MECÂNICA RELATIVÍSTICA*

FRANCISCO A. P. OSÓRIO, **MÁRCIO A. R. SOUZA,** ANTONIO NEWTON BORGES, **PAULO CÉSAR M. MACHADO**

Resumo: *neste trabalho apresentamos uma nova metodologia para dedução das expressões matemáticas da Mecânica Relativística. Diferentemente de outros textos sobre o tema partimos de argumentos plausíveis para deduzir a equação relativística da adição de velocidades entre dois referenciais inerciais com movimento relativo e a partir desta equação chegamos às equações de transformações de Lorentz.*

Palavras-chave: *Mecânica. Ensino de Física. Transformações de Lorentz.*

Isaac Newton, em 1686, publicou sua obra prima, o livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, que resumia todo conhecimento anterior e estabelecia as bases da mecânica newtoniana, descrevendo muito tanto o movimentos dos corpos macroscópicos tanto na superfície da Terra, como os movimentos dos planetas no sistema solar. No entanto no espaço que nos circunda ou no âmago da matéria, é sempre possível encontrar partículas subatômicas cujas velocidades são frações consideráveis da velocidade da luz e, neste caso, a mecânica newtoniana não é capaz de descrever corretamente seus movimentos. Por exemplo, as partículas que viajam da alta atmosfera em direção à superfície da Terra, oriundas da colisão dos raios cósmicos com a atmosfera, podem possuir velocidades superiores a 99% da velocidade da luz. Os movimentos dessas partículas são corretamente descritos por uma teoria mais geral que a mecânica newtoniana, a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) formulada por Albert Einstein em 1905 (EINSTEIN, 1905), aplicável à descrição do movimento em referenciais inerciais. Dentre outras coisas a TRR estabelece que a velocidade da luz no vácuo, cujo valor exato é c= 299.792,458 km/s, é o maior valor possível da velocidade que a energia ou a matéria podem atingir, ou seja, essa é a velocidade limite. O fato da mecânica newtoniana não impor nenhuma restrição aos valores possíveis das velocidades das partículas a torna incompatível com a TRR, fazendo com que suas predições sobre o movimento de partículas com grandes velocidades, quando comparadas à velocidade da luz no vácuo, não sejam corretas.

Neste trabalho nós apresentamos uma nova metodologia para generalização da mecânica newtoniana de forma a adequá-la aos postulados da TRR, para que ela seja capaz de descrever o movimento de partículas com qualquer valor de velocidade. O procedimento que adotamos é totalmente baseado em conceitos mecânicos, não fazendo referência à teoria eletromagnética da luz, como é costumeiramente feito nos livros textos utilizados nos cursos de graduação de física ou engenharia. Procedemos assumindo que a velocidade da luz no vácuo é o maior valor possível da velocidade de uma partícula, e através de argumentos plausíveis generalizamos a expressão da soma de velocidades da mecânica newtoniana de modo a incorporar essa velocidade limite. Como veremos, este método de generalização da mecânica newtoniana nos levará às transformações de coordenadas de Lorentz que formam a estrutura da TRR. A vantagem do presente método é que ele evita discussões sobre conceitos físicos mais complexos que estão frequentemente presentes na apresentação da TRR, como, por exemplo, as equações de Maxwell e as propriedades da luz. Nosso método pretende ser simples inovador e didático, embora não exista neste artigo nenhuma equação ou conceito físico original. Toda a teoria é bem conhecida e experimentalmente comprovada por vários experimentos (BERTOZZI, 1964) e está presente em vários livros didáticos (HALLIDAY, RESNICK, 1995; RESNICK, 1971; YOUNG *et al*., 2012).

A novidade e originalidade do presente trabalho está na estratégia didática utilizada para a dedução das equações, ou seja, no método alternativo que considera apenas conceitos da mecânica, não fazendo menção à teoria eletromagnética. Partimos diretamente da regra de adição de velocidades, e não das transformações de coordenadas entre referenciais inerciais. Neste trabalho consideramos o vácuo como meio material e somente movimentos unidimensionais no eixo x, de modo que o tratamento vetorial das equações não se faz necessário. Essas restrições, no entanto, não comprometem os resultados, pois elas podem facilmente ser adaptadas para tratar problemas tridimensionais.

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Para nos auxiliar nas deduções das equações consideramos um referencial inercial S (fixo na Terra) e um referencial S' que se desloca ao longo do eixo x, comum a ambos, com velocidade uniforme v em relação a S, como mostrado na Figura 1. Consideramos também que nos tempos $t=0$ e $t'=0$ medidos nos respectivos referenciais S e S', as origens dos dois sistemas de coordenadas eram coincidentes ($x=x'=0$).

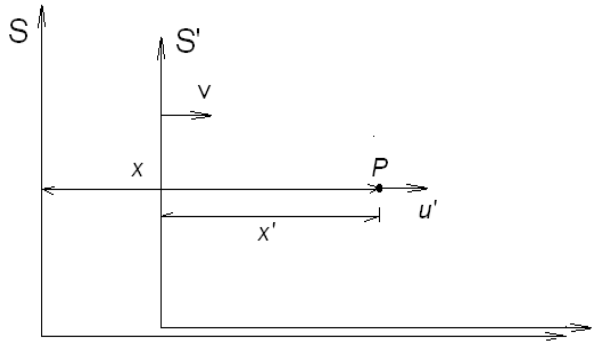

Figura 1: Referenciais Inerciais S e S’, com velocidade relativa v. A partícula P desloca-se com velocidade u’ em relação ao referencial S’

Na mecânica newtoniana as equações que relacionam as medidas das grandezas físicas como espaço, tempo e velocidade nos dois referenciais inerciais são as chamadas equações de transformações de Galileu (TG). Essas equações mantêm invariantes as formas das equações da mecânica newtoniana quando se muda de um referencial inercial para outro. As TG são dadas por:

$x = x' + vt$; (1) $u = u' + v$; (2) $t = t'$. (3)

Claramente é a equação (2) da adição de velocidades, que relaciona as velocidades medidas por observadores em repouso nos dois referenciais inerciais que não está de acordo com a existência de uma velocidade limite, pois como vemos qualquer valor de velocidade pode ser somado livremente. Ressaltamos que as TG aplicam-se com grande sucesso aos fenômenos que ocorrem no mundo macroscópico, onde as velocidades dos corpos são pequenas quando comparadas à velocidade da luz. Apenas no limite de altas velocidades é que essas equações não podem ser aplicadas.

Assim, segundo as TG, se a velocidade da partícula P em relação a S’ for $u' = c$, o observador em S medirá a velocidade da partícula em relação a ele como sendo maior que c, o que está errado, como confirmado por uma série de experimentos (BERTOZZI, 1964). Como c é a velocidade limite, o observador em S deveria medir a velocidade da partícula como sendo no máximo igual a c. É justamente essa falha na mecânica newtoniana que pretendemos corrigir e o faremos modificando a equação (2).

ARGUMENTOS PLAUSÍVEIS PARA A OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA ADIÇÃO DE VELOCIDADES COMPATÍVEL COM A EXISTÊNCIA DE UMA VELOCIDADE LIMITE

Como vimos a relação de adição de velocidades entre dois referenciais inerciais equação (2), é que deve ser modificada de modo a incluir a velocidade limite c, ou seja, nem u', nem u, podem ser maiores que c. Assim sendo, a equação que buscamos deverá satisfazer às seguintes exigências:

A) No limite de baixas velocidades a expressão que buscamos deve coincidir com a equação $u = u' + v$.
B) Quando $u' = c$, devemos ter $u = c$.
C) Quando $u' = 0$, devemos ter $u = v$.

Na expressão de adição de velocidades de Galileu $u = u' + v$, se a velocidade da partícula em S' for $u' = c$, teremos que $u = c + v$ uma resposta errada. Note, porém, que se dividirmos o segundo membro da equação (2) por $(c + v)$ e multiplicarmos por c obteremos a seguinte expressão: $u = \frac{u' + v}{c + v} c$, que pode ser reescrita da forma:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c}} \tag{4}$$

Como podemos ver essa expressão satisfaz às condições A e B, ou seja, no limite de baixas velocidades, quando $v << c$, reobtemos a expressão de Galileu (2), e quando $u' = c$ a equação (4) fornece a resposta correta $u = c$.

No entanto, a equação (4) deve ser modificada de modo também a satisfazer à condição C, que estabelece que se $u' = 0$ (partícula em repouso em relação à S'), devemos ter $u = v$. Mas substituindo diretamente $u' = 0$ na equação (4) teremos a resposta errada, ou seja, $u = \frac{v}{1 + \frac{v}{c}}$.

Note que o denominador da equação acima deveria ser igual à unidade para satisfazer a condição C. Uma maneira de resolver este problema é acrescentar ao denominador da equação (4) uma função adimensional $\alpha(u')$, de modo que no limite de $u' = 0$ o denominador seja igual à unidade. Assim sendo a equação (4) assume a forma:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \alpha(u') \frac{v}{c}} \tag{5}$$

com a função $\alpha(u')$ devendo obedecer à condição $\alpha(u'=0)=0$.

Embora existam muitas opções para a escolha da função $\alpha(u')$, escolheremos sua forma baseado no princípio de Newton que a natureza sempre age da forma mais simples, isto é, escolheremos a função $\alpha(u')$ como uma função linear de u', ou seja, $\alpha(u') = \frac{u'}{c}$. Esta escolha resulta na expressão correta para a adição de velocidades como obtido por Einstein em 1905. Portanto

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}} \tag{6}$$

Esta é a expressão relacionando as velocidades entre dois referenciais inerciais satisfaz todas as exigências que estabelecemos acima graças à escolha que fizemos para a função $\alpha(u')$. Note que na equação (6) se $u' = v = 0{,}6\ c$ a velocidade da partícula em relação ao sistema S será $u = 0{,}882\ c$, uma velocidade inferior à velocidade limite c, como devia ser, e não $u = 1{,}2\ c$, como previsto pela equação (2).

AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Como a fórmula de adição de velocidades de Galileu, equação (2), não pode ser aplicada no limite de altas velocidades e deve ser substituída pela expressão dada na equação (6) não há porque esperar que as equações (1) e (3), que relacionam medidas de espaço e tempo entre os referenciais inerciais, devam estar corretas, uma vez que a equação (2) é derivada diretamente dessas equações. Sendo assim, precisamos encontrar um novo conjunto de equações que relacionem tempo e espaço nos sistemas referenciais inerciais S e S' e que levem à expressão correta da adição de velocidades, equação (6). Começamos reescrevendo as velocidades em termos da posição e do tempo, $u = \frac{dx}{dt}$ *e* $u' = \frac{dx'}{dt'}$, e substituindo na equação (6), obtemos,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{dx'}{dt'}\frac{v}{c^2}} . \tag{7}$$

Multiplicando o termo do lado direito da equação (7) por dt', em cima e embaixo, teremos,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\, dt'}{dt' + \frac{dx'\, v}{c^2}} . \tag{8}$$

Separando a equação (8) em duas igualdades, uma equação no numerador e outra no denominador, obtêm-se as equações,

$$dx = \gamma\ (dx' + v\ dt') ; \tag{9}$$

$$dt = \gamma\ \left(dt' + \frac{v}{c^2}\ dx'\right) . \tag{10}$$

Onde o fator adimensional γ foi acrescentado de modo a tornar o procedimento mais geral. Entretanto, para que as transformações resultantes das equações (9) e (10) sejam lineares, o fator • não deve depender de x' e t', podendo, na melhor das hipóteses, depender da velocidade relativa v. Integrando ambos os lados das equações (9) e (10) chegamos a,

$$x=\gamma\ (x' + v\ t')\ ; \qquad (11) \qquad\qquad t=\gamma\ \left(t' + \frac{v}{c^2}\ x'\right). \qquad (12)$$

Para que as equações acima fiquem completas precisamos determinar esse fator γ. Sabemos que no limite de baixas velocidades ($v/c\approx 0$) são válidas as equações (1) e (3) de Galileu, de modo que $\gamma=1$. Ou seja, este fator adimensional deve, de algum modo deve depender da razão entre a velocidade relativa e a velocidade da luz.

As equações (11) e (12) relacionam as variáveis no sistema S (sem linha) com as variáveis no sistema S'. As equações que relacionam as grandezas com linha em relação às sem linha podem ser obtidas utilizando-se de argumentos de simetria, pois os referenciais são inerciais. Assim analisemos a situação mostrada na Figura1 a partir do referencial S'; neste caso o referencial S se afasta de S' ao longo do eixo x com velocidade *–v*. Se a velocidade da partícula for *u* em relação a S, segundo a relação de transformação de velocidades de Galileu, teremos que o observador em S' medirá a velocidade $u'=u-v$, adequando as exigências A, B e C e refazendo os cálculos obteremos: $u'=\dfrac{u-v}{1-\dfrac{u\ v}{c^2}}$.

Seguindo os mesmos passos descritos acima chegamos às equações que relacionam as coordenadas linha e sem linha, que são:

$$x'=\gamma\ (x-v\ t) \qquad (13); \qquad\qquad t'=\gamma\ \left(t-\frac{v}{c^2}\ x\right). \qquad (14)$$

Observe que as equações (13) e (14) são obtidas das equações (11) e (12) trocando v por $-v$.

Para determinarmos o fator •, vamos admitir que a partícula P desloque-se em relação a S' com a velocidade da luz, ou seja, $u'=c$ e que parta em $t=0$ deslocando-se ao longo do eixo x=x'. Como vimos um observador em S medirá a velocidade da partícula como $u=c$, sendo assim as distâncias percorridas pela partícula em relação aos observadores nos referenciais S e S', serão dadas por: $x=c\ t$ e $x'=ct'$. Assim temos que,

$$c=\frac{x}{t}=\frac{x'}{t'}\ . \qquad (15)$$

Colocando em evidência *t'* e *t* nas equações (12) e (14) e substituindo os resultados da equação (15) obteremos,

$$t=\gamma\ t'\left(1+\frac{v}{c^2}\ \frac{x'}{t'}\right)=\gamma\ t'\left(1+\frac{v}{c}\right), \qquad (16)$$

$$t'=\gamma\ t\left(1-\frac{v}{c^2}\frac{x}{t}\right)=\gamma\ t\left(1-\frac{v}{c}\right)\ . \qquad (17)$$

Substituindo *t'* da equação (17) na equação (16) teremos,

$$t=\gamma^2\ t\ \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ , \qquad (18)$$

Ou seja,

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\ . \qquad (19)$$

Encontramos assim a expressão do fator • que é conhecido como o fator de Lorentz e foi por ele obtido em 1904 em outro contexto (REITZ, MILFORD, 1982). Este é o fator chave da TRR e foi deduzido independentemente por Einstein a partir dos postulados da teoria da relatividade. Assim trocando as equações de transformações de Galileu, equações (1), (2) e (3) pelas equações de Lorentz (transcritas para a tabela abaixo), a mecânica newtoniana torna-se a mecânica relativística e aplica-se para descrição do movimento de corpos materiais com qualquer valor de velocidade.

$x=\gamma\ (x'+v\ t')$	$x'=\gamma\ (x-v\ t)$
$t=\gamma\ \left(t'+\frac{v}{c^2}\ x'\right)$	$t'=\gamma\ \left(t-\frac{v}{c^2}\ x\right)$

Figura 2: Transformações de coordenadas entre dois referenciais inerciais da mecânica relativística

Como podemos ver nas equações de transformações de Lorentz os tempos nos referenciais S e S' não são mais iguais, ou seja, dois relógios um em cada referencial marcam tempos diferentes. Essa diferença é maior quanto maior a razão v/c . Ocorrem então, na mecânica, profundas mudanças na compreensão dos conceitos de espaço e tempo e com isso surgem novos fenômenos como os da dilatação do tempo e da contração do espaço que foram preditos teoricamente (Einstein, 1905) e comprovados por inúmeros experimentos realizados por mais de meio século. A seguir fazemos uma breve discussão destes fenômenos relativísticos.

IMPLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ NA MECÂNICA

Imaginemos que num futuro distante sejam possíveis viagens em naves espaciais de altíssimas velocidades quando comparadas com a velocidade da luz. Imagine também um aeroporto especialmente projetado para as partidas e chegadas dessas naves. É do interesse dos passageiros saberem quanto tempo vai durar a viagem entre duas localidades, bem como saber a que horas chegarão a seu destino. Temos então envolvidos nesta viagem dois tempos, o tempo de duração da viagem para o passageiro e o tempo marcado pelos relógios nos aeroportos, tais tempos estando relacionados pelas equações de Lorentz.

Para os passageiros no aeroporto antes de embarcarem eles diriam que a viagem demoraria $\Delta t = L/v$, onde L é distância entre as localidades e v a velocidade da nave suposta constante durante toda a viagem. Desde que a viagem seja muito longa, os períodos de aceleração da nave até atingir a velocidade de cruzeiro e desaceleração até parar sejam muitos curtos podem ser desprezados. No entanto, como dissemos, os intervalos de tempos medidos na nave e no aeroporto são diferentes. Para saber o tempo de duração da viagem para os passageiros alguns cálculos devem ser feitos usando as equações da tabela1.

Assim para um observador no referencial S (no aeroporto) as localidades estão nas posições x_1 e x_2, então, $L = \Delta x = x_2 - x_1$. Dentro da nave o intervalo de tempo de viagem será medido como $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, onde os índices 1 e 2 estão associados ao início e ao fim da viagem. Usando as expressões da tabela 1, teremos,

$$\Delta t' = \gamma \left[\left(t_2 - t_1 \right) - \frac{v}{c^2} \left(x_2 - x_1 \right) \right] . \tag{20}$$

Tirando $\Delta t = \left(t_2 - t_1 \right)$ em evidência na equação (20), escrevendo $\Delta x = x_2 - x_1$, e usando $v = \Delta x / \Delta t$, *ob*teremos,

$$\Delta t' = \gamma \, \Delta t \left[1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = \gamma \, \Delta t \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] . \tag{21}$$

Substituindo a expressão para o fator •, equação (19), chegamos a,

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2 / c^2} \tag{22}$$

Como vemos divergência entre o tempo esperado para a duração da viagem quando o passageiro no aeroporto é informado da velocidade da nave e da distância entre as duas cidades (Δt) e a duração real da viagem ($\Delta t'$). Por exemplo, se a velocidade da nave for $v = 0{,}6c$ a viagem durará 80% do tempo estimado no aeroporto $\Delta t = L/v$. Como o tempo de viagem é menor que o previsto no referencial em repouso (aeroporto) diz-se que houve uma dilatação do tempo.

Por simetria se o tempo de viagem é menor que o previsto e a velocidade da nave é constante então é como se o espaço entre as duas cidades diminuísse para o passageiro em viagem, ou seja, haveria uma contração do espaço, da mesma forma usando as equações da Tabela 1, podemos obter uma relação entre as distâncias nos dois referenciais, assim,

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ . \tag{23}$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA

Para completar a reforma na mecânica newtoniana apresentamos um método simples de obter as equações da dinâmica, em particular focaremos nossa atenção na expressão da energia cinética, ou seja, da energia transportada por uma partícula em movimento no espaço vazio. Como sabemos uma partícula com massa m_o com uma velocidade v, no limite de baixas velocidades possui energia cinética dada pela expressão $K=m_o v^2/2$. Naturalmente a expressão da mecânica relativística que procuramos deverá convergir para esta expressão no limite de baixas velocidades da partícula.

A expressão da energia cinética pode ser reescrita da forma, $K=m_o\, c^2 \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, onde multiplicamos o numerador e o denominador pelo quadrado da velocidade da luz. No limite de baixas velocidades podemos escrever o termo $\frac{v^2}{c^2}$ em termos do fator •, expandindo este fator em potências de v/c. Em primeira aproximação temos,

$$\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{v^2}{2c^2} \quad v<<c \tag{24}$$

Ou seja,

$$2(\gamma-1)=\frac{v^2}{c^2} \quad v<<c\ . \tag{25}$$

Substituindo este resultado na expressão da energia cinética teremos,

$$K=(\gamma-1)m_o c^2\ . \tag{26}$$

O termo à direita na equação (26), no limite de $v<<c$, se converte em $K=m_o v^2/2$, que é a expressão da energia cinética no limite newtoniano de baixas velocidades. A equação (26) nos fornece a energia cinética relativística, como obtido por Einstein em 1905, deduzida aqui de uma forma mais simples sem rigor formal, com o objetivo de ser mais didática e de fácil compreensão.

A equação (26) é frequentemente escrita na forma,

$$K+m_o c^2=\gamma\ m_o c^2\ , \tag{27}$$

com a quantidade $m_o c^2$ tendo sido interpretada por Einstein como a energia de repouso da partícula de massa m_o. A soma da energia cinética K com a energia de repouso resulta na energia total $E = K + m_o c^2$ da partícula.

A quantidade $\gamma\, m_o$ é frequentemente interpretada como a massa relativística, m, da partícula, de modo que a energia total da partícula pode ser escrita pela famosa fórmula de Einstein, $E = mc^2$. Entretanto, esta interpretação implica em uma massa dependente da velocidade, resultando em uma massa relativística diferente em diferentes referenciais inerciais. Por este motivo o termo massa relativística vem sendo abandonado, e substituído pela massa da partícula, m_o, que possui o mesmo valor em todos os referenciais e é a mesma grandeza da mecânica newtoniana.

Esta equação revolucionou a física, pois estende o conceito de energia de forma a incluir a energia armazenada na massa da partícula, assim em processos de alta energia a energia de repouso contida na massa de uma amostra radioativa pode ser convertida na soma da energia cinética e na energia de repouso das partículas resultantes do processo de decaimento.

RELATIVISTIC MECHANICS

Abstract: *in this work we present a new method of deduction of the relativistic mechanics. Unlike other texts on the subject we start from plausible arguments to deduct the relativistic velocity transformation equation between two inertial frames and we use this equation to arrive at the relativistic expressions derived by Albert Einstein in 1905.*

Keywords: *Mechanics. Physics Teaching. The Lorentz transformation.*

Referências

EINSTEIN, Albert. On the Eletrodynamics of Moving Bodies. *Annalen der Physik* 17, Alemanha, p. 132-148, 1905.

HALLIDAY, David; RESNICK, Resnick; WALKER, Jearl**.** *Fundamentos da Física*. 4.ed.Rio de Janeiro: Editora LTC, 1995. V. 4.

RESNICK, Robert. *Introdução à teoria da relatividade especial*. São Paulo: Edusp; Polígono, 1971.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R.; SEARS F.; ZEMANSKY, M.W. *Física*. 12.ed. São Paulo: Pearson, 2011. V. 4.

BERTOZZI, William. Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons. *American Journal of Physics,* v. 32, p. 551-555, 1964.

REITZ, J. R.; MILFORD, J., CHRISTY, R.W. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

* Recebido em: 05.12.2013. Aprovado em: 10.01.2014.

FRANCISCO A. P. OSÓRIO
Doutor em Física. Professor da PUC Goiás e da UFG.
E-mail: francisco.maf@pucgoias.edu.br

MÁRCIO A. R. SOUZA
Doutor em Física. Professor do IF da UFG. *E-mail*: marcio_souza@ufg.br

ANTONIO NEWTON BORGES
Doutor em Física. Professor da PUC Goiás e da UFG.
E-mail: newton@pucgoias.edu.br

PAULO CÉSAR M. MACHADO
PhD em Engenharia Elétrica. Professor da EMC da UFG.
E-mail: pcmmachado@gmail.com