zoom na solução matemática da Equação homogênea mínima - Simulink; . . .	51
4.3	Solução matemática da Equação homogênea mínima - Script;	52
4.4	Zoom na solução matemática da Equação homogênea mínima - Script;	53
4.5	Solução gráfica da Equação homogênea mínima - Simulink;	54
4.6	Zoom na solução gráfica da Equação homogênea mínima - Simulink;	55
4.7	Solução gráfica da Equação homogênea mínima - Script;	55
4.8	Zoom na solução gráfica da Equação homogênea mínima - Script;	56
4.9	Solução matemática da Equação homogênea máxima - Simulink;	58
4.10	Zoom na solução matemática da Equação homogênea máxima - Simulink; . . .	59
4.11	Solução matemática da Equação homogênea máxima - Script;	59
4.12	Zoom na solução matemática da Equação homogênea máxima - Script;	60
4.13	Solução gráfica da Equação homogênea máxima - Simulink;	61
4.14	Zoom na solução gráfica da Equação homogênea máxima - Simulink;	62
4.15	Solução gráfica da Equação homogênea máxima - Script;	62
4.16	Zoom na solução gráfica da Equação homogênea máxima - Script;	63
4.17	Circuito Parte 1	64
4.18	Zoom solução do circuito Parte 1	65
4.19	Erro - Circuito Parte 1	66
4.20	Circuito Parte 2	66
4.21	Zoom solução do circuito Parte 2	67
4.22	Erro - Circuito Parte 2	68
4.23	Circuito Parte 1	69
4.24	Erro - Circuito Parte 1	70
4.25	Circuito Parte 2	70
4.26	Erro - Circuito Parte 2	71
4.27	Circuito 1	72

4.28	Circuito 1 - Ângulo de fase 0°	74
4.29	Soluções em 0°	75
4.30	Curva da Corrente Transitória	76
4.31	Circuito 1 - Ângulo de Fase 30°	77
4.32	Soluções em 30°	78
4.33	Curva da Corrente Transitória - 30°	79
4.34	Circuito 1 - Ângulo de Fase 90°	80
4.35	Soluções em 90°	81
4.36	Curva da Corrente Transitória - 90°	82
4.37	Circuito 2	83
4.38	Circuito 1 - Ângulo de Fase 0°	85
4.39	Soluções em 0°	86
4.40	Curva da Corrente Transitória - 0°	87
4.41	Circuito 1 - Ângulo de Fase 30°	89
4.42	Soluções em 30°	90
4.43	Curva da Corrente Transitória - 30°	90
4.44	Circuito 1 - Ângulo de Fase 90°	92
4.45	Soluções em 90°	93
4.46	Curva da Corrente Transitória - 90°	94
4.47	Circuito 1	95
4.48	Circuito 1 - Comportamento do Circuito Após Transitório 200ms	98
4.49	Circuito 1 - Comportamento do Circuito Após Transitório 400ms	99
4.50	Circuito 1 - Comportamento do Circuito Após Transitório 1000ms	100
4.51	Circuito 1 - Módulo da Impedância Após Transitório	101
4.52	Circuito 1 - Ângulo da Impedância Após Transitório	102
4.53	Circuito 2	103
4.54	Circuito 2 - Comportamento do Circuito Após Transitório 200ms	106
4.55	Circuito 2 - Comportamento do Circuito Após Transitório 400ms	107
4.56	Circuito 2 - Comportamento do Circuito Após Transitório 1000ms	108

4.57	Circuito 2 - Módulo da Impedância Após Transitório	109
4.58	Circuito 2 - Ângulo da Impedância Após Transitório	110
A.1	Circuito 1 - Ângulo de Fase 60°	127
A.2	Curva da Corrente Transitória - 60°	128
A.3	Soluções em 60°	128
A.4	Circuito 1 - Ângulo de Fase 60°	129
A.5	Curva da Corrente Transitória - 60°	130
A.6	Soluções em 60°	130
A.7	Comparativo de sistemas de segunda ordem	136
A.8	Circuito RL modelado no ATP.	137
A.9	Solução matemática da Equação homogênea mínima - ATP;	138
A.10	Solução matemática da Equação homogênea máxima - ATP;	139

Lista de Equações

2.1	Teorema Fundamental do Cálculo	7
2.2	Polinômio Interpolar	8
2.3	Fórmula de Lagrange	8
2.4	Substituição Polinômio na Fórmula de Lagrange	8
2.5	Desenvolvimento Polinômio Parte 1	8
2.6	Desenvolvimento Polinômio Parte 2	9
2.7	Integração da função $f(x)$ Parte 1	9
2.8	Integração da função $f(x)$ Parte 2	9
2.9	Integração da função $f(x)$ Parte 3	9
2.10	Integração da função $f(x)$ Parte 4	9
2.12	Integração da função $f(x)$ Parte 5	10
2.13	Integração da função $f(x)$ Parte 6	10
2.14	Integração da função $f(x)$ Parte 7	10
2.15	Integração da função $f(x)$ Parte 8	10
2.16	Integração da função $f(x)$ Parte 9	10
2.17	Integração da função $f(x)$ - Equação Final	10
2.18	Diferença entre a Integral e a da Regra do Trapézio	11
2.19	Erro de Estimativa	11
2.20	Representação elétrica do indutor	12
2.21	Integração da representação elétrica do indutor	12
2.22	Aplicação da Regra do Trapézio no Indutor parte 1	12
2.23	Aplicação da Regra do Trapézio no Indutor parte 2	12
2.24	Aplicação da Regra do Trapézio no Indutor - Equação Final	12
2.25	Representação Elétrica do Resistor	13

2.26	Representação Elétrica do Resistor em Termos da Corrente	14
2.27	Representação do Circuito RL	15
2.28	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 1	15
2.29	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 2	15
2.30	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 3	15
2.31	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 4	15
2.32	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 5	16
2.33	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 6	16
2.34	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 7	16
2.35	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 8	16
2.36	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 9	16
2.37	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 10	17
2.38	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 11	17
2.39	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 12	17
2.40	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 13	17
2.41	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 14	17
2.42	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 15	17
2.43	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 16	18
2.44	Constante de tempo	18
2.45	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 17	18
2.46	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 18	18
2.47	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 19	18
2.48	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 20	18
2.49	Desenvolvimento Circuito RL - Parte 21	18
2.50	Modulo e ângulo da impedância	19
2.51	Desenvolvimento Circuito RL - Final	19
2.52	Definição da corrente total	19
2.53	Solução particular - Corrente em regime permanente	19
2.54	Solução homogênea - Corrente transitória	20

2.55	Solução homogênea - Parte 1	20
2.56	Solução homogênea - Parte 2	20
2.57	Solução particular	21
2.58	Solução homogênea - Parte 3	21
2.59	Solução homogênea - Parte 4	21
2.60	Solução homogênea - Parte 5	22
2.61	Solução homogênea - Parte 6	22
2.62	Solução homogênea - Parte 7	22
2.63	Solução homogênea - Parte 8	22
2.64	Solução homogênea - Parte 9	22
2.65	Solução homogênea - Parte 10	23
2.66	Análise nodal lado esquerdo do circuito - Parte 1	26
2.67	Análise nodal lado esquerdo do circuito - Parte 2	27
2.68	Análise nodal lado esquerdo do circuito - Parte 3	27
2.69	Análise nodal lado direito do circuito - Parte 1	28
2.70	Análise nodal lado direito do circuito - Parte 2	29
2.71	Análise nodal lado direito do circuito - Parte 3	29
2.72	Análise nodal lado direito do circuito - Parte 4	29
2.73	Análise nodal lado direito do circuito - Parte 5	30
2.74	EDO de segunda ordem do circuito RLC Parte 1	31
2.75	Teorema fundamental do cálculo - Parte 1	31
2.76	Teorema fundamental do cálculo - Parte 2	31
2.77	EDO de segunda ordem do circuito RLC - Parte 2	31
2.78	EDO de segunda ordem do circuito RLC - Parte 3	31
2.79	Solução particular da EDO - Parte 1	32
2.80	Solução particular da EDO - Parte 2	32
2.81	Solução particular da EDO - Parte 3	32
2.82	Tensão da fonte	32
2.83	Derivada da tensão da fonte	32

2.84 Solução particular da EDO - Parte 4	33
2.85 Solução particular da EDO - Parte 5	33
2.86 Sistema de equação - Parte 1	33
2.88 Reatâncias indutiva e capacitiva	33
2.90 Reatâncias indutiva e capacitiva em termos da frequência angular	34
2.91 Reatância	34
2.92 Sistema de equação - Parte 2	34
2.93 Sistema de equação - Parte 3	34
2.94 Sistema de equação - Parte 4	34
2.95 Sistema de equação - Parte 5	35
2.96 Termo A da solução particular - Parte 1	35
2.97 Termo A da solução particular - Parte 2	35
2.98 Sistema de equação - Parte 6	35
2.99 Termo B da solução particular - Parte 1	35
2.100 Termo B da solução particular - Parte 2	35
2.101 Solução particular da EDO - Parte 6	36
2.102 Tangente - Parte 1	36
2.103 Tangente - Parte 2	36
2.104 Tangente - Parte 3	36
2.105 Ângulo delta	36
2.106 Solução particular da EDO - Parte 7	36
2.107 Corrente I_0	37
2.108 Impedância em coordenadas retangulares	37
2.108 Impedância em coordenadas polares	37
2.109 Solução particular da EDO - Parte 8	37
2.110 Solução particular da EDO - Parte 9	37
2.111 Solução particular da EDO - Parte 10	37
2.112 Solução particular da EDO - Final	38
2.113 Solução homogênea da EDO - Parte 1	38

2.114 Solução homogênea da EDO - Parte 2	38
2.115 Solução homogênea da EDO - Parte 3	38
2.116 Solução homogênea da EDO - Parte 4	39
2.117 Solução homogênea da EDO - Parte 5	39
2.118 Solução homogênea da EDO - Parte 6	39
2.119 Equação característica - Parte 1	39
2.120 Equação característica - Parte 2	39
2.121 Equação característica - Parte 3	39
2.122 Equação característica - Parte 4	40
2.123 Polos do sistema de segunda ordem	40
2.124 Coeficiente de amortecimento	40
2.125 Frequência natural amortecida	40
2.126 Frequência natural amortecida	41
2.127 Circuito RLC matematicamente	41
2.128 Impedância mínima	41
2.129 Corrente do circuito	42
2.130 Frequência de ressonância - Parte 1	42
2.131 Frequência de ressonância - Parte 2	42
2.132 Frequência de ressonância - Parte 3	42
2.133 Frequência de ressonância - Final	42
2.134 Ângulo de ressonância	43
4.1 Cálculo do período	48
4.2 Amplitude mínima da corrente transitória - Parte 1	48
4.3 Amplitude mínima da corrente transitória - Parte 2	48
4.4 to equivalente	49
4.5 Amplitude máxima da corrente transitória - Parte 1	57
4.6 Amplitude máxima da corrente transitória - Parte 2	57
4.7 Cálculo do coeficiente de amortecimento	72
4.8 Cálculo da frequência natural	72

4.9	Cálculo da constante de tempo	73
4.10	Cálculo da frequência de oscilação	73
4.11	Cálculo da frequência	73
4.12	Cálculo do período	73
4.13	Cálculo do fator de amortecimento	73
4.16	Cálculo do coeficiente de amortecimento	83
4.17	Cálculo da frequência natural do circuito	83
4.18	Cálculo da constante de tempo	83
4.19	Cálculo da frequência de oscilação do circuito	83
4.20	Cálculo da frequência	84
4.21	Cálculo do período	84
4.22	Cálculo do fator de amortecimento	84
4.25	Cálculo do coeficiente de amortecimento	95
4.26	Cálculo da frequência natural do circuito	96
4.27	Cálculo da constante de tempo	96
4.28	Cálculo da frequência de oscilação do circuito	96
4.29	Cálculo da frequência	96
4.30	Cálculo do período	96
4.31	Reatância indutiva	96
4.32	Reatância capacitiva	97
4.33	Cálculo da reatância	97
4.34	Cálculo do módulo da impedância	97
4.35	Cálculo do ângulo de defasagem	97
4.36	Impedância em coordenadas retangulares	97
4.37	Cálculo do coeficiente de amortecimento	103
4.38	Cálculo da frequência natural do circuito	104
4.39	Cálculo da constante de tempo	104
4.40	Cálculo da frequência de ressonância	104
4.41	Cálculo da frequência	104

4.42	Cálculo do período	104
4.43	Reatância indutiva	104
4.44	Reatância capacitiva	104
4.45	Reatância do circuito 2	105
4.46	Frequência de ressonância do circuito 2	105
4.47	Módulo da impedância do circuito 2	105
4.48	Ângulo de defasagem do circuito 2	105
4.49	Impedância em coordenadas retangulares	106

Capítulo 1 Introdução

Neste trabalho de conclusão de curso serão estudados os transitórios eletromagnéticos em diferentes situações, mostrando como ocorre o comportamento dos mesmos em sistemas modelados como RL e RLC.

Primeiramente, será realizado o chaveamento de um circuito RL com dois resistores, dois indutores e uma fonte de tensão. Inicialmente a chave que simula o curto-circuito está na posição aberta, logo não tem corrente circulando por aquele ramo. Neste instante, é analisado o circuito completo como sendo um resistor em série com um indutor e uma fonte. Após o chaveamento, o circuito foi dividido em duas partes, sendo elas: uma parte do circuito contendo uma fonte de tensão e metade da indutância e da resistência; a outra contendo a metade restante da indutância e da resistência.

Após isso, será utilizada a técnica de discretização pela regra de integração trapezoidal para analisar o chaveamento do circuito RL descrito anteriormente. Serão realizadas comparações entre as soluções obtidas com a discretização do circuito e a partir das soluções analíticas.

Depois de realizado a simulação para o circuito RL, será abordado o chaveamento de um circuito RLC série com uma fonte de tensão. Neste caso, no instante inicial, ocorre o fechamento da chave que liga a fonte de tensão ao circuito RLC. Após o chaveamento, o circuito é energizado gerando assim uma corrente composta por uma solução homogênea e a solução particular. Nesse capítulo, as fases da fonte de tensão serão alteradas e, assim, poderão ser analisados os gráficos da frequência natural e o de amortecimento.

Por fim, será abordado o chaveamento para o mesmo circuito RLC, entretanto será realizada a análise dos gráficos do módulo e da fase da impedância equivalente do circuito.

Ao longo deste trabalho, serão explorados os conceitos fundamentais de circuitos RL e RLC. Serão destacadas: as implicações do resistor na resposta do sistema, sejam elas a dissipação da corrente transitória ou o retardo existente para o armazenamento de energia; a importância da escolha dos valores do resistor, capacitor e indutor, de tal forma que afete diretamente na resposta do circuito.

Para as análises, será utilizado o software MATLAB utilizando os ambientes Script e Simu-

link . Para o método utilizando o Script, serão utilizadas as equações matemáticas do circuito e os valores fornecidos, que por fim serão feitos gráficos para análise das correntes, total, regime permanente e regime transitório. Por meio do Simulink e do ATP será desenhado o circuito em questão e o mesmo também será simulado, obtendo assim gráficos que também serão utilizados nas análises.

1.1 Transitórios Eletromagnéticos

Os transitórios eletromagnéticos são eventos de alta frequência de curta duração que ocorrem quando as condições de operação mudam rapidamente. Esses transitórios eletromagnéticos são resultado de manobras de comutação, falhas elétricas, descargas atmosféricas e picos de energia. Transitórios são mudanças repentinas em circuitos elétricos que causam picos de tensão e corrente e normalmente variam entre microssegundos e milissegundos, dependendo da natureza dos fenômenos transitórios. Componentes de alta frequência nesses transitórios podem levar a mudanças rápidas e repentinas na tensão e corrente do sistema[2][3].

Danos aos equipamentos, diminuição da eficiência do sistema e declínio da qualidade da energia são consequências potenciais da ocorrência dos transitórios eletromagnéticos. Um olhar mais atento a esses fenômenos permite o estabelecimento de sistemas mais robustos e a implementação de medidas de proteção eficazes, prevenindo danos e perturbações.

Os transitórios apresentam oscilações caracterizadas por frequências naturais, cuja precisão na simulação depende dos modelos de componentes usados. A classificação dos transitórios pelo intervalo de tempo de estudo é essencial, adaptando os modelos dos componentes conforme o fenômeno investigado. Distúrbios rápidos, como raios, requerem simulações em nano a microssegundos, enquanto eventos de comutação variam de micro a milissegundos[2][3].

Os transitórios eletromagnéticos podem ser classificados com base em sua origem em dois tipos: Transitórios impulsivos; Transitórios oscilatórios. Os transitórios impulsivos são transitórios causados por descargas atmosféricas e são caracterizados por terem frequências bastante diferentes da frequência nominal da rede elétrica[2][4]. Os transitórios oscilatórios são causados por todas as operações de chaveamento, rejeição de carga e falhas e podem ser classificados como oscilatórios de: baixa frequência; média frequência; alta frequência[2][4]. Tendo

contextualizado as classificações dos transitórios quanto à origem, pode-se agora aprofundar o entendimento sobre o que gera os transitórios em sistemas elétricos. Sendo assim, algumas formas de gerar transitórios para sistemas elétricos são por meio de energização de linhas e banco de capacitores, desenergização de cargas indutivas, sobretensões causadas por descargas atmosféricas, curto-circuitos, manobras de chaveamento, rejeição de carga, restrições múltiplas em disjuntores, restrições em seccionadores e falhas em GIS (Sistema de Isolamento a Gás), dentre outras[2] [4].

Dessa forma, após classificar os tipos de transitórios quanto à sua origem e apresentar as causas desses transitórios em sistemas elétricos, é importante ressaltar os impactos que eles podem causar. Um impacto já mencionado anteriormente são as sobretensões, que são transitórios com tensão elevada e que podem exceder a capacidade de isolamento dos equipamentos. Outro impacto significativo são as correntes de surto, que apresentam valores superiores aos valores nominais calculados e definidos para os equipamentos e sistemas, podendo, assim, causar danos a eles. A oscilação de tensão e frequência é outro impacto relevante pois afeta diretamente na qualidade de energia elétrica.

Consequentemente, tendo apresentado as fontes de geração dos transitórios e como afetam o sistema elétrico, vê-se necessário a apresentação de princípios de proteções existentes para esses casos. As proteções mais comuns existentes são contra sobretensões transitórias na qual são utilizados supressores de surto (como varistores, centelhadores, diodos tipo Zener), transformadores isoladores, filtros passa baixa e para-raios do tipo Óxido de zinco (Z_nO). Os supressores de surto, do tipo varistores, se caracterizam por tempo de resposta rápido, na faixa inferior de nanossegundos e reagem de forma mais rápida que dispositivos de proteção[5]. Eles atuam limitando as sobretensões nos equipamentos, conduzindo para o terra essa energia proveniente da sobretensão. Os transformadores isoladores oferecem uma barreira física entre os transitórios da rede os equipamentos à ele conectados. Isso ocorre porque o transformador isolador não tem conexões elétricas entre seus enrolamentos[6]. Os filtros passa baixa permitem a passagem de sinais de baixa frequência[7], fazendo assim com que transitórios de alta frequência sejam mitigados. Os para-raios, na ocorrência de sobrecorrentes, atuam drenando a energia gerada diretamente para o terra. Para o tipo de para-raios citado acima (Z_nO), a resistência varia em

função da tensão. Sendo assim, quando o sistema está operando na tensão nominal a energia dissipada pelo para-raio se torna insignificante[8].

1.2 Motivação

Diante da importância do estudo de transitórios eletromagnéticos, a motivação deste trabalho é reproduzir simulações que a professora Doutora Maria Leonor Silva de Almeida realizou durante a disciplina de pós-graduação. Adicionando o Simulink como nova ferramenta de análise gráfica. Como esse assunto não foi visto com detalhamento em nenhuma disciplina durante o curso de graduação em Engenharia Elétrica pela UFG, o foco deste trabalho é desenvolver o tema demonstrando a teoria, equacionamento e os gráficos realizados. Para tanto, serão realizadas simulações utilizando o o Script e o Simulink, ambos integrados ao Matlab.

1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho é revisar o estudo de transitórios eletromagnéticos refazendo as simulações da disciplina de transitórios eletromagnéticos do curso de pós graduação da Professora Doutora Maria Leonor Silva de Almeida. Inicialmente as análises realizadas no curso de pós graduação foram apenas utilizando o Script do MATLAB. Contudo, afim de se ter mais opções de análises, utilizou-se também o Simulink como ferramenta de análise dos gráficos de transitórios eletromagnéticos. Para tanto, os objetivos específicos serão: revisão bibliográfica de transitórios eletromagnéticos; utilização do estudo em disciplina optativa.

1.4 Estrutura do Texto

Este trabalho está organizado como: No Capítulo 2, será apresentada a fundamentação teórica necessária para a realização do estudo dos transitórios eletromagnéticos, abordando-se a integração numérica e a resolução matemática dos circuitos RL e RLC.

Em seguida, no Capítulo 3, é apresentada a metodologia utilizada no trabalho, destacando-se a utilização do software MATLAB. No capítulo, serão explicados os códigos desenvolvidos

no Script (disponíveis em anexo) do MATLAB, e a utilização do Simulink para a criação de modelos dos circuitos (disponíveis em anexo).

Posteriormente, no Capítulo 4, serão apresentados os resultados dos códigos e circuitos gerados, tanto pelo Script quanto pelo Simulink, conforme descrito no Capítulo 3. O método de análise foi dividido em: Circuito RL série; Circuito RL série utilizando o método discreto; Circuito RLC série; e Circuito RLC série em frequência de ressonância. Dentro de cada tópico da resolução, serão apresentadas soluções matemáticas para auxiliar nas simulações e figuras geradas a partir do MATLAB para as análises solicitadas.

Por fim, no Capítulo 5, serão apresentadas as conclusões sobre as análises elaboradas no Capítulo 4. Vale ressaltar também que o trabalho contempla mais dois tópicos que auxiliam o entendimento completo do presente estudo, sendo eles: Referências e Anexos.

Capítulo 2 Fundamentação Teórica

Este trabalho abordará diversos conceitos fundamentais no campo da Engenharia Elétrica, essenciais para a compreensão e desenvolvimento do projeto final de curso. Os principais conceitos para compreensão deste trabalho serão explicitados neste capítulo.

O primeiro conceito que será explicado é o da regra trapezoidal que consiste em um tipo de integração numérica. A integração numérica é um conjunto de técnicas utilizadas para calcular a integral de uma função quando a integração analítica é complexa de ser realizada. Na integração analítica encontra-se uma expressão exata para a integral, já a integração numérica aproxima-se o valor da integral por meio de somas finitas. Essas somas finitas dependem do método a ser utilizado e do passo de integração adotado para cada circunstância. Neste trabalho será utilizado o método trapezoidal pois ele é um método simples que apresenta um erro inerente menor que o método dos retângulos.

Após a apresentação da regra trapezoidal será apresentado neste capítulo o desenvolvimento do equacionamento matemático para o circuito RL série com uma fonte de tensão. Para este mesmo circuito RL série será realizado também o equacionamento matemático utilizando o método discreto. Por fim, será abordado também o equacionamento matemático do circuito RLC série destacando a solução homogênea e a solução particular do circuito incluindo conceitos sobre frequência de ressonância.

2.1 Integração Numérica: Regra Trapezoidal

A regra trapezoidal consiste em aproximar a área sob a curva dividindo-a em um número finito de trapézios, calculando a área de cada trapézio e somando com o valor anterior calculado. Neste trabalho específico, a integração numérica será utilizada no circuito RL série para analisar e comparar os resultados obtidos por meio do método numérico com os do método analítico.

Para utilização da integral numérica é preciso explicar sobre o Teorema Fundamental do

Cálculo (TFC), parte 2, em que diz "Se f for contínua em um intervalo $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2.1)$$

em que: F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$ [9]. Como mencionado anteriormente pode não ser fácil a obtenção desta função primitiva, seja por complexidade matemática ou se for conhecido apenas intervalos discretos de f . Por isso, vê-se a necessidade da utilização do método numérico e regra do trapézio.

A regra do trapézio é um método de integração numérica que estima o valor de uma integral definida ao aproximar a área sob uma curva por meio de trapézios. A ideia básica é dividir a região sob a curva em pequenos trapézios e somar suas áreas para obter uma estimativa da integral, como demonstrado na Figura 2.1.

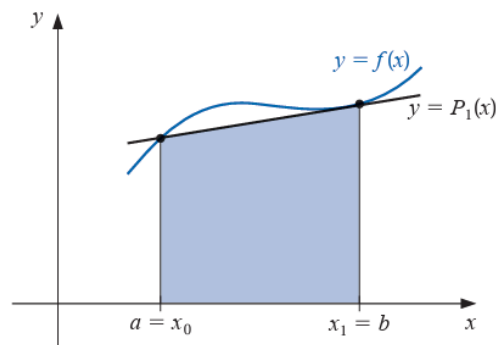


Figura 2.1: Explicação da Regra do Trapézio [1].

Como mencionado anteriormente a ideia da Regra do Trapézio é aproximar a função $y = f(x)$ por meio de uma reta. Nota-se que a figura geométrica criada abaixo da função $y = P_1(x)$ é um trapézio, dando assim o nome da regra. A área calculada abaixo da aproximação da reta é o valor da integral por isso, pela Figura 2.1 é possível perceber que a área abaixo da função $f(x)$ é diferente da área abaixo da reta $P_1(x)$. Desta forma a Regra do Trapézio consiste na geração de vários trapézios e soma das áreas dos mesmos, sendo assim, quanto mais trapézios mais próxima a área total esta da área real¹.

¹A Equação utilizada para cálculo da área do trapézio é definida como:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Para expressar o polinômio interpolador² de ordem 1ª é necessário utilizar a fórmula de Lagrange, que se trata de um método para estimar valores entre dois pontos conhecidos (interpolação). O método de Lagrange diz "Seja um conjunto de $n + 1$ pontos $x_i, f(x_i)$. Encontrar um polinômio interpolador $p_n(x)$ que passe por todos os pontos." [11] A Equação geral para $n + 1$ pontos é descrita como:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad (2.2)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (2.3)$$

Substituindo a Equação 2.3 em 2.2 tem-se:

$$p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \dots + L_n(x)f(x_n) \quad (2.4)$$

De forma geral, para aplicação nesta simulação será necessário apenas a utilização da forma de Lagrange de 1ª ordem, sendo assim ($n = 1$, número de subdivisões do intervalo $[a,b]$) é utilizado para 2 pontos dados: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ [11], definindo um polinômio como sendo:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \quad (2.5)$$

Sendo $h = (x_1 - x_0)/n$ que fornece uma maneira de determinar o tamanho de cada subintervalo ao dividir um intervalo entre dois pontos em n partes iguais, é possível substituir na Equação 2.5, sendo assim:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{-h} f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} f(x_1) \quad (2.6)$$

em que B representa a base maior, b representa a área menor e h representa a altura do trapézio [10].

²A interpolação polinomial visa aproximar funções utilizando polinômios de grau até n , com o objetivo de facilitar o cálculo da função em pontos que não foram originalmente fornecidos. [1]

Logo, a integral da função $f(x)$ pode ser escrita como[11]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + E(f) \quad (2.7)$$

em que: $f(x)$ representa a função que se quer descobrir a integral; $p(x)$ representa o polinômio interpolador; $E(f)$ representa o erro associado ao método numérico.

Substituindo a Equação 2.6 na Equação 2.7, tem-se então:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x-x_1}{-h} f(x_0) + \frac{x-x_0}{h} f(x_1) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx \quad (2.8)$$

Resolvendo a primeira integral da Equação 2.8 tem-se que:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \left(\frac{-x^2}{2h} + \frac{x_1x}{h} \right) f(x_0) + \left(\frac{x^2}{2h} - \frac{x_0x}{h} \right) f(x_1) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx \quad (2.9)$$

Aplicando o intervalo descrito pela Equação 2.8 é possível obter a Equação:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \left(\frac{-x_1^2 + x_0^2}{2h} + \frac{x_1^2 - x_0x_1}{h} \right) f(x_0) + \left(\frac{x_1^2 - x_0^2}{2h} - \frac{x_1x_0 - x_0^2}{h} \right) f(x_1) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx \quad (2.10)$$

Resolvendo a Equação 2.10 tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \frac{x_1^2 - 2x_0x_1 + x_0^2}{2h} f(x_0) + \frac{x_1^2 - 2x_0x_1 + x_0^2}{2h} f(x_1) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx \quad (2.11)$$

Substituindo as equações de segundo grau na forma reduzida tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \frac{(x_1-x_0)^2}{2h} f(x_0) + \frac{(x_1-x_0)^2}{2h} f(x_1) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx \quad (2.12)$$

Da Figura 2.1 tem-se que a altura do trapézio pode ser descrita como sendo $h = x_1 - x_0$ e substituindo essa relação na Equação 2.12 obtém-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \frac{h^2}{2h}f(x_0) + \frac{h^2}{2h}f(x_1) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f'''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)dx \quad (2.13)$$

Resolvendo agora a segunda integral, tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \frac{h^2}{2h}f(x_0) + \frac{h^2}{2h}f(x_1) + \frac{1}{2}f'''(\xi(x)) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)dx \quad (2.14)$$

Resolvendo a integração e aplicando os limites de integração, tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \frac{h^2}{2h}f(x_0) + \frac{h^2}{2h}f(x_1) + \frac{1}{2}f'''(\xi) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1 + x_0)}{2}x^2 + x_0x_1x \right] \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (2.15)$$

Aplicando agora os limites de integração obtém-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \frac{h^2}{2h}f(x_0) + \frac{h^2}{2h}f(x_1) - \frac{1}{2} \frac{h^3}{6}f'''(\xi) \quad (2.16)$$

Dessa forma, obtém-se a Equação final[1]:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f'''(\xi) \quad (2.17)$$

Assim como em outros métodos numéricos é definido a estimativa de erro advinda do processo do método numérico utilizado, a Regra Trapezoidal também contém erros de estimativa em seu processo podendo ser na aproximação e na integração do polinômio.

No momento em que é feita a aproximação da função $f(x)$ por meio do polinômio interpolador $p(x)$ são gerados pequenos erros de estimativas por se tratar de uma função de primeiro grau se aproximando de uma função de ordem maior. Durante a integração o erro contido está relacionado ao processo de interpolação enquanto o processo de integração do polinômio apenas carrega o erro já contido da interpolação[1].

A diferença entre a integral exata e a aproximação da Regra do Trapézio é definida como o erro de estimativa, sendo representado por:

$$I - Q_T(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \xi \in (x_0, x_1) \quad (2.18)$$

Sendo assim, define-se o erro como sendo[11]:

$$|Error| \leq \frac{h^3}{12} f''(\xi), \xi \in (x_0, x_1) \quad (2.19)$$

2.1.1 Discretização dos Indutores

O indutor possui um equivalente representado de forma discreta. Esse equivalente é formado por uma resistência em paralelo com uma fonte de corrente. Considerando o indutor da Figura 2.2.

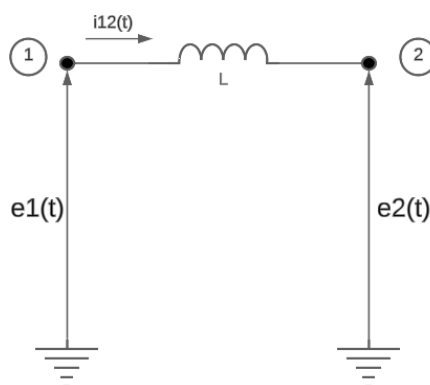


Figura 2.2: Representação Elétrica de um Indutor.

Nota-se que o nó 1 possui uma tensão de $e_1(t)$ e o nó 2 possui uma $e_2(t)$, através destes nós é percorrida uma corrente $i_{12}(t)$. Dessa forma pode-se montar a equação 2.20 para representar o circuito como sendo:

$$e_1(t) - e_2(t) = L \frac{di_{12}(t)}{dt} \quad (2.20)$$

Fazendo a integração dos dois lados da Equação:

$$\int_{t-\Delta t}^t e_{12}(t) dt = L \int_{t-\Delta t}^t di_{12}(t) \quad (2.21)$$

Dessa forma, aplicando a Regra do Trapézio demonstrada na Equação 2.17, obtém-se[12]:

$$i_{12}(t) - i_{12}(t - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2L} [e_{12}(t - \Delta t) + e_{12}(t)] \quad (2.22)$$

Isolando o termo $i_{12}(t)$ e multiplicando o termo $\frac{\Delta t}{2L}$, tem-se:

$$i_{12}(t) = \frac{\Delta t}{2L} e_{12}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} e_{12}(t) + i_{12}(t - \Delta t) \quad (2.23)$$

Logo, tem-se que a Equação da corrente I_L que passa pelo indutor representada pela discretização e Regra do Trapézio é obtida como sendo[13][14]:

$$I_L(t - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2L} e_{12}(t - \Delta t) + i_{12}(t - \Delta t) \quad (2.24)$$

Após obter os valores dos elementos concentrados, é pode-se montar um circuito equivalente conforme a Figura 2.3.

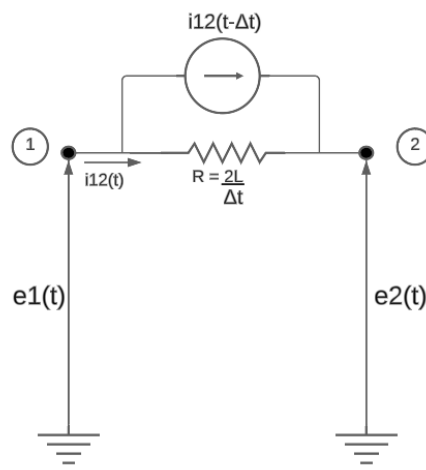


Figura 2.3: Equivalente do Indutor em Elementos Concentrados.

2.1.2 Discretização dos Resistores

Para o resistor, seu equivalente representado de maneira discreta continua sendo apenas uma resistência, do mesmo jeito da representação analítica. Isso pode ser confirmado através de cálculos utilizando o circuito da Figura 2.4.

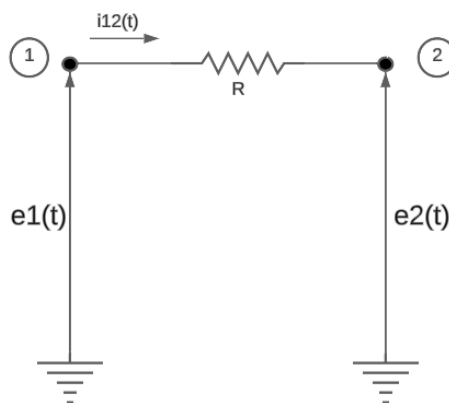


Figura 2.4: Representação Elétrica de um Resistor.

Da figura 2.4 é possível retirar a seguinte Equação:

$$e_{12}(t) = Ri_{12} \quad (2.25)$$

Em termos da corrente i_{12} é possível reescrever a Equação 2.25 como sendo a seguinte:

$$i_{12} = \frac{e_{12}(t)}{R} \quad (2.26)$$

É possível identificar, então, uma Equação sem elementos diferenciais. Além disso o circuito apresenta a fonte de corrente nula. Dessa forma o circuito discreto permanece igual ao original.

2.2 Circuito RL série

Um circuito RL série consiste em uma combinação de um resistor, um indutor e uma fonte de tensão conectados em série. Este circuito é comumente utilizado para analisar a resposta de componentes resistivos e indutivos em corrente alternada, visto que em corrente contínua o indutor se comporta como um curto-circuito.

No circuito RL série, a corrente que flui através do resistor e do indutor é a mesma, pois eles estão em série. No entanto, as quedas de tensão em cada componente são diferentes. O resistor obedece à lei de Ohm, na qual a tensão é proporcional à corrente. Por outro lado, o indutor gera uma queda de tensão que depende da taxa de variação da corrente ao longo do tempo.

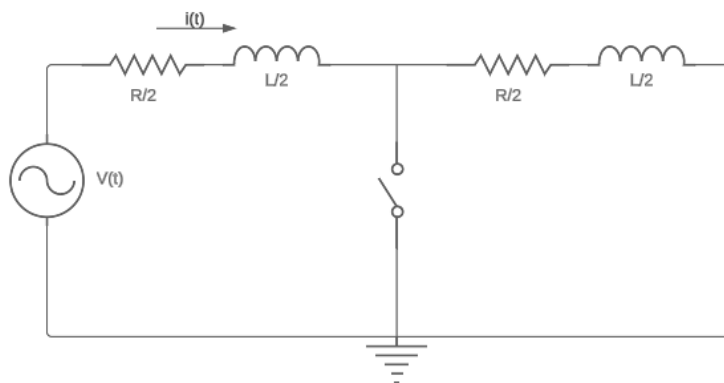


Figura 2.5: Circuito RL.

$$R = 10\Omega; L = 266mH; v(t) = 100\text{sen}(\omega t + 30^\circ)V$$

Para a solução deste circuito é necessário a utilização da Lei de Kirchhoff das tensões, LKT³.

Sendo assim, obtém-se:

$$v(t) = \frac{R}{2}i(t) + \frac{L}{2}\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{2}i(t) + \frac{L}{2}\frac{di(t)}{dt} \quad (2.27)$$

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \quad (2.28)$$

Isolando o termo de indutância do lado esquerdo da Equação, tem-se:

$$L\frac{di(t)}{dt} = v(t) - Ri(t) \quad (2.29)$$

$$Ldi(t) = [v(t) - Ri(t)]dt \quad (2.30)$$

$$\frac{di(t)}{v(t) - Ri(t)} = \frac{1}{L}dt \quad (2.31)$$

Desta maneira, a Equação 2.31 fica na forma de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO)⁴ Linear 1ª ordem⁵.

³”a lei de Kirchhoff para tensão (LKT) diz que a soma algébrica de todas as tensões em torno de um caminho fechado (ou laço) é zero”[15].

⁴Equações contendo apenas derivadas simples são denominadas de Equações Diferenciais Ordinárias.[16]

⁵Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem é uma Equação que relaciona uma função desconhecida e sua primeira derivada. Em termos gerais, uma EDO de primeira ordem pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

em que dy/dx é a derivada da função y em relação a x . [16]

Para a solução desta EDO pode-se utilizar o método das equações separáveis, na qual primeiramente se integra ambos lados da Equação[16] e obtém-se:

$$\int_0^i \frac{di(t)}{v(t) - Ri(t)} = \int_0^t \frac{1}{L} dt \quad (2.32)$$

Solucionando primeiramente o lado direito da Equação, tem-se:

$$\int_0^i \frac{di(t)}{v(t) - Ri(t)} = \frac{1}{L} dt \quad (2.33)$$

A integral do lado esquerdo da Equação pode ser solucionada através do método da substituição⁶, resultando em:

$$u = v(t) - Ri(t); du = -Rdi(t) \quad (2.34)$$

$$di(t) = \frac{-du}{R} \quad (2.35)$$

Substituindo u e du na integral da Equação 2.33 tem-se:

$$\int_0^i \frac{-du}{Ru} = \frac{1}{L} t \quad (2.36)$$

Integrando a Equação 2.36, tem-se:

$$\frac{-1}{R} \ln(u)_0^i = \frac{1}{L} t \quad (2.37)$$

⁶Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I , então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Retornando agora a variável substituída, tem-se:

$$\ln[v(t) - Ri(t)]_0^t = \frac{-R}{L}t \quad (2.38)$$

Substituindo os limites de integração, obtém-se:

$$\ln[v(t) - Ri(t)] - \ln[v(t)] = \frac{-R}{L}t \quad (2.39)$$

Aplicando a propriedade logaritmo natural do quociente⁷, tem-se:

$$\ln \left[\frac{v(t) - Ri(t)}{v(t)} \right] = \frac{-R}{L}t \quad (2.40)$$

A base do logaritmo natural é o número de Euler⁸, representado por e . Por isso é possível reorganizar a Equação da seguinte maneira aplicando e em ambos lados obtém-se:

$$e^{\ln \left[\frac{v(t) - Ri(t)}{v(t)} \right]} = e^{\frac{-R}{L}t} \quad (2.41)$$

Como a base de um logaritmo natural é o próprio número de Euler, pode-se simplificar a Equação 2.41, resultando em:

$$\frac{v(t) - Ri(t)}{v(t)} = e^{\frac{-R}{L}t} \quad (2.42)$$

Multiplicando ambos lados da igualdade pelo termo $v(t)$, obtém-se:

$$v(t) - Ri(t) = v(t)e^{\frac{-R}{L}t} \quad (2.43)$$

⁷O logaritmo natural de um quociente é igual à diferença dos logaritmos naturais.[15]

⁸A constante de Euler, denotada por e equivale a aproximadamente 2,71828 e é a base dos logaritmos naturais.

Desta maneira é possível definir a constante de tempo⁹ do circuito como sendo:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (2.44)$$

Substituindo assim a equação 2.44 na equação 2.43, obtém-se:

$$v(t) - v(t)e^{-\frac{t}{\tau}} = Ri(t) \quad (2.45)$$

Colocando o termo da tensão $v(t)$ em evidência e depois isolando $i(t)$, tem-se:

$$v(t)[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] = Ri(t) \quad (2.46)$$

Tratando como impedância¹⁰, tem-se:

$$i(t) = \frac{v(t)}{Z} [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] \quad (2.47)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{Z} - \frac{v(t)}{Z} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.48)$$

Sendo $v(t) = \text{sen}(\omega t + \theta)$ e substituindo na Equação 2.48, tem-se:

$$i(t) = \frac{Vm}{Z} \text{sen}(\omega t + \theta) - \frac{Vm}{Z} \text{sen}(\omega t + \theta) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.49)$$

⁹A constante de tempo de um circuito é o tempo necessário para a resposta de decaimento a um fator igual a $1/e$ ou a 36,8% de seu valor inicial.[15]

¹⁰A impedância Z de um circuito é a razão entre a tensão fasorial V e a corrente fasorial i , medida em ohms.[15]

É possível desenvolver um pouco mais a Equação acima utilizando as seguintes relações:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (2.50)$$

em que: Z é o módulo da impedância; α é o ângulo da impedância. Substituindo assim as relações da equação 2.50 na Equação 2.49, obtém-se:

$$i(t) = \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + X^2}} \operatorname{sen} \left[\omega t + \theta - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] - \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + X^2}} \operatorname{sen} \left[\omega t + \theta - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.51)$$

Desta forma tem-se a solução completa do circuito [3] é composta pela solução particular e solução homogênea¹¹, do tipo:

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) \quad (2.52)$$

A solução particular ocorre antes do chaveamento do circuito e corresponde a corrente de falta em regime permanente, que corresponde a componente senoidal, nesta solução não contempla nenhum tipo de transitórios[17] e é descrita por:

$$i_p(t) = i(t) = i'(t) = \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen} \left[\omega t + \theta - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R} \right] \quad (2.53)$$

A equação homogênea corresponde a corrente de decaimento exponencial com constante de decaimento encontrado através de τ [17]. A equação homogênea aparece após a ocorrência do curto-circuito, pois é nela que está contido o termo com a constante de tempo que faz com que ocorra o decaimento, como mostrado na equação 2.54:

$$i_h(t) = \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + X^2}} \operatorname{sen} \left[\omega t + \theta - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.54)$$

¹¹Uma solução para uma Equação Diferencial é uma função que satisfaz identicamente a Equação. A solução mais geral possível que admite uma Equação Diferencial é denominada solução geral, enquanto que outra solução é chamada uma solução particular.[16]

A componente transitória é determinada pela solução da equação homogênea, obtida por meio do método dos coeficientes indeterminados. Em outras palavras:

$$i_h(t) = C_1 e^{at} \quad (2.55)$$

Sendo assim, tem-se:

$$i_h(t) = C_1 e^{\frac{-Rt}{L}} \quad (2.56)$$

2.2.1 Momento antes da ocorrência do curto-circuito

Antes do chaveamento do circuito, nota-se que a chave funciona como um circuito aberto.

Sendo assim, o circuito é representado por:

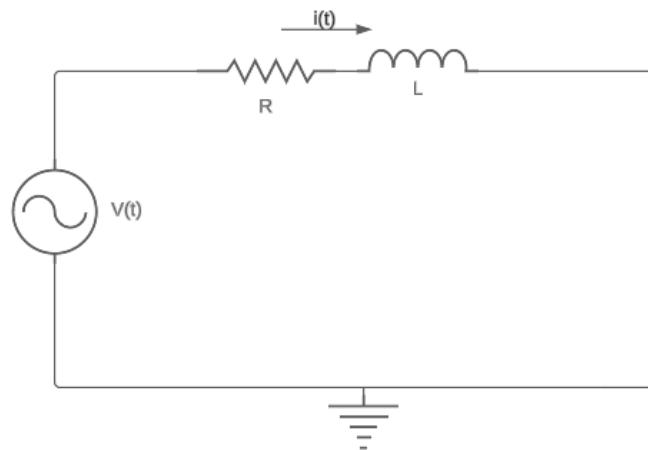


Figura 2.6: Circuito RL antes da ocorrência do curto-circuito.

Como demonstrado na equação 2.53, a solução deste circuito é descrita por:

$$i(t) = i'(t) = \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{sen} \left[\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R} \right] \quad (2.57)$$

Vale ressaltar que nesta parte a corrente tem um comportamento senoidal e assim permanece até o chaveamento do circuito.

2.2.2 Momento após a ocorrência do curto-circuito

Após o chaveamento o circuito é dividido em 2 partes, sendo elas:

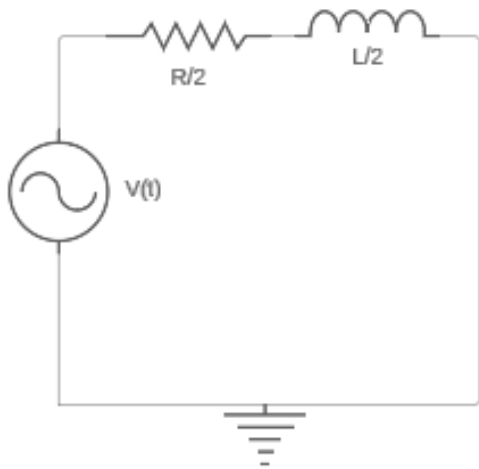


Figura 2.7: Parte 1 do circuito RL em que a corrente $i(t)$ percorre o circuito.

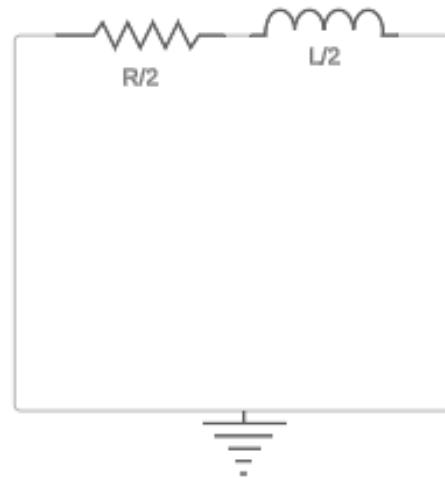


Figura 2.8: Parte 1 do circuito RL em que a corrente $i'(t)$ percorre o circuito.

A parte da esquerda do circuito, na Figura 2.7, contempla a fonte de tensão, a resistência e a indutância, logo, a corrente que circula é $i(t)$ e sua respectiva equação é descrita por:

$$i(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + X^2}} \text{sen} \left[\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (2.58)$$

Isolando o termo C_1 , tem-se:

$$i(t) - \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + X^2}} \text{sen} \left[\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] = \frac{C_1}{e^{\frac{R}{L}t}} \quad (2.59)$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $e^{\frac{R}{L}t}$, obtém-se:

$$C_1 = e^{\frac{R}{L}t} \left\{ i(t) - \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + X^2}} \text{sen} \left[\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] \right\} \quad (2.60)$$

Considerando condições iniciais como t_0 , tem-se:

$$C_1 = e^{\frac{R}{L}t_0} \left\{ i(t_0) - \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + X^2}} \text{sen} \left[\omega t_0 + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] \right\} \quad (2.61)$$

Portanto, para a parte 1 do circuito, a solução que satisfaz a equação homogênea é descrita pela Equação 2.61.

A parte da direita do circuito, apresentada na Figura 2.8, não contempla a fonte de tensão, somente a resistência e a indutância, logo, a corrente que circula é $i'(t)$. Como não tem a fonte no circuito, a solução é dada apenas pela parte homogênea, como mencionado anteriormente. Da solução homogênea obtida na Equação 2.56 pode-se aplicar as condições iniciais do circuito, sendo assim, tem-se:

$$i'(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t_0} \quad (2.62)$$

Isolando o termo C_1 e multiplicando $e^{\frac{R}{L}t_0}$ dos dois lados da igualdade, obtém-se:

$$C_1 = i(t_0) e^{\frac{R}{L}t_0} \quad (2.63)$$

Substituindo a Equação 2.63 na Equação 2.62, obtém-se:

$$i'(t) = i(t_0) e^{\frac{R}{L}t_0} e^{-\frac{R}{L}t_0} \quad (2.64)$$

Colocando em evidência o termo $e^{-\frac{R}{L}t}$, obtém-se:

$$i'(t) = i(t_0)e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \quad (2.65)$$

Portanto, percebe-se que a corrente $i'(t)$ é um decaimento exponencial da corrente no instante do curto-circuito, $i(t_0)$ até zero. Outro detalhe importante a ser mencionado é que em t_0 a corrente $i(t_0)$ pode ser diferente de zero. Isso ocorre porque o indutor é projetado para armazenar energia em seu campo magnético¹² [15].

Então, após o chaveamento do circuito, fica uma energia armazenada no campo magnético do indutor e ao passar do tempo essa energia começa ser dissipada¹³ e essa dissipação ocorre em forma de calor na resistência presente no circuito. O tempo de dissipação da energia está associado com a constante de tempo τ do circuito.

2.3 Circuito RL série método discreto

Outra maneira de resolução do circuito da Figura 2.5 é pelo método de discretização dos elementos para resolução através da regra do trapézio, explicada na Seção 2.1.

2.3.1 Momento antes da ocorrência do curto-circuito

Antes do chaveamento do circuito, nota-se que a chave funciona como um circuito aberto.

¹²Em razão do formato de bobina dos indutores, eles apresentam uma característica importante, o armazenamento de energia. O armazenamento de energia do indutor ocorre em seu campo magnético, que é gerado a partir da passagem de corrente por suas espiras[15]. Quando o circuito RL é energizado por uma fonte de tensão, a energia começa a ser armazenada e o mesmo é descrito exponencialmente, isso se dá pela característica de oposição à mudança repentina da corrente no indutor[15].

¹³A dissipação de energia ocorre devido a transformação da energia elétrica em energia térmica e esse processo é descrito pela Lei de Joule, que descreve como a energia elétrica é convertida em calor quando uma corrente elétrica passa por um material resistivo.

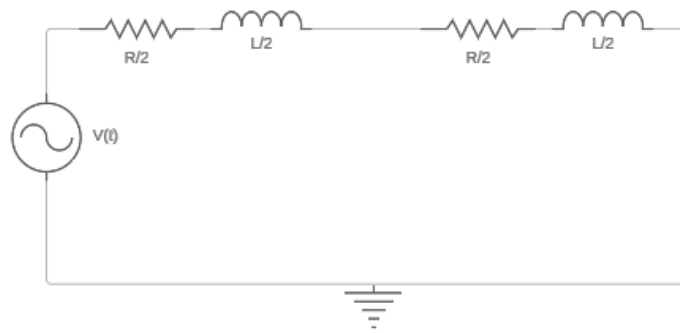


Figura 2.9: Circuito RL.

Sendo assim, pode-se somar os valores tanto da resistência, quanto da indutância, resultando em:

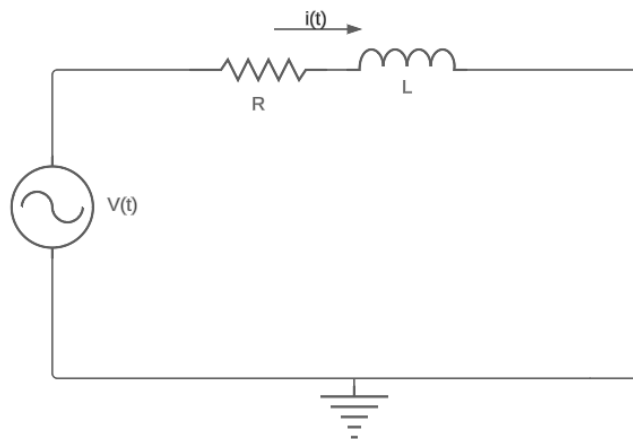


Figura 2.10: Circuito RL série.

Como demonstrado nas seções anteriores pode-se substituir o resistor e indutor pelos seus modelos equivalentes discretos, resultando assim no seguinte circuito:

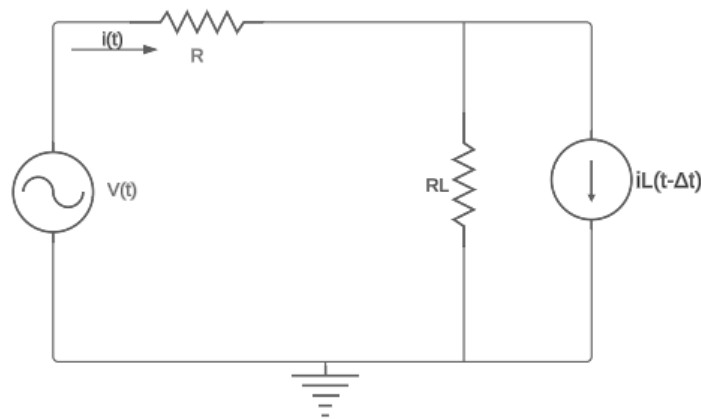


Figura 2.11: Circuito RL série discreto.

Desta forma, pode-se aplicar um conceito de circuitos elétricos, a transformação de fonte¹⁴.

Resultando no seguinte circuito: resultando assim no seguinte circuito:

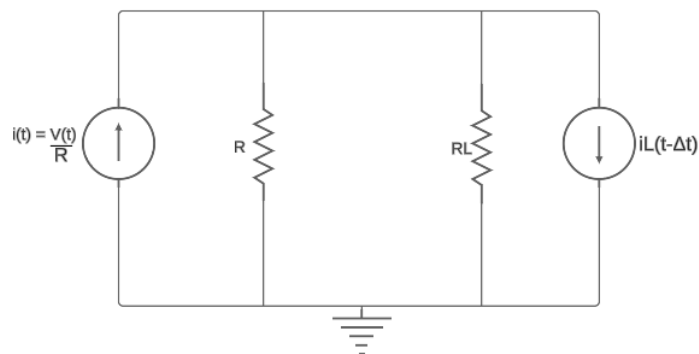


Figura 2.12: Circuito RL série discreto com transformação de fonte.

Para solução deste circuito, utiliza-se o método da análise nodal¹⁵. Sendo assim, na análise nodal defini-se um nó¹⁶ de referência para o circuito, no caso do circuito da Figura 2.12 o nó de referência já foi definido e é comumente chamado de *terra* (GND) e a tensão neste nó é nula.

A próxima etapa é nomear o outro nó do circuito. Conforme ilustrado na Figura 2.13.

¹⁴Transformação de fontes consiste em substituir uma fonte de tensão V_s em série com um resistor R por uma fonte de corrente I_s em paralelo com um resistor R , ou vice-versa[15].

¹⁵A análise nodal fornece um procedimento genérico para análise de circuitos usando tensões nodais como variáveis de circuitos. Optar por tensões nodais em vez de tensões de elementos como essas variáveis é conveniente e reduz o número de equações que se deve resolver simultaneamente[15].

¹⁶“Nó é o ponto de conexão entre dois ou mais ramos.[15]”

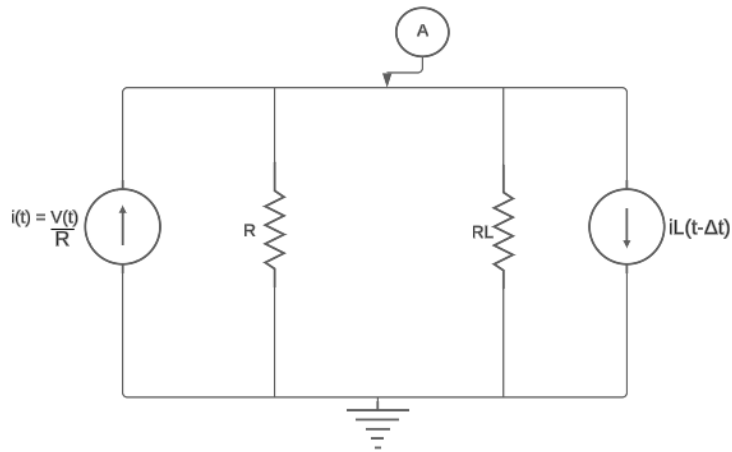


Figura 2.13: Nomeação dos nós do circuito

O segundo passo da análise nodal é definir as polaridades dos resistores do circuito e descrever as correntes do circuito. Conforme ilustrado na Figura 2.14.

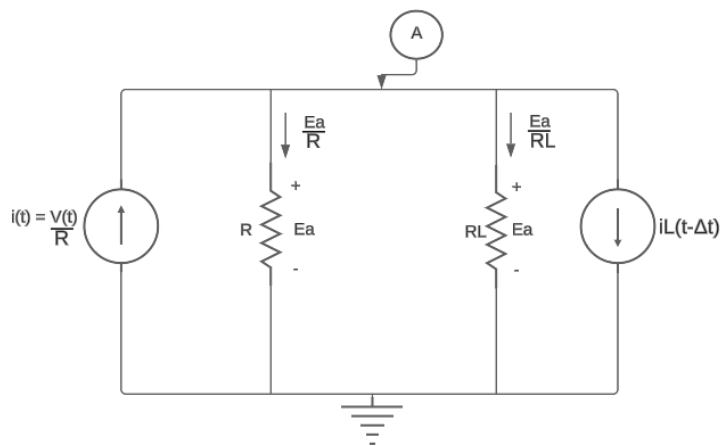


Figura 2.14: Circuito com as polaridades e correntes indicadas

O terceiro passo da análise nodal é a aplicação da Lei de Kirchoff das Correntes¹⁷ (LKC) no nó *A* do circuito. Sendo assim, obtém-se:

$$-\frac{V(t)}{R} + \frac{e_a(t)}{R} + \frac{e_a(t)}{RL} + I_L(t) = 0 \quad (2.66)$$

Utilizando a Lei de Ohm, pode-se fazer a substituição do termo $i(t) = \frac{V(t)}{R}$ na Equação

¹⁷A LKC afirma que a soma das correntes que entram em um nó é zero[15].

2.66 e passar este termo para o lado direito da Equação, obtendo-se então:

$$\frac{e_a(t)}{R} + \frac{e_a(t)}{RL} + I_L(t) = i(t) \quad (2.67)$$

Sendo assim, a corrente do circuito RL série utilizando o método trapezoidal é definida como sendo:

$$i(t) = e_a(t) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{RL} \right] + I_L(t) \quad (2.68)$$

2.3.2 Momento após a ocorrência do curto-circuito

Após o chaveamento o circuito é dividido em duas partes, sendo elas:

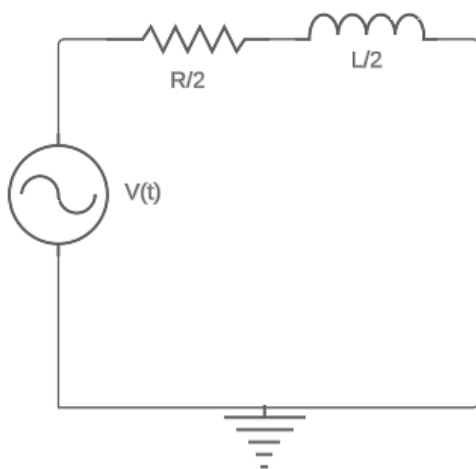


Figura 2.15: Parte 1 do circuito RL em que a corrente $i(t)$ percorre o circuito.

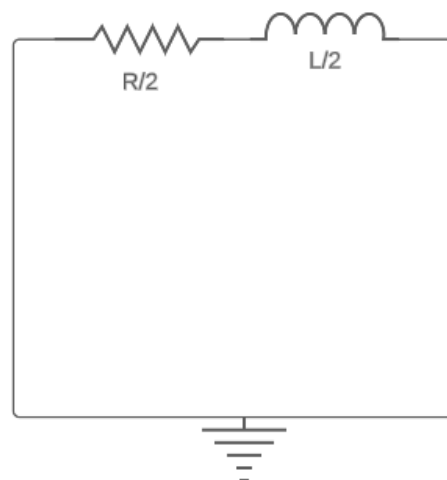


Figura 2.16: Parte 2 do circuito RL em que a corrente $i'(t)$ percorre o circuito.

A parte da esquerda do circuito contempla a fonte de tensão, a resistência e a indutância, logo, a corrente que circula é $i(t)$ e é representado pela Figura 2.15. Para encontrar a corrente $i(t)$ faz-se necessário utilizar a substituição do indutor pelo seu equivalente discreto e a transformação da fonte de tensão em série com o resistor em fonte de corrente em paralelo com o resistor, conforme ilustrado na Figura 2.17:

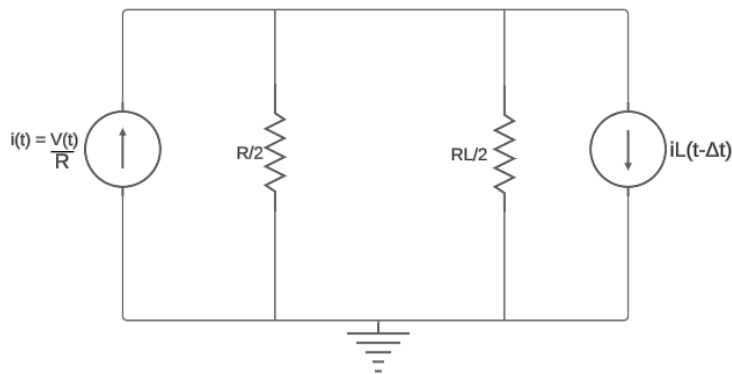


Figura 2.17: Circuito RL série equivalente discreto junto com transformação de fonte.

Como feito no tópico 2.3.1 utiliza-se da análise nodal para encontrar a corrente $i(t)$, logo são definidos o nó de referência e o nó para análise e as polaridades e sentido das corrente, conforme ilustrado na Figura 2.18:

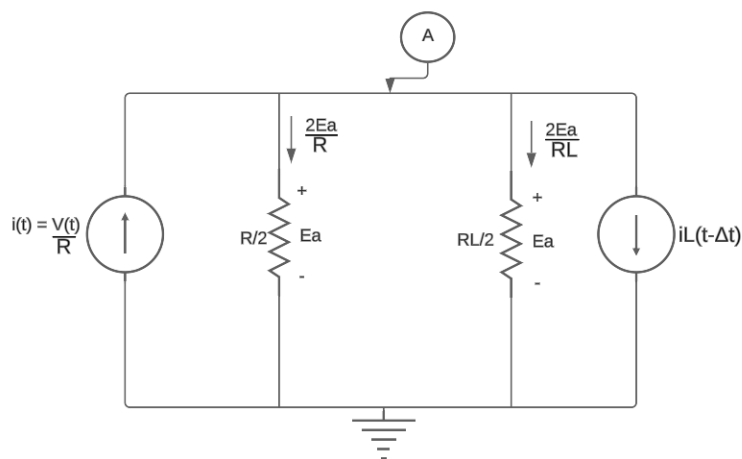


Figura 2.18: Circuito RL série com indicação de polaridades e sentido das correntes.

Aplicando a LKC no nó A do circuito, obtém-se:

$$-i(t) + \frac{2e_a(t)}{R} + \frac{2e_a(t)}{RL} + I_L(t) = 0 \quad (2.69)$$

Isolando o termo $i(t)$ na equação 2.69, obtém-se:

$$i(t) = \frac{2e_a(t)}{R} + \frac{2e_a(t)}{RL} + I_L(t) \quad (2.70)$$

tem-se então a equação da corrente para circuito da Figura 2.15. Nota-se que essa corrente tem contribuição da fonte de tensão, transformada em fonte de corrente, que alimenta o circuito.

A parte da direita do circuito contempla resistência e a indutância, logo, a corrente que circula é $i'(t)$ e é representada pela Figura 2.16. Para encontrar a corrente $i'(t)$ faz-se necessário utilizar a substituição do indutor pelo seu equivalente discreto, conforme ilustrado na Figura 2.19:

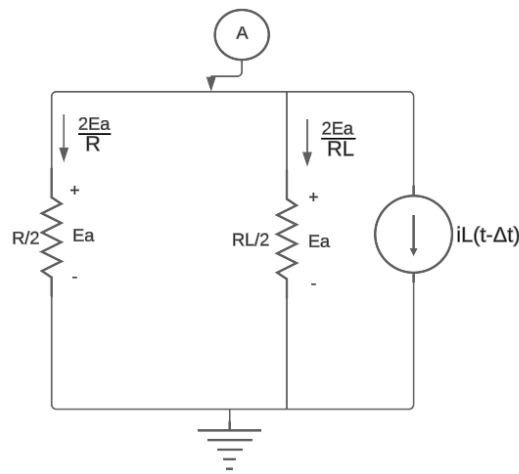


Figura 2.19: Circuito RL série equivalente discreto.

Aplicando LKC no nó A obtém-se a seguinte equação:

$$i_1 + i_2 + i_L(t - \Delta t) = 0 \quad (2.71)$$

Substituindo os valores das correntes, obtém-se:

$$\frac{2E_a}{R} + \frac{2E_a}{RL} + i_L(t + \Delta t) = 0 \quad (2.72)$$

Colocando em evidência a tensão, obtém-se:

$$E_a \left[\frac{2}{R} + \frac{2}{RL} \right] + i_L(t + \Delta t) = 0 \quad (2.73)$$

Nota-se que para este circuito não existe fonte de tensão, o que indica que a energia deste circuito após o chaveamento é advinda do armazenamento no campo magnético do indutor.

2.4 Circuito RLC série

Um circuito RLC série consiste em uma combinação de um resistor, um indutor, um capacitor e uma fonte conectados em série. Este circuito é amplamente utilizado para estudar o comportamento de componentes resistivos, indutivos e capacitivos em corrente alternada, visto que em corrente contínua o indutor é representado por um curto-circuito e o capacitor é representado por um circuito aberto.

No circuito RLC série, a corrente que flui através do resistor, do indutor e do capacitor é a mesma, pois eles estão em série. Cada componente, no entanto, apresenta uma queda de tensão diferente. O resistor obedece à lei de Ohm, na qual a tensão é proporcional à corrente. O indutor gera uma queda de tensão que depende da taxa de variação da corrente ao longo do tempo, enquanto o capacitor armazena energia na forma de um campo elétrico, resultando em uma queda de tensão que depende da carga acumulada, em que: Q é a carga elétrica.

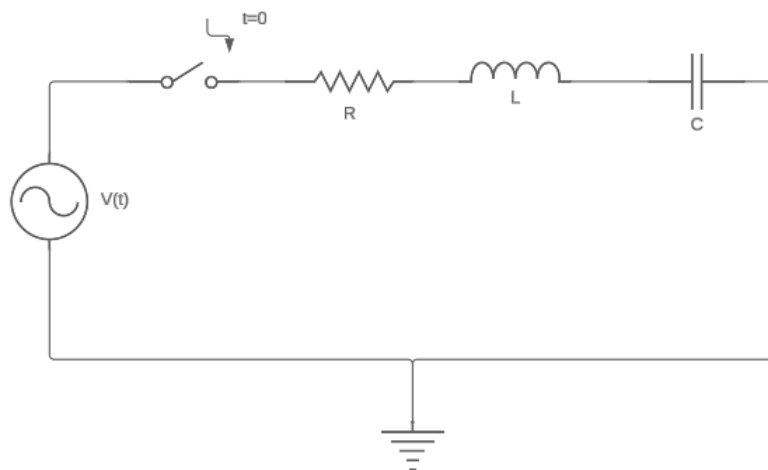


Figura 2.20: Circuito RLC.

Do circuito da Figura 2.20, observa-se a presença de dois elementos acumuladores de energia, por isso é denominado de circuito de segunda ordem[15]. Aplicando a LKT, tem-se:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt + V_c(0) = V(t) \quad (2.74)$$

A equação 2.74 é do tipo integro-diferencial, pois existe derivada e integral na mesma Equação

[16]. Para resolução da equação 2.74 é necessário manipular de modo a deixar somente uma equação diferencial. Para isto, utiliza-se o teorema fundamental do cálculo (TFC)¹⁸, logo, se a função **f** for contínua em um intervalo fechado [a,b], a função **g** é definida como sendo:

$$g(x) = \int_a^b f(t)dt \quad (2.75)$$

Portanto, derivando a função $g(x)$, tem-se:

$$g'(x) = f(x) \quad (2.76)$$

Sendo assim, é possível derivar a equação 2.74, resultando assim em:

$$R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) + 0 = V(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (2.77)$$

O termo de maior ordem é acompanhado de L , sendo assim, para facilitar as análises é possível normalizar¹⁹ este termo, logo, dividindo tudo por L e reorganizando a equação tem-se a seguinte Equação Diferencial Ordinária (EDO)[3], obtém-se:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = V(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (2.78)$$

¹⁸O TFC indica a precisa relação inversa entre a integral e a derivada.[9]

¹⁹Normalizar um termo pode se referir a ajustar os termos da equação para simplificar a solução ou análise.[16].

2.4.1 Solução Particular

A solução particular da equação tem como premissa a utilização do método dos coeficientes indeterminados para uma EDO do tipo senoidal[16]. Da Equação 2.78 tem-se uma escolha de $i(t)$ que possa satisfazer a solução da equação como sendo:

$$I_p = A\cos(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \alpha) \quad (2.79)$$

Derivando a Equação 2.79 tem-se:

$$\frac{di_p(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) + B\omega\cos(\omega t + \alpha) \quad (2.80)$$

Derivando agora a Equação 2.80, tem-se:

$$\frac{d^2i_p(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha) - B\omega^2\sin(\omega t + \alpha) \quad (2.81)$$

Com as Equações 2.79, 2.80 e 2.81 encontradas é possível substituí-las na Equação 2.78 mas primeiramente, tem-se:

$$V(t) = E_{max}\sin(\omega t + \alpha) \quad (2.82)$$

E derivando $V(t)$ tem-se:

$$\frac{dV(t)}{dt} = E_{max}\omega\cos(\omega t + \alpha) \quad (2.83)$$

Substituindo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 -L\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha) - L\omega^2 B \sin(\omega t + \alpha) + R\omega B \cos(\omega t + \alpha) - R\omega A \sin(\omega t + \alpha) \\
 + \frac{A}{C} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{B}{C} \sin(\omega t + \alpha) = E_{\max} \omega \cos(\omega t + \alpha)
 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Organizando a equação em termos de *seno* e *coseno*, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega t + \alpha) \left[-L\omega^2 A + RB\omega + \frac{A}{C} \right] \\
 + \sin(\omega t + \alpha) \left[-L\omega^2 B - RA\omega + \frac{B}{C} \right] = E_{\max} \omega \cos(\omega t + \alpha)
 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Comparando a igualdade da equação nota-se que à direita tem apenas o termo *coseno* enquanto à esquerda da igualdade tem-se *seno* e *coseno*. Sendo assim, é possível igualar os termos que os acompanham e formar um sistema com duas equações, sendo elas:

$$\begin{cases} -L\omega^2 A + RB\omega + \frac{A}{C} = E_{\max} \omega \\ -L\omega^2 B - RA\omega + \frac{B}{C} = 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

As reatâncias²⁰ capacitiva e indutiva são representadas, respectivamente, por XC e XL , e são definidas como:

$$XL = 2\pi fL \quad (2.87)$$

$$XC = \frac{1}{2\pi fC} \quad (2.88)$$

²⁰A reatância. Um capacitor e um indutor ligados em corrente alternada exercem uma oposição à passagem da corrente no circuito. Essa oposição é denominada de reatância capacitiva para o capacitor e reatância indutiva, para o indutor[15]

Como $\omega = 2\pi f$, pode-se simplificar as relações acima, sendo:

$$XL = \omega L \quad (2.89)$$

$$XC = \frac{1}{\omega C} \quad (2.90)$$

Como o circuito em questão é do tipo RLC, tem-se que a reatância do circuito série é definida por:

$$S = \omega L + \frac{1}{\omega C} \quad (2.91)$$

Sendo assim, dividindo o sistema por ωA tem-se:

$$\begin{cases} -L\omega A + RB + \frac{A}{C\omega} = E_{max} \\ -L\omega B - RA + \frac{B}{C\omega} = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

Reorganizando o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} -A \left[L\omega + \frac{1}{C\omega} \right] + RB = E_{max} \\ -B \left[L\omega + \frac{1}{C\omega} \right] - RA = 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

Substituindo a relação da Equação 2.91 no sistema 2.93, tem-se:

$$\begin{cases} -SA + RB = E_{max} \\ -RA - SB = 0 \end{cases} \quad (2.94)$$

Multiplicando a primeira equação por S e a segunda equação por R para retirar a incógnita B da equação e encontrar A , tem-se:

$$\begin{cases} -S^2 A + SRB = E_{max} S \\ -R^2 A - SRB = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

Somando agora as equações do sistema, obtém-se o seguinte resultado:

$$-(S^2 + R^2)A = E_{max}S \quad (2.96)$$

Isolando o termo A , obtém-se:

$$A = \frac{-E_{max}S}{S^2 + R^2} \quad (2.97)$$

Para encontrar B , deve-se multiplicar agora a primeira equação do sistema 2.94 por R e a segunda equação por $-S$, resultando assim em:

$$\begin{cases} -SAR + R^2B = E_{max}R \\ SAR + S^2B = 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

Assim como anteriormente, somando as equações do sistema acima, obtém-se o seguinte resultado:

$$(S^2 + R^2)B = E_{max}R \quad (2.99)$$

Isolando o termo B na Equação 2.99 tem-se:

$$B = \frac{E_{max}R}{S^2 + R^2} \quad (2.100)$$

Tendo em mãos os valores de A e B , é possível representar de uma maneira diferente a equação 2.79, escrevendo-a em termos da amplitude I_0 e fase[18]. Para isso, utiliza-se a se-

guinte relação:

$$A\cos(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\omega t + \alpha \pm \delta) \quad (2.101)$$

Em que:

$$tg(\delta) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = \pm \frac{A}{B} \quad (2.102)$$

Substituindo A e B que foram encontradas nas equações 2.97 e 2.100 respectivamente e utilizando a relação de conservar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda, tem-se:

$$tg(\delta) = \frac{A}{B} = \frac{-E_{max}S}{S^2 + R^2} \cdot \frac{S^2 + R^2}{E_{max}R} \quad (2.103)$$

$$tg(\delta) = \frac{-S}{R} \quad (2.104)$$

Para encontrar δ utiliza-se a relação de $Arctg(\delta)$:

$$\delta = tg^{-1} \left(\frac{-S}{R} \right) \quad (2.105)$$

Sendo $I_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$, a corrente I_p pode ser escrita como:

$$I_p = I_0\sin(\omega t + \alpha \pm \delta) \quad (2.106)$$

A corrente I_0 pode ser representada pela seguinte relação:

$$I_0 = \frac{V}{Z} \quad (2.107)$$

Em que V é a tensão e Z é a impedância²¹ do sistema e é representada em números complexos. Em coordenadas complexas, a impedância é representada por:

$$Z = R + jS \quad (2.108)$$

E em coordenadas polares²² é representada por:

$$Z = |Z| \angle \theta^\circ$$

Sendo assim, considerando a relação $Z = \sqrt{R^2 + S^2}$ e substituindo na Equação 2.107 tem-se:

$$I_0 = \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + S^2}} \quad (2.109)$$

Logo, é possível substituir a relação acima na equação 2.106, resultando assim em:

$$I_p = \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + S^2}} \text{sen}(\omega t + \alpha \pm \delta) \quad (2.110)$$

Substituindo na equação acima o valor de δ , encontrado na Equação 2.105, obtém-se:

$$I_p = \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + S^2}} \sin \left(\omega t + \alpha + \tan^{-1} \left(\frac{-S}{R} \right) \right) \quad (2.111)$$

²¹A impedância representa uma grandeza complexa que exerce oposição à passagem de corrente em um circuito de corrente alternada. Essa grandeza complexa é composta pela parte resistiva e a parte reativa do circuito RLC[15].

²²Coordenadas polares são um sistema de coordenadas onde cada ponto em um plano é determinado por um ângulo e uma distância em relação a um ponto fixo conhecido como polo[19].

Substituindo agora S , obtém-se:

$$I_p = \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{sen} \left(\omega t + \alpha + \text{tg}^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right) \right) \quad (2.112)$$

Portanto, em termos de amplitude e fase, a equação 2.112 apresenta a solução particular do sistema de segunda ordem do circuito RLC.

2.4.2 Solução Homogênea

Da Equação 2.78 demonstrada anteriormente, pode-se obter a solução homogênea da equação de segunda ordem. Sendo assim, é possível encontrar soluções para a parte homogênea da equação²³.

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (2.113)$$

Supondo uma solução para esta equação, do tipo exponencial, para ser substituído posteriormente na equação 2.113, tem-se:

$$i_h(t) = C_1 e^{at} \quad (2.114)$$

Derivando a Equação 2.114, obtém-se:

$$i_h'(t) = C_1 a e^{at} \quad (2.115)$$

Derivando agora a Equação 2.115, obtém-se:

$$i_h''(t) = C_1 a^2 e^{at} \quad (2.116)$$

²³parte na qual todas as funções não homogêneas são definidas como zero[16].

Substituindo as Equações 2.114, 2.115, 2.116 em 2.113, obtém-se:

$$C_1 a^2 e^{at} + \frac{R}{L} C_1 a e^{at} + \frac{1}{LC} C_1 e^{at} = 0 \quad (2.117)$$

Colocando a constante C_1 juntamente com a exponencial em evidência, obtém-se:

$$C_1 e^{at} \left[a^2 + \frac{R}{L} a + \frac{1}{LC} \right] = 0 \quad (2.118)$$

As maneiras de igualar a equação a zero são que a constante C_1 seja igual a 0 ou encontrar o valor de A que zere a equação característica²⁴, logo, tem-se:

$$a^2 + \frac{R}{L} a + \frac{1}{LC} = 0 \quad (2.119)$$

Utilizando Bhaskara²⁵ para solução da equação 2.119, tem-se:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.120)$$

Em que $A=1$, $b = \frac{R}{L}$ e $c = \frac{1}{LC}$, substituindo esses valores na equação 2.120, tem-se:

$$a = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \quad (2.121)$$

²⁴A Equação característica de uma Equação diferencial ordinária de segunda ordem é uma Equação polinomial derivada da EDO que determina as soluções da Equação diferencial[16].

²⁵A fórmula de Bhaskara é uma solução para a Equação quadrática geral.

Simplificando:

$$a = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (2.122)$$

Portanto, a depender dos parâmetros dos circuitos, é possível ter quatro tipos de sistema: sub-amortecido, criticamente amortecido, superamortecido e não amortecido[20]. Para mais detalhes de como encontrar os tipos de sistemas matematicamente e análise de polos, ver Anexo A.3. A análise de um sistema de segunda ordem geral é simplificada por:

$$a = -\alpha \pm \omega d \quad (2.123)$$

O termo α da Equação 2.123 é definido como coeficiente de amortecimento do sistema²⁶. Portanto, como citado anteriormente o coeficiente de amortecimento sempre está presente no circuito RLC, caso não esteja presente o sistema oscilaria permanentemente. Para o circuito RLC o coeficiente de amortecimento é definido através da Equação 2.122 como sendo:

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \quad (2.124)$$

Da Equação 2.123 tem-se também o termo ωd , que é definido como[20]:

$$\omega d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \quad (2.125)$$

é definida como a frequência natural **amortecida** do sistema, que indica a frequência em que o sistema irá oscilar. O termo ω_0 da Equação 2.125 é definido como frequência natural não amortecida do circuito. A frequência natural é a frequência na qual a energia oscila entre o campo elétrico armazenado no capacitor e o campo magnético armazenado no indutor, sem

²⁶Razão entre a frequência de decaimento exponencial da envoltória e a frequência natural.[20]

perdas de energia devido a resistência[21]. A frequência natural do circuito RLC é descrita por:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.126)$$

Um sistema de segunda ordem apenas com partes complexas em sua solução, ou seja, sem α é um sistema do tipo não amortecido. Os polos de um sistema não amortecido se situam em cima do eixo complexo²⁷, fazendo assim com que o sistema oscile permanentemente[20]. Para que isso ocorra em um circuito RLC é necessário que a resistência esteja em curto circuito, o que não é o caso. Portanto, para as análises adiante o sistema do tipo não amortecido será desconsiderado.

2.5 Frequência de Ressonância

A ressonância é uma condição em um circuito RLC no qual as reatâncias capacitiva e indutiva são iguais em módulo, resultando portanto, em uma impedância puramente resistiva[15]. Como a reatância depende dos valores da Capacitância e da Indutância isso se torna um meio de fazer um circuito RLC ressonante. Matematicamente tem-se:

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (2.127)$$

Com isso, a impedância do circuito é minimizada, sendo ela apenas a parte resistiva do circuito, como demonstrado na equação 2.128.

$$Z = R + j0 = R \quad (2.128)$$

Quando ocorre essa minimização da impedância outro efeito acaba surgindo que é o au-

²⁷Da mesma forma que a cada número real pode-se associar um único ponto real, a cada elemento $a + jb$ do conjunto dos números complexos corresponde um único ponto $P(a, b)$ do plano complexo e vice-versa. A parte real de z é representada no eixo real, e a parte imaginária, no eixo imaginário[22].

mento da corrente resultante. Matematicamente tem-se:

$$I = \frac{V}{Z} \quad (2.129)$$

indicando que se a tensão V permanecer constante, a variação da corrente será determinada pelo valor da impedância. Quanto menor a impedância, maior será a corrente, enquanto uma maior impedância resultará em uma corrente menor.

Como a condição de ressonância surge quando as reatâncias indutiva e capacitiva são equivalentes, é viável determinar a frequência de ressonância igualando as duas equações de XL e XC . Para a frequência de $60Hz$, as reatâncias indutiva e capacitiva são dadas pelas Equações 2.89 e 2.90. Igualando ambas, tem-se:

$$XL = XC = 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} \quad (2.130)$$

Isolando o termo f da frequência tem-se:

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \quad (2.131)$$

Elevando ambos lados à $1/2$ é possível encontrar f :

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.132)$$

Em termos de frequência angular tem-se que $\omega = 2\pi f$, logo:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.133)$$

Note que matematicamente a Equação da frequência de ressonância é idêntica à Equação da frequência natural de oscilação do circuito, obtida na Equação 2.126. Desta forma é preciso definir que a frequência de ressonância é referente à resposta do sistema sob excitação externa, ou seja, uma fonte de alimentação. Desta forma pode-se definir que quando a frequência de ressonância for igual a frequência da fonte de alimentação do circuito, o mesmo se encontrará em estado de ressonância.

Outra característica importante de circuitos ressonantes é a respeito do ângulo de defasagem. Por se tratar de uma impedância puramente resistiva, a tensão e a corrente estão em fase, sendo assim não ocorre defasagem em um circuito que esteja em ressonância. Matematicamente é exemplificado pela Equação 2.134:

$$\delta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{S}{R} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{XL - XC}{R} \right) = \operatorname{tg}^{-1} (0) = 0 \quad (2.134)$$

Por fim, outra característica é importante é que em um circuito RLC, a reatância capacitiva diminui com o aumento da frequência, enquanto a reatância indutiva aumenta. Isto pode ser comprovado analisando as equações 2.89 e 2.90, sendo que quanto maior for ω menor será o valor de XC . Em contramão disso, quanto maior ω maior será XL . Quando a frequência da fonte é menor do que a frequência de ressonância, a reatância capacitiva é maior e o circuito se comporta predominantemente como um capacitor. Quando a frequência é maior, a reatância indutiva é maior e o circuito se comporta predominantemente como um indutor. Portanto, abaixo da frequência de ressonância, o comportamento é predominantemente capacitivo, e acima dela, é predominantemente indutivo[15].

Capítulo 3 Metodologia

O objetivo deste trabalho, conforme dito inicialmente, era reproduzir as simulações realizadas pela Professora Doutora Maria Leonor durante a disciplina de pós graduação e nesse trabalho apenas o *Script* do MATLAB foi desenvolvido. Neste presente trabalho de conclusão de curso além do *Script* do MATLAB foi desenvolvido o circuito equivalente utilizando o *Simulink*. Portanto, neste capítulo serão apresentados os desenvolvimentos do *Script* e no *Simulink*.

As metodologias utilizadas foram o MATLAB/*Simulink* e o ATP. Inicialmente, os resultados obtidos pelo MATLAB/*Script* foram adquiridos por meio de códigos que utilizaram equações matemáticas específicas para cada método. Após isso, foram realizados circuitos equivalentes no MATLAB/*Simulink*, esse resultados foram medidos e enviados para o MATLAB/*Script* para a confecção dos gráficos. Analogamente ao MATLAB/*Simulink*, no ATP também foram realizados circuitos equivalentes, os valores obtidos da simulação foram encaminhados para o MATLAB/*Script* para a confecção dos gráficos.

A utilização do MATLAB/*Script* para a confecção dos gráficos teve o objetivo de garantir uma padronização dos gráficos, garantindo a mesmo tamanho grossura das curvas, as mesmas cores e mesmos tamanhos de letras.

3.1 MATLAB/*Script*

O MATLAB, desenvolvido pela MathWorks, é uma linguagem de programação e um ambiente interativo amplamente utilizado para computação numérica, análise de dados, desenvolvimento de algoritmos e visualização. Sua poderosa combinação de ferramentas matemáticas e gráficas o torna uma escolha preferida em diversas disciplinas de engenharia, ciência e economia.

Logo, desenvolveu-se os códigos utilizando o *Script* do MATLAB para obtenção de gráficos dos circuitos apresentados. Os códigos em sua íntegra serão apresentados em anexo conforme listagem a seguir:

- Chaveamento RL - Gráficos das Correntes - Regra Analítica: Anexo A.1.1

- Chaveamento RL - Gráficos das Correntes - Regra Trapezoidal: Anexo A.1.2
- Chaveamento RLC - Gráficos de Frequência de Oscilação Natural e Amortecimento: Anexo A.1.3
- Chaveamento RLC - Gráficos de Módulo e Fase da Impedância: Anexo A.1.4
- Plotagem de Gráficos do *Simulink*: Anexo A.1.5

3.2 MATLAB/Simulink

O *Simulink* é uma ferramenta de modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos desenvolvida pela MathWorks. Integrado ao ambiente MATLAB, o *Simulink* permite a criação de modelos através de diagramas de blocos, oferecendo uma interface gráfica intuitiva para a construção e a simulação de sistemas complexos. O *Simulink* facilita a modelagem de sistemas lineares e não-lineares, bem como sistemas de tempo contínuo e discreto.

3.2.1 Chaveamento RL

O sistema foi modelado com base nos parâmetros do problema apresentado, contendo uma fonte de tensão em série com um circuito RL. Para simular o curto-circuito, incorporou-se um dispositivo de interrupção ("chave") projetado para provocar um curto no sistema. Os demais dispositivos foram empregados com a finalidade de medir as correntes no sistema.

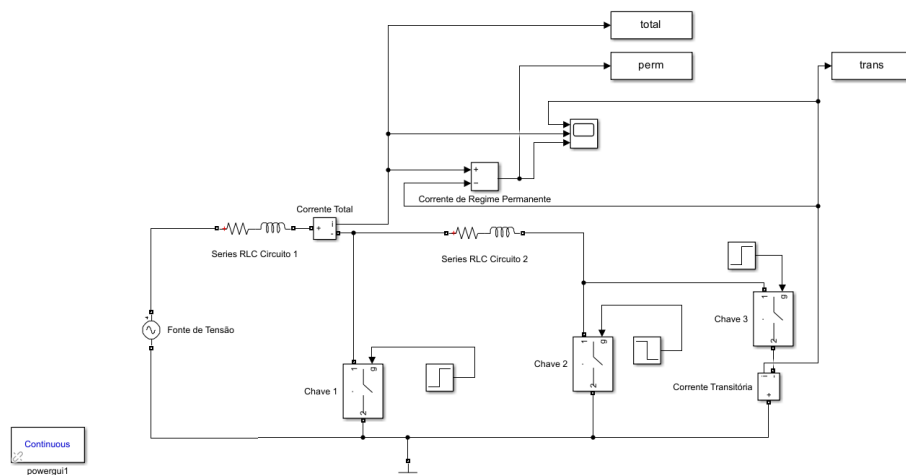


Figura 3.1: Modelagem Circuito RL no Simulink.

3.2.2 Chaveamento RLC - Instante Zero

O modelo utilizado para a simulação RLC no *Simulink*, foi realizado conforme a Figura 3.2.

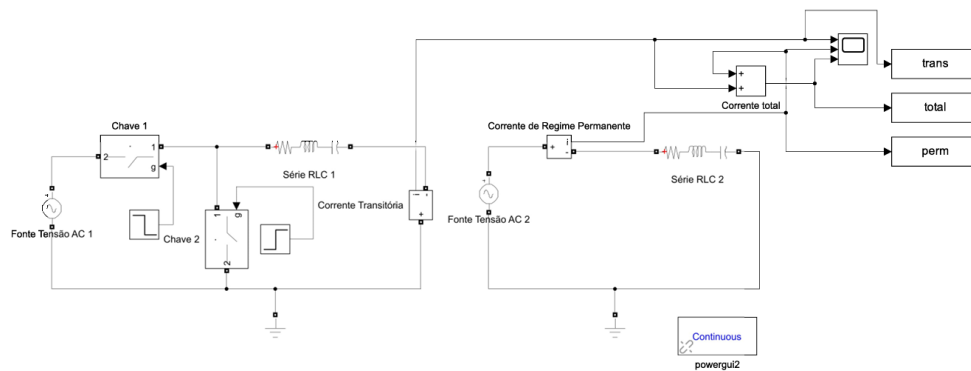


Figura 3.2: Simulação realizada no Simulink.

Na Figura 3.2 são apresentados dois circuitos distintos. O circuito à esquerda foi desenvolvido para calcular a corrente transiente enquanto o circuito à direita foi empregado para obter a corrente em regime permanente. A chave que permite a passagem de corrente é fechada no instante zero, o que levou à utilização de um circuito capaz de medir a corrente transiente desde esse momento inicial. Para facilitar a compreensão os dois circuitos da Figura 3.2 foram divididos em duas partes, sendo o circuito da direita representado na Figura 3.3.

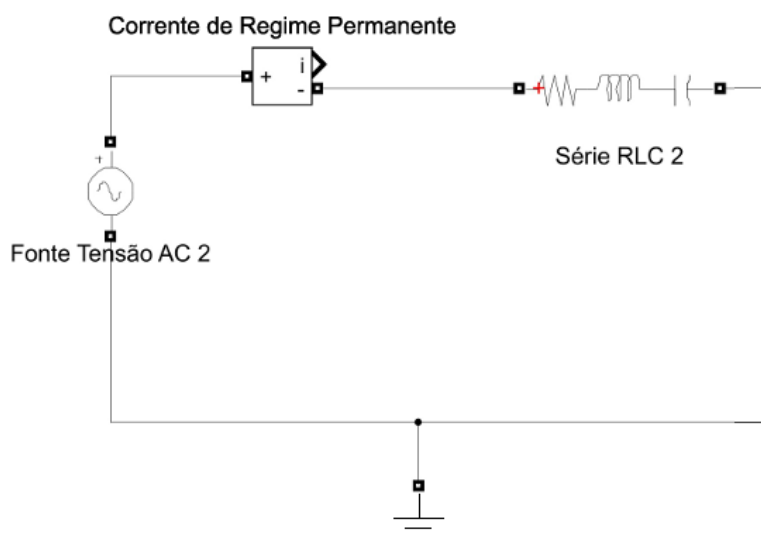


Figura 3.3: Circuito RLC - Medição da Corrente Permanente

A Figura 3.3 representa o circuito da direita da Figura 3.2, que foi realizado para a medição da corrente de regime permanente. Esse circuito não possui blocos para interrupções ao longo da simulação, ele contém apenas uma fonte, uma impedância RLC e um amperímetro para medir a corrente de regime permanente. O circuito da esquerda da Figura 3.2 é apresentado na Figura 3.4.

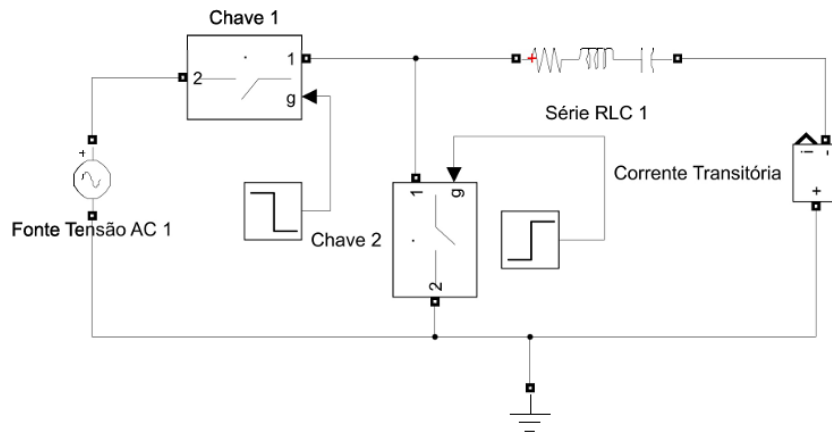


Figura 3.4: Circuito RLC - Medição da Corrente Transitória

Quanto ao circuito da Figura 3.4, empregado na análise da corrente transitória, foi necessário criar um circuito em que a fonte ficasse totalmente separada do circuito RLC no momento do chaveamento. Para contornar a impossibilidade de realizar um curto-circuito após a fonte no Simulink, optou-se pelo uso de duas chaves. A chave 1 foi empregada para interromper o circuito contendo a fonte, bloqueando a passagem da corrente, enquanto a chave 2 foi acionada para estabelecer um curto-circuito com o terra. Essa abordagem possibilitou a implementação de um circuito que identificava a tensão da fonte de tensão da fonte e simulava a corrente transitória gerada no circuito RLC.

No que diz respeito aos degraus utilizados, estes desempenham um papel crucial no fechamento e abertura das chaves. Ao definir o período em que o degrau transita de 0 para 1 ou de 1 para 0, determina-se o tempo durante o qual a chave pode realizar a transição, por exemplo, de 0 (aberta) para 1 (fechada). Para calcular a corrente transitória de forma que seja positiva, foi utilizado um amperímetro posicionado de maneira invertida em relação à fonte.

Capítulo 4 Resultados

Conforme explicitado nas seções anteriores, realizaram-se as simulações dos circuitos demonstrados tanto no Script quanto no Simulink. Em suma, esta seção tem como objetivo a apresentação dos resultados e análises gráficas das simulações realizadas.

4.1 Circuito RL Série

Conforme os parâmetros do circuito a frequência da corrente senoidal é $60Hz$, dessa forma o período da onda será descrito por:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 16,7ms \quad (4.1)$$

Considerando que a forma da onda é regular até o momento do curto-circuito, a informação sobre o período da onda é crucial para uma análise mais aprofundada do gráfico. Isso se deve à capacidade de localizar o instante desejado em ciclos menores com maior precisão. Utilizando a Equação 2.54, notou-se que a componente transitória atingiu sua amplitude mínima no seguinte cenário:

$$\text{sen} \left[\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] = 0 \quad (4.2)$$

Ou seja, o valor do ângulo que satisfaz a Equação 4.2 é:

$$\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) = 0^\circ \quad (4.3)$$

Através da aplicação dessa equação, foi determinado que $t_{o_o} = 144ms$. Conforme mencionado anteriormente, é viável encontrar o valor equivalente em ciclos anteriores para facilitar na

análise gráfica da solução.

O valor em questão foi encontrado durante o décimo ciclo, considerando que cada ciclo completo dura 16,7ms, logo, o décimo ciclo é concluído em $t = 167\text{ms}$. Desta forma, para representar esse momento em um ciclo menor, optou-se pelo quinto ciclo, resultando em um instante equivalente de $t_{o_e} = 60,71575383\text{ms}$.

$$t_{o_e} = t_{o_o} - nT \quad (4.4)$$

Em que:

- t_{o_e} - t_{o_e} equivalente no ciclo n ;
- N - n -ésimo ciclo;
- t_{o_o} - t_{o_o} original;

Utilizando o valor do instante do chaveamento para uma solução mínima para a Equação Homogênea, foram realizados os cálculos e análises da Subseção 4.1.1.

4.1.1 Solução Matemática da Equação Homogênea Mínima

Nesta subseção, foi utilizado o valor obtido através do equacionamento matemático para obter os resultados. Os valores das correntes obtidas em um tempo de simulação de 160ms foram apresentados na Figura 4.1.

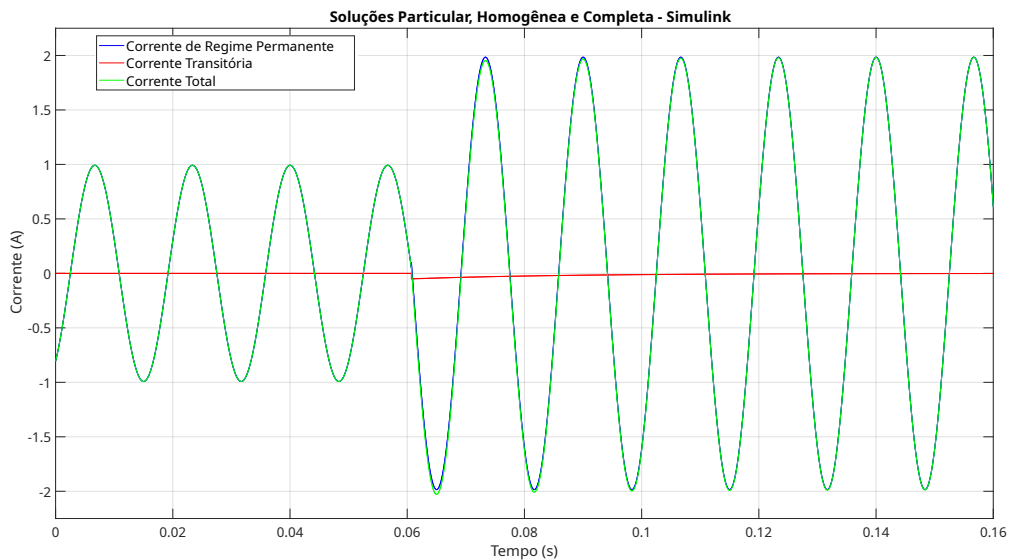


Figura 4.1: Solução matemática da Equação homogênea mínima - Simulink

A Figura 4.1 apresenta os valores da simulação realizada no Simulink, na qual o curto-circuito ocorreu no instante de 60,71575383ms. De modo geral, é possível analisar que, tanto a corrente total (curva verde) quanto a corrente de regime permanente (curva azul), iniciaram com picos de 1A e passaram a ter picos de 2A após o curto-circuito. Para a corrente de regime permanente, isso ocorreu devido à mudança na configuração do circuito, na qual a corrente, que antes percorria dois indutores e resistores iguais, passou a percorrer apenas um indutor e um resistor.

Ao analisar a corrente transitória (curva vermelha), verificou-se que no momento do curto-circuito, seu pico apresentou um valor pequeno, e isso gerou pouca alteração na corrente de regime total (curva verde). Nota-se que, em menos de quatro ciclos do instante do curto-circuito, a corrente de regime total se iguala à corrente de regime permanente, indicando a estabilização do sistema após dois ciclos da ocorrência do curto-circuito.

Para observar melhor os valores obtidos no exato instante do chaveamento, foi realizado um ajuste nos limites do gráfico, conforme apresentado na Figura 4.8.

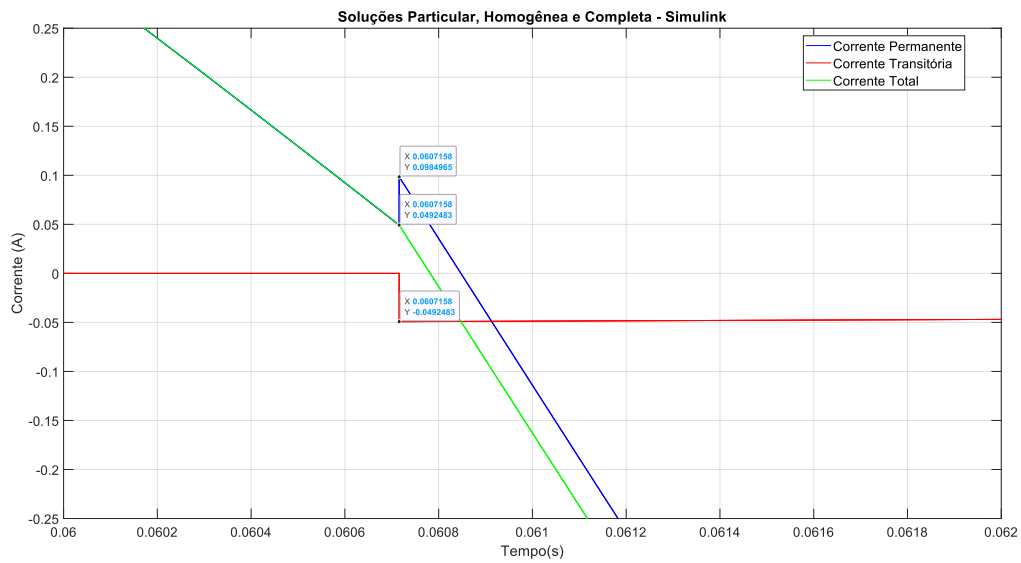


Figura 4.2: Zoom na solução matemática da Equação homogênea mínima - Simulink;

Na Figura 4.2 observou-se que no momento do curto-circuito ocorreu um pequeno pico na corrente em regime permanente (curva azul), em 0,0984965A. A corrente transitória (curva vermelha) decaiu para 0,0492483A e o comportamento da corrente total (curva verde) foi de corrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente, logo, no momento do curto-circuito o valor da amplitude é de 0,0492483A.

De forma comparativa, após a obtenção dos valores obtidos no *Simulink*, foram obtidos valores através do *Script*. Neste primeiro instante, também foi utilizado o valor do instante de chaveamento equacionado, em um tempo de simulação de 160ms, obtendo a Figura 4.3.

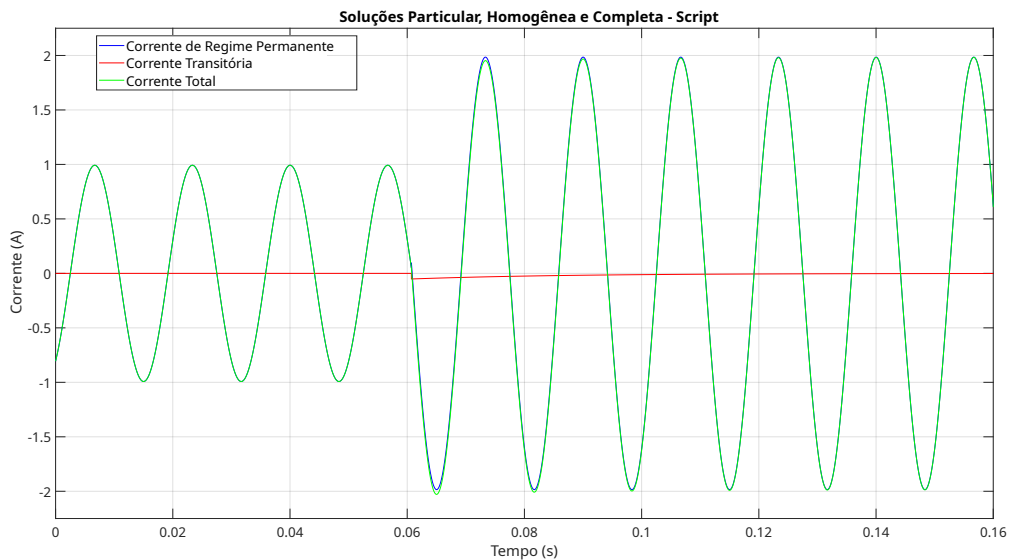


Figura 4.3: Solução matemática da Equação homogênea mínima - Script;

Ao analisar o gráfico, notou-se que a corrente transitória (curva vermelha) apresentou valores reduzidos, resultando em contribuições mínimas para a corrente total (curva verde). O comportamento das correntes no *Script*, utilizando o instante de 60,71575383ms para o curto-circuito, assemelhou-se ao observado no *Simulink* em que a contribuição da solução mínima da corrente transitória, foi pequena e seu impacto foi pouco significativo na corrente total. Nota-se que, a corrente total se iguala à corrente em regime permanente, indicando a estabilização do sistema após dois ciclos da ocorrência do curto-circuito.

Assim, como realizado no *Simulink*, para uma análise mais detalhada, deu-se enfoque no momento em que ocorreu o chaveamento e foram obtidos os valores exatos das correntes, como apresentando na Figura 4.4.

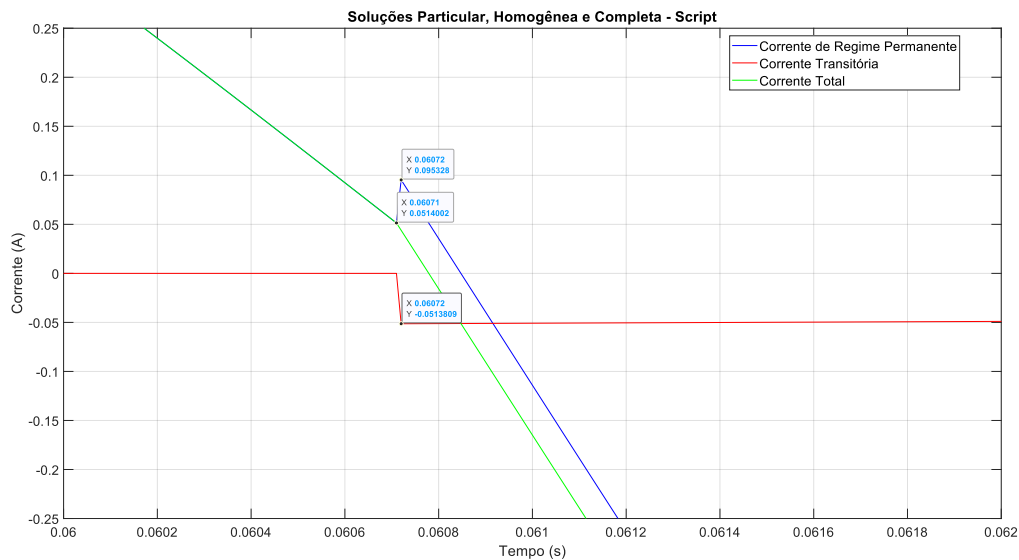


Figura 4.4: Zoom na solução matemática da Equação homogênea mínima - Script;

A 4.4 apresenta um zoom no momento do curto-circuito, mostrando o comportamento das correntes de regime permanente (curva azul), corrente transitória (curva vermelha) e corrente total (curva verde). Nela observou-se que no momento do curto-circuito ocorreu um pico na corrente em regime permanente, em 0,095328A. A corrente transitória decaiu para 0,0513809A e o comportamento da corrente total foi decorrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente, logo, no momento do curto-circuito o valor da amplitude é de 0,05114002A. Em comparação à Figura 4.2 percebe-se que houve um deslocamento no eixo do tempo durante a ocorrência do curto-circuito e percebe-se também uma pequena diferença nos valores do eixo da corrente.

4.1.2 Solução Gráfica da Equação Homogênea Mínima

Nesta subseção foi utilizada o ponto em que a corrente permanente atinge um valor de 0A, para obter a solução gráfica da Equação homogênea mínima. Isso porque, nesse momento, a corrente de regime permanente deve apresentar seu valor mínimo, implicando uma corrente transitória com valores mínimos. Utilizando o cursor nos gráficos obtidos no tópico anterior, identificou-se na Figura 4.3 o instante de 27,51ms.

Dessa forma, foi utilizado o instante gráfico obtido e um tempo de simulação de 160ms, e assim foram encontrados os valores das corrente, conforme a Figura 4.5.

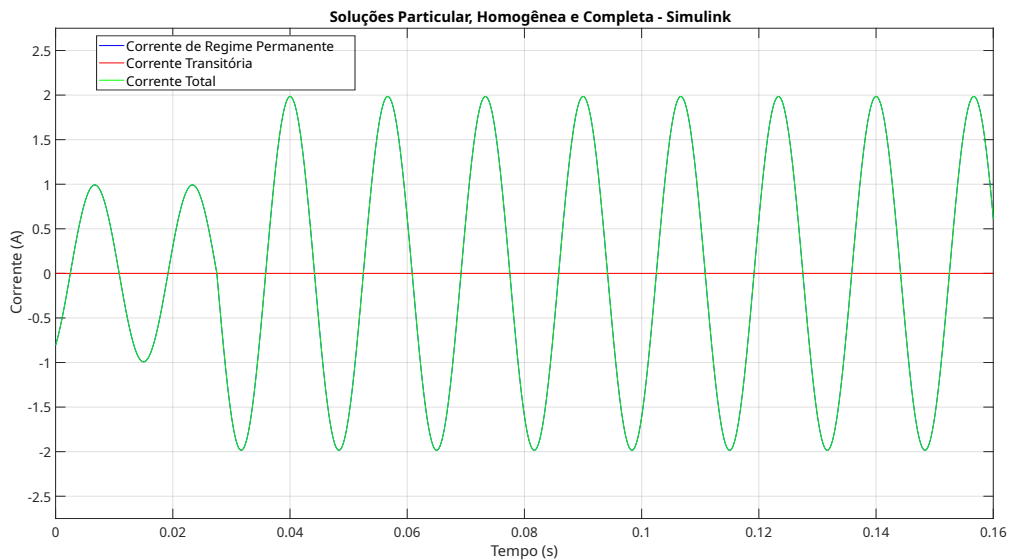


Figura 4.5: Solução gráfica da Equação homogênea mínima - Simulink;

A Figura 4.5 apresenta as correntes de regime permanente (curva azul), corrente transitória (curva vermelha) e corrente total (curva verde), em uma simulação na qual o curto-circuito ocorre no instante 27,51ms. A análise da figura revelou que corrente transitória apresentou um pequeno pico seguido de um decaimento até zero, não causando variações notáveis na corrente total. Além disso, observou-se que a corrente total e a corrente permanente permaneceram quase idênticas durante quase todo o período. Houve apenas uma variação no momento de chaveamento do circuito. Isso pode ser explicado pela baixa amplitude da corrente transitória, que acaba influenciando pouco na corrente total.

Dando enfoque no momento em que ocorreu o chaveamento, é possível observar de forma mais clara os valores e comportamentos das correntes, isso pode ser observado na Figura 4.6.

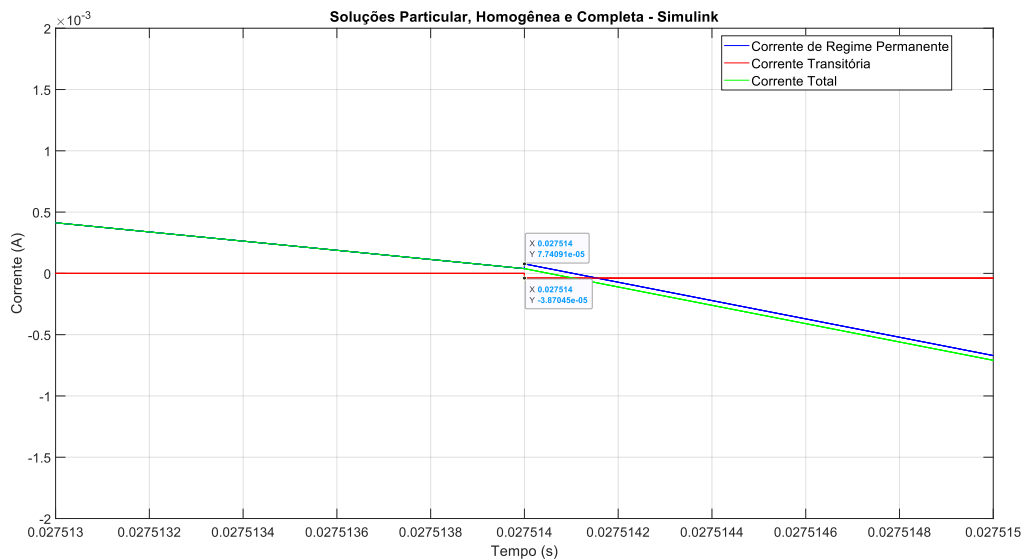


Figura 4.6: Zoom na solução gráfica da Equação homogênea mínima - Simulink;

Na Figura 4.6 observou-se que no momento do curto-circuito ocorreu um pico na corrente em regime permanente (curva azul), em $7,7409^{-05}$ A. A corrente transitória (curva vermelha) decaiu para $3,87045^{-05}$ A e o comportamento da corrente total (curva verde) foi decorrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente. Como citado anteriormente, pode-se observar que após o curto-circuito a corrente de regime permanente passa a se diferir da corrente total com uma diferença de $3,87045^{-05}$ A.

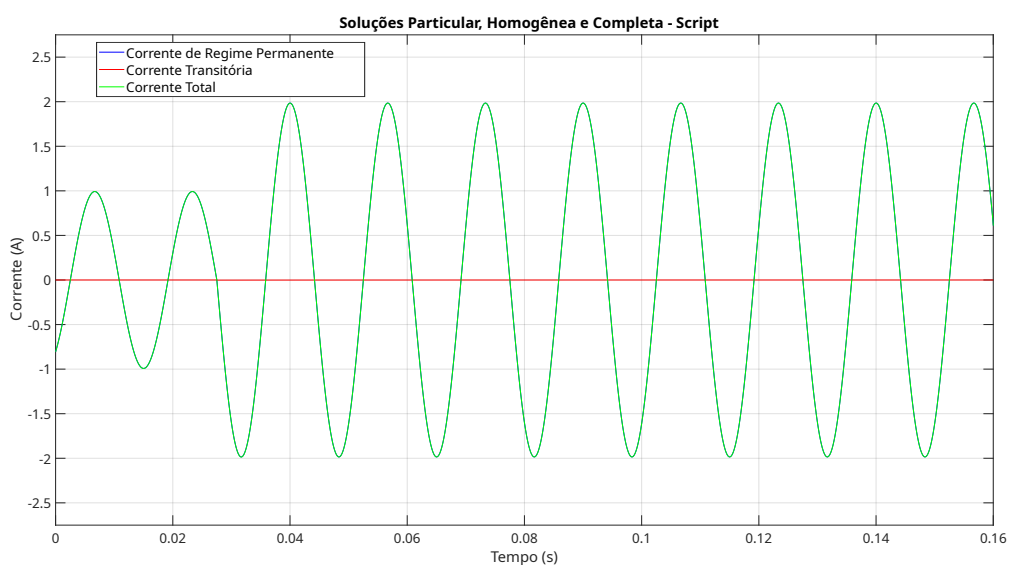


Figura 4.7: Solução gráfica da Equação homogênea mínima - Script;

A Figura 4.7 apresenta as correntes em regime permanente (curva azul), a corrente transitória (curva vermelha) e a corrente total (curva verde), obtidas a partir de uma simulação no *Script* em que o curto-circuito ocorre no instante 27,51ms. Para observar, de forma mais detalhada, os valores das correntes no momento do curto-circuito, foi realizada uma aproximação no momento de chaveamento da figura anterior e foi obtida a Figura 4.8.

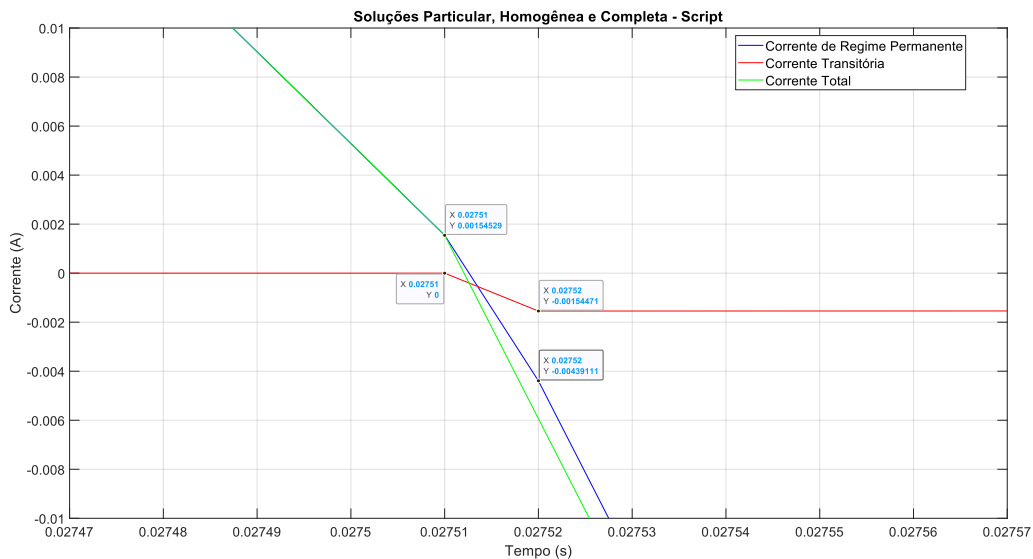


Figura 4.8: Zoom na solução gráfica da Equação homogênea mínima - Script;

Na Figura 4.8 observou-se que no momento do curto-circuito a corrente em regime permanente (curva azul), apresentou o valor negativo de 0,004391111A. A corrente transitória (curva vermelha) decaiu para o valor negativo de 0,00154471A e o comportamento da corrente total (curva verde) foi decorrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente, logo, no momento do curto-circuito o valor da amplitude é de 0,00154525A.

A análise revelou que a abordagem gráfica resulta em uma solução da Equação homogênea mínima menor em comparação com a abordagem matemática. Tanto no *Script* quanto no *Simulink*, ao usar o instante derivado da solução matemática, a corrente gerada, embora pequena, ainda é significativa. No entanto, ao empregar o instante obtido a partir do gráfico, foi possível obter uma solução da Equação homogênea mínima muito pequena, aproximadamente 0A.

Adicionalmente, ao comparar com a solução obtida pelos métodos matemáticos, notou-se uma diferença nos tempos de resposta das soluções. A abordagem gráfica indicou uma estabilização do sistema com uma resposta quase imediata. Em contraste, na análise ma-

temática, o processo de estabilização demorou alguns milissegundos para ocorrer, ou seja, o tempo necessário para que a corrente em regime permanente se igualasse à corrente total foi mais prolongado.

4.1.3 Solução Matemática da Equação Homogênea Máxima

Similarmente ao tópico anterior, a análise da solução homogênea máxima também empregou a Equação 2.54. Observou-se que a componente transitória alcançou sua amplitude máxima na situação subsequente:

$$\text{sen} \left[\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] = 1 \quad (4.5)$$

Ou seja, o valor do ângulo que satisfaz a Equação 4.5 é:

$$\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) = 90^\circ \quad (4.6)$$

Foi identificado um instante de $t_o = 382,78\text{ms}$ no vigésimo terceiro ciclo da onda. Para melhor compreensão e análise em um contexto mais restrito, calculou-se o equivalente desse instante no quinto ciclo, resultando em $t_e = 82,27815018\text{ms}$. Dessa forma, foi realizado a Figura 4.9 que apresenta os valores de corrente no instante de chaveamento calculado anteriormente.

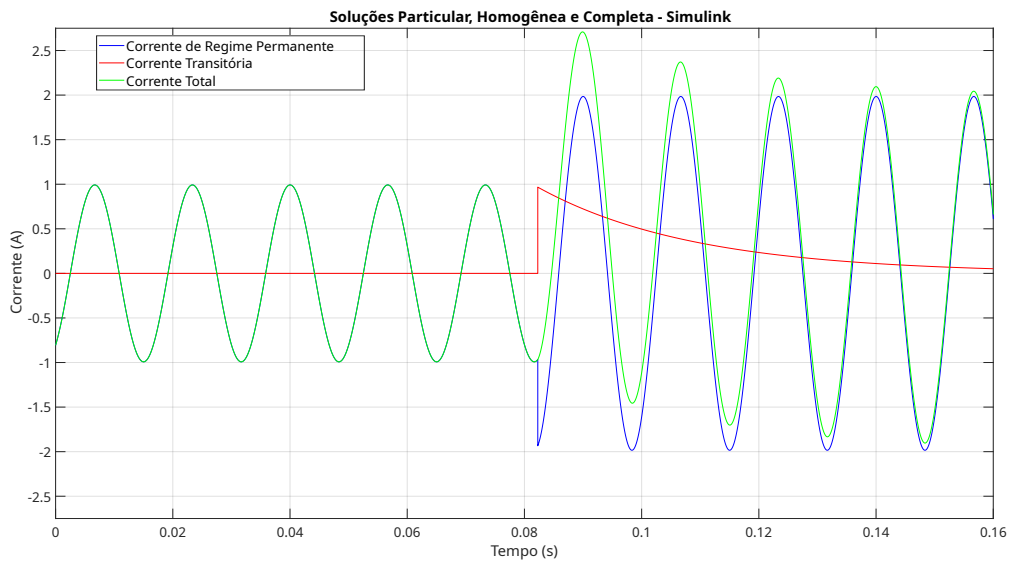


Figura 4.9: Solução matemática da Equação homogênea máxima - Simulink;

Na Figura 4.9, ao ocorrer um curto-circuito, é perceptível um pico da corrente transitória (curva vermelha), de aproximadamente 0,95A. A corrente em regime permanente (curva azul) apresenta um pico negativo de aproximadamente 1,95A, no momento de chaveamento do circuito. A corrente total (curva verde), no momento da ocorrência do curto-circuito, apresenta um pico positivo de aproximadamente 2,70A, se distanciando bastante da corrente em regime permanente. Após alguns ciclos observou-se que a corrente total começa a se acomodar em valores mais próximos da corrente em regime permanente. Este comportamento ocorre porque a corrente transitória decai exponencialmente, diminuindo assim sua contribuição na corrente total.

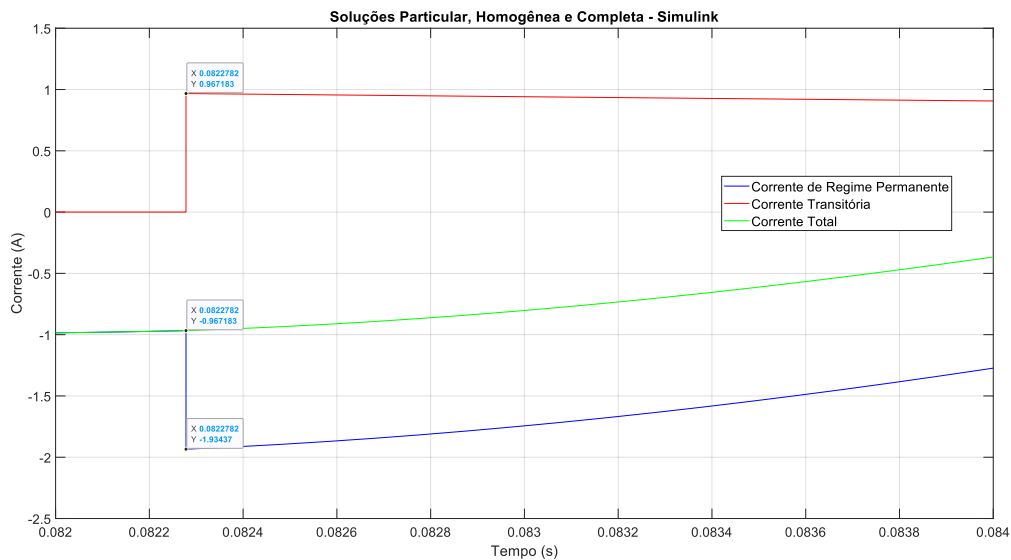


Figura 4.10: Zoom na solução matemática da Equação homogênea máxima - Simulink;

Na Figura 4.10 observou-se que no momento do curto-circuito ocorreu um pico negativo na corrente em regime permanente (curva azul), em 1,93437A. A corrente transitória (curva vermelha) foi para 0,967183A e o comportamento da corrente total (curva verde) foi decorrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente, logo, no momento do curto-circuito o valor da amplitude negativo em 0,967183A.

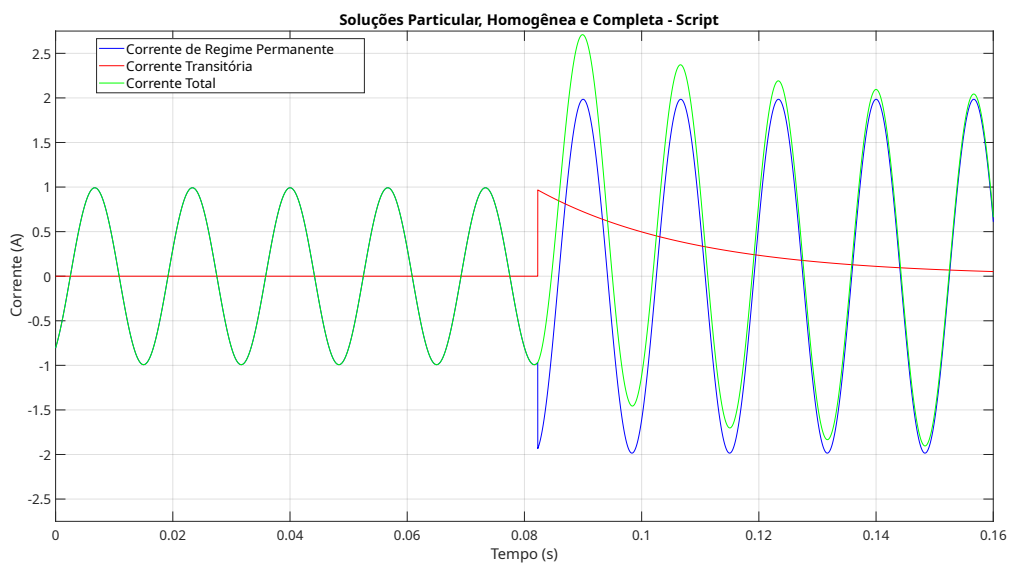


Figura 4.11: Solução matemática da Equação homogênea máxima - Script;

De forma semelhante à simulação realizada no Simulink, as correntes transitória, de re-

gime permanente e total apresentaram comportamentos análogos. Dessa forma, a corrente transitória (curva vermelha) na Figura 4.11 exibiu um pico de amplitude em torno de 0,95A. A corrente total (curva verde), no momento da ocorrência do curto-circuito, apresentou um pico positivo de aproximadamente 2,70A, distanciando-se significativamente da corrente em regime permanente. A corrente em regime permanente (curva azul) apresentou um pico negativo de aproximadamente 1,95A no momento do chaveamento do circuito. Notou-se, portanto, um comportamento semelhante ao utilizar os métodos de análise pelo *Simulink* e pelo *Script*.

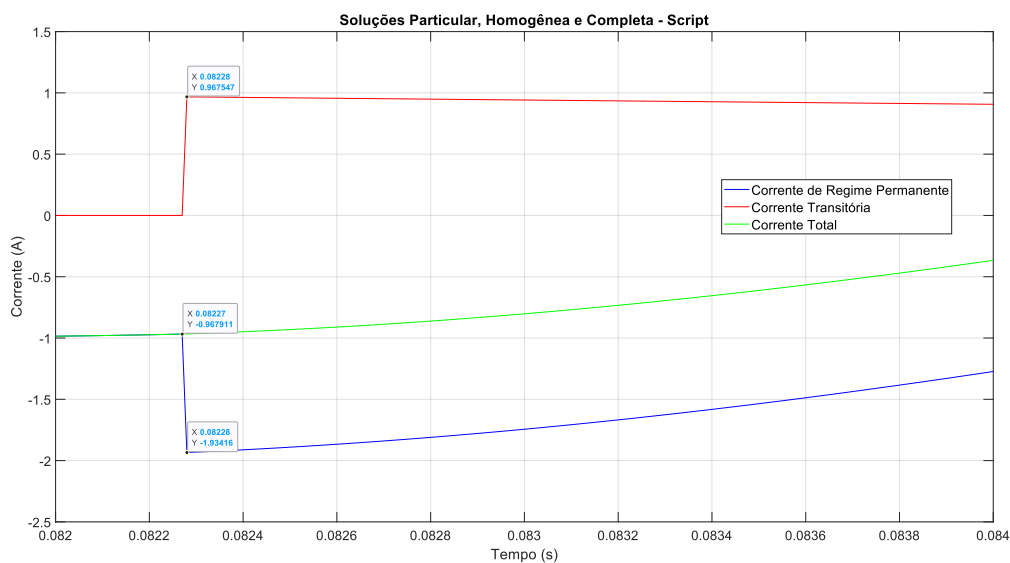


Figura 4.12: Zoom na solução matemática da Equação homogênea máxima - Script;

Na Figura 4.12 observou-se que no momento do curto-circuito ocorreu um pico negativo na corrente em regime permanente (curva azul), em 1,93416A. A corrente transitória (curva vermelha) foi para 0,967547A e o comportamento da corrente total (curva verde) foi decorrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente, logo, no momento do curto-circuito o valor da amplitude negativo em 0,967911A. Em comparação à Figura 4.10 percebe-se que os valores foram bem parecidos e as diferenças ficaram nos algarismos menos significativos¹. Isso ocorre pelo fato de serem processos diferentes de simulação.

¹Os dígitos obtidos como o resultado de uma medida chamam-se algarismos significativos, e nesta medida os algarismos significativos aqueles que temos plena certeza, mais um duvidoso. A importância dos algarismos significativos, é que eles indicam a precisão de uma medida. A medida mais precisa é aquela que contém mais algarismos significativos[23].

4.1.4 Solução Gráfica da Equação Homogênea Máxima

Ao examinar o gráfico, observou-se que a corrente permanente atinge a amplitude máxima em $t_0 = 40\text{ms}$. Dessa maneira, esse instante foi empregado para calcular a solução máxima para a componente homogênea.

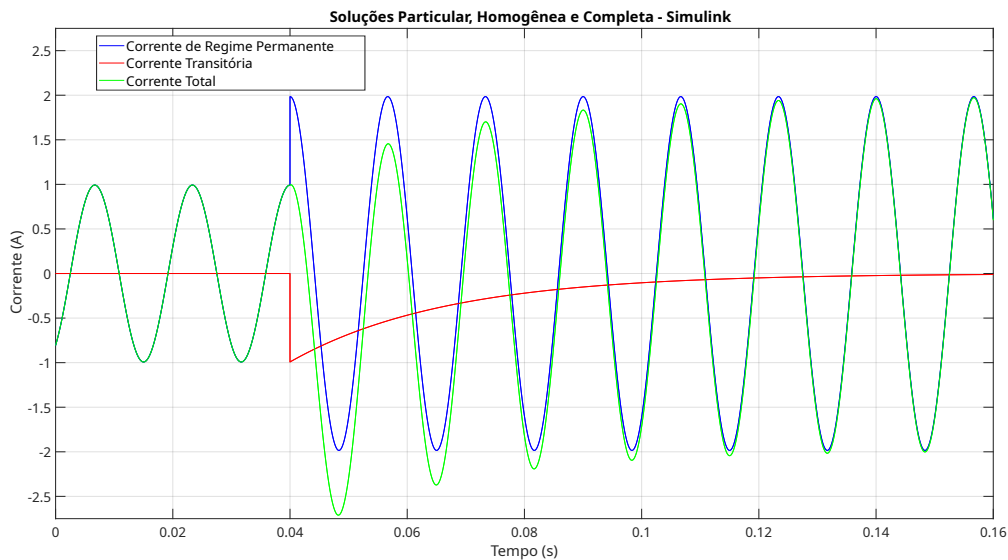


Figura 4.13: Solução gráfica da Equação homogênea máxima - Simulink;

Utilizando a solução gráfica, foi possível obter uma amplitude da corrente transitória igual ao pico da corrente em regime permanente. É possível identificar no instante considerado a corrente em regime permanente (curva azul) atingiu seu pico e como o curto-circuito aconteceu no mesmo instante, a corrente transitória (curva vermelha) atingiu sua maior amplitude, alcançando o mesmo valor que a corrente permanente. A corrente total (curva verde) apresenta um pico inicial negativo, pois, no momento em que ocorre o curto-circuito, a onda senoidal está decrescendo. À medida que mais ciclos de ondas se completam, a corrente total tende a se estabilizar com a corrente em regime permanente devido à diminuição da corrente transitória.

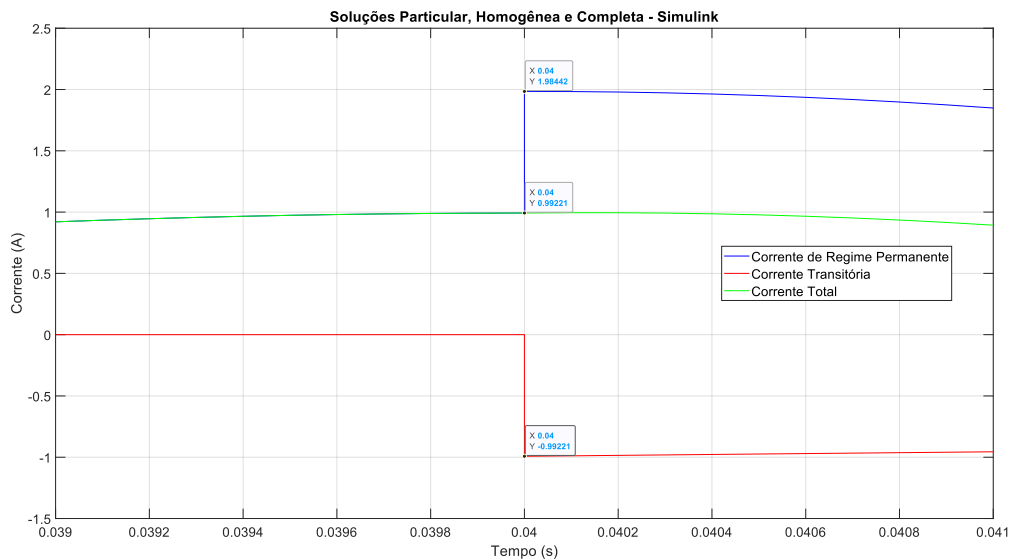


Figura 4.14: Zoom na solução gráfica da Equação homogênea máxima - Simulink;

Na Figura 4.14 observou-se que no momento do curto-circuito ocorreu um pico na corrente em regime permanente (curva azul), em 1,98442A. A corrente transitória (curva vermelha) decaiu para 0,99221A e o comportamento da corrente total (curva verde) foi decorrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente, logo, no momento do curto-circuito o valor da amplitude ocorreu em 0,99221A.

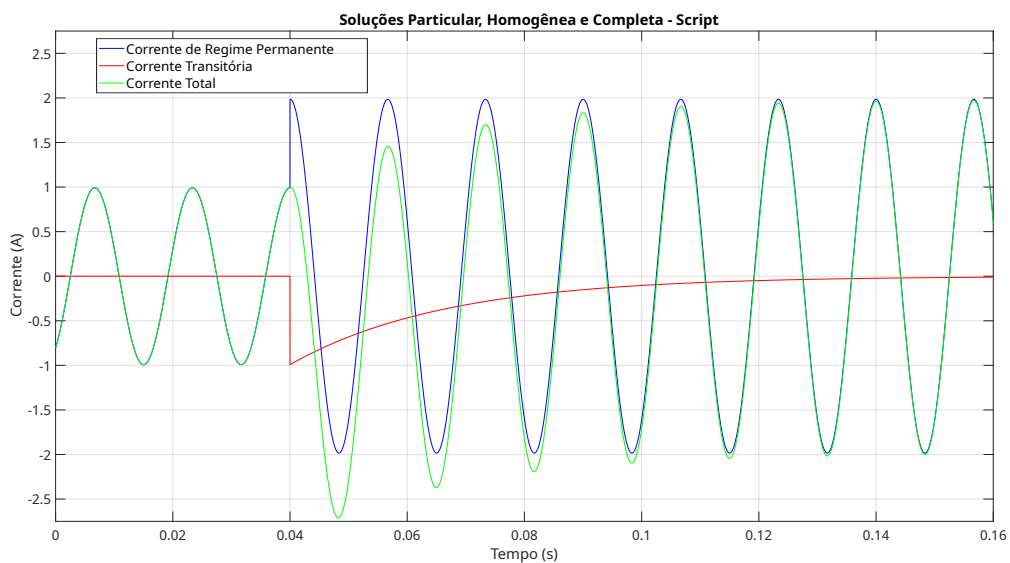


Figura 4.15: Solução gráfica da Equação homogênea máxima - Script;

Assim como a simulação no *Simulink*, na simulação com o *Script* a corrente transitória e a

corrente em regime permanente atingem valores de cerca de 1A no momento da ocorrência do curto-circuito. Em comparação ao instante obtido pela solução matemática foi possível analisar um aumento dos picos negativos da corrente total e uma diminuição dos picos positivos.

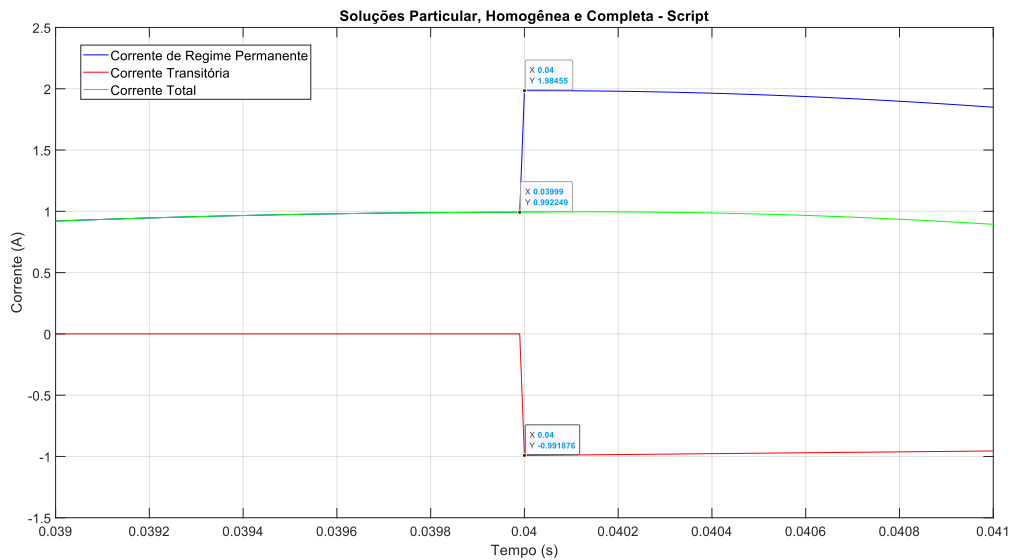


Figura 4.16: Zoom na solução gráfica da Equação homogênea máxima - Script;

Na Figura 4.16 observou-se que no momento do curto-circuito ocorreu um pico na corrente em regime permanente (curva azul), em 1,98455A. A corrente transitória (curva vermelha) decaiu para 0,991876A e o comportamento da corrente total (curva verde) foi decorrente da somatória da corrente transitória com a corrente em regime permanente, logo, no momento do curto-circuito o valor da amplitude ocorreu em 0,992249A. Em comparação à Figura 4.14 percebe-se que os valores foram bem parecidos e as diferenças ficaram nos algarismos pouco significativos. Isso ocorre pelo fato de serem processos diferentes de simulação. Realizou-se também algumas simulações extras para o circuito RL série, utilizando agora o software do ATPDraw, para mais detalhes, ver o anexo A.4.

4.2 Circuito RL Série - Método Discreto

Com a técnica de discretização de elementos aplicada na Seção 2.3, é possível implementar os gráficos das correntes correspondentes. Para isso, considera-se os instantes de chaveamento t_0 que foram utilizados na Seção 4.1.

4.2.1 Solução da Equação Homogênea Mínima

Neste subtópico será analisado o comportamento do método Trapezoidal no circuito RL série e os resultados serão comparados com as soluções analíticas obtidas. Conforme na Seção 4.1, a solução da Equação homogênea mínima pode ser obtida tanto do método matemática como através do método gráfico.

Como o objetivo principal dessa simulação é fazer o uso da regra do trapézio para facilitar o equacionamento matemático, nessa seção serão utilizados os resultados gráficos obtidos na Seção 4.1. Desta forma, foi considerado que o momento no qual ocorre o curto-circuito é de 27,51ms. Assim, foram obtidos os seguintes gráficos para a parte 1 e 2 do circuito:

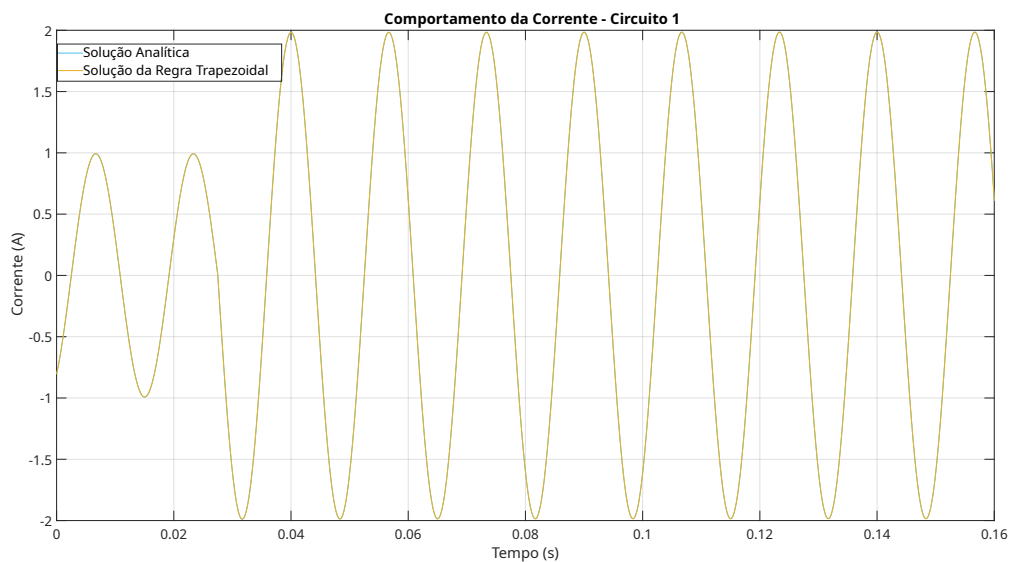


Figura 4.17: Circuito Parte 1

Na Figura 4.17 é possível visualizar uma interferência mínima da corrente transitória (curva laranja) na corrente analítica (curva azul). Isso está relacionado principalmente ao fato de que no momento que ocorreu o curto, a corrente em regime permanente apresentou um valor cujo módulo se aproximava-se de 0A, gerando assim um pico de corrente transitória baixo.

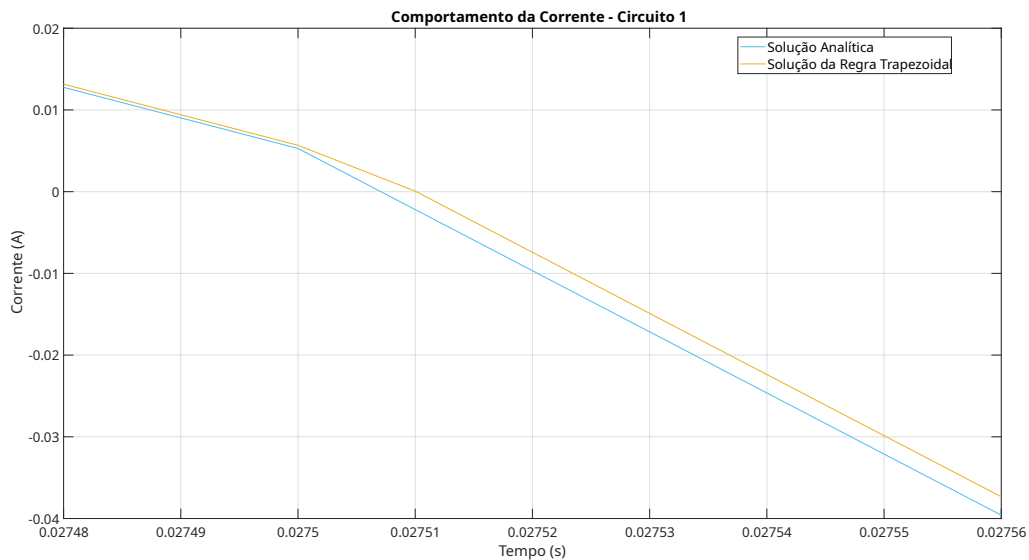


Figura 4.18: Zoom solução do circuito Parte 1

Na Figura 4.18 observou-se que houve uma pequena discrepância da solução analítica (curva azul) com a solução da regra trapezoidal (curva laranja). Essa diferença é explicada por conta do passo de integração definido pela regra trapezoidal, isto é, quanto menor for o passo de integração mais parecidas serão as curvas das soluções. Esse fato pode ser explicado porque utiliza-se assim mais trapézios para o cálculo das áreas.

Como visualizado na Seção 2.3, o erro do método Trapezoidal é inerente e pode ser calculada através Equação 2.19. Para visualizar o comportamento do erro no circuito 1 gerou-se a Figura 4.19.

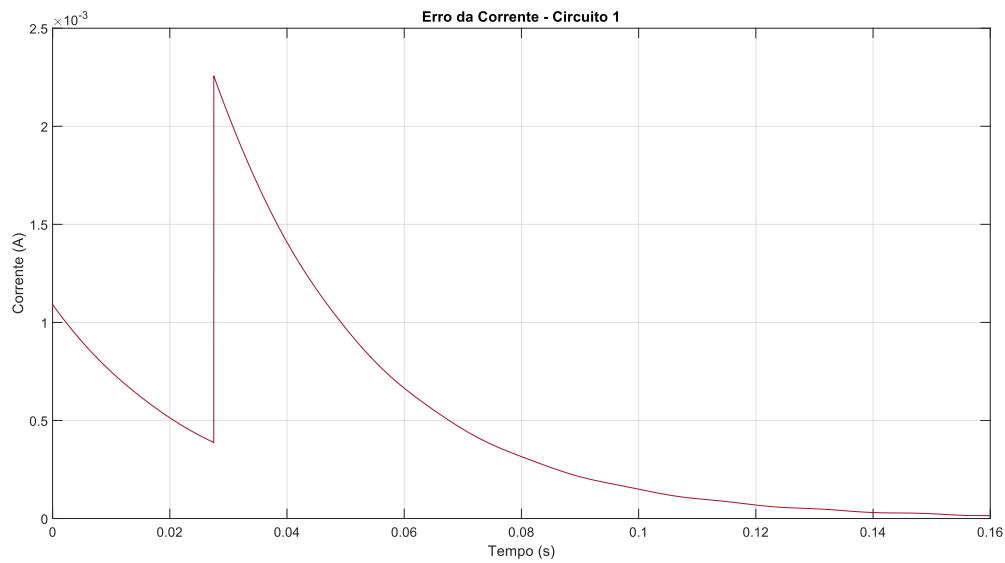


Figura 4.19: Erro - Circuito Parte 1

Na Figura 4.19, a curva apresenta o erro entre a solução analítica e a solução da regra trapezoidal, da parte 1 do circuito. É possível identificar que o instante que ocorre o maior valor de erro é no momento do curto, pode-se analisar um erro de 2,26mA. Posteriormente, verifica-se uma curva com comportamento exponencial decrescente.

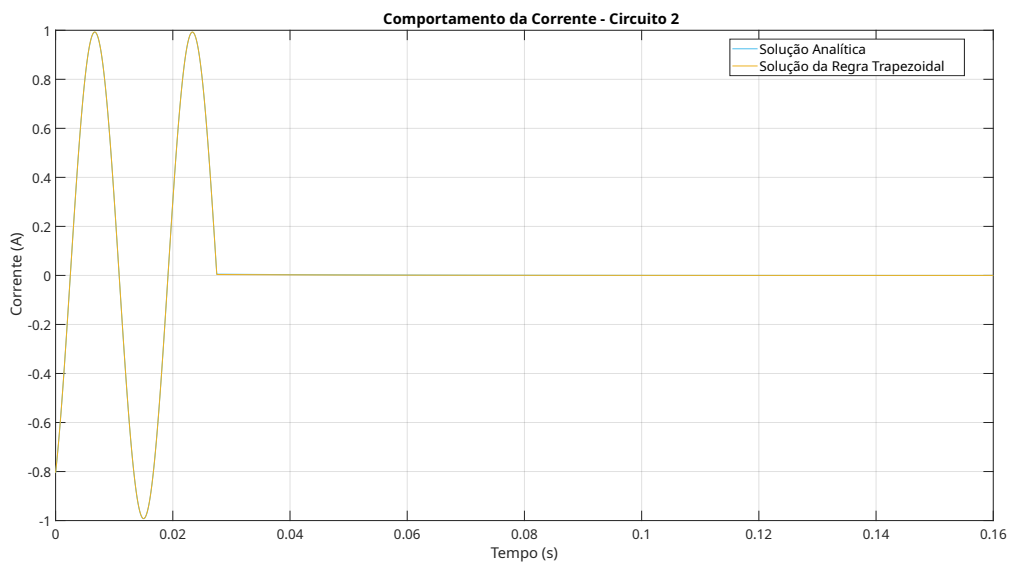


Figura 4.20: Circuito Parte 2

Na Figura 4.20 é possível ver o comportamento do circuito parte 2, durante a ocorrência do curto-circuito, tanto a corrente analítica (curva azul) quanto a corrente da regra trapezoidal

(curva laranja) passam ter uma trajetória linear, assumindo valores de aproximadamente 0A.

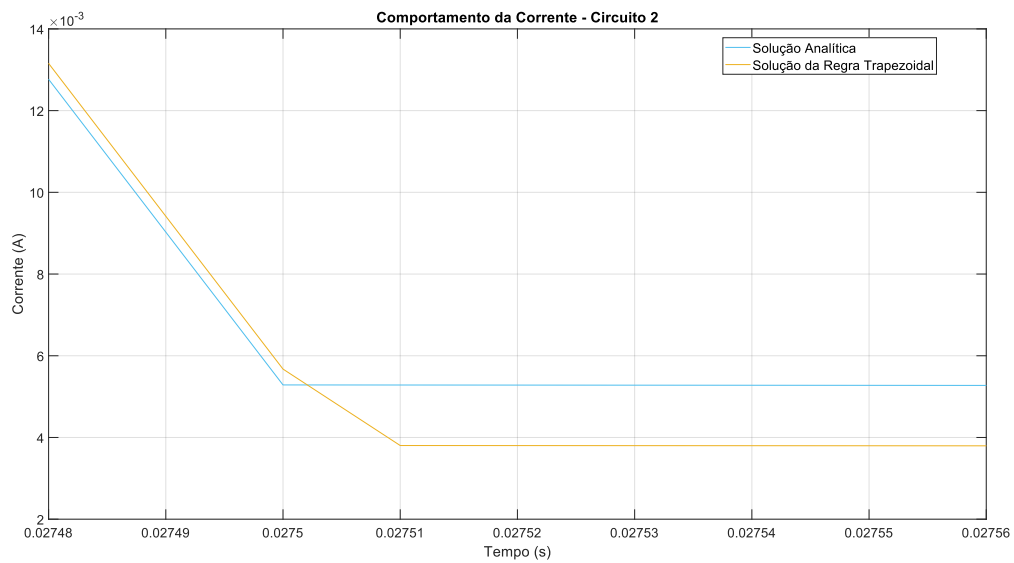


Figura 4.21: Zoom solução do circuito Parte 2

Na Figura 4.21 observou-se que houve uma pequena discrepância da solução analítica (curva azul) com a solução da regra trapezoidal (curva laranja). Essa diferença é explicada por conta do passo de integração definido pela regra trapezoidal, isto é, quanto menor for o passo de integração mais parecidas serão as curvas das soluções. Esse fato pode ser explicado porque utiliza-se assim mais trapézios para o cálculo das áreas.

Utilizando os valores obtidos pela regra trapezoidal e pela solução analítica, foi possível gerar um gráfico de erro, que ilustra a diferença entre as duas abordagens. Este gráfico é apresentado na Figura 4.22

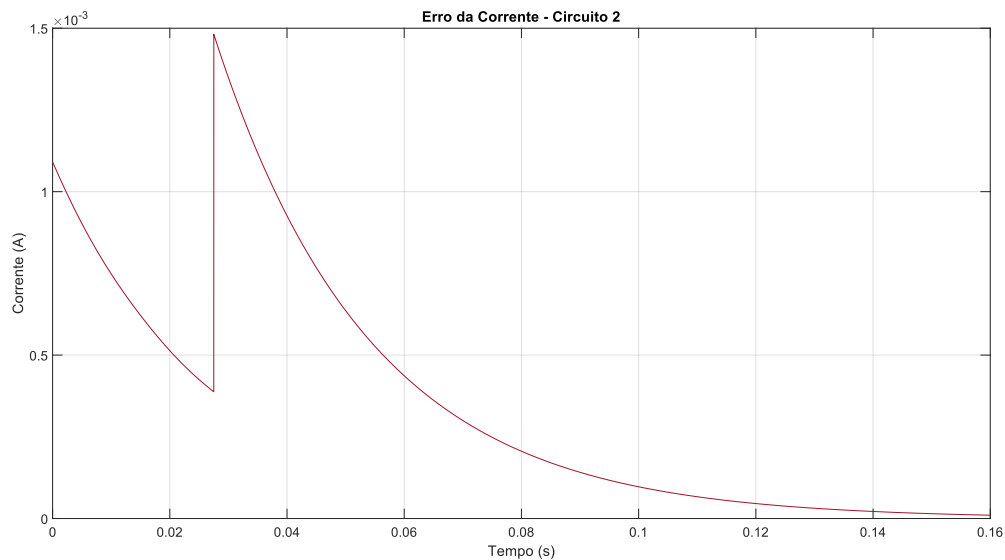


Figura 4.22: Erro - Circuito Parte 2

A Figura 4.22 representa o erro entre a solução analítica e a solução da regra trapezoidal, da parte 2 do circuito. Assim como o comportamento descrito pela parte 1 do circuito, o erro da parte 2 também apresentando um pico e um comportamento exponencial. Neste caso, entretanto, o pico apresentado é menor, ele apresenta um valor de 1,48mA.

Conforme analisado, em comparação ao método analítico, o método trapezoidal gera pequenos erros, nas casas de miliamperes, esses erros não podem ser vistos na comparação entre os dois gráficos, mas podem ser gerados através de um gráfico único com escalas menores.

Portanto, ao analisar o comportamento do método trapezoidal aplicado ao circuito RL série com solução da equação homogênea mínima, observou-se que a solução obtida apresenta pequenas discrepâncias em comparação com a solução analítica, especialmente em momentos de curto-circuito. Essas diferenças, que são da ordem de miliamperes, se devem principalmente ao passo de integração escolhido para a regra do trapézio. Os gráficos de erro mostraram que os maiores desvios ocorrem durante o curto-circuito, com um comportamento exponencial decrescente subsequente. No geral, o método trapezoidal provou ser eficaz, produzindo resultados próximos aos analíticos, com erros mínimos que, embora pequenos, são mais visíveis em gráficos com escalas ajustadas.

4.2.2 Solução da Equação Homogênea Máxima

Nesse subtópico, foi utilizado o valor da solução homogênea máxima, encontrada graficamente na Seção 4.1.4. Desta forma, foi considerado que o momento no qual ocorre o curto-circuito é de $t_0 = 40\text{ms}$, foram obtidos os seguintes gráficos para a parte 1 e 2 do circuito:

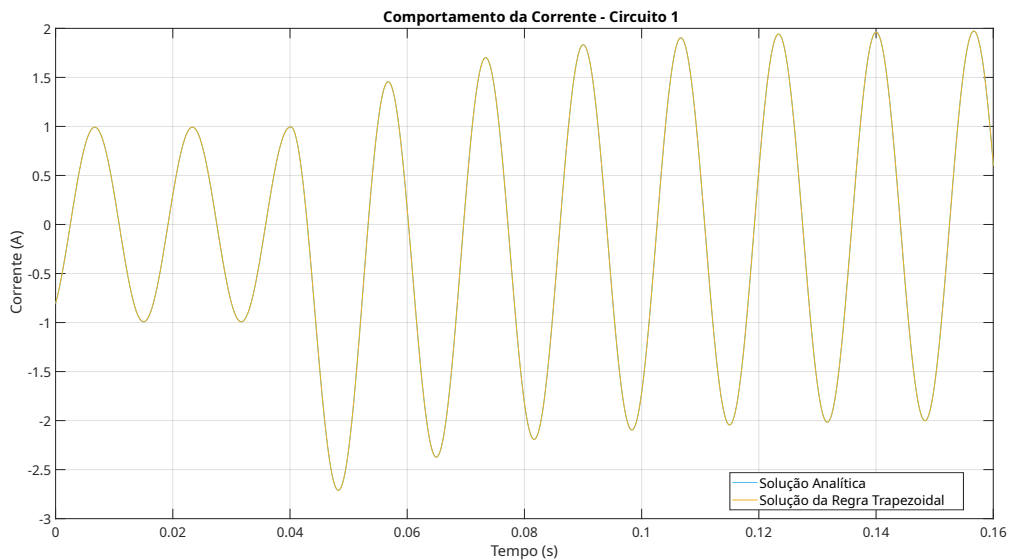


Figura 4.23: Circuito Parte 1

Na Figura 4.23 é possível visualizar uma interferência máxima da corrente transitória (curva laranja) na corrente analítica (curva azul). Isso está relacionado principalmente ao fato de que no momento que ocorreu o curto, a corrente em regime permanente apresentava um valor cujo módulo se aproximava de 1A, gerando assim um pico de corrente transitória alto.

Nota-se uma grande semelhança entre as duas curvas, não podendo pressupor variações de uma para outra. Como visualizado na Seção 2.3, o erro do método Trapezoidal é inerente e pode ser calculada através Equação 2.19. Para visualizar o comportamento do erro do circuito da parte 1 foi gerado a seguinte Figura:

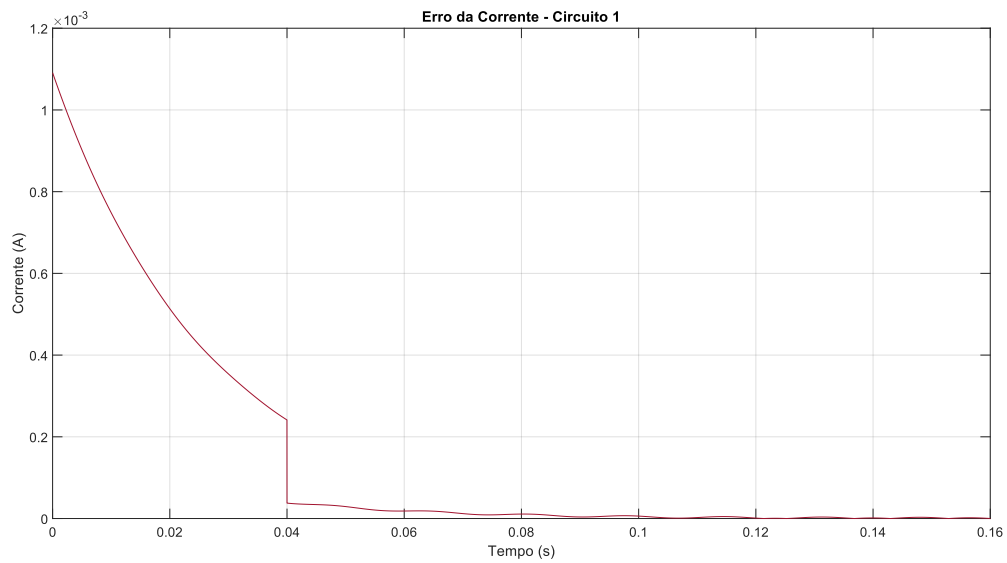


Figura 4.24: Erro - Circuito Parte 1

Na Figura 4.24, a curva apresenta o erro entre a solução analítica e a solução da regra trapezoidal, da parte 1 do circuito. É possível identificar que o instante que ocorre o maior valor de erro é no momento do curto, pode-se analisar que o erro passa de $0,2441\text{mA}$ para $0,377\mu\text{A}$. Após o instante de curto-circuito, a curva de erro da parte 1 do circuito, passa a apresentar um comportamento inconsistente.

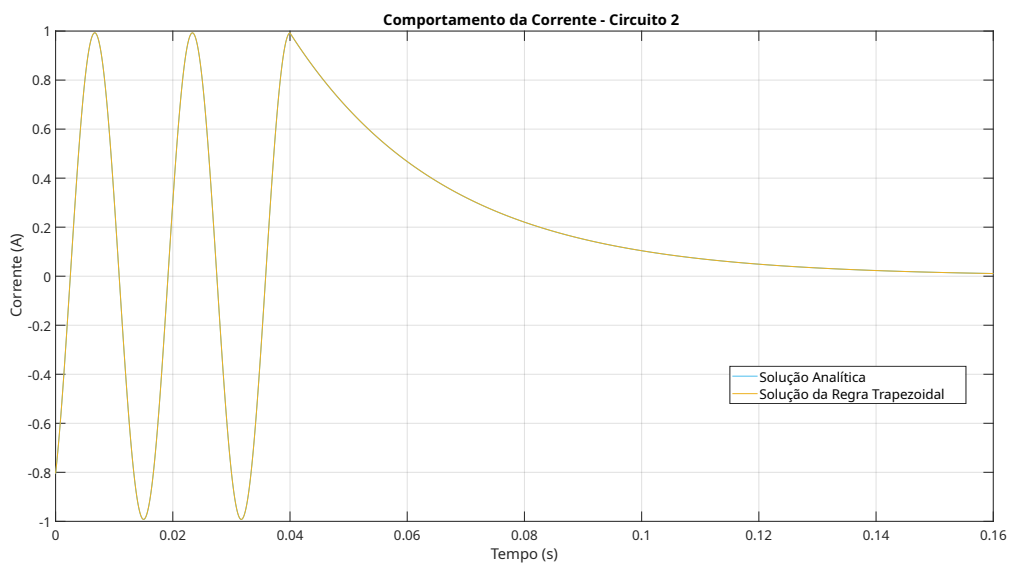


Figura 4.25: Circuito Parte 2

Na Figura 4.25 é possível ver o comportamento do circuito parte 2, durante a ocorrência

do curto-circuito, tanto a corrente analítica (curva azul) quanto a corrente da regra trapezoidal (curva laranja) assumem uma trajetória exponencial após a ocorrência do curto. É possível verificar que o mesmo acontece em um pico de onda, cujo valor é de 0,9925A.

Utilizando os valores obtidos pela regra trapezoidal e pela solução analítica, foi gerado um gráfico de erro, que ilustra a diferença entre as duas abordagens. Este gráfico é apresentado na Figura 4.26.

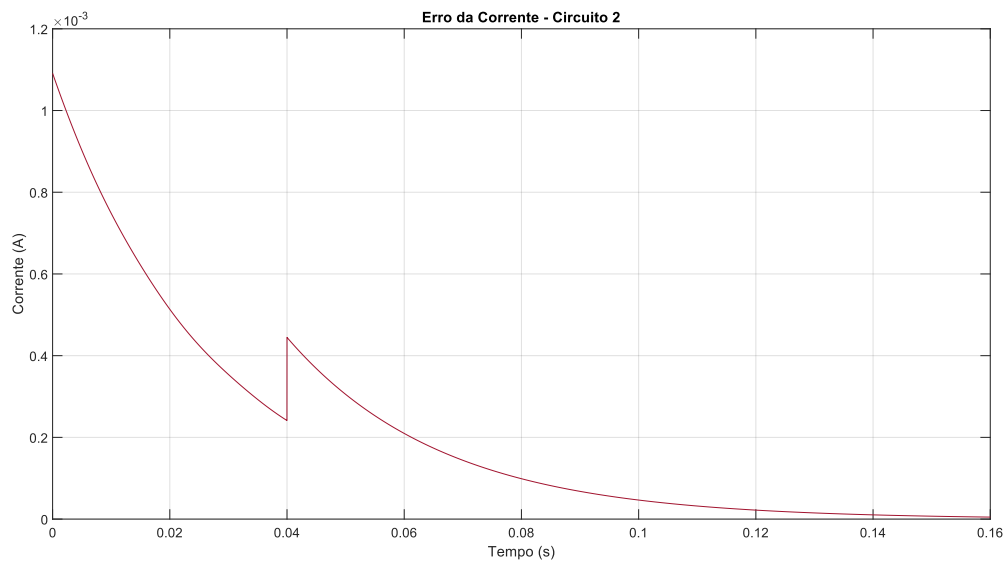


Figura 4.26: Erro - Circuito Parte 2

A Figura 4.26 representa o erro entre a solução analítica e a solução da regra trapezoidal, da parte 2 do circuito. Diferente do comportamento descrito pela parte 1 do circuito, o erro da parte 2 apresenta um pico no instante do curto seguido de um comportamento exponencial. Neste caso, o pico apresentado é de 0,445mA.

Portanto, neste subtópico, foi analisado o comportamento do método trapezoidal no circuito RL série, considerando o valor da solução homogênea máxima e o momento de curto-circuito em 40 ms. Os gráficos obtidos mostraram uma grande interferência da corrente transitória na corrente analítica, especialmente devido ao valor da corrente de regime permanente próximo de 1A no momento do curto-circuito.

Os resultados indicaram uma grande semelhança entre as curvas analítica e trapezoidal, com as diferenças sendo principalmente atribuídas ao passo de integração do método trapezoidal. As análises dos erros evidenciaram picos de erro significativos no instante do curto, seguidos

por comportamentos inconsistentes ou exponenciais. Apesar dessas discrepâncias, o método trapezoidal demonstrou ser eficaz em reproduzir a dinâmica do circuito, com os erros mantidos dentro de uma faixa aceitável para a análise.

4.3 Circuito RLC série

4.3.1 Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 0°

O primeiro circuito a ser implementado foi o circuito da Figura 4.27, cuja tensão fornecida pela fonte é uma tensão senoidal. Primeiramente, as variáveis serão mantidas constantes e o ângulo de fase do sinal será alterado.

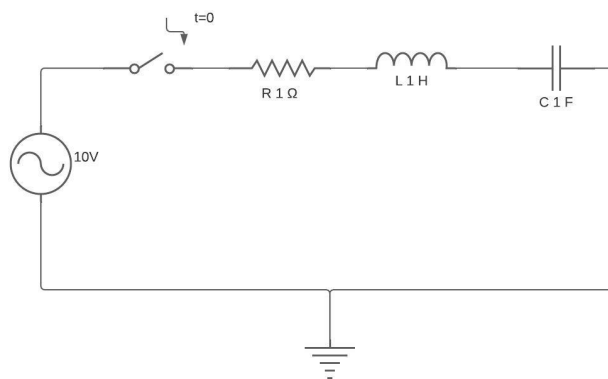


Figura 4.27: Circuito 1

O coeficiente de amortecimento é obtido utilizando a equação 2.124, sendo assim, tem-se:

$$\alpha = -\frac{1}{2.1} = |0,5| \quad (4.7)$$

A frequência de natural do circuito é obtida por meio da equação 2.126, sendo assim, tem-se:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{1.1}} = 1rad/s \quad (4.8)$$

A constante de tempo é obtida por meio do inverso da parte real dos polos [20], sendo assim, tem-se:

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,5} = 2s \quad (4.9)$$

A frequência de oscilação do circuito é obtida através da relação 2.125, sendo assim, tem-se:

$$\omega d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2.1}\right)^2 - \frac{1}{1.1}} = |0,8660|rad/s \quad (4.10)$$

Em que:

$$f = \frac{\omega d}{2.\pi} = \frac{0,8660}{2.\pi} = 0,1378Hz \quad (4.11)$$

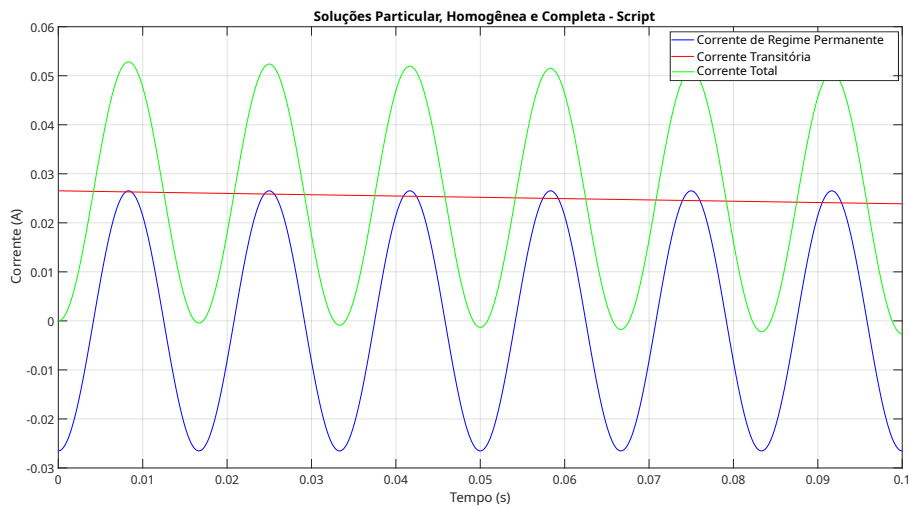
Podendo assim calcular o período do transitório da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1378} = 7,2552s \quad (4.12)$$

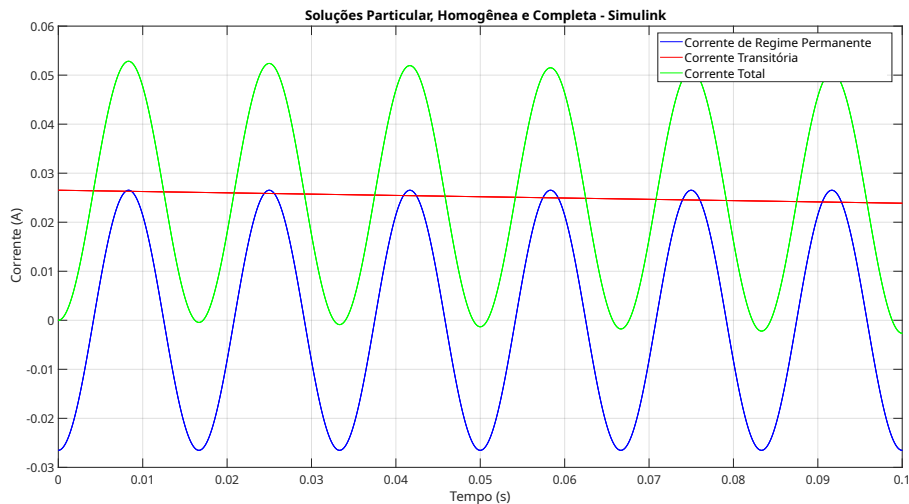
Calculando assim o fator de amortecimento do circuito 1[20]:

$$\xi = \frac{\omega d}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi * 2} = 0,079577472 \quad (4.13)$$

Na primeira simulação considerou-se um ângulo de fase de 0° , utilizando o *Script* e o *Simu-link*, e foram obtidos os seguintes gráficos:



(a) Script



(b) Simulink

Figura 4.28: Circuito 1 - Ângulo de Fase 0°

Ao analisar a Figura 4.28, observa-se que a corrente permanente (curva azul) inicia imediatamente com um pico negativo, enquanto a corrente transitória (curva vermelha) começa com o mesmo valor de $0,02653\text{A}$, porém, com sinal contrário à corrente em regime permanente. Dado que ambas as correntes têm valores iguais, mas em direções opostas, a corrente total (curva amarela) tem início em 0A .

$$\text{Tempo de Simulação} = 5 \times \text{Constante de Tempo} \quad (4.14)$$

$$\text{Tempo de Simulação} = 5 \times 2 = 10\text{s} \quad (4.15)$$

Ao longo de um período de 100ms, a variação observada na corrente transitória foi de apenas 0,002647A. Em virtude da pouca variação na magnitude dessa corrente, não é possível identificada visualmente a resposta dessa e sua interferência na corrente total. Para esclarecer esse aspecto, será necessário estender o período de simulação. Optar-se-á por um tempo de simulação cinco vezes maior que a constante de amortecimento, com o objetivo de verificar se, ao longo desse tempo ampliado, será possível discernir a forma da resposta transitória. Esse resultado é apresentado na Figura 4.29.

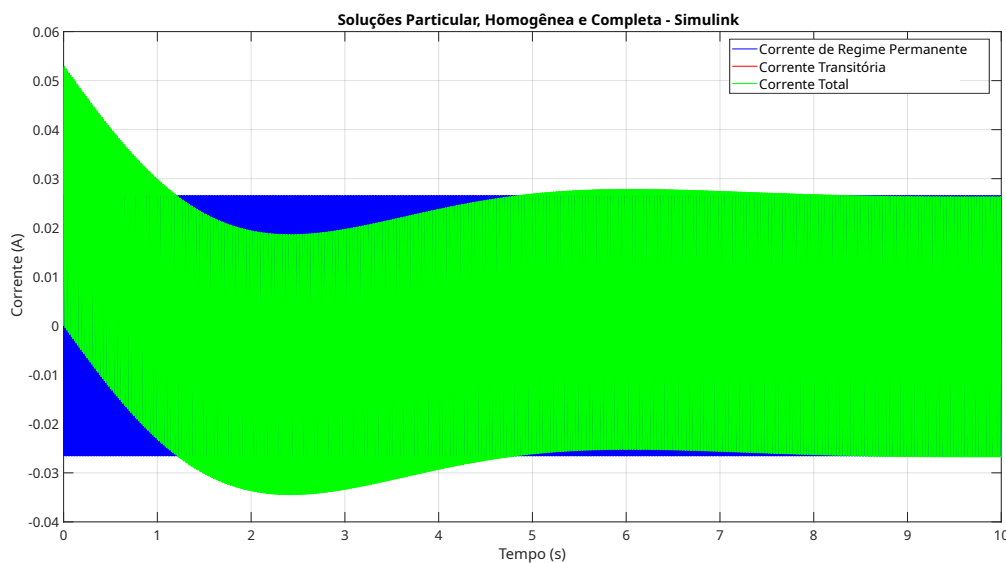


Figura 4.29: Soluções em 0°

Analisando a Figura 4.29, que exhibe todas as soluções, nota-se que ao longo do trajeto a corrente total (curva verde) passou por um deslocamento de amplitude, seguindo uma trajetória semelhante à corrente transitória (curva vermelha), enquanto a corrente de regime permanente (curva azul) permaneceu constante. Essa observação ressalta a interferência da corrente transitória na corrente total, resultando em um valor substancialmente elevado para a corrente total, cerca de 0,053A.

De forma geral a corrente de regime permanente apresentou um comportamento cíclico: iniciando com valores positivos que decaíram até alcançar um pico negativo. enquanto a corrente transitória começou com um valor oposto, resultando em uma corrente total que iniciou em 0A.

A análise das soluções totais revelou um deslocamento de amplitude na corrente total devido à interferência da corrente transitória, enquanto a corrente de regime permanente permaneceu

constante.

Para finalizar, um gráfico da corrente transitória é realizado para a melhor visualização do seu comportamento, esse resultado é apresentado na Figura 4.30.

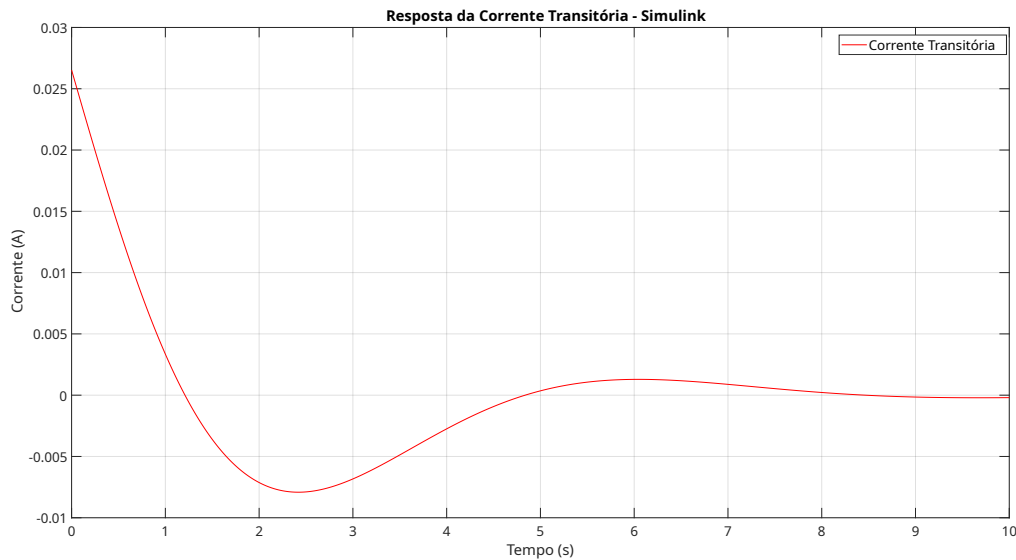


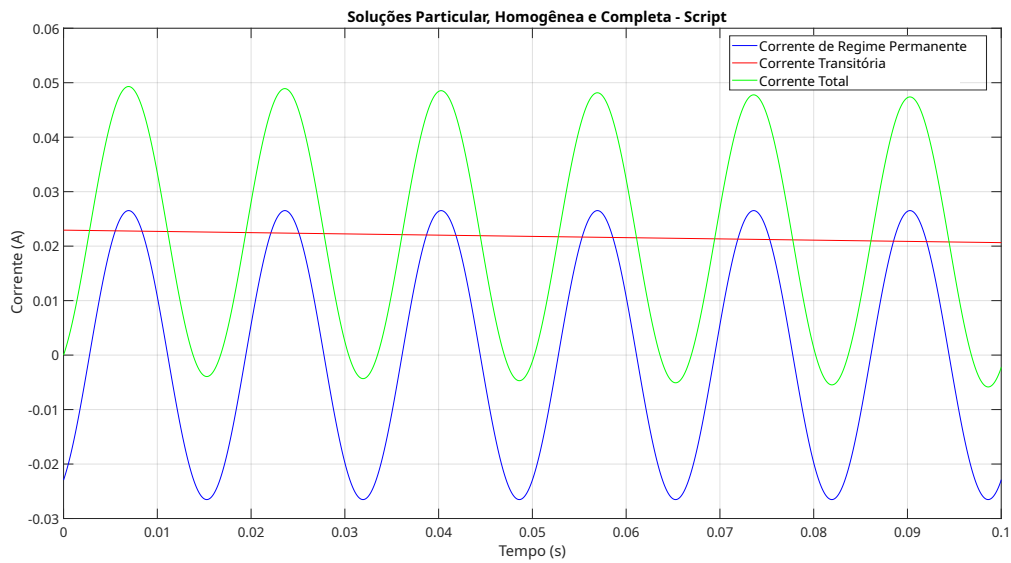
Figura 4.30: Curva da Corrente Transitória

A Figura 4.30 revela um corrente transitória que se inicia com um pequeno valor positivo, seguido por um pico negativo. Após o transcurso de nove segundos, a corrente transitória converge de maneira ágil para valores próximos a zero.

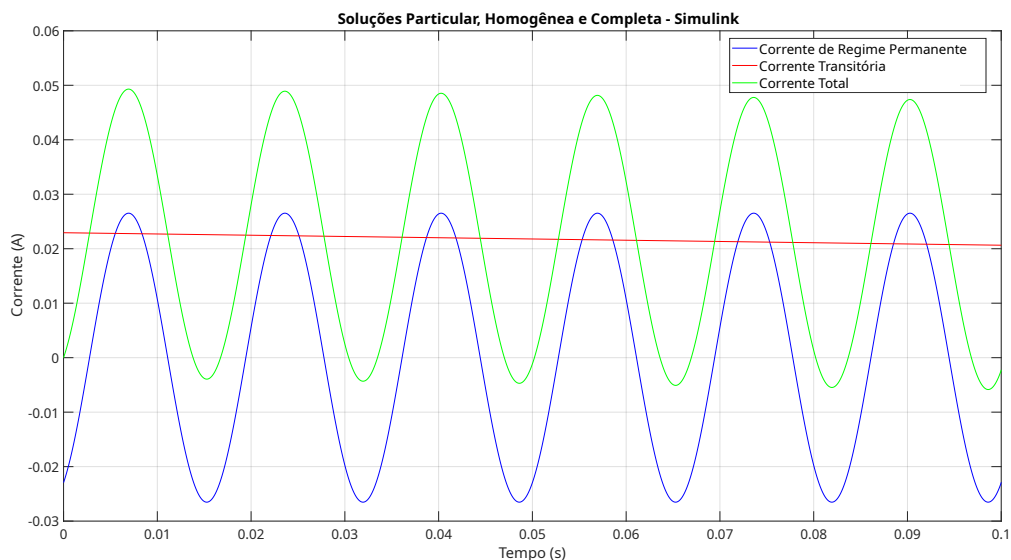
A resposta da corrente transitória mostrou-se subamortecida, com a seguinte característica: valores iniciais positivos, seguidos de picos negativos e por picos positivos de menor amplitude, aproximando-se de zero após nove segundos.

4.3.2 Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 30°

Na segunda parte da simulação o ângulo de fase da tensão de alimentação foi alterado de 0° para 30° , resultando assim na Figura 4.31.



(a) Script



(b) Simulink

Figura 4.31: Circuito 1 - Ângulo de Fase 30°

Na Figura 4.31 percebe-se que em relação ao valor inicial da corrente transitória no início da simulação, os resultados obtidos com um ângulo de fase de 30° apresentaram uma ligeira modificação em comparação com a simulação realizada com um ângulo de 0° . Ao observar o início da simulação, a corrente transitória (curva vermelha) iniciou com um valor de 0,02294A, mostrando uma variação de 0,00359A em relação à simulação anterior.

Nota-se que a corrente transitória deslocou a corrente total, ao longo do eixo y (corrente). Similar à simulação anterior, a variação da corrente transitória ao longo do intervalo de simulação

foi pequena, aproximadamente 0,002293A.

O comportamento das correntes pode ser observado de forma melhor, aumentando o tempo de simulação, esses resultados são apresentados na Figura 4.32 que apresenta a correntes em um tempo de simulação de 10s.

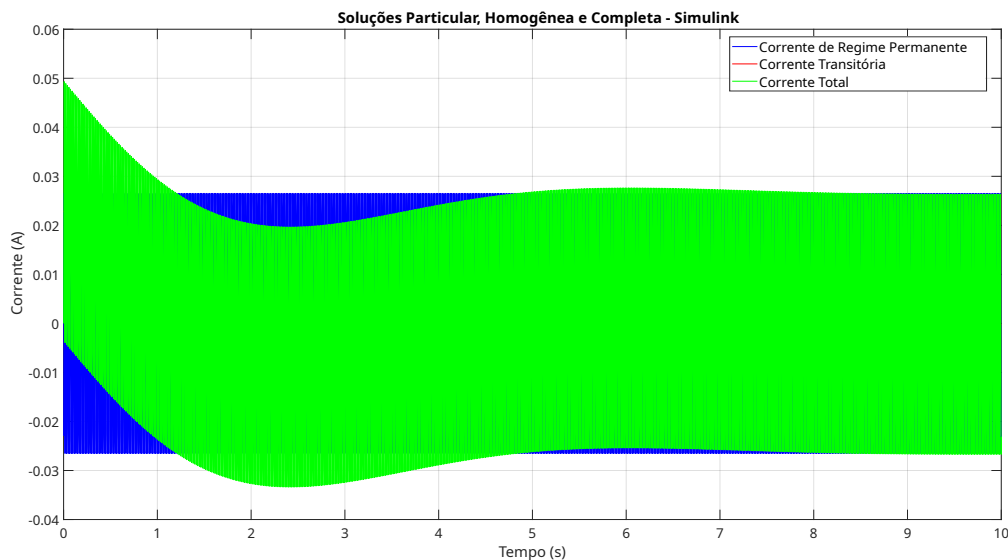


Figura 4.32: Soluções em 30°

A Figura 4.32 engloba todas as soluções e constatou-se que a flutuação na corrente total (curva verde), provocada pela corrente transitória (curva vermelha), foi consideravelmente menor em comparação com a variação associada a um ângulo de fase de 0° . Nessa situação, a diferença entre os picos da corrente total atingiu um patamar de 0,0826A.

Para finalizar, um gráfico da corrente transitória é realizado para melhorar a visualização do seu comportamento, esse resultado é apresentado na Figura 4.33.

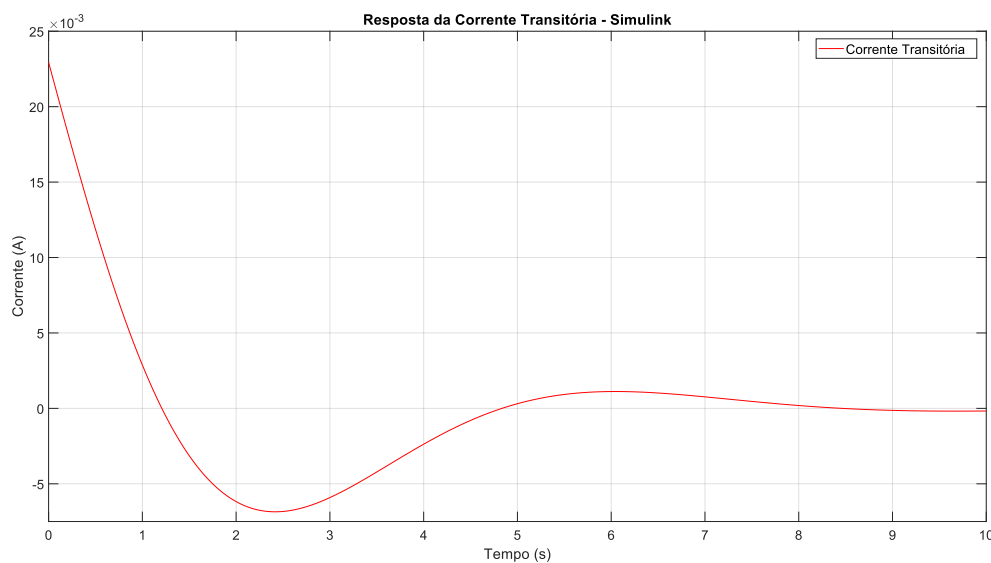


Figura 4.33: Curva da Corrente Transitória - 30° .

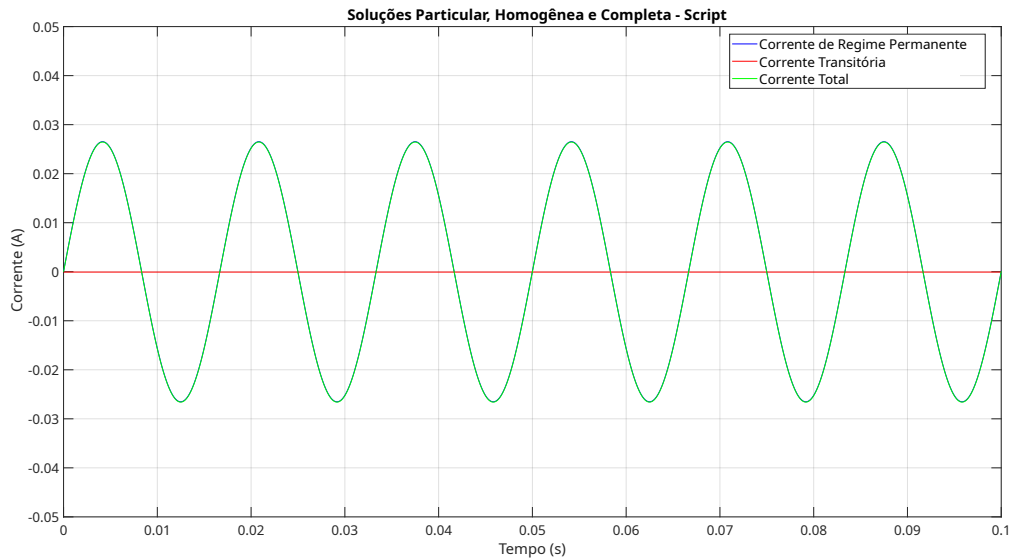
Durante o intervalo de 10s, foi perceptível que a alteração no ângulo de fase não provocou uma modificação no padrão de resposta da corrente transitória, conforme ilustrado na Figura 4.33. A resposta da corrente transitória a 30° manteve-se semelhante à resposta obtida a 0° , da Figura 4.30. No entanto, houve uma leve redução no pico da corrente, registrando um valor de 0,02294A no início da simulação.

Portanto, com a alteração do ângulo de fase de 30° , a corrente transitória inicial registrou 0,02294A, apresentando uma variação de 0,00359A em relação à simulação com 0° . A mudança no ângulo de fase não alterou significativamente o padrão de resposta da corrente transitória, mas houve uma leve redução no pico da corrente. A flutuação na corrente total foi menor, com a diferença entre os picos atingindo 0,0826A

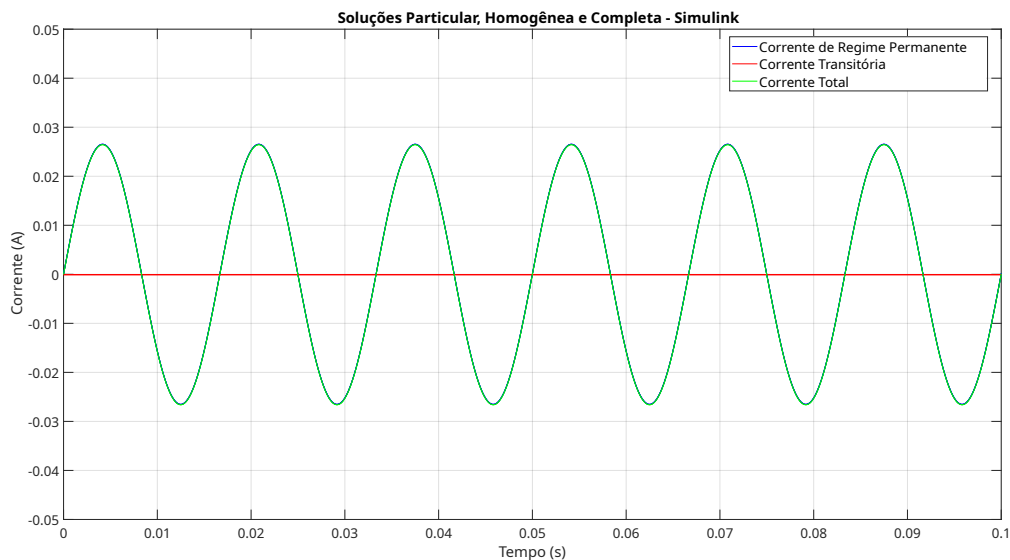
Em anexo, realizou-se também a simulação com um ângulo de fase de 60° e observou-se que a corrente transitória inicia com o mesmo valor que a corrente em regime permanente no momento do chaveamento. A resposta em regime permanente exibiu valores notavelmente baixos, com uma variação significativa entre os picos iniciais. A corrente total apresenta uma variação entre os valores máximos e mínimos dos picos, indicando que a interferência da corrente transitória na corrente total é menor em comparação com a utilização de ângulos de fase menores. Esta simulação com detalhes encontra-se no Anexo A.2.

4.3.3 Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 90°

Em sequência, foi realizada a simulação usando um ângulo de fase para a tensão senoidal de 90° , resultando assim na Figura 4.34:



(a) Script



(b) Simulink

Figura 4.34: Circuito 1 - Ângulo de Fase 90°

Ao adotar um ângulo de fase de 90° , observou-se que a corrente transitória permaneceu estável em $0A$ ao longo de um período de $100ms$. A análise da Figura 4.34 indicou que a corrente transitória (curva vermelha) permaneceu alinhada ao longo do eixo horizontal, resultando

na coincidência da corrente total (curva verde) com a corrente em regime permanente (curva azul).

O comportamento das correntes pode ser observado de forma melhor, aumentando o tempo de simulação, esses resultados são apresentados na Figura 4.35 que apresenta a correntes em um tempo de simulação de 10s.

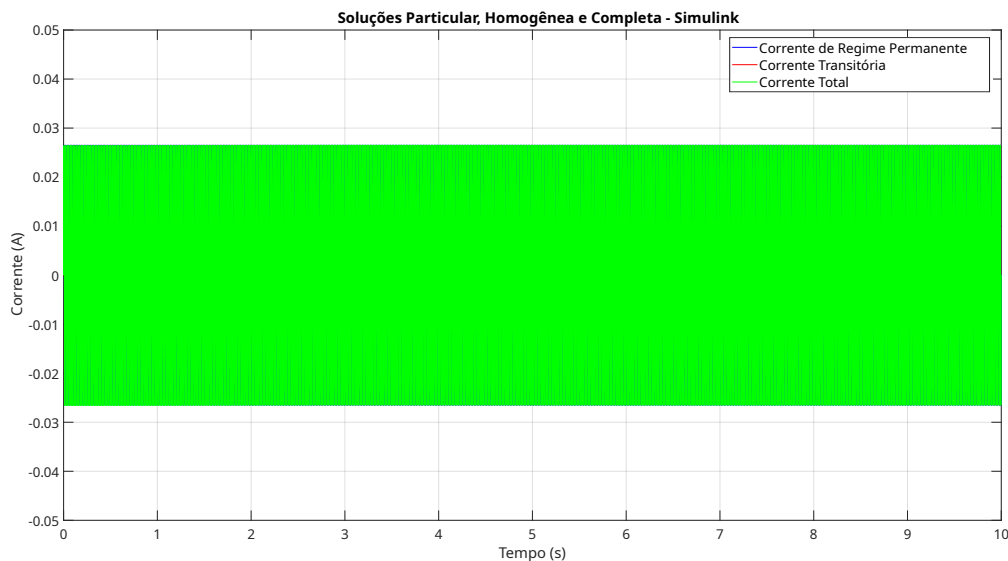


Figura 4.35: Soluções em 90°

Na Figura 4.35, que reúne todas as soluções, fica claro que a escolha de um ângulo de fase de 90° evitou interferências da corrente transitória na corrente em regime permanente. Isso se deve ao fato de que ao longo do trajeto, a corrente total permaneceu igual a corrente em regime permanente. No entanto, conforme destacado na Figura 4.36, é importante notar a discreta variação na corrente transitória. Embora não seja visível durante essa simulação, essa pequena variação pode causar uma alteração na corrente total.

Para finalizar, um gráfico da corrente transitória é realizado para melhorar a visualização do seu comportamento, esse resultado é apresentado na Figura 4.36.

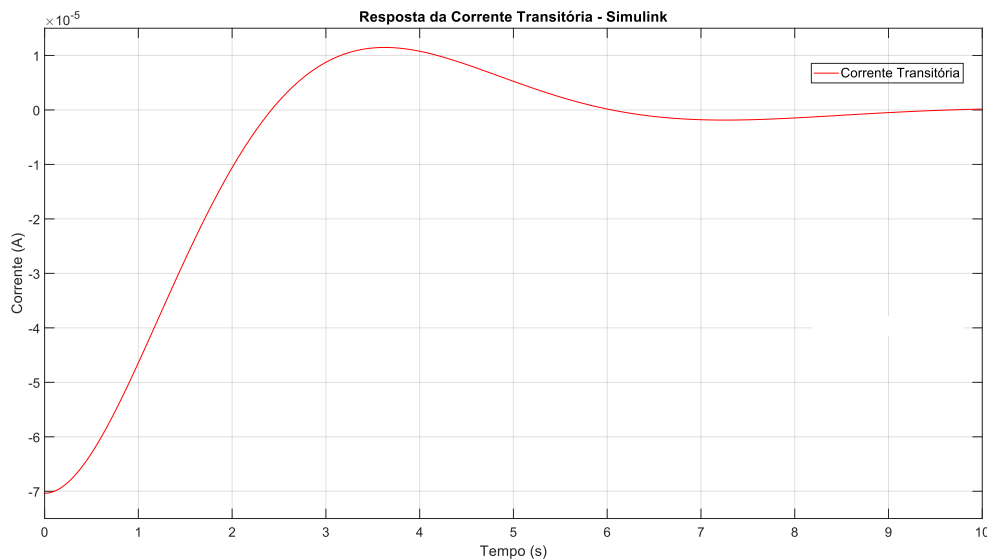


Figura 4.36: Curva da Corrente Transitória - 90°

O ponto crucial que marcou a resposta da corrente transitória na Figura 4.36 foi a inversão de direção. Nas simulações anteriores, ao empregar ângulos inferiores a 90° , observou-se que a corrente iniciava com um valor positivo seguido por um pico negativo. No entanto, nesta simulação, a corrente permanente exibiu um valor negativo seguido de um pico positivo, indicando que atingiu um limiar para a mudança de sentido.

Portanto, com um ângulo de fase de 90° , a corrente transitória permaneceu estável em $0A$ durante um período de $100ms$. A corrente transitória se manteve alinhada ao longo do eixo horizontal, fazendo com que a corrente total coincidissem com a corrente em regime permanente. Uma análise mais detalhada da corrente transitória ao longo de $1000ms$ revelou uma inversão de direção. A escolha desse ângulo de fase evitou interferências da corrente transitória na corrente em regime permanente, mantendo a corrente total igual à corrente em regime permanente, apesar de uma discreta variação na corrente transitória, que pode causar uma alteração na corrente total.

4.3.4 Segundo Circuito - Ângulo de Fase 0°

O segundo circuito é realizado conforme os parâmetros inseridos na Figura 4.37, em que foram alterados os valores do indutor e do capacitor, sendo eles: $L = 0,1H$ e $C = 10\mu F$. Nesta seção, serão avaliados os comportamentos das correntes quando o ângulo de fase varia seu valor

de 0° à 90° .

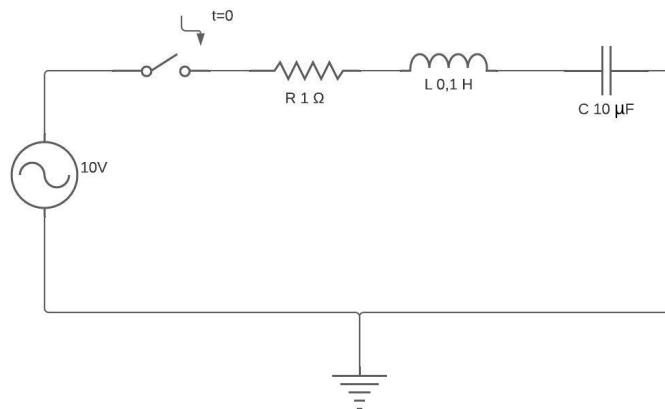


Figura 4.37: Circuito 2

O coeficiente de amortecimento é obtido utilizando a equação 2.124, sendo assim, tem-se:

$$\alpha = -\frac{1}{2 \cdot 0,1} = |5| \quad (4.16)$$

A frequência natural do circuito é obtida através da equação 2.126, sendo assim, tem-se:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 10\mu}} = 1000 \text{ rad/s} \quad (4.17)$$

A constante de tempo é obtida através do inverso da parte real dos polos[20], sendo assim, tem-se:

$$\tau_2 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ s} \quad (4.18)$$

A frequência de oscilação do circuito é obtida através da relação 2.125:

$$\omega_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 0,1}\right)^2 - \frac{1}{0,1 \cdot 10\mu}} = |999,99| \text{ rad/s} \quad (4.19)$$

Em que:

$$f = \frac{\omega d}{2\pi} = \frac{999,99}{2\pi} = 159,15Hz \quad (4.20)$$

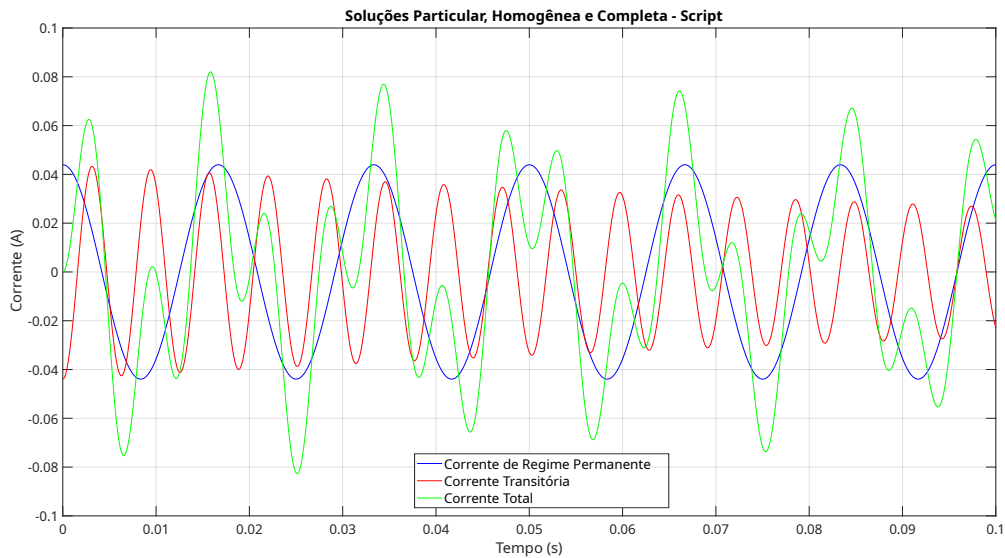
Podendo assim calcular o período do transitório como sendo:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{159,15} = 0,00628s \quad (4.21)$$

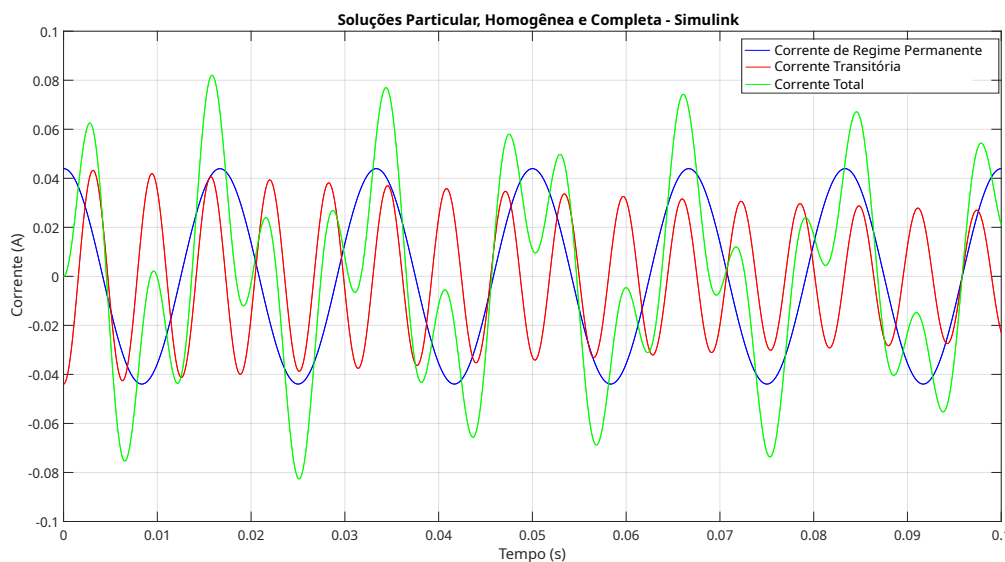
Calculando assim o fator de amortecimento do circuito 1[20]:

$$\xi = \frac{\omega d}{2\pi\tau_2} = \frac{1}{2\pi 1000 * 0,2} = 0,00079577472 \quad (4.22)$$

Sendo assim, alterando os valores da indutância e da capacitância e considerando-se um ângulo de fase de 0° , o gráfico apresentado na Figura 4.38 foi obtido.



(a) Script



(b) Simulink

Figura 4.38: Circuito 2 - Ângulo de Fase 0°

Na Figura 4.38, observam-se as representações das correntes em regime permanente (curva azul), corrente total (curva verde) e corrente transitória (curva vermelha). A corrente transitória segue um padrão senoidal ao longo de 10ms de simulação, com um comprimento de onda menor em comparação com a corrente em regime de regime permanente. Enquanto a corrente transitória exibe um comprimento de onda de 6,288ms, a corrente em regime permanente apresenta um comprimento de onda de 16,669ms.

No início da simulação, ambas as correntes têm valores iguais, mas em direções opostas. Ou

seja, a corrente transitória começa com um valor de $-0,04394\text{A}$, enquanto a corrente em regime permanente inicia com $0,04394\text{A}$. Ao longo do tempo, a corrente transitória diminui em termos de magnitude.

É possível notar uma notável diferença entre a corrente total e a corrente de regime permanente, a corrente total apresenta variações irregulares entre os valores de amplitude, enquanto a corrente de regime permanente apresenta amplitudes regulares durante todo o período de simulação. Isso está relacionado com o deslocamento entre os picos das correntes transitória e a corrente de regime permanente, isto é, a corrente de regime permanente inicia-se no seu valor de pico, já a corrente transitória vem a apresentar seu pico momentos depois. Além da não coincidência de amplitudes, é possível observar uma diferença entre os períodos das correntes de regime permanente e transitória interferindo, também, no comportamento da corrente total.

$$\text{Tempo de Simulação} = 5 \times \text{Constante de Tempo} \quad (4.23)$$

$$\text{Tempo de Simulação} = 5 \times 0,2 = 1\text{s} \quad (4.24)$$

O comportamento das correntes pode ser melhor observado, aumentando o tempo de simulação, esses resultados são apresentados na Figura 4.39 que apresenta a correntes em um tempo de simulação de 1s.

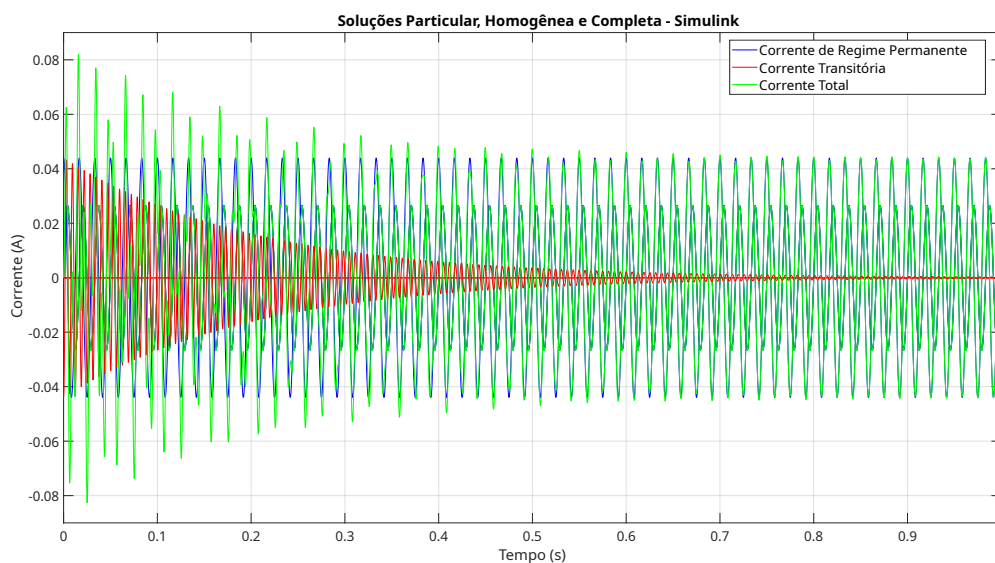


Figura 4.39: Soluções em 0° - Circuito 2

Na Figura 4.39, observou-se que a corrente total (curva verde) exibe inicialmente, um padrão semelhante ao da corrente transitória (curva vermelha). Observa-se uma envoltória decrescente, partindo de um valor inicial mais elevado (superior a 0,08A) até atingir o pico da corrente em regime permanente, em torno de 0,04395A.

Ademais, aproximadamente 0,5s após o início, a corrente total começa a equiparar-se à corrente em regime permanente. Isso ocorre à medida que a corrente transitória passa a apresentar picos mais baixos, resultando em uma interferência diminuída na corrente total.

Para finalizar, um gráfico da corrente transitória é realizado para melhorar a visualização do seu comportamento, esse resultado é apresentado na Figura 4.40.

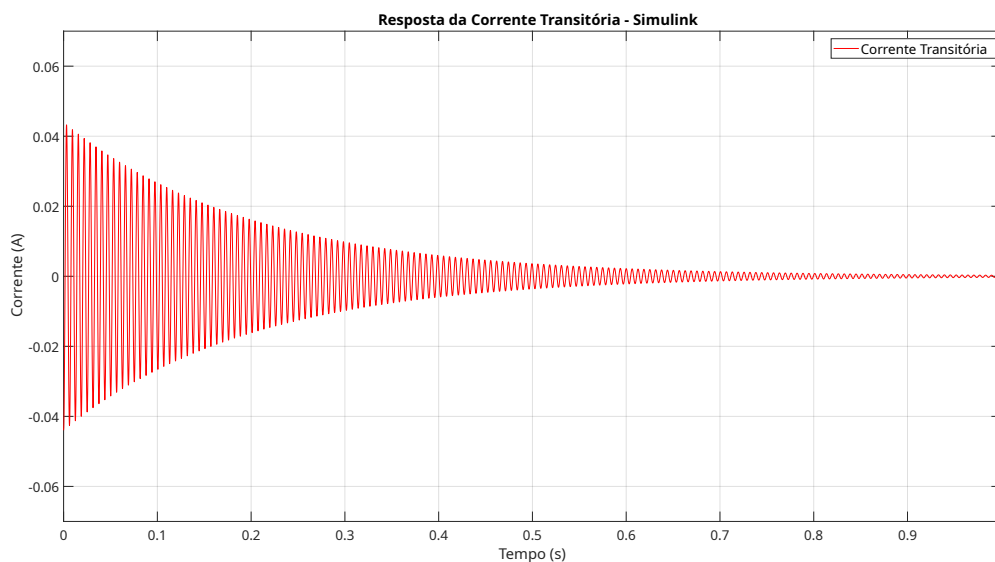


Figura 4.40: Curva da Corrente Transitória - 0°

Ao expandir a simulação para um intervalo mais amplo de 1 segundo, a resposta da corrente transitória torna-se mais evidente e compreensível, como mostrado na Figura 4.40. Ela exibe um comportamento subamortecido no domínio do tempo. Em comparação com o circuito 1, o fator de amortecimento utilizado neste circuito é menor, o que permite a formação de uma espécie de envoltório ao redor da onda. Ressaltando que essa oscilação é gerada pela parte imaginária do par de polos complexos conjugados. O amortecimento ocorre gradativamente por efeito da parte real do par de polos complexos, ou seja, pelo fator de amortecimento.

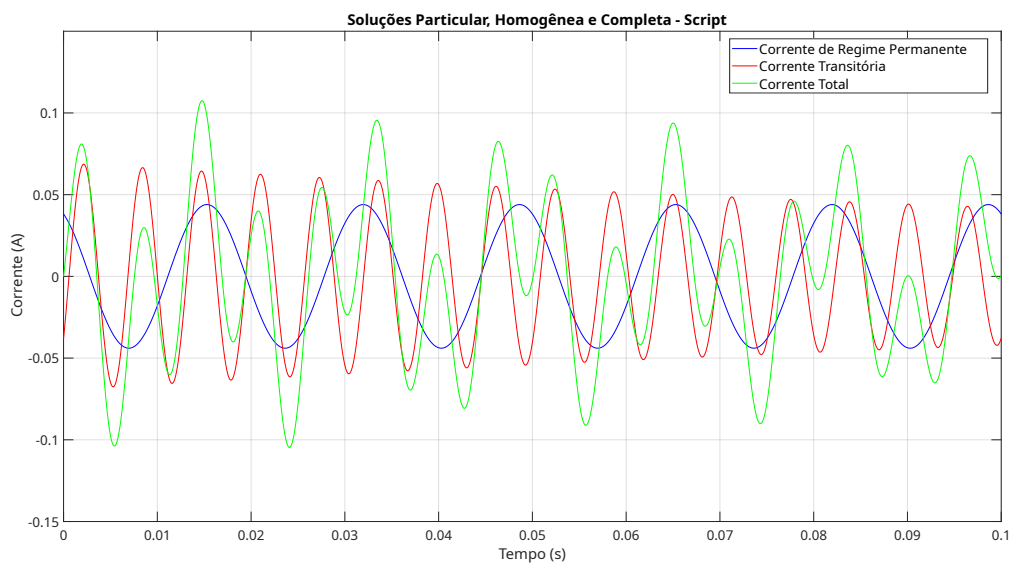
Portanto, a interferência entre a corrente transitória e a corrente em regime permanente é evidente devido às suas defasagens, amplitudes distintas e picos não coincidentes, resultando

em um comportamento irregular na corrente total. Expandindo a simulação para um intervalo de 1s, a resposta da corrente transitória mostrou-se subamortecida. Essa resposta apresentou uma envoltória ao redor da onda, justificado pela redução do fator de amortecimento utilizado em relação ao circuito 1.

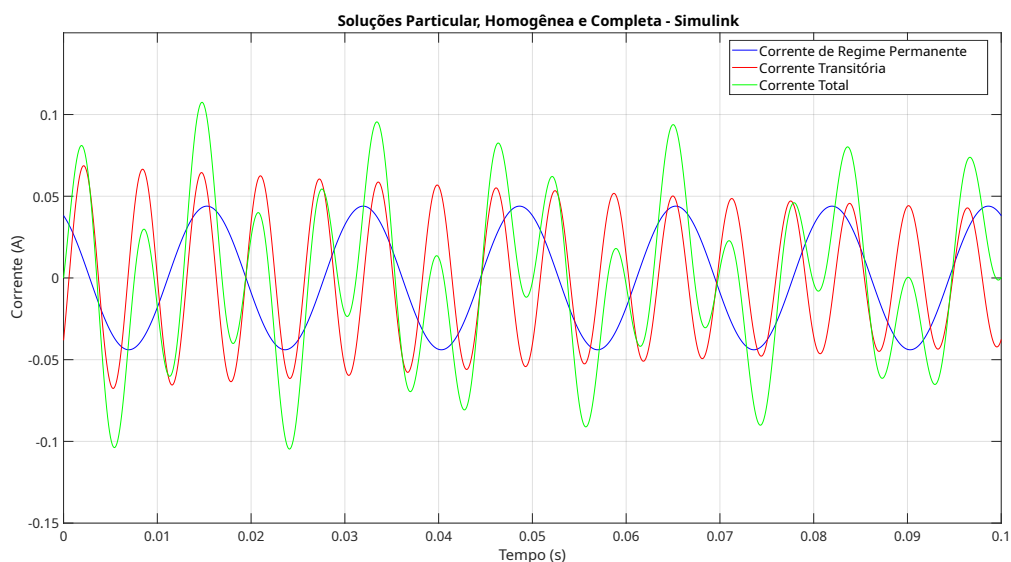
A corrente total, inicialmente semelhante à corrente transitória, exibiu uma envoltória decrescente, ajustando-se à corrente em regime permanente após aproximadamente 0,5 segundos, quando a corrente transitória apresentou picos mais baixos, diminuindo sua interferência na corrente total.

4.3.5 Segundo Circuito - Ângulo de Fase 30°

Em sequência, foi realizada a simulação com um ângulo de fase para a tensão senoidal de 30°, resultando assim na Figura 4.41.



(a) Script



(b) Simulink

Figura 4.41: Circuito 2 - Ângulo de Fase 30°

A Figura 4.41 representa as correntes em regime permanente (curva azul), corrente total (curva verde) e a corrente transitória (curva vermelha). Novamente, no início da simulação, ambas as correntes têm valores idênticos, mas em direções opostas. Ou seja, a corrente transitória inicia com um valor de $-0,03815\text{A}$, enquanto a corrente em regime permanente começa com $0,03815\text{A}$.

O comportamento das correntes pode ser melhor observado, aumentando o tempo de simulação, esses resultados são apresentados na Figura 4.42 que apresenta a correntes em um tempo de

simulação de 1s.

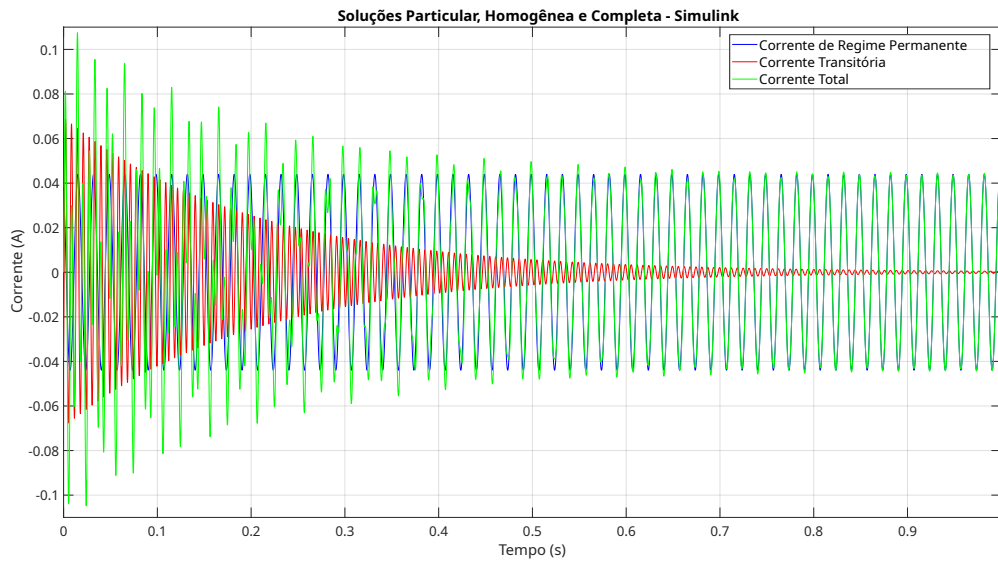


Figura 4.42: Soluções em 30° - Circuito 2

A Figura 4.42 apresenta um tempo de simulação de 1s, a corrente transitória (curva vermelha) atinge seu ponto mais alto, sendo ele 0,06687A, enquanto o pico mais baixo é registrado em 0,0004799A. Isso implica em uma oscilação notável de 0,06822A, tudo isso em apenas 993,193ms.

Para finalizar, um gráfico da corrente transitória é realizado para melhorar a visualização do seu comportamento, esse resultado é apresentado na Figura 4.43.

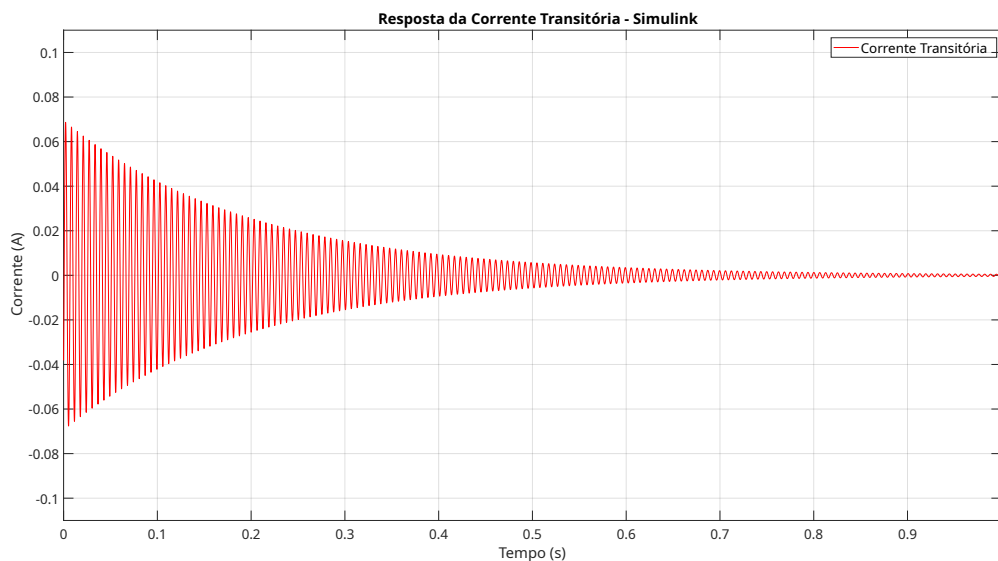


Figura 4.43: Curva da Corrente Transitória - 30°

Ao expandir a simulação para um intervalo mais amplo que 1s, a resposta da corrente transitória torna-se mais evidente e compreensível, como mostrado na Figura 4.43. Ela exibe um comportamento subamortecido no domínio do tempo. Em comparação com o circuito 1, a frequência natural utilizada neste circuito é menor, o que permite a formação de uma envoltória ao redor da onda. Comparando com a figura 4.40, nota-se que houve um aumento no valor da corrente, com a corrente máxima começando agora em aproximadamente $0,069A$ de amplitude máxima.

Além disso, é possível identificar na figura 4.42, uma variação de cerca de $0,06404A$ entre o ponto mais alto e o mais baixo da curva da corrente total (curva verde).

Portanto, no segundo circuito, simulado com um ângulo de fase de 30° , observou-se que as correntes em regime permanente e transitória começam com valores iguais, mas em direções opostas. A corrente transitória iniciou com $-0,03815A$, enquanto a corrente em regime permanente começou com $0,03815A$. Durante um tempo de simulação de 1 segundo, a corrente transitória apresentou um comportamento subamortecido, atingindo um pico máximo de $0,06687A$ e um mínimo de $0,0004799A$, resultando em uma oscilação notável de $0,06822A$.

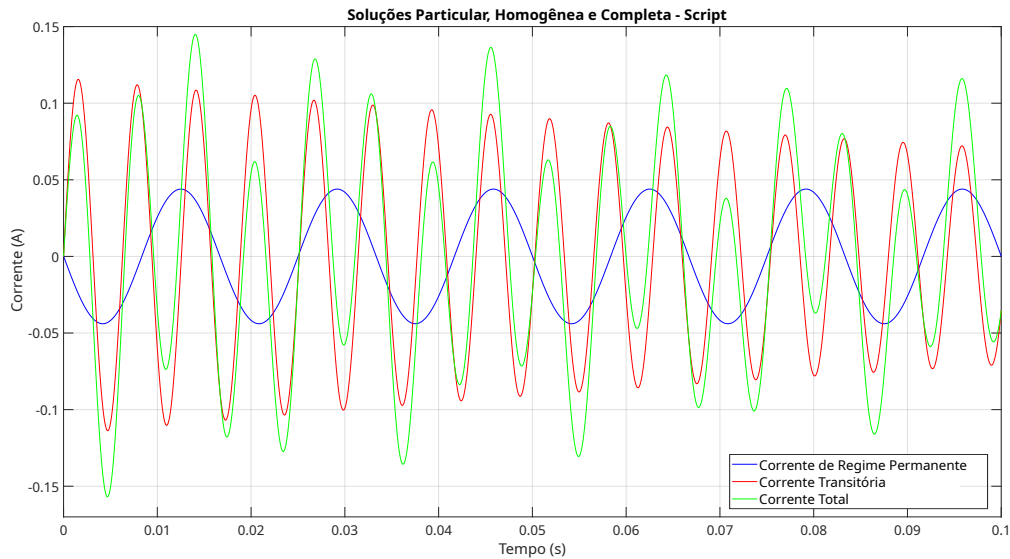
Ao expandir a simulação, a corrente transitória continuou a mostrar um comportamento subamortecido, formando uma envoltória ao redor da onda. Comparado ao primeiro circuito, a frequência natural deste circuito é menor, o que aumenta a amplitude da corrente máxima, que começou em aproximadamente $0,069A$. A corrente total exibiu uma variação de cerca de $0,06404A$ entre seus pontos mais alto e mais baixo.

Em anexo, realizou-se também a simulação com um ângulo de fase de 60° e observou-se que, no início da simulação, as correntes transitória e em regime permanente apresentam valores iguais, porém em direções opostas, resultando em uma corrente total inicial nula. Todas as correntes demonstram um comportamento senoidal, com comprimentos de onda diferentes.

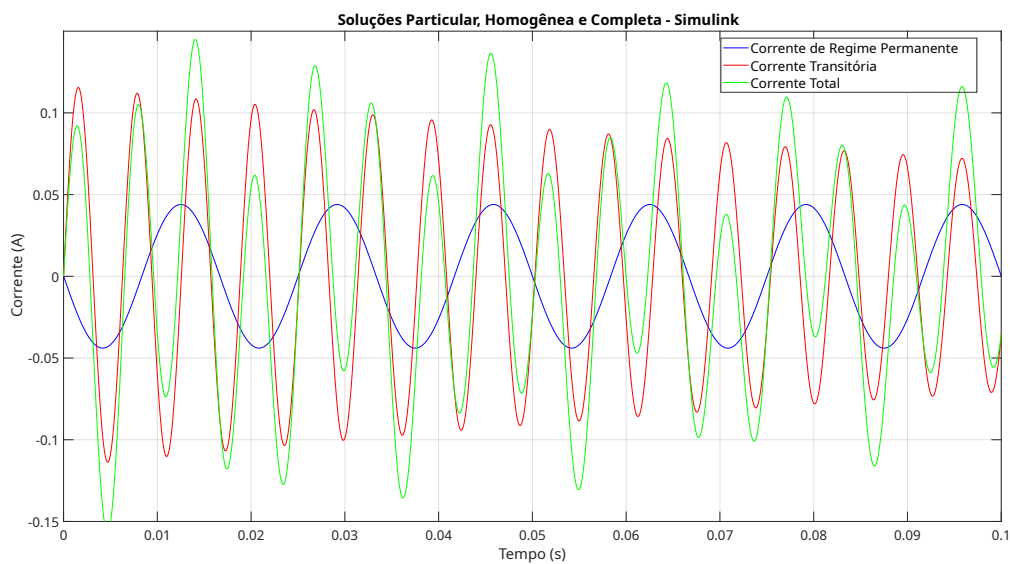
Durante a simulação, a corrente transitória atinge um pico máximo e um mínimo, resultando em uma oscilação notável. A corrente total exibe variações consideráveis entre seus pontos mais altos e baixos, além de apresentar comportamentos irregulares, devido à falta de sincronia entre os picos das correntes transitória e em regime permanente. Esta simulação com detalhes encontra-se no Anexo A.2.2.

4.3.6 Segundo Circuito - Ângulo de Fase 90°

Em sequência, foi realizada a simulação com um ângulo de fase para a tensão senoidal de 30° , resultando assim na Figura 4.44.



(a) Script



(b) Simulink

Figura 4.44: Circuito 2 - Ângulo de Fase 90°

Na Figura 4.44, observa-se que no início da simulação a corrente transitória (curva vermelha) apresenta $-0,0001931A$, a corrente em regime permanente (curva azul) apresenta $0,0001931A$ e a corrente total (curva verde) apresenta $0A$. Todas apresentam comportamento senoidal, com

diferente comprimentos de onda.

O comportamento das correntes pode ser melhor observado, aumentando o tempo de simulação, esses resultados são apresentados na Figura 4.45 que apresenta a correntes em um tempo de simulação de 1s.

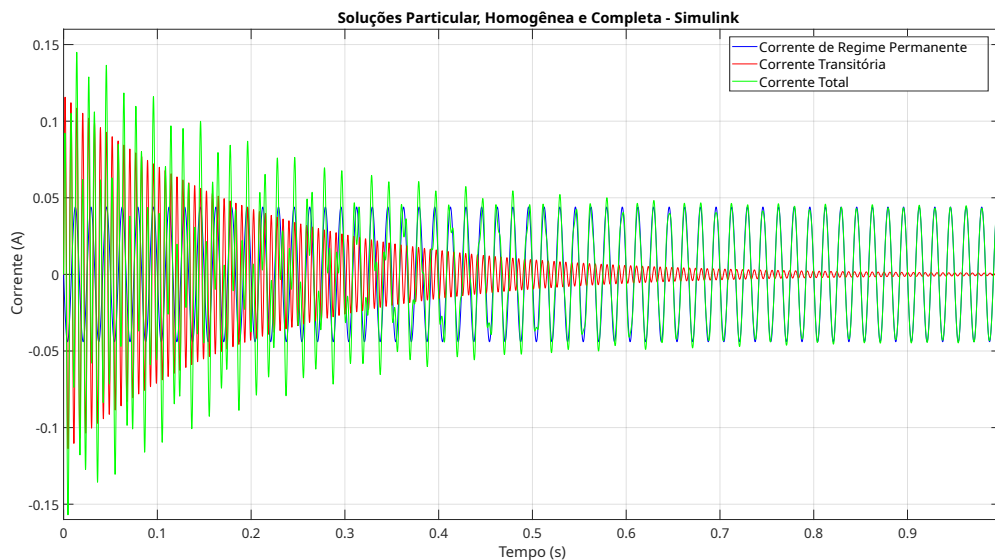


Figura 4.45: Soluções em 90° - Circuito 2

Ao observar a Figura 4.45, percebe-se uma variação de cerca de 0,1006A entre o ponto mais alto e o mais baixo da curva da corrente total (curva verde). Além disso, essa curva ainda apresenta comportamentos irregulares, derivados da falta de sincronia entre os picos da corrente transitória e da corrente em regime permanente.

A Figura 4.45 juntamente com as variações obtidas mostram que a variação na corrente total aumenta com o ângulo. Isso ocorre porque, à medida que o ângulo aumenta, os picos da corrente em regime permanente e da corrente transitória se aproximam. Como resultado, os picos da corrente total também aumentam.

Para finalizar, um gráfico da corrente transitória é realizado para melhorar a visualização do seu comportamento, esse resultado é apresentado na Figura 4.46.

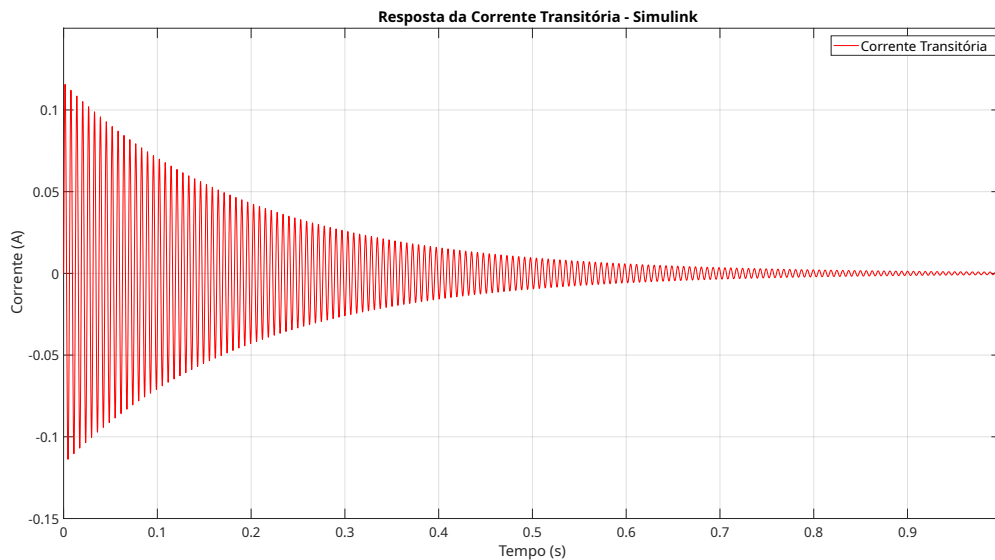


Figura 4.46: Curva da Corrente Transitória - 90°

Na Figura 4.46 com um tempo de simulação de 1 segundo, a corrente transitória atinge seu ponto mais alto, atingindo 0,1156A, enquanto o pico mais baixo é registrado em 0,0008081A. Isso implica em uma oscilação notável de 0,148A, tudo isso ocorrendo em apenas 993,184ms.

Portanto, no segundo circuito com um ângulo de fase de 90° , observa-se que, no início da simulação, as correntes transitória e em regime permanente têm valores iguais, porém em direções opostas, resultando em uma corrente total inicial nula. Todas as correntes apresentam um comportamento senoidal com diferentes comprimentos de onda.

Durante a simulação, a corrente transitória atinge picos máximo e mínimo, resultando em uma oscilação notável. A corrente total exibe variações consideráveis entre seus pontos mais altos e baixos e apresenta comportamentos irregulares, devido à falta de sincronia entre os picos das correntes transitória e em regime permanente.

Com o aumento do ângulo de fase, a variação na corrente total aumenta, pois os picos da corrente em regime permanente contribuem para maiores oscilações na corrente total.

4.4 Circuito RLC Série - Frequência de Ressonância

A teoria de frequência de ressonância foi apresentada na seção 2.5 e este presente tópico destina-se a explicar as etapas de simulações. A análise focará na resposta do circuito durante

o transitório, abordando a interação entre a corrente e a tensão da fonte. Serão exploradas as características da corrente em relação à tensão, evidenciando a defasagem observada e os efeitos da frequência de ressonância na resposta do circuito. Posteriormente será analisado também o módulo da impedância evidenciando o valor calculado. Após isso, será abordado a descrição do ângulo da impedância, conseguindo concluir com novamente os valores calculados. Por fim, será atualizado o circuito atualizando o valor da indutância, sendo assim, será feito as mesmas análises descritas acima para o circuito 1.

4.4.1 Descrição da Corrente - Primeiro Circuito

Nesta seção serão observados o comportamento da corrente do seguinte circuito:

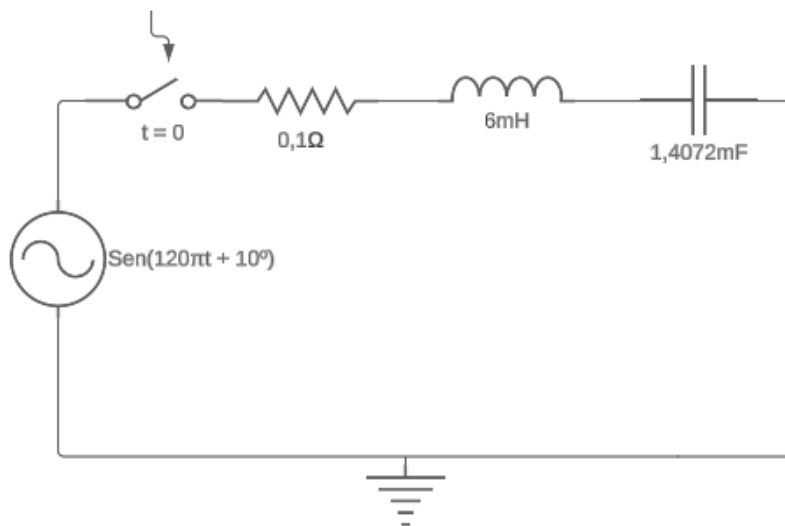


Figura 4.47: Circuito 1

O circuito apresentado na Figura 4.47 possui uma resistência de $0,1\Omega$, um indutor de 6mH , um capacitor de $1,4072\text{mF}$ e uma fonte de $v(t) = \text{Sen}(120\pi t + 10^\circ)$. O coeficiente de amortecimento é obtido utilizando a Equação 2.124, sendo assim, tem-se:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{0,1}{2 * 0,006} = 8,3333 \quad (4.25)$$

A frequência natural do circuito é obtida por meio da Equação 2.126, sendo assim, tem-se:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,006 * 0,0014072}} = 344,1489 \text{ rad/s} \quad (4.26)$$

A constante de tempo é determinada como sendo o inverso da parte real dos polos [20], sendo assim, tem-se:

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8,3333} = 0,12 \text{ s} \quad (4.27)$$

A frequência de oscilação do circuito é calculada por meio da relação 2.125, sendo assim, tem-se:

$$\omega d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = 16,57423 \text{ rad/s} \quad (4.28)$$

Em que:

$$f = \frac{\omega d}{2 * \pi} = 2,63787 \text{ Hz} \quad (4.29)$$

Calcula-se assim o período transitório como sendo:

$$T = \frac{1}{f} = 0,379094 \text{ s} \quad (4.30)$$

Para a frequência 60 Hz , as reatâncias indutiva e capacitiva são descritas pelas Equações 2.89 e 2.90. Substituindo os parâmetros do circuito 1, tem-se:

$$XL = 2\pi fL = 2 * \pi * 60 * 6 \times 10^{-3} = 2,262 \Omega \quad (4.31)$$

$$XC = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 * \pi * 55 * 1,4072 \text{ m}} = 1,885 \Omega \quad (4.32)$$

De acordo com a Equação 2.91, determina-se o valor da reatância do circuito 1 igual a:

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 2,262 - 1,885 = 0,377\Omega \quad (4.33)$$

Sendo assim, considerando a relação $Z = \sqrt{R^2 + S^2}$ para definir o valor do módulo da impedância, tem-se então:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + S^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,377^2} = 0,390\Omega \quad (4.34)$$

Como demonstrado pelas Equações 4.31 e 4.32, o valor da reatância indutiva é maior em comparação à reatância capacitiva. Sendo assim, a reatância tem predominância indutiva, resultando em um comportamento indutivo, no qual a corrente está defasada em relação à tensão. Com esses resultados, é possível determinar o atraso da corrente em relação à tensão utilizando os valores de XL e XC na Equação 2.105:

$$\delta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{S}{R} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{XL - XC}{R} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2,262 - 1,885}{0,1} \right) = 75,14^\circ \quad (4.35)$$

Portanto, a impedância do circuito 1 é:

$$Z = 0,390 \angle 75,14^\circ \Omega = (0,10 + j0,377)\Omega \quad (4.36)$$

A princípio, o desenvolvimento do experimento baseou-se na realização e interpretação do primeiro circuito, cujos valores de impedância utilizados seguem conforme a Figura 4.27 e a tensão da fonte é descrita por $v(t) = \text{sen}(120\pi t + 10^\circ)$. O comportamento do circuito durante o transitório é apresentado na Figura 4.48.

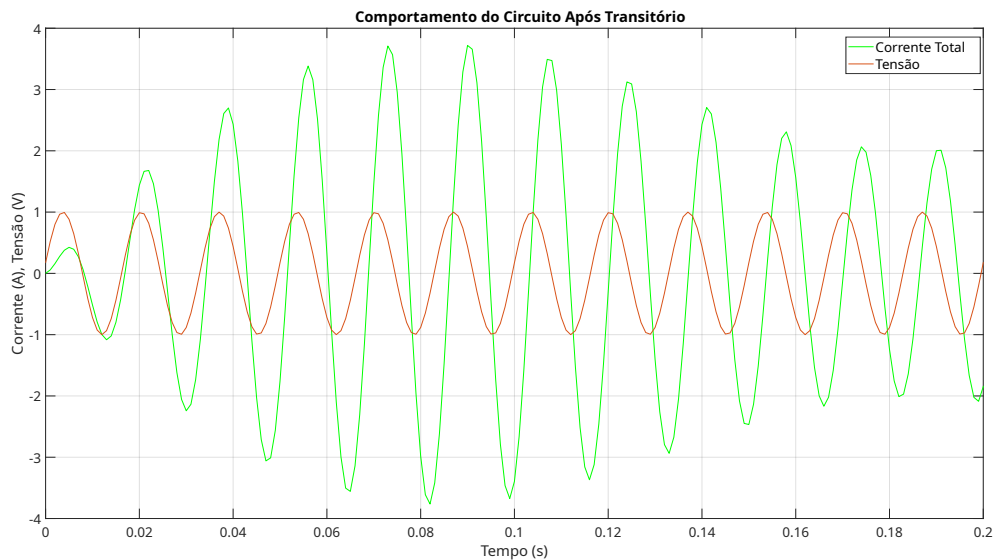


Figura 4.48: Comportamento do Circuito Após Transitório 200ms

Na Figura 4.48, a curva verde representa a corrente total no circuito após o transitório, enquanto a curva laranja representa a tensão após o transitório. Nota-se que, a corrente total apresenta uma defasagem em relação à tensão. Observando o gráfico, no instante 0s, o valor da tensão apresenta é de 0,174V, enquanto o valor da corrente é de 0A.

O comportamento da corrente difere do comportamento da tensão: enquanto a tensão apresenta picos lineares de 1V durante todo o período de simulação, a corrente mostra picos crescentes até atingir um máximo de aproximadamente 3,755A, após o qual seus picos começam a decrescer. Para verificar o comportamento em um tempo de simulação maior, o tempo de simulação foi alterado de 200ms para 400ms, resultando na Figura 4.49.

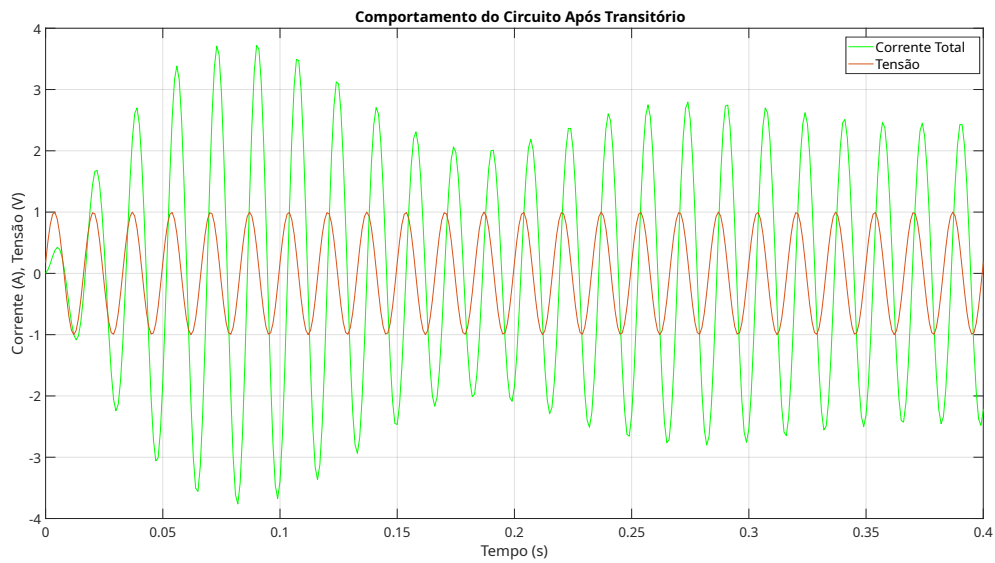


Figura 4.49: Comportamento do Circuito Após Transitório 400ms

A Figura 4.49 mostra os resultados das correntes em 400ms de simulação. Assim como analisado na Figura 4.48, cujo tempo de simulação era até um período 200ms, a corrente possui valor crescente e decrescente tendo como pico máximo o valor de 3,755A. Entre os tempos de simulação 200ms até 400ms nota-se um comportamento cíclico: após a tensão atingir um valor mínimo de 2,043A ela cresce novamente até 2,806A, que é menor que o primeiro pico analisado. Depois disso, ela passa a decrescer.

Após a corrente atingir seu segundo menor pico, cujo valor foi de 2,454A, os próximos picos passam a apresentar valores próximos, sem grandes variações, demonstrando a estabilização da tensão. Isso pode ser visto melhor aumentando um pouco mais o tempo de simulação, conforme a Figura 4.50.

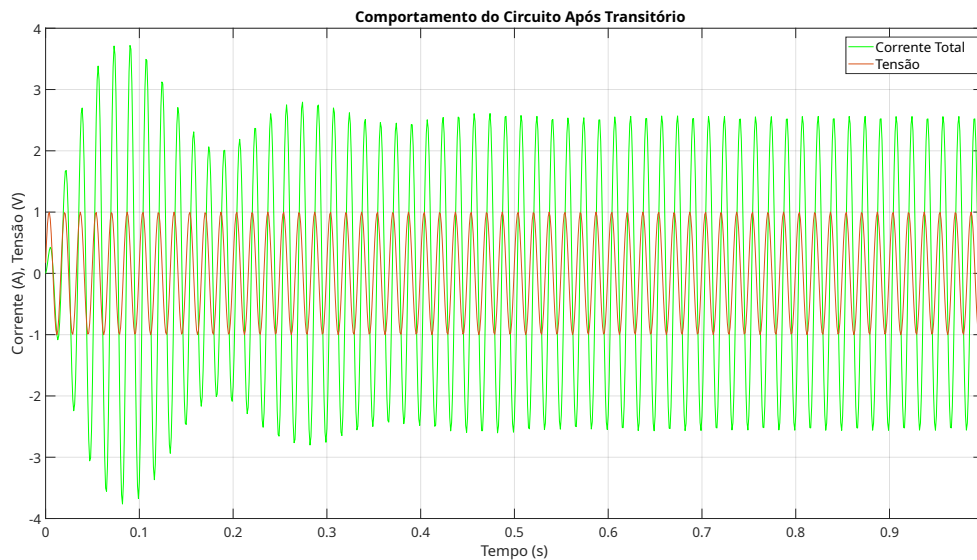


Figura 4.50: Comportamento do Circuito Após Transitório 1000ms

Conforme verificado na Figura 4.50, após 1000ms, visivelmente na curva da corrente (curva verde) ainda ocorre um terceiro comportamento crescente e decrescente, entretanto esses picos atingem valores inferiores aos picos anteriores. A posteriori, é verificado a linearidade dos valores de picos corrente (curva verde) em aproximadamente 2,560A, demonstrando a estabilização da tensão.

Fundamentando nas figuras anteriores, verifica-se que no primeiro circuito os valores de corrente alcançam picos de corrente superiores aos valores nominais que o circuito apresenta após estabilização. Isso pode ser explicado pelo fato da frequência de ressonância ser diferente da frequência da fonte. Dessa forma, a corrente e a tensão não possuem sincronia entre os picos e cruzamento no eixo x (tempo). Isso promove uma corrente total com característica que podem exceder seus valores nominais.

Portanto, nesta seção o estudo do Circuito RLC Série com foco na frequência de ressonância revela detalhes importantes sobre o comportamento da corrente e da tensão após o transitório. Nos gráficos analisados, observa-se que, inicialmente, a corrente atinge picos de aproximadamente 3,755A, enquanto a tensão mantém picos lineares de 1V. Com o aumento do tempo de simulação para 400ms, os picos da corrente se tornam menores, estabilizando em valores mais baixos.

Após 1000ms, a corrente apresenta variações menores, mas demonstra uma estabilização

visível com picos reduzidos, aproximando-se de 2,560A. A tensão, por sua vez, mantém-se linear ao longo do tempo de simulação. A diferença entre os valores iniciais de corrente e tensão se deve à defasagem da corrente em relação à tensão, característica do comportamento indutivo do circuito.

Comparando os gráficos, verifica-se que os picos de corrente iniciais são superiores aos valores nominais devido à diferença entre a frequência de ressonância e a frequência da fonte, resultando em uma corrente que pode exceder os valores nominais do circuito antes de estabilizar.

4.4.2 Descrição do Módulo da Impedância - Primeiro Circuito

Para analisar o comportamento do módulo do circuito, a frequência natural foi variada e foi obtido um gráfico do módulo em relação à frequência, conforme a Figura 4.51, no qual apresenta-se a curva de variação da impedância em relação a frequência.

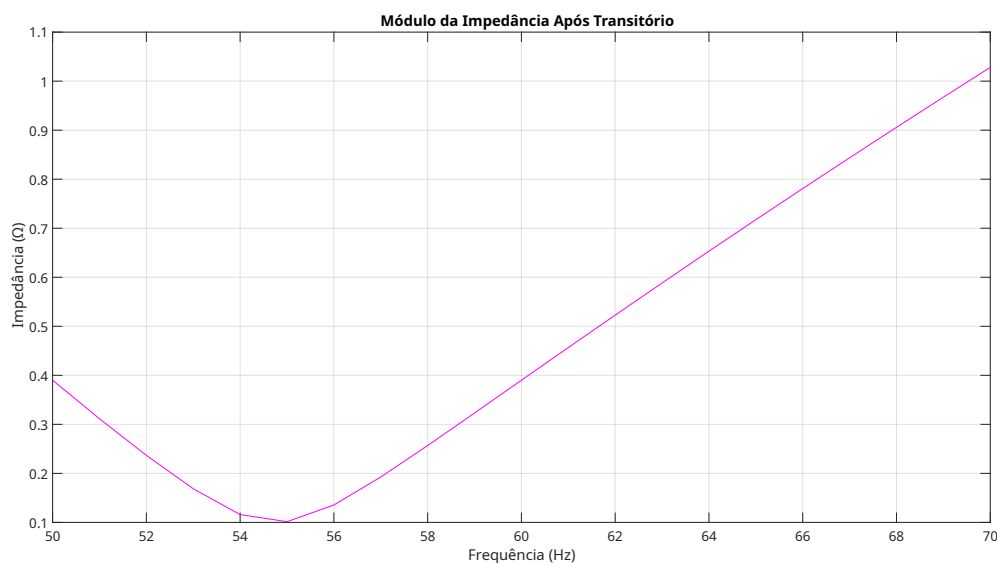


Figura 4.51: Módulo da Impedância Após Transitório

Da Figura 4.51, nota-se que a curva de variação da impedância em relação à frequência. Nota-se que o módulo da impedância atinge seu valor mínimo de $0,1014\Omega$ em $55Hz$. Na frequência natural de $60Hz$, a impedância obtida é de $0,3900\Omega$. Dessa forma, foi comprovado o valor de impedância obtido anteriormente na Equação 4.36.

Observa-se que o ponto crítico (mínimo da curva) representa o valor da resistência do sistema, pois nesse ponto a frequência de ressonância é atingida. Nessa condição, as reatâncias capacitiva e indutiva do sistema se anulam, deixando apenas a parte resistiva.

4.4.3 Descrição do Ângulo da Impedância - Primeiro Circuito

Da mesma forma que foi utilizada para analisar o comportamento do módulo da impedância, para analisar o ângulo também será variada a frequência natural, para assim obter um gráfico do ângulo em relação à frequência, conforme a Figura 4.52, na qual apresenta-se a curva característica do ângulo em função da frequência.

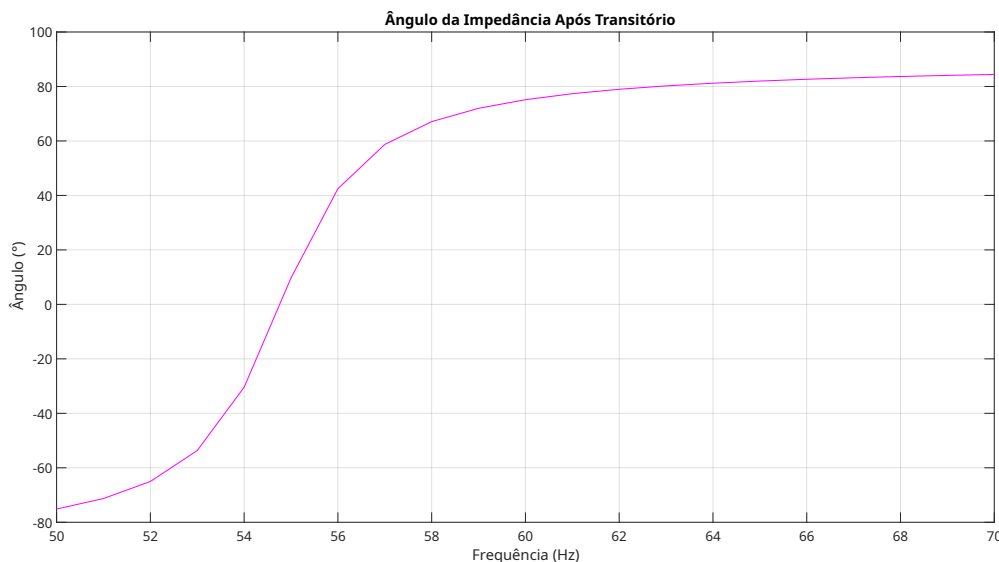


Figura 4.52: Ângulo da Impedância Após Transitório.

Diferentemente do módulo da impedância, que atinge seu valor mínimo na frequência de ressonância, o ângulo não segue essa mesma tendência. Fundamentado na Figura 4.52, do ângulo em relação à frequência, é possível identificar se o sistema é indutivo ou capacitivo. Isso ocorre devido à natureza da carga do circuito: para frequências abaixo da frequência de ressonância, a carga é predominantemente capacitiva; enquanto para frequências acima dela, a carga tende a ser indutiva. Assim, a frequência de ressonância representa o ponto em que o ângulo atinge o valor de 0° , o que é um limiar significativo para definir as características do circuito.

Além disso, confirma-se no gráfico da Figura 4.52 a validade da Equação 4.35. Por exemplo, ao utilizar o cursor, observa-se um ângulo de atraso de $75,14^\circ$ para uma fonte de 60Hz , que corresponde ao mesmo valor obtido por cálculos numéricos.

4.4.4 Descrição da Corrente - Segundo Circuito

Nesta seção será observado o comportamento da corrente do circuito da Figura 4.53. Em comparação ao circuito 1, a mudança para este circuito é o valor da indutância, sendo assim:

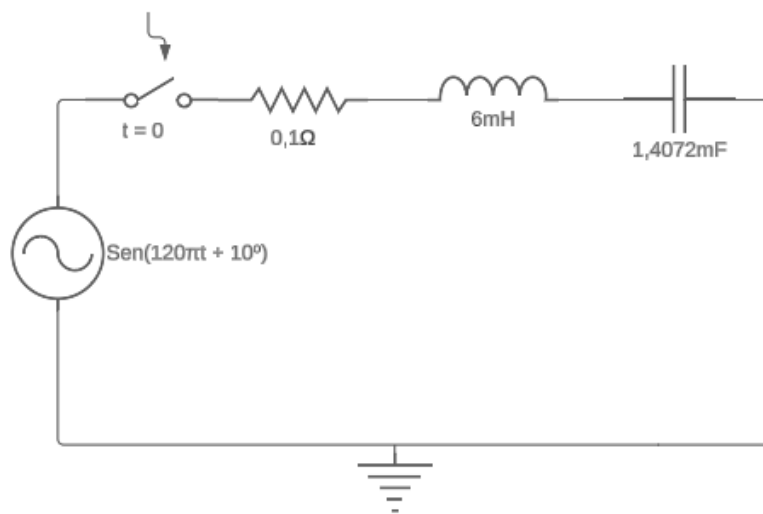


Figura 4.53: Circuito 2

O circuito apresentado na Figura 4.53 possui uma resistência de $0,1\Omega$, um indutor de 5mH , um capacitor de $1,4072\text{mF}$ e uma fonte de $v(t) = \text{Sen}(120\pi t + 10^\circ)$. Analogamente ao circuito 1, mas agora utilizando os parâmetros do circuito 2, o coeficiente de amortecimento é determinado utilizando a Equação 2.124, sendo assim:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = -\frac{0,1}{2 * 0,005} = 10 \quad (4.37)$$

A frequência natural do circuito é obtida por meio da Equação 2.126, sendo assim:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,005 * 0,0014072}} = 376,9963\text{rad/s} \quad (4.38)$$

A constante de tempo é determinada como sendo o inverso da parte real dos polos [20], sendo assim:

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{10} = 0,10s \quad (4.39)$$

A frequência de oscilação do circuito é calculado por meio da Equação 2.125, sendo assim:

$$\omega d = \sqrt{\omega_o - \alpha^2} = 16,6432rad/s \quad (4.40)$$

Em que:

$$f = \frac{\omega d}{2 * \pi} = 2,648848Hz \quad (4.41)$$

Após isso, calcula-se o período do transitório como sendo:

$$T = \frac{1}{f} = 0,377523s \quad (4.42)$$

Para a frequência $60Hz$, a reatância indutiva e capacitiva são determinadas de acordo com as Equações 2.89 e 2.90. Substituindo os parâmetros do circuito 2, tem-se:

$$XL = 2\pi fL = 2 * \pi * 60 * 5 \times 10^{-3} = 1,885\Omega \quad (4.43)$$

$$XC = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 * \pi * 55 * 1,4072m} = 1,885\Omega \quad (4.44)$$

De acordo com a Equação 2.91, determina-se o valor da reatância do circuito 2, igual a:

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 1,885 - 1,885 = 0\Omega \quad (4.45)$$

Analisando o resultado da Equação 4.45 notou-se que o circuito se encontra em ressonância. A frequência de ressonância pode ser obtida utilizando a Equação 2.132, tem-se então:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{376,9963}{2\pi} = 60Hz \quad (4.46)$$

Portanto, para este circuito RLC a frequência de ressonância é $60Hz$. Nota-se a comprovação de que a frequência de ressonância é igual a frequência da fonte de alimentação. Nesse caso, a única contribuição para a impedância é a resistência do resistor. Sendo assim, considerando a relação $Z = \sqrt{R^2 + S^2}$ para encontrar o valor do módulo da impedância, tem-se então:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + S^2} = \sqrt{0,1^2} = 0,1\Omega \quad (4.47)$$

Por ser um circuito RLC em ressonância, a reatância será zero, resultando em um comportamento resistivo do circuito. Sendo assim, a corrente está em fase com a tensão. É possível também comprovar matematicamente determinando o ângulo da impedância utilizando os valores de XL e XC na Equação 2.105:

$$\delta = tg^{-1}\left(\frac{S}{R}\right) = tg^{-1}\left(\frac{XL - XC}{R}\right) = tg^{-1}\left(\frac{1,885 - 1,885}{0,1}\right) = 0^\circ \quad (4.48)$$

Portanto, a impedância do circuito 2 é:

$$Z = 0,1\angle 0^\circ\Omega = (0,1 + j0)\Omega \quad (4.49)$$

A princípio, o desenvolvimento do experimento baseou-se na realização e interpretação do segundo circuito, cujos valores de impedâncias utilizados seguem conforme a Figura 4.53 e a tensão da fonte é descrita por $v(t) = \text{sen}(120\pi t + 10^\circ)$. O comportamento do circuito durante o transitório é apresentado a Figura 4.54.

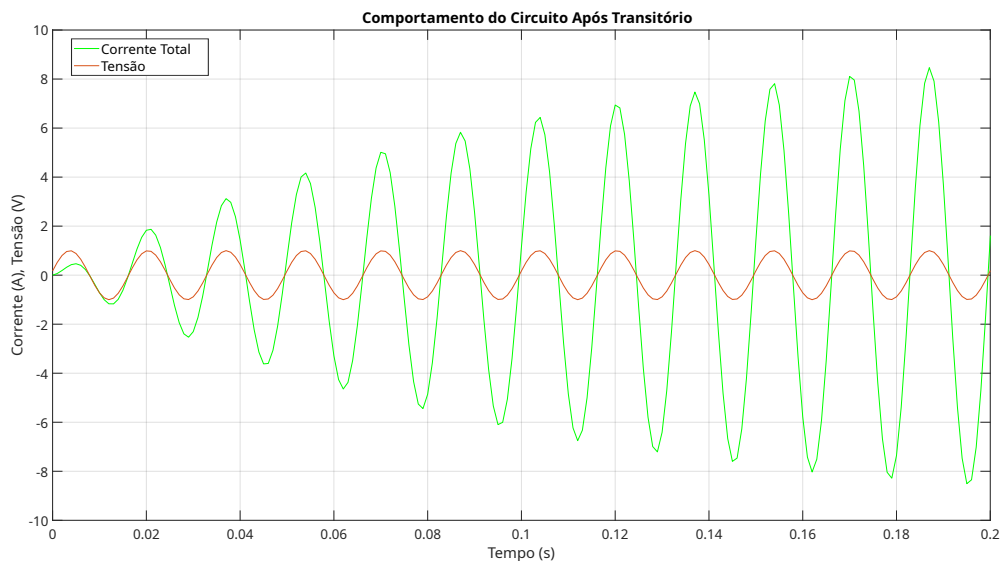


Figura 4.54: Comportamento do Circuito Após Transitório 200ms

Na Figura 4.54, a curva verde representa a corrente total no circuito durante o transitório e a curva laranja representa a tensão após o transitório. Medindo no gráfico é possível analisar, no instante 0s, que o valor da tensão é de 0,1735V enquanto o valor da corrente é de 0A.

O comportamento da tensão é semelhante ao do primeiro circuito, ou seja, uma curva com picos de 1A em todo o período de simulação. Já o comportamento da corrente apresenta uma característica distinto do primeiro circuito, que possuía picos crescentes e decrescentes ao longo do período de simulação, no segundo circuito os picos são apenas crescentes.

Durante 200ms de simulação os picos de corrente variam de 0,446A (menor valor de pico) até 8,465A, resultando uma variação de 7,889A. É importante analisar um período de simulação maior, entre 200ms e 400ms, para verificar o comportamentos das curvas, isso é apresentado na Figura 4.55.

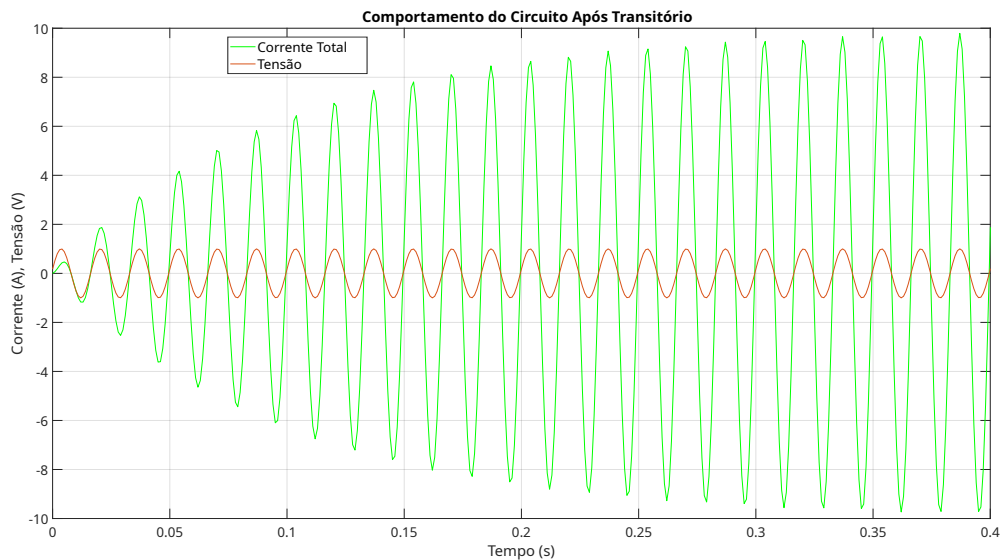


Figura 4.55: Comportamento do Circuito Após Transitório 400ms

A Figura 4.55 apresenta o comportamento do primeiro período em uma simulação de 400ms, conforme analisado anteriormente na Figura 4.54. Durante o período inicial até os 200ms, observam-se picos crescentes com variações relativamente altas. Ao analisar o período de tempo entre 200ms e 400ms, nota-se que o primeiro pico foi de 8,702A e o último de 9,791A, resultando em uma variação de 1,090A, sendo menor do que nos primeiros 200ms, refletindo uma possível estabilização.

Para verificar se houve estabilização dos picos de corrente em um valor fixo, foi realizado um gráfico utilizando um tempo de simulação de 1000ms, conforme apresentado na Figura 4.56.

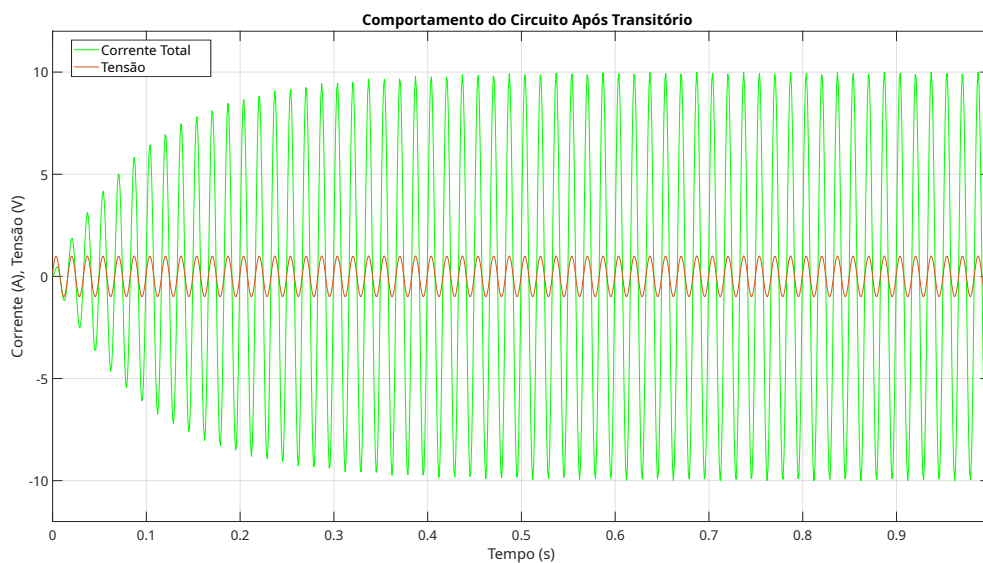


Figura 4.56: Comportamento do Circuito Após Transitório 1000ms

A Figura 4.56 exibe as curvas de tensão e corrente após o transitório durante um período de simulação de 1000ms, nota-se que nos últimos 200ms de simulação, a variação entre o menor e o maior pico de corrente foi de 0,00143A, com os picos variando de 9,997A até 9,998A. Esse comportamento demonstra a estabilização do valor da corrente em aproximadamente 10A.

Ao analisar as figuras anteriores, é perceptível que, no segundo circuito, os valores de corrente atingem o valor de estabilização sem apresentar variações abruptas, apenas com a formação de picos crescentes até o valor da corrente nominal. Isso pode ser explicado pelo fato da frequência de ressonância ser igual a frequência da fonte, dessa forma, tanto a corrente como a tensão possuem um período igual, coincidindo picos e cruzamento no eixo x (tempo). Promovendo corrente total com característica mais lineares até atingir seu valor nominal.

Portanto, a análise dos gráficos do Circuito RLC Série, focado na frequência de ressonância, revelou que na simulação de 200ms, a corrente apresentou picos crescentes até 8,465A, enquanto a tensão manteve picos lineares de 1A. Na simulação de 400ms, os picos de corrente variaram de 8,702A a 9,791A, indicando uma estabilização gradual. Por fim, na simulação de 1000ms, a corrente se estabilizou em aproximadamente 10A, com variações mínimas entre 9,9974A e 9,998A. A estabilização mais linear do segundo circuito deve-se à coincidência entre a frequência de ressonância e a frequência da fonte, resultando em uma corrente com características lineares até atingir seu valor nominal.

4.4.5 Descrição do Módulo da Impedância

Nesta seção será analisado o comportamento do módulo da impedância do circuito, para isso a frequência foi variada e foi obtido o gráfico do módulo em relação a frequência, conforme a Figura 4.57, no qual apresenta-se a curva de variação da impedância em relação a frequência.

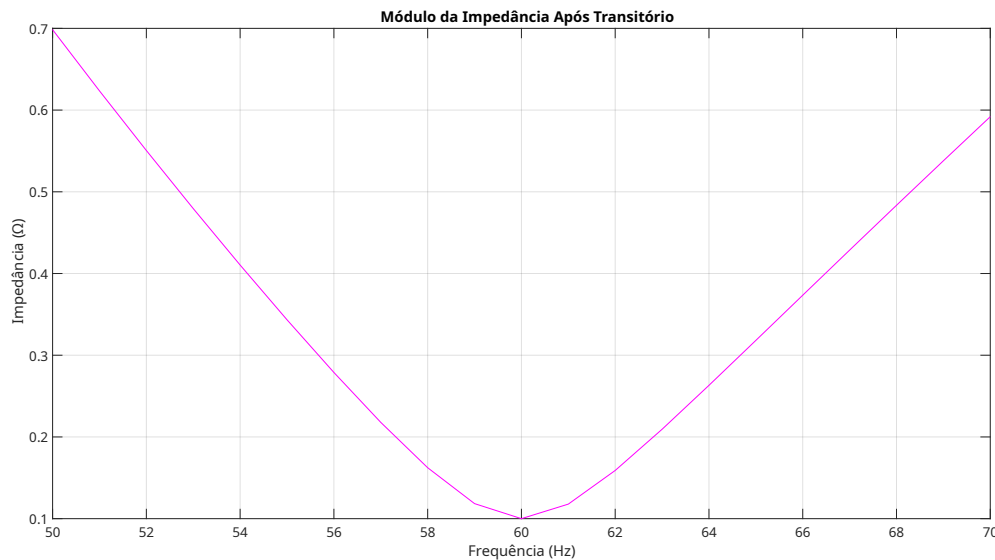


Figura 4.57: Módulo da Impedância Após Transitório

Da Figura 4.57, nota-se que curva de variação da impedância em relação à frequência, pode-se observar que o módulo da impedância atinge seu valor mínimo de $0,1\Omega$ em $60Hz$. Esse resultado pode ser explicado pelo fato de que a frequência de ressonância do sistema é igual à frequência da fonte, ou seja, $60Hz$.

Portanto, as reatâncias capacitivas e indutivas têm módulos iguais, porém com sinais opostos, o que resulta na anulação mútua dessas componentes, resultando em um valor impedância predominantemente resistivo, cujo valor é de $0,1\Omega$, como observado no gráfico.

4.4.6 Descrição do Ângulo da Impedância

Assim como foi feito para analisar o comportamento do módulo da impedância, será necessário variar a frequência natural para analisar o ângulo. Dessa forma, obtém-se um gráfico do ângulo em relação a frequência, conforme ilustrado na Figura 4.58.

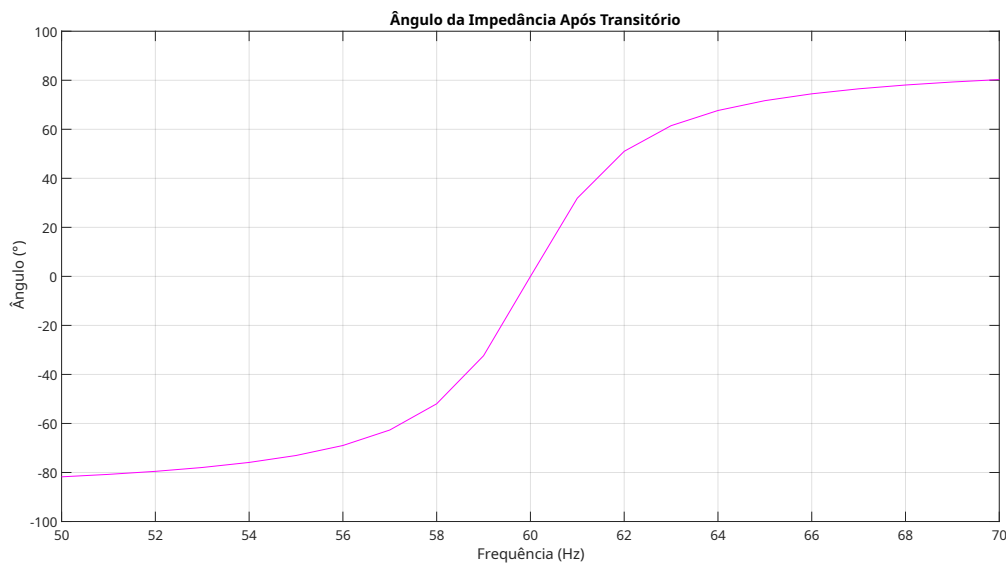


Figura 4.58: Ângulo da Impedância Após Transitório

Diferentemente da curva do módulo da impedância, que atinge seu mínimo valor na frequência de ressonância, a curva do ângulo não apresenta essa característica. Apesar dessa diferença, o gráfico do ângulo em relação à frequência é útil para identificar o tipo do sistema, seja ele indutivo ou capacitivo. Isso ocorre porque, para frequências abaixo da frequência de ressonância, a carga do circuito é capacitiva, enquanto para frequências superiores à frequência de ressonância, a carga do circuito é indutiva.

Como mencionado anteriormente, a impedância no segundo circuito é formada apenas pela parte resistiva do sistema. Essa parte resistiva é real e não apresenta ângulo. Por esse motivo, na frequência de ressonância do sistema, o ângulo é referido como sendo de 0° .

Capítulo 5 Conclusão

Em conclusão, a simulação do circuito RL alimentado por uma fonte de tensão senoidal revelou comportamentos significativos. O indutor demonstrou armazenar energia exponencialmente, liberando-a após o chaveamento e evidenciando sua resistência a mudanças abruptas de corrente. A dissipação da energia na resistência foi confirmada, pois após alguns ciclos o transitório foi extinto. O aumento da corrente total de 1A para 2A após o chaveamento introduziu correntes de regime permanente e transitória, cujas amplitudes foram influenciadas pelo ângulo do seno e pelo instante do curto-circuito. A variação do ângulo do seno de 0° para 90° resultou em mudanças marcantes, na qual o ângulo de 0° conduziu a menores valores de corrente em regime permanente e transitória, com carga e descarga mais rápidas do indutor, enquanto um ângulo de 90° levou a maiores valores de corrente para a carga e descarga mais lentas. Durante o decaimento exponencial, a discrepância inicial entre a corrente total e a corrente em regime permanente diminuiu à medida que ocorreu a descarga do indutor, indicando uma eventual sincronização.

Além disso, para o circuito RL utilizando o método discreto a aplicação da técnica de discretização de elementos revelou que o método trapezoidal, quando utilizado para a solução da equação homogênea mínima, produziu resultados próximos das soluções analíticas, com pequenas discrepâncias observadas durante momentos críticos como o curto-circuito. Essas diferenças foram atribuídas ao passo de integração definido pela regra trapezoidal. A análise dos gráficos de erro indicou que os maiores desvios ocorreram durante o curto-circuito, seguindo um padrão exponencial decrescente. Na análise da equação homogênea máxima, o método trapezoidal evidenciou uma significativa interferência da corrente transitória no momento do curto-circuito, refletindo um pico elevado, com diferenças atribuídas principalmente ao passo de integração do método. Em resumo, o método trapezoidal mostrou-se eficaz na análise do circuito RL série, com erros mínimos considerados aceitáveis para a análise. As discrepâncias observadas foram pequenas e relacionadas ao passo de integração, evidenciando a eficácia do método na reprodução da dinâmica do circuito.

Do circuito RLC série é possível notar que para o circuito 1, as respostas no domínio do

tempo se apresentaram como sendo subamortecidas. Isso ocorre por conta dos parâmetros do circuito, sendo eles a resistência, indutância e capacitância, logo a resposta do sistema contém parte real e imaginária em sua solução. Para o circuito 2, no qual são alterados o valor da indutância e da capacitância, tem-se que, novamente o sistema é do tipo subamortecido. Substituindo os valores dos parâmetros dos circuitos, obteve-se os seguintes polos, $s = -0,5000 \pm j0,8660$ para o circuito 1 e $s = -5 \pm j999,9875$ para o circuito 2. Comparando os dois circuitos notou-se que a frequência natural amortecida para o circuito 2 está bem maior em comparação ao circuito 1, sendo elas $999,9875 \text{ rad/s}$ e $0,8660 \text{ rad/s}$ respectivamente. Isto se traduz visualmente nos gráficos, sendo a frequência no circuito 2 maior, logo o período do transitório é menor. Diante do exposto, percebe-se que a variação dos parâmetros para um circuito RLC série com fonte de tensão é primordial para o tipo de resposta que deseja-se obter. Vale ressaltar que a oscilação do transitório é gerada pela parte imaginária do par de polos complexos conjugados enquanto o amortecimento ocorre gradativamente por efeito da parte real do par de polos complexos, o fator de amortecimento. Observou-se também a característica constatada no circuito 1 é que a medida que o ângulo θ é aumentado, o pico da corrente transitória sofre uma redução. Contudo, para o circuito 2 foi constatado que o aumento do ângulo θ resultou no aumento do módulo da corrente transitória.

Ademais, no circuito RLC analisando a frequência de ressonância identificou-se que o circuito 1 não está em estado de ressonância, enquanto o circuito 2 está em ressonância. Essas observações foram confirmadas tanto por análises matemáticas quanto por simulações. Matematicamente, constatou-se que a reatância é predominantemente indutiva para o Circuito 1, ao passo que para o Circuito 2, a reatância é praticamente inexistente, resultando em uma impedância mínima determinada apenas pela resistência. No caso do circuito 1, a impedância na frequência da fonte (60Hz) é de $0,390\Omega$, enquanto a impedância mínima (condição de ressonância) é de $0,1014\Omega$. Enquanto para o circuito 2, foram obtidos valores semelhantes de impedância utilizando as frequências da fonte de alimentação e a frequência de ressonância. Além disso, ao ajustar a frequência de ressonância para a frequência da fonte de alimentação do circuito, a impedância total do circuito é minimizada, resultando em uma corrente máxima. Outro aspecto crucial observado em um circuito em ressonância é a ausência de defasagem,

uma vez que a impedância é puramente resistiva, não havendo atraso na corrente em relação à tensão. Para concluir, ao analisar o comportamento de ambos os circuitos, tornou-se evidente que, quando o transitório não ocorre na frequência de ressonância, os valores da corrente podem exceder os nominais. Por outro lado, quando a frequência de ressonância coincide com a frequência da fonte, não se observam variações abruptas na corrente após a estabilização. Dessa forma, os valores das frequências de um sistema provocam impactos diretos no comportamento da corrente de um sistema.

Portanto, estudo apresentado neste trabalho de conclusão de curso ressalta a importância do estudo dos transitórios eletromagnéticos. Compreender e dimensionar corretamente as proteções é essencial para evitar que esses transitórios comprometam o desempenho e a segurança do sistema elétrico. A análise demonstrou que diferentes circuitos reagem de maneiras diversas a esses fenômenos, destacando a necessidade de um dimensionamento preciso das proteções para preservar a integridade do sistema.

Além disso, uma gestão eficaz dos transitórios melhora o desempenho dos equipamentos, prevenindo sobrecargas e falhas prematuras. No desenvolvimento tecnológico, entender esses fenômenos é crucial para garantir que novos dispositivos operem de maneira segura e eficiente em sistemas já existentes. Portanto, o estudo dos transitórios é fundamental para a continuidade e qualidade dos sistemas elétricos de potência e para o avanço tecnológico na engenharia de potência.

O estudo de transitórios se demonstrou essencial para a Objetivos de Desenvolvimento Sustentável 12 (ODS 12) da ONU, que promove padrões de produção e consumo responsáveis. Identificando correntes e tensões muito acima dos níveis nominais, esse estudo previne danos aos equipamentos, garantindo seu uso eficiente e prolongando sua vida útil. Além disso, o uso de sistemas de proteção, como relés de proteção e filtros, é vital para interromper e minimizar os efeitos dos transitórios eletromagnéticos. Esses mecanismos asseguram a continuidade e segurança das operações, reduzindo desperdícios e promovendo uma gestão sustentável dos recursos elétricos.

Capítulo 6 Sugestões de Estudos Futuros

Para trabalhos futuros, sugere-se a realização de simulações do circuito RLC utilizando o software ATP (Alternative Transients Program). Isso permitirá ampliar a análise do circuito RLC ao implementar e configurar os parâmetros conforme as simulações feitas no MATLAB. Além disso, é recomendada a comparação dos dados obtidos no ATP com os do MATLAB, a fim de avaliar a precisão e consistência entre os dois softwares. Essa comparação será feita graficamente e com o uso de métricas estatísticas, investigando-se as causas de possíveis discrepâncias devido a diferenças nos algoritmos de simulação.

Finalmente, sugere-se a validação das simulações por meio da construção e teste de um protótipo físico dos circuitos RL e RLC em laboratório. A resposta do circuito físico será medida e comparada com os resultados das simulações, ajustando-se o modelo teórico conforme necessário para melhorar a precisão das simulações. Essas etapas proporcionarão uma análise detalhada e robusta do comportamento dos circuitos RL e RLC.

Bibliografia

- [1] BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J. *Numerical Analysis*. 9^a. ed. : BROOKS/COLE CENGAGE Learning, 2011.
- [2] DAS, J. C. *Transients in Electrical Systems; Analysis, Recognition, and Mitigation*. . : McGraw-Hill, 2010.
- [3] SLUIS, L. V. D. *Basic Concepts and Simple Switching Transients*. Editora John Wiley and Sons, 2001.
- [4] PAULILLO, G.; TEIXEIRA, M. D.; BACCA, I. *Qualidade de energia: Capítulo XI - Transitórios*. 1^a. ed. : O Setor Elétrico, 2013.
- [5] GMBH, P. C. *Lightning and surge protection basics*. 1^a. ed. : PHOENIX CONTACT, 2014.
- [6] UMANS, S. D. *Máquinas Elétricas, de Fitzgerald e Kingsley*. 7^a. ed. : AMGH EDITORA LTDA, 2014.
- [7] SEDRA, A. S.; SMITH, K. C. *Microeletrônica*. 5^a. ed. : Pearson Education, 2000.
- [8] CARVALHO, P. F. D. *Análise de transitórios eletromagnéticos de manobra em linhas de transmissão*. 1^a. ed. : [s.n.], 2018.
- [9] STEWART, J. *Cálculo, Volume 1*. 5^a. ed. : Editora Thomson, 2006.
- [10] PAULANTI, C. M. Área Das Figuras Planas. Uso Da Fórmula De Heron. UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO- UENF CAMPOS DOS GOYTACAZES- RJ, 2014.
- [11] WILHELM, V. E.; KLEINA, M. MÉTODOS NUMÉRICOS, Interpolação - Método de Lagrange. UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR, 2020.
- [12] JUNIOR, L. C. Z. *Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência*. . : Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

- [13] COGO, J. R.; OLIVEIRA, A. R. C. de. *Aplicação do Método de Integração Trapezoidal em Sistemas Elétricos*. GSI - ENGENHARIA E CONSULTORIA LTDA, 1983.
- [14] LOPES, F. V. *Implementação de um Software para Estimar o valor de Pico da Corrente de Inrush durante a Energização de Transformadores Monofásicos*. Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, 2009.
- [15] ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 5ª. ed. : Editora Amgh LTDA, 2013.
- [16] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9ª. ed. : LTC Editora LTDA, 2010.
- [17] GLOVER, D. J.; OVERBYE, T. J.; SARMA, M. S. *Power System Analysis & Design*. 6ª. ed. : CENGAGE Learning, 2017.
- [18] KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 10ª. ed. : Editora John Wiley and Sons, 2011.
- [19] STEWART, J. *Cálculo, Volume 2*. 7ª. ed. : Editora Thomson, 2014.
- [20] NISE NORMAN, S. *Engenharia de Sistema de Controle*. 6ª. ed. : Editora LTC, 2013.
- [21] YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física 3, Eletromagnetismo*. 12ª. ed. : Pearson Education, 2009.
- [22] ZANI SERGIO, L. *Funções de uma Variável Complexa*. USP, 2004.
- [23] BRADY, J. E.; HUMISTON, G. E. *QUÍMICA GERAL, Unidades SI*. 2ª. ed. : Livros técnicos e científicos editora, 1997.

Capítulo A Anexos

A.1 Script/MATLAB

A.1.1 Script Chaveamento RL - Gráficos das Correntes - Regra Analítica

O seguinte código foi utilizado para a simulação de um circuito RL, as equações implementadas nele foram obtidas através da solução analítica. Através dele é possível obter os gráficos da corrente de regime permanente, da corrente transitória e da corrente total.

```
clear all;
close all;
clc;

f = 60;
T = 1/f;
w = 2*pi*f;
dt = 1e-5;
Ttotal = 10*T;
Ntotal = floor(Ttotal/dt);

% Parâmetros do circuito
R = 10;
L = 266e-3;
Vm = 100;
teta = 30*(pi/180);
t0 = 44.18e-3;
M = 0;

for k = 1:Ntotal
    t = (k-1)*dt;
    if t < t0
        A = 0;
    else
        if M == 0
            R = R/2;
            L = L/2;
            A = exp(R*(t-dt)/L)
                *(i(k-1) - Vm/sqrt(R^2 + (w*L)^2) * sin(w*(t-dt) + teta - atan(w*L/R)));
            M = 1;
        end
    end
end

v(k) = Vm*sin(w*t+teta);
```

```

ip(k) = (Vm/sqrt(R^2+(w*L)^2))*sin(w*t+teta-atan(w*L/R));
% Solução da Equação particular (Resposta em regime permanente),
antes do transitório

ih(k) = A*exp(-R*t/L); % Solução da Equação homogênea
(Resposta Transitória)

i(k) = ip(k)+ih(k);

tempo(k) = t; % Armazenando a variável tempo em segundos
end

figure(1),
plot(tempo,ip,'b',LineWidth=1);
hold on
plot(tempo,ih,'r',LineWidth=1);
hold on
plot(tempo,i,'g',LineWidth=1);
title('Soluções Particular, Homogênea e Completa - Script',FontSize=20);
xlabel('Tempo (s)',FontSize=20);
ylabel('Corrente (A)',FontSize=20);
xlim([0,0.16]);
ylim([-2.75,2.75])
set(gca,'FontSize',16)
grid on;
legend('Corrente de Regime Permanente','Corrente Transitória ','Corrente Total', 'Location', 'Best',FontSize=

```

A.1.2 Script Chaveamento RL - Gráficos das Corrente - Regra Trapezoidal

O seguinte código foi utilizado para a simulação de um circuito RL, as equações implementadas nele foram obtidas através da Regra Trapezoidal. Através dele é possível obter os gráficos da corrente de regime permanente, da corrente transitória e da corrente total. Além disso, nele é obtido uma curva de erro entre os valores da Regra Trapezoidal e a Regra Analítica.

```

close all;
clc;

f=60;
T=1/f;
w=2*pi*f;
dt=1e-5;
Ttotal=10*T;
Ntotal=floor(Ttotal/dt);

% Parâmetros do circuito

```

```

R=10;
L=266e-3;
Vm=100;
teta=30*(pi/180);
t0=12e-3;

% Laço de Simulação da Solução Analítica %
M=1;
for k=1:Ntotal
    t=(k-1)*dt;
    if t < t0
        A1=0;
        A2=0;
        B=1;
    else
        if M==1
            R=R/2;
            L=L/2;
            A1=exp(R*(t-dt)/L)*(i(k-1)-Vm/sqrt(R^2+(w*L)^2)*sin(w*(t-dt)+teta-atan(w*L/R)));
            A2=exp(R*(t-dt)/L)*(i(k-1));
            B=0;
            M=0;
        end
    end
    v(k)=Vm*sin(w*t+teta);
    ip(k)=(Vm/sqrt(R^2+(w*L)^2))*sin(w*t+teta-atan(w*L/R)); %Solução da Equação particular
    (Resposta em regime permanente), antes do transitório
    ih1(k)=A1*exp(-R*t/L); %Solução da Equação homogênea (resposta Transitória)
    ih2(k)=A2*exp(-R*t/L);
    i(k)=ip(k)+ih1(k);
    i2(k)=B*ip(k)+ih2(k);

    tempo(k)=t; %Armazenando a variável tempo em segundos
end

% Laço de Simulação da Solução Trapezoidal %
R=10;
L=266e-3;
RLa=(2*L)/dt;
G=1/R+dt/(2*L);
RLf=L/dt;
Gf=2/R+dt/L;
IL_0=Vm/sqrt(R^2+(w*L)^2)*sin(teta-atan(w*L/R));%corrente inicial com a chave aberta

for x=1:Ntotal
    te=(x-1)*dt;
    v(x)=Vm*sin(w*te+teta);

```

```

if te<t0
    if x==1
        v1(x)=inv(G)*(v(x)/R-IL_0);
        i1r(x)=v1(x)/RLa+IL_0;
        IL(x)=i1r(x)+v1(x)/RLa;

        v2(x)=inv(G)*(v(x)/R-IL_0);
        i2r(x)=v2(x)/RLa+IL_0;
        IL2(x)=i2r(x)+v2(x)/RLa;
    else
        v1(x)=inv(G)*(v(x)/R-IL(x-1));
        i1r(x)=v1(x)/RLa+IL(x-1);
        IL(x) = i1r(x) + v1(x)/RLa;

        v2(x)=inv(G)*(v(x)/R-IL2(x-1));
        i2r(x)=v2(x)/RLa+IL2(x-1);
        IL2(x) = i2r(x) + v2(x)/RLa;
    end
else
    %circuito1
    v1(x)=inv(Gf)*(2*v(x)/R-IL(x-1));
    i1r(x)=v1(x)/RLf+IL(x-1);
    IL(x) = i1r(x) + v1(x)/RLf;

    %circuito2
    v2(x)=inv(Gf)*(-IL2(x-1));
    i2r(x)=v2(x)/RLf+IL2(x-1);
    IL2(x) = i2r(x) + v2(x)/RLf;
end

%Armazenando a variável tempo em segundos
tempo(x)=te;
end

erro1=abs(i-i1r);
erro2=abs(i2-i2r);

figure(1),
    plot(tempo,i,'color','#4DBEEE',LineWidth=1);
    hold on
    plot(tempo, i1r,'color','#EDB120',LineWidth=1);
    title('Comportamento da Corrente - Circuito 1');
    xlabel('Tempo (s)',FontSize=20);
    ylabel('Corrente (A)',FontSize=20);
    ylim([-2,2.5])
    xlim([0,.16]);

```

```

set(gca,'FontSize',16)
legend('Solução Analítica','Solução da Regra Trapezoidal ', 'Location',
'Best' , FontSize= 16)
grid on;

figure(2),
plot(tempo,i2,'color','#4DBEEE',LineWidth=1);
hold on
plot(tempo,i2r,'color','#EDB120',LineWidth=1);
title('Comportamento da Corrente - Circuito 2', FontSize=20);
xlabel('Tempo (s)', FontSize=20);
ylabel('Corrente (A)', FontSize=20);
ylim([-1,1])
xlim([0,.16]);
set(gca,'FontSize',16)
grid on;
legend('Solução Analítica','Solução da Regra Trapezoidal ', 'Location',
'Best', FontSize= 16 )

figure(3),
plot(tempo,erro1,'color','#A2142F',LineWidth=1);
title('Erro da Corrente - Circuito 1', FontSize=20);
xlabel('Tempo (s)', FontSize=20);
ylabel('Corrente (A)', FontSize=20);
xlim([0,.16]);
set(gca,'FontSize',16)
grid on;

figure(4),
plot(tempo,erro2,'color','#A2142F', LineWidth=1);
title('Erro da Corrente - Circuito 2', FontSize=20);
xlabel('Tempo (s)', FontSize=20);
ylabel('Corrente (A)', FontSize=20);
xlim([0,.16]);
set(gca,'FontSize',16)
grid on;

```

A.1.3 Script Chaveamento RLC - Gráficos de Frequência de Oscilação

Natural e Amortecimento

```

clear all;
close all;
clc;

```

```

f=60;
T=1/f;
w=2*pi*f;
dt=1e-4;
Ttotal=100*T;
Ntotal=floor(Ttotal/dt);

% Parâmetros do circuito
R=1;
L=1;
C=1;
teta=90*(pi/180);
Vm=10;
w=120*pi;

% Constantes
sigma=(-R)/(2*L);
wd=sqrt((1/(L*C))-(R/(2*L))^2);

% Referente ao regime permanente
K1=(Vm*w*exp(j*teta))/((2*L)*(-sigma+j*(w-wd))*(-sigma+j*(w+wd)));
K1m=abs(K1);
angK1=angle(K1);

% Referente ao regime transitório
K2=((sigma+j*wd)*w*cos(teta)+sin(teta)*(sigma+j*wd))/(((sigma+j*(w+wd))*
(sigma+j*(w-wd))*2*j*wd))*Vm/L;
K2m=abs(K2);
angK2=angle(K2);

for k=1:Ntotal
    t=(k-1)*dt;

    ip(k)=2*K1m*cos(w*t+angK1); %corrente ao regime permanente
    ih(k)=2*K2m*exp(sigma*t)*cos(wd*t+angK2); %corrente transitória
    i(k)=ip(k)+ih(k); %corrente total

    tempo(k)=t; %Armazenando a variável tempo em segundos
end

figure(1),
plot(tempo, ip, 'b', LineWidth=1);
hold on;
plot(tempo, ih, 'r', LineWidth=1);
hold on;
plot(tempo, i, 'g', LineWidth=1);

```

```

title('Soluções Particular, Homogênea e Completa - Script', FontSize=20);
xlabel('Tempo (s)', FontSize=20);
ylabel('Corrente (A)', FontSize=20);
xlim([0,0.1]);
ylim([-0.05,0.05])
set(gca,'FontSize',16)
grid on;
legend('Corrente de Regime Permanente','Corrente Transitória', 'Corrente Total',
'Location', 'Best',FontSize=16 )

```

A.1.4 Script Chaveamento RLC - Gráficos de Módulo e Fase da Impedância

```

clear all;
close all;
clc;
f=60;
T=1/f;
w=2*pi*f;
dt=1e-3;
Ttotal=1000e-3;
Ntotal=floor(Ttotal/dt);

% Parâmetros do circuito
R=0.1;
L=6e-3;
C=1.4072e-3;
teta=10*(pi/180);
Vm=1;
w=120*pi;

% Constantes
sigma=(-R)/(2*L);
wd=sqrt((1/(L*C))-(R/(2*L))^2);

% Referente ao regime permanente
K1=(Vm*w*exp(j*teta))/((2*L)*(-sigma+j*(w-wd))*(-sigma+j*(w+wd)));
K1m=abs(K1);
angK1=angle(K1);

% Referente ao regime transitório
K2=((sigma+j*wd)*(w*cos(teta)+sin(teta)*(sigma+j*wd))/(((sigma+j*(w+wd))*
(sigma+j*(wd-w))*2*j*wd))*Vm/L;
K2m=abs(K2);
angK2=angle(K2);

for k=1:Ntotal
    t=(k-1)*dt;
    ip(k)=2*K1m*cos(w*t+angK1); %corrente ao regime permanente
    ih(k)=2*K2m*exp(sigma*t)*cos(wd*t+angK2); %corrente transitória

```

```
i(k)=ip(k)+ih(k); %corrente total
v(k)=sin(w*t+teta);
tempo(k)=t; %Armazenando a variável tempo em milisegundos
end
clear frequencia Zmod Zang
for f=1:110
    frequencia(f)=f;
    Z=R+j*(2*f*pi*L)-(1/(2*pi*f*C));
    Zmod(f)=abs(Z);
    Zang(f)=angle(Z)*180/pi;
end
figure(1)
plot(tempo,i,'g',LineWidth=1)
hold on
plot(tempo,v,"MarkerFaceColor","#A2142F",LineWidth=1)
title('Comportamento do Circuito Após Transitório',FontSize=20)
xlabel('Tempo (s)',FontSize=20)
ylabel('Corrente (A), Tensão (V)',FontSize=20)
xlim([0,.2])
ylim([-4,4])
set(gca,'FontSize',16)
legend('Corrente Total','Tensão','Location','Best',FontSize=16)
grid on;

figure(2)
plot(tempo,i,'g',LineWidth=1)
hold on
plot(tempo,v,"MarkerFaceColor","#A2142F",LineWidth=1)
title('Comportamento do Circuito Após Transitório',FontSize=20)
xlabel('Tempo (s)',FontSize=20)
ylabel('Corrente (A), Tensão (V)',FontSize=20)
xlim([0,.4])
ylim([-4,4])
set(gca,'FontSize',16)
legend('Corrente Total','Tensão','Location','Best',FontSize=16)
grid on;

figure(3)
plot(tempo,i,'g',LineWidth=1)
hold on
plot(tempo,v,"MarkerFaceColor","#A2142F",LineWidth=1)
title('Comportamento do Circuito Após Transitório',FontSize=20)
xlabel('Tempo (s)',FontSize=20)
ylabel('Corrente (A), Tensão (V)',FontSize=20)
xlim([0,1])
ylim([-4,4])
set(gca,'FontSize',16)
```

```

legend('Corrente Total','Tensão','Location','Best',FontSize=16)
grid on;

```

```

figure(4)
plot(frequencia,Zmod,'m',LineWidth=1)
title('Módulo da Impedância Após Transitório',FontSize=20);
xlabel('Frequência (Hz)',FontSize=20)
ylabel('Impedância (\ohm)',FontSize=20)
xlim([50 70])
ylim([0.1,1.1])
set(gca,'FontSize',16)
grid on

```

```

figure(5)
plot(frequencia,Zang,'m',LineWidth=1)
title('Ângulo da Impedância Após Transitório',FontSize=20)
xlabel('Frequência (Hz)',FontSize=20)
ylabel('Ângulo (°)',FontSize=20)
xlim([50 70])
ylim([-80,100])
set(gca,'FontSize',16)
grid on;

```

A.1.5 Script para a Plotagem de Gráficos do Simulink

Para a plotagem dos gráficos gerados pelo Simulink foi utilizado o seguinte código:

```

resistor=5
capacitor=0
indutor=0.133
frequencia=60
angulo=30
amplitude=100
step=0.08227815018
stop=.16

figure(1),
plot(perm,'b',LineWidth=1)
hold on
plot(trans,'r',LineWidth=1)
hold on
plot(total,'g',LineWidth=1)
title('Soluções Particular, Homogênea e Completa - Simulink',FontSize=20)
xlabel('Tempo (s)',FontSize=20)
ylabel('Corrente (A)',FontSize=20)
xlim([0.082,.084])

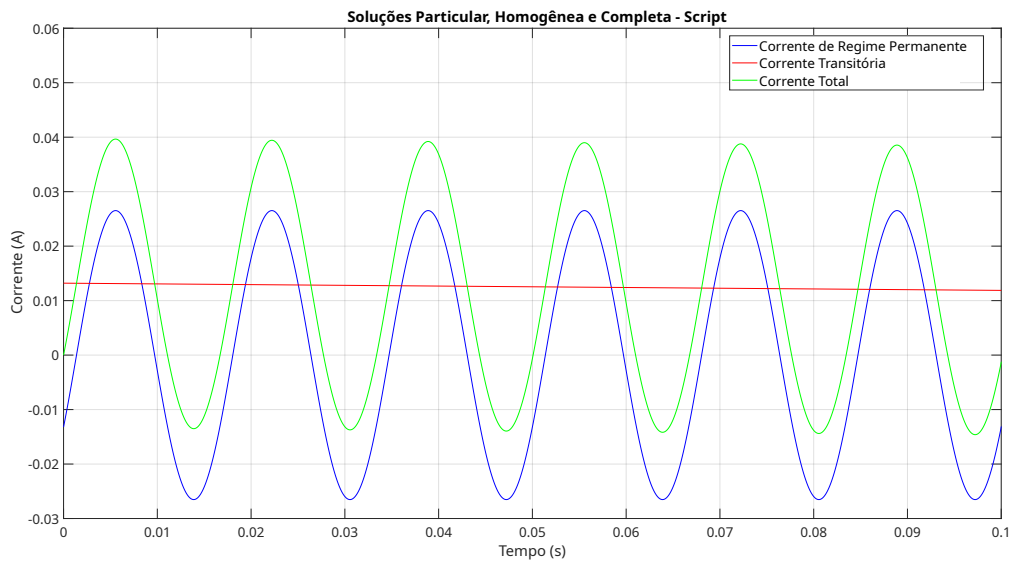
```

```
ylim([-2.5,1.5])  
set(gca,'FontSize',16)  
grid on  
legend('Corrente de Regime Permanente','Corrente Transitória', 'Corrente Total',  
'Location', 'Best',FontSize=16)
```

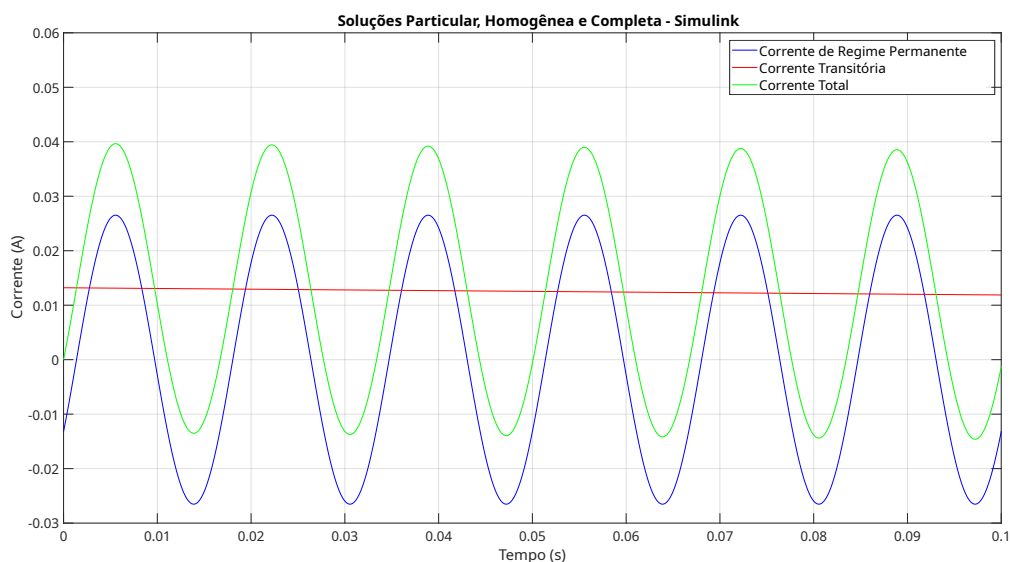
A.2 Circuito RLC série

A.2.1 Primeiro Circuito - Ângulo de Fase 60°

Nesta simulação foi realizado um experimento com um ângulo de fase de 60°.



(a) Script



(b) Simulink

Figura A.1: Circuito 1 - Ângulo de Fase 60°

A Figura A.1 exibe as simulações utilizando um ângulo de fase de 60° . No início da simulação, a corrente em regime permanente (curva azul) mostra um valor inicial de $-0,0132\text{A}$. Simultaneamente, a corrente total (curva verde) revela um valor de $0,00001325\text{A}$, enquanto a corrente transitória (curva vermelha) atinge $0,0132\text{A}$. É perceptível que a corrente transitória assume o mesmo valor que a corrente em regime permanente no momento do chaveamento.

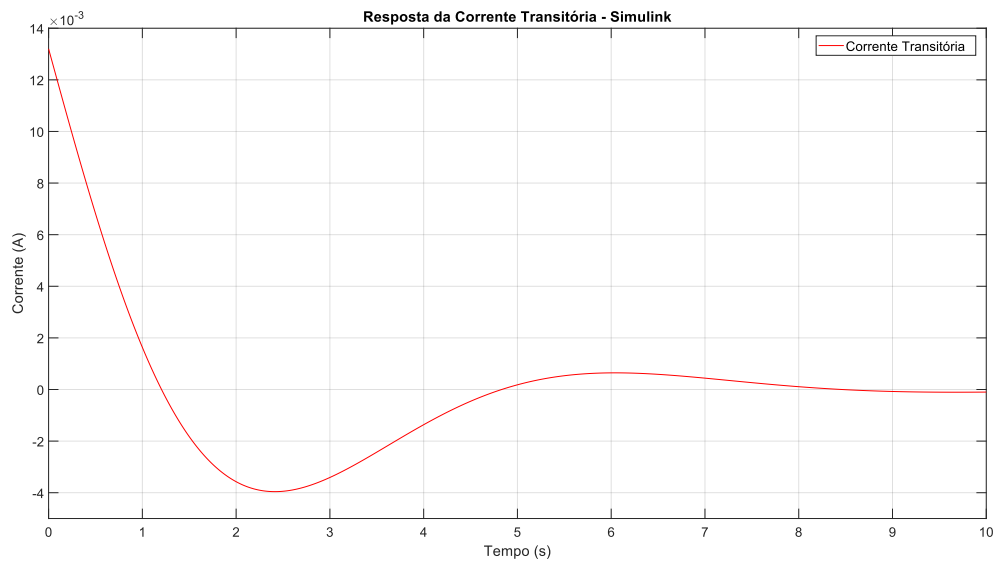


Figura A.2: Curva da Corrente Transitória - 60°

Conforme evidenciado na resposta em regime permanente, na Figura A.2 observa-se uma curva com valores notavelmente baixos, começando com um valor inicial de $0,0132\text{A}$ e atingindo um segundo pico de $-0,003958\text{A}$. Isso resulta em uma variação significativa de $0,01716\text{A}$ entre os primeiros picos.

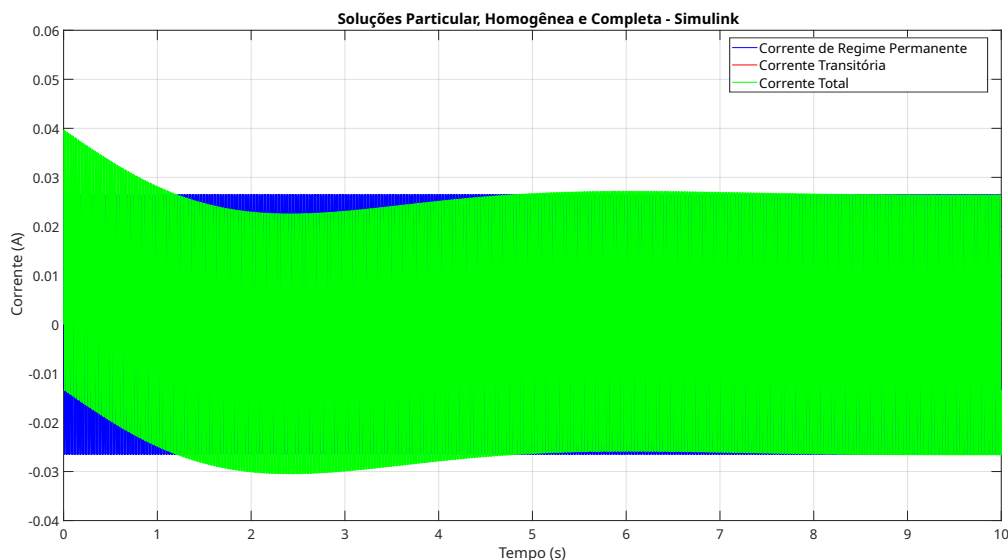
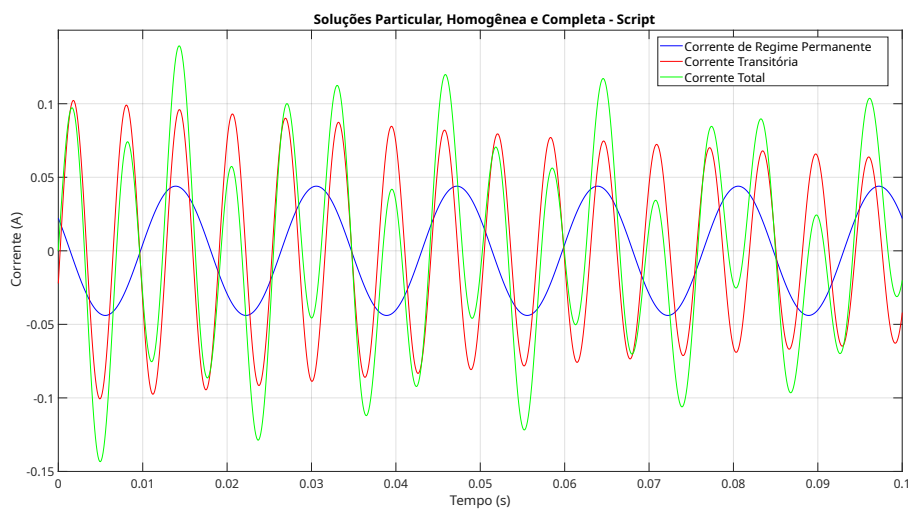


Figura A.3: Soluções em 60°

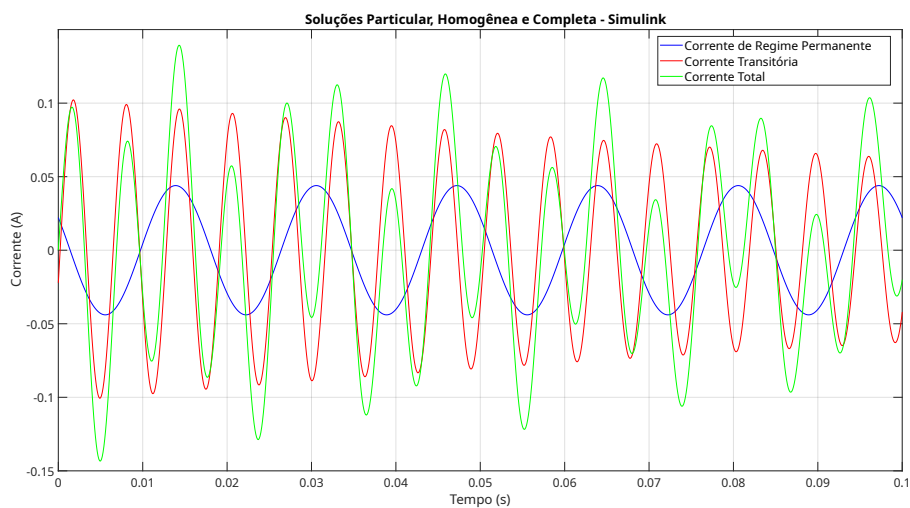
Na análise da Figura A.3, a corrente total ao longo de um período de simulação de 10 segundos apresentou uma variação de $0,07012\text{A}$ entre os valores máximos e mínimos atingidos pelos

picos da corrente. Isso evidencia que a interferência da corrente transitória (curva vermelha) na corrente total (curva verde) foi menor em comparação com a utilização de valores de ângulos inferiores, como o 0° e 30° .

A.2.2 Segundo Circuito - Ângulo de Fase 60°



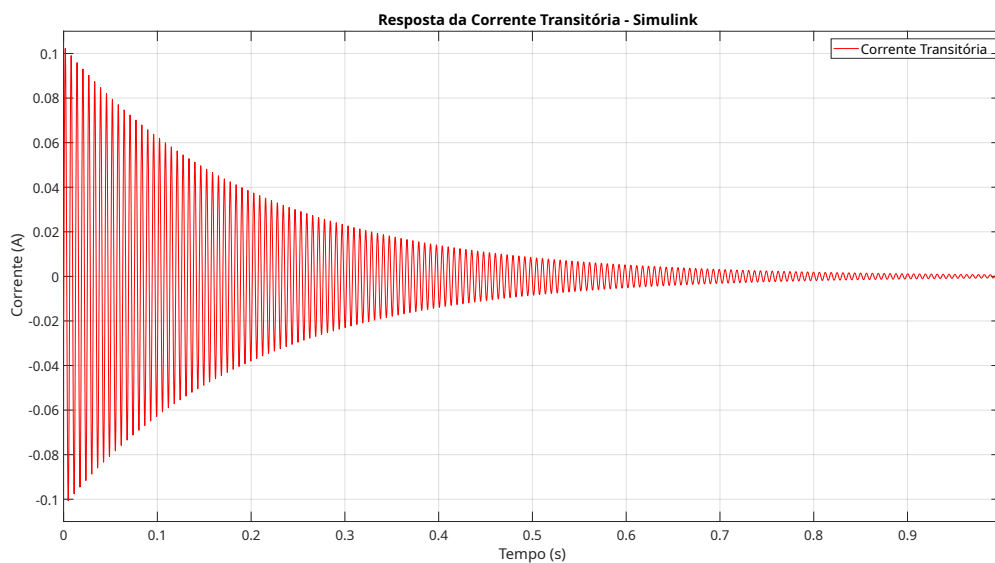
(a) Script



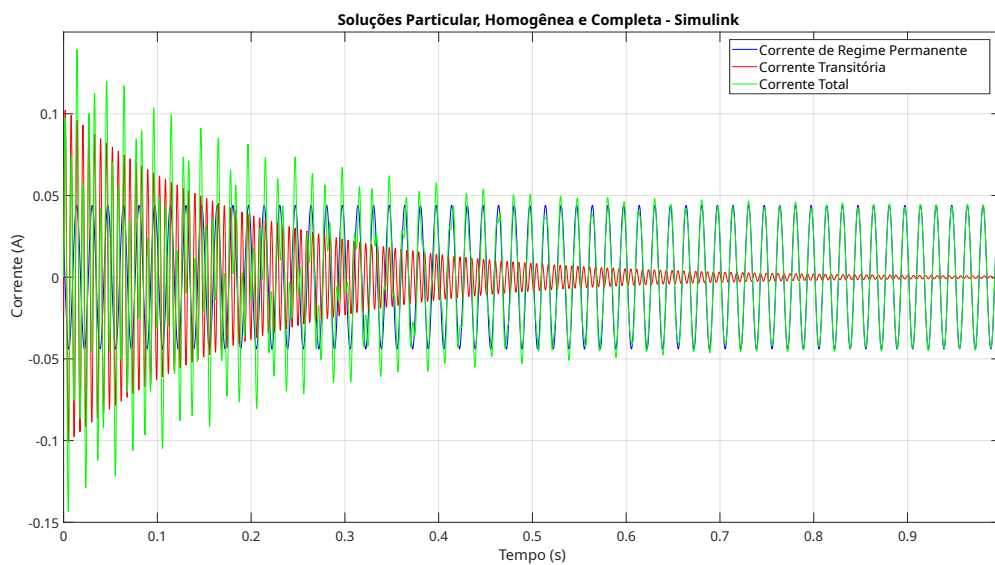
(b) Simulink

Figura A.4: Circuito 2 - Ângulo de Fase 60°

Na Figura A.4, observa-se que no início da simulação a corrente transitória (curva vermelha) apresenta $-0,02214A$, a corrente em regime permanente (curva azul) apresenta $0,02214A$ e a corrente total (curva verde) apresenta $0A$. Todas apresentam comportamento senoidal, com diferentes comprimentos de onda.

Figura A.5: Curva da Corrente Transitória - 60°

Na Figura A.5 com um tempo de simulação de 1s, a corrente transitória atinge seu ponto mais alto, atingindo 0,1022A, enquanto o pico mais baixo é registrado em 0,0007149A. Isso implica em uma oscilação notável de 0,1015A, tudo isso ocorrendo em apenas 993,199ms.

Figura A.6: Soluções em 60° - Circuito 2

Ao observar a figura A.6, percebe-se uma variação de cerca de 0,0959A entre o ponto mais alto e o mais baixo da curva da corrente total (curva verde). Além disso, essa curva ainda apresenta comportamentos irregulares, derivados da falta de sincronia entre os picos da corrente transitória e da corrente em regime permanente.

A.3 Respostas de Sistemas de 2ª Ordem

A.3.1 Sistema Superamortecido

Um sistema do tipo superamortecido acontece quando suas raízes (polos) são reais e distintas, ou seja, no plano de Argand-Gauss (plano complexo). Da mesma forma que a cada número real pode-se associar um único ponto real, a cada elemento $a + jb$ do conjunto dos números complexos corresponde um único ponto $P(a, b)$ do plano complexo e vice-versa. A parte real de z é representada no eixo real, e a parte imaginária, no eixo imaginário[22]. Para o sistema superamortecido os dois polos estão situados no lado esquerdo do eixo complexo em cima do eixo real. Matematicamente este sistema ocorre quando:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \quad (\text{A.1})$$

A solução homogênea para um sistema superamortecido é

$$i_h(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} \quad (\text{A.2})$$

E a corrente geral do sistema superamortecido é a soma das equações 2.112 e A.2, portanto

$$I = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \frac{E_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \left[\omega t + \alpha + \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right) \right] \quad (\text{A.3})$$

Fisicamente o sistema superamortecido converge para o valor em regime permanente sem oscilações e com um tempo maior em comparação aos outros sistemas. Para sistemas de segunda ordem existem especificações da resposta transitória¹, que auxiliam na escolha do sistema a depender da resposta que se deseja obter. O tempo de subida (T_r) para o sistema supe-

¹Tempo de subida, T_r : O tempo necessário para que a forma de onda vá de 0,1 do valor final até 0,9 do valor final.

Instante de pico, T_p : O tempo necessário para alcançar o primeiro pico, ou pico máximo.

Ultrapassagem percentual, %UP: O valor pelo qual a forma de onda ultrapassa o valor em regime permanente, ou valor final, no instante de pico, expresso como uma porcentagem do valor em regime permanente.

Tempo de acomodação, T_s : O tempo necessário para que as oscilações amortecidas transitórias alcancem e permaneçam dentro de uma faixa de $\pm 2\%$ em torno do valor em regime permanente.”[20]

ramortecido é mais demorado devido ao amortecimento oferecido pelos polos reais distintos. O instante de pico (T_p) ocorre quando o sistema atinge o valor em regime permanente, o que acaba resultando também em um tempo maior comparado aos outros sistemas.

Para este tipo de sistema não ocorre a ultrapassagem percentual ($\%UP$) pois em momento algum a resposta ultrapassa o valor em regime permanente. Por fim, novamente o sistema superamortecido apresenta um tempo de acomodação (T_s) maior em relação aos outros sistemas. Assim, um sistema superamortecido é preferido quando não se deseja que ocorram oscilações em respostas transitórias.

A.3.2 Sistema Criticamente Amortecido

Um sistema do tipo criticamente amortecido acontece quando suas raízes (polos) são reais e iguais, ou seja, no plano de Argand-Gauss (plano complexo) os dois polos estão situados no lado esquerdo do eixo complexo em cima do eixo real no mesmo local. Matematicamente este sistema ocorre quando

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad (\text{A.4})$$

A solução homogênea para um sistema criticamente amortecido é

$$i_h(t) = C_1 e^{a_1 t} + t C_2 e^{a_2 t} \quad (\text{A.5})$$

A presença do termo t é o que indica que as raízes são iguais. O termo é necessário para garantir a multiplicidade da raiz.

A corrente geral do sistema criticamente amortecido é a soma das equações 2.112 e A.5, portanto

$$I = C_1 e^{a_1 t} + t C_2 e^{a_2 t} + \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{sen} \left[\omega t + \alpha + t g^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

Fisicamente o sistema criticamente amortecido converge para o valor em regime permanente

sem oscilações assim como ocorreu no sistema superamortecido. O tempo de subida (T_r) para o sistema criticamente amortecido é lento, porém um pouco mais rápido em comparação com o superamortecido devido ao amortecimento oferecido pelos polos reais iguais. O instante de pico (T_p) ocorre quando o sistema atinge o valor em regime permanente. Para este tipo de sistema não ocorre a ultrapassagem percentual ($\%UP$) pois em momento algum a resposta ultrapassa o valor em regime permanente.

Por fim, novamente o sistema criticamente amortecido apresenta um tempo de acomodação (T_s) alto, porém, novamente pouca coisa abaixo do superamortecido. Assim, um sistema criticamente amortecido é preferido quando não se deseja que ocorram oscilações em respostas transitórias.

A.3.3 Sistema Sub-Amortecido

Um sistema do tipo sub-amortecido acontece quando suas raízes (polos) são pares complexos conjugados, ou seja, no plano de Argand-Gauss(plano complexo) os dois polos estão situados no lado esquerdo do eixo complexo. Matematicamente este sistema ocorre quando

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad (\text{A.7})$$

A solução para um sistema criticamente amortecido é

$$i_h(t) = C_1 e^{(-\alpha + j\omega d)t} + C_2 e^{(-\alpha - j\omega d)t} \quad (\text{A.8})$$

Das propriedades dos números complexos, pode-se modificar a equação da seguinte maneira

$$C_1 = C_1^*$$

Pela identidade de Euler tem-se

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\text{sen}(\theta) \quad (\text{A.9})$$

Sendo assim, é possível reorganizar a equação A.8 e aplicar a identidade de Euler

$$i_h(t) = C_1 e^{(-\alpha t)} e^{(j\omega d)t} + C_1^* e^{(-\alpha t)} e^{(-j\omega d)t} \quad (\text{A.10})$$

Aplicando a identidade de Euler em A.10

$$i_h(t) = e^{-\alpha t} [C_1 \cos(\omega dt) + jC_1 \text{sen}(\omega dt)] + e^{-\alpha t} [C_1^* \cos(\omega dt) - jC_1^* \text{sen}(\omega dt)] \quad (\text{A.11})$$

Colocando o termo $e^{-\alpha t}$ em evidência

$$i_h(t) = e^{-\alpha t} [C_1 \cos(\omega dt) + jC_1 \text{sen}(\omega dt) + C_1^* \cos(\omega dt) - jC_1^* \text{sen}(\omega dt)] \quad (\text{A.12})$$

Colocando agora *sen* e *cos* em evidência

$$i_h(t) = e^{-\alpha t} [(C_1 + C_1^*) \cos(\omega dt) + (jC_1 - jC_1^*) \text{sen}(\omega dt)] \quad (\text{A.13})$$

Novamente das propriedades dos números complexos tem-se

$$C_1 + C_1^* = 2\text{Re}[C_1] \quad (\text{A.14})$$

$$jC_1 - jC_1^* = -2\text{Im}[C_1] \quad (\text{A.15})$$

Portanto, a solução homogênea para um sistema sub-amortecido é dada por

$$i_h(t) = 2e^{-\alpha t} \text{Re}[C_1] \cos(\omega dt) - 2e^{-\alpha t} \text{Im}[C_1] \text{sen}(\omega dt) \quad (\text{A.16})$$

Colocando $2e^{-\alpha t}$ em evidência

$$i_h(t) = 2e^{-\alpha t} (\text{Re}[C_1] \cos(\omega dt) - \text{Im}[C_1] \text{sen}(\omega dt)) \quad (\text{A.17})$$

A corrente geral do sistema sub-amortecido é a soma das equações 2.112 e A.17, portanto

$$I = 2e^{-\alpha t} (Re[C_1] \cos(\omega dt) - Im[C_1] \sin(\omega dt)) + \frac{E_{\max} \sin \left[\omega t + \alpha + \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right) \right]}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (\text{A.18})$$

Fisicamente o sistema sub-amortecido converge para o valor em regime permanente com oscilações diferentemente dos dois sistemas apresentados anteriormente. O tempo de subida (T_r) para o sistema sub-amortecido é rápido devido ao baixo amortecimento oferecido pelo par de polos complexos conjugados. O instante de pico (T_p) ocorre quando o sistema atinge seu máximo valor de resposta, que neste caso não coincide com o regime permanente. Para este tipo de sistema ocorre a ultrapassagem percentual ($\%UP$) e indica o quanto a resposta transitória passou do valor em regime permanente.

Por fim, o sistema sub-amortecido apresenta um tempo de acomodação (T_s) que vai ser em geral parecido com o tempo de acomodação de um sistema criticamente amortecido. Vale ressaltar que os sistemas e as respostas transitórias são influenciados pelos parâmetros do circuitos, sendo assim, podendo variar esses tempos de acordo com a mudança de parâmetros. Assim, um sistema sub-amortecido é preferido quando é aceitável ter oscilações transitórias nos sistemas em troca de uma resposta mais rápida.

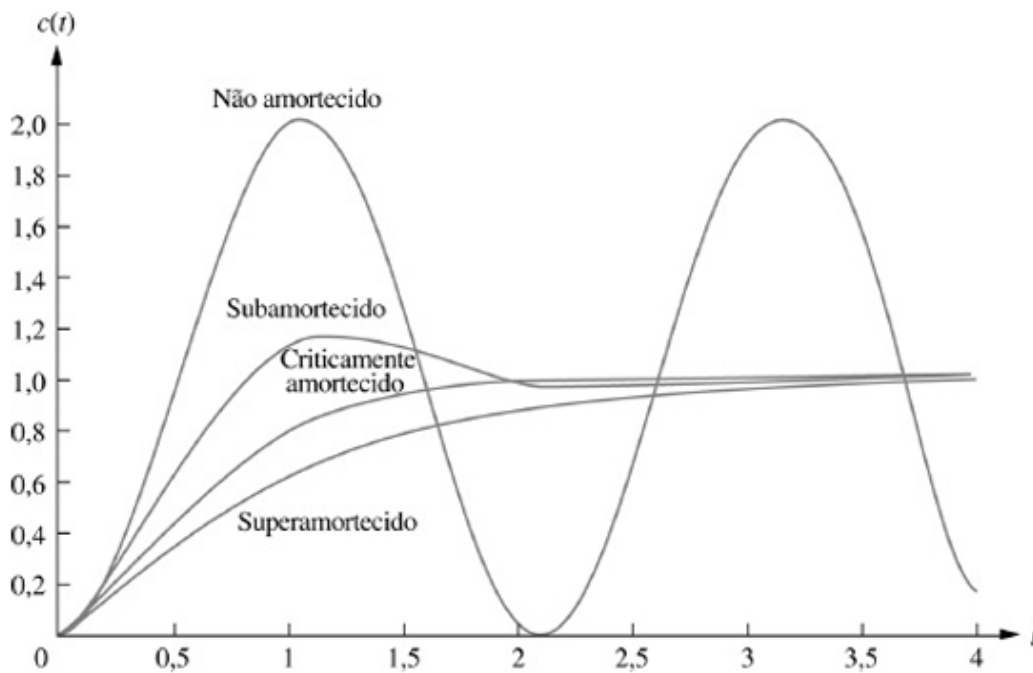


Figura A.7: Comparativo de sistemas de segunda ordem[20].

A figura A.7 apresenta um comparativo visual entre os três tipos de sistemas descritos nas seções A.3.1, A.3.2 e A.3.3 e o também mencionado anteriormente, sistema não amortecido.

A.4 Alternative Transients Program - ATP

O Alternative Transients Program (ATP) é uma ferramenta avançada de simulação utilizada para a análise de transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos de potência. O ATP oferece a capacidade de modelar com precisão componentes e sistemas elétricos, permitindo estudos detalhados sobre o comportamento dinâmico das redes de energia em diversas condições operacionais. Esse programa é essencial para estudos de proteção, qualidade de energia e análise de falhas, contribuindo significativamente para a concepção de sistemas elétricos mais eficientes e seguros.

O ATPDraw, por sua vez, é uma interface gráfica desenvolvida para o ATP, que simplifica a criação e edição de circuitos e sistemas elétricos para simulações de transitórios eletromagnéticos. Essa interface facilita o processo de configuração dos esquemas elétricos, eliminando a necessidade de codificação manual e permitindo que os usuários desenhem e modifiquem circuitos de maneira intuitiva. Com o ATPDraw, é possível realizar simulações de redes

elétricas, análise de falhas, estudos de proteção, e avaliação do comportamento de dispositivos sob condições transitórias, tornando-se uma ferramenta indispensável para engenheiros e pesquisadores na área de engenharia elétrica.

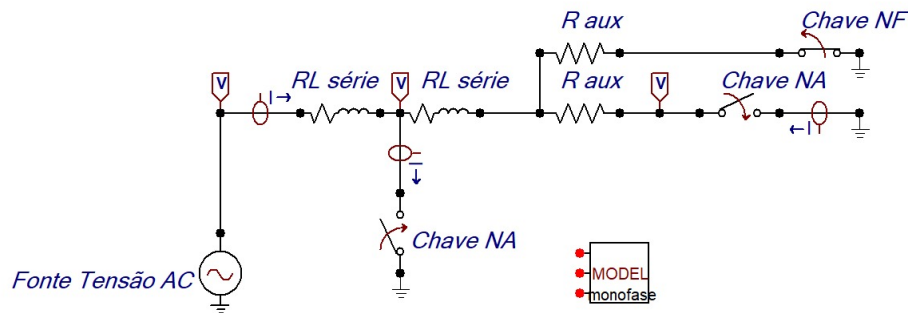


Figura A.8: Circuito RL ATP

A figura A.8 apresenta um circuito RL modelado no ATP, em que foi inserida uma fonte de tensão AC em série com um amperímetro, uma resistência e um indutor. O primeiro amperímetro realiza a medição da corrente total do circuito. Conseqüentemente, para a simulação do curto com o terra, foi utilizado uma chave normalmente aberta. Na segunda parte, foram utilizados os mesmos valores para RL, e conseqüentemente foram utilizados dois ramos com chaves para fazer a medição da corrente transitória. Isso se mostra necessário porquê o objetivo do trabalho é medir a corrente transitória no momento após o curto-circuito, então é considerado que antes do curto-circuito a corrente seja igual a zero.

Além disso, é importante citar que as chaves foram programadas para comutar no momento do curto-circuito, então se uma chave é normalmente aberta, ela irá fechar no instante definido. Em razão de problemas com a aplicação de uma chave sozinha ligada ao terra, foram utilizados resistores auxiliares de uma ordem de 10^{-8} para realizar a medição da corrente transitória. Assim no momento do curto, a chave normalmente fechada se abre e a chave normalmente aberta se fecha, passando assim a percorrer corrente no amperímetro que mede a corrente transitória. Ao final, é possível obter a corrente de regime permanente através de uma subtração entre a corrente total e a corrente transitória.

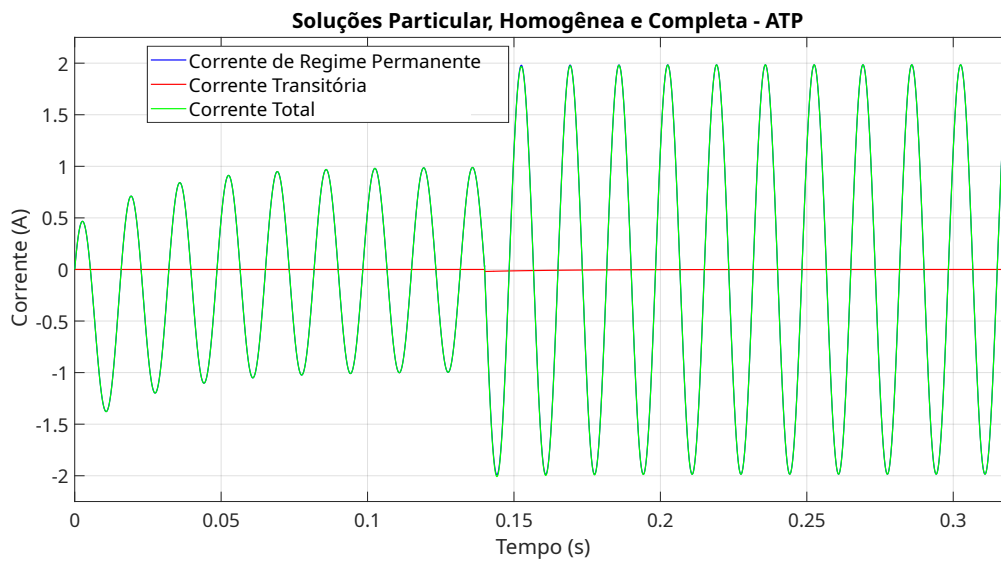


Figura A.9: Solução matemática da Equação homogênea mínima - ATP;

A Figura A.9 representa a simulação realizada no ATP e exportada ao MATLAB, em que o curto-circuito ocorreu no instante de 0.13994775383s. A corrente em regime permanente (curva azul), que inicialmente apresentou um valor de 1A, aumentou para 2A após o curto-circuito. Isso ocorreu devido à mudança na configuração do circuito, na qual a corrente, que antes percorria dois indutores e resistores iguais, passou a percorrer apenas um indutor e um resistor.

Assim como a contribuição da solução mínima da corrente transitória (curva vermelha), foi pequena e seu impacto foi pouco significativo na corrente total (curva verde). Nota-se que, a corrente total se iguala à corrente em regime permanente, indicando a estabilização do sistema após dois ciclos da ocorrência do curto-circuito.

Observou-se também que a solução do ATP contempla um transitório de energização, por isso que as correntes em regime permanente e total começam deslocadas negativamente no eixo das correntes.

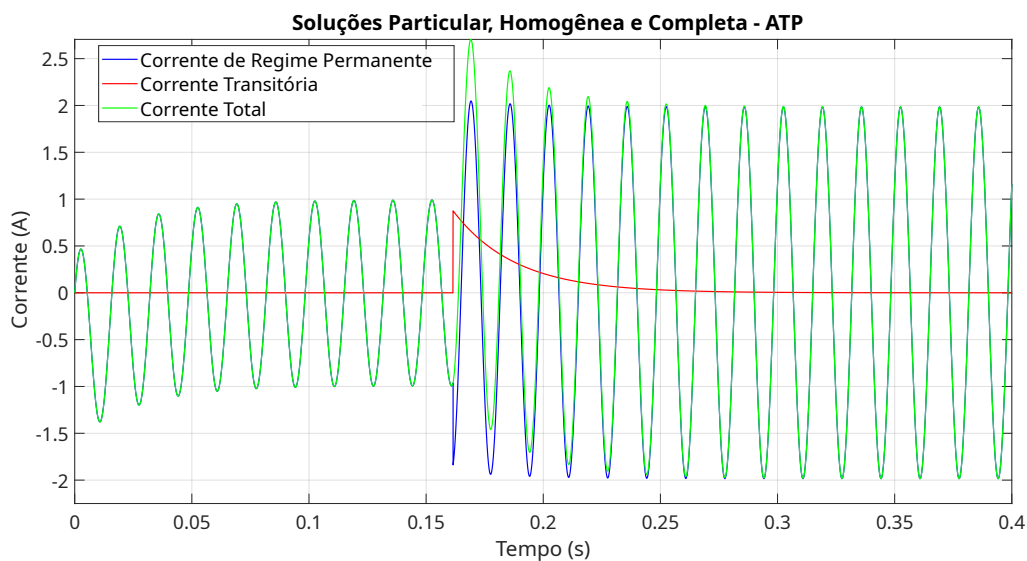


Figura A.10: Solução matemática da Equação homogênea máxima - ATP;

A Figura A.10 representa a simulação realizada no ATP e exportada ao MATLAB, em que o curto-circuito ocorreu no instante de 0.16151015018s. A corrente em regime permanente (curva azul), que inicialmente apresentou um valor de 1A, e estabilizou em 2A após alguns ciclos do curto-circuito. Isso ocorreu devido à mudança na configuração do circuito, na qual a corrente, que antes percorria dois indutores e resistores iguais, passou a percorrer apenas um indutor e um resistor.

A contribuição da corrente transitória (curva vermelha), foi grande e seu impacto foi muito significativo na corrente total (curva verde), fazendo-a destoar bastante da corrente em regime permanente no momento do curto-circuito. Nota-se que, a corrente total se iguala à corrente em regime permanente, indicando a estabilização do sistema após sete ciclos da ocorrência do curto-circuito.

Observou-se também que a solução do ATP contempla um transitório de energização, por isso que as correntes em regime permanente e total começam deslocadas negativamente no eixo das correntes.