



**INSTITUTO DE FÍSICA**

**MATHEUS AUGUSTO SILVA**

**Método analítico de reconstrução de imagens de  
SPECT em Python: Aplicação da retroprojeção  
filtrada (FBP) em *phantom* de Jaszczak**

Goiânia  
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

### 1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome(s) completo(s) do(a)(s) autor(a)(es)(as): MATHEUS AUGUSTO SILVA

Título do trabalho: Método analítico de reconstrução de imagens de SPECT em Python: Aplicação da retroprojeção filtrada (FBP) em phantom de Jaszczak

### 2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [ x ] SIM [ ] NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

#### Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

**Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Emerson Nobuyuki Itikawa, Professor do Magistério Superior**, em 07/08/2024, às 12:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Matheus Augusto Silva, Discente**, em 07/08/2024, às 14:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4600928** e o código CRC **A437030F**.

---

MATHEUS AUGUSTO SILVA

# **Método analítico de reconstrução de imagens de SPECT em Python: Aplicação da retroprojeção filtrada (FBP) em *phantom* de Jaszczak**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física Médica.

**Área de pesquisa:** Radiologia Médica

**Orientador:** Prof. Dr. Emerson Nobuyuki Itikawa

Goiânia

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do  
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Matheus Augusto

Método analítico de reconstrução de imagens de SPECT em  
Python: Aplicação da retroprojeção filtrada (FBP) em phantom de  
Jaszczak [manuscrito] / Matheus Augusto Silva. - 2024.  
87 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Nobuyuki Itikawa.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Física Médica, Goiânia, 2024.  
Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. SPECT. 2. Física Médica. 3. Shepp-Logan. 4. Medicina Nuclear.  
5. Processamento de imagens. I. Itikawa, Emerson Nobuyuki, orient.  
II. Título.

CDU 616-073.75



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos cinco dias do mês de agosto do ano de 2024 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Método analítico de reconstrução de imagens de SPECT em Python: Aplicação da retroprojeção filtrada (FBP) em phantom de Jaszczak”, de autoria de Matheus Augusto Silva, do curso de Bacharelado em Física Médica, do Instituto de Física da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. Dr. Emerson Nobuyuki Itikawa (IF/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Prof. Dr. Jonas Oliveira da Silva (IF/UFG) e M.Sc. Leonardo Alexandre Santos (HC - FMRP/USP). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 8,5 (oito vírgula cinco), tendo sido o TCC considerado aprovado.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Emerson Nobuyuki Itikawa, Professor do Magistério Superior**, em 05/08/2024, às 17:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jonas Oliveira Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2024, às 04:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Alexandre Santos, Usuário Externo**, em 06/08/2024, às 14:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4600924** e o código CRC **BE179EDC**.

## AGRADECIMENTOS

Salve família e amigos. Neste momento de grande felicidade, gostaria de dedicar esse trabalho a algumas pessoas em especial:

- Aos meus pais, que trabalharam muito e moveram montanhas para que eu tivesse um estudo de qualidade.
- Ao meu pai, Carlos, pelo apoio, por ser esse ótimo pai e por possibilitar que eu estivesse aqui.
- À minha mãe, Maria Reijane, por ser essa amiga incrível, que sempre, com muito respeito e paciência, troca ideias comigo, me aconselha e cuida incansavelmente de todos à sua volta
- Ao meu irmão, Dinhão, o coautor secreto desse trabalho, por ser esse grande amigo que tenho para a vida.
- Ao meu orientador, Emerson, por ser esse professor e orientador paciente e dedicado. Que me acolheu e auxílio nos momentos difíceis, sempre acreditando e me aconselhando o melhor.
- Aos amigos do Instituto de Física, que tornaram essa jornada divertida e agradável. Sem a ajuda de vocês, isso nunca teria acontecido. Agradeço imensamente esses bons momentos que tivemos e espero que momentos iguais ou melhores venham na vida de vocês.
- Aos professores e colegas do Instituto de Física, foi muito gratificante aprender com vocês
- Aos meus cachorros, Lolô, Poly, Meche-Meche e Yoshi, pela alegria que me trazem.
- Ao passarinho que me perturba, Pupu, por trazer leveza aos meus dias.
- Ao meu avô, João, que faleceu e, infelizmente, não viu o neto formado em, nas palavras dele, “medicina”. Que o senhor descanse em paz.

## RESUMO

A SPECT é uma modalidade de imagem clínica com valor comprovado para o diagnóstico de doenças e o monitoramento de tratamentos. Por meio de algoritmos matemáticos especializados, os dados obtidos pela SPECT permitem reconstruir a distribuição espacial de radiofármacos na região de interesse, oferecendo informações fisiológicas relevantes para o diagnóstico médico. O propósito deste trabalho foi implementar em Python o método de reconstrução analítica usado em equipamentos de SPECT, conhecido como retroprojeção filtrada (FBP). O projeto inclui a reconstrução do *phantom* físico de Jaszczak e do *phantom* digital de Shepp-Logan. Nesse processo, houve a análise da geometria de aquisição das projeções dos *phantoms* e suas distinções, resultando no sinograma. Além disso, foram implementados todos os passos necessários para reconstruir o objeto a partir dessas projeções, incluindo a utilização do filtro Hamming no domínio da frequência. A implementação do algoritmo possibilitou a reconstrução das fatias de ambos os *phantoms*, Jaszczak e Shepp-Logan, com razoável sucesso. Durante esse processo, foram analisados todos os passos que permitem à FBP reconstruir o objeto a partir das projeções, incluindo os problemas advindos da técnica, como o surgimento de artefatos e ruído estático. O código em Python da FBP foi disponibilizado na íntegra, permitindo estudos futuros sobre suas limitações, melhorias e os artefatos na técnica.

**Palavras-chave:** *SPECT, Física Médica, Shepp-Logan, Medicina Nuclear, Processamento de imagens*

## ABSTRACT

SPECT is a clinical imaging modality with proven value for diagnosing disease and monitoring treatments. Using specialized mathematical algorithms, the data obtained by SPECT make it possible to reconstruct the spatial distribution of radiopharmaceuticals in the region of interest, offering physiological information relevant to medical diagnosis. The purpose of this work was to implement in Python the analytical reconstruction method used in SPECT equipment, known as filtered back projection (FBP). The project includes the reconstruction of the physical Jaszczak phantom and the digital Shepp-Logan phantom. In this process, the acquisition geometry of the phantom projections and their distinctions were analyzed, resulting in the sinogram. Furthermore, all the necessary steps were implemented to reconstruct the object from these projections, including the use of the Hamming filter in the frequency domain. The implementation of the algorithm made it possible to reconstruct the slices of both phantoms, Jaszczak and Shepp-Logan, with reasonable success. During this process, all the steps that allow FBP to reconstruct the object from projections were analyzed, including problems arising from the technique, such as the appearance of artifacts and static noise. The FBP Python code was made available in full, allowing future studies on its limitations, improvements and artifacts in the technique.

**Keywords:** *SPECT, Medical Physics, Shepp-Logan, Nuclear Medicine, Image processing*

## Lista de Figuras

3.1	Modelo esquemático de uma câmara gama. . . . .	16
3.2	Modelo da aquisição de imagem da SPECT . . . . .	17
3.3	Esquema simplificado do processo de aquisição de projeções. . . . .	18
3.4	Sinograma de uma fonte pontual. . . . .	20
3.5	Sinograma de <i>phantom</i> digitais complexos. . . . .	21
3.6	Esquema simplificado do processo de retroprojeção. . . . .	23
3.7	A fonte radioativa original é a imagem (a). Elementos (b) ao (f) são retroprojeções utilizando 1, 2, 3, 4 e 32 projeções. . . . .	23
3.8	Retroprojeção da Figura 3.5. . . . .	25
3.9	Frequências que compõem a transformada de Fourier de uma imagem 2-D (bidimensional). . . . .	27
3.10	Ilustração do teorema da fatia de Fourier. . . . .	28
3.11	Filtro rampa no domínio da frequência. . . . .	31
3.12	(a) Gráfico do filtro rampa. (b) Gráfico do fator multiplicativo. (c) Multiplicação do filtro rampa com o fator multiplicativo, formando o filtro Hamming. . . . .	32
3.13	Retroprojeção filtrada da Figura 3.5. . . . .	32
3.14	(a) Um único sensor de aquisição de imagens. (b) Sensores de linha. (c) Sensores de área (matricial). . . . .	33
3.15	Processo de digitalização que ocorre no interior de câmaras digitais e equipamentos de SPECT. . . . .	34
3.16	Representação matricial de uma imagem digital. . . . .	34
3.17	Espectro do $^{99m}\text{Tc}$ com baixa taxa de contagem. . . . .	36
3.18	Espectro do $^{99m}\text{Tc}$ mostrando a janela de fotopico e de espalhamento. . . . .	37
4.1	Relação entre rotação do detector e do objeto. . . . .	41
4.2	Esquema da aquisição de projeções a partir de matrizes. . . . .	43
4.3	Informações presentes no arquivo DICOM fotopico do <i>phantom</i> de Jaszczak. . . . .	49

4.4	Esquema do modo de aquisição de projeções de um <i>phantom</i> digital. . . . .	51
4.5	Esquema do modo de aquisição de projeções do <i>phantom</i> físico. . . . .	52
4.6	<i>Phantom</i> de Jaszczak. . . . .	53
5.1	Matrizes do <i>phantom</i> digital, Shepp-Logan e Fonte pontual. . . . .	55
5.2	<i>Phantoms</i> digitais rotacionados em $30^\circ$ . . . . .	55
5.3	Projeção dos <i>phantoms</i> digitais rotacionados em $30^\circ$ . . . . .	56
5.4	Sinograma de cada <i>phantom</i> digital. . . . .	57
5.5	Retroprojeção (BP) dos dois <i>phantoms</i> digitais. . . . .	57
5.6	Transformada de Fourier dos sinogramas. . . . .	58
5.7	(a) Filtro rampa e (b) filtro Hamming. . . . .	58
5.8	Transformada de Fourier dos sinogramas filtrado. . . . .	59
5.9	Transformada inversa de Fourier dos sinogramas filtrado. . . . .	59
5.10	Retroprojeção filtrada dos <i>phantoms</i> digitais, Shepp-Logan e Fonte pontual. . .	60
5.11	Comparação entre o <i>phantom</i> de Shepp-Logan e a sua FBP. . . . .	60
5.12	FBP do <i>phantom</i> digital de Shepp-Logan reconstruído com 128 projeções e intervalo angular de $0^\circ$ a $360^\circ$ . . . . .	61
5.13	Demonstração do artefato <i>Aliasing</i> . Reconstruções realizadas com 180, 64, 32 e 16 projeções, ao longo do intervalo de $0^\circ$ a $180^\circ$ . . . . .	62
5.14	Artefato de intervalo angular limitado. Reconstruções realizadas com intervalo de $0^\circ$ à $45^\circ$ , $90^\circ$ , $135^\circ$ e $180^\circ$ , com variação angular de $1^\circ$ . . . . .	63
5.15	Demonstração do artefato <i>ring</i> . . . . .	64
5.16	Diferentes visualizações do volume matricial. (a) $z$ fixo e variando $x$ e $y$ . (b) $y$ fixo e variando $x$ e $z$ . (c) $x$ fixo e variando $y$ e $z$ . . . . .	64
5.17	Fatias do objeto com $z$ fixo e $x$ e $y$ variando. . . . .	66
5.18	Comparação entre o sinograma da fatia 20 do objeto, com $z$ fixo e $x$ e $y$ variando, com a visualização da fatia 20 do objeto, com $y$ fixo e $x$ e $z$ variando. . . . .	67
5.19	Sinograma das fatias do objeto. . . . .	68
5.20	Retroprojeção do <i>phantom</i> de Jaszczak. . . . .	69
5.21	Transformada de Fourier do sinograma filtrado. . . . .	70
5.22	Retroprojeção filtrada do <i>phantom</i> de Jaszczak com pós-processamento. . . . .	72
A.1	Representação gráfica de duas retas perpendiculares entre si. . . . .	79
A.2	Visualização gráfica da parametrização usada na formação das projeções. . . . .	80

## Lista de abreviações e siglas

**BP** - Retroprojeção, do inglês *Back Projection*

**FBP** - Retroprojeção filtrada, do inglês *Filtered Back Projection*

**FT** - Transformada de Fourier, do inglês *Fourier Transform*

**IFT** - Transformada inversa de Fourier, do inglês *Inverse Fourier Transform*

**SPECT** - Tomografia Computadorizada por Emissão de Fóton Único, do inglês *Single Photon Emission Computed Tomography*

**RMSE** - Raiz do Erro Quadrático Médio, do inglês *Root Mean Square Deviation*

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>14</b>
2.1	Objetivos Gerais . . . . .	14
2.2	Objetivos Específicos . . . . .	14
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
3.1	Tomografia computadorizada por emissão de fóton único (SPECT) . . . . .	15
3.2	Aquisição de imagem e projeções . . . . .	17
3.3	Transformada de Radon e o sinograma . . . . .	19
3.4	Reconstrução analítica: Transformada inversa de Radon e retroprojeção . . . . .	22
3.5	Reconstrução analítica: Retroprojeção filtrada . . . . .	25
3.5.1	Transformada de Fourier . . . . .	26
3.5.2	Teorema do corte central de Fourier . . . . .	27
3.5.3	Retroprojeção filtrada (FBP) . . . . .	28
3.6	Imagens digitais em métodos de reconstrução . . . . .	33
3.7	RMSE . . . . .	35
3.8	Correção de espalhamento da SPECT . . . . .	35
<b>4</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>38</b>
4.1	Linguagem de programação: Python . . . . .	38
4.2	Retroprojeção Filtrada em <i>phantom</i> digital de Shepp-Logan . . . . .	39
4.2.1	Simulação do objeto imageado: <i>phantom</i> digital . . . . .	39
4.2.2	Simulação da rotação do objeto . . . . .	40
4.2.3	Projeções e sinograma . . . . .	42
4.2.4	Retroprojeção . . . . .	43
4.2.5	Retroprojeção filtrada . . . . .	45

---

4.2.6	RMSE . . . . .	48
4.3	Retroprojeção Filtrada em <i>phantom</i> de Jaszczak . . . . .	48
4.3.1	DICOM . . . . .	48
4.3.2	Projeções em equipamento SPECT . . . . .	49
4.3.3	Retroprojeção e FBP do <i>phantom</i> de Jaszczak . . . . .	53
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>54</b>
5.1	Retroprojeção Filtrada em <i>phantom</i> digital de Shepp-Logan . . . . .	54
5.1.1	Simulação do objeto imageado: <i>phantom</i> digital . . . . .	54
5.1.2	Simulação da rotação do objeto . . . . .	55
5.1.3	Projeções e sinograma . . . . .	56
5.1.4	Retroprojeção . . . . .	57
5.1.5	Retroprojeção filtrada . . . . .	58
5.1.6	RMSE . . . . .	61
5.1.7	Artefatos de imagem . . . . .	61
5.2	Retroprojeção Filtrada em <i>phantom</i> de Jaszczak . . . . .	64
5.2.1	DICOM . . . . .	64
5.2.2	Projeções em equipamentos SPECT . . . . .	66
5.2.3	Retroprojeção . . . . .	68
5.2.4	Retroprojeção filtrada . . . . .	69
5.3	Limitações e escala do projeto . . . . .	72
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>DEMONSTRAÇÕES</b>	<b>79</b>
A.1	Relação entre coeficientes angulares de retas perpendiculares . . . . .	79
A.2	Parametrização da reta em representação normal . . . . .	80
<b>B</b>	<b>CÓDIGOS EM PYTHON</b>	<b>83</b>
B.1	Código da BP e da FBP no <i>phantom</i> de Jaszczak . . . . .	83
B.1.1	Retroprojeção do <i>phantom</i> de Jaszczak . . . . .	83
B.1.2	Retroprojeção filtrada do <i>phantom</i> de Jaszczak . . . . .	84

## INTRODUÇÃO

A Tomografia Computadorizada por Emissão de Fóton Único (SPECT), é amplamente utilizada na Medicina Nuclear devido ao seu papel clínico essencial no diagnóstico e tratamento de diversas doenças de forma não invasiva (por exemplo, imagem de perfusão miocárdica) [23]. Com a SPECT é possível realizar análises *in vivo* do paciente, visualizando os caminhos fisiologicamente importantes ligados a região de interesse e possibilitando a reconstrução da distribuição espacial do radiofármaco através dos dados captados.

O processo de aquisição de informações internas do paciente num sistema SPECT inicia-se por meio da ingestão, inalação ou injeção de radiofármacos. Esses radiofármacos são compostos pela união de um radioisótopo, responsável pela emissão de radiação  $\gamma$ , com um fármaco, que tem a função de direcionar o radioisótopo para a região de interesse. Dessa forma, a atividade radioativa da densidade do radiofármaco na região pode ser captada pelos detectores da SPECT, formando as projeções [10].

A partir das projeções, a SPECT reconstrói o volume tomográfico de radiofármaco, utilizando algoritmos matemáticos que têm um impacto significativo na qualidade da imagem, incluindo fatores como contraste, ruído e resolução espacial. Esses aspectos são cruciais para garantir relatórios médicos precisos, que são essenciais para a correta tomada de decisões clínicas [20]. O algoritmo de retroprojeção filtrada (FBP, do inglês *Filtered-backprojection*) é um método analítico rápido e pouco oneroso computacionalmente, que utiliza de operações matemáticas para reconstruir o volume tomográfico, atenuando ou enfatizando diferentes frequências, possibilitando uma melhor visualização das características da imagem [33].

A FBP é um método que combina a transformada de Radon, a transformada de Fourier e filtros no domínio da frequência, para realizar uma reconstrução clinicamente informativa da região imageada. Este método é amplamente utilizado em todo o mundo como o principal meio de reconstrução de imagem dos equipamentos de SPECT, devido à sua rápida execução [9]. Além disso, esse método de reconstrução, é empregado de maneira similar em outros equipamentos, como tomografia computadorizada de transmissão (CT) e tomografia por emissão de pósitrons (PET), tornando-o uma ferramenta importante no meio clínico atual.

Compreender o impacto que o método de reconstrução exerce na qualidade da imagem re-

construída é de fundamental importância na área médica. Entender a efetividade dos parâmetros envolvidos é essencial para fornecer informações precisas sobre o interior do paciente. O uso de *phantoms* digitais, como o *phantom* de Shepp-Logan, permite desenvolver a prototipagem do algoritmo de reconstrução por meio de testes dos parâmetros que permeiam a técnica. Essa abordagem é amplamente utilizada na literatura antes de realizar o imageamento com *phantoms* físicos ou pacientes [22, 34].

Diante do exposto, este projeto planeja implementar em Python o algoritmo da retroprojeção filtrada para reconstruir imagens de *phantoms* digitais e físicos, como o *phantom* de Shepp-Logan e o *phantom* de Jaszczak, respectivamente. Além disso, pretende-se analisar o impacto que os parâmetros possuem na técnica e as limitações do método.

## 2.1 Objetivos Gerais

- Desenvolver um método analítico para reconstruir tomograficamente *phantoms* digitais e físicos, como os modelos Shepp-Logan e Jaszczak, respectivamente.

## 2.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver um algoritmo em Python para obter o sinograma das projeções tomográficas fornecidas por um equipamento de SPECT e obtidas de um *phantom* digital;
- Desenvolver o algoritmo em Python que receba o sinograma e reconstrua a imagem tomográfica do *phantom* digital de Shepp-Logan e físico de Jaszczak, utilizando o método analítico FBP;
- Implementar filtros no domínio da frequência que otimizem a resolução espacial e o contraste da imagem reconstruída, i.e., filtro rampa e Hamming;
- Avaliar a qualidade da imagem reconstruída;
- Analisar a existência de artefatos que permeiam a FBP.

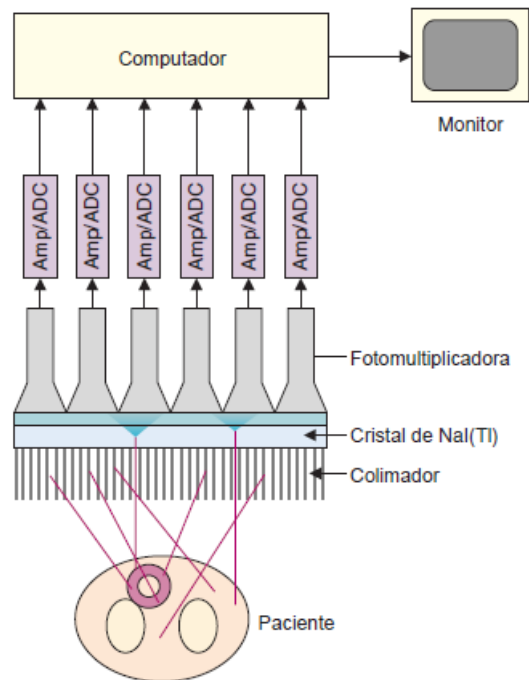
## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 3.1 Tomografia computadorizada por emissão de fóton único (SPECT)

O imageamento com uso de radionuclídeos é a principal modalidade usada na Medicina Nuclear. Nas clínicas de Medicina Nuclear são realizados diagnósticos, prognósticos, preditivos e de desfecho intermediário em oncologia, cardiologia, neurologia e doenças infecciosas e inflamatórias [36].

O objetivo da utilização de radionuclídeos é obter uma imagem da distribuição do radiofármaco no interior do paciente a partir dos fótons energéticos emitidos por esses radionuclídeos. Isso é realizado com o uso de radiofármacos, os quais são o resultado da união de um radionuclídeo, como o  $^{99m}\text{Tc}$  e o  $^{18}\text{F}$ , com um fármaco específico, que levam o radionuclídeo para a região de interesse. Esses radionuclídeos tem o funcionamento explicado pelo decaimento radioativo que ocorre nesses elementos. A estabilidade nuclear é regida pelo equilíbrio entre as forças nucleares fortes dos prótons e nêutrons e a repulsão elétrica presente no núcleo devido ao acúmulo de prótons. Portanto, para um número de prótons muito diferente do número de nêutrons, a intensidade da repulsão elétrica aumenta, causando a instabilidade do núcleo. Em núcleos instáveis, o processo de decaimento radioativo ocorre, proporcionando uma transição do nuclídeo original (pai) para o nuclídeo filho, liberando alguma forma de energia no processo [29]. O tipo e a energia liberada no decaimento radioativo dependem do tipo de isótopo radioativo. No âmbito da Medicina Nuclear, as faixas de energia utilizadas variam de 80 a 511 keV. Essa energia, quando na forma de raios gama (fótons energéticos originários do decaimento radioativo), é suficientemente penetrante para atravessar o corpo do paciente e chegar aos detectores.

A câmara gama, ou câmara de cintilação (Figura 3.1), é um equipamento capaz de realizar imageamento com uso de radionuclídeos devido à presença de um detector de fótons altamente energéticos. De maneira simplificada, a câmara gama pode ser dividida em quatro componentes: um colimador, um cristal de cintilação, uma fotomultiplicadora e um computador.

**Figura 3.1:** Modelo esquemático de uma câmara gama.

Fonte: Imagem adaptada de Cherry (2013) [8].

O colimador geralmente consiste em uma placa de chumbo contendo muitos furos. Os fótons que atingem as paredes internas do colimador são atenuados, enquanto os raios que passam pelos furos chegam à superfície do cristal de cintilação. Portanto, o colimador é utilizado para definir a direção dos raios  $\gamma$  detectados, permitindo a passagem apenas dos raios que passem pelos furos e sejam perpendiculares à superfície do colimador [26].

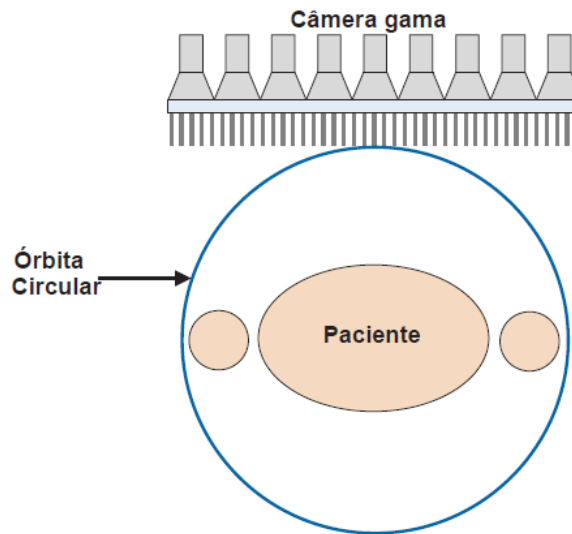
O cristal de cintilação é geralmente formado de NaI(Tl) (iodeto de sódio dopado com tálio). Esse cristal converte a radiação gama incidente em fótons de luz visível e ultravioleta, que serão posteriormente detectados e amplificados pelos tubos fotomultiplicadores. O cristal é constituído por um material denso e com alto número atômico, de forma a aumentar a probabilidade de interação da radiação gama como ele através do efeito fotoelétrico [1, 16].

Ao cristal de cintilação são acoplados muitos tubos fotomultiplicadores dispostos, compactamente, num arranjo hexagonal. Estes tubos convertem a luz emitida pelo cristal em um sinal elétrico e o amplificam, enviando-o até um circuito eletrônico capaz de determinar se o fóton possui uma amplitude adequada para ser usado na formação da imagem e também determinam a posição na qual foi emitido [1, 8, 16]. Por fim, o computador realiza o processamento e a reconstrução da imagem para ser visualizada no monitor. As imagens são exibidas em um monitor de computador, onde o brilho e o contraste da imagem podem ser manipulados e diferentes tabelas de cores podem ser empregadas [8].

Uma câmara gama rotativa pode ser usada para adquirir dados para imagens de tomografia computadorizada. Esta abordagem, empregada com radionuclídeos que emitem raios  $\gamma$ , é conhecida como tomografia computadorizada por emissão de fóton único (SPECT, do inglês -

*Single Photon Emission Computed Tomography*). Na SPECT, o detector (*gantry*), rotacionando numa trajetória circular com o centro no paciente, é suficiente para adquirir os dados necessários para as imagens tomográficas (Figura 3.2). A câmara gama adquire imagens de projeção bidimensionais (2-D) em intervalos angulares igualmente espaçados ao redor do paciente. Essas imagens fornecem os dados de projeção (1-D) necessários para reconstruir imagens transversais. [8].

**Figura 3.2:** Modelo da aquisição de imagem da SPECT



Fonte: Adaptado de Cherry (2013) [8].

## 3.2 Aquisição de imagem e projeções

Os equipamentos capazes de realizar a SPECT compartilham algumas particularidades que serão abordadas a seguir para introduzir o processo de reconstrução da imagem. Para simplificar a explicação, será considerado um equipamento com um único *gantry*, a parte do aparelho responsável pela detecção na câmara gama. Além disso, os componentes envolvidos, como detectores, colimadores e radiofármacos, serão considerados ideais, ou seja, sem falhas em seus funcionamentos. Por exemplo, o colimador ideal atenuaria todos os raios que não passassem pelos seus furos, algo que, na prática, não ocorre com 100% de eficiência. O cristal de cintilação ideal captaria cada um dos eventos que passassem por ele, o que também não ocorre nos cristais reais. Esses são alguns exemplos de idealizações que permeiam o processo de reconstrução de imagem.

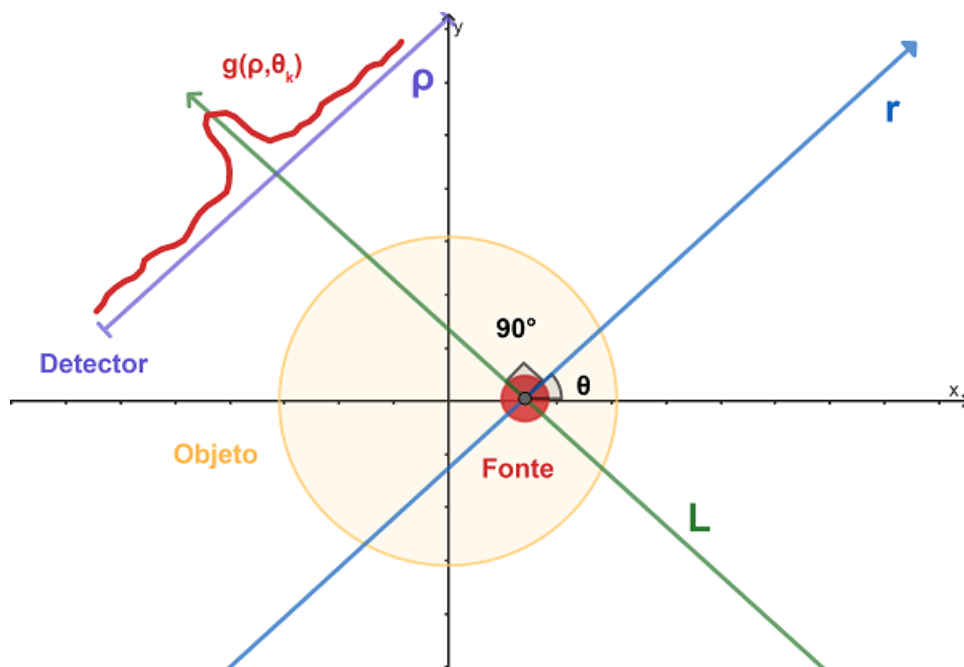
Ao realizar a aquisição da imagem, o paciente, previamente injetado com o radiofármaco, deita-se na mesa do equipamento. O *gantry*, responsável pela detecção na câmara gama, rotaciona ao redor do eixo transversal do paciente. Esse movimento é centrado no eixo de rotação do equipamento e é crucial para a reconstrução de imagens. Mesmo um ligeiro desvio nesse

movimento pode resultar em artefatos graves e degradar significativamente a qualidade da reconstrução [25].

O paciente injetado com o radiofármaco emite raios  $\gamma$ , que são captados pelo detector da câmara gama. Vale salientar que, nesse modelo idealizado, apenas os raios que chegam perpendiculares à superfície do detector são assumidos como uma contagem no equipamento, pois o colimador atenua os raios que não passam pelos seus furos. Isso gera uma relação entre o local no detector onde os raios são captados e os possíveis locais de origem desses raios. Assim, a intensidade detectada em uma região do detector está diretamente relacionada à linha perpendicular que chega a essa região, visto que apenas essa linha contribui para a sua intensidade.

A Figura 3.3 ilustra o processo de aquisição de projeções. Note que a quantidade de fótons captada por um elemento do detector é descrita pela atividade das fontes radioativas ao longo de uma linha  $L$ , que está diretamente à frente dos detectores. O conjunto do número de fótons captados, que chega a cada elemento do detector, é chamado de projeção  $g(\rho, \theta_k)$ . Assim, uma fonte pontual radioativa que emite fótons em todas as direções, tem apenas os raios que chegam perpendicularmente à superfície do detector, considerados contagem pelo sistema de aquisição. O conjunto desses raios, os quais são considerados contagem pelo sistema, forma a projeção.

**Figura 3.3:** Esquema simplificado do processo de aquisição de projeções.



Fonte: Figura do autor.

É importante notar que fótons emitidos na mesma direção, porém a partir de profundidades diferentes, podem produzir cintilações na mesma região do detector. Assim, a distância entre a região emissora e a de detecção é desconhecida. Por este motivo, apenas uma projeção é insuficiente para obter a imagem da distribuição do volume radioativo no órgão que está sendo estudado [11].

### 3.3 Transformada de Radon e o sinograma

Compreendidos o que são e de onde vêm as projeções, é importante quantificá-las e relacioná-las com a densidade de radionuclídeo que as forma, para que seja possível simular a formação de projeções. A expressão matemática que contém as propriedades da projeção de um objeto em um conjunto de ângulos é chamada de transformada de Radon ( $\mathcal{R}(f)$ ). Essa equação, deduzida pelo matemático austríaco Johann Radon, demonstra que, se as projeções de todos os ângulos de uma imagem bidimensional tiverem suas intensidades conhecidas, a imagem poderá ser reconstruída a partir dessas projeções [5, 11]. A equação 3.1 é a transformada de Radon e a equação 3.2 é a parametrização utilizada (demonstrada no apêndice A.2).

$$\mathcal{R}(f) = \int_{\text{linha } L} f(x, y) dL = g(\rho, \theta) \quad (3.1)$$

$$L(\rho, \theta) : x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = \rho \quad (3.2)$$

em que  $x$  e  $y$  são as coordenadas do objeto no plano cartesiano de aquisição centrado no centro de rotação do equipamento,  $\theta$  é o ângulo que o detector faz com centro de rotação,  $\rho$  é a distância do local de aquisição do fóton com o centro do detector e também a distância da reta  $L$  ao centro de rotação,  $\mathcal{R}(f)$  é a transformada de Radon do objeto,  $f(x, y)$  é a atividade da densidade de radiofármaco no interior do objeto para equipamentos de SPECT (ou intensidade dos pixels do objeto, no caso de simulação digital),  $g(\rho, \theta)$  são as projeções, ou também conhecido como o sinograma, termo que será discutido mais a frente no texto e  $L$  é a reta parametrizadora que correlaciona o possível local de geração da radioatividade com valor da projeção.

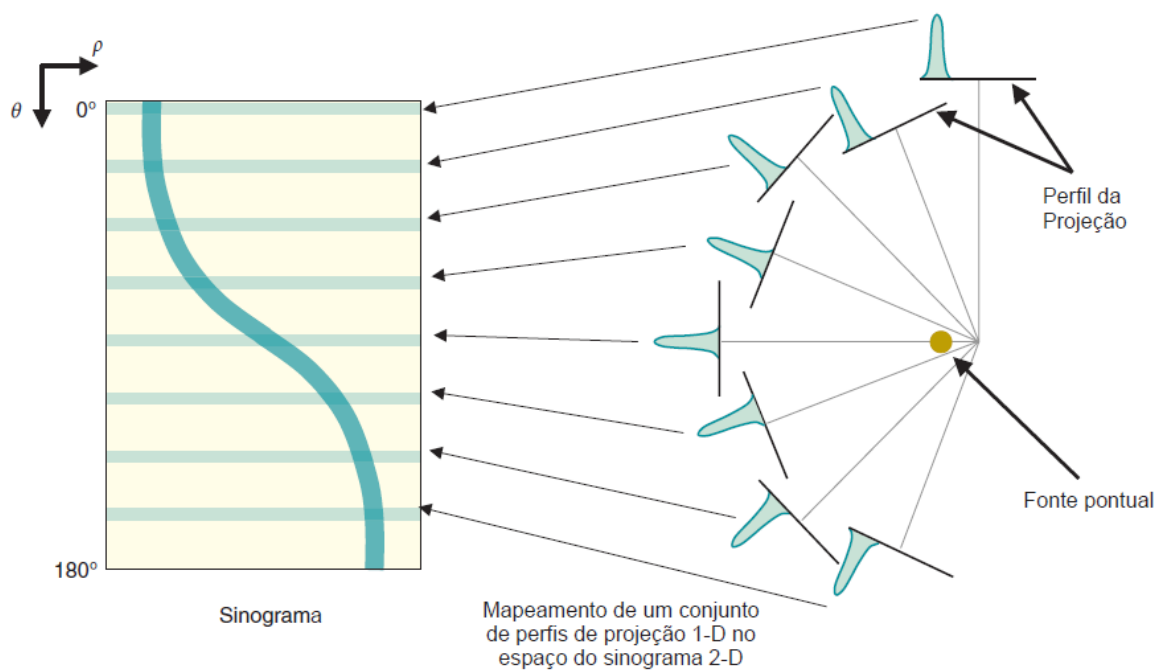
Dadas as características da projeção, é possível verificar que a Equação 3.1 contém todas as propriedades esperadas da representação matemática de uma projeção a um certo ângulo. Primeiro, a transformada de Radon precisa relacionar a intensidade dos feixes da fonte radioativa, dado pelo termo  $f(x, y)$ , com o valor projetado, representado pelo termo  $g(\rho, \theta)$ . Segundo, a correlação precisa ocorrer entre os valores de intensidade que saem do objeto e chegam perpendiculares à superfície do detector. A integral ao longo de  $L$  permite que essa característica seja respeitada, limitando a soma a somente elementos que estejam sobre a reta perpendicular, dada pela parametrização da Equação 3.2. Terceiro, a reta que sai da região central do detector e chega no centro de rotação do equipamento deve ser perpendicular, ou seja, a posição central do detector,  $\rho = 0$ , deve possuir a reta perpendicular que passa pelo centro de rotação do equipamento,  $f(x = 0, y = 0)$ , de forma que o valor  $\rho$  do detector tenha sempre o mesmo valor numérico do  $\rho$  da reta de parametrização  $L$ .

A obtenção de uma projeção com a transformada de Radon é feita fixando-se o ângulo  $\theta$  e variando os valores de  $\rho$  ao longo das dimensões do detector. Para obter a próxima projeção é necessário alterar o valor do ângulo fixo, e novamente variar os valores de  $\rho$ . Esse método é geralmente o mesmo encontrado na rotina clínica de um aparelho de SPECT *step-and-shoot*,

no qual a aquisição de imagem ocorre pausadamente. Nele o conjunto de detectores capta os valores de intensidade em um determinado ângulo e, após um certo tempo, a posição angular é alterada [6].

O resultado da aquisição de várias projeções em diferentes ângulos, é o chamado de sinograma. O sinograma é uma figura bidimensional que relaciona a intensidade do local de detecção dos fótons no detector (ou intensidade de pixel, na simulação) com a posição angular que a projeção está sendo adquirida. O gráfico ganha esse nome devido ao comportamento senoidal que uma fonte pontual tem ao ter seu sinograma obtido, como demonstrado na Figura 3.4.

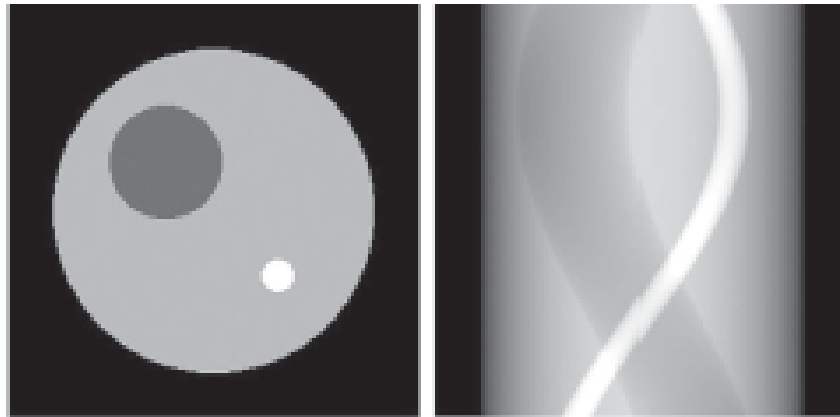
**Figura 3.4:** Sinograma de uma fonte pontual.



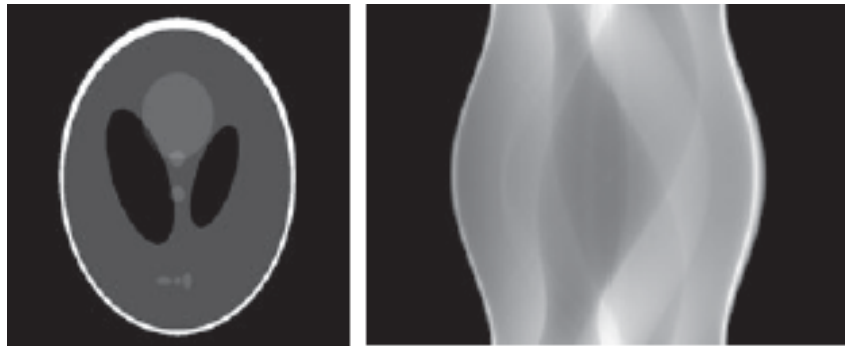
Fonte: Adaptado de Cherry (2013) [8].

O sinograma, quando realizado para distribuições de fontes radioativas não tão simples, resulta em sinogramas complexos de analisar, como os sinogramas da Figura 3.5a e 3.5b. Matematicamente o sinograma é representado pelo termo  $g(\rho, \theta)$ , já que ele engloba todas as possíveis variações de ângulo e posição das projeções. Além disso, é válido pontuar que na área de reconstrução de imagens, o sinograma contém todas as informações necessárias para realizar a reconstrução do objeto imageado.

**Figura 3.5:** Sinograma de *phantom* digitais complexos.



(a) Imagem obtida de Cherry (2013) [8]



(b) Imagem obtida de Gonzalez (2010) [13]

Uma forma alternativa de representar as projeções decorrentes da Equação 3.1, é a seguinte (Equação 3.3):

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \rho) dx dy \quad (3.3)$$

o qual o único termo que difere a Equação 3.3 da Equação 3.1 é o delta de Dirac ( $\delta$ ) e a ausência da integral em  $L$ .

Essa forma alternativa, possui as mesmas propriedades do sinograma obtido pela Equação 3.1. Na Equação 3.3, o delta de Dirac ( $\delta$ ) possui a propriedade de “filtragem” dos termos da integral de linha em  $L$ , demonstrado na Equação 3.4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (3.4)$$

Com isso o cálculo da Equação 3.3 em cada elemento de linha é garantido de forma idêntica ao que ocorre na Equação 3.1, em que para cada elemento de  $g(\rho, \theta)$  há uma única reta relacionada a sua intensidade. Essa forma alternativa, da Equação 3.3, é mais prática para demonstrar o resultado da Seção 3.5.2, o qual é o teorema fundamental para a retroprojeção filtrada.

Por fim, temos que para o caso discreto, a integral da expressão 3.1 se torna um somatório, como visto na Equação 3.5.

$$g(\rho, \theta) = \sum_{\text{linha } L(\rho, \theta)} f(x, y) \Delta L \quad (3.5)$$

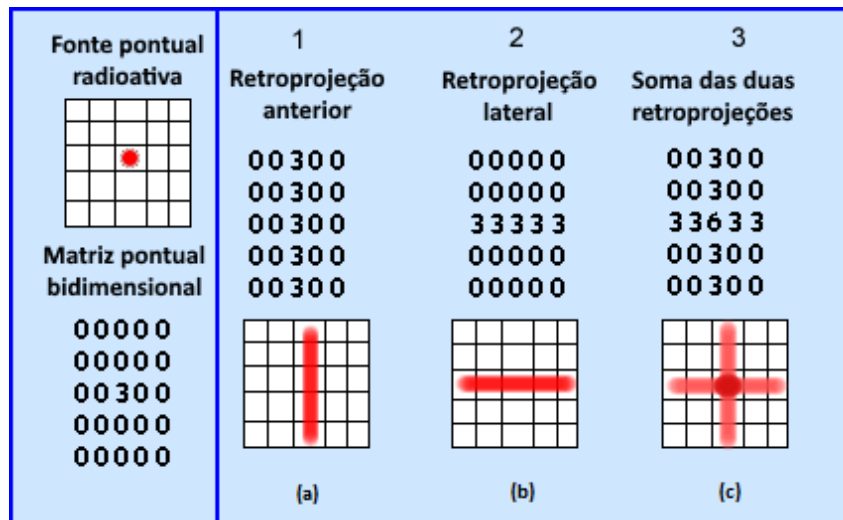
com o somatório realizado sobre os elementos da linha  $L$  e o  $\Delta L$  sendo a variação ao longo da linha  $L$ . Esse processo é realizado com o valor de  $\rho$  centrado na parte central do detector e, portanto, ele varia de valores positivos a negativos ao longo da superfície do detector.

### 3.4 Reconstrução analítica: Transformada inversa de Radon e retroprojeção

O principal objetivo dos métodos de reconstrução tomográficos é obter a representação tridimensional de um volume a partir de suas projeções. Um dos métodos mais simples para se obter esse resultado é a retroprojeção (BP, do inglês *Backprojection*), que consiste em tomar o valor de um elemento adquirido em um ângulo  $\theta$  e distribuir este valor em todos os elementos ao longo de uma linha no ângulo  $\theta$  da matriz da imagem. Todos os elementos na linha serão preenchidos com este mesmo valor, porque, neste estágio, a distribuição real da fonte ao longo da linha é desconhecida. Este processo será repetido para todos os elementos captados em todos os ângulos  $\theta$  e os valores retroprojetados reforçarão uns aos outros em determinada localização [3, 11].

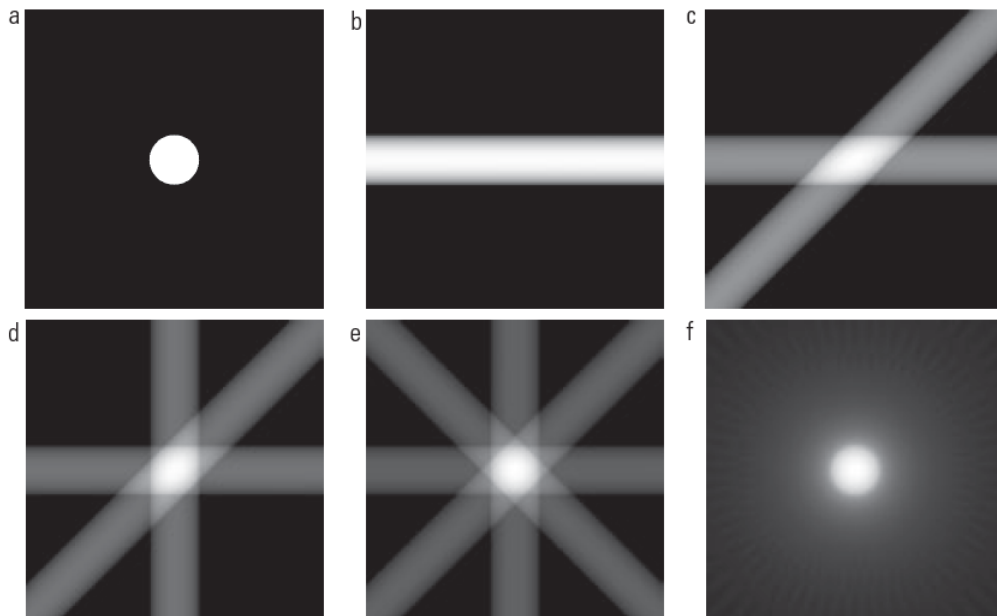
Adotando a Figura 3.6 como demonstração da retroprojeção, pode-se observar que uma “fatia” bidimensional de uma fonte pontual emissora de radiação pode ser matematicamente aproximada como uma matriz bidimensional pontual. A projeção dessa matriz a um certo ângulo  $\theta$  é um vetor unidimensional, por exemplo,  $g(\rho, \theta = 90^\circ) = [0, 0, 3, 0, 0]$ . Ao ser retroprojetado na matriz, os valores do vetor são repetidos em todas as linhas ou colunas, como demonstrado em (a) e (b) da Figura 3.6. Esse processo de retroprojeção é realizado em todos os ângulos  $\theta$  e por fim são somadas as matrizes resultantes, como mostrado em (c) da Figura 3.6. Note que o valor central da matriz resultante tem uma intensidade maior que as demais, destacando uma similaridade grosseira dela com a matriz pontual original. A diferença da retroprojeção com relação à imagem original cai drasticamente à medida que aumentamos a quantidade de ângulos, como exemplificado pela Figura 3.7, na qual a imagem (a) é a fonte radioativa original e as imagens de (b) à (f) são retroprojeções utilizando 1, 2, 3, 4 e 32 retroprojeções. Ficando evidente o aumento da qualidade da reconstrução a medida que cresce a quantidade de retroprojeções.

**Figura 3.6:** Esquema simplificado do processo de retroprojeção.



Fonte: Adaptado de [www.people.vcu.edu/~mhcrosthwait/clrs322/spectpartI.htm](http://www.people.vcu.edu/~mhcrosthwait/clrs322/spectpartI.htm). Acesso em: 25 jun. 2024

**Figura 3.7:** A fonte radioativa original é a imagem (a). Elementos (b) ao (f) são retroprojeções utilizando 1, 2, 3, 4 e 32 projeções.



Fonte: Imagem obtida de Gonzalez (2010) [13].

Observa-se que, já que o sinograma é formado a partir da transformada de Radon, é possível realizar o processo inverso que originou esse sinograma por meio da transformada inversa de Radon. Assim, a expressão matemática que contém as propriedades esperadas da retroprojeção (Equação 3.6) é a chamada transformada inversa de Radon  $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}(f))$ .

$$\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}(f)) = \int_0^\pi g_\theta(x, y) d\theta = f(x, y) \quad (3.6)$$

$$g_\theta(x, y) = g_\theta(\rho(x, y), \theta) = g(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) \quad (3.7)$$

em que  $x$  e  $y$  são as coordenadas do objeto no plano cartesiano de aquisição centrado no centro de rotação do equipamento,  $\theta$  é o ângulo que o detector faz com centro de rotação,  $\rho$  é a distância do local de aquisição do fóton radioativo com o centro do detector,  $g_\theta(x, y)$  são os valores de intensidade da projeção quando  $\theta$  é fixado (Equação 3.7),  $f(x, y)$  é a reconstrução da densidade de radiofármaco no interior do objeto para equipamentos de SPECT (ou reconstrução da intensidade dos pixels do objeto, no caso de simulação digital).

Podemos verificar as propriedades esperadas da retroprojeção a partir da transformada inversa de Radon. Primeiro, o termo  $\rho(x, y) = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$  garante que estamos relacionando a distância de aquisição do feixe radiativo  $\rho$  com as coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , o qual é o local que fez uma das várias contribuições de atividade radioativa para formação de  $g(\rho, \theta)$ , em um certo ângulo  $\theta$  fixo. Segundo, o termo  $g_\theta(\rho(x, y), \theta)$ , com  $\theta$  fixo, representa o valor de intensidade da projeção  $g_\theta$  gerada a partir da reta  $L$ , sendo que essa reta possui como um de seus componentes os pontos de coordenadas  $(x, y)$  que contribuíram com a intensidade de  $g_\theta$ . Esse calculo gera um único valor  $g_\theta$ , correspondendo a àquele único ponto da projeção que advém da coordenada  $(x, y)$  especificada. Terceiro, a integral  $d\theta$  soma todos os valores de  $g_\theta$  com diferentes ângulos  $\theta$ . Assim, o valor da reconstrução no ponto  $(x, y)$  é obtido para um único componente da imagem  $f(x, y)$ . Esse processo é feito para todos os pontos para se obter a imagem reconstruída completa.

É fácil extrapolar que para o caso discreto a integral se torna um somatório e a Equação 3.6 torna-se a Equação 3.8.

$$f(x, y) = \sum_{\theta=0^\circ}^{180^\circ} g_\theta(x, y) \Delta\theta \quad (3.8)$$

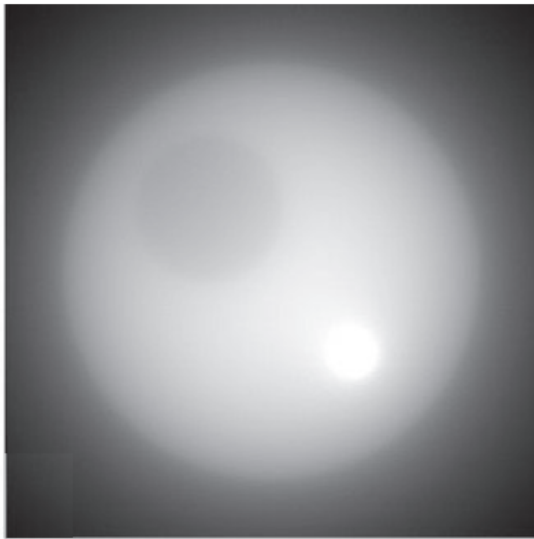
no qual o único termo dessa equação que difere da sua contraparte continua (Equação 3.6), além do somatório, é o  $\Delta\theta$ , que é a variação angular ao longo dos  $180^\circ$ . É importante pontuar que apesar de estar em um somatório, a variação do termo angular não é necessariamente em incrementos de um. O ângulo no detector pode variar de qualquer valor, por exemplo, de  $0,5^\circ$  em  $0,5^\circ$  ao longo dos  $180^\circ$ .

As imagens 3.8a e 3.8b são as retroprojeções das imagens 3.5a e 3.5b, respectivamente. É perceptível, através das imagens da Figura 3.8, que houve uma deterioração da qualidade da imagem reconstruída, evidenciada por um borramento resultante do método utilizado. Esse borramento é conhecido como artefato estrela, ou borramento  $1/r$  (Equação 3.9), e é o resultado dá sobreamostragem no centro da imagem.

$$f(x, y) = f'(x, y) * \frac{1}{|r|} \quad (3.9)$$

sendo que  $f'(x, y)$  é a distribuição espacial real de radiofármaco,  $f(x, y)$  a distribuição reconstruída pelo método de retroprojeção,  $*$  é a operação matemática de convolução e  $r$  é o vetor radial que sai do centro da imagem.

**Figura 3.8:** Retroprojeção da Figura 3.5.



(a) Imagem obtida de Cherry (2013) [8]



(b) Imagem obtida de Gonzalez (2010) [13]

Uma forma de entender essa sobreamostragem do artefato estrela no domínio espacial é com a retroprojeção direta de uma fonte pontual única, como na Figura 3.6. Caso se realize a retroprojeção em uma fonte pontual, a imagem ficaria fortemente desfocada, uma vez que as projeções seriam adicionadas de volta a todo o local de onde vieram e o centro da imagem teria uma contribuição amplificada na origem em relação à contribuição nas bordas, como ocorreu na Figura 3.6c. A sobreamostragem precisa ser reponderada, ou “filtrada”, para ter contribuições iguais em toda a imagem [2].

A fim de compreender a solução para o problema do artefato estrela, é necessário primeiro compreender a utilização de um ferramental fundamental no processamento e reconstrução de imagem, conhecido como transformadas de Fourier.

### 3.5 Reconstrução analítica: Retroprojeção filtrada

A retroprojeção filtrada (FBP, do inglês *Filtered-backprojection*) é o mais conhecido e utilizado método de reconstrução de SPECT adotado em ambiente clínico, por ser mais rápido que os demais métodos [11]. Esse método é usado para solucionar o problema do artefato estrela que causa o borramento na reconstrução da imagem. Isso é feito com o uso de filtros passa-alta, que atenuem as baixas frequências responsáveis pela borramento no domínio das frequências.

### 3.5.1 Transformada de Fourier

As imagens em Medicina Nuclear representam a distribuição espacial de emissões de radio-nuclídeo em termos de contagens em uma dada coordenada  $(x, y)$ . Essa representação em termos de espaço é chamada de domínio do espaço ou domínio do objeto. Em processamento de imagens, é conveniente, muitas vezes, transformar as informações da imagem do domínio espacial para o domínio de frequências. Qualquer imagem tem diversas frequências: altas, representadas por transições rápidas como bordas e pequenos objetos e baixas, representadas por objetos maiores. A transformada de Fourier pode ser usada para representar essas imagens como funções trigonométricas caracterizadas pela variação de frequências e amplitudes. Em outras palavras, é uma ferramenta que permite que uma imagem seja dividida em diversas componentes, cada componente representa uma determinada frequência [11].

A expressão matemática da transformada de Fourier ( $\mathcal{F}$ ) 1-D (unidimensional) continua de  $f(x)$  com variável  $x$  é dada pela Equação 3.10. Já a expressão da transformada inversa de Fourier ( $\mathcal{F}^{-1}$ ) 1-D continua de  $F(u)$  com variável  $u$  é dada pela Equação 3.11.

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx \quad (3.10)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{+j2\pi ux} du \quad (3.11)$$

em que  $f(x)$  é a função no domínio do espaço,  $x$  é a coordenada espacial,  $F(u)$  é a transformada de Fourier de uma função  $f(x)$  que leva ao domínio da frequência e  $u$  é a frequência espacial.

De maneira similar pode-se definir a transformada (Equação 3.12) e a transformada inversa de Fourier (Equação 3.13) 2-D (bidimensional) da seguinte forma:

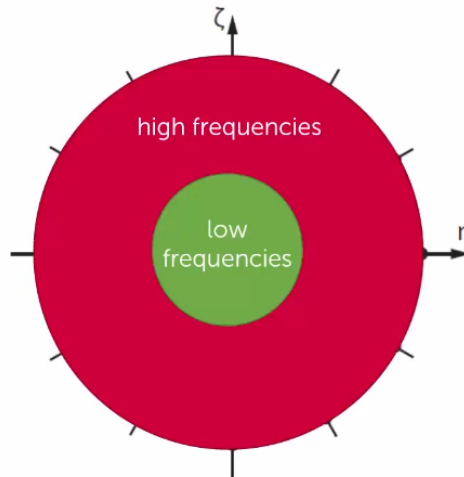
$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (3.12)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v)e^{+j2\pi(ux+vy)} dudv \quad (3.13)$$

em que  $f(x, y)$  é a função no domínio do espaço,  $x$  e  $y$  são as coordenadas espaciais,  $F(u, v)$  é a transformada de Fourier de uma função  $f(x, y)$  que leva ao domínio da frequência e  $u$  e  $v$  são as frequências espaciais.

Vale pontuar que ao aplicar a transformada de Fourier bidimensional em uma imagem, como na Figura 3.9, as baixas frequências concentram-se no centro (representado pela área verde), as altas frequências nas extremidades (representado pela área vermelha) [34]. Essa consequência da transformada é muito útil no uso de filtros de imagem, já que se pode selecionar os componentes de frequência que se visa atenuar ou amplificar.

**Figura 3.9:** Frequências que compõem a transformada de Fourier de uma imagem 2-D (bidimensional).



Fonte: Imagem obtida de [www.youtube.com/watch?v=YIvTpW3IevI](http://www.youtube.com/watch?v=YIvTpW3IevI). Acesso em 28 jun. 2024

### 3.5.2 Teorema do corte central de Fourier

Antes de entrar propriamente na FBP é importante demonstrar um dos principais resultados que permitem a existência desse método, o chamado teorema do corte central de Fourier, o qual é derivado da utilização da transformada de Fourier na retroprojeção.

Demonstraremos esse resultado fundamental para reconstrução analítica com a utilização da transformada de Fourier 1-D (Equação 3.10) em um sinograma (Equação 3.3) com um  $\theta$  fixo:

$$\begin{aligned}
 G(\omega, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\rho, \theta) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \right] dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

em que a expressão em colchetes pode ser simplificada utilizando a propriedade de filtragem da Delta de Dirac (Equação 3.4).

Alterando a parametrização da Equação 3.14 para  $u = \omega \cos(\theta)$  e  $v = \omega \sin(\theta)$ , é perceptível a semelhança do resultado com a Equação 3.12, definida como a transformada de Fourier 2D ( $F(u, v)$ ) de  $f(x, y)$ , calculada para  $u$  e  $v$ :

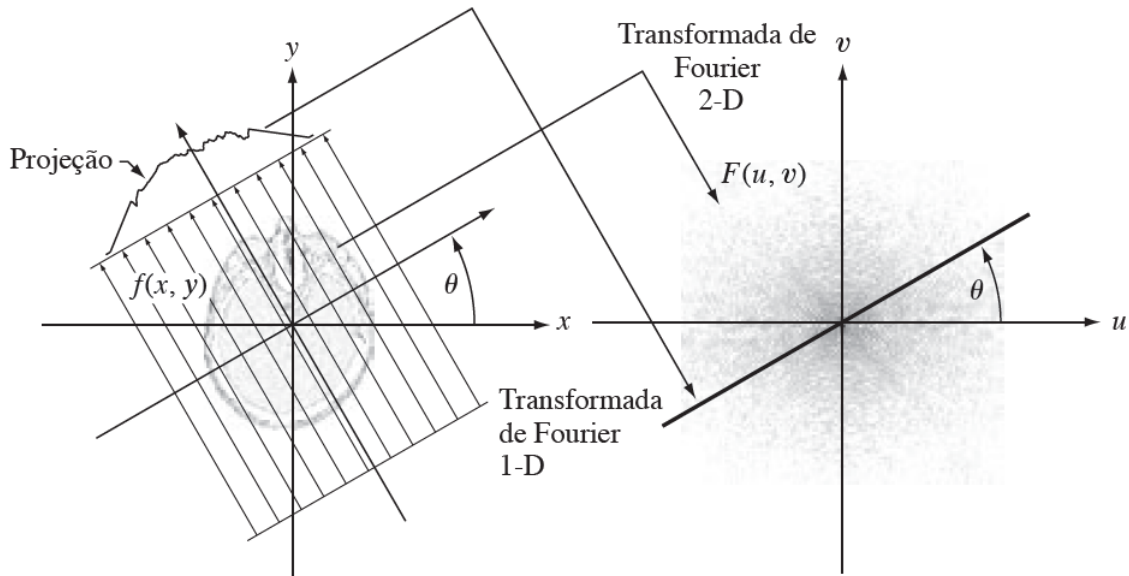
$$G(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy$$

$$= [F(u, v)]_{u=\omega \cos(\theta); v=\omega \sin(\theta)}$$

$$G(\omega, \theta) = F(\omega \cos(\theta), \omega \sin(\theta)) \quad (3.15)$$

O resultado obtido pela Equação 3.15 é o conhecido como o teorema do corte central de Fourier. Este teorema, ilustrado pela Figura 3.10, relaciona a transformada 1-D de uma projeção com  $\theta$  fixo,  $G(\omega, \theta)$ , com a fatia da transformada 2-D da região na qual a projeção foi obtida. Isso implica que, a transformada de Fourier 1-D de uma projeção arbitrária é obtida extraindo os valores de  $F(u, v)$  ao longo de uma linha orientada no mesmo ângulo que o utilizado para gerar a projeção. Outra forma de visualizar esse teorema é a seguinte: a transformada de Fourier 1-D da projeção adquirida com um ângulo  $\theta$  de um objeto, é uma linha na transformada de Fourier 2-D do objeto com mesmo ângulo  $\theta$  que a projeção foi obtida [13].

**Figura 3.10:** Ilustração do teorema da fatia de Fourier.



Fonte: Imagem obtida de Gonzalez (2010) [13].

### 3.5.3 Retroprojeção filtrada (FBP)

A derivação da expressão matemática utilizada para a FBP pode ser obtida a partir da transformada inversa 2-D de Fourier (Equação 3.13), aplicada sobre a transformada de Fourier 2-D do objeto imageado ( $F(u, v)$ ):

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{+j2\pi(ux+vy)} dudv \quad (3.16)$$

Na demonstração é realizado a mudança de coordenadas cartesianas para as coordenadas polares. Assim, é realizado a mudança de  $x = \omega \cos(\theta)$  e  $y = \omega \sin(\theta)$ , com  $\theta$  sendo o componente angular e  $\omega$  o componente radial. A expressão que sintetiza a mudança de variável de integrais duplas é:

$$\int \int_{k_1} h(u, v) du dv = \int \int_{k_2} h(u(\omega, \theta), v(\omega, \theta)) |J(\omega, \theta)| d\omega d\theta \quad (3.17)$$

em que  $h(u, v)$  é a função de coordenadas  $u$  e  $v$  que se quer realizar a mudança,  $\omega$  e  $\theta$  são as novas coordenadas,  $k_1$  e  $k_2$  são os intervalos da integral em cada sistema de coordenada, e  $J(\omega, \theta)$  jacobiano, dado por:

$$J(\omega, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \omega} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

Aplicando o conceito da Equação 3.17 na Equação 3.16, obtém-se:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega \cos(\theta), \omega \sin(\theta)) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \quad (3.19)$$

Utilizando o teorema do corte central de Fourier (Equação 3.15) e dividindo o intervalo de integração de  $0^\circ$  ao  $180^\circ$  e  $180^\circ$  ao  $360^\circ$  é obtido:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\ &\quad + \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\ &\quad + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta + \pi) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))} |\omega| d\omega d\theta \end{aligned} \quad (3.20)$$

Utilizando da seguinte propriedade  $G(\omega, \theta + \pi) = G(-\omega, \theta)$  na Equação 3.20. Note que não é difícil verificar, dado que  $\omega$  e  $\theta$  estão em coordenadas polares, portanto rotacionar em  $180^\circ$  resulta no vetor indo para a posição  $-\omega$ . Com isto é obtido:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^\infty G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\
 &+ \int_0^\pi \int_0^\infty G(-\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(-x \cos(\theta) - y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^\infty G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\
 &- \int_0^\pi \int_\infty^0 G(-\omega, \theta) e^{-j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Realizando uma mudança de variável para a segunda integral do lado direito, com  $\omega' = -\omega$ :

$$\begin{aligned}
 &- \int_0^\pi \int_\infty^0 G(-\omega, \theta) e^{-j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\
 = &- \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 G(\omega', \theta) e^{j2\pi\omega'(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |-\omega'| (-d\omega') d\theta \\
 = &+ \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 G(\omega', \theta) e^{j2\pi\omega'(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega'| d\omega' d\theta \\
 = &+ \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

A última passagem da Equação 3.22 é realizada devido a  $\omega'$  ser uma variável livre (ou muda), ou seja, já que o valor de uma integral depende da função integrada e dos limites de integração e não do símbolo particular que utilizamos para representar a função, é patente que ao mudar o símbolo  $\omega'$  por outro qualquer, o valor da integral não sofrerá nenhuma alteração [15]. Portanto, pode-se alterar o valor de volta para  $\omega$ . Retornando às integrais da Equação 3.21:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^\infty G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\
 &+ \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^\infty |\omega| G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} d\omega \right] d\theta
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

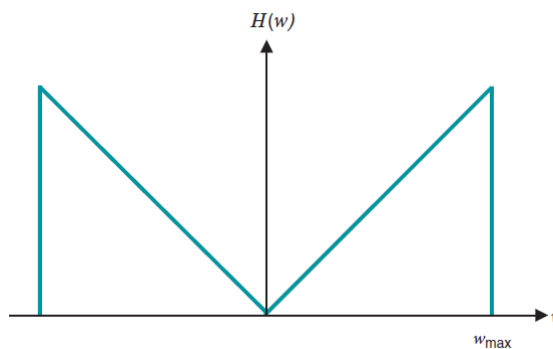
$$\boxed{f(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^\infty |\omega| G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega\rho} d\omega \right] d\theta} \tag{3.24}$$

A Equação 3.24 é a expressão matemática que representa a retroprojeção filtrada. Observa-se que substituindo os termos que estão entre colchetes por  $g_\theta(x, y)$ , obtemos a mesma equação da retroprojeção (Equação 3.6). Portanto, já que tudo é o mesmo, exceto o termo entre colchetes, ele que empodera a FBP com a solução do problema do artefato estrela. Primeiro, é

notável a presença do filtro passa alta conhecido como filtro rampa ( $|\omega|$ ), que ao ser aplicado à transformada de Fourier 1-D do sinograma ( $G(\omega, \theta)$ ) filtra as baixas frequências que compõem a transformada. Assim, eliminando o artefato estrela causador do borramento. Segundo, é perceptível que os termos entre colchetes são uma transformada inversa de Fourier 1-D (Equação 3.11) com  $F(u, v) = |\omega|G(\omega, \theta)$ . Portanto é importante notar que, após ser filtrado, o sinograma sai do domínio das frequências para o domínio espacial. Terceiro, no domínio espacial, aplica-se a retroprojeção da Equação 3.6 de maneira similar, porém desta vez o sinograma está filtrado e seu borramento foi removido. O resultado desse processo é a reconstrução da imagem, agora sem o borramento, apresentando um resultado muito mais similar à distribuição original. Com isso, se tem as ferramentas necessárias para realizar o estudo tomográfico das imagens de SPECT, tanto digitais (simulações) quanto reais, utilizando o método de retroprojeção filtrada.

O filtro rampa no domínio da frequência, conhecido também como Ram-Lak, amplifica seletivamente os componentes de alta frequência em relação aos componentes de baixa frequência, como ilustrado na Figura 3.11. É devido a este comportamento do filtro rampa, que há a remoção do borramento causado pelo artefato estrela presente na retroprojeção, aumentando a nitidez e os detalhes da imagem. Entretanto, o filtro rampa também amplifica componentes de ruído de alta frequência na imagem [8].

**Figura 3.11:** Filtro rampa no domínio da frequência.



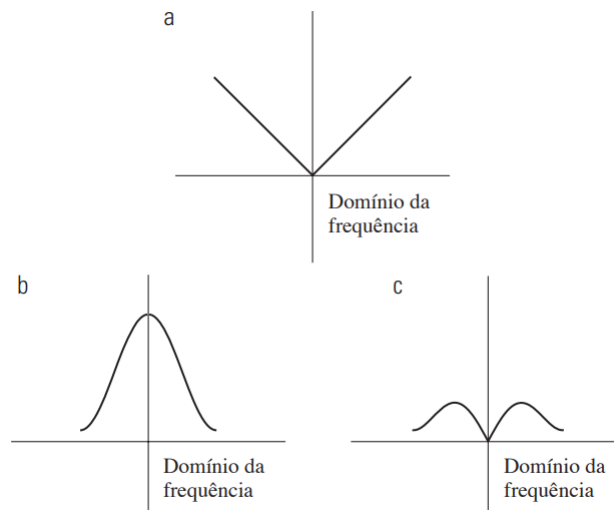
Fonte: Adaptado de Cherry (2013) [8].

Como pode ser visualizado na Figura 3.12, uma forma de corrigir a amplificação de ruído que o filtro rampa pode gerar é a utilização de um fator multiplicativo que atenua parte das altas frequências responsáveis pelo ruído, ou seja, um filtro passa-baixo. Esse filtro que atenua as altas frequências, quando combinado com o filtro rampa, gera um filtro que corrige tanto o artefato estrela quanto os ruídos estáticos, chamado de filtro Hamming [34].

$$H(\omega) = \begin{cases} |\omega|(0,54 + 0,46 \cos(\frac{\pi\omega}{\omega_c})) & \text{se } 0 < |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.25)$$

em que  $H(\omega)$  é o filtro Hamming,  $\omega$  são as frequências espaciais e  $\omega_c$  é a frequência de corte.

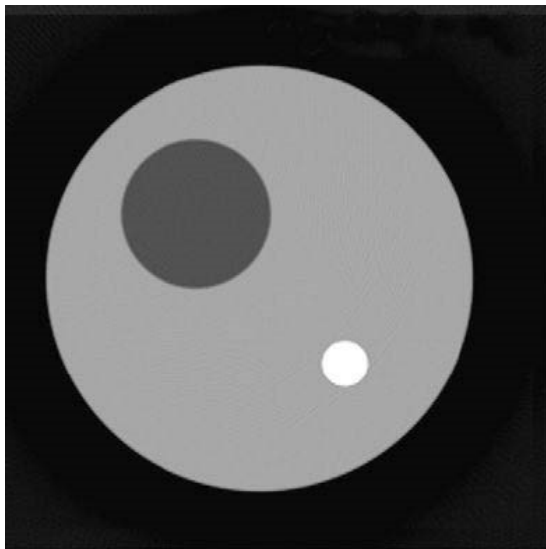
**Figura 3.12:** (a) Gráfico do filtro rampa. (b) Gráfico do fator multiplicativo. (c) Multiplicação do filtro rampa com o fator multiplicativo, formando o filtro Hamming.



Fonte: Adaptado de Gonzalez (2010) [13] .

As imagens 3.13a e 3.13b são as retroprojeções filtradas das imagens 3.5a e 3.5b, respectivamente. É notável o desaparecimento do borramento característico do artefato estrela devido ao uso do filtro no domínio da frequência.

**Figura 3.13:** Retroprojeção filtrada da Figura 3.5.



(a) Imagem obtida de Cherry (2013) [8].



(b) Imagem obtida de Gonzalez (2010) [13].

Por fim, a partir da discussão realizada acima, é possível reescrever uma versão discretizada e simplificada da Equação 3.24 da seguinte forma:

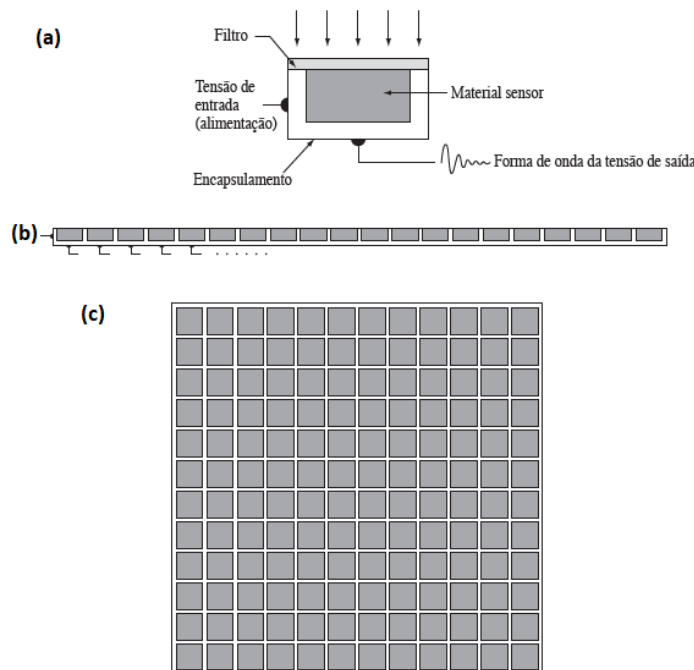
$$f(x, y) = \mathcal{R}_{\text{discreta}}^{-1} \{ \mathcal{F}_{1-D}^{-1} \{ |\omega| G(\omega, \theta) \} \} \quad (3.26)$$

em que  $\mathcal{R}_{\text{discreta}}^{-1}$  é transformada inversa de Radon discreta (Equação 3.5).  $\mathcal{F}_{1-D}^{-1}$  é a transformada inversa de Fourier 1-D discreta. O termo  $|\omega|$  é o filtro rampa e  $G(\omega, \theta)$  é a transformada de Fourier do sinograma.

### 3.6 Imagens digitais em métodos de reconstrução

No estudo tomográfico simulado, utilizando *phantom* digital (objetos que simulam tecidos e órgão do corpo humano), é comum utilizar a configuração geométrica de detectores conhecida como sensores em linha, onde o conjunto de detectores está alinhado um ao lado do outro, como pode ser ilustrado na Figura 3.14b. Já no estudo tomográfico real, realizado clinicamente, a configuração geométrica usada é a matricial (Figura 3.14c), que pode ser vista como o agrupamento lateral de vários sensores de linha, proporcionando uma formação de imagem reconstruída mais rápida.

**Figura 3.14:** (a) Um único sensor de aquisição de imagens. (b) Sensores de linha. (c) Sensores de área (matricial).

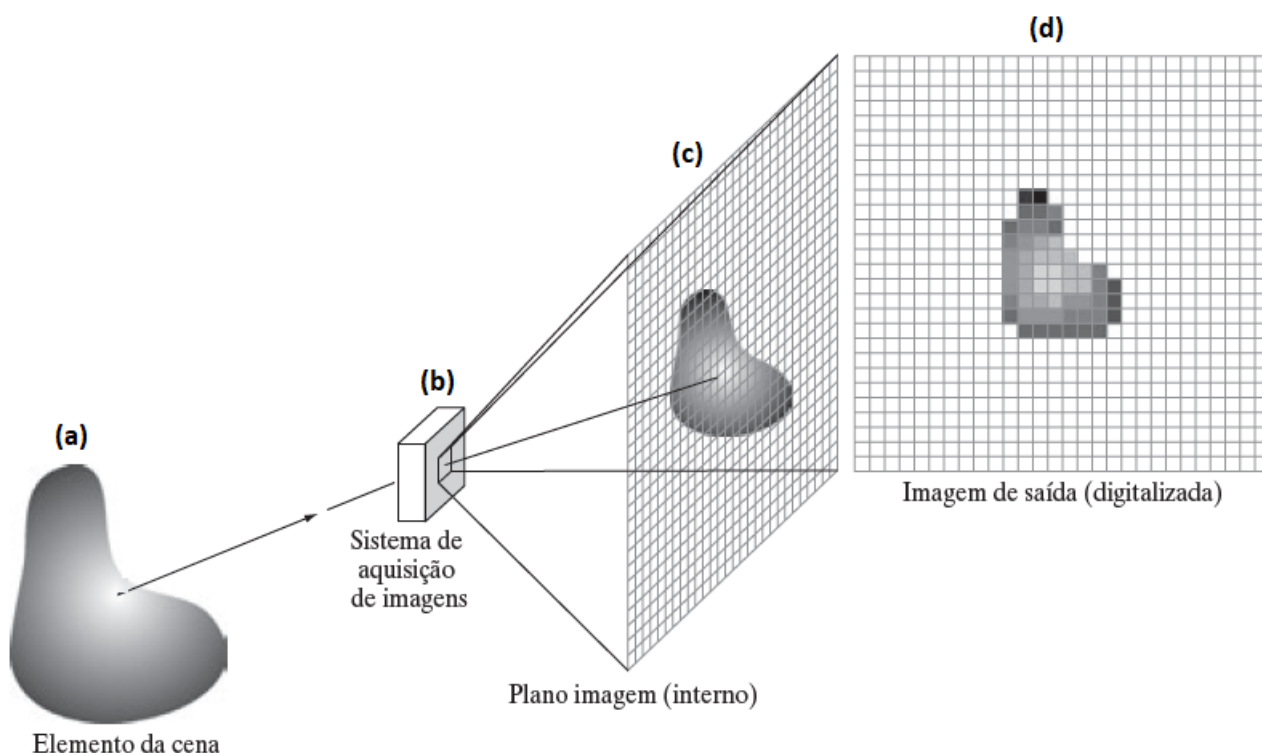


Fonte: Imagem obtida de Gonzalez (2010) [13].

A aquisição e a digitalização de imagens em um sistema está sempre sujeita a conceitos como amostragem e quantização. Uma imagem pode ser contínua em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , bem como em relação à amplitude. Para convertê-la ao formato digital, é necessário amostrar a função que a forma em ambas as coordenadas e na amplitude, como pode ser ilustrado na Figura 3.15. A digitalização dos valores de coordenada é chamada de amostragem, enquanto que a digitalização dos valores de amplitude é chamada de quantização [13]. As imagens digitais

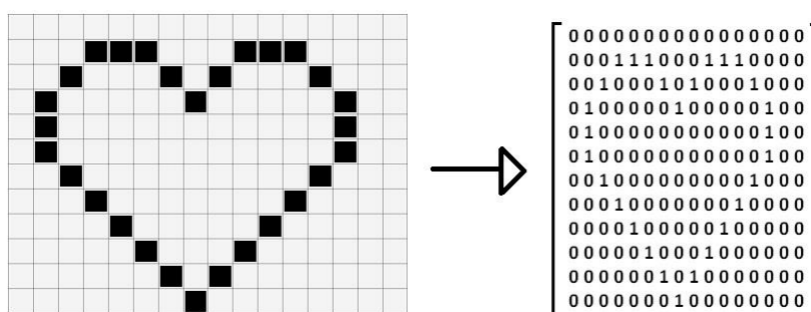
podem ser trabalhadas por meio de matrizes, pois quando divididas nos menores pedaços de informação (os pixels), são matrizes (Figura 3.16). Essa equivalência de imagens digitais (e conseqüentemente matrizes) com os objetos reais que as formaram, pode ser explorada na área de reconstrução.

**Figura 3.15:** Processo de digitalização que ocorre no interior de câmaras digitais e equipamentos de SPECT.



Fonte: Imagem obtida de Gonzalez (2010) [13].

**Figura 3.16:** Representação matricial de uma imagem digital.



Fonte: Imagem obtida de Williams (2016) [37].

Em uma última etapa, um objeto real, como um *phantom*, será visualizado pelo sistema de aquisição como uma matriz. Portanto, é comum dispensar a necessidade de usar o *phantom*

físico para construir e testar o algoritmo de reconstrução, utilizando em vez disso uma matriz, conhecida como *phantom* digital. Após construído, o algoritmo de reconstrução pode ser testado no *phantom* físico a fim de verificar a efetividade da reconstrução

### 3.7 RMSE

Os parâmetros de análise até então são puramente qualitativas, comparação visual entre o *phantom* e a imagem reconstruída. Para ser possível realizar uma análise quantitativa é introduzida a Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE, do inglês - *root mean square deviation*), as quais são uma medida da dispersão de valores [34].

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i^{FBP} - y_i^O)^2}{n}} \quad (3.27)$$

em que  $y_i^{FBP}$  é o valor do pixel da reconstrução na coordenada  $(x,y)$ ,  $y_i^O$  é o valor de pixel do *phantom* original na coordenada  $(x,y)$  e  $n$  é o número de pontos.

Essa medida pode ser entendida como a diferença entre os elementos matriciais de mesma posição da reconstrução e da matriz original (ou *phantom*). Portanto, elemento a elemento essa diferença é calculada, então, elevada ao quadrado para se tornar um valor positivo. Esses valores são somados, já que se visa sintetizar a diferença elemento a elemento em um único número, capaz de representar a qualidade da reconstrução. A soma é normalizada dividindo por  $n$  e então é calculada a raiz dessa diferença. O resultado é um valor médio da dispersão entre os valores da imagem reconstruída e da imagem original.

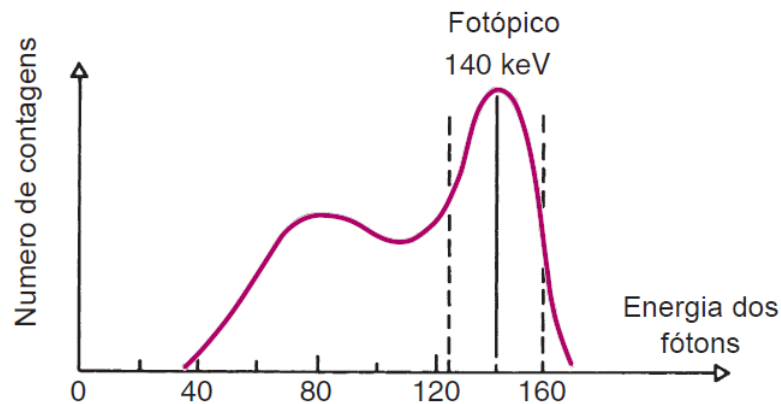
### 3.8 Correção de espalhamento da SPECT

O modelo idealizado utilizado para desenvolver os algoritmos de reconstrução por retroprojeção filtrada assume que apenas a radioatividade da linha perpendicular à superfície do elemento detector contribui para o sinal dessa projeção. Na prática, o sinal pode incluir fótons originados de locais diferentes da linha perpendicular a superfície do detector. Esses fótons, por meio do espalhamento Compton, percorrem e interagem com o meio, alterando o caminho radial originário de sua formação. Esse fóton com o caminho alterado pode coincidir em um elemento do detector diferente do relacionado à sua origem e ser considerado uma contagem pelo sistema.

Os sistemas de captação da SPECT, embora trabalhem com radionuclídeos emissores de fótons com energia conhecida, como os 140 keV do  $^{99m}\text{Tc}$ , possuem uma janela de captação que aceita fótons com energias diferentes da emitida pelo radionuclídeo. Um valor típico de janela para o  $^{99m}\text{Tc}$  inclui fótons com variação de energia de até 20% do valor de emissão do radionuclídeo. Como pode ser ilustrado na Figura 3.17, esse intervalo de aceitação de contagens pelo sistema é chamado de janela de fotopico, sendo o fotopico a energia conhecida dos fótons

emitidos pelo radionuclídeo.

**Figura 3.17:** Espectro do  $^{99m}\text{Tc}$  com baixa taxa de contagem.

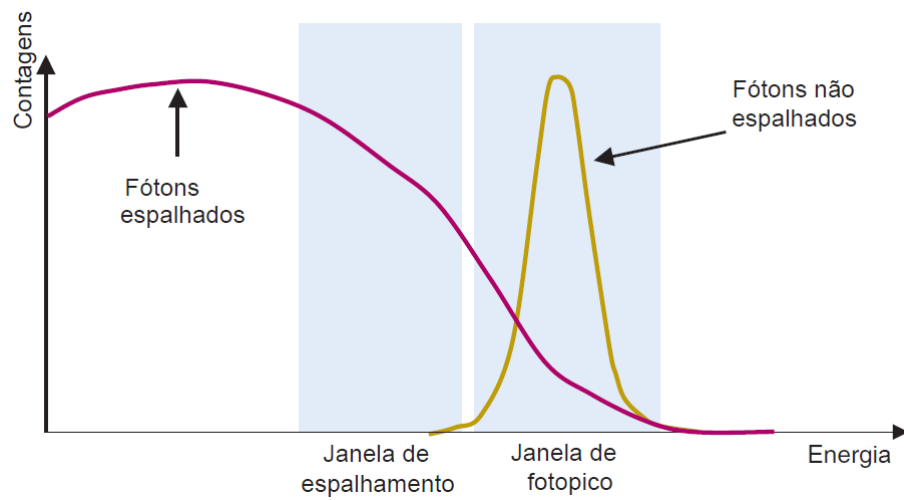


Fonte: Adaptado de Cherry (2013) [8].

Com uma janela típica de fotópico de 20% usada para o  $^{99m}\text{Tc}$ , fótons que foram espalhados por ângulos tão grandes quanto  $50^\circ$ , têm cerca de 50% de probabilidade de serem aceitos como contagem pelo sistema [8]. Assim, esses fótons espalhados que incidem em um elemento detector diferente do relacionado à sua origem, sendo considerados contagem pelo sistema, geram nos métodos de reconstrução uma falsa densidade de radionuclídeo. Isso ocorre devido à correlação que os métodos de reconstrução fazem entre o local de detecção e a origem de emissão do fóton (seção 3.2). Portanto, a presença de fótons espalhados resulta na redução do contraste da imagem e leva a uma superestimação da concentração de radionuclídeo na região.

Um dos métodos mais usados para corrigir raios  $\gamma$  espalhados é adquirir simultaneamente contagens com uma janela de fotópico e uma janela de espalhamento de baixa energia, como pode ser ilustrado na Figura 3.18. Por exemplo, a janela de fotópico para  $^{99m}\text{Tc}$  pode ser definida como 127-153 keV e a janela de espalhamento como 92-125 keV. Os perfis de projeção de espalhamento resultantes são então multiplicados por um fator de ponderação e subtraídos dos perfis de fotópico para obter dados de projeção corrigidos por espalhamento. O fator de ponderação, aplicado às contagens na janela de espalhamento para o processo de subtração, deve ser determinado experimentalmente e depende, em geral, do tamanho da fonte, das configurações exatas das janelas de energia e da resolução de energia do detector da câmara gama. A precisão deste método é limitada pelo fato de que os raios  $\gamma$  na janela de espalhamento têm maior probabilidade de terem sofrido múltiplas interações Compton do que eventos de espalhamento na janela de fotópico; portanto, as distribuições espaciais de espalhamento registradas nas duas janelas de energia podem diferir [8].

**Figura 3.18:** Espectro do  $^{99m}\text{Tc}$  mostrando a janela de fotopico e de espalhamento.



Fonte: Adaptado de Cherry (2013) [8].

## MATERIAIS E MÉTODOS

### 4.1 Linguagem de programação: Python

O software de programação escolhido nesse projeto foi o Spyder, o qual é um ambiente de desenvolvimento integrado multiplataforma de código aberto para programação científica na linguagem Python. O Python é uma linguagem de programação poderosa e elegante, fácil de ler e entender. É uma linguagem clara e objetiva que compartilha dos recursos e módulos de várias outras linguagens, além de ser um software livre com uma comunidade muito ativa e crescente. Nesse projeto, foi usado a versão 3.11 do Python. Adicionalmente, durante a construção do algoritmo foram utilizadas várias bibliotecas com funções prontas, conhecidas como *packages*, que serve de auxílio para o funcionamento do código. As *packages* usadas nesse algoritmo são:

- **NumPy**: é o pacote fundamental para computação científica em Python. É uma biblioteca Python que fornece *arrays* multidimensionais (*array* é uma coleção de um ou mais objetos, do mesmo tipo, armazenados em endereços adjacentes de memória), vários objetos derivados (como *arrays* mascarados e matrizes) e uma variedade de rotinas para operações rápidas em *arrays*, incluindo matemática, lógica, manipulação de forma, classificação, seleção, transformadas discretas de Fourier, álgebra linear básica, operações estatísticas básicas, simulação aleatória e muito mais (Fonte: [numpy.org](https://numpy.org). Acesso em: 8 jul. 2024)).
- **Matplotlib**: é uma biblioteca usada para criar figuras estáticas, animadas e interativas em Python. Comumente associada a gráficos na linguagem, devido a sua fácil manipulação em vários os parâmetros que compõem a imagem (Fonte: [matplotlib.org](https://matplotlib.org). Acesso em: 8 jul. 2024)).
- **Scikit-image, ou skimage**: é uma biblioteca usada para processamento de imagens. Inclui algoritmos para segmentação, transformações geométricas, manipulação de espaço de cores, análise, filtragem, morfologia, detecção de recursos (Fonte: [scikit-image.org](https://scikit-image.org). Acesso em: 8 jul. 2024)).

- **SciPy**: fornece algoritmos para otimização, integração, interpolação, problemas de autovalores, equações algébricas, equações diferenciais, estatísticas e muitas outras classes de problemas (Fonte: [scipy.org](https://scipy.org). Acesso em: 8 jul. 2024).
- **Pydicom**: é um pacote para trabalhar com arquivos DICOM. Permite ler, modificar e gravar dados DICOM de maneira fácil (Fonte: [pydicom.github.io](https://pydicom.github.io). Acesso em: 8 jul. 2024).

## 4.2 Retroprojeção Filtrada em *phantom* digital de Shepp-Logan

Este projeto será dividido em duas partes: a reconstrução do *phantom* digital de Shepp-Logan e do *phantom* físico de Jaszczak. Ambas as partes compartilham o mesmo código em Python, com somente algumas distinções entre eles, como a necessidade de simulação do *phantom* digital, que não é necessária no *phantom* físico. Portanto, opta-se por demonstrar o funcionamento do código utilizando o *phantom* digital de Shepp-Logan como exemplo, para posteriormente abordar as particularidades que fazem a reconstrução do *phantom* de Jaszczak possível.

Nessa primeira parte, a reconstrução do *phantom* digital será utilizada para demonstrar o funcionamento do algoritmo e o surgimento de alguns artefatos importantes no estudo tomográfico, incluindo o artefato estrela. No Python, essa etapa inicia-se com a invocação das bibliotecas necessárias para o funcionamento do algoritmo, como apresentado a seguir:

Bibliotecas

```

1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import pydicom as dicom
5 from skimage.data import shepp_logan_phantom
6 from skimage.transform import rescale, rotate
7 from scipy.interpolate import RectBivariateSpline
8 from scipy.fft import fft, ifft
9

```

### 4.2.1 Simulação do objeto imageado: *phantom* digital

O *phantom* digital utilizado neste projeto é o *phantom* de Shepp-Logan, uma matriz de imagem criada por Larry Shepp e Benjamin F. Logan em seu artigo de 1974 [31]. Este *phantom* é um modelo minimalista de um cérebro humano em um único slice transversal, que inclui a calota craniana, a substância branca e cinzenta, e os núcleos da base. Ele pode ser utilizado para testar algoritmos de reconstrução de imagem e, neste projeto, visa replicar a densidade de radiofármaco que um objeto real teria ao ser imageado em um aparelho de SPECT. O tamanho da matriz da imagem do *phantom* digital a ser reconstruída é de  $128 \times 128$ . No Python, a função que contém a matriz de Shepp-Logan já pronta é a `shepp_logan_phantom`.

Além do *phantom* digital de Shepp-Logan, utilizaremos uma matriz pontual (todos os elementos da matriz são zero exceto um) que visa representar uma fonte pontual radioativa. Isso servirá para demonstrar em detalhes os conceitos abordados na seção de fundamentação teórica. No Python, pode-se criar a matriz pontual a partir de uma matriz composta de zeros (`np.zeros`), adotando um único ponto dela com o valor 1 (a linha `objeto2[80,80] = 1` faz com que o ponto (80, 80) assumo o valor um). Portanto, será utilizado de um volume matricial de dimensões ( $x = 128, y = 128, z = 2$ ), com um elemento transversal  $z = 1$  sendo o *phantom* de Shepp-Logan e o outro elemento  $z = 2$  sendo a matriz pontual. A seguir, a implementação usada para simulação do objeto imageado é apresentada:

```

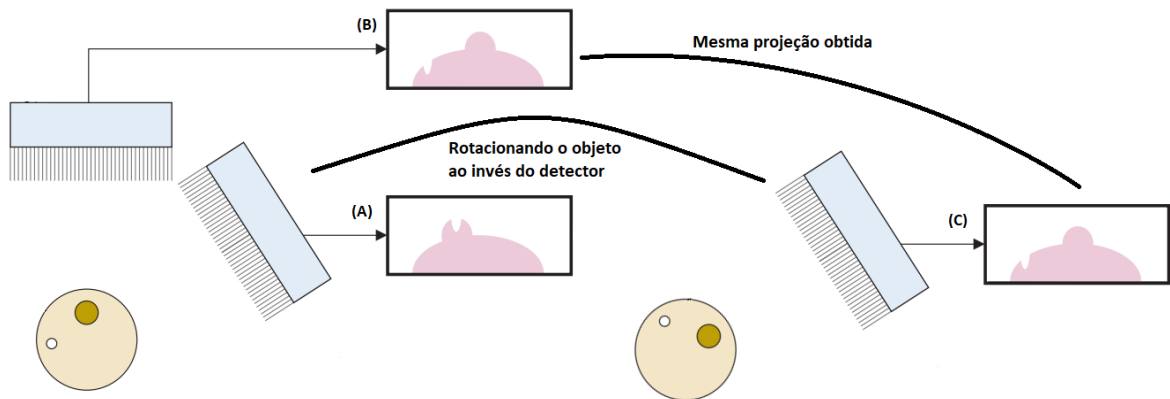
1
2 objeto = np.zeros( ( 128,128,2 ) )
3
4 objeto1 = shepp_logan_phantom()
5 objeto1 = rescale(objeto1, 0.32)
6 objeto2 = np.zeros((128,128))
7 objeto2[80,80] = 1
8
9 objeto[:, :,0] = objeto1
10 objeto[:, :,1] = objeto2
11

```

## 4.2.2 Simulação da rotação do objeto

Em seguida, é necessário simular o movimento rotatório que o *gantry* realiza ao redor do paciente. Uma forma de implementar esse processo é rotacionando o *phantom*, em vez do detector. Esse método de implementação gera praticamente o mesmo resultado esperado da rotação do *gantry*, com perdas mínimas de informação. Durante a rotação do *phantom*, informações próximas aos vértices da matriz podem ser deixadas de fora da matriz rotacionada. No entanto, isso não representa um problema significativo, já que tanto o *phantom* de Shepp-Logan quanto a matriz pontual não possuem informações relevantes nos vértices da matriz que as compõem.

Como ilustrado na Figura 4.1, ao rotacionar o detector ao redor do objeto emissor em um ângulo  $\theta$ , a mudança perceptível na projeção pode ser observada em (B). Essa mesma projeção pode ser obtida rotacionando o objeto enquanto o detector permanece fixo, como mostrado em (C).

**Figura 4.1:** Relação entre rotação do detector e do objeto.

Fonte: Figura do autor.

Essa aplicação de rotacionar o objeto é muito mais simples de ser realizada em Python, visto que rotacionar uma matriz em um certo ângulo e somar as intensidades que a compõem ao longo de um eixo é mais fácil que somar os valores ao longo de um certo ângulo. Para fazer a rotação do objeto, foi utilizado a função `rotate`.

Assim que o `angulo` é definido para o intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  com variações unitárias, é utilizado dois volumes matriciais de dimensões (128, 128, 180) para guardar todas as informações referentes a rotação angular das duas matrizes (Shepp-Logan e pontual), chamada de `objeto_rot`. A estrutura de repetição `while`, cria um laço que executa uma rotina enquanto a condição de teste for avaliada como verdadeira. Portanto, a estrutura é usada para repetidamente realizar a rotação de cada matriz, enquanto grava o valor da matriz rotacionada dentro do `objeto_rot`. A seguir, a implementação da rotação das matrizes é apresentada:

```

1  _____ Rotação do objeto _____
2  angulo = np.arange(0, 180, 1)
3  angulo = np.radians(angulo)
4  objeto_rot = np.zeros((objeto.shape[0], objeto.shape[1],
5  len(angulo), objeto.shape[2] ))
6
7  j = 0
8  while (j<objeto_rot.shape[3]):
9      i = 0
10     while (i<objeto_rot.shape[2]):
11         objeto_rot[:, :, i, j] = rotate(objeto[:, :, j],
12             angulo[i]*(180/np.pi))
13         i = i + 1
14     j = j + 1

```

### 4.2.3 Projeções e sinograma

É importante pontuar que, a partir desta seção, todos os passos subsequentes e, consequentemente, o código em Python, são idênticos na reconstrução tanto do *phantom* digital de Shepp-Logan quanto do *phantom* de Jaszczak.

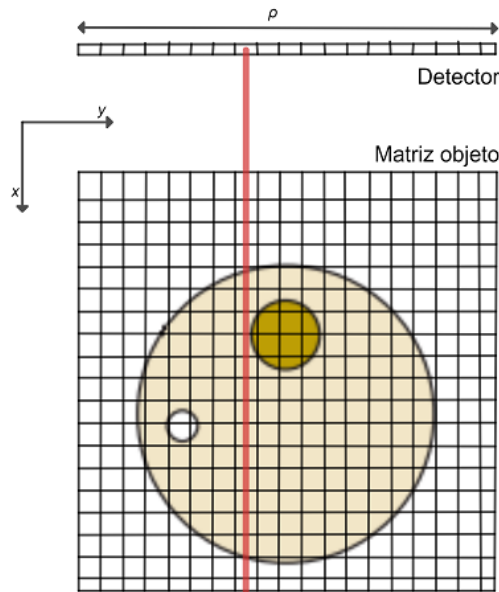
Para se obter as projeções é necessário o uso da Equação 3.5. Essa expressão requer a variação da reta  $L$ , que, por se tratar de uma matriz retangular com elementos igualmente espaçados, tem o mesmo valor numérico dos elementos de distância do detector  $\Delta\rho$ . No *phantom* digital pode-se definir o tamanho do detector ( $\rho$ ) para ser conveniente. Neste caso, é adotado o detector com mesma dimensão da matriz quadrada que forma o *phantom digital*, neste caso 128. Assim pode-se implementar as dimensões do detector como o vetor que varia de -64 até 64, com 128 unidades. Com o  $\rho$ , pode-se adquirir o valor de  $\Delta\rho$  com uma simples subtração entre os elementos subsequentes de  $\rho$ . A implementação desse processo pode ser vista a seguir, em que `rho` e `d_rho`, são  $\rho$  e  $\Delta\rho$ , respectivamente:

```

1  rho = np.linspace(-objeto.shape[0]/2, objeto.shape[0]/2, objeto.shape[0])
2  d_rho = np.diff(rho)

```

A Equação 3.5 requer que sejam somados os elementos ao longo de uma reta  $L$  perpendicular a superfície do detector. Suponha que o detector esteja alinhado acima da matriz quadrada, como na Figura 4.2. A reta perpendicular a superfície do detector, é a mesma reta vertical obtida ao se fixar o valor de  $y$  e variar  $x$  na matriz. Sendo assim, pode-se obter as projeções ( $\rho$ ) simplesmente somando ao longo de  $y$  para cada ângulo, rotacionando a matriz e repedindo até que os 180° sejam varridos.

**Figura 4.2:** Esquema da aquisição de projeções a partir de matrizes.

Fonte: Figura do autor.

Na implementação, `g` é a matriz que contém todas as projeções com diferentes ângulos, ou seja, o sinograma. A função `np.sum` é responsável por somar os valores de intensidade da matriz ao longo do eixo `y`, garantindo que sejam respeitados a soma em `L`, como requer a expressão do sinograma. Para que esse processo seja realizado com todos os 180 ângulos e nas duas matrizes, é utilizada novamente a estrutura de repetição `while`. Ao fim desse processo, a implementação do código que obtém o sinograma `g` é apresentado a seguir:

```

      Projeção e sinograma
1  g = np.zeros( (objeto.shape[0], len(angulo), objeto.shape[2]) )
2
3  j = 0
4  while (j<objeto.shape[2]):
5      i = 0
6      while (i<len(angulo)):
7          g[:, i, j] = np.sum(objeto_rot[:, :, i, j], axis=0)*d_rho[0]
8          i = i + 1
9      j = j + 1

```

#### 4.2.4 Retroprojeção

No estudo da reconstrução analítica, é interessante observar a formação dos artefatos que permeiam a técnica. O de maior importância, o artefato estrela, pode ser visto a partir de uma retroprojeção. Observando a Equação 3.8, a implementação da retroprojeção e a obtenção de

$f(x, y)$  é adquirida mediante o valor da projeção  $g(x, y)$ , que na sua formação continha o ponto  $(x, y)$ . Para realizar os cálculos da obtenção da retroprojeção, as operações numéricas dos parâmetros  $\rho(x, y)$  e  $\theta$ , os quais são relacionados a função discreta  $g(x, y)$ , podem resultar em uma pequena variação desses parâmetros, resultando em valores que não são exatamente os valores numéricos ligados a função discreta, mas sim valores próximos. Portanto, é necessária uma técnica para se obter valores fora dos parâmetros discretos preestabelecidos. A interpolação é uma técnica que utiliza dados conhecidos para estimar valores em pontos desconhecidos. Neste caso a função `RectBivariateSpline` realiza interpolações de funções bidimensionais em matrizes quadradas. Portanto, a função interpoladora pode ser aplicada ao  $g(\rho(x, y), \theta)$  para corrigir o problema da função discreta em parâmetros não definidos.

A seguir, com base na Equação 3.8, são somados os valores de  $g(\rho(x, y), \theta)$  para todos os valores de ângulo  $\theta$ . Por fim, é multiplicado o resultado anterior pela variação angular  $\Delta\theta$ . Assim, é obtido o valor da retroprojeção em um único ponto  $(x, y)$ . Esse processo é realizado em todos os pontos da matriz para reconstruir o objeto original.

Antes de prosseguir com a implementação da retroprojeção é necessários compreender mais alguns parâmetros que permitem a reconstrução. A função `np.meshgrid` cria uma grade retangular a partir de dois vetores. Ao ser aplicado em `rho`, os valores de `X` e `Y` assumem a forma de duas matrizes quadradas com dimensões iguais ao tamanho de `rho`, entretanto `X` é preenchida com os valores do vetor `rho` ao longo de suas linhas e `Y` é preenchido ao longo de colunas. Esse par `X` e `Y` ao serem combinados permitem a localização dos elementos de uma matriz a partir de seus índices `X` e `Y`. Portanto, caso se queira associar um elemento de matriz a uma coordenada espacial, é possível com essas duas matrizes. Por fim, outro termo importante para prosseguir é o `d_angulo`, o qual é a variação angular usada na expressão da retroprojeção (BP) e retroprojeção filtrada (FBP). A implementação é apresentada a seguir:

```

_____ Parâmetros necessários II _____
1 X, Y = np.meshgrid(rho,rho)
2 d_angulo = np.diff(angulo)[0]
```

Na implementação se optou em utilizar funções próprias, caracterizadas por `def`. Essas funções são blocos de instruções que retornam a tarefa específica. Neste caso, todo o cálculo da retroprojeção (BP) está na função `def func_BP`, que necessita de três parâmetros `(x, y, i)`, sendo eles respectivamente, a posição espacial em  $x, y$  e a fatia (matriz de Shepp-Logan ou a matriz pontual). Na função, a `interpolacao_matricial_BP` é responsável pela interpolação do sinograma `g`, o qual é então multiplicado pela variação angular `d_angulo` a fim de ser obtido a retroprojeção em um único ponto  $(x, y)$ . A função `np.vectorize` realiza um papel similar à estrutura de repetição `while`, realizando a repetição dos parâmetros da função para todos os pontos  $(x, y)$  e para todas as fatias. O resultado da implementação a seguir é a retroprojeção `BP`, equivalente à Equação 3.8 aplicada a matriz:

```

                                Retroprojeção (BP)
1  def func_BP(x,y,i):
2      interpolacao_matricial_BP =RectBivariateSpline(rho, angulo, g[:, :,i])
3      f_theta_k = interpolacao_matricial_BP(
4          x*np.cos(angulo) + y*np.sin(angulo), angulo, grid=False)
5      f = sum(f_theta_k)*d_angulo
6      return f
7
8  BP = np.zeros((objeto.shape))
9
10 i = 0
11 while (i < g.shape[2]):
12     BP[:, :,i] = np.vectorize(func_BP)(X,Y,i)
13     i = i + 1

```

#### 4.2.5 Retroprojeção filtrada

A retroprojeção filtrada, conforme a Equação 3.26, pode ser dividida em quatro partes: a mudança do sinograma ( $g(\rho, \theta)$ ) do domínio espacial para o domínio da frequência ( $G(\omega, \theta)$ ), a filtragem das baixas frequências do sinograma no domínio da frequência com o uso do filtro rampa ( $|\omega|$ ), o retorno do sinograma filtrado para o domínio espacial e por fim a retroprojeção do sinograma filtrado.

Inicia-se esse processo implementando a mudança de domínio do sinograma **g** obtido anteriormente. A função usada nessa mudança é a `fft`, responsável por realizar o cálculo da transformada discreta de Fourier unidimensional do sinograma, resultando em **G**. Novamente é utilizado o `while` como estrutura de repetição para ser realizado essa mudança em todas as projeções e fatias (Shepp-Logan e pontual). A seguir, a implementação da transformada de Fourier do sinograma é apresentada:

```

                                Transformada de Fourier do sinograma
1  G = np.zeros((g.shape), dtype = 'complex_')
2
3  i = 0
4  while (i < G.shape[2]):
5      G[:, :,i] = fft(g[:, :,i], axis = 0)
6      i = i + 1

```

O próximo passo é a filtragem do sinograma **G** no domínio da frequência com o uso do filtro rampa. A implementação do filtro é obtida a partir da função `np.fft.fftfreq`, que retorna um vetor que contém os compartimentos de frequência em ciclos por unidade do espaçamento.

O vetor `omega`, criado dessa operação, tem as mesmas dimensões do sinograma `G`, sendo formado por alguns dos valores de frequências  $\omega$ , que a transformada de Fourier pode assumir. O vetor obtido, para ser identificado como filtro rampa, precisa ter ser valor absoluto obtido. Isso é realizado com o uso da função `np.abs`, e os valores são guardados no vetor `filtro`. Em seguida, para corrigir o ruído estático, o filtro rampa é multiplicado pelo filtro passa-baixa, para formar o filtro Hamming. A frequência de corte  $\omega_c$  foi adotada como sendo a frequência máxima de  $\omega$ , caracterizando uma melhor resolução [34]. Por fim, a filtragem do sinograma pelo filtro Hamming ocorre com a multiplicação linha a linha dos elementos do sinograma pelo filtro, com a matriz `integrando` guardando os resultados. A função `while` garante que sejam realizados em todas as fatias. A seguir, a implementação da filtragem do sinograma no domínio da frequência é apresentada:

```

_____ Filtragem do sinograma _____
1  omega = np.fft.fftfreq(G.shape[0], d=np.diff(rho)[0])
2  filtro = np.abs(omega)
3  filtro = filtro*(0.54 + 0.46*np.cos((np.pi*omega)/(1*np.max(omega))))
4
5  integrando = np.zeros((G.shape), dtype = 'complex_')
6  i = 0
7  while (i<integrando.shape[2]):
8      integrando[:, :, i] = (G[:, :, i].T * filtro).T
9      i = i + 1

```

Após o sinograma ter seus componentes de baixa frequência filtrados, e parte dos componentes de alta frequência, é necessário retornar o sinograma para o domínio do espaço. A implementação desse processo ocorre por meio da função `ifft`, que realiza o cálculo da transformada inversa discreta de Fourier unidimensional do sinograma filtrado. Os valores obtidos dessa operação são guardados na matriz `g_G`, com a estrutura de repetição `while` repetindo para todos os sinogramas (Shepp-Logan e matriz pontual). A seguir, a implementação da transformada inversa de Fourier do sinograma filtrado é apresentada:

```

_____ Transformada inversa de Fourier do sinograma _____
1  g_G = np.zeros((g.shape))
2  i = 0
3  while (i<g_G.shape[2]):
4      g_G[:, :, i] = np.real(ifft(integrando[:, :, i], axis=0))
5      i = i + 1

```

O passo final da retroprojeção filtrada é a realização da retroprojeção, entretanto o argumento da função deixa de ser o sinograma simples e passa a ser o sinograma filtrado. Em Python, a implementação desse processo é idêntica à retroprojeção anteriormente discutida.

É criada uma função `func_FBP` que aceita três parâmetros, `(x,y,i)`, sendo eles as posições espaciais e a fatia trabalhada. Na função, é realizado a interpolação do sinograma filtrado com o uso da função `RectBivariateSpline`. Isso é necessário já que existe a correlação entre valores discretos  $\rho$  e  $\theta$  que resultam em `g_G`, entretanto numericamente a expressão `x*np.cos(angulo) + y*np.sin(angulo)` da retroprojeção pode resultar em um valor diferente, mas próximo, dos valores correlacionados à `g_G`. A interpolação então utiliza de dados conhecidos para estimar valores em pontos desconhecidos, como requerido pela Equação 3.26. Os valores interpolados requeridos são multiplicados pela variação angular `d_angulo` e a esse processo é repetido com todas as projeções `g_G` de uma fatia. A função `func_FBP` retorna o valor da retroprojeção filtrada em um único ponto `(x,y)` e então esse processo é repetido para todos os pares de `(x,y)` com o uso da função `np.vectorize`. O resultado dessas operações é a retroprojeção filtrada de cada fatia armazenada no conjunto de matrizes `FBP`, como apresentado a seguir:

```

1 def func_FBP(x,y,i):
2     interpolacao_matricial_FBP = RectBivariateSpline(rho,
3                                                       angulo, g_G[:, :, i])
4     f_theta_k = interpolacao_matricial_FBP(
5         x*np.cos(angulo) + y*np.sin(angulo) , angulo , grid=False )
6     f = sum(f_theta_k)*d_angulo
7     return f
8
9 FBP = np.zeros((objeto.shape))
10
11 i = 0
12 while(i < g_G.shape[2]):
13     FBP[:, :, i] = np.vectorize(func_FBP)(X,Y,i)
14     i = i + 1

```

Por fim, vale observar que ao fim dos cálculos realizado, o valor numérico da matriz da retroprojeção filtrada podem ser negativos. Isso é uma quantidade matemática que não faz sentido físico, já que a FBP reconstrói a densidade de fármaco, a qual é uma grandeza numericamente maior ou igual a zero. Por isso, apesar de serem valores negativos bem próximos de zero, é realizado na matriz `FBP` a substituição de todos os valores negativos por zero. Portanto, o intervalo da matriz `FBP` se torna igual ao intervalo da matriz `objeto` que originou a reconstrução, ou seja, maior ou igual a zero. A implementação dessa propriedade física pode ser vista a seguir, com o argumento `FBP < 0` selecionando na matriz `FBP` apenas os elementos dela que sejam menores que zero, e a igualdade `=` tornando esses elementos zero:

```

1 FBP[FBP < 0] = 0

```

## 4.2.6 RMSE

A implementação do algoritmo de RMSE é calculada pela diferença entre a matriz reconstruída `FBP` e a matriz original `objeto`, como pôde ser visto na Equação 3.27. O valor é armazenado na matriz `difference_FBP` e então tem seus valores elevados ao quadrado. Em seguida é tirado a média desses valores e a raiz quadrada do resultado. Por fim, o valor final `RMSE` é multiplicado por 100 para a dispersão estar em porcentagem. A implementação é apresentada abaixo:

```

1 difference_FBP = FBP - objeto
2 RMSE = np.sqrt( np.mean( difference_FBP**2 ) ) * 100

```

## 4.3 Retroprojeção Filtrada em *phantom* de Jaszczak

### 4.3.1 DICOM

Neste estudo, os dados acerca da SPECT do *phantom* de Jaszczak, foram obtidos do equipamento Philips Healthcare BrightView situado no Hospital das Clínicas da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, na data de 05/04/2013. Essas imagens foram obtidas usando dois *gantry*, que rotacionaram no total 360° e adquiriram 128 projeções igualmente espaçadas nesse intervalo. As informações das projeções foram armazenadas em volumes matriciais em formato DICOM.

A Comunicação de Imagens Digitais em Medicina (DICOM, do inglês *Digital Imaging and Communications in Medicine*) é um conjunto de normas desenvolvido para padronizar o formato eletrônico utilizado no armazenamento e na comunicação de imagens médicas. Equipamentos que realizam imagens médicas, como o SPECT, geralmente armazenam seus dados no formato DICOM. Como ilustrado na Figura 4.3, ao examinar os arquivos DICOM, é possível encontrar diversas informações, incluindo: local, modo e data de aquisição, além de detalhes sobre o paciente e os dados relacionados às projeções adquiridas pelo equipamento.

As projeções obtidas do *phantom* de Jaszczak estavam em dois arquivos DICOM: um denominado `Fotopico` e o outro `Espalhamento`. Como explicado na seção 3.8, essa divisão é realizada para corrigir o problema de fótons espalhados, com o arquivo `Fotopico` representando as projeções na janela de fotopico e o arquivo `Espalhamento` correspondendo às projeções na janela de espalhamento. Neste trabalho, a reconstrução utilizando a FBP foi realizada com fatores de correção de 0,2; 0,5; e 1,0. Esses fatores permitem ponderar a subtração das projeções na janela de fotopico com as da janela de espalhamento. Observou-se que, visualmente, o fator que resultou na reconstrução mais detalhada da imagem foi o de 0,5. Portanto, a reconstrução apresentada neste trabalho utilizou o fator de correção de 0,5.

**Figura 4.3:** Informações presentes no arquivo DICOM fotopico do *phantom* de Jaszczak.

Name	Type	Size	Value
> BodyPartExamined	str	5	BRAIN
> BurnedInAnnotation	str	0	
> Columns	int	1	128
> ContentDate	str	8	20130405
> ContentTime	str	6	190840
> CorrectedImage	multival.MultiValue	4	MultiValue object of pydicom.multival module
> CountRate	valuerep.IS	1	'0'
> CountsAccumulated	valuerep.IS	1	'40834936'
> DetectorInformationSequence	sequence.Sequence	1	Sequence object of pydicom.sequence module
> DetectorVector	list	128	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]
> DeviceSerialNumber	str	7	6000276
> EnergyWindowInformationSequence	sequence.Sequence	1	Sequence object of pydicom.sequence module
> EnergyWindowVector	list	128	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]
> FrameIncrementPointer	multival.MultiValue	4	MultiValue object of pydicom.multival module
> FrameOfReferenceUID	uid.UID	58	UID object of pydicom.uid module
> HighBit	int	1	15
> ImageID	str	10	PROJECTION
> ImageType	multival.MultiValue	4	MultiValue object of pydicom.multival module
> ImagesInAcquisition	valuerep.IS	1	'0'
> InstanceCreationDate	str	8	20130405
> InstanceCreationTime	str	6	193917
> InstanceCreatorUID	uid.UID	30	UID object of pydicom.uid module
> InstanceNumber	valuerep.IS	1	'1'
> InstitutionName	str	17	HC Ribeirao Preto
> LargestImagePixelValue	int	1	83
> LargestPixelValueInSeries	int	1	83
> Manufacturer	str	18	Philips Healthcare
> ManufacturerModelName	str	10	BrightView
> Modality	str	2	NM
> NumberOfDetectors	int	1	1
> NumberOfEnergyWindows	int	1	1
> NumberofFrames	valuerep.IS	1	'128'
> NumberofRotations	int	1	1

Fonte: Captura de tela retirada da interface do software Spyder do autor.

A implementação da reconstrução no *phantom* de Jaszczak ocorre de maneira idêntica à reconstrução do *phantom* de Shepp-Logan descrita anteriormente, com exceção de alguns poucos pontos abordados em seguida. As bibliotecas usada na reconstrução em Python são as mesmas, com exceção da adição da biblioteca `matplotlib.image` para exportar imagens e da remoção da biblioteca `skimage`, já que não há a necessidade de simular o *phantom* como ocorreu anteriormente. As bibliotecas utilizadas podem ser vistas a seguir:

#### Biblioteca

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pydicom as dicom
4 import matplotlib.image
5 from scipy.interpolate import RectBivariateSpline
6 from scipy.fft import fft, ifft

```

### 4.3.2 Projeções em equipamento SPECT

Os arquivos DICOM `Fotopico` e `Espalhamento` podem ser lidos no Python utilizando a função `dicom.dcmread`. Após a leitura, a matriz das projeções contidas no arquivo é extraída com a função `pixel_array`. A função `T` é aplicada às matrizes de forma puramente estética, por realizar a transposição das matrizes, permitindo uma melhor visualização dos dados. A seguir, a implementação da obtenção das projeções a partir do arquivo DICOM é apresentada:

## Extração de projeções

```

1 fotopico_patch = 'Fotopico.dcm'
2 Espalhamento_patch = 'Espalhamento.dcm'
3
4 fotopico = dicom.dcmread(fotopico_patch)
5 espalhamento = dicom.dcmread(Espalhamento_patch)
6
7 pixel_array_fotopico = fotopico.pixel_array.T
8 pixel_array_espalhamento = espalhamento.pixel_array.T

```

O fator de correção é aplicado multiplicando a matriz `espalhamento` pelo fator `f_correcao`. Em seguida, realiza-se a subtração da matriz `fotopico` pela matriz `espalhamento` corrigida. No entanto, essa subtração pode gerar valores negativos na matriz resultante, denominada `objeto`. Como no *phantom* de Shepp-Logan, é importante destacar que esses valores negativos não têm significado físico, uma vez que as quantidades analisadas são contagens de fótons, e não é possível obter uma contagem negativa. Para corrigir essa incongruência, utiliza-se a condição `[objeto<0]`, que identifica todos os elementos negativos na matriz resultante e os substitui por zero. A seguir, a implementação da subtração matricial ponderada pelo fator de correção de 0,5 é apresentada:

## Fator de correção

```

1 f_correcao = 0.5
2
3 objeto = pixel_array_fotopico.astype
4 objeto = pixel_array_fotopico.astype(np.int32)
5         - f_correcao*pixel_array_espalhamento.astype(np.int32)
6 objeto[objeto<0] = 0

```

Antes de prosseguir para obtenção do sinograma é necessário implementar o vetor angular, `angulo`, responsável por armazenar os 128 ângulos de captação ao longo dos 360°. A seguir, a implementação do vetor angular é apresentada:

## Vetor angular

```

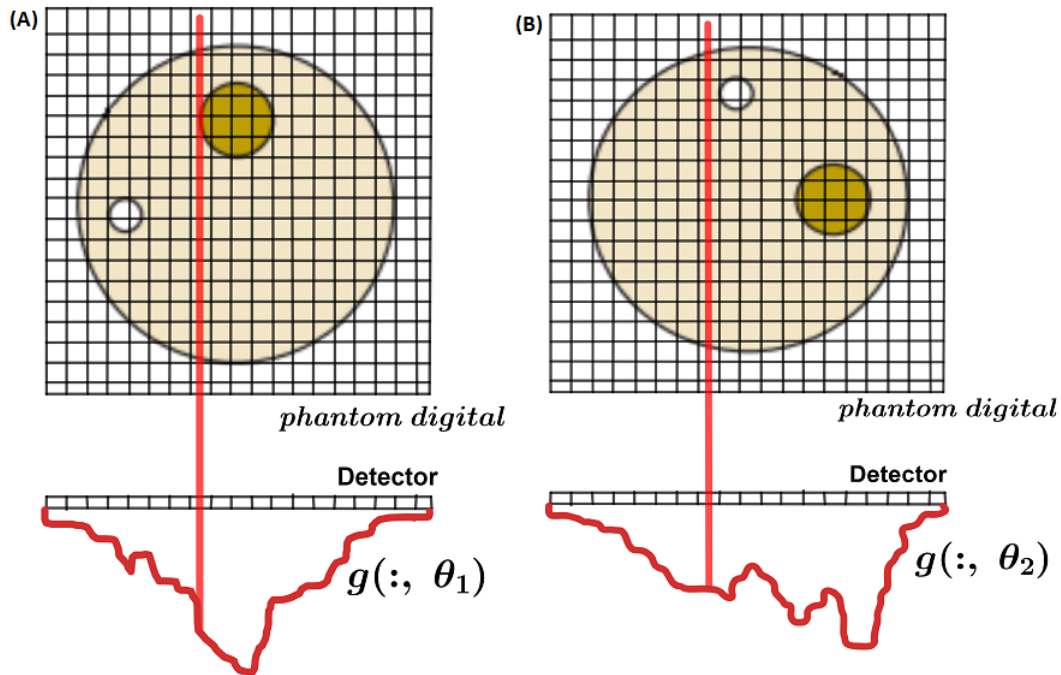
1 angulo = np.linspace(0, 360, objeto.shape[2])
2 angulo = np.radians(angulo)

```

A fim de realizar a retroprojeção e a FBP é necessário obter o sinograma das projeções. Portanto, é importante compreender como as projeções foram adquiridas e como retirar o sinograma a partir delas. Observa-se a Figura 4.4, que representa a aquisição de projeções de um *phantom* digital. A linha em vermelho que percorre o *phantom*, é a linha perpendicular  $L$  a superfície do detector que forma a projeção. Note que, para se obter as diferentes projeções do *phantom*

digital, é alterado o ângulo de aquisição  $\theta$ , como exibido nos itens (A) e (B) da Figura 4.4. De forma que, para se obter o sinograma de várias fatias, primeiro são adquiridas todas as projeções de uma fatia e então a fatia é alterada.

**Figura 4.4:** Esquema do modo de aquisição de projeções de um *phantom* digital.

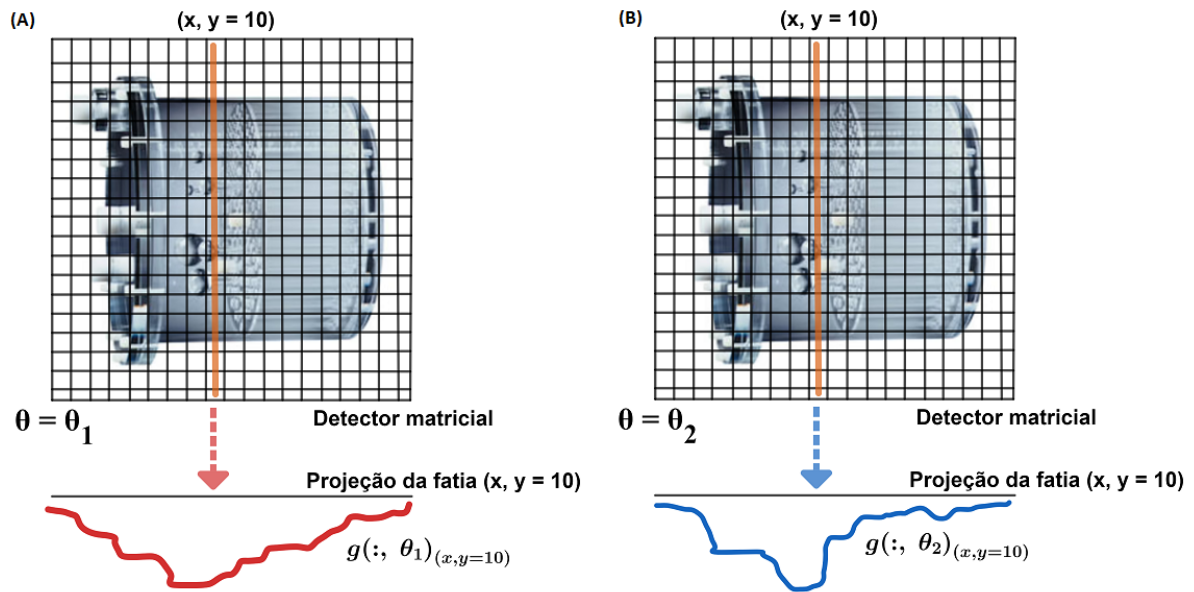


Fonte: Figura do autor.

A aquisição de projeções em um *phantom* físico, como o de Jaszczak, difere significativamente do processo realizado em *phantoms* digitais. Na Figura 4.5, que ilustra a aquisição de projeções em um *phantom* físico, observa-se que o detector matricial capta simultaneamente projeções de várias fatias. No primeiro ângulo,  $\theta_1$ , o detector fornece a primeira projeção de todas as fatias, enquanto no segundo ângulo,  $\theta_2$ , a segunda projeção de todas as fatias é capturada. Esse processo continua até que todas as fatias tenham sido projetadas em todos os ângulos.

Para formar o sinograma de uma única fatia, como a fatia localizada na posição  $[x, y = 10]$  da Figura 4.5, é necessário agrupar todas as projeções correspondentes a essa posição. Em outras palavras, o sinograma da fatia em  $[x, y = 10]$  é formado pela organização sequencial das projeções adquiridas dessa fatia em todos os ângulos. Portanto, a criação do sinograma envolve a ordenação das fatias de acordo com suas respectivas posições de aquisição.

Observa-se que, uma fatia do volume matricial `objeto`, representa a projeção de todas as fatias em um ângulo  $\theta$ . Portanto, para ser possível construir o sinograma de cada fatia é necessário agrupar cada projeção nas suas respectivas posições de aquisição.

**Figura 4.5:** Esquema do modo de aquisição de projeções do *phantom* físico.

Fonte: Figura do autor.

A implementação do processo de organização das projeções é realizada através da matriz  $g$ , que representa o sinograma de todas as fatias. Utilizando uma estrutura de repetição `while`, as fatias do objeto, referenciadas como `objeto[:, j, i]`, são organizadas dentro do sinograma `g[:, i, j]`. Esse procedimento armazena o valor da projeção de uma fatia  $[x, y]$  do *phantom* nas coordenadas correspondentes  $[x, y]$  do sinograma, associando essa projeção ao ângulo  $\theta$  em que a fatia foi adquirida.

Esse processo é repetido para todas as fatias adquiridas em um determinado ângulo  $\theta$ . Após organizar todas as fatias para um ângulo específico, o valor de  $\theta$  é alterado, e o conjunto de fatias é novamente organizado. Ao final desse processo, o sinograma de cada uma das fatias é obtido, representando de forma completa as projeções das fatias em todos os ângulos de aquisição. A seguir, a implementação da organização das fatias no sinograma é apresentada:

```

Sinogramas
1 g = np.zeros(( objeto.shape[0]
2               , len(angulo), objeto.shape[2] ) )
3
4 i = 0
5 while(i<len(angulo)):
6     j = 0
7     while(j<objeto.shape[0]):
8         g[:,i,j] = objeto[:,j,i]
9         j = j + 1
10    i = i + 1

```

### 4.3.3 Retroprojeção e FBP do *phantom* de Jaszczak

A partir do sinograma obtido anteriormente, é possível realizar a retroprojeção e a retroprojeção filtrada. A implementação do código em Python da retroprojeção e da FBP no *phantom* de Jaszczak, a partir da obtenção do sinograma, é idêntica à implementação no *phantom* digital. Portanto, os detalhes da reconstrução estão no apêndice B.1.

A ilustração do *Phantom* de Jaszczak pode ser vista na Figura 4.6. No interior da cavidade do *phantom* de Jaszczak é inserido 20 a 25 mCi de  $^{99m}\text{Tc}$  diluído em água para realização das imagens. Esse *phantom* é dividido em três partes: a parte inferior das varas, do meio das esferas e a parte superior uniforme, cada um verificando a resolução, o contraste e a uniformidade, respectivamente. São seis esferas, com os seguintes raios: 9,5 mm, 12,7 mm, 15,9 mm, 19,1 mm, 25,4 mm, 31,8 mm. O conjunto de varas é dividido nos tamanhos: 4,8 mm, 6,4 mm, 7,9 mm, 9,5 mm, 11,1 mm, 12,7 mm.

**Figura 4.6:** *Phantom* de Jaszczak.



Fonte: Disponível em <https://www.medicaexpo.com/pt/prod/biodex/product-78099-593151.html>. Acesso em: 10 jul. 2024

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 Retroprojeção Filtrada em *phantom* digital de Shepp-Logan

Seção dedicada a apresentar os resultados da reconstrução dos *phantoms* digitais Shepp-Logan e Fonte Pontual. O código em Python para exibição desses resultados pode ser visto a seguir. Nele o objeto que se deseja verificar pode ser visualizado com alterações no título e no argumento da função de exibição da figura. A parte contendo o código `FIGURA` é dedicada a matriz ou função multivariável que se deseja visualizar.

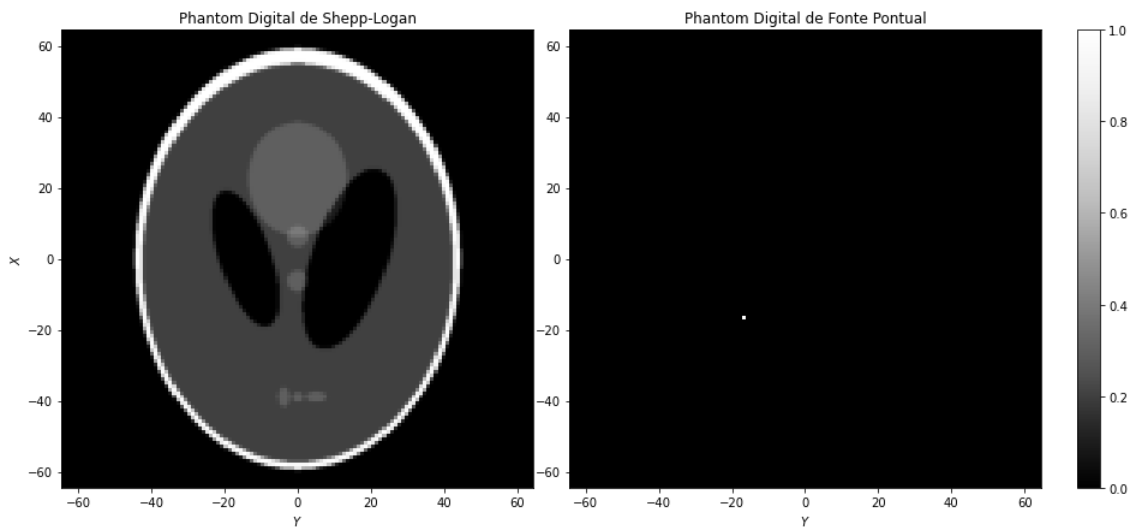
```

1  fig, (ax, ax2, cax) = plt.subplots(ncols=3,figsize=(15,7),
2  gridspec_kw={"width_ratios":[1,1, 0.05]})
3  fig.subplots_adjust(wspace=0.11)
4  im = ax.pcolormesh( [FIGURA 1] , shading='auto', cmap='Greys_r')
5  im2 = ax2.pcolormesh( [FIGURA 2] , shading='auto', cmap='Greys_r')
6  ax.set_title("Phantom Digital de Shepp-Logan")
7  ax2.set_title("Phantom Digital de Fonte Pontual")
8  fig.colorbar(im, cax=cax)
9  plt.show()

```

#### 5.1.1 Simulação do objeto imageado: *phantom* digital

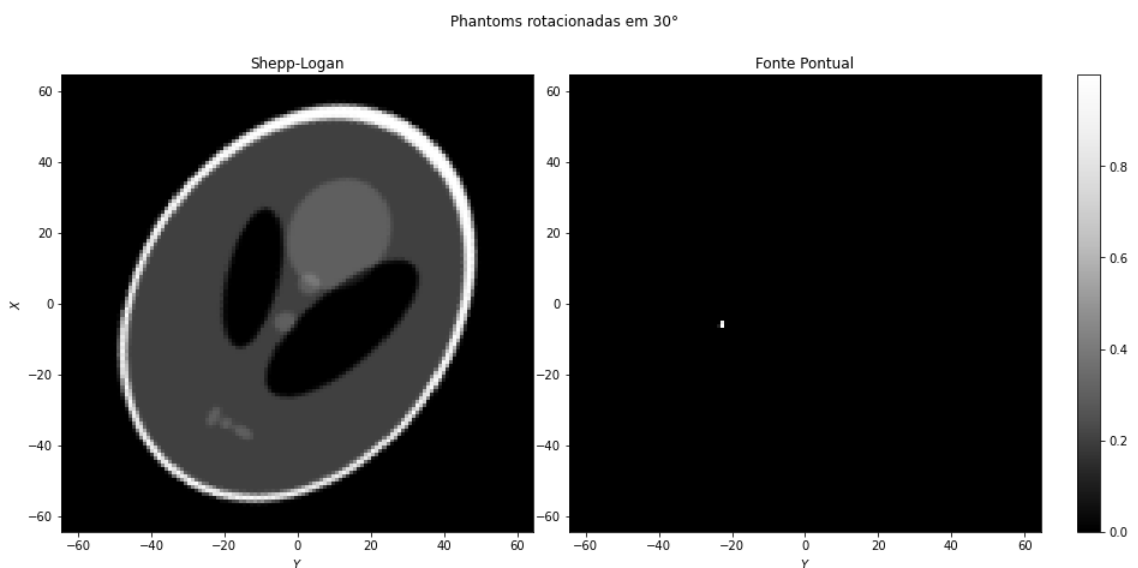
O resultado da execução do código `Phantom Digital`, presente na seção 4.2.1, fornece a Figura 5.1. Há a exibição das duas fatias do *phantom* digital, o *phantom* de Shepp-Logan e a Fonte pontual, representando a matriz `objeto` no código.

**Figura 5.1:** Matrizes do *phantom* digital, Shepp-Logan e Fonte pontual.

Fonte: Figura do autor.

### 5.1.2 Simulação da rotação do objeto

A partir do código `Rotação do objeto`, presente na seção 4.2.2, foi possível realizar a rotação dos *phantoms* digitais de Shepp-Logan e Fonte pontual. A visualização das duas fatias rotacionadas em  $30^\circ$  pode ser vista na Figura 5.2. No algoritmo essas matrizes rotacionadas são representadas por `objeto_rot`.

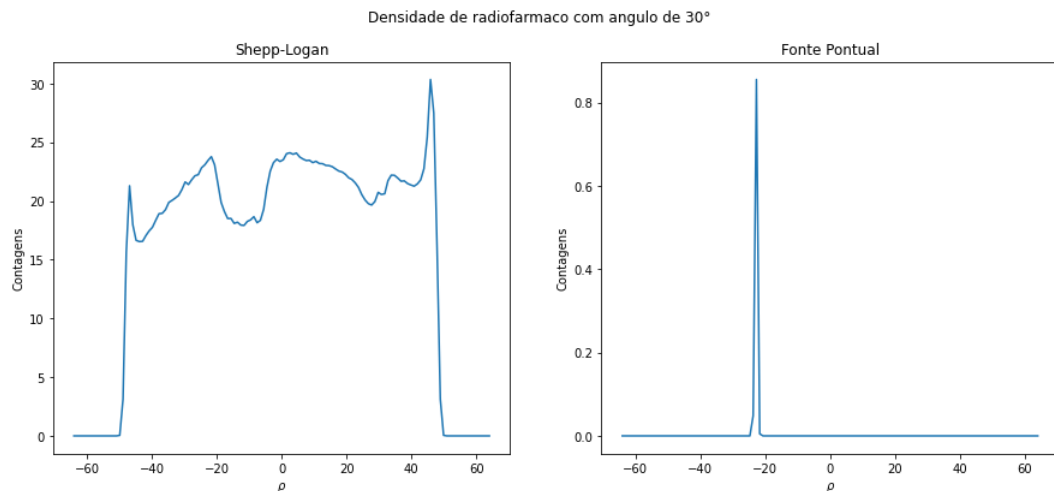
**Figura 5.2:** *Phantoms* digitais rotacionados em  $30^\circ$ .

Fonte: Figura do autor.

### 5.1.3 Projeções e sinograma

A partir dos códigos, `Parâmetros necessários I` e `Projeção e Sinograma`, presentes na seção 4.2.3, é possível obter as projeções rotacionando as matrizes e somando os elementos em uma mesma coluna. Na Figura 5.3, as projeções ilustradas são da rotação de  $30^\circ$  das matrizes Shepp-Logan e Fonte pontual, anteriormente exibidas pela Figura 5.2. Essas projeções são representadas pelo vetor `g[:, 30, 0]` e `g[:, 30, 1]` no código.

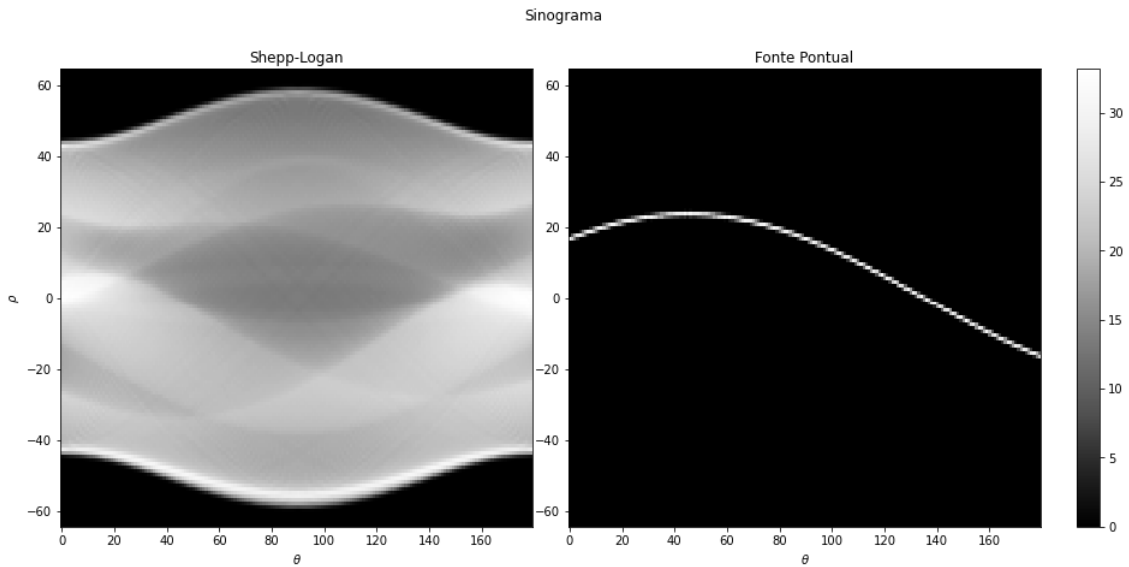
**Figura 5.3:** Projeção dos *phantoms* digitais rotacionados em  $30^\circ$ .



Fonte: Figura do autor.

A partir das projeções em todos os ângulos, é possível formar o sinograma de cada fatia individual. O sinograma é uma função de duas variáveis, portanto é necessário incluir na visualização as outras duas coordenadas  $\rho$  e  $\theta$ . A visualização do sinograma, como ilustrado na Figura 5.4, pode ser feita a partir do código `Exibição de figura` da seção 5.1, substituindo o argumento `Figura` pela linha de código `angulo*180/np.pi, rho, g[:, :, i]`, com `i` assumindo 0 ou 1, dependendo da fatia que se deseja visualizar. É notável que os sinogramas ilustrados pela Figura 5.4 são os mesmos sinogramas do *phantom* de Shepp-Logan e da Fonte Pontual esperados pela literatura, como ilustrou as Figuras 3.4 e 3.5b anteriormente.

**Figura 5.4:** Sinograma de cada *phantom* digital.

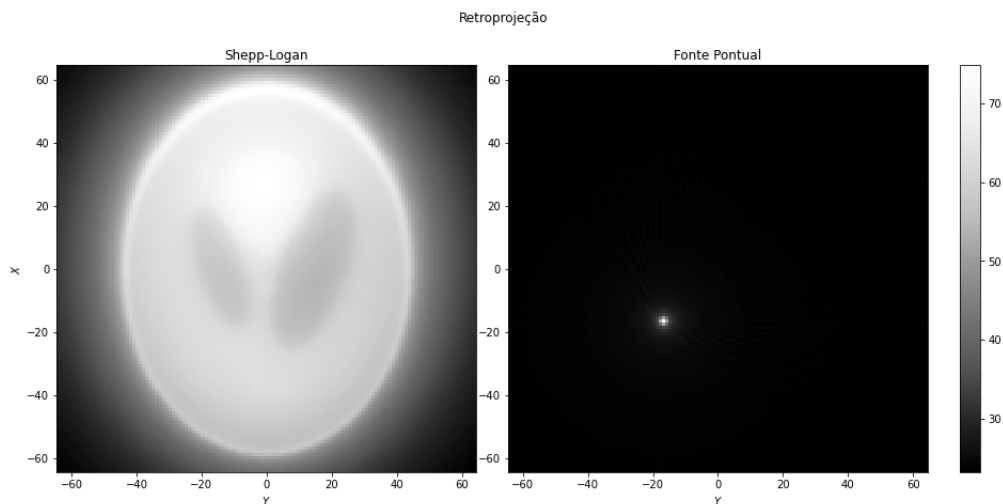


Fonte: Figura do autor.

### 5.1.4 Retroprojeção

A partir dos códigos `Parâmetros necessários II` e `Retroprojeção (BP)`, presentes na seção 4.2.4, foi possível reconstruir os *phantoms* digitais com os sinogramas da Figura 5.4. A visualização da retroprojeção pode ser vista na Figura 5.5. No código, a retroprojeção é representada pela matriz `BP`. Note que o borramento resultante da sobreamostragem na região central, conhecido como artefato estrela, está presente. Além disso, observa-se que o resultado da retroprojeção do *phantom* de Shepp-Logan, obtido pela Figura 5.5, é muito similar ao esperado pela literatura, ilustrado pela Figura 3.8b.

**Figura 5.5:** Retroprojeção (BP) dos dois *phantoms* digitais.

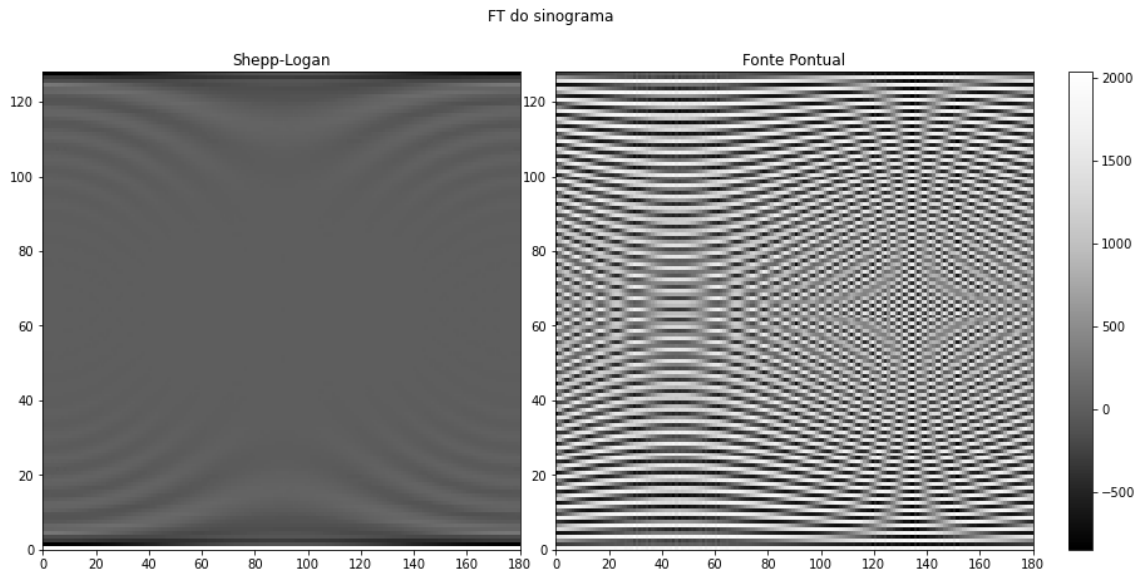


Fonte: Figura do autor.

### 5.1.5 Retroprojeção filtrada

A partir do código `Transformada de Fourier do sinograma`, presente na seção 4.2.5, é feita a transformada de Fourier do sinograma, como ilustrado na Figura 5.6.

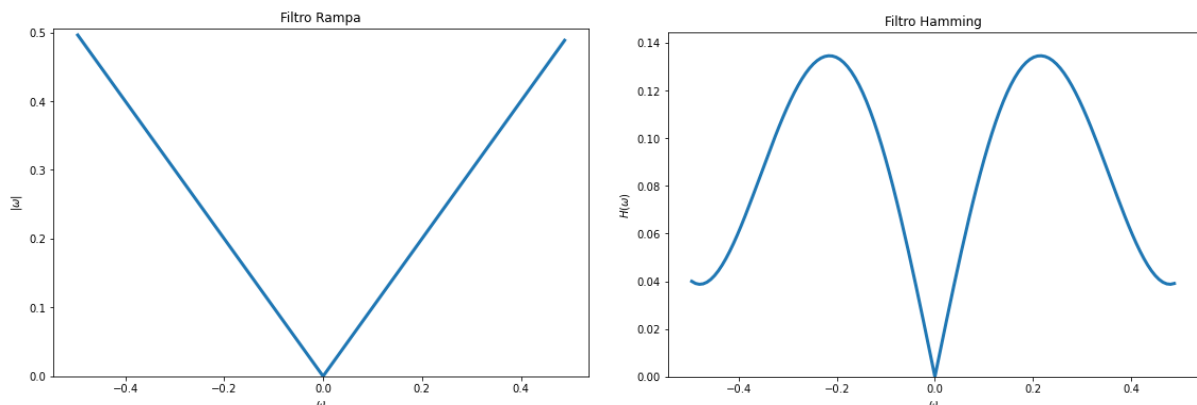
**Figura 5.6:** Transformada de Fourier dos sinogramas.



Fonte: Figura do autor.

Com base no código `Filtragem do sinograma`, presente na seção 4.2.5, é criado o vetor filtro rampa, ilustrado pela Figura 5.7a. Em seguida, é aplicado o fator multiplicativo sobre o filtro rampa, para remover os ruídos de alta frequência. O resultado da operação de multiplicação é o filtro Hamming, ilustrado pela Figura 5.7b. Note que ambos os filtros obtidos, filtro rampa e filtro Hamming, estão conforme o esperado pela literatura, ilustrado pela Figura 3.12.

**Figura 5.7:** (a) Filtro rampa e (b) filtro Hamming.



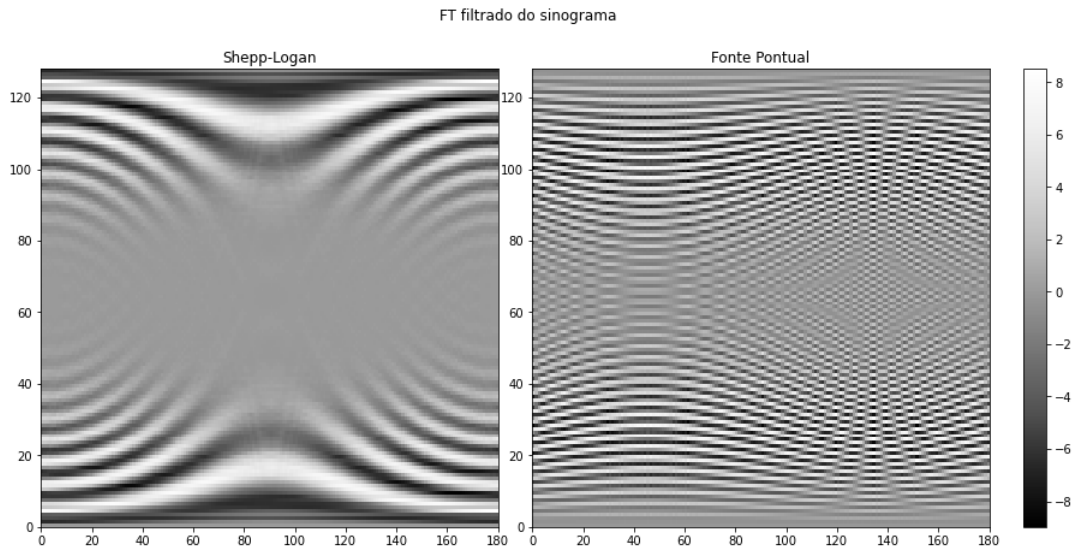
(a) Fonte: Figura do autor.

(b) Fonte: Figura do autor.

A operação do filtro Hamming sobre as transformadas de Fourier do sinograma pode ser

visto na Figura 5.8. Note a mudança dos valores de intensidade de pixel que ocorre após a filtragem.

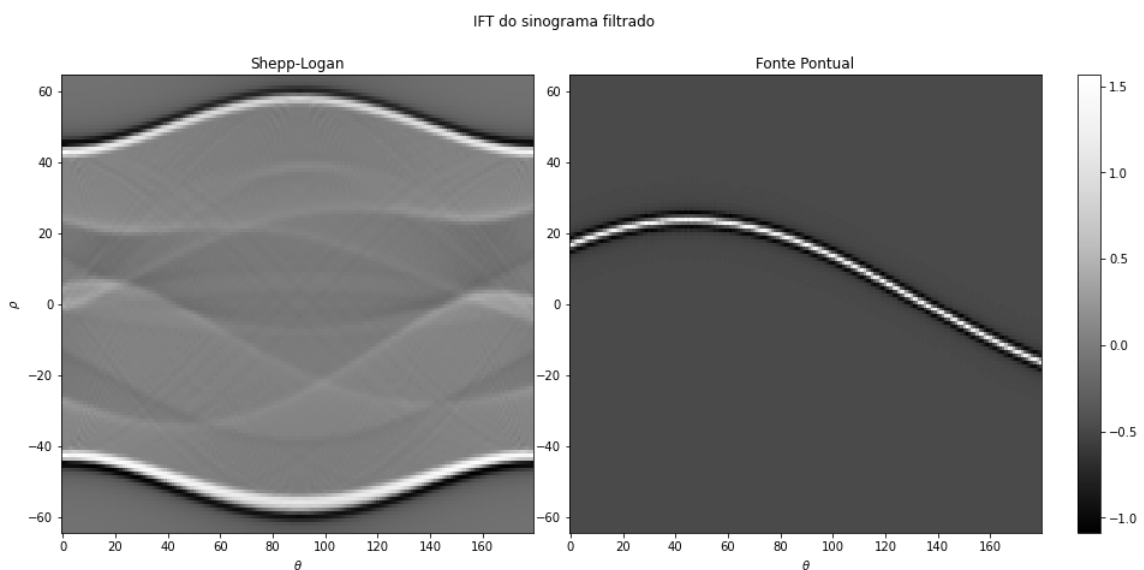
**Figura 5.8:** Transformada de Fourier dos sinogramas filtrado.



Fonte: Figura do autor.

Em seguida, é usado o código `Transformada inversa de Fourier do sinograma`, da seção 4.2.5, para retornar os valores do sinograma filtrado para o domínio do espaço. Como ilustrado na Figura 5.9, é notável a diminuição da intensidade de pixel se comparado com o sinograma não filtrado da Figura 5.4.

**Figura 5.9:** Transformada inversa de Fourier dos sinogramas filtrado.

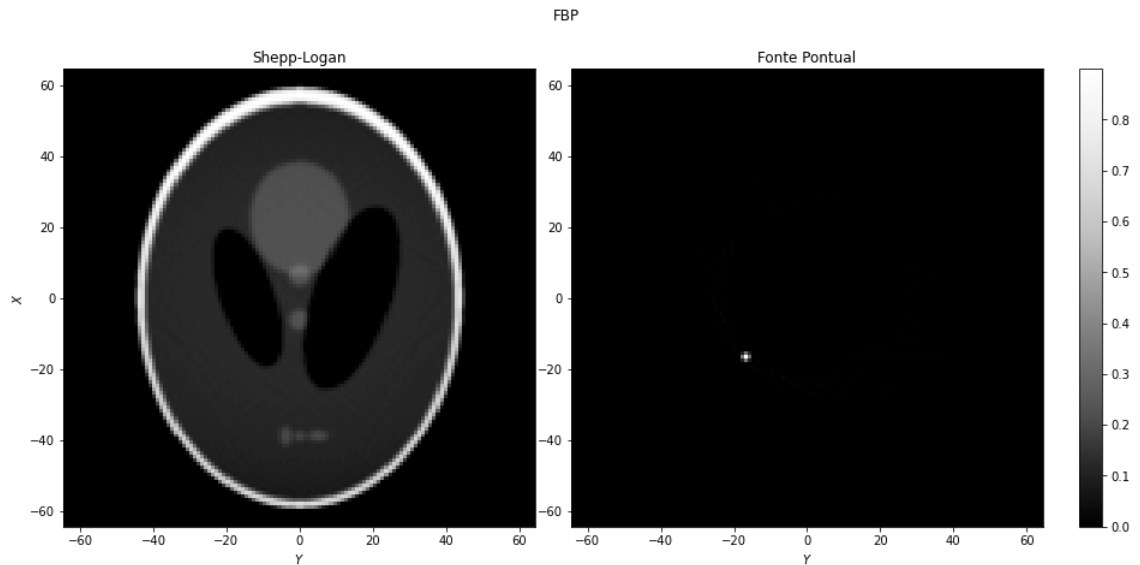


Fonte: Figura do autor.

Por fim, é utilizado o código `Retroprojeção Filtrada (FBP)`, da seção 4.2.5, para re-

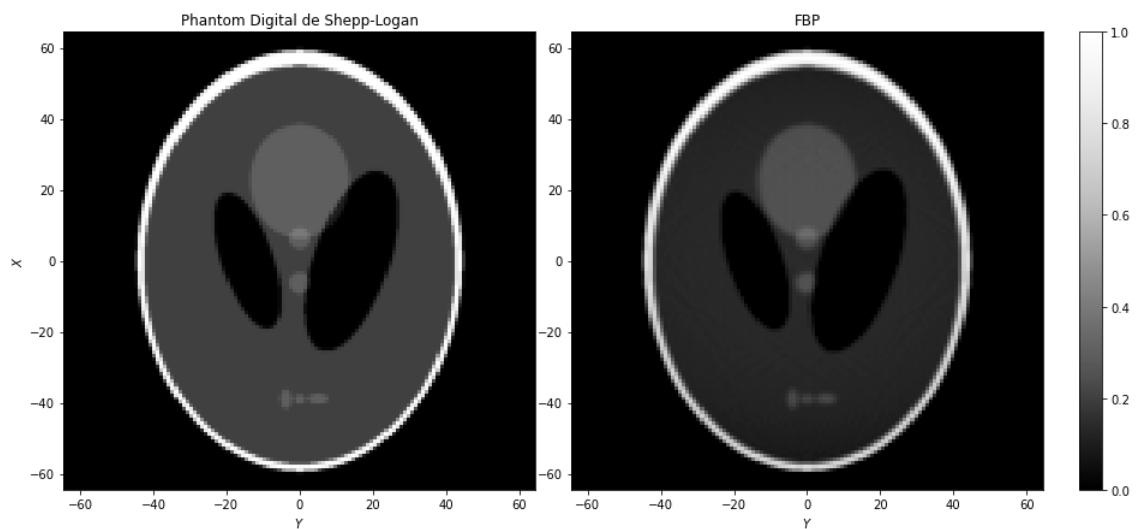
alizer a retroprojeção no sinograma filtrado (Figura 5.9). A imagem resultante é corrigida com o código `Correção de intensidade`, eliminando as intensidades negativas da imagem. O resultado pode ser visto na Figura 5.10. Note que o artefato estrela desapareceu de ambas as fatias e a reconstrução resultante é muito mais fidedigna às matrizes originais, como pode ser visto na Figura 5.11.

**Figura 5.10:** Retroprojeção filtrada dos *phantoms* digitais, Shepp-Logan e Fonte pontual.



Fonte: Figura do autor.

**Figura 5.11:** Comparação entre o *phantom* de Shepp-Logan e a sua FBP.

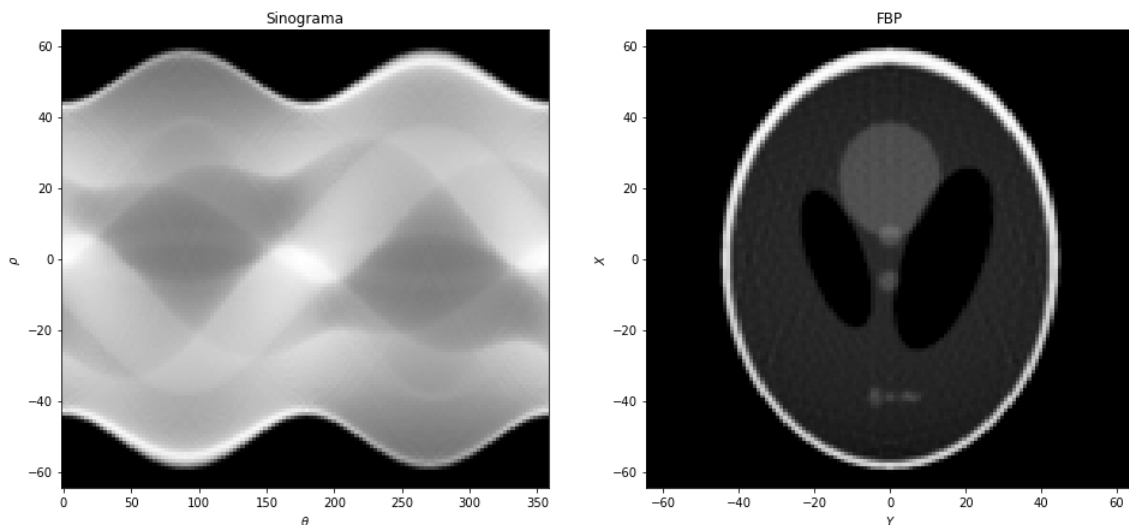


Fonte: Figura do autor.

### 5.1.6 RMSE

A comparação realizada até este momento se concentrou na análise qualitativa das reconstruções, com o confronto visual entre o objeto original e a imagem reconstruída. Entretanto, é necessário buscar modos de comparar quantitativamente a análise da eficiência do método de reconstrução realizado com o código em Python. Com a finalidade de comparar com a literatura, a FBP realizada precisa ser padronizada. Isso é feito alterando alguns parâmetros que foram anteriormente utilizados. O *phantom* digital tem dimensões de  $128 \times 128$ . O ângulo, que anteriormente variava de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  com variações angulares de  $1^\circ$ , agora varia de  $2,8125^\circ$  em um intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Isso porque a literatura requer o uso de 128 projeções, portanto a variação angular é obtida dividindo  $360^\circ$  por 128, resultando em  $2,8125^\circ$ . Por fim, o *phantom* de Shepp-Logan simulado não deve possuir nenhum ruído inserido. A Figura 5.12 ilustra esses parâmetros da comparação. O resultado da RMSE obtido para o *phantom* de Shepp-Logan foi de 10,86%, valor menor, mas próximo, do obtido na literatura em condições semelhantes, de 11,25% [22].

**Figura 5.12:** FBP do *phantom* digital de Shepp-Logan reconstruído com 128 projeções e intervalo angular de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .



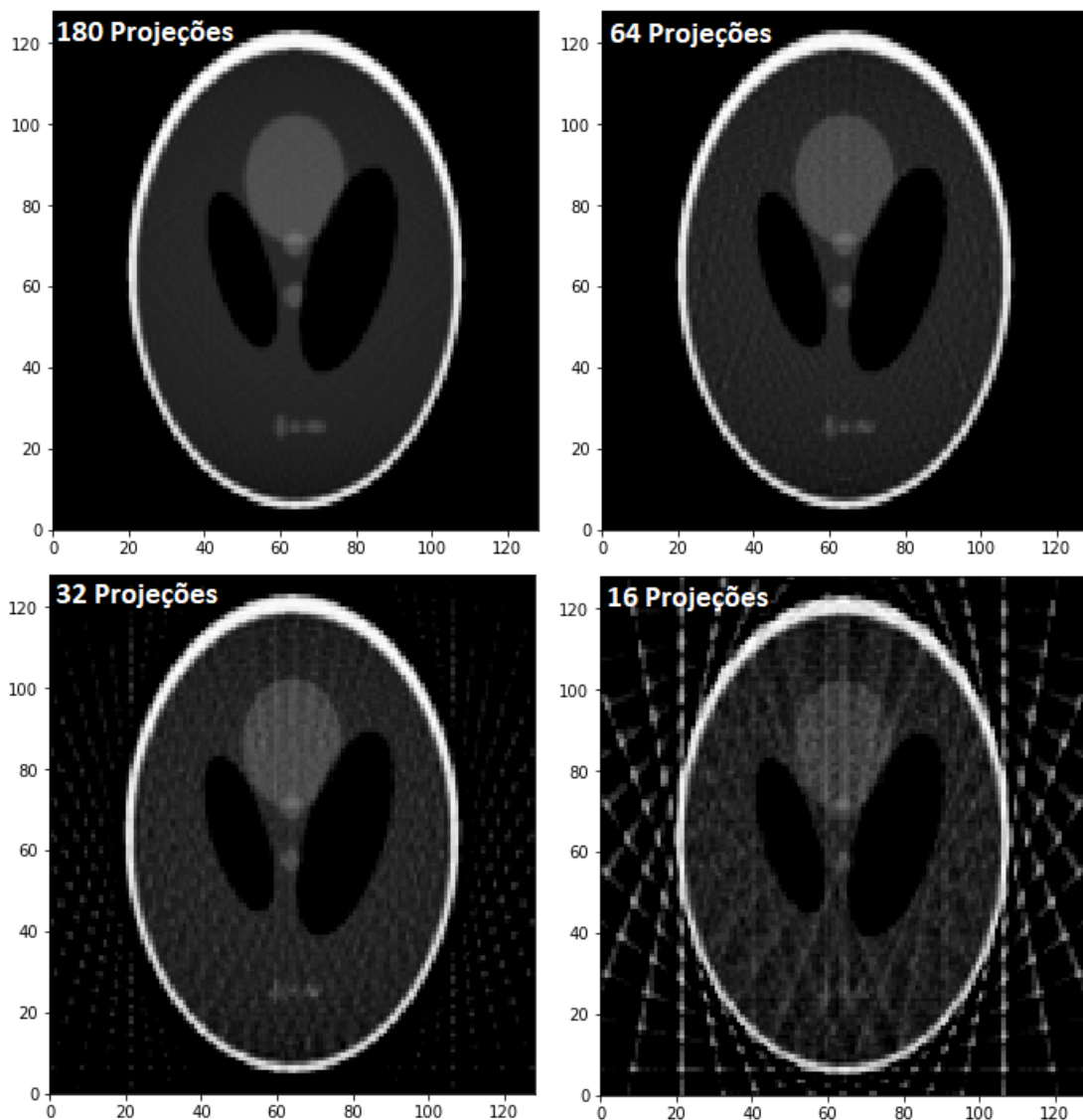
Fonte: Figura do autor.

### 5.1.7 Artefatos de imagem

Nesta seção serão apresentados os resultados de alguns artefatos que permeiam a reconstrução de imagem.

O artefato *Aliasing*, ocorre quando não há amostras angulares suficientes [8]. Como ilustrado na Figura 5.13, que foi adquirida com o intervalo angular de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , a medida que é diminuída a quantidade de amostras angulares, ou seja, projeções, há o surgimento de retas que descaracterizam a reconstrução, como fica evidente pela imagem reconstruída com 16 projeções.

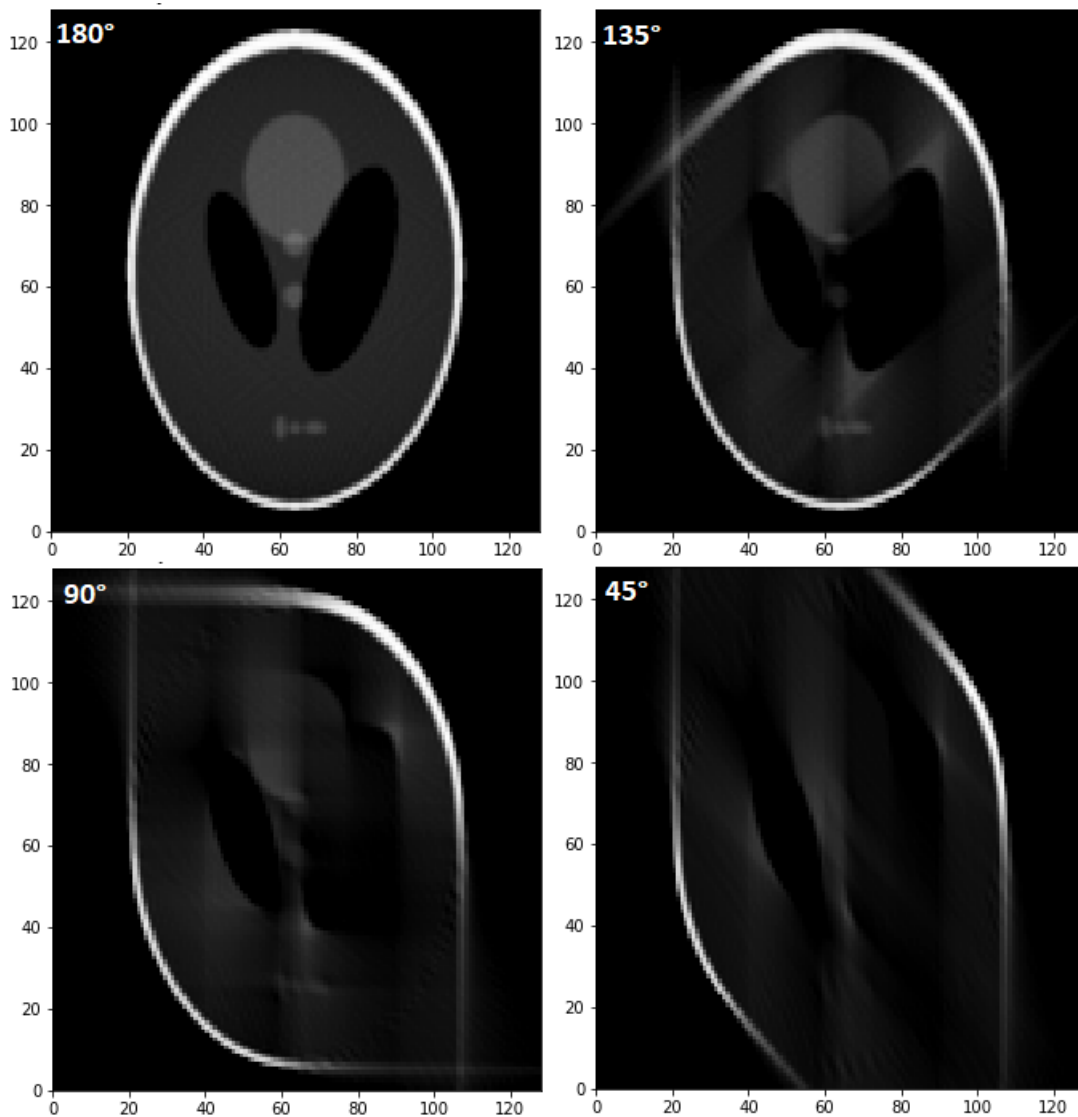
**Figura 5.13:** Demonstração do artefato *Aliasing*. Reconstruções realizadas com 180, 64, 32 e 16 projeções, ao longo do intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .



Fonte: Figura do autor.

O artefato *streak* resultante do intervalo angular limitado é obtido quando quando o intervalo angular das projeções não é suficiente para cobrir no mínimo  $180^\circ$  [12]. Esse artefato distorce a aparência e cria borres no objeto imageado. A Figura 5.14 ilustra o artefato de intervalo angular limitado, demonstrando a degradação da reconstrução a medida que o intervalo angular é reduzido para  $135^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $45^\circ$ . Todas as reconstruções foram adquiridas com variação angular de  $1^\circ$ .

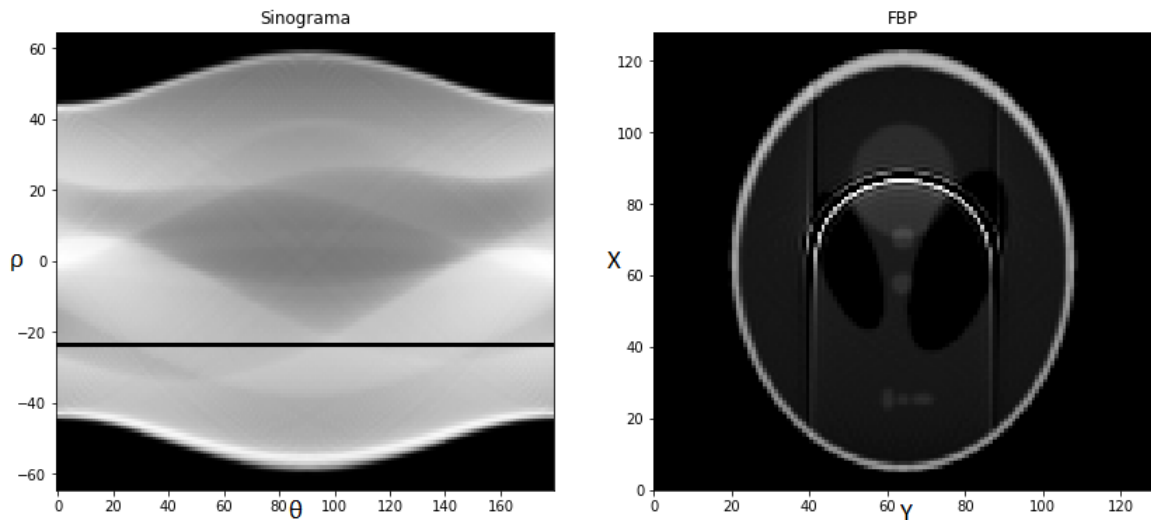
**Figura 5.14:** Artefato de intervalo angular limitado. Reconstruções realizadas com intervalo de  $0^\circ$  à  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  e  $180^\circ$ , com variação angular de  $1^\circ$ .



Fonte: Figura do autor.

Por fim, pode-se demonstrar a formação do artefato *Ring*, que ocorre devido à falha de um ou mais elementos do detector [8]. Como ilustrado na Figura 5.15, quando um elemento detectivo falha em uma posição  $\rho$ , toda informação referente as projeções naquela posição é perdida em todos os ângulos, como exibido no sinograma. Assim, o artefato *ring*, cria uma distorção na imagem reconstruída em forma de círculo.

Figura 5.15: Demonstração do artefato *ring*.



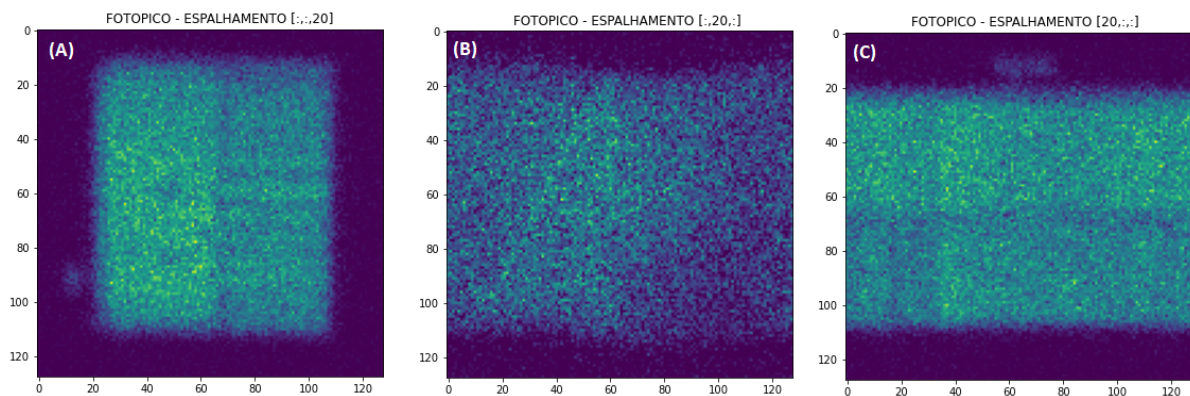
Fonte: Figura do autor.

## 5.2 Retroprojeção Filtrada em *phantom* de Jaszczak

### 5.2.1 DICOM

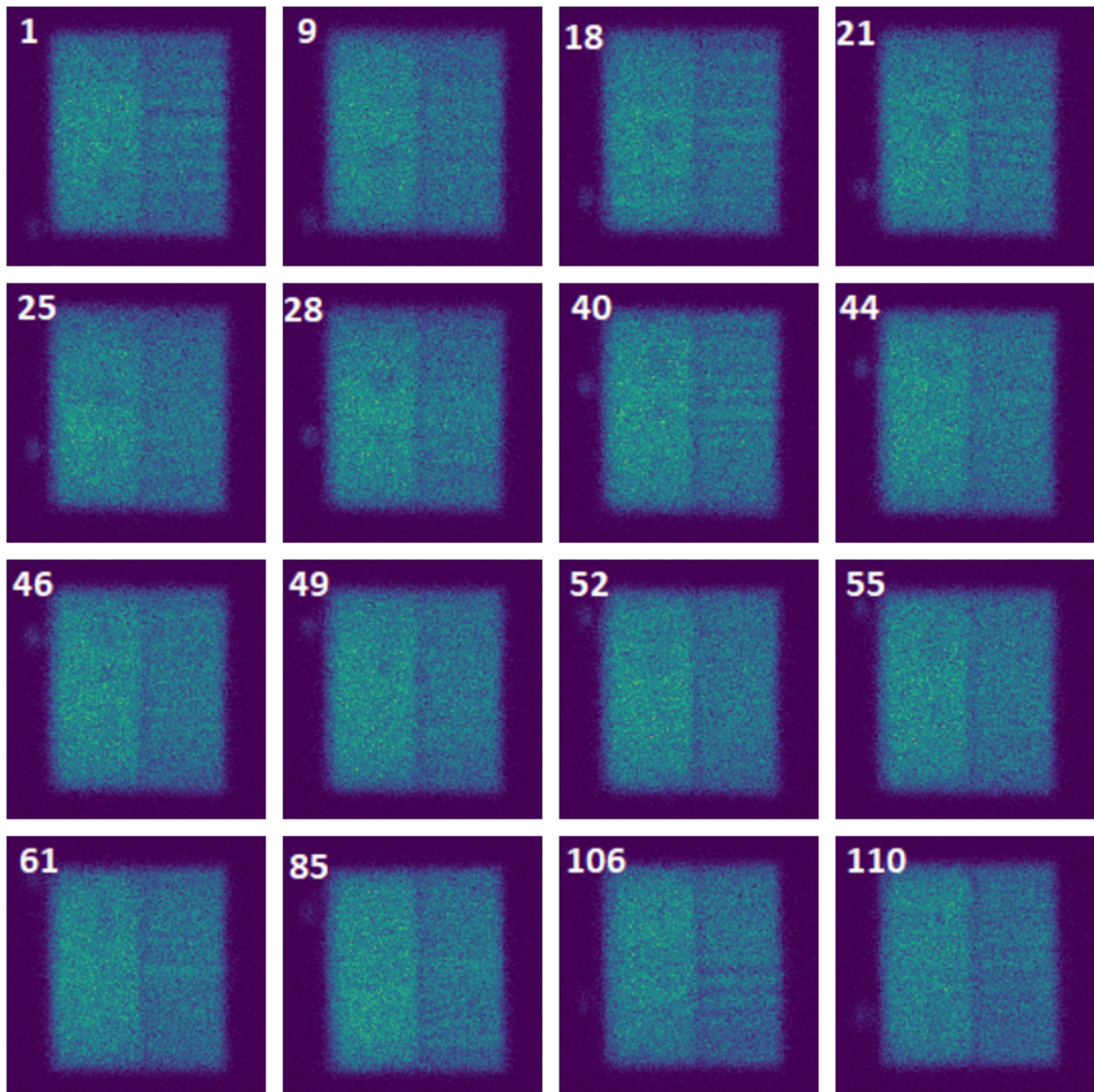
Na seção 4.3.2, o código `Extração de projeções`, obtém os volumes matriciais do arquivo DICOM `Fotopico` e `Espalhamento`. Em seguida, o código `Fator de correção pondera` o volume matricial `Espalhamento` subtraído-o do volume matricial `Fotopico`. Essa subtração gera o volume matricial `objeto` que pode ser visualizado de várias maneiras. Considere o sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  representando o volume matricial. A Figura 5.16 exibe as três diferentes maneiras de visualizar o volume matricial `objeto`: (A) fixando-se  $x$  e variando  $y$  e  $z$ , (B) fixando-se  $y$  e variando  $x$  e  $z$  e (C) fixando-se  $z$  e variando  $x$  e  $y$ .

Figura 5.16: Diferentes visualizações do volume matricial. (a)  $z$  fixo e variando  $x$  e  $y$ . (b)  $y$  fixo e variando  $x$  e  $z$ . (c)  $x$  fixo e variando  $y$  e  $z$ .



Fonte: Figura do autor.

A fatia transversal do *phantom* de Jaszczak, no momento de aquisição, pode ser identificada como a visualização (a) da Figura 5.16. Isso porque o tamanho do *phantom* não é maior que a superfície de detectores, como na visualização (c), ou é curvado ao ser visto lateralmente, como na visualização (b). Portanto, adotou-se as coordenadas  $z$  fixo com variando  $x$  e  $y$ , para obter o sinograma. As diferentes fatias do objeto podem ser vistas na Figura 5.17, com o índice numérico em cada uma delas indicando qual fatia esta sendo visualizada. Note que a medida que as fatias avançam, há uma aparente movimentação das esferas no interior do *phantom*. Esse movimento é na realidade devido à rotação que os detectores fazer ao redor do *phantom* parado no momento de aquisição. Além disso, é possível ver na parte direita de todas as projeções, riscos intervalados, esses riscos são as varas no interior do *phantom* de Jaszczak. Por fim, na parte esquerda das projeções, é possível visualizar uma leve intensidade de pixel que está fora do volume do *phantom* de Jaszczak. Essa esta intensidade fora do volume é a tampa do *phantom*, região na qual é inserida a água e o radionuclídeo.

**Figura 5.17:** Fatias do objeto com  $z$  fixo e  $x$  e  $y$  variando.

Fonte: Figura do autor.

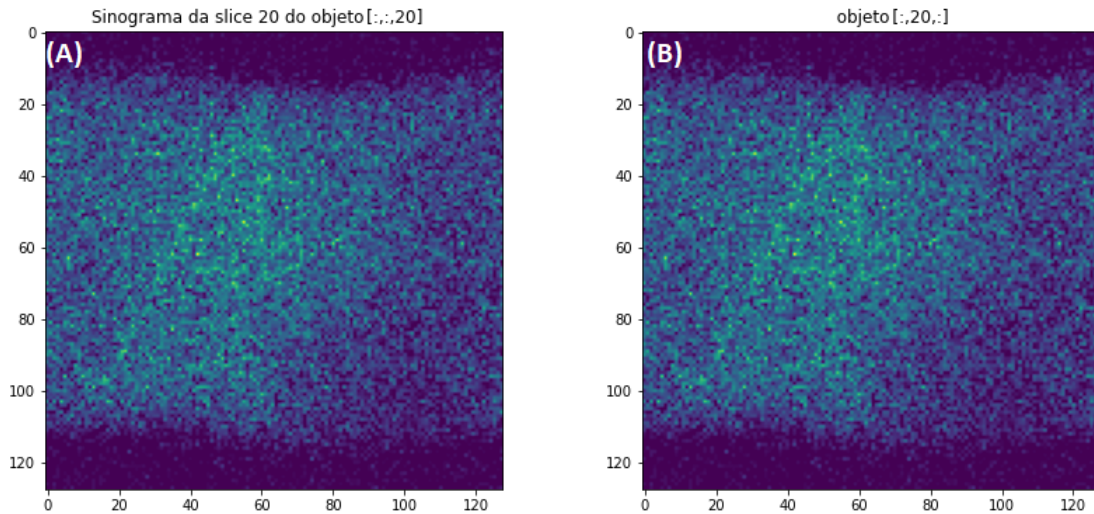
### 5.2.2 Projeções em equipamentos SPECT

Com as fatias separadas, pode-se obter o sinograma individual de cada fatia. Esse processo é iniciado com o código `Vetor angular`, da seção 4.3.2, que define o intervalo angular no qual as projeções foram adquiridas. Em seguida, é utilizado o código `Sinogramas`, da seção 4.3.2, para organizar cada projeção dentro de seus respectivos sinogramas.

Observe a Figura 5.18, nela foi obtido o sinograma da fatia de número 20, representado por (A). Esse sinograma foi colocado lado a lado com visualização “ $y$  fixo e  $x$  e  $z$  variando” do objeto, representado por (B). Note que elas são idênticas, o que nos leva a concluir que o arquivo DICOM já contém os sinogramas prontos, sendo somente questão de identificar qual

coordenada fixar. Isso demonstra que além de tornar o passo anterior de obtenção de sinograma desnecessário, que a própria aquisição com detectores matriciais fornece de maneira direta o sinograma.

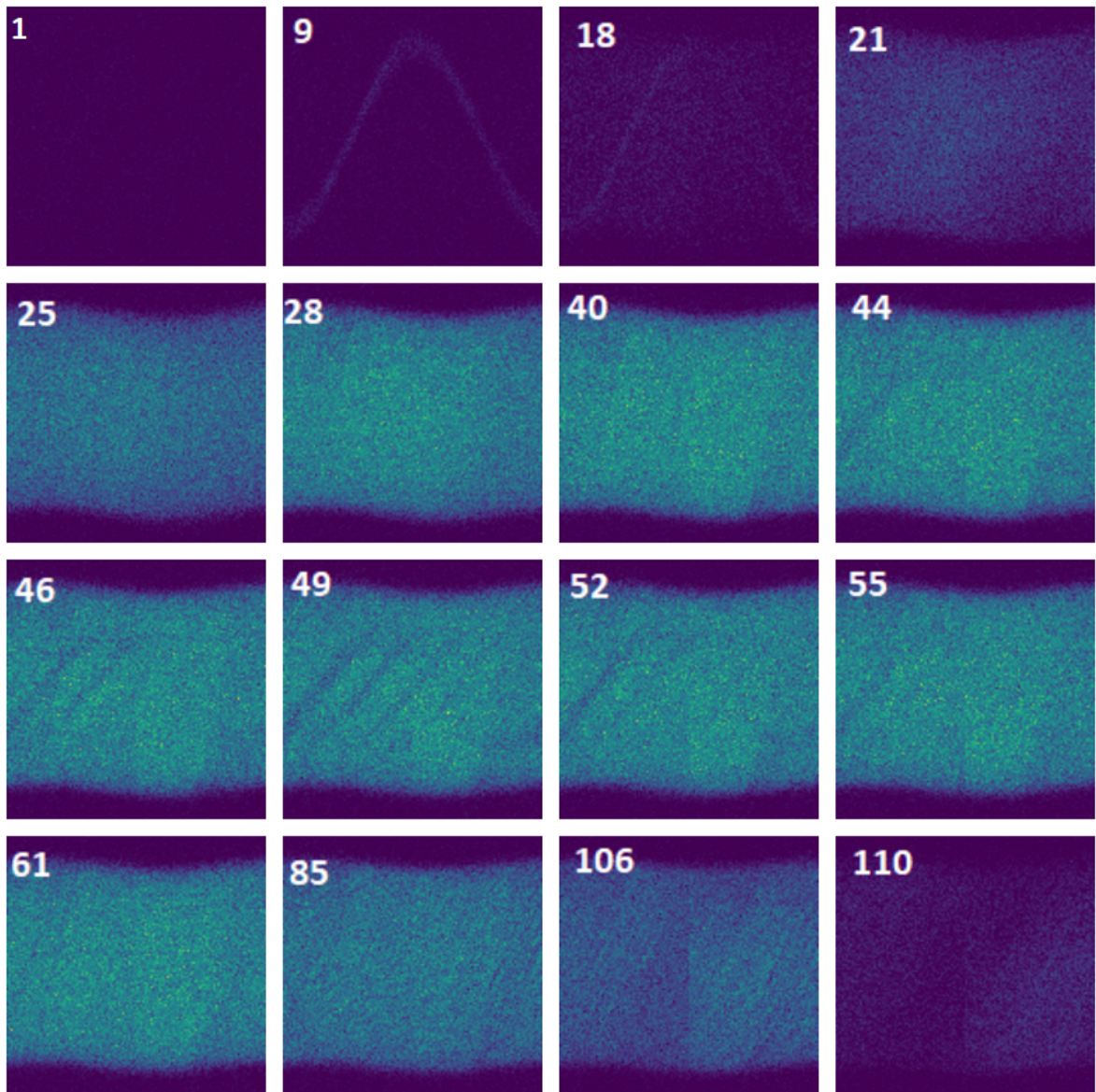
**Figura 5.18:** Comparação entre o sinograma da fatia 20 do objeto, com  $z$  fixo e  $x$  e  $y$  variando, com a visualização da fatia 20 do objeto, com  $y$  fixo e  $x$  e  $z$  variando.



Fonte: Figura do autor.

A visualização das diferentes projeções pode ser visto na Figura 5.19. Os índices numéricos indicam de qual fatia é o sinograma. Note que na fatia 9, é visível uma forma senoidal, indicando que esta parte do detector estaria visualizando um objeto semelhante a uma fonte pontual. No caso, este objeto é a tampa do *phantom* de Jaszczak. Em seguida, das fatias 21 até 40, vemos o sinograma com pouca variação, caracterizando a parte uniforme do *phantom* de Jaszczak. Das fatias 44 até 55, são vistos rastros no sinograma, indicando a presença das esferas do *phantom*. Por fim, é notável que as fatias da 61 até a 106, são uniformes com pequenos rastros, pouco visíveis. Essa região é a parte das varas do *phantom* de Jaszczak.

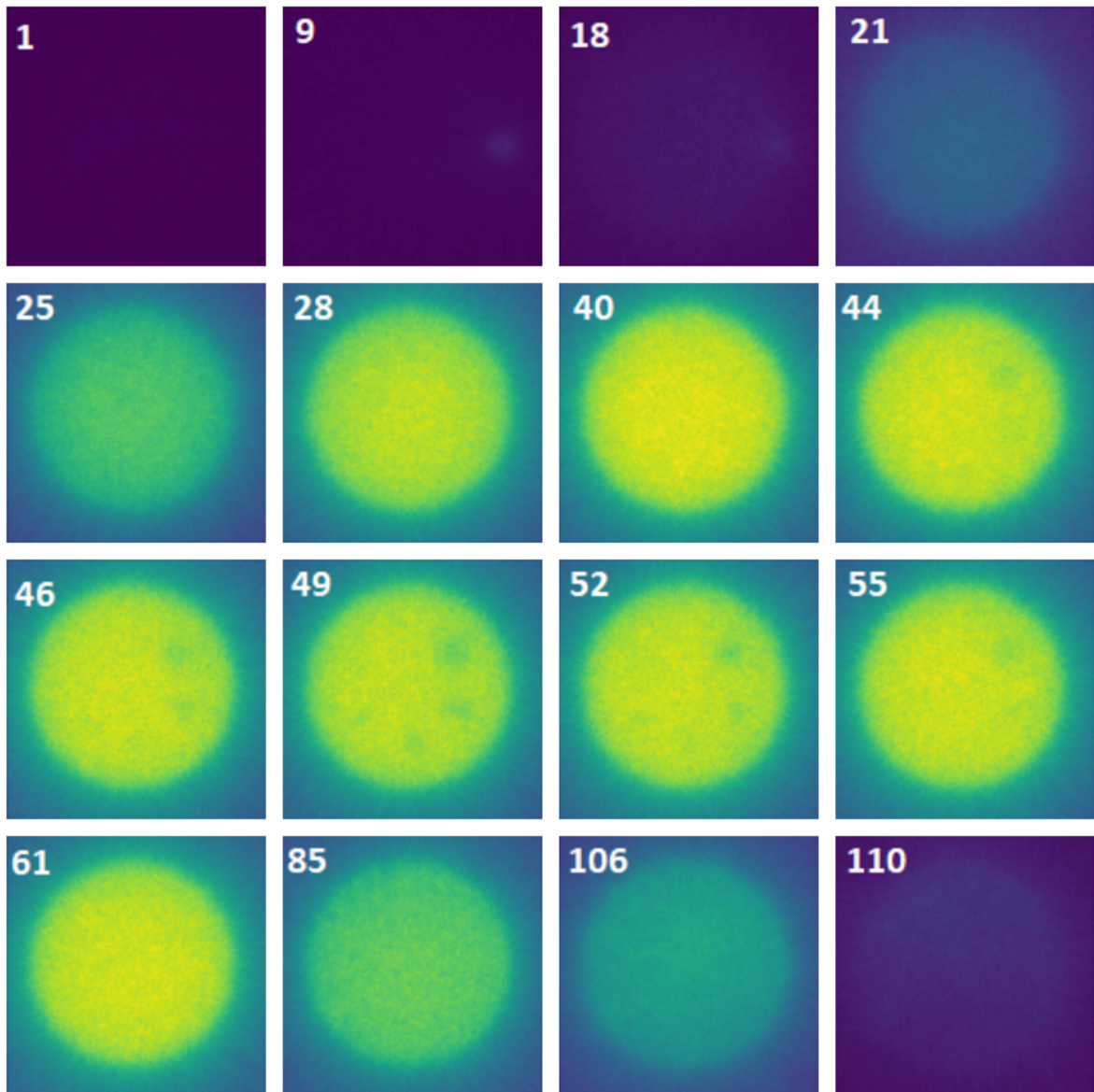
Figura 5.19: Sinograma das fatias do objeto.



Fonte: Figura do autor.

### 5.2.3 Retroprojeção

A retroprojeção é obtida com a utilização dos códigos `Parâmetros necessários I e II` e `Retroprojeção (BP)`, da seção B.1.1. A partir do sinograma obtido anteriormente, é possível realizar a retroprojeção de cada fatia, como observado na Figura 5.20. O índice numérico em cada fatia indica qual delas esta sendo visualizada. É notável que a intensidade dos valores de pixels da retroprojeção é intensa, o que pode ser relacionado com o borramento do artefato estrela, que aumenta os valores dos pixels, indicando uma maior quantidade de radionuclídeos onde não há. Nessa reconstrução, a forma de algum dos componentes do *phantom* de Jaszczak pode ser visto, como a região de uniformidade e parte das esferas.

Figura 5.20: Retroprojeção do *phantom* de Jaszczak.

Fonte: Figura do autor.

#### 5.2.4 Retroprojeção filtrada

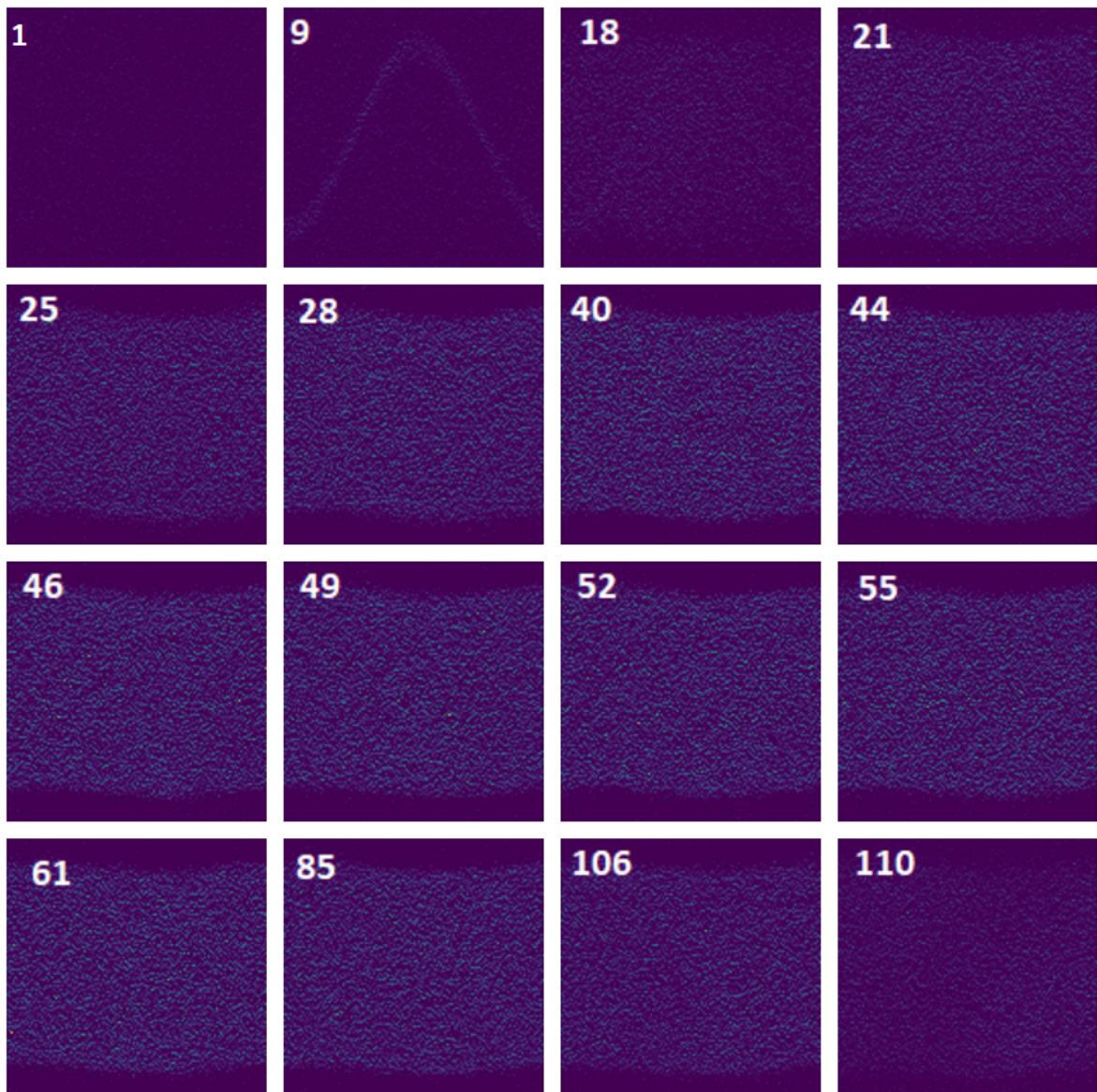
O processo de filtragem do sinograma para a retroprojeção filtrada é realizado através de três etapas principais, utilizando os seguintes códigos: Transformada de Fourier do sinograma, Filtragem do sinograma, e Transformada inversa de Fourier do sinograma, conforme descrito na seção B.1.2.

1. **Transformada de Fourier do sinograma**: Este código transforma o sinograma (ilustrado na Figura 5.19) do domínio do espaço para o domínio da frequência, utilizando a transformada de Fourier.

2. **Filtragem do sinograma**: No domínio da frequência, o sinograma é filtrado utilizando o filtro Hamming.
3. **Transformada inversa de Fourier do sinograma**: Após a filtragem, o sinograma filtrado é transformado de volta para o domínio do espaço através da transformada inversa de Fourier.

A transformada de Fourier do sinograma filtrado pode ser visto na Figura 5.21. O índice numérico em cada fatia indica qual delas esta sendo visualizada. É notável que, devido à filtragem no domínio da frequência, as intensidades de pixel do sinograma filtrado são menores que as do sinograma da Figura 5.19.

**Figura 5.21:** Transformada de Fourier do sinograma filtrado.



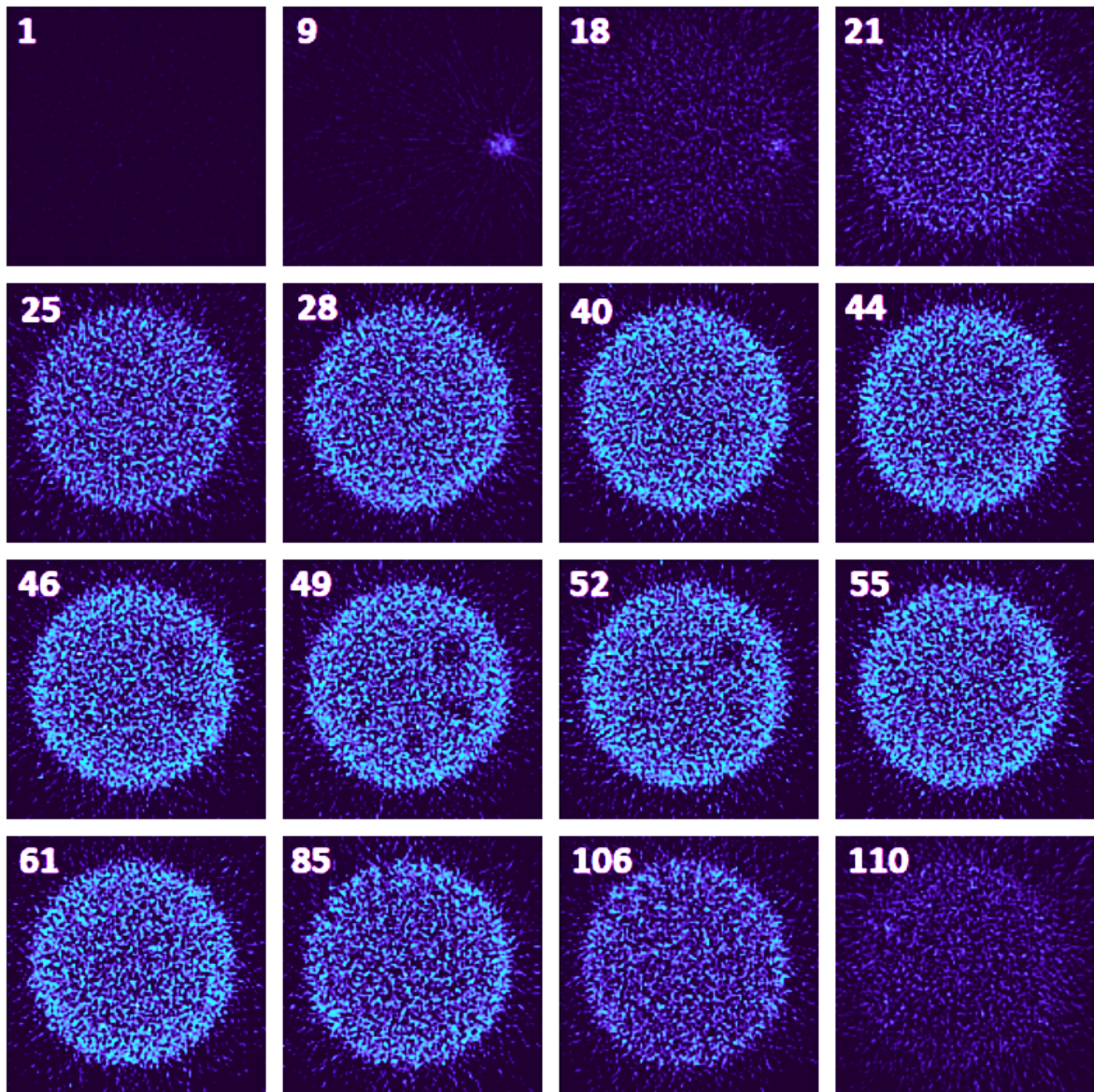
Fonte: Figura do autor.

Por fim, com a utilização dos códigos Retroprojeção Filtrada (FBP) e Correção de intensidade, da seção B.1.2, é realizada a retroprojeção filtrada do *phantom* de Jaszczak com a utilização do sinograma filtrado ilustrado pela Figura 5.21.

As imagens da FBP do *phantom* de Jaszczak podem ser vistas na Figura 5.22. Na reconstrução, é notável a diminuição significativa do borramento, entretanto poucas estruturas podem ser distinguidas no interior do *phantom*, similar ao ocorrido anteriormente na retroprojeção do *phantom* de Jaszczak. A região de uniformidade continua visível e as quatro maiores esferas de contraste também (de 15,9 mm, 19,1 mm, 25,4 mm, 31,8 mm), entretanto as esferas menores (de 9,5 mm e 12,7 mm) e as varas não puderam ser distinguidas em nenhuma fatia. É importante enfatizar que, a Figura 5.22 é uma imagem que recebeu pós-processamento, com aumento de brilho e contraste, além da diminuição da sombra. A figura sem o pós-processamento era muito semelhante à Figura 5.22, com as mesmas estruturas visíveis do *phantom*, entretanto de forma mais escurecida.

Se a espessura de cada detector individual no *gantry* ou o campo de visão do detector (FOV, do inglês *field of view*) fossem conhecidos, seria possível realizar a reconstrução tridimensional do volume de radionuclídeo no interior do *phantom* de Jaszczak. A razão para isso é que, com a espessura da componente axial, cada fatia poderia ser associada a uma espessura específica, permitindo que essas fatias fossem empilhadas de maneira a reconstruir o volume total do *phantom*. Isso facilitaria uma representação mais precisa e completa da distribuição espacial do radiofármaco, oferecendo uma visão tridimensional detalhada, essencial para análises mais aprofundadas e diagnósticos clínicos mais precisos.

Figura 5.22: Retroprojeção filtrada do *phantom* de Jaszczak com pós-processamento.



Fonte: Figura do autor.

### 5.3 Limitações e escala do projeto

Na implementação de um algoritmo de retroprojeção filtrada, é essencial enfatizar que esses algoritmos representam uma simplificação e idealização dos fenômenos complexos envolvidos na reconstrução real realizada por equipamentos de SPECT. Conforme demonstrado nas Figuras 5.11 e 5.22, é possível aplicar a retroprojeção filtrada tanto em *phantoms* reais quanto em digitais. No entanto, o uso do algoritmo isoladamente não é suficiente para a reconstrução completa da densidade de radiofármacos em equipamentos de SPECT, como exibida pela FBP do *phantom* de Jaszczak (Figura 5.22). Esses dispositivos empregam uma série de correções e conceitos

adicionais para melhorar a qualidade da imagem final.

Primeiramente, é importante lembrar a discussão feita na seção 3.2 sobre a geometria de aquisição de projeções e a idealização dos componentes da câmara gama. Nessa seção, assume-se a simplificação de que o detector colimado aceita radiação apenas de uma fatia fina diretamente perpendicular à face do detector, idealizando o poder de atenuação do colimador e assumindo que raios oblíquos não chegam aos cristais cintiladores. No entanto, esse processo não ocorre de forma perfeita na realidade. Imagens reais de SPECT contêm muito ruído proveniente de raios que não foram adequadamente atenuados pelos colimadores. Além disso, os cristais de cintilação e as fotomultiplicadoras também estão sujeitos a idealizações que não se verificam na prática. Em equipamentos reais de SPECT, nem todos os raios que atingem os cristais de cintilação interagem com eles, gerando a emissão de fótons na região visível. O mesmo se aplica às fotomultiplicadoras, que não interagem necessariamente com todos os fótons provenientes do cristal de cintilação. Essas considerações, que contrastam a idealização dos componentes da câmara gama com sua aplicação real, geram uma discrepância entre os resultados teóricos esperados e os valores reais obtidos. Portanto, ao desenvolver e aplicar algoritmos de retroprojeção filtrada, é fundamental considerar as limitações inerentes a essas idealizações e a necessidade de incorporar correções adicionais para alcançar uma qualidade de imagem que se aproxime da realidade clínica.

Outro fator relevante, que não foi implementado neste trabalho, é o papel da atenuação dos fótons na reconstrução. Idealmente, o sinal registrado por um elemento do detector é proporcional à atividade total na linha da projeção. Entretanto, na realidade o sinal da atividade mais próxima do detector é mais fortemente ponderado do que da atividade mais profunda, devido à atenuação por tecidos sobrejacentes. Em equipamentos de SPECT, técnicas como o *Conjugate counting* [21], *Chang's multiplicative method* [7], e *attenuation map* [38] buscam reduzir o efeito da atenuação na reconstrução de imagem [8].

Por fim, vale a pena discutir algumas possibilidades de melhora no algoritmo de reconstrução em Python. Um fator passível à melhora é a examinação, linha por linha de código, das funções nativas de bibliotecas de Python usadas. Visto que essas funções podem não estar otimizadas para o uso no algoritmo de reconstrução. Além disso, formas alternativas de se aplicar os conceitos apresentados nesse trabalho podem otimizar o algoritmo de reconstrução, melhorando a qualidade da imagem.

## CONCLUSÃO

A inspiração para este projeto foi desenvolver em Python o método de reconstrução analítica, conhecido como retroprojeção filtrada, capaz de reconstruir *phantoms* físicos, como o de Jaszczak, e digitais, como o Shepp-Logan. O código não apenas realiza a reconstrução tomográfica, mas também demonstra cada etapa envolvida no processo de reconstrução, como a formação do sinograma, a aplicação de filtros no domínio da frequência, as transformações de Fourier que permeiam a técnica e a própria retroprojeção.

Neste trabalho, foi possível analisar em detalhes os processos de formação das projeções, tanto em *phantoms* físicos quanto digitais, culminando no sinograma. No *phantom* digital de Shepp-Logan, a abordagem de rotacionar o objeto facilitou significativamente a simulação das projeções, resultando em uma representação muito próxima do que seria obtido ao rotacionar o detector, apesar de limitar a área de reconstrução. No *phantom* de Jaszczak, foi possível visualizar a eficiência do arranjo matricial de detectores na aquisição de dados, permitindo a obtenção direta dos sinogramas a partir do volume matricial do arquivo DICOM.

O algoritmo possibilitou o estudo da retroprojeção e suas limitações, como o artefato estrela que causa um borramento na imagem reconstruída. Além disso, foi possível visualizar o passo a passo do processo que soluciona esse problema com o uso de filtros no domínio da frequência, como o filtro rampa, que elimina o borramento, e o filtro Hamming, que elimina o ruído estático. Ao final desse processo, foi possível avaliar as imagens reconstruídas com a BP e a FBP, apesar de algumas limitações encontradas na reconstrução do *phantom* de Jaszczak, como a impossibilidade de visualizar alguns de seus componentes.

O estudo de vários parâmetros tomográfico que envolvem a reconstrução foi possível, como os efeitos de baixo intervalo angular de aquisição, de baixa quantidade de projeções e da falha em um componente do detector. Todos esses fatores causaram artefatos de imagem que puderam ser visualizados e são relevantes no ambiente clínico. Além disso, o algoritmo em Python foi disponibilizado na íntegra durante o texto, possibilitando estudos futuros de limitações, melhorias e artefatos na técnica e no código.

Em vista de futuras perspectivas, além das possibilidades oriundas dos resultados anteriormente mencionados, como as etapas da reconstrução e a análise de artefatos, este trabalho

pode servir de base para estudos subsequentes. Uma área em rápido crescimento que pode se beneficiar deste trabalho é o uso de inteligência artificial (IA) na reconstrução de imagens. A simulação de um phantom digital permite que a IA seja treinada com os resultados esperados, facilitando o seu desenvolvimento.

Outra área de interesse é o estudo de métodos iterativos, como o MLEM (*Maximum Likelihood Expectation Maximization*) e o OSEM (*Ordered Subset Expectation Maximization*). Diferentemente dos métodos analíticos apresentados neste trabalho, esses métodos iterativos dependem de uma estimativa inicial, que pode ser fornecida por técnicas analíticas. Embora não sejam amplamente utilizados em equipamentos de SPECT devido ao alto processamento necessário, esses métodos iterativos oferecem maior qualidade na reconstrução das imagens.

Além disso, o estudo de filtros no domínio da frequência pode ser expandido com base neste trabalho. Diferente do filtro rampa e do filtro Hamming discutidos, há uma variedade de outros filtros, como o filtro Cosseno, filtro Hanning, filtro Shepp-Logan e filtro Butterworth, que influenciam diretamente na qualidade da reconstrução e podem ser implementados para aprimorar a retroprojeção filtrada.

## Referências Bibliográficas

- [1] I. A. E. Agency. *Nuclear medicine resources manual*. International Atomic Energy Agency, 2006.
- [2] A. M. Alessio and P. Kinahan. Pet image reconstruction. 2005.
- [3] M. Andrade. Implementação de uma interface gráfica em java para reconstrução tomográfica em medicina nuclear. *Porto Alegre*, 48, 2003.
- [4] H. Arabi, A. AkhavanAllaf, A. Sanaat, I. Shiri, and H. Zaidi. The promise of artificial intelligence and deep learning in pet and spect imaging. *Physica Medica*, 83:122–137, 2021.
- [5] M. d. CABREJAS. Tomografia em medicina nuclear. *Editora Argentina, Argentina*, 1999.
- [6] Z. Cao, C. Maunoury, C. C. Chen, and L. E. Holder. Comparison of continuous step-and-shoot versus step-and-shoot acquisition spect. *Journal of Nuclear Medicine*, 37(12):2037–2040, 1996.
- [7] L.-T. Chang. A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography. *IEEE Transactions on nuclear Science*, 25(1):638–643, 1978.
- [8] S. R. Cherry, J. A. Sorenson, and M. E. Phelps. *Physics in nuclear medicine*. Soc Nuclear Med, 2013.
- [9] M. M. Dietze, W. Branderhorst, B. Kunnen, M. A. Viergever, and H. W. de Jong. Accelerated spect image reconstruction with fbp and an image enhancement convolutional neural network. *EJNMMI physics*, 6:1–12, 2019.
- [10] S. Dorbala, K. Ananthasubramaniam, I. S. Armstrong, P. Chareonthaitawee, E. G. DePuey, A. J. Einstein, R. J. Gropler, T. A. Holly, J. J. Mahmorian, M.-A. Park, et al. Single photon emission computed tomography (spect) myocardial perfusion imaging guidelines:

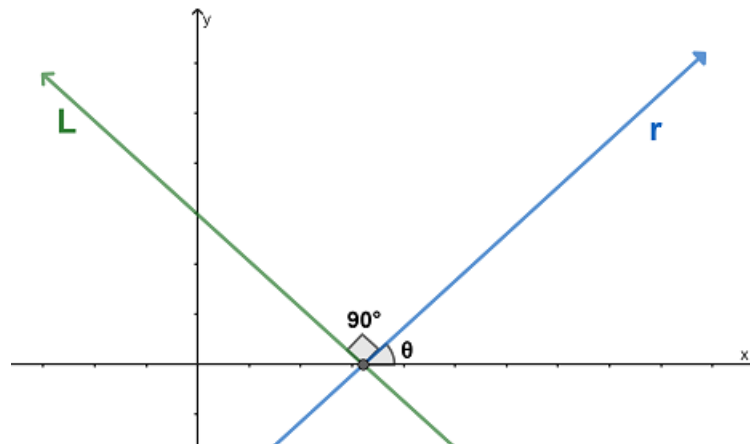
- instrumentation, acquisition, processing, and interpretation. *Journal of Nuclear Cardiology*, 25(5):1784–1846, 2018.
- [11] P. FRIDA. Desenvolvimento de plugin java para reconstrução e visualização em medicina nuclear. *Porto Alegre*, 2006, 2005.
- [12] J. Frikel and E. T. Quinto. Characterization and reduction of artifacts in limited angle tomography. *Inverse Problems*, 29(12):125007, 2013.
- [13] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. Processamento digital de imagem. *Pearson, ISBN-10: 8576054019*, 10:11–27, 2010.
- [14] R. Henkin. *Nuclear Medicine*. Number v. 2 in Nuclear Medicine. Mosby, 2006.
- [15] Lusoacademia.org. *Variáveis mudas*. Acesso em: 15 Jul 2024.
- [16] Wikipedia. *Câmara gama*. Acesso em: 12 Jul 2024.
- [17] Youtube.com/@MrPSolver. *CT Scans and Tomographic Recon in PYTHON*. Acesso em: 13 Jul 2024.
- [18] U. Je, M. Lee, H. Cho, D. Hong, Y. Park, C. Park, H. Cho, S. Choi, and T. Woo. Simulation and experimental studies of three-dimensional (3d) image reconstruction from insufficient sampling data based on compressed-sensing theory for potential applications to dental cone-beam ct. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 784:550–556, 2015.
- [19] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of computerized tomographic imaging*. SIAM, 2001.
- [20] P. Knoll, D. Kotalova, G. Köchle, I. Kuzelka, G. Minear, S. Mirzaei, M. Šámal, L. Zadrazil, and H. Bergmann. Comparison of advanced iterative reconstruction methods for spect/ct. *Zeitschrift für medizinische Physik*, 22(1):58–69, 2012.
- [21] S. A. Larsson. Gamma camera emission tomography. development and properties of a multi-sectional emission computed tomography system. *Acta Radiol*, 363:S1–S75, 1980.
- [22] R. Liu, L. He, Y. Luo, and H. Yu. Singular value decomposition-based 2d image reconstruction for computed tomography. *Journal of X-ray science and technology*, 25(1):113–134, 2017.
- [23] M. Lyra and A. Ploussi. Filtering in spect image reconstruction. *Journal of Biomedical Imaging*, 2011:1–14, 2011.
- [24] A. Maier, S. Steidl, V. Christlein, and J. Hornegger. *Medical imaging systems: An introductory guide*. 2018.

- [25] F. Meng and S. Wu. Automatic determination of the center of rotation for computed tomography. *measurement*, 1:2, 2017.
- [26] F. A. Mettler Jr and M. J. Guiberteau. *Essentials of nuclear medicine imaging: expert consult-online and print*. Elsevier Health Sciences, 2012.
- [27] F. Natterer. *The mathematics of computerized tomography*. SIAM, 2001.
- [28] F. H. Palladino. *Reconstrução 3D de imagens em tomografia por emissão de pósitrons com câmaras de cintilação*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2004.
- [29] E. B. Podgoršak et al. *Radiation physics for medical physicists*, volume 1. Springer, 2006.
- [30] W. Shao, S. P. Rowe, and Y. Du. Artificial intelligence in single photon emission computed tomography (spect) imaging: a narrative review. *Annals of Translational Medicine*, 9(9), 2021.
- [31] L. A. Shepp and B. F. Logan. The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on nuclear science*, 21(3):21–43, 1974.
- [32] N. B. Smith and A. Webb. *Introduction to medical imaging: physics, engineering and clinical applications*. Cambridge university press, 2010.
- [33] A. C. Trevisan, M. D. Raed, V. Tumas, L. Alexandre-Santos, F. A. Pitella, E. N. Itikawa, J. H. Silvah, M. Kato, E. Z. Martinez, J. A. Achcar, et al. Comparison between osem and fbp reconstruction algorithms for the qualitative and quantitative interpretation of brain dat-spect using an anthropomorphic striatal phantom: implications for the practice. *Research on Biomedical Engineering*, 36:77–88, 2020.
- [34] A. F. Velo. *Análise da aplicação de diferentes algoritmos de reconstrução de imagens tomográficas de objetos industriais*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2018.
- [35] A. F. Velo, J. F. Martins, A. S. Oliveira, D. V. Carvalho, F. S. Faria, M. M. Hamada, and C. H. Mesquita. Filter assessment applied to analytical reconstruction for industrial third-generation tomography. 2015.
- [36] W. A. Weber, J. Czernin, C. J. Anderson, R. D. Badawi, H. Barthel, F. Bengel, L. Bodei, I. Buvat, M. DiCarli, M. M. Graham, et al. The future of nuclear medicine, molecular imaging, and theranostics. *Journal of Nuclear Medicine*, 61(Supplement 2):263S–272S, 2020.
- [37] O. Williams. *Understanding Matrices to Perform Basic Image Processing on Digital Images*. Acesso em: 10 Jul 2024.
- [38] H. Zaidi and B. Hasegawa. Determination of the attenuation map in emission tomography. *Journal of Nuclear Medicine*, 44(2):291–315, 2003.

## A.1 Relação entre coeficientes angulares de retas perpendiculares

Seja  $r$  e  $L$  duas retas perpendiculares entre si, como ilustrado na Figura A.1.

**Figura A.1:** Representação gráfica de duas retas perpendiculares entre si.



Fonte: Figura do autor.

As equações das retas  $r$  e  $L$  podem ser escritas conforme as Equações A.1 e A.2, respectivamente.

$$r : y_r = m_r x_r + B_r \quad \text{com} \quad m_r = \text{tg}(\theta) \quad (\text{A.1})$$

$$L : y_L = m_L x_L + B_L \quad \text{com} \quad m_L = \text{tg}(90^\circ + \theta) \quad (\text{A.2})$$

A obtenção do coeficiente angular  $m_L$  da reta  $L$  é demonstrada na Equação A.3.

$$\begin{aligned}
 m_L &= \text{tg}(90^\circ + \theta) \\
 &= \frac{\text{sen}(90^\circ + \theta)}{\text{cos}(90^\circ + \theta)} \\
 &= \frac{\text{sen}(90^\circ) \text{cos}(\theta) + \text{sen}(\theta) \text{cos}(90^\circ)}{\text{cos}(90^\circ) \text{cos}(\theta) - \text{sen}(90^\circ) \text{sen}(\theta)} \\
 &= \frac{1 \text{cos}(\theta) + 0}{0 - 1 \text{sen}(\theta)} \\
 &= \frac{-\text{cos}(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \\
 &= \frac{-1}{\text{tg}(\theta)} = \frac{-1}{m_\rho}
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

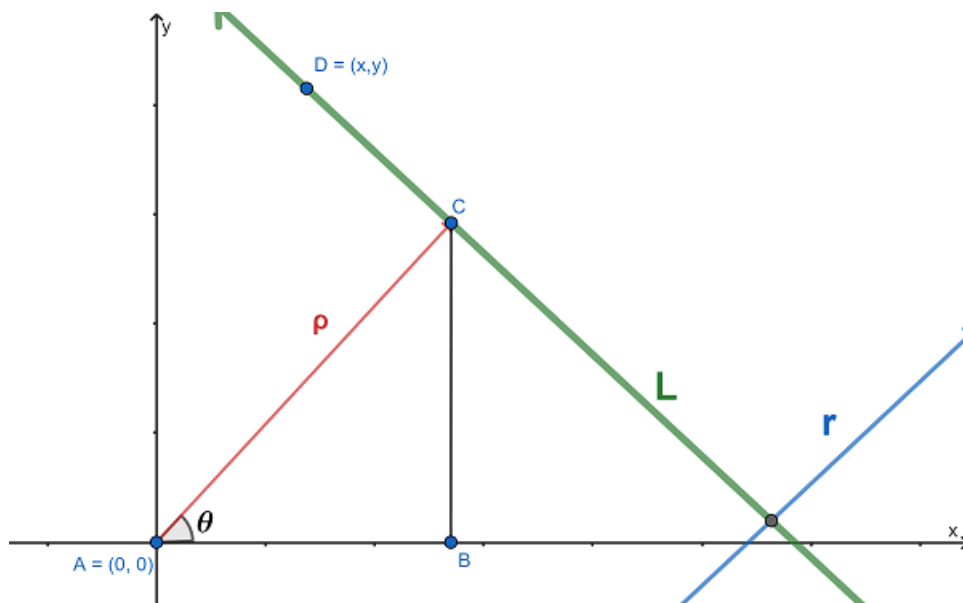
Portanto, a relação entre os coeficientes angulares de duas retas paralelas se dá através da equação A.4:

$$m_L m_r = -1 \tag{A.4}$$

## A.2 Parametrização da reta em representação normal

A parametrização matemática da reta  $L$  utilizada na reconstrução analítica, pode ser derivada a partir da Figura A.2. Note que  $L$  representa o raio que chega perpendicular a um elemento do detector.

**Figura A.2:** Visualização gráfica da parametrização usada na formação das projeções.



Fonte: Figura do autor.

Como pode ser visto nas Equações A.5 e A.6, algumas relações trigonométricas podem ser obtidas da própria figura, a partir dos seguimentos que compõem o triângulo retângulo (A, B, C):

$$\cos(\theta) = AB/\rho \quad \longrightarrow \quad AB = \rho \cos(\theta) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{sen}(\theta) = BC/\rho \quad \longrightarrow \quad BC = \rho \text{sen}(\theta) \quad (\text{A.6})$$

Com isso, pode-se inferir as coordenadas do ponto  $C$  da Figura A.2 como sendo  $C = (\rho \cos(\theta), \rho \text{sen}(\theta))$ . Esse resultado permite encontrar a equação da reta vermelha (seguimento  $AC$ ) que passa pela origem. Com o resultado desta operação, é possível encontrar a parametrização da reta verde ( $L$ ) que visamos demonstrar.

A partir do ponto  $A$  e do ponto  $C$ , pode-se encontrar o coeficiente angular da reta  $\rho$  com a Equação A.7:

$$y - y_0 = m_\rho(x - x_0) + I \quad \longrightarrow \quad m_\rho = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (\text{A.7})$$

com  $y$  e  $x$  sendo as coordenadas do ponto  $C$ ,  $y_0$  e  $x_0$  sendo as coordenadas do ponto  $A$ ,  $m_\rho$  o coeficiente angular da reta  $\rho$  e o coeficiente linear da reta  $\rho$  sendo  $I = 0$ , já que a reta está centrada na origem.

Substituindo os valores da Equação A.6 na Equação A.7, é obtido o coeficiente angular da reta  $\rho$  pela Equação A.8:

$$m_\rho = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\rho \text{sen}(\theta) - 0}{\rho \cos(\theta) - 0} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \text{tg}(\theta) \quad (\text{A.8})$$

Com base na relação existente entre o coeficiente angular de duas retas perpendiculares (demonstrado no apêndice A.1), pode-se obter o coeficiente angular da reta  $L$  com a equação A.9:

$$m_\rho \cdot m_L = -1 \quad (\text{A.9})$$

com  $m_\rho$  sendo o coeficiente angular da reta  $\rho$  e  $m_L$  sendo o coeficiente angular da reta  $L$ .

Substituindo os resultados da Equação A.8 na Equação A.9, se obtém a Equação A.10:

$$m_L = \frac{-1}{m_\rho} = \frac{-1}{\text{tg}(\theta)} = \frac{-\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \quad (\text{A.10})$$

A partir do resultado da Equação A.10, é possível obter a parametrização da reta  $L$  equalizando o coeficiente angular da reta  $L$  obtido na Equação A.10 com o coeficiente angular da reta de segmento  $CD$ :

$$\begin{aligned}
 m_L &= m_L \\
 \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} &= \frac{\rho \sin(\theta) - y}{\rho \cos(\theta) - x} \\
 -\cos(\theta)(\rho \cos(\theta) - x) &= (\rho \sin(\theta) - y) \sin(\theta) \\
 -\rho \cos^2(\theta) + x \cos(\theta) &= \rho \sin^2(\theta) - y \sin(\theta) \\
 x \cos(\theta) + y \sin(\theta) &= \rho(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\
 x \cos(\theta) + y \sin(\theta) &= \rho
 \end{aligned}$$

$$\boxed{x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = \rho} \tag{A.11}$$

A parametrização da Equação A.11, é a base geométrica dos métodos de reconstrução analítica, devido à necessidade de caracterizar a reta que sai da fonte pontual radioativa e chega perpendicular a superfície do detector.

## B.1 Código da BP e da FBP no *phantom* de Jaszczak

Implementação do código em Python da BP e da FBP no *phantom* de Jaszczak. Note que o código presente nesta seção é praticamente o mesmo código do *phantom* digital.

### B.1.1 Retroprojeção do *phantom* de Jaszczak

```

_____ Parâmetros necessários I e II _____
1 rho = np.linspace(-objeto.shape[0]/2,objeto.shape[0]/2,objeto.shape[0])
2 X, Y = np.meshgrid(rho,rho)
3 d_angulo = np.diff(angulo)[0]

_____ Retroprojeção (BP) _____
1 def func_BP(x,y,i):
2     interpolacao_matricial_BP = RectBivariateSpline(rho,angulo,g[:, :, i])
3     f_theta_k = interpolacao_matricial_BP(
4         x*np.cos(angulo) + y*np.sin(angulo) , angulo , grid=False )
5     f = sum(f_theta_k)*d_angulo
6     return f
7
8 BP = np.zeros((objeto.shape))
9
10 i = 0
11 while (i < g.shape[2]):
12     BP[:, :, i] = np.vectorize(func_BP)(X,Y,i)
13     i = i + 1

```

**B.1.2 Retroprojeção filtrada do *phantom* de Jaszczak**

```

1  G = np.zeros((g.shape), dtype = 'complex_')
2  i = 0
3  while (i < G.shape[2]):
4      G[:, :, i] = fft(g[:, :, i], axis = 0)
5      i = i + 1

```

```

1  omega = np.fft.fftfreq(G.shape[0], d=np.diff(rho)[0])
2  filtro = np.abs(omega)
3  filtro = filtro*(0.54 + 0.46*np.cos((np.pi*omega)/(1*np.max(omega))))
4
5  integrando = np.zeros((G.shape), dtype = 'complex_')
6  i = 0
7  while (i < integrando.shape[2]):
8      integrando[:, :, i] = (G[:, :, i].T * filtro).T
9      i = i + 1

```

```

1  g_G = np.zeros((g.shape))
2  i = 0
3  while (i < g_G.shape[2]):
4      g_G[:, :, i] = np.real(iffit(integrando[:, :, i], axis=0))
5      i = i + 1

```

```

1  def func_FBP(x,y,i):
2      interpolacao_matricial_FBP = RectBivariateSpline(rho,
3                                                         angulo, g_G[:, :, i])
4      f_theta_k = interpolacao_matricial_FBP(
5          x*np.cos(angulo) + y*np.sin(angulo), angulo, grid=False)
6      f = sum(f_theta_k)*d_angulo
7      return f
8
9  FBP = np.zeros((objeto.shape))
10
11  i = 0
12  while(i < g_G.shape[2]):
13      FBP[:, :, i] = np.vectorize(func_FBP)(X,Y,i)
14      i = i + 1

```

```

1  FBP[FBP < 0] = 0

```