

EMC
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA,
MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO



UFG
UNIVERSIDADE
FEDERAL DE GOIÁS

Ronny Clézio Dias Dos Santos

ADEQUAÇÃO DO MÉTODO DA SOMA DAS POTÊNCIAS VERSÃO
RETANGULAR CONSIDERANDO ELEMENTOS SHUNTS DE BARRA
E DE RAMOS DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Goiânia

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome completo do autor: Ronny Clezio Dias dos Santos

Título do trabalho: Adequação do Método da Soma das Potências versão retangular considerando elementos shunts de barra e de ramos de redes de distribuição

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Gelson Antonio Andrea Brigatto, Professor do Magistério Superior**, em 26/06/2025, às 18:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronny Clezio Dias Dos Santos, Discente**, em 02/07/2025, às 20:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5464796** e o código CRC **7E54B131**.

Referência: Processo nº 23070.013642/2025-15

SEI nº 5464796

EMC
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA,
MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO



UFG
UNIVERSIDADE
FEDERAL DE GOIÁS

Ronny Clézio Dias Dos Santos

ADEQUAÇÃO DO MÉTODO DA SOMA DAS POTÊNCIAS VERSÃO
RETANGULAR CONSIDERANDO ELEMENTOS SHUNTS DE BARRA
E DE RAMOS DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Monografia de Projeto Final de Curso apresentado à
Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação
da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial
para a integralização do curso em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Antônio Andréa Brigatto.

Goiânia

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Ronny Clézio Dias Dos
ADEQUAÇÃO DO MÉTODO DA SOMA DAS POTÊNCIAS VERSÃO
RETANGULAR CONSIDERANDO ELEMENTOS SHUNTS DE
BARRA E DE RAMOS DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO [manuscrito] /
Ronny Clézio Dias Dos Santos. - 2025.
xxvi, 26 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Antônio Andréa Brigatto.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de
Computação (EMC), Engenharia Elétrica, Goiânia, 2025.

Anexos.

Inclui siglas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Problema do Fluxo de Carga. 2. Método da Soma das
Potências. 3. coordenadas retangulares. 4. elementos shunts. I.
Brigatto, Gelson Antônio Andréa, orient. II. Título.

CDU 621.3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e cinco dias do mês de junho de 2025 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Adequação do Método da Soma das Potências Versão Retangular Considerando Elementos Shunts de Barra e de Ramos de Redes de Distribuição”, de autoria de Ronny Clezio Dias dos Santos, do curso de Engenharia Elétrica, da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. Dr. Gelson Antônio Andréa Brigatto (EMC/FG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Profa. Dra. Lina Paola Garces Negrete (EMC/UFG) e Prof. Dr. Igor Kopcak (EMC/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 9,5 (nove vírgula cinco), tendo sido o TCC considerado APROVADO.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Gelson Antonio Andrea Brigatto, Professor do Magistério Superior**, em 25/06/2025, às 17:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Igor Kopcak, Professor do Magistério Superior**, em 25/06/2025, às 17:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lina Paola Garces Negrete, Professor do Magistério Superior**, em 25/06/2025, às 17:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5462043** e o código CRC **38A9CC19**.

Dedico este trabalho aos meus pais, que apoiaram e ajudaram a promover esse momento; e a todos os professores, que somaram conhecimentos que neste trabalho estão explícitos e ou implícitos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Gelson Antônio Andréa Brigatto, por ter sido solícito e atencioso, e pelo auxílio na elaboração e condução do trabalho.

Agradeço à Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e Computação (EMC) da Universidade Federal de Goiás (UFG), que promoveu o necessário para que eu conquistasse a sabedoria e os conhecimentos necessários para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos professores, servidores, prestadores de serviços e colegas, que direta ou indiretamente contribuíram nessa jornada, e que de certa forma colaboraram com este trabalho.

RESUMO

A modelagem de Redes de Distribuição de Energia Elétrica (RDEE) normalmente considera os ramos das redes constituídos apenas por elementos série, o que fundamenta os algoritmos clássicos de cálculo do fluxo de carga, tal como o Método da Soma das Potências (MSP) na versão polar tradicional. Logo, a consideração do efeito *shunt* de elementos como reguladores de tensão, bancos de capacitores ou de reatores e dos efeitos capacitivos dos alimentadores exige adaptações nos métodos tradicionais. Embora a formulação do MSP em coordenadas polares considerando elementos *shunts* já tenha sido abordada na literatura, o equivalente para o MSP em coordenadas retangulares ainda carece de desenvolvimento. Este trabalho tem então como objetivo propor uma formulação que contemple elementos *shunts* no MSP versão retangular, em que as equações necessárias são desenvolvidas e testes para a avaliação do desempenho da proposta em termos de precisão e eficiência são realizados, comparando-a com abordagens consolidadas. Os testes realizados foram feitos em 3 RDEE's, sendo uma simples de 10 barras, descrita em RAO (2011); uma outra de 14 barras, descrita em CINVALAR et al. (1988); e, por fim, uma robusta de 118 barras, descrita em ZHANG (2007). Os resultados indicam que a proposta mantém a confiabilidade dos métodos conhecidos, ampliando a aplicabilidade para RDEE's com características mais abrangentes.

Palavras-chave: Problema do Fluxo de Carga, Método da Soma das Potências, coordenadas retangulares, elementos *shunts*.

ABSTRACT

The modeling of Electric Power Distribution Networks (EDNs) usually considers network branches composed solely of series elements, which supports the classical load flow calculation algorithms, such as the Sum of Power Method (SPM) in its traditional polar version. Therefore, the inclusion of shunt elements like voltage regulators, capacitor or reactor banks, and the capacitive effects of feeders requires adaptations in traditional methods. Although the SPM formulation in polar coordinates considering shunt elements has already been addressed in the literature, its equivalent in rectangular coordinates still lacks development. This work aims to propose a formulation that incorporates shunt elements into the SPM in rectangular coordinates, where the necessary equations are developed and tests are conducted to assess the performance of the proposal in terms of accuracy and efficiency, comparing it with established approaches. The tests were conducted on three EDNs: a simple 10-bus system described in RAO (2011), a 14-bus system described in CINVALAR et al. (1988), and a robust 118-bus system described in ZHANG (2007). The results indicate that the proposed method maintains the reliability of known techniques, broadening its applicability to EDNs with more comprehensive characteristics.

Keywords: Load Flow Problem, Power Sum Method, rectangular coordinates, shunt elements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1- Elementos de Rede.....	12
Figura 2.2- Convenção de injeção positiva para Corrente e Potência.	13
Figura 2.3- Modelagem de Geração e Carga.	14
Figura 2.4- Modelagem de Elementos shunt.	15
Figura 2.5- Modelagem de LT.....	17
Figura 2.6- Modelagem Genérica de um Transformador.	18
Figura 2.7- Modelagem do Transformador em Fase.	18
Figura 2.8- Modelo π para Transformadores: a) correntes; b) modelo final.	19
Figura 2.9- Fluxos de Potência num ramo $k-m$ genérico.	22
Figura 2.10- Perdas no Elemento de Ramo	23
Figura 2.11- Balanço de Correntes	23
Figura 2.12- Representação genérica de uma RDEE.	30
Figura 2.13- Ramo $k-m$ genérico de uma RDEE.	31
Figura 2.14- Ramo genérico $k-m$ para varredura direta (MSP Polar).....	33
Figura 2.15- Tensões de barra em coordenadas retangulares.	35
Figura 2.16- Ramo $k-m$ genérico para varredura direta (MSP Retangular).....	36
Figura 2.17- Ramo $k-m$ genérico com componente shunt.	38
Figura 2.18- Ramo $k-m$ genérico para varredura direta (MSP Polar Com Shunt).....	39
Figura 3.1 - Representação genérica de uma RDEE com elemento Shunt.....	44
Figura 3.2 – Ramo $k-m$ genérico para varredura inversa (MSP Retangular Com Shunt).	45
Figura 3.3 - Ramo $k-m$ genérico para varredura direta (MSP Retangular Com Shunt).	47
Figura 3.4- Fluxograma do algoritmo.	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Tipos de barras e incógnitas associadas	27
Tabela 2- Equações para solução do Subsistema 2	29
Tabela 3- Resultados do Subsistema 1 para RDEE de 10 barras.	51
Tabela 4- Resultados do Subsistema 1 para RDEE de 14 barras.	52
Tabela 5- Número médio de iterações.	53
Tabela 6- Tempo médio do processo iterativo.	53
Tabela A1- Dados de barras da RDEE de 10 barras.....	56
Tabela A2- Dados de ramos da RDEE de 10 barras.....	56
Tabela B1- Dados de barras da RDEE de 14 barras.....	57
Tabela B2- Dados de ramos da RDEE de 14 barras.....	58

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	8
1.1. Justificativa.....	8
1.2. Objetivos.....	9
1.3. Metodologia.....	9
1.4. Organização do trabalho.....	10
2. TEORIA BÁSICA.....	11
2.1. Introdução.....	11
2.2. Conceituações básicas.....	11
2.2.1. Elementos de Rede.....	11
2.2.2. Representação Por Unidade.....	12
2.2.3. Convenções de Sentidos de Correntes e Potências.....	13
2.2.4. Modelagem de Elementos de Barra.....	13
2.2.5. Modelagem de Elementos de Ramos.....	15
2.2.6. Equações Gerais de Correntes, Fluxos e Perdas de Potência.....	20
2.2.7. Equação Nodal de Rede.....	23
2.2.8. Classificação de Barras.....	25
2.2.9. Estratégia de Solução do PFC.....	28
2.3. PFC de Redes de Distribuição.....	29
2.3.1. Introdução.....	29
2.3.2. Método da Soma das Potências - Formulação Polar.....	31
2.3.3. Método da Soma das Potências - Formulação Retangular.....	34
2.3.4. Método da Soma das Potências - Formulação Polar com <i>Shunts</i>	37
2.3.5. Método Direct Load Flow com <i>Shunts</i>	40
3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO.....	44
3.1. Formulação MSP Retangular com Shunts - Varredura Inversa.....	44
3.2. Formulação MSP Retangular com Shunts - Varredura Direta.....	46
3.3. Algoritmo para implementação computacional.....	49
4. TESTES E ANÁLISES DE RESULTADOS.....	51
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	54
6. REFERÊNCIAS.....	55
7. ANEXO A - DADOS DA REDE DE 10 BARRAS.....	56
8. ANEXO B - DADOS DA REDE DE 14 BARRAS.....	57

1. INTRODUÇÃO

A crescente complexidade das Redes de Distribuição de Energia Elétrica (RDEE) e a consequente necessidade de análises mais completas, têm impulsionado o desenvolvimento de abordagens alternativas para o cálculo do fluxo de potência destas redes com características específicas. Entre os métodos alternativos, tem-se o Método da Soma das Potências (MSP), cuja formulação polar considerando a presença de elementos *shunts* se mostrou promissora, cujo detalhamento pode ser constatado em BRIGATTO (2025). Neste cenário, torna-se relevante investigar outras formas de adaptar e aplicar a formulação dos métodos de solução do fluxo de carga ao contexto das RDEE modernas, tal como o Método da Soma das Potências em sua versão retangular.

1.1. Justificativa

O estudo do fluxo de potência é essencial para a análise, operação e planejamento de sistemas elétricos. No entanto, formulações tradicionais desse método frequentemente negligenciam a representação explícita de elementos *shunts*, os quais estão presentes em diversos componentes das RDEE, como linhas de transmissão, transformadores e cargas conectadas intencionalmente, como bancos de capacitores ou de reatores.

Além disso, embora as abordagens de cálculo do fluxo de carga utilizem coordenadas polares na representação das tensões nodais, trabalhos desenvolvidos, tal como em SANTOS e BRIGATTO (2016), apontam desempenho similar do MSP em coordenadas retangulares com o MSP versão polar considerando estabilidade numérica e simplicidade de modelagem.

Nesse contexto, justifica-se o desenvolvimento de uma formulação alternativa do MSP que incorpore explicitamente os elementos *shunts* do sistema e seja expressa em coordenadas retangulares. Tal abordagem proporciona maior abrangência na modelagem dos componentes das redes elétricas e amplia a aplicabilidade do método em ambientes computacionais, especialmente em aplicações que demandam rigor matemático e estabilidade numérica.

Assim, este Trabalho de Conclusão de Curso visa preencher uma lacuna metodológica existente, mas que é justificada pelo desempenho das demais versões do MSP. Nesse sentido, o presente trabalho contribui para a diversidade das metodologias de análise do problema do fluxo de carga, com foco na complementaridade da modelagem de redes de distribuição, generalidade da formulação e compatibilidade com ferramentas computacionais.

1.2. Objetivos

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem os seguintes objetivos:

- Realizar estudos da teoria básica do problema do fluxo de carga.
- Realizar estudos do Método da Soma das Potencias (MSP) na versão clássica polar e do MSP na versão retangular desenvolvido em SANTOS E BRIGATTO (2016).
- Realizar estudos da formulação do MSP polar considerando elementos *shunts* de barra e de ramos na rede elétrica em estudo, constante em BRIGATTO (2025), e do método Direct Load Flow (DLF) com *shunts* desenvolvido em SILVA e BRIGATTO (2023).
- Desenvolver a formulação do Método da Soma das Potencias versão em coordenadas retangulares considerando elementos *shunts* de barras e de ramos, objeto de estudo deste trabalho, e implementar computacionalmente a formulação desenvolvida.
- Implementar computacionalmente as versões com *shunts* dos métodos MSP polar e DLF.
- Realizar testes para verificar a precisão e eficiência do MSP retangular com *shunts*.
- Avaliar o desempenho do MSP retangular com *shunts* com os métodos MSP polar e DLF com *shunts*, em termos de convergência, tempo e robustez.

1.3. Metodologia

A metodologia adotada neste trabalho foi estruturada em quatro etapas principais:

- Pesquisa bibliográfica: revisão da literatura sobre fluxo de potência em RDEE, focando nas formulações dos métodos de soma das potências (polar e retangular) e Direct Load Flow (DLF), bem como no problema da inserção dos elementos shunts na modelagem.
- Desenvolvimento da formulação retangular: criação de uma formulação do método da soma das potências retangular, adaptada para incluir elementos shunts de barra e ramos.
- Implementação computacional: implementação da formulação retangular em um software de simulação (MatLab), com integração dos elementos shunts, para análise de RDEE.
- Análise de resultados: realização de testes em redes elétricas com o MSP retangular com *shunts* desenvolvido e comparação dos resultados obtidos com os métodos MSP polar e DLF com *shunts*, focando em análise de precisão e tempo de processamento como critérios de desempenho, para posterior conclusão.

1.4. Organização do trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, sendo o primeiro dedicado à introdução do tema, apresentação dos objetivos e justificativa para o estudo.

O capítulo 2 aborda a teoria básica relacionada ao fluxo de potência, com ênfase na modelagem de RDEE e nos métodos utilizados para análise, incluindo a formulação polar e retangular do Método da Soma das Potências e o método Direct Load Flow com shunts.

O capítulo 3 apresenta o desenvolvimento do trabalho com a formulação proposta para a adaptação do método MSP retangular com a inclusão de elementos *shunts* de barra e de ramos, com detalhes do equacionamento e a implementação computacional da abordagem.

No capítulo 4 são apresentados os testes com redes elétricas, seguidos pela análise dos resultados e comparação da eficácia da metodologia proposta com as outras abordagens.

Por fim, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho, além de sugestões para futuras pesquisas e melhorias nos métodos de análise de RDEE.

2. TEORIA BÁSICA

2.1. Introdução

Com o intuito de apresentar o Método da Soma de Potências (MSP) com elementos *shunts* em coordenadas retangulares, objeto de estudo deste trabalho, é fundamental realizar uma revisão básica dos conhecimentos e das ferramentas que possibilitam a compreensão e o entendimento do desenvolvimento do trabalho.

Nesse contexto, é imprescindível compreender o funcionamento do Sistema Elétrico de Potência (SEP), abordando desde a conceituação dos elementos que o compõem, até as ferramentas e estratégias utilizadas no estudo do Problema do Fluxo de Carga (PFC).

Finalmente, munido desses conhecimentos, será possível entender as diversas versões do método alternativo da soma das potências, método este importante e suficiente para a análise de Redes de Distribuição de Energia Elétrica (RDEE).

2.2. Conceituações básicas

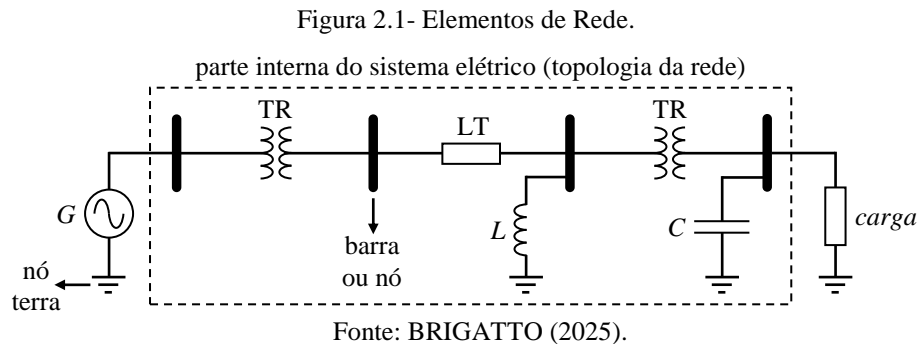
2.2.1. Elementos de Rede

No contexto do SEP, especialmente em estudos e pesquisas, é fundamental classificar os componentes, conhecidos como elementos de rede, de acordo com sua função e posição na topologia do sistema. Embora a nomenclatura possa variar, é comum na literatura técnica organizar esses elementos conforme sua conexão com a rede elétrica: elementos de barras e elementos de ramos, visualizados na representação simplificada de redes visto na Figura 2.1.

Os elementos conectados entre uma barra e o nó de referência (geralmente o nó terra) são classificados como elementos de barra. Exemplos típicos incluem elementos de geração ou carga, que são considerados como parte externa do sistema elétrico, e cuja análise foca nas suas contribuições líquidas de potência ativa e reativa nas barras. Além disso, componentes reativos ou capacitivos conectados em derivação ao nó terra também se enquadram como elementos de barra. Estes podem ser representados de forma implícita na modelagem de outros componentes do sistema, como Linhas de Transmissão (LT) ou Transformadores (TR), ou de maneira explícita, como no caso de bancos de capacitores ou de reatores instalados intencionalmente em grandes subestações. Esses componentes são denominados elementos *shunts* e fazem parte da porção interna do sistema a ser analisado (BRIGATTO, 2025).

Já os elementos de ramos são aqueles que interligam duas barras, normalmente linhas de transmissão ou distribuição e transformadores, todos modelados por parâmetros concentrados. Juntamente com os elementos *shunts*, os elementos de ramos constituem a parte interna do sistema.

A modelagem adequada desses componentes é essencial para os estudos de análise de potência, como o fluxo de carga, sendo a base para a formulação de equações que descrevem o comportamento elétrico da rede. Segundo GRAINGER e STEVENSON (1994), essa modelagem é particularmente importante na construção da matriz de admitância nodal (Y_{bus}), que representa a estrutura elétrica interligada do sistema e permite analisar o comportamento das tensões e correntes em regime permanente.



2.2.2. Representação Por Unidade

No estudo e análise de Sistemas Elétricos de Potência, é conveniente a utilização do sistema por unidade (pu), que consiste na normalização das grandezas elétricas por meio da razão entre o valor real da grandeza e um valor base previamente definido. Dessa forma, tensões, correntes, potências e impedâncias passam a ser expressas como frações de seus respectivos valores de base (MONTICELLI, 1983).

A principal justificativa para a aplicação do sistema pu reside na simplificação dos cálculos e na uniformização das grandezas ao longo do sistema, especialmente em redes que envolvem transformadores com diferentes relações de transformação. Com o uso do sistema pu, elimina-se a necessidade de referenciar impedâncias entre diferentes níveis de tensão, uma vez que a transformação de base já está implícita na normalização das grandezas. Isso contribui significativamente para a padronização dos dados e para a clareza nos estudos de fluxo de potência, facilitando tanto a formulação, quanto a implementação dos métodos de solução do problema. Além disso, os valores em pu dos parâmetros elétricos tendem a

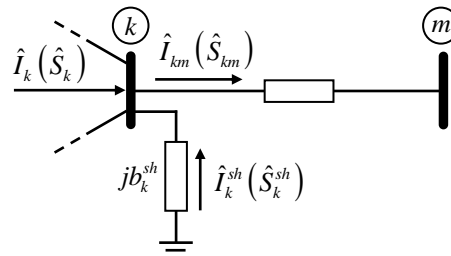
assumir valores numéricos relativamente baixos, o que favorece a estabilidade numérica e simplifica a realização de testes e implementações computacionais.

Uma vez definidos os valores de base de duas grandezas fundamentais (geralmente potência e tensão), os valores base das demais grandezas elétricas (tais como corrente e impedância) podem ser determinados de forma direta, a partir de relações fundamentais.

2.2.3. Convenções de Sentidos de Correntes e Potências

A definição do sentido de correntes e potências é relevante e necessária, visto que sentidos positivos e negativos influenciam no desenvolvimento das equações. Neste trabalho será adotado o sentido proposto em MONTICELLI (1983), cujo esquema representativo dos sentidos de injeções adotados como positivo é visto na Figura 2.2. As injeções de corrente \hat{I}_k e \hat{I}_k^{sh} são convencionadas como positivas quando entram na barra k , e a corrente \hat{I}_{km} , no sentido da barra k para m , é convencionada positiva saindo da barra k . Por consequência, as injeções de potência (\hat{S}_k e \hat{S}_k^{sh}), bem como o fluxo de potência \hat{S}_{km} , seguem a mesma convenção das injeções de correntes de barra e correntes de ramos, respectivamente.

Figura 2.2- Convenções de sinal positivo para correntes e potências.



Fonte: BRIGATTO (2025).

2.2.4. Modelagem de Elementos de Barra

No SEP, os elementos de geração e carga são modelados como potências constantes, sendo suas contribuições representadas por injeções líquidas de potência ativa e reativa nas barras do sistema. Logo, seja um gerador que injeta uma potência $\hat{S}_k^G = P_k^G + jQ_k^G$ em uma barra k e uma carga que absorve uma potência $\hat{S}_k^C = P_k^C + jQ_k^C$ da mesma barra. Com base no esquema da Figura 2.1 e na convenção de sinais adotada, a potência líquida positiva entrando na barra k é dada por:

$$\hat{S}_k = \hat{S}_k^G - \hat{S}_k^C = (P_k^G - P_k^C) + j(Q_k^G - Q_k^C) = P_k + jQ_k \quad (2.1)$$

Desta forma, a potência ativa líquida na barra k é dada por:

$$P_k = P_k^G - P_k^C \quad (2.2)$$

onde valor positivo de P_k implica em predomínio de geração de potência ativa e valor negativo implica em predomínio de consumo (carga) de potência ativa.

Da mesma forma, a potência reativa líquida na barra k é determinada por:

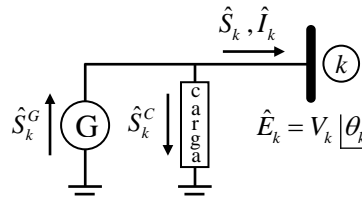
$$Q_k = Q_k^G - Q_k^C \quad (2.3)$$

onde valor positivo de Q_k implica em predomínio de geração de potência reativa e valor negativo implica em predomínio de consumo de potência reativa.

Uma vez conhecida a potência líquida \hat{S}_k^G e a tensão $\hat{E}_k = V_k \angle \theta_k$ da barra k , obtém-se a injeção de corrente líquida \hat{I}_k na barra através da seguinte relação:

$$\hat{S}_k^G = V_k \hat{I}_k^* \Rightarrow \hat{I}_k = \left(\frac{\hat{S}_k^G}{V_k} \right)^* = \frac{P_k - jQ_k}{V_k \angle -\theta_k} \quad (2.4)$$

Figura 2.3- Modelagem de geração e carga.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Já os componentes *shunts* são modelados como capacitores ou reatores em derivação, conectados ao nó de referência e que têm função de regulação de tensão através de fornecimento ou consumo de potência reativa. Na Figura 2.4 é possível ver o esquema de uma barra genérica k com um elemento *shunt* conectado ao nó terra, representado pela sua admitância $\hat{y}_k^{sh} = j b_k^{sh}$, onde b_k^{sh} é a susceptância shunt. Logo, de acordo com a convenção adotada e de acordo com a Figura 2.4, a injeção de corrente shunt \hat{I}_k^{sh} na barra k é dada por:

$$\hat{I}_k^{sh} = (0 - \hat{E}_k) \hat{y}_k^{sh} = -\hat{E}_k \hat{y}_k^{sh} = -\hat{E}_k j b_k^{sh} \quad (2.5)$$

Assim, a injeção de potência *shunt* \hat{S}_k^{sh} na barra k é dada por:

$$\hat{S}_k^{sh} = \hat{E}_k (\hat{I}_k^{sh})^* = \hat{E}_k (-\hat{E}_k j b_k^{sh})^* = \hat{E}_k \hat{E}_k^* (-j b_k^{sh})^* = V_k \angle \theta_k V_k \angle -\theta_k j b_k^{sh} = j V_k^2 b_k^{sh} \quad (2.6)$$

Dessa forma, definindo Q_k^{sh} como a potência reativa do componente conectado na barra k , de modo que $\hat{S}_k^{sh} = jQ_k^{sh}$, obtém-se que:

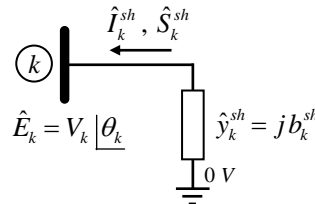
$$\hat{S}_k^{sh} = jV_k^2 b_k^{sh} = jQ_k^{sh} \Rightarrow Q_k^{sh} = V_k^2 b_k^{sh} \quad (2.7)$$

Visto que $b_k^{sh} = -1 / x_k^{sh}$, a susceptância e, por consequência, a injeção de potência shunt \hat{S}_k^{sh} , terá valor negativo para $x_k^{sh} > 0$ e valor positivo para $x_k^{sh} < 0$.

Assim, para bancos de reatores, onde $x_k^{sh} = \omega L > 0$, fazendo com que $\hat{S}_k^{sh} < 0$, a injeção de potência *shunt* é contrária ao sentido adotado e, portanto, há consumo de reativo. Para a rede, o componente *shunt* indutivo é compreendido como carga, implicando em diminuição da magnitude da tensão da barra onde está conectado.

De modo contrário, para bancos de capacitores, onde $x_k^{sh} = -1 / (\omega C) < 0$, fazendo com que $\hat{S}_k^{sh} > 0$, a injeção de potência *shunt* realmente está no sentido adotado e, portanto, há injeção de reativo. Para a rede, o componente *shunt* capacitivo é compreendido como elemento de geração de reativo, implicando no aumento da magnitude da tensão da barra onde está conectado.

Figura 2.4- Modelagem de elementos *shunts*.



Fonte: BRIGATTO (2025).

2.2.5. Modelagem de Elementos de Ramos

Os elementos de ramos são representados por uma impedância série \hat{z}_{km} , composta por sua resistência série r_{km} e sua reatância x_{km} conectada num ramo genérico $k-m$. Sendo assim, a impedância série \hat{z}_{km} é escrita da seguinte forma:

$$\hat{z}_{km} = r_{km} + j x_{km} \quad (2.8)$$

Por conveniência e facilidade nos cálculos na formulação do problema do fluxo de carga, os elementos série são modelados com base na sua admitância equivalente \hat{y}_{km} ,

composta por sua condutância g_{km} e sua susceptância b_{km} . Logo, a admitância série \hat{y}_{km} é escrita da seguinte forma:

$$\hat{y}_{km} = g_{km} + j b_{km} \quad (2.9)$$

onde:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (2.10)$$

$$b_{km} = - \frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (2.11)$$

- Linhas de Transmissão

Segundo STEVENSON (1982), linhas de transmissão são elementos de ramo que interligam duas barras, normalmente submetidas a elevadas tensões elétricas. Elas possuem como parâmetros a resistência série, a reatância série, a condutância e a capacitância em derivação. No entanto, a condutância está associada às perdas por fuga nos condutores, que geralmente são desprezadas na modelagem devido à sua baixa magnitude e à dificuldade de representação precisa, uma vez que podem ocorrer por diversos caminhos. A modelagem de uma LT leva em consideração sua classificação, que pode ser de linha curta, média ou longa.

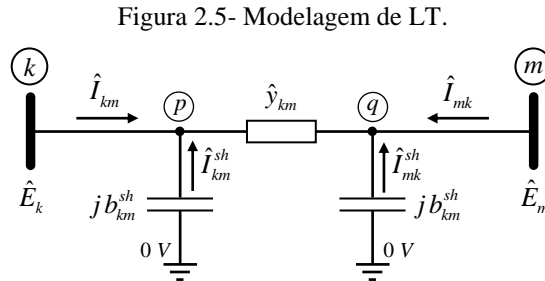
Para linhas longas, com extensão superior a aproximadamente 240 km, torna-se necessário adotar uma modelagem mais precisa, utilizando parâmetros distribuídos ao longo do comprimento da linha, a fim de representar adequadamente os efeitos elétricos envolvidos.

Já para linhas curtas e médias, é comum utilizar uma abordagem baseada em parâmetros concentrados. No caso das linhas curtas com extensão inferior a aproximadamente 80 km, normalmente considera-se apenas os elementos série (resistência e reatância), desprezando o efeito capacitivo.

De forma mais generalista, uma LT pode ser representada pelo modelo π , apropriado para linhas de comprimento médio. Esse modelo considera a resistência e a reatância série da linha, além do efeito capacitivo, representado por uma capacitância dividida igualmente entre as extremidades da LT e conectadas a cada barra.

Os componentes série de uma LT, conectada entre duas barras genéricas k e m , podem ser escritos conforme visto anteriormente, através da admitância série \hat{y}_{km} . Já o efeito capacitivo também é modelado através da sua admitância *shunt* equivalente $j b_{km}^{sh}$ em cada barra do ramo, de forma que a susceptância *shunt* b_{km}^{sh} corresponde à metade da susceptância

shunt total b_{km}^{shT} da linha, ou seja, $b_{km}^{sh} = b_{km}^{shT} / 2$, tal como descrito no esquema representativo da LT mostrado na Figura 2.5.



Fonte: BRIGATTO (2025).

A corrente que sai da barra k em direção à barra m , definida como \hat{I}_{km} , pode ser determinada aplicando Lei de Kirchoff das correntes (LKC) no nó p , cujo desenvolvimento resulta na seguinte equação:

$$\hat{I}_{km} = (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km})\hat{E}_k - \hat{y}_{km}\hat{E}_m \quad (2.12)$$

De forma análoga, aplicando LKC no nó q , a corrente que sai da barra m em direção à barra k , definida como \hat{I}_{mk} , é dada por:

$$\hat{I}_{mk} = -\hat{y}_{km}\hat{E}_k + (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km})\hat{E}_m \quad (2.13)$$

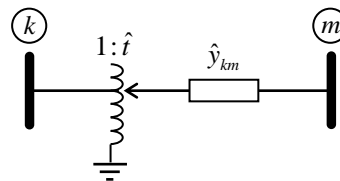
- Transformadores

O Transformador (TR) é um componente de ramo do SEP que se destaca por sua simplicidade construtiva e por sua alta significância. Essa importância se deve à sua capacidade de tornar viável e econômica a transmissão e a distribuição de energia elétrica, permitindo o transporte em altos níveis de tensão e a utilização em níveis adequados de operação para os dispositivos finais (FITZGERALD et al., 2014).

Na modelagem dos transformadores, considera-se a resistência equivalente dos enrolamentos e a reatância equivalente de dispersão, aqui representados como um admitância série. Além disso, no modelo dos transformadores há também o ramo de excitação, caracterizado por apresentar uma alta impedância e baixa corrente de excitação. Esse ramo, no entanto, pode ser desprezado em muitos estudos de casos, especialmente na modelagem de transformadores de potência, devido à sua influência ser pouco significativa sobre o comportamento global do equipamento (FITZGERALD et al., 2014).

Na Figura 2.6 é apresentada uma representação de um transformador conectado entre duas barras genéricas k e m , onde é indicada sua admitância série \hat{y}_{km} e sua relação de transformação $1:\hat{t}$, sendo \hat{t} um número complexo $\hat{t} = a_{km} \angle \varphi_{km}$. Ou seja, o transformador não somente tem a capacidade de alterar a magnitude da tensão nas barras, mas também alterar intencionalmente o ângulo da tensão nas barras.

Figura 2.6- Modelagem genérica de um transformador.

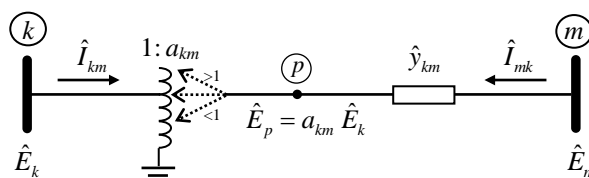


Fonte: BRIGATTO (2025).

Caso haja alteração tanto na magnitude como no ângulo da tensão, o transformador é dito de forma geral como defasador. Há aplicações particulares, tal como onde não há alteração na magnitude da tensão, mas ainda há alteração no ângulo, o que classifica o transformador como defasador puro. Ainda, há também a aplicação recíproca, ou seja, há alteração na magnitude da tensão, mas o ângulo permanece inalterado ($\varphi_{km} = 0$), o que define o transformador em fase. Esse último será tratado com mais detalhes adiante.

Tal como mencionado, no transformador em fase, $\varphi_{km} = 0$, fazendo com que a relação de transformação se resuma em $1:\hat{t} = 1:a_{km}$. Assim, se numa barra genérica k a tensão elétrica é \hat{E}_k , a tensão num ponto p qualquer após o transformador será $\hat{E}_p = a_{km} \hat{E}_k$. Na Figura 2.7 é apresentado o esquema representativo do transformador em fase, bem como as grandezas pertinentes (tensões e correntes).

Figura 2.7- Modelagem do transformador em fase.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Analisando-se a Figura 2.7, observa-se que a corrente \hat{I}_{mk} , no sentido da barra m para a barra k , é dada por:

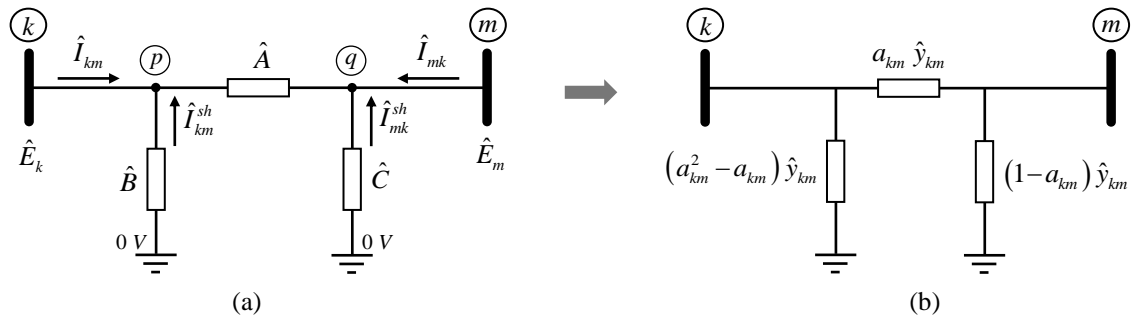
$$\hat{I}_{mk} = (\hat{E}_m - \hat{E}_p) \hat{y}_{km} = (\hat{E}_m - a_{km} \hat{E}_k) \hat{y}_{km} = -a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_k + \hat{y}_{km} \hat{E}_m \quad (2.14)$$

Assumindo o transformador ideal, ou seja, sem perdas internas, a potência que entra no transformador deve ser a mesma que sai. Logo, $\hat{S}_{km} = -\hat{S}_{pk}$, de forma que:

$$\hat{I}_{km} = a_{km}^2 \hat{y}_{km} \hat{E}_k - a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_m \quad (2.15)$$

Analisando as equações (2.14) e (2.15), nota-se que os coeficientes de \hat{E}_k em \hat{I}_{mk} e \hat{E}_m em \hat{I}_{km} são iguais. Com isso, é possível modelar o transformador em fase por um modelo π equivalente. Portanto, seja um transformador conectado entre duas barras genéricas k e m ilustrada na Figura 2.8-a, onde \hat{A} é uma admitância que faz referência ao elemento série e \hat{B} e \hat{C} são admitâncias que representam os elementos *shunts* conectados em derivação em cada barra e que modelam a alteração da magnitude da tensão das barras do ramo k - m .

Figura 2.8- Modelo π para transformadores: a) correntes; b) modelo final.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Aplicando LKC ao nó p , determina-se que:

$$\hat{I}_{km} = (\hat{A} + \hat{B}) \hat{E}_k - \hat{A} \hat{E}_m \quad (2.16)$$

De forma análoga, aplicando LKC ao nó q , determina-se que:

$$\hat{I}_{mk} = -\hat{A} \hat{E}_k + (\hat{A} + \hat{C}) \hat{E}_m \quad (2.17)$$

Logo, comparando as Equações (2.15) e (2.16), conclui-se que:

$$\hat{A} = a_{km} \hat{y}_{km} \quad (2.18)$$

$$\hat{B} = (a_{km}^2 - a_{km}) \hat{y}_{km} \quad (2.19)$$

Por fim, de posse dos resultados e comparando as Equações (2.14) e (2.17), tem-se:

$$\hat{C} = (1 - a_{km}) \hat{y}_{km} \quad (2.20)$$

Uma vez definidas as admitâncias \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , em termos de a_{km} e \hat{y}_{km} , é possível substituí-las no esquema, chegando ao modelo π final, ilustrado na Figura 2.8-b.

Para análise do efeito do tap do transformador, é conveniente simplificar a impedância série do transformador, tornando-a puramente indutiva, de forma que $z_{km} = j x_{km} \Rightarrow \omega L > 0$. Por consequência, a admitância série do transformador, dada por $\hat{y}_{km} = 1 / \hat{z}_{km} = -j1 / x_{km}$, cujo módulo é dado por $y_{km} = -1 / x_{km}$. Dessa forma, os módulos das admitâncias *shunts* serão: $B = (a_{km} - a_{km}^2) / x_{km}$ e $C = (a_{km} - 1) / x_{km}$. Assim, o sinal das admitâncias dependerá exclusivamente do valor de a_{km} :

- Se $a_{km} > 1$, $B < 0$ e $C > 0$, o que implica que a admitância \hat{B} tem efeito indutivo na barra k , enquanto que a admitância \hat{C} tem efeito capacitivo na barra m . Ou seja, a magnitude da tensão tende a diminuir na barra k , devido ao caráter de consumo de reativo da admitância \hat{B} , enquanto que a magnitude da tensão tende a aumentar na barra m , devido ao caráter de geração de reativo da admitância \hat{C} .
- Se $a_{km} < 1$, $B > 0$ e $C < 0$, o que implica que a admitância \hat{B} tem efeito capacitivo na barra k , enquanto que a admitância \hat{C} tem efeito indutivo na barra m . Ou seja, a magnitude da tensão tende a aumentar na barra k , devido ao caráter de geração de reativo da admitância \hat{B} , enquanto que a magnitude da tensão tende a diminuir na barra m , devido ao caráter de consumo de reativo da admitância \hat{C} .
- Se $a_{km} = 1$, $B = 0$ e $C = 0$, então não tem alteração na magnitude da tensão nas barras devido ao tap do transformador, e o modelo π se reduz apenas à admitância série \hat{y}_{km} .

2.2.6. Equações Gerais de Correntes, Fluxos e Perdas de Potência

- Equações Gerais de Correntes

Resgatando as equações das correntes de ramos em linhas de transmissão e transformadores em fase, no sentido da barra k para a barra m , reescritas a seguir:

- Equação (2.12): $\hat{I}_{km} = (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_k - \hat{y}_{km} \hat{E}_m$, para linhas de transmissão;

- Equação (2.15): $\hat{I}_{km} = a_{km}^2 \hat{y}_{km} \hat{E}_k - a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_m$, para transformadores.

Nota-se, por inspeção, que se pode escrever a corrente de ramo, no sentido da barra k para a barra m , de forma generalista da seguinte forma:

$$\hat{I}_{km} = (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \quad (2.21)$$

De forma análoga, resgatando as equações das correntes de ramos em linhas de transmissão e transformadores em fase, no sentido da barra m para a barra k :

- Equação (2.13): $\hat{I}_{mk} = -\hat{y}_{km} \hat{E}_k + (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m$, para linhas de transmissão;

- Equação (2.14): $\hat{I}_{mk} = -a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_k + \hat{y}_{km} \hat{E}_m$, para transformadores.

Assim, a corrente de ramo, no sentido da barra m para a barra k , pode ser escrita de forma generalista da seguinte forma:

$$\hat{I}_{mk} = (-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \quad (2.22)$$

- Equações Gerais de Fluxos de Potência Ativa e Reativa

Uma vez definidas as equações gerais de correntes de ramos, é possível definir as equações gerais de fluxos de potência. Seja o esquema de tensões, correntes e fluxos ilustrado na Figura 2.9. De acordo com a convenção de sinal adotada anteriormente e com base na Equação (2.21), o fluxo de potência \hat{S}_{km} que flui da barra k para a barra m é dado por:

$$\hat{S}_{km} = \hat{E}_k \hat{I}_{km}^* = \hat{E}_k \left((jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \right)^*$$

tal que, desenvolvendo a equação acima, chega-se ao seguinte resultado:

$$\hat{S}_{km} = -jV_k^2 b_{km}^{sh} + a_{km}^2 V_k^2 (g_{km} - jb_{km}) - V_k V_m \underline{|\theta_k - \theta_m|} a_{km} (g_{km} - jb_{km})$$

Define-se θ_{km} como a abertura angular referente à diferença angular entre os ângulos das tensões das barras k e m , tem-se que a equação se resume a:

$$\hat{S}_{km} = -jV_k^2 b_{km}^{sh} + a_{km}^2 V_k^2 (g_{km} - jb_{km}) - V_k V_m \underline{|\theta_{km}|} a_{km} (g_{km} - jb_{km})$$

Reescrevendo a abertura angular na forma $\underline{|\theta_{km}|} = \cos \theta_{km} + j \text{sen} \theta_{km}$:

$$\hat{S}_{km} = -jV_k^2 b_{km}^{sh} + a_{km}^2 V_k^2 (g_{km} - jb_{km}) - a_{km} V_k V_m (\cos \theta_{km} + j \text{sen} \theta_{km}) (g_{km} - jb_{km})$$

Visto que $\hat{S}_{km} = P_{km} + jQ_{km}$, pode-se separar as componentes real e imaginária da equação acima e definir os fluxos de potência ativa P_{km} e potência reativa Q_{km} , tal que:

$$P_{km} = a_{km}^2 V_k^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} - a_{km} V_k V_m b_{km} \text{sen} \theta_{km} \quad (2.23)$$

$$Q_{km} = -V_k^2 (b_{km}^{sh} + a_{km}^2 b_{km}) - a_{km} V_k V_m g_{km} \text{sen} \theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} \quad (2.24)$$

Como b_{km}^{sh} está presente somente em linhas de transmissão e, nesse caso, $a_{km} = 1$, pode-se multiplicar o termo b_{km}^{sh} por a_{km}^2 sem que comprometa a equação, de forma que a Equação (2.24) fique da seguinte forma:

$$Q_{km} = -a_{km}^2 V_k^2 (b_{km}^{sh} + b_{km}) - a_{km} V_k V_m g_{km} \text{sen}\theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \text{cos}\theta_{km} \quad (2.25)$$

De forma análoga, a partir da Equação (2.22), é possível obter o fluxo de potência \hat{S}_{mk} , no sentido da barra m para a barra k :

$$\hat{S}_{mk} = \hat{E}_m \hat{I}_{mk}^* = \hat{E}_m \left((-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \right)^*$$

tal que, desenvolvendo a equação acima, chega-se ao seguinte resultado:

$$\hat{S}_{mk} = -j V_m^2 b_{km}^{sh} + V_m^2 (g_{km} - j b_{km}) - a_{km} V_k V_m \underline{-\theta_{km}} (g_{km} - j b_{km})$$

Considerando que $\text{cos}(-\theta_{km}) = \text{cos}\theta_{km}$ e $\text{sen}(-\theta_{km}) = -\text{sen}\theta_{km}$ e desenvolvendo a equação acima, obtém-se que:

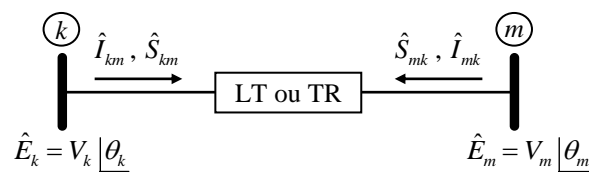
$$\hat{S}_{mk} = -j V_m^2 b_{km}^{sh} + V_m^2 (g_{km} - j b_{km}) - a_{km} V_k V_m (\text{cos}\theta_{km} - j \text{sen}\theta_{km}) (g_{km} - j b_{km})$$

Analogamente, visto que $\hat{S}_{mk} = P_{mk} + j Q_{mk}$, é possível separar as componentes real e imaginária de \hat{S}_{mk} , a fim de se obter os fluxos de potências ativa P_{mk} e reativa Q_{mk} , tal que:

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \text{cos}\theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \text{sen}\theta_{km} \quad (2.26)$$

$$Q_{mk} = -V_m^2 (b_{km}^{sh} + b_{km}) + a_{km} V_k V_m g_{km} \text{sen}\theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \text{cos}\theta_{km} \quad (2.27)$$

Figura 2.9- Fluxos de potência num ramo k - m genérico.



Fonte: BRIGATTO (2025).

- Equações Gerais de Perdas de Potência Ativa e Reativa de Ramos

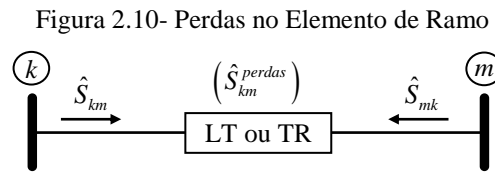
Analisando em pares as equações (2.23) e (2.26), para potência ativa, e (2.25) e (2.27) para potência reativa, nota-se que não há anulamento e, portanto, os fluxos de potência não são opostamente iguais. Isso decorre devido as perdas na admitância série \hat{y}_{km} presente no ramo k - m , definida por: $\hat{S}_{km}^{perdas} = \hat{S}_{km} + \hat{S}_{mk} = P_{km}^{perdas} + j Q_{km}^{perdas}$. Logo, somando as potências

ativas e reativas, ou seja, somando aos pares as Equações (2.23) e (2.26) e as Equações (2.25) e (2.27), obtém-se as seguintes equações de perdas no ramo k - m :

$$P_{km}^{perdas} = P_{km} + P_{mk} = (a_{km}^2 V_k^2 + V_m^2) g_{km} - 2 a_{km} V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} \quad (2.28)$$

$$Q_{km}^{perdas} = Q_{km} + Q_{mk} = -(a_{km}^2 V_k^2 + V_m^2) (b_{km}^{sh} + b_{km}) + 2 a_{km} V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} \quad (2.29)$$

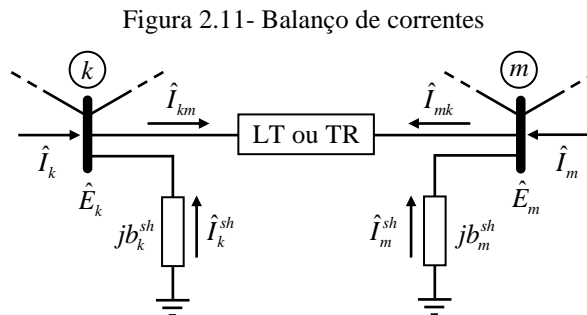
Na Figura 2.10 é apresentado a visualização do esquema representando as perdas em um elemento de ramo genérico k - m , bem como os fluxos nas duas direções no ramo.



Fonte: BRIGATTO (2022).

2.2.7. Equação Nodal de Rede

Tal como tem sido calculado, a aplicação da LKC em uma determinada barra permite relacionar correntes com tensões, de forma que haja um balanço de correntes. De forma generalista, pode-se considerar a injeção de corrente numa barra oriunda de vários ramos, tal como está representando na Figura 2.11 a seguir:



Fonte: BRIGATTO (2025).

Para o ramo genérico k - m , a corrente líquida \hat{I}_k , somada à corrente shunt \hat{I}_k^{sh} , deve ser igual à soma de todas as correntes que fluem por ramos que possuem a barra k como um de seus terminais. Desta forma, seja Ω_k o conjunto de todas as barras conectadas à barra k , com exceção da própria barra k . Logo, aplicando LKC na barra k , obtém-se que:

$$\hat{I}_k = \left(j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_k + \left(\sum_{m \in \Omega_k} (-a_{km} \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_m \quad (2.30)$$

De forma análoga, considerando Ω_m como o conjunto de todas as barras conectadas à barra m , com exceção da própria barra m , e aplicando LKC na barra m , obtém-se que:

$$\hat{I}_m = \left(\sum_{k \in \Omega_m} (-a_{km} \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_k + \left(j b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_m \quad (2.31)$$

Para um sistema elétrico que contém NB barras, é possível escrever a equação de balanço de corrente para todas as barras, de forma que o conjunto de equações possa ser escrito através de uma matriz, assim como representado a seguir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{I}_k \\ \vdots \\ \hat{I}_m \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{I}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) & \cdots & & -a_{km} \varphi_{km} \hat{y}_{km} & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \cdots & -a_{km} \varphi_{km} \hat{y}_{km} & \cdots & j b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) & \cdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{Y}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{E}_k \\ \vdots \\ \hat{E}_m \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{E}}$$

Como pode ser observado, é possível definir o vetor de injeções líquidas de corrente complexas $[\hat{I}]$ ($NB \times 1$) e o vetor de tensões complexas $[\hat{E}]$ ($NB \times 1$), que se relacionam através da chamada matriz admitância nodal $[\hat{Y}]$ ($NB \times NB$) da seguinte forma:

$$[\hat{I}] = [\hat{Y}][\hat{E}] \quad (2.32)$$

A matriz $[\hat{Y}]$ é composta pelos chamados elementos primitivos, que são os elementos de ramos e *shunts* (\hat{y}_{km} , b_k^{sh} , b_{km}^{sh} e b_{km}^{sh}), além dos demais parâmetros, que nesse trabalho se resume apenas no tap do transformador em fase a_{km} . De forma simplificada, a matriz $[\hat{Y}]$ representa a topologia da rede em análise, de forma que seus elementos sejam dados por:

$$\hat{Y}_{kk} = j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) = j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 (g_{km} + j b_{km})) \quad (2.33)$$

$$\hat{Y}_{km} = -a_{km} \hat{y}_{km} = -a_{km} (g_{km} + j b_{km}) \quad (2.34)$$

$$\hat{Y}_{mk} = -a_{km} \hat{y}_{km} = -a_{km} (g_{km} + j b_{km}) \quad (2.35)$$

$$\hat{Y}_{mm} = j b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) = j b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (j b_{km}^{sh} + (g_{km} + j b_{km})) \quad (2.36)$$

Como os componentes da matriz $[\hat{Y}]$ são complexos, é possível reescrevê-la na forma $[\hat{Y}] = [G] + j[B]$, onde $[G]$ é a matriz condutância nodal e $[B]$ é a matriz susceptância nodal. Assim, separando os componentes reais da matriz $[\hat{Y}]$, é possível obter a matriz $[G]$, tal que seus componentes sejam:

$$G_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} a_{km}^2 g_{km} \quad (2.37)$$

$$G_{km} = -a_{km} g_{km} \quad (2.38)$$

$$G_{mk} = -a_{km} g_{km} \quad (2.39)$$

$$G_{mm} = \sum_{k \in \Omega_m} g_{km} \quad (2.40)$$

De forma análoga, separando os componentes imaginários da matriz $[\hat{Y}]$, é possível obter a matriz $[B]$, tal que seus componentes sejam:

$$B_{kk} = b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (b_{km}^{sh} + a_{km}^2 b_{km}) \quad (2.41)$$

$$B_{km} = -a_{km} b_{km} \quad (2.42)$$

$$B_{mk} = -a_{km} b_{km} \quad (2.43)$$

$$B_{mm} = b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (b_{km}^{sh} + b_{km}) \quad (2.44)$$

Nota-se que tanto a matriz $[\hat{Y}]$ como as matrizes $[G]$ e $[B]$ são simétricas, que decorre pelo fato do transformador aqui adotado é do tipo não defasador. Caso contrário, os componentes fora da diagonal principal seriam diferentes, tornando-as assimétricas.

2.2.8. Classificação de Barras

Analisando a Equação (2.30) ou (2.30), nota-se que a equação de balanço de correntes para uma barra genérica k pode ser expressa em termos da do elemento principal \hat{Y}_{kk} , como também pela somatória dos elementos fora da diagonal principal \hat{Y}_{km} ($m \in \Omega_k$), de forma que:

$$\hat{I}_k = \underbrace{\left(j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \right)}_{\hat{Y}_{kk}} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \underbrace{(-a_{km} \hat{y}_{km})}_{\hat{Y}_{km}} \hat{E}_m \Rightarrow \hat{I}_k = \hat{Y}_{kk} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \hat{Y}_{km} \hat{E}_m$$

Considerando os elementos $\hat{Y}_{kk} = G_{kk} + jB_{kk}$ e $\hat{Y}_{km} = G_{km} + jB_{km}$, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\hat{I}_k = (G_{kk} + jB_{kk})\hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} + jB_{km})\hat{E}_m$$

Assim, é possível definir a injeção de potência líquida \hat{S}_k em uma barra genérica k em termos dos elementos da matriz admitância nodal:

$$\hat{S}_k = V_k^2 (G_{kk} - jB_{kk}) + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (\cos \theta_{km} + j \operatorname{sen} \theta_{km}) (G_{km} - jB_{km})$$

Visto que $\hat{S}_k = P_k + jQ_k$ e separando as partes real e imaginária do resultado, as injeções de potência ativa P_k e potência reativa Q_k numa barra genérica k são dadas por:

$$P_k = V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \quad (2.45)$$

$$Q_k = -V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.46)$$

As equações (2.45) e (2.46) definem as equações básicas do problema do fluxo de carga (PFC) e expressam os balanços de potência de barras, em que as injeções líquidas de potência ativa P_k e potência reativa Q_k injetadas em cada barra k correspondem à somatória dos fluxos de potência nos ramos que tem a barra k como um de seus terminais. De forma implícita, a potência *shunt* está contida em Q_k através do termo B_{kk} .

A análise das equações básicas do PFC mostra que o cálculo do balanço de potência para cada barra k é dependente das variáveis dos estados das tensões de barra e das injeções líquidas de potência, tal que, para cada barra k , estarão associadas as seguintes variáveis:

- V_k : módulo ou magnitude da tensão complexa de barra;
- θ_k : ângulo de fase da tensão complexa de barra;
- P_k : injeção de potência ativa;
- Q_k : injeção de potência reativa.

A referência de tensão da rede provém do nó terra, quando há elementos *shunts* presentes, ou ao menos por uma barra com tensão V_k conhecida. Ainda, também é necessária uma referência angular proveniente de alguma barra com o ângulo de fase θ_k conhecido.

Para fechamento do balanço de potência, requer-se escolher uma barra com injeções líquidas de potência desconhecidas, visto que é necessário antes calcular as perdas nos ramos, e estas dependem dos fluxos de potência que são dependentes do estado das tensões de barra.

Enfim, conclui-se que, para uma barra genérica k qualquer, existem 2 equações com 4 incógnitas, de forma que seja necessário conhecimento de ao menos 2 incógnitas para que a solução seja compatível e as outras 2 incógnitas sejam definidas, tal que cada barra pode ser classificada de acordo com as incógnitas que se conhece e as que se deve determinar:

- Barra PQ: barra a qual são conhecidos os valores das injeções líquidas de potência ativa P_k e potência reativa Q_k , ou seja, são dados do problema. Em contrapartida, se desconhece os valores da magnitude de tensão V_k e ângulo de fase θ_k da barra. Comumente, são chamadas também de barra de carga, em que P_k e Q_k são constantes e invariantes com a tensão ou, ainda, são chamadas de barra de geração em que o elemento gerador não possua capacidade suficiente de regulação ou controle de tensão.
- Barra PV: a injeção líquida de potência ativa P_k e a magnitude da tensão V_k são conhecidas, ficando a injeção líquida de potência reativa Q_k e o ângulo de fase θ_k como incógnitas a serem obtidas. A este tipo de barra estão conectados elementos geradores capazes de manter constante ou controlar a tensão mesmo em situações de instabilidade da rede, tal como variação abrupta de carga ou curto-circuito.
- Barra V θ : por fim, para esse tipo de barra, tem-se que V_k e θ_k são conhecidas da rede e P_k e Q_k precisam ser calculadas. É denominada também como barra de referência ou “slack”, sendo a única na rede e cuja contribuição se resume em fornecer referência angular para o sistema elétrico, bem como para realizar o fechamento do balanço de potência.

Resumidamente, para uma rede elétrica em análise com NB barras, está associada à cada barra 4 incógnitas, sendo 2 conhecidas e 2 a serem determinadas. Portanto, há um total de $2NB$ equações, com $2NB$ incógnitas que entram como dados e $2NB$ incógnitas a definir. Na Tabela 1 é possível ver, resumidamente, os tipos de barras e suas incógnitas.

Tabela 1- Tipos de barras e incógnitas associadas

Tipo de barra	Notação	Dados	Incógnitas
Barra de carga	PQ ou 0	P_k e Q_k	V_k e θ_k
Barra de tensão controlada	PV ou 1	P_k e V_k	Q_k e θ_k
Barra de referência angular	V θ ou 2	V_k e θ_k	P_k e Q_k

Fonte: próprio autor.

2.2.9. Estratégia de Solução do PFC

Seja uma rede com NB barras, composta por NPQ barras do tipo PQ, NPV barras do tipo PV e 1 barra do tipo V θ , de forma que $NB = NPQ + NPV + 1$. Como para cada barra há 2 equações do PFC, conclui-se que há, no total, $2NB = 2NPQ + 2NPV + 2$ equações básicas. Ainda, como há 4 incógnitas para cada equação, há, no total, $4NB = 4NPQ + 4NPV + 4$ incógnitas, sendo $2NB = 2NPQ + 2NPV + 2$ incógnitas conhecidas (dados) e $2NB = 2NPQ + 2NPV + 2$ incógnitas a serem resolvidas. No entanto, conforme já visto, as incógnitas P_k e Q_k dependem do estado da rede, isto é, dependem de V_k e θ_k , de forma que é preciso antes solucionar estas das últimas para enfim resolver todo o sistema. Com isso, faz-se necessária separação da solução do PFC através de dois subsistemas, conforme detalhado a seguir:

- Subsistema 1

Nesta etapa é calculado o estado de tensão (V_k e θ_k) para cada barra que possua estas variáveis desconhecidas, ou seja, obtém-se V_k para NPQ barras e θ_k para $NPV + NPQ$ barras, totalizando $2NPQ + NPV$ incógnitas. Para realizar o procedimento da solução, é necessário o conhecimento de P_k de $NPQ + NPV$ barras e Q_k de NPQ barras, totalizando $2NPQ + NPV$ equações e coincidindo numericamente com o número de incógnitas do problema. Dessa forma, para um sistema elétrico em estudo, a solução do subsistema 1 do problema do fluxo de carga se resume em obter o estado das tensões de barras desconhecido do sistema.

Como a relação entre tensão e potência não é linear e o número de barras de redes elétricas é normalmente grande, é necessário empregar um método de cálculo iterativo, bem como adotar uma tolerância ao erro e um critério de parada para o algoritmo iterativo.

No caso de redes de distribuição, como estas possuem tipicamente baixas relações X/R e podem ter associados ramos de elevada e baixa impedância em sua topologia (representação de chaves, pequenos trechos de linha, etc.), esta característica causa valores muito díspares entre os elementos da matriz admitância da rede, o que por conseguinte pode resultar em um mal-condicionamento da matriz jacobiana utilizada no método de Newton-Raphson, o que pode causar a divergência do método ou um maior esforço computacional devido ao elevado número de iterações. Assim, para o cálculo do subsistema 1 de RDEE, são normalmente empregados métodos mais adequados às características destas redes, tais como o algoritmo

fundamentado em um processo de varredura direta e inversa dos ramos da rede conhecido como Método da Soma das Potências ou MSP (BROADWATER, 1988) e o algoritmo baseado em uma formulação matricial denominado método *direct load flow* (TENG, 2003).

- Subsistema 2:

O subsistema 2 consiste na determinação das demais incógnitas do PFC, ou seja, P_k e Q_k para barras do tipo $V\theta$ e Q_k para barras do tipo PV, além de outras informações de interesse, como potências *shunt*, fluxos de potência de ramos e perdas. Logo, tendo já determinado V_k e θ_k para todas as barras da rede, a solução do subsistema 2 e demais cálculos se dão de forma trivial através de solução algébrica direta a partir equações aqui já formuladas, conforme está resumido na Tabela 2:

Tabela 2- Equações para solução do Subsistema 2

Incógnita a ser calculada	Equação
Injeção líquida de potência ativa P_k	2.45
Injeção líquida de potência reativa Q_k	2.46
Fluxo de potência ativa P_{km}	2.23
Fluxo de potência reativa Q_{km}	2.25
Fluxo de potência ativa P_{mk}	2.26
Fluxo de potência reativa Q_{mk}	2.27
Perdas de potência ativa P_{km}^{perdas}	2.28
Perdas de potência reativa Q_{km}^{perdas}	2.29
Potência reativa <i>shunt</i> Q_k^{shunt}	2.7

Fonte: próprio autor.

2.3. PFC de Redes de Distribuição

2.3.1. Introdução

As Redes de Distribuição de Energia Elétrica constituem a etapa final do processo de fornecimento de energia, sendo responsáveis por transportar a eletricidade da subestação (chamada barra fonte, nó raiz ou S/E) até os consumidores finais. Normalmente, uma S/E é

métodos baseados em varreduras diretas e inversas se mostram mais eficientes, sendo mais estáveis, rápidos e com menor demanda computacional.

2.3.2. Método da Soma das Potências - Formulação Polar

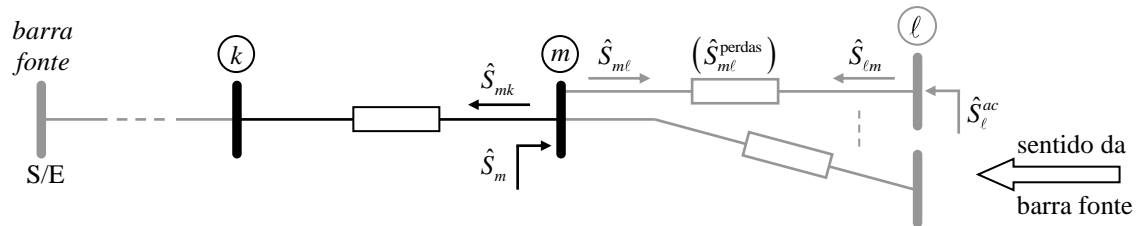
O Método da Soma das Potências (MSP) consiste numa formulação em termos de potências e, tal como dito anteriormente, se dá mediante processos de varredura de ramos e de barras, que são suficientemente repetidas até que um critério de parada seja satisfeito:

- Varredura inversa

Varredura inversa se trata do processo acumulativo de potências ativa e reativa nas barras, partindo da barra terminal mais distante até a barra fonte, excluindo esta.

Para exemplificação da varredura inversa, seja o ramo genérico k - m de uma RDEE mostrado na Figura 2.13, onde a barra m situa-se mais distante da S/E que a barra k .

Figura 2.13- Ramo k - m genérico de uma RDEE.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Partindo das barras terminais e indo em direção à barra fonte, define-se como acúmulo de potências na barra m como a soma de todas as potências incidentes na barra m , com exceção do fluxo que flui no sentido da barra m para k no ramo k - m . Ainda, define-se como Φ_m o conjunto de todas as barras situadas imediatamente a jusante da barra m . Com base na Figura 2.13 e na convenção de sentidos adotada aqui nesse trabalho, a potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m corresponde à injeção líquida de potência \hat{S}_m da barra m , subtraída do somatório dos fluxos de potência $\hat{S}_{m\ell}$, $\ell \in \Phi_m$, de forma que:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} \quad (2.49)$$

Conforme visto na Equação (2.1), \hat{S}_m é obtida a partir da subtração entre geração e carga na barra. Já o fluxo $\hat{S}_{m\ell}$ pode ser obtido a partir do desenvolvimento da equação geral

de perdas. Conforme visto, as perdas $\hat{S}_{m\ell}^{perdas}$ no ramo $m-\ell$ é dado pela soma entre os fluxos $\hat{S}_{m\ell}$ e $\hat{S}_{\ell m}$. Como ilustrado na Figura 2.13, o fluxo $\hat{S}_{\ell m}$ corresponde à potência \hat{S}_{ℓ}^{ac} acumulada na barra $\ell \in \Phi_m$. Portanto, o fluxo $\hat{S}_{m\ell}$ é dado por:

$$\hat{S}_{m\ell}^{perdas} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_{\ell m} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_{\ell}^{ac} \Rightarrow \hat{S}_{m\ell} = \hat{S}_{m\ell}^{perdas} - \hat{S}_{\ell}^{ac} \quad (2.50)$$

Desta forma, aplicando o resultado da Equação (2.50) na Equação (2.49), tem-se:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} = \hat{S}_m - \sum_{\ell \in \Phi_m} (\hat{S}_{m\ell}^{perdas} - \hat{S}_{\ell}^{ac}) = \hat{S}_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} (\hat{S}_{\ell}^{ac} - \hat{S}_{m\ell}^{perdas}) \quad (2.51)$$

Analisando a Equação (2.51), nota-se que o sinal negativo para as perdas nos ramos induz a pensar que estas são descontadas das potências acumuladas nas barras. Todavia, as barras das RDEE são barras de carga (tipo PQ) e, portanto, as injeções líquidas de potência possuem sinal negativo. Dito isso, a potência acumulada numa barra m se dá pela soma de todas as potências à jusante da barra m , incluindo as perdas.

Reescrevendo os componentes da Equação (2.51) em coordenadas retangulares, ou seja, $\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + jQ_m^{ac}$, $\hat{S}_m = P_m + jQ_m$, $\hat{S}_{\ell}^{ac} = P_{\ell}^{ac} + jQ_{\ell}^{ac}$ e $\hat{S}_{m\ell}^{perdas} = P_{m\ell}^{perdas} + jQ_{m\ell}^{perdas}$, tem-se:

$$P_m^{ac} + jQ_m^{ac} = (P_m + jQ_m) + \sum_{\ell \in \Phi_m} ((P_{\ell}^{ac} + jQ_{\ell}^{ac}) - (P_{m\ell}^{perdas} + jQ_{m\ell}^{perdas}))$$

Separando as partes real e imaginária da equação obtida acima, define-se então que:

$$P_m^{ac} = P_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} (P_{\ell}^{ac} - P_{m\ell}^{perdas}) \quad (2.52)$$

$$Q_m^{ac} = Q_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} (Q_{\ell}^{ac} - Q_{m\ell}^{perdas}) \quad (2.53)$$

Na sua formulação básica, o MSP polar desconsidera o efeito do tap do transformador ($a_{m\ell} = 1$), bem como a presença de elementos shunt ($b_{m\ell}^{sh} = 0$). Assim, adaptando as equações (2.28) e (2.29), tem-se que as perdas de potência ativa e reativa no ramo $m-\ell$ se resumem a:

$$P_{m\ell}^{perdas} = g_{m\ell} (V_m^2 + V_{\ell}^2) - 2g_{m\ell} V_m V_{\ell} \cos \theta_{m\ell} \quad (2.54)$$

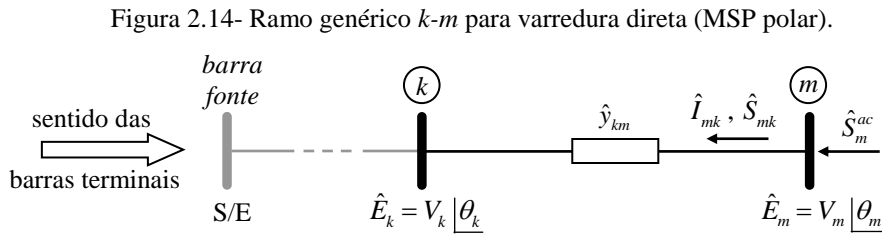
$$Q_{m\ell}^{perdas} = -b_{m\ell} (V_m^2 + V_{\ell}^2) + 2b_{m\ell} V_m V_{\ell} \cos \theta_{m\ell} \quad (2.55)$$

- Varredura direta

Varredura direta se trata do processo corretivo dos valores do módulo e do ângulo de fase das tensões de barra, partindo do estado de tensão da barra fonte até as barras terminais.

Para exemplificação da varredura direta, seja o ramo genérico $k-m$ de uma rede de distribuição mostrado na Figura 2.14, onde a barra m situa-se mais distante da barra fonte do

que a barra k e o restante da rede está equivalenciado pela potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m e obtida pelo processo de varredura inversa. Partindo da barra fonte e em direção às barras terminais da rede elétrica em estudo, a tensão \hat{E}_m da barra m pode ser corrigida tendo calculado previamente a tensão da \hat{E}_k da barra k , ou caso ela seja a conhecida da barra fonte.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Resgatando a Equação (2.22), é possível obter o fluxo de potência $\hat{S}_{mk} = \hat{V}_m \hat{I}_{mk}^*$, no sentido da barra m para a barra k , tal que, após o desenvolvimento, seja dado por:

$$\hat{S}_{mk} = V_m^2 g_{km} - jV_m^2 b_{km} - V_k V_m y_{km} (\cos(\theta_m - \theta_k - \varphi_{km}) + j \text{sen}(\theta_m - \theta_k - \varphi_{km}))$$

onde: $y_{km} = \sqrt{g_{km}^2 + b_{km}^2}$ e $\varphi_{km} = \text{arctg}(b_{km} / g_{km})$

Com base na Figura 2.14, nota-se que a potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m equivale ao fluxo de potência \hat{S}_{mk} no sentido m para k , ou seja, $\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + jQ_m^{ac} = P_{mk} + jQ_{mk}$. Logo, é possível separar as partes real e imaginária da equação obtida acima, de forma que:

$$P_m^{ac} = V_m^2 g_{km} - V_k V_m y_{km} \cos(\theta_m - \theta_k - \varphi_{km})$$

$$Q_m^{ac} = -jV_m^2 b_{km} - V_k V_m y_{km} \text{sen}(\theta_m - \theta_k - \varphi_{km})$$

Isolando as funções trigonométricas, obtém-se que:

$$\text{sen}(\theta_m - \theta_k - \varphi_{km}) = \frac{-Q_m^{ac} - V_m^2 b_{km}}{-V_k V_m y_{km}}$$

$$\cos(\theta_m - \theta_k - \varphi_{km}) = \frac{V_m^2 g_{km} - P_m^{ac}}{V_k V_m y_{km}}$$

Empregando-se a identidade trigonométrica: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, e aplicando esta equação ao resultado anterior, é possível obter como resultado que:

$$V_m = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{A_m^2 - 4B_m} - A_m \right)} \quad (2.56)$$

onde:

$$A_m = \frac{2(Q_m^{ac} b_{km} - P_m^{ac} g_{km})}{y_{km}^2} - V_k^2 \quad (2.57)$$

$$B_m = \frac{(P_m^{ac})^2 + (Q_m^{ac})^2}{y_{km}^2} \quad (2.58)$$

Uma vez obtido o módulo de tensão V_m a partir da Equação (2.56), e tendo já calculado previamente o ângulo de fase θ_k da barra k durante o processo de varredura direta, é possível obter o ângulo de fase θ_m da tensão da barra m da seguinte forma:

$$\theta_m = \theta_k + \varphi_{km} + \arctg \left(\frac{-V_m^2 b_{km} - Q_m^{ac}}{V_m^2 g_{km} - P_m^{ac}} \right) \quad (2.59)$$

Com base nesse desenvolvimento, pode-se então implementar computacionalmente a estratégia do MSP como um algoritmo para solucionar o subsistema 1, adotando um critério de convergência suficiente para fazer a parada das iterações. Um critério comumente adotado consiste em testar a convergência com uma tolerância ε adotada e calcular o módulo do maior erro ΔV de tensões de barra entre duas iterações sucessivas i e $i + 1$, tal que:

$$\max_{k \in \Omega_{NB-1}} |\Delta V_k| \leq \varepsilon, \quad \text{onde: } \Delta V_k = V_k^{(i+1)} - V_k^{(i)} \quad (2.60)$$

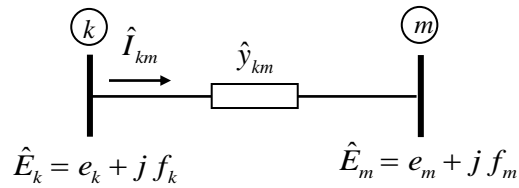
onde Ω_{NB-1} é o conjunto de todas as barras da rede, com exceção da barra fonte. Se atingida a convergência, finaliza-se o processo iterativo adotando o último estado das tensões de barra obtido como solução do subsistema 1 e resolve-se o subsistema 2, que é solucionado de forma trivial, tal como foi detalhado no Tópico 2.2.10 e resumido na Tabela 2. Caso a convergência não tenha sido atingida, deve-se retornar o processo de varredura direta e inversa do MSP.

2.3.3. Método da Soma das Potências - Formulação Retangular

A versão do Método da Soma das Potências na versão retangular foi desenvolvida em um Trabalho de Conclusão de Curso da EMC por SANTOS e BRIGATTO (2016).

De forma semelhante ao MSP polar, a formulação em coordenadas retangulares do MSP baseia-se em um processo de varredura direta e inversa. Contudo, todo desenvolvimento da formulação para obter o estado de tensão das barras é feito em coordenadas retangulares, ou seja, partindo do princípio da formulação do MSP, as tensões de barra genéricas \hat{E}_k e \hat{E}_m , antes escritas na forma polar: $\hat{E}_k = V_k \angle \theta_k$ e $\hat{E}_m = V_m \angle \theta_m$, são neste caso escritas na forma retangular: $\hat{E}_k = e_k + j f_k$ e $\hat{E}_m = e_m + j f_m$, conforme mostrado na Figura 2.15.

Figura 2.15- Tensões de barra em coordenadas retangulares.



Fonte: SANTOS e BRIGATTO (2016).

- Varredura inversa

Semelhante ao MSP versão polar, para a determinação das potências ativa e reativa acumuladas no processo de varredura inversa, a formulação matemática é a mesma das Equações (2.52) e (2.53), diferindo no cálculo das perdas no caso do MSP retangular.

Com base na Figura 2.15 e no desenvolvimento de SANTOS e BRIGATTO (2016), a equação de perdas para um ramo genérico $k-m$, em coordenadas retangulares é a seguinte:

$$S_{km}^{perdas} = P_{km}^{perdas} + j Q_{km}^{perdas} = [(e_k + j f_k) - (e_m + j f_m)] [(e_k - j f_k) - (e_m - j f_m)] (g_{km} - j b_{km})$$

Desenvolvendo o resultado anterior e separando as partes real e imaginária, é possível obter as potências ativa P_{km}^{perdas} e reativa Q_{km}^{perdas} referente às perdas no ramo $k-m$, tal que

$$P_{km}^{perdas} = (e_k^2 + f_k^2 + e_m^2 + f_m^2) g_{km} - 2 (e_k e_m + f_k f_m) g_{km} \quad (2.61)$$

$$Q_{km}^{perdas} = - (e_k^2 + f_k^2 + e_m^2 + f_m^2) b_{km} + 2 (e_k e_m + f_k f_m) b_{km} \quad (2.62)$$

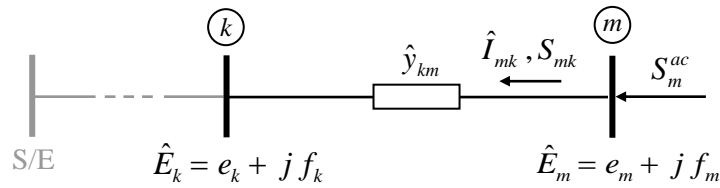
Logo, o processo de acúmulo de potência nas barras se assemelha ao desenvolvido para o MSP na formulação polar, partindo das barras terminais mais distantes em direção à barra fonte, com exceção desta, mas as parcelas referentes às potências de perdas nas Equações (2.54) e (2.55) são agora obtidas com as Equações (2.61) e (2.62), respectivamente.

- Varredura direta

O processo de varredura para a correção do estado das tensões de barra também segue a metodologia do MSP polar, partindo-se da barra fonte e em direção às barras terminais.

Semelhante à versão polar, na varredura direta deseja-se corrigir as partes real e_m e imaginária f_m da tensão complexa $E_m = e_m + j f_m$ da barra m , tendo já calculado ou conhecido previamente (no caso da barra $V\theta$) a tensão complexa $E_k = e_k + j f_k$ da barra k . Na Figura 2.16 é visualizado a situação descrita para um ramo genérico $k-m$.

Figura 2.16- Ramo k - m genérico para varredura direta (MSP retangular).



Fonte: SANTOS e BRIGATTO (2016).

Com base na Figura 2.16, nota-se que a potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m equivale à injeção de potência \hat{S}_{mk} no sentido da barra m para a barra k , tal que:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{mk} = \hat{S}_m^{ac} = \hat{E}_m \hat{I}_{mk}^* &= (e_m^2 + f_m^2) g_{km} - j(e_m^2 + f_m^2) b_{km} - e_k e_m g_{km} + j e_k e_m b_{km} + j e_m f_k g_{km} + \\ &+ e_m f_k b_{km} - j e_k f_m g_{km} - e_k f_m b_{km} - f_k f_m g_{km} + j f_k f_m b_{km} \end{aligned}$$

Desta forma, pode-se separar as partes real e imaginária do resultado acima, a fim de se obter, respectivamente, a potência ativa P_m^{ac} e reativa Q_m^{ac} acumuladas, tal que:

$$P_m^{ac} = g_{km} (e_m^2 + f_m^2) + (f_k b_{km} - e_k g_{km}) e_m - (e_k b_{km} + f_k g_{km}) f_m \quad (2.63)$$

$$Q_m^{ac} = -b_{km} (e_m^2 + f_m^2) + (e_k b_{km} + f_k g_{km}) e_m + (f_k b_{km} - e_k g_{km}) f_m \quad (2.64)$$

A formulação do MSP polar possibilita o resumo das equações em termos de funções trigonométricas, o que permitiu, por meio da identidade trigonométrica $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$, chegar à Equação (2.56) de cálculo simples do módulo V_m e da Equação (2.59) de cálculo do ângulo de fase θ_m da tensão na barra m , sem necessidade de um método de solução adicional.

Contudo, o equacionamento do MSP retangular se mostra mais acoplado, conforme demonstrado nas Equações (2.63) e (2.64), em que não é possível separar as partes real e_m e imaginária f_m da tensão da barra m e também obter seus valores por um cálculo simples, tal que é necessário adotar um método adicional como estratégia para a obtenção de e_m e f_m .

Em SANTOS e BRIGATTO (2016) é adotada a definição de equações de resíduos com as Equações (2.63) e (2.64), para que e_m e f_m sejam as raízes das equações de resíduos, o que torna possível o cálculo do estado da tensão na barra m pelo método de Newton-Raphson.

Assim, seja a equação de resíduo de potência ativa ΔP_m definida com base na Equação (2.63) e de resíduo de potência reativa ΔQ_m definida com base na Equação (2.64), dadas por:

$$\Delta P_m = P_m^{ac} - g_{km} (e_m^2 + f_m^2) - (f_k b_{km} - e_k g_{km}) e_m + (e_k b_{km} + f_k g_{km}) f_m = 0 \quad (2.65)$$

$$\Delta Q_m = Q_m^{ac} + b_{km} (e_m^2 + f_m^2) - (e_k b_{km} + f_k g_{km}) e_m - (f_k b_{km} - e_k g_{km}) f_m = 0 \quad (2.66)$$

Analisando as Equações (2.65) e (2.66), observa-se que os termos g_{km} e b_{km} são dados da rede elétrica, os termos e_k e f_k foram previamente corrigidos e os termos P_m^{ac} e Q_m^{ac} foram previamente calculados no processo de varredura inversa, tal que as Equações (2.65) e (2.66) são dependentes apenas das partes real e_m e imaginária f_m da tensão da barra m .

Portanto, chega-se a um conjunto de duas equações não lineares (ΔP_m e ΔQ_m) e duas incógnitas (e_m e f_m), tal que o cálculo das raízes das Equações (2.65) e (2.66) é passível de solução pelo método de Newton-Raphson para a obtenção da tensão de cada barra m da rede.

Basicamente, o método de Newton-Raphson de cálculo das raízes das Equações (2.65) e (2.66) se resume em resolver, para cada j -ésima iteração, a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} e_m^{(j+1)} \\ f_m^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_m^{(j)} \\ f_m^{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P_m^{(j)} \\ \Delta Q_m^{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

onde:

$$A_{11} = \frac{\partial \Delta P_m}{\partial e_m} = -2g_{km}e_m - f_k b_{km} + e_k g_{km} \quad (2.68)$$

$$A_{12} = \frac{\partial \Delta P_m}{\partial f_m} = -2g_{km}f_m + e_k b_{km} + f_k g_{km} \quad (2.69)$$

$$A_{21} = \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial e_m} = 2b_{km}e_m - e_k b_{km} - f_k g_{km} \quad (2.70)$$

$$A_{22} = \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial f_m} = 2b_{km}f_m - f_k b_{km} + e_k g_{km} \quad (2.71)$$

e testar convergência com uma tolerância ξ adotada, até que: $\max \left[\left| \Delta P_m^{(j)} \right|, \left| \Delta Q_m^{(j)} \right| \right] \leq \xi$.

O algoritmo de solução do subsistema 1 com o MSP retangular é por fim finalizado com o mesmo teste de convergência com uma tolerância ε adotada dado pela Equação (2.60) usada no MSP polar, com o cálculo do módulo do maior erro ΔV de tensões de barra entre duas iterações sucessivas i e $i+1$, onde para o MSP retangular, calcula-se: $V_k = \sqrt{e_k^2 + f_k^2}$.

2.3.4. Método da Soma das Potências - Formulação Polar com *Shunts*

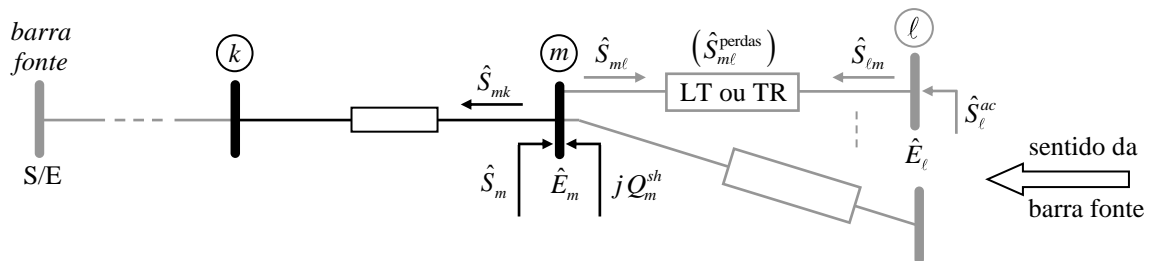
Diante da necessidade de melhor fidelidade à representação de RDEE's, ou seja, considerar a presença de transformadores reguladores de tensão, bancos de reatores ou de capacitores e o efeito capacitivo em trechos de linha da rede, pode-se fazer a adequação da formulação do MSP versão polar de modo a considerar elementos *shunts*, o que implica em

adotar $b_k^{sh} \neq 0$, $a_{km} \neq 1$ e $b_{km}^{sh} \neq 0$ como elementos de rede e, portanto, obter expressões mais completas, porém sem alteração na metodologia constante na formulação básica original. A formulação do MSP polar com *shunts* a seguir é apresentada em BRIGATTO (2025).

- Varredura inversa

Seja o ramo genérico k - m de rede apresentando na Figura 2.16, em que a barra m está situada mais distante da barra fonte do que a barra k . Partindo-se das barras terminais e em direção à barra fonte, define-se como acúmulo de potência na barra m a soma de todas as potências incidentes na barra m , exceto o fluxo \hat{S}_{mk} no sentido da barra m para a barra k . Seja Φ_m o conjunto de barras situadas a jusante da barra m . A potência \hat{S}_m^{ac} é definida como a soma da injeção líquida de potência \hat{S}_m com a potência *shunt* jQ_m^{sh} , subtraída do somatório dos fluxos $\hat{S}_{m\ell}$ de um ramo m - ℓ , $\ell \in \Phi_m$, de acordo com a convenção de sinal adotada.

Figura 2.17- Ramo k - m genérico com componente *shunt*.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Tal como desenvolvido no tópico 2.2.3 e acrescentando a potência *shunt* jQ_m^{sh} , descrita pela Equação (2.7), pode-se constatar que a potência \hat{S}_m^{ac} é determinada por:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m + jQ_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} = \hat{S}_m + jV_m^2 b_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m} (\hat{S}_\ell^{ac} - \hat{S}_{m\ell}^{perdas}) \quad (2.72)$$

tal que, separando-se as partes real e imaginária da Equação (2.72), tem-se que:

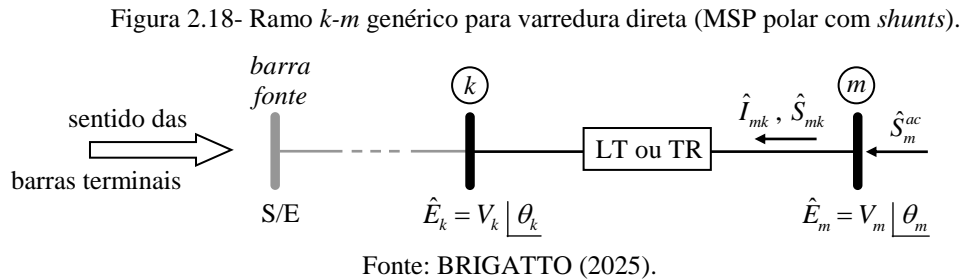
$$P_m^{ac} = P_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} (P_\ell^{ac} - P_{m\ell}^{perdas}) \quad (2.73)$$

$$Q_m^{ac} = Q_m + V_m^2 b_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m} (Q_\ell^{ac} - Q_{m\ell}^{perdas}) \quad (2.74)$$

e as perdas $P_{m\ell}^{perdas}$ e $Q_{m\ell}^{perdas}$ são calculadas considerando suas versões completas, definidas pelas Equações (2.28) e (2.29), respectivamente.

- Varredura direta

Para exemplificação da varredura direta, seja o ramo $k-m$ mostrando na Figura 2.18, onde a barra m situa-se mais distante da barra fonte do que a barra k , e o restante da rede está equivalenciado pela potência \hat{S}_m^{ac} acumulada previamente na barra m no processo de varredura inversa.



Supondo que a barra k já tenha sua tensão \hat{E}_k devidamente re-calculada, pode-se então corrigir a tensão \hat{E}_m . Da Figura 2.18, nota-se que a potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m equivale à potência \hat{S}_{mk} . Logo, reescrevendo \hat{S}_{mk} e considerando a admitância série \hat{y}_{km} na forma $\hat{y}_{km} = y_{km} \angle \phi_{km}$, onde $y_{km} = \sqrt{g_{km}^2 + b_{km}^2}$ e $\phi_{km} = \arctg(b_{km}/g_{km})$, pode-se então chegar ao seguinte resultado:

$$\hat{S}_{mk} = \hat{S}_m^{ac} = -a_{km} V_k V_m y_{km} (\cos(\theta_m - \theta_k - \phi_{km}) + j \sin(\theta_m - \theta_k - \phi_{km})) + V_m^2 g_{km} - j V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh})$$

Separando as partes real e imaginária, obtém as potências ativa P_m^{ac} e reativa Q_m^{ac} :

$$P_m^{ac} = V_m^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m y_{km} \cos(\theta_m - \theta_k - \phi_{km})$$

$$Q_m^{ac} = -V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - a_{km} V_k V_m y_{km} \sin(\theta_m - \theta_k - \phi_{km})$$

Novamente, isolando as funções trigonométricas, obtém-se que:

$$\sin(\theta_m - \theta_k - \phi_{km}) = \frac{-V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - Q_m^{ac}}{a_{km} V_k V_m y_{km}}$$

$$\cos(\theta_m - \theta_k - \phi_{km}) = \frac{V_m^2 g_{km} - P_m^{ac}}{a_{km} V_k V_m y_{km}}$$

Empregando-se a identidade trigonométrica: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, e aplicando-se aos resultados acima, pode-se obter a tensão V_m na barra m por:

$$V_m = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{A_m^2 - 4B_m} - A_m \right)} \quad (2.75)$$

onde:

$$A_m = \frac{2 \left(Q_m^{ac} (b_{km} + b_{km}^{sh}) - P_m^{ac} g_{km} \right) - a_{km}^2 y_{km}^2 V_k^2}{g_{km}^2 + (b_{km} + b_{km}^{sh})^2} \quad (2.76)$$

$$B_m = \frac{(P_m^{ac})^2 + (Q_m^{ac})^2}{g_{km}^2 + (b_{km} + b_{km}^{sh})^2} \quad (2.77)$$

Obtido o módulo de tensão V_m a partir da Equação (2.75), e tendo já calculado previamente o ângulo de fase θ_k da barra k , obtém-se o ângulo de fase θ_m da barra m por:

$$\theta_m = \theta_k + \varphi_{km} + \arctg \left(\frac{-V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - Q_m^{ac}}{V_m^2 g_{km} - P_m^{ac}} \right) \quad (2.78)$$

Conforme previsto, nota-se semelhança nas equações que solucionam o MSP polar e o MSP polar com *shunts*, tal que, assumindo $a_{km} = 1$ e $b_{km}^{sh} = 0$, as Equações (2.75), (2.76), (2.77) e (2.78) se reduzem, respectivamente, às Equações (2.56), (2.57), (2.58) e (2.59).

Por fim, o MSP com *shunts* é finalizado com o mesmo teste de convergência dado pela Equação (2.60) e o subsistema 2 é resolvido com as equações dispostas na Tabela 2.

2.3.5. Método Direct Load Flow com *Shunts*

O método *Direct Load Flow* (DLF), proposto por TENG (2003), baseia-se em uma formulação matricial de tensões e correntes complexas da rede elétrica em estudo, construída com base na topologia da rede para relacionar as injeções de corrente de barras com as tensões nodais, por meio de uma matriz DLF obtida a partir do produto entre duas matrizes básicas: a BIBC (*Bus Injection to Branch Current*), que relaciona as correntes injetadas nas barras com as correntes nos ramos, e a BCBV (*Branch Current to Bus Voltage*), que vincula as tensões nas barras às correntes nos ramos. Com isso, o método DLF permite obter as tensões de barras de redes radiais a partir de uma equação simples com injeções de corrente.

A formulação alternativa e generalizada do método DLF considerando elementos *shunts* na rede elétrica em estudo foi proposto em um Trabalho de Conclusão de Curso por SILVA e BRIGATTO (2023), construída diretamente a partir da equação nodal da rede. Essa versão amplia a aplicabilidade do método DLF a RDEE's de forma mais completa.

Distinto das formulações em que, devido à ausência de componentes *shunts*, a matriz admitância nodal da rede é singular pelo fato da soma dos elementos de cada linha da matriz é nula, na formulação proposta por SILVA e BRIGATTO (2023) a matriz admitância perde esta singularidade, pelo fato da presença de elementos *shunts* fazer com que a soma dos elementos de cada linha da matriz admitância não seja mais nula. Como consequência, é possível utilizar diretamente a forma completa da equação nodal da rede, pelo fato desta já expressar a relação entre o vetor de tensões complexas de barra e o vetor de injeções líquidas de corrente.

Como exemplo do desenvolvimento da formulação do DLF com *shunts*, considera-se uma rede de distribuição formada por quatro barras, sendo a barra 1 definida como referência (*slack*), com tensão e ângulo previamente conhecidos. A partir dessa configuração, a equação nodal da rede pode ser expressa em sua forma expandida conforme apresentado a seguir.

$$\underline{\hat{I}} = [\hat{Y}] \underline{\hat{E}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I}_3 \\ \hat{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, pode-se determinar de maneira geral as injeções líquidas de corrente complexa associadas às barras da rede por meio da seguinte expressão:

$$\begin{cases} \hat{I}_1 = \hat{Y}_{11} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{12} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{13} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{14} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_2 = \hat{Y}_{21} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{22} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{23} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{24} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_3 = \hat{Y}_{31} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{32} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{33} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{34} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_4 = \hat{Y}_{41} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{42} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{43} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{44} \hat{E}_4 \end{cases} \quad (2.79)$$

Definindo $\hat{Y}_k^{sh,T}$ como o total de admitâncias *shunts* conectados a uma barra k , tem-se:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{11} + \hat{Y}_{12} + \hat{Y}_{13} + \hat{Y}_{14} = \hat{Y}_1^{sh,T} \\ \hat{Y}_{21} + \hat{Y}_{22} + \hat{Y}_{23} + \hat{Y}_{24} = \hat{Y}_2^{sh,T} \\ \hat{Y}_{31} + \hat{Y}_{32} + \hat{Y}_{33} + \hat{Y}_{34} = \hat{Y}_3^{sh,T} \\ \hat{Y}_{41} + \hat{Y}_{42} + \hat{Y}_{43} + \hat{Y}_{44} = \hat{Y}_4^{sh,T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{Y}_{11} = \hat{Y}_1^{sh,T} - \hat{Y}_{12} - \hat{Y}_{13} - \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} = \hat{Y}_2^{sh,T} - \hat{Y}_{22} - \hat{Y}_{23} - \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} = \hat{Y}_3^{sh,T} - \hat{Y}_{32} - \hat{Y}_{33} - \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} = \hat{Y}_4^{sh,T} - \hat{Y}_{42} - \hat{Y}_{43} - \hat{Y}_{44} \end{cases}$$

Substituindo o conjunto de equações das admitâncias da primeira coluna da matriz admitância original obtido acima no conjunto de Equações (2.79), tem-se que:

$$\begin{cases} \hat{I}_1 = (\hat{Y}_1^{sh,T} - \hat{Y}_{12} - \hat{Y}_{13} - \hat{Y}_{14}) \hat{E}_1 + \hat{Y}_{12} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{13} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{14} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_2 = (\hat{Y}_2^{sh,T} - \hat{Y}_{22} - \hat{Y}_{23} - \hat{Y}_{24}) \hat{E}_1 + \hat{Y}_{22} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{23} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{24} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_3 = (\hat{Y}_3^{sh,T} - \hat{Y}_{32} - \hat{Y}_{33} - \hat{Y}_{34}) \hat{E}_1 + \hat{Y}_{32} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{33} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{34} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_4 = (\hat{Y}_4^{sh,T} - \hat{Y}_{42} - \hat{Y}_{43} - \hat{Y}_{44}) \hat{E}_1 + \hat{Y}_{42} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{43} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{44} \hat{E}_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{I}_1 = \hat{Y}_1^{sh,T} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{12} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{13} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{14} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{12} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{13} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{14} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_2 = \hat{Y}_2^{sh,T} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{22} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{23} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{24} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{22} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{23} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{24} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_3 = \hat{Y}_3^{sh,T} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{32} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{33} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{34} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{32} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{33} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{34} \hat{E}_4 \\ \hat{I}_4 = \hat{Y}_4^{sh,T} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{42} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{43} \hat{E}_1 - \hat{Y}_{44} \hat{E}_1 + \hat{Y}_{42} \hat{E}_2 + \hat{Y}_{43} \hat{E}_3 + \hat{Y}_{44} \hat{E}_4 \end{cases}$$

Agrupando-se os termos comuns de admitâncias do conjunto de equações obtido no resultado acima, tem-se que:

$$\begin{cases} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T} \hat{E}_1 = (\hat{E}_2 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{12} + (\hat{E}_3 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{13} + (\hat{E}_4 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{14} \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T} \hat{E}_1 = (\hat{E}_2 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{22} + (\hat{E}_3 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{23} + (\hat{E}_4 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{24} \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T} \hat{E}_1 = (\hat{E}_2 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{32} + (\hat{E}_3 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{33} + (\hat{E}_4 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{34} \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T} \hat{E}_1 = (\hat{E}_2 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{42} + (\hat{E}_3 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{43} + (\hat{E}_4 - \hat{E}_1) \hat{Y}_{44} \end{cases}$$

Colocando o conjunto de equações de injeções líquidas de corrente do resultado acima na forma matricial, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T} \hat{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_3 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_4 - \hat{E}_1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que a equação matricial obtida acima não é quadrada (4 equações e três incógnitas), tal que é necessário tornar a equação matricial na forma quadrada e sem prejuízo da expressão original. Neste caso, pode-se introduzir na equação matricial as duas seguintes considerações: 1) acréscimo da coluna 1 da matriz admitância referente à barra fonte (barra 1) na matriz obtida, mas com a troca do elemento da diagonal principal por um valor elevado (10^{10}); 2) acréscimo de elemento com valor nulo na primeira linha do vetor de diferenças de tensão referente à barra fonte (barra 1), o que equivale a introduzir o termo $\hat{E}_1 - \hat{E}_1$ neste elemento. Logo, o resultado da equação matricial obtida acima pode ser reformulado por:

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T} \hat{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{E}_2 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_3 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_4 - \hat{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{10} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_3 - \hat{E}_1 \\ \hat{E}_4 - \hat{E}_1 \end{bmatrix}$$

Prosseguindo o desenvolvimento da formulação, tem-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10^{10} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T} \hat{E}_1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 10^{10} & \hat{Y}_{12} & \hat{Y}_{13} & \hat{Y}_{14} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} & \hat{Y}_{23} & \hat{Y}_{24} \\ \hat{Y}_{31} & \hat{Y}_{32} & \hat{Y}_{33} & \hat{Y}_{34} \\ \hat{Y}_{41} & \hat{Y}_{42} & \hat{Y}_{43} & \hat{Y}_{44} \end{bmatrix}^{-1}}_{[DLF]} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{I}_1 - \hat{Y}_1^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_2 - \hat{Y}_2^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_3 - \hat{Y}_3^{sh,T} \hat{E}_1 \\ \hat{I}_4 - \hat{Y}_4^{sh,T} \hat{E}_1 \end{bmatrix}}_{\hat{I}_{barra}} \\
\hat{\underline{E}} & \quad \hat{\underline{E}}_{V\theta}
\end{aligned}$$

$$\hat{\underline{E}} = \hat{\underline{E}}_{V\theta} + [DLF] \hat{I}_{barra} \quad (2.80)$$

Porém, como as injeções líquidas de corrente dependem das tensões de barra, que são incógnitas do PFC, tem-se que a obtenção das tensões de barra com a Equação (2.80) requer um processo iterativo, em que o estado das tensões de barra é corrigido a cada iteração i com base nas injeções líquidas de corrente nas barras calculadas com o estado das tensões de barra atual obtido na iteração anterior, pela equação recursiva definida por:

$$\hat{\underline{E}}_{barra}^{(i+1)} = \hat{\underline{E}}_{V\theta} + [DLF] \hat{I}_{barra}^{(i)} \quad (2.81)$$

Por fim, o cálculo do subsistema 1 do PFC com método DLF é realizado por processo iterativo com base na Equação (2.81) e finalizado com o mesmo teste de convergência com uma tolerância ε adotada dado pela Equação (2.60), onde neste caso calcula-se: $V_k = |E_k|$.

O subsistema 2 pode ser resolvido de forma trivial tal como já informado, cujo resumo de equações está disposto na Tabela 2. Portanto, o detalhamento não será aqui exposto.

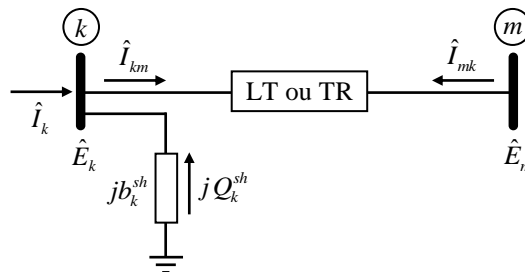
3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Após apresentação dos conceitos básicos necessários para introdução do trabalho, bem como os métodos comumente usados para PFC em RDEE, pode-se então desenvolver a formulação do MSP retangular com shunts, objeto de estudo e contribuição deste trabalho.

Tal como constatado na formulação do MSP polar com *shunts*, espera-se também para o MSP retangular com *shunts*, semelhança com sua versão original exposto no tópico 2.3.3.

Para início de desenvolvimento, é conveniente expor a estrutura de uma RDEE genérica, contendo todas as barras, fluxos e elementos que serão abordados na exposição do trabalho. Na Figura 3.1 é possível visualizar o esquema de representação de uma RDEE genérica, composta pelas barras k e m , com tensões \hat{E}_k e \hat{E}_m , respectivamente, e que formam o ramo genérico k - m ; a injeção líquida de corrente \hat{I}_k na barra k ; os fluxos de corrente \hat{I}_{km} e \hat{I}_{mk} , que percorrem o mesmo ramo mas em direções opostas; um elemento série entre as duas barras, que pode ser um transformador regulador de tensão TR ou mesmo uma linha de transmissão LT, e um elemento *shunt* responsável por injetar uma potência reativa jQ_k^{sh} .

Figura 3.1 - Representação genérica de uma RDEE com elemento *shunt*.

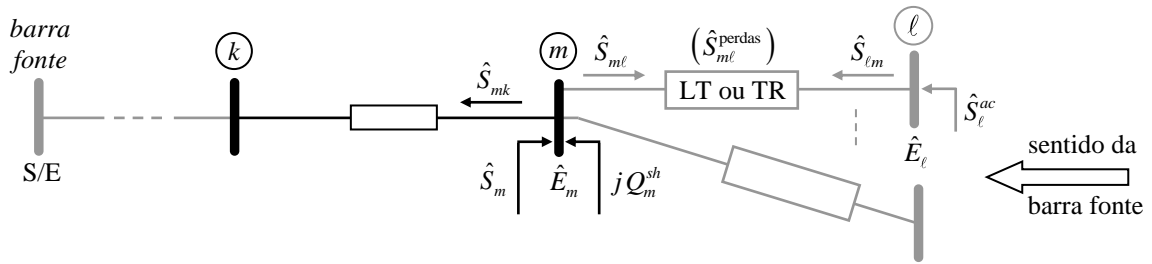


Fonte: BRIGATTO (2025).

3.1. Formulação MSP Retangular com Shunts - Varredura Inversa

Seja o ramo genérico k - m de uma RDEE mostrado na Figura 3.2, em que a barra m situa-se mais distante da barra fonte do que a barra k .

Figura 3.2 – Ramo k - m genérico para varredura inversa com o MSP retangular com *shunts*.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Partindo-se dos nós terminais e em direção à barra fonte, define-se o acúmulo de potências na barra m como a soma de todas as potências incidentes (entrando) na barra m , com exceção do fluxo \hat{S}_{mk} no sentido m para k do ramo k - m . Definindo-se Φ_m como o conjunto das barras dos ramos imediatamente a jusante da barra m , com base na Figura 3.2 observa-se que a potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m corresponde à soma da injeção líquida de potência \hat{S}_m com a potência shunt jQ_m^{sh} na barra m , subtraída do somatório dos fluxos $\hat{S}_{m\ell}$, $\ell \in \Phi_m$, visto que o sentido de $\hat{S}_{m\ell}$ é adotado positivo saindo da barra m , tal que:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m + jQ_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} \quad (3.1)$$

em que a injeção líquida de potência (geração – carga) \hat{S}_m da barra m pode ser obtida através da Equação (2.1) e a potência shunt Q_m^{sh} na barra m , em função das componentes retangulares, pode ser determinada por:

$$Q_m^{sh} = V_m^2 b_m^{sh} = (e_m^2 + f_m^2) b_m^{sh} \quad (3.2)$$

A perda de potência $\hat{S}_{m\ell}^{perdas}$ no ramo m - ℓ pode ser obtida com a soma dos fluxos de potência complexa $\hat{S}_{m\ell}$ e $\hat{S}_{\ell m}$ nos dois sentidos do ramo m - ℓ e, com base na figura, observa-se que o fluxo $\hat{S}_{\ell m}$ no sentido ℓ para m equivale à potência \hat{S}_ℓ^{ac} previamente acumulada na barra $\ell \in \Phi_m$, tal que: $\hat{S}_{\ell m} = \hat{S}_\ell^{ac}$. Logo, tem-se que o fluxo de potência $\hat{S}_{m\ell}$ no sentido m para ℓ pode ser determinado por:

$$\hat{S}_{m\ell}^{perdas} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_{\ell m} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_\ell^{ac} \Rightarrow \hat{S}_{m\ell} = \hat{S}_{m\ell}^{perdas} - \hat{S}_\ell^{ac} \quad (3.3)$$

Aplicando-se a Equação (3.3) na Equação (3.1) e utilizando a Equação (3.2), tem-se que a potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m pode ser redefinida por:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m + jQ_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} = \hat{S}_m + j(e_m^2 + f_m^2) b_m^{sh} - \sum_{\ell \in \Phi_m} (\hat{S}_{m\ell}^{perdas} - \hat{S}_\ell^{ac})$$

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m + j(e_m^2 + f_m^2) b_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m} (\hat{S}_\ell^{ac} - \hat{S}_{m\ell}^{perdas}) \quad (3.4)$$

Definindo-se todos os termos dados na Equação (3.4) em coordenadas cartesianas:

$$\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + jQ_m^{ac}, \quad \hat{S}_m = P_m + jQ_m, \quad \hat{S}_\ell^{ac} = P_\ell^{ac} + jQ_\ell^{ac} \quad \text{e} \quad \hat{S}_{m\ell}^{perdas} = P_{m\ell}^{perdas} + jQ_{m\ell}^{perdas},$$

tem-se que a Equação pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + jQ_m^{ac} = P_m + jQ_m + j(e_m^2 + f_m^2) b_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m} (P_\ell^{ac} + jQ_\ell^{ac} - P_{m\ell}^{perdas} - jQ_{m\ell}^{perdas})$$

tal que, separando-se as partes real e imaginária da equação obtida acima, pode-se por fim definir as equações de potência ativa e reativa acumuladas em uma barra genérica m :

$$P_m^{ac} = P_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} (P_\ell^{ac} - P_{m\ell}^{perdas}) \quad (3.5)$$

$$Q_m^{ac} = Q_m + (e_m^2 + f_m^2) b_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m} (Q_\ell^{ac} - Q_{m\ell}^{perdas}) \quad (3.6)$$

em que as perdas de potência ativa $P_{m\ell}^{perdas}$ e reativa $Q_{m\ell}^{perdas}$ em um ramo m - ℓ a jusante da barra m podem ser obtidas com base na equação completa, mas em coordenada retangulares, por:

$$P_{m\ell}^{perdas} = (a_{m\ell}^2 (e_m^2 + f_m^2) + (e_\ell^2 + f_\ell^2)) g_{m\ell} - 2a_{m\ell} g_{m\ell} (e_m e_\ell + f_m f_\ell) \quad (3.7)$$

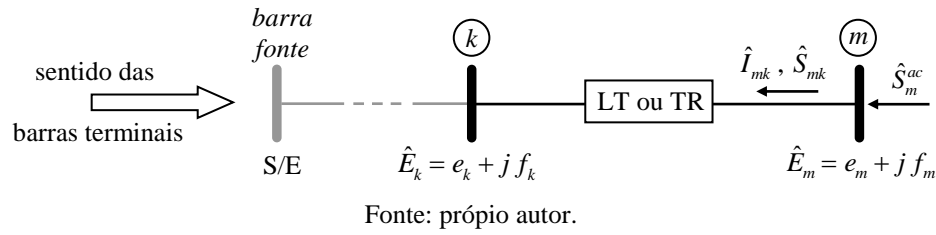
$$Q_{m\ell}^{perdas} = - (a_{m\ell}^2 (e_m^2 + f_m^2) + (e_\ell^2 + f_\ell^2)) (b_{m\ell} + b_{m\ell}^{sh}) + 2a_{m\ell} b_{m\ell} (e_m e_\ell + f_m f_\ell) \quad (3.8)$$

Conforme esperado, nota-se que, se $a_{m\ell} = 1$ e $b_{m\ell}^{sh} = 0$, as Equações (3.7) e (3.8) se reduzem, respectivamente, às Equações (2.61) e (2.62).

3.2. Formulação MSP Retangular com Shunts - Varredura Direta

Seja o ramo genérico k - m dado na Figura 3.3, tal que a barra m situa-se mais distante da barra fonte do que a barra k e o restante da rede a jusante da barra m está equivalenciado pela potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m obtida no processo de varredura inversa.

Figura 3.3 - Ramo k - m genérico para varredura direta do MSP retangular com *shunts*.



Partindo-se da tensão conhecida da barra fonte e em direção aos nós terminais, com base na Figura 3.3 observa-se que a tensão \hat{E}_m da barra m pode ser corrigida supondo-se que a tensão \hat{E}_k na barra k tenha sido previamente re-calculada, ou conhecida no caso da barra fonte, onde a corrente \hat{I}_{mk} no sentido m para k de um ramo k - m é definida pela Equação (2.22). Logo, tem-se que o fluxo de potência \hat{S}_{mk} no sentido m para k do ramo, em função das componentes retangulares, pode ser obtido pelo desenvolvimento matemático dado a seguir:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{mk} &= \hat{E}_m \hat{I}_{mk}^* = \hat{E}_m \left(-a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_k + (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \right)^* = \hat{E}_m \left(-a_{km} \hat{y}_{km}^* \hat{E}_k^* + (-j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}^*) \hat{E}_m^* \right) \\ \hat{S}_{mk} &= -a_{km} \hat{y}_{km}^* \hat{E}_k^* \hat{E}_m + (\hat{y}_{km}^* - j b_{km}^{sh}) \hat{E}_m^* \hat{E}_m \\ \hat{S}_{mk} &= -a_{km} (g_{km} - j b_{km}) (e_k - j f_k) (e_m + j f_m) + (g_{km} - j b_{km} - j b_{km}^{sh}) (e_m - j f_m) (e_m + j f_m) \\ \hat{S}_{mk} &= (-a_{km} g_{km} + j a_{km} b_{km}) (e_k e_m + j e_k f_m - j e_m f_k + f_k f_m) + (g_{km} - j (b_{km} + b_{km}^{sh})) (e_m^2 + f_m^2) \\ \hat{S}_{mk} &= (-a_{km} g_{km} + j a_{km} b_{km}) (e_k e_m + f_k f_m + j (e_k f_m - e_m f_k)) + (g_{km} - j (b_{km} + b_{km}^{sh})) (e_m^2 + f_m^2) \\ \hat{S}_{mk} &= -a_{km} g_{km} (e_k e_m + f_k f_m + j (e_k f_m - e_m f_k)) + j a_{km} b_{km} (e_k e_m + f_k f_m + j (e_k f_m - e_m f_k)) + \\ &+ (e_m^2 + f_m^2) g_{km} - j (e_m^2 + f_m^2) (b_{km} + b_{km}^{sh}) \\ \hat{S}_{mk} &= -a_{km} g_{km} (e_k e_m + f_k f_m) - j a_{km} g_{km} (e_k f_m - e_m f_k) + j a_{km} b_{km} (e_k e_m + f_k f_m) - \\ &- a_{km} b_{km} (e_k f_m - e_m f_k) + (e_m^2 + f_m^2) g_{km} - j (e_m^2 + f_m^2) (b_{km} + b_{km}^{sh})\end{aligned}$$

Seja $\hat{S}_m^{ac} = P_m^{ac} + j Q_m^{ac}$ a potência previamente acumulada na barra m . Com base na Figura 3.3, observa-se então que o fluxo de potência \hat{S}_{mk} corresponde à potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m , tal que: $\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_{mk}$ e determina-se que:

$$\begin{aligned}P_m^{ac} + j Q_m^{ac} &= -a_{km} g_{km} (e_k e_m + f_k f_m) - j a_{km} g_{km} (e_k f_m - e_m f_k) + j a_{km} b_{km} (e_k e_m + f_k f_m) \\ &- a_{km} b_{km} (e_k f_m - e_m f_k) + (e_m^2 + f_m^2) g_{km} - j (e_m^2 + f_m^2) (b_{km} + b_{km}^{sh})\end{aligned}$$

Separando-se as partes real e imaginária do resultado obtido acima, tem-se que:

$$P_m^{ac} = (e_m^2 + f_m^2) g_{km} - a_{km} g_{km} (e_k e_m + f_k f_m) - a_{km} b_{km} (e_k f_m - e_m f_k) \quad (3.9)$$

$$Q_m^{ac} = - (e_m^2 + f_m^2) (b_{km} + b_{km}^{sh}) - a_{km} g_{km} (e_k f_m - e_m f_k) + a_{km} b_{km} (e_k e_m + f_k f_m) \quad (3.10)$$

Analisando-se as Equações (3.9) e (3.10) assim obtidas, nota-se que o cálculo destas equações depende apenas de e_m e f_m (partes real e imaginária da tensão na barra m), pois seus demais componentes, ou são dados da rede em estudo (g_{km} e b_{km}), ou foram previamente corrigidos (e_k e f_k) ou previamente calculados no processo de varredura inversa (P_m^{ac} e Q_m^{ac}).

Além disso, observa-se também que as Equações (3.9) e (3.10) apresentam natureza não-linear (quadrado de variáveis e produto de variáveis) e suas incógnitas (e_m e f_m) estão implícitas (não podem ser isoladas das equações), tal que estas não podem ser obtidas por uma equação de síntese (solução analítica), tal como no MSP versão polar com os cálculos de V_m e θ_m . Assim, tal como realizado para o MSP versão retangular originalmente proposto em SANTOS e BRIGATTO (2016), para a obtenção das incógnitas e_m e f_m é necessária uma solução numérica com o emprego do método iterativo de Newton-Raphson.

Assim, similar ao MSP versão retangular, definindo-se então as funções de resíduos de potência ativa ΔP_m e reativa ΔQ_m em uma barra m genérica, determinadas por:

$$\begin{aligned} \Delta P_m = P_m^{ac} - (e_m^2 + f_m^2) g_{km} + a_{km} g_{km} (e_k e_m + f_k f_m) + \\ + a_{km} b_{km} (e_k f_m - e_m f_k) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q_m = Q_m^{ac} + (e_m^2 + f_m^2)(b_{km} + b_{km}^{sh}) + a_{km} g_{km} (e_k f_m - e_m f_k) - \\ - a_{km} b_{km} (e_k e_m + f_k f_m) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

tem-se que o cálculo do estado de tensão da barra m (incógnitas e_m e f_m) se resume em determinar as raízes de um conjunto de 2 equações não lineares (ΔP_m e ΔQ_m) e duas incógnitas (e_m e f_m), o que consiste em resolver, para cada iteração i a seguinte equação matricial do método de Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} e_m^{(i+1)} \\ f_m^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_m^{(i)} \\ f_m^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P_m^{(i)} \\ \Delta Q_m^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

em que os termos matriz jacobiana são determinados por:

$$A_{11} = \frac{\partial \Delta P_m}{\partial e_m} = -2 e_m g_{km} + a_{km} e_k g_{km} - a_{km} f_k b_{km} \quad (3.14)$$

$$A_{12} = \frac{\partial \Delta P_m}{\partial f_m} = -2 f_m g_{km} + a_{km} f_k g_{km} + a_{km} e_k b_{km} \quad (3.15)$$

$$A_{21} = \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial e_m} = 2 e_m (b_{km} + b_{km}^{sh}) - a_{km} f_k g_{km} - a_{km} e_k b_{km} \quad (3.16)$$

$$A_{22} = \frac{\partial \Delta Q_m}{\partial f_m} = 2 f_m (b_{km} + b_{km}^{sh}) + a_{km} e_k g_{km} - a_{km} f_k b_{km} \quad (3.17)$$

onde o próprio valor dos resíduos ΔP_m e ΔQ_m é interpretado como um erro e pode ser utilizado como critério de parada do processo iterativo do método de Newton-Raphson.

Conforme esperado, nota-se que, se $a_{m\ell} = 1$ e $b_{m\ell}^{sh} = 0$, as Equações (3.9) até (3.17) se reduzem, respectivamente, às Equações (2.63) até (2.71).

3.3. Algoritmo para implementação computacional

Com base no desenvolvimento objeto deste trabalho, a seguir é descrito um algoritmo para implementação computacional do MSP retangular com *shunts*, detalhado abaixo:

1ª Etapa (iteração 0): adota-se a condição de partida início (*flat-start*), onde todas as tensões de barra, com exceção da barra de referência (barra $V\theta$), são inicializadas com as partes real em $e_k^{(0)} = 1,0$ e parte imaginária em $f_k^{(0)} = 0,0$.

2ª Etapa (cálculo das perdas): para uma iteração i e com base nas tensões atualizadas na iteração anterior ($i-1$), calculam-se as perdas nos ramos com as Equações (3.7) e (3.8).

3ª Etapa (varredura inversa): para uma iteração i , calculam-se as potências acumuladas em cada barra a partir das Equações (3.5) e (3.6), partindo da barra mais distante até as barras mais próximas da barra fonte, com exceção dessa. Para isso, é necessário somar todas as potências acumuladas e as perdas nos ramos calculadas na etapa anterior.

4ª Etapa (varredura direta): para cada iteração i , partindo-se da barra fonte e em direção às barras terminais, atualizam-se as partes real e_k e imaginária f_k da tensão de cada barra k com base no método de Newton-Raphson. Para isso, calculam-se as funções de resíduos definidas nas Equações (3.11) e (3.12) adotando um erro ξ suficientemente preciso (exemplo: $\xi = 10^{-4}$) como critério de parada. Caso a condição não seja satisfeita, os componentes da matriz Jacobiana são calculados segundo as Equações (3.14)-(3.17) e, posteriormente, calcula-se a Equação (3.13) para a atualização das partes real e_k e imaginária f_k da tensão de cada barra k da rede, repetindo-se o processo até que a condição seja satisfeita.

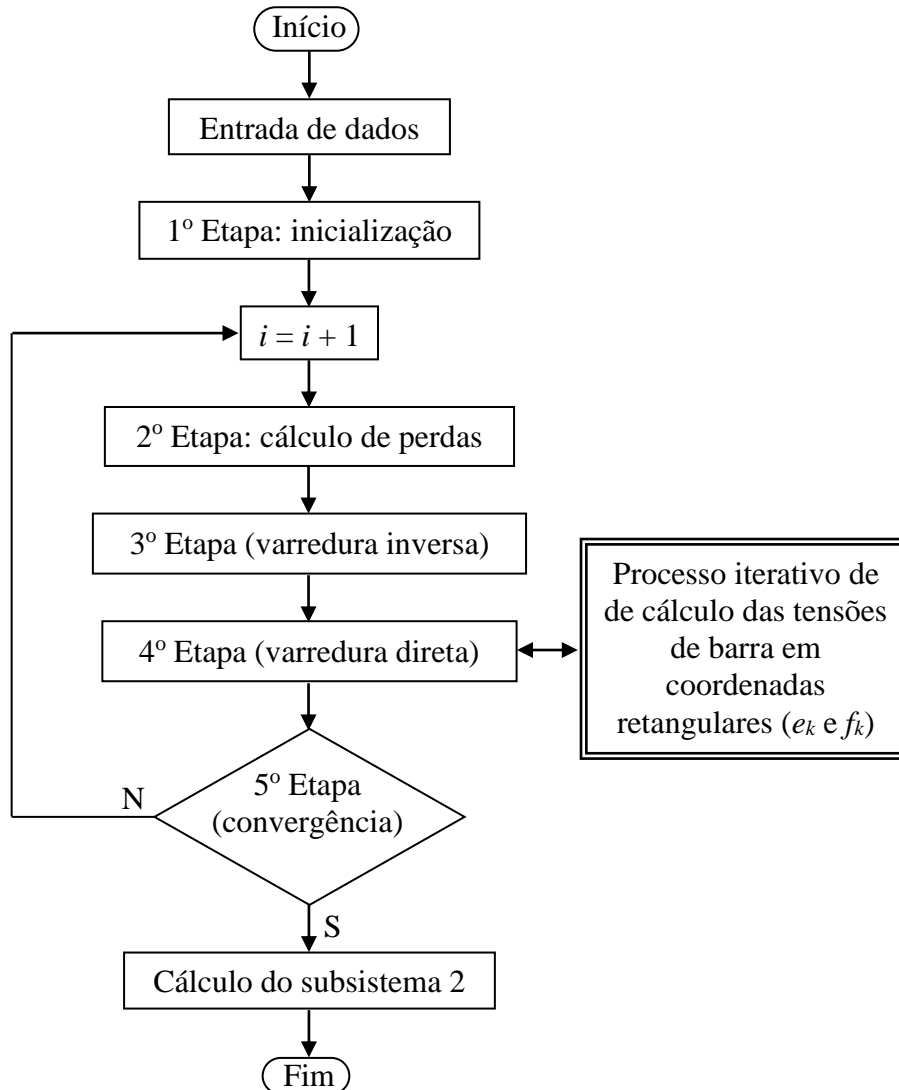
5ª Etapa (teste de convergência global): baseado no critério definido na Equação (2.60), verifica-se a convergência do MSP retangular com *shunts*, comparando o módulo da tensão na iteração i atual com o módulo da tensão da iteração anterior $i-1$, tal que:

$$\max_{k \in \Omega_{NB-1}} |\Delta V_k| \leq \varepsilon, \quad \text{onde: } \Delta V_k = V_k^{(i+1)} - V_k^{(i)} \text{ e } V_k = \sqrt{e_k^2 + f_k^2},$$

6ª Etapa (Iteração): caso o critério de convergência não seja satisfeito, retorna-se à 2ª Etapa, utilizando as tensões atualizadas como novo ponto de partida para a próxima iteração $i + 1$.

Posteriormente, o subsistema 2 pode ser resolvido conforme resumido na Tabela 2. Para melhor visualização do passo a passo, A Figura 3.4 ilustra um fluxograma contendo as etapas devidamente sequenciadas do algoritmo.

Figura 3.4- Fluxograma resumido do algoritmo do método MSP retangular com *shunts*.



Fonte: próprio autor.

4. TESTES E ANÁLISES DE RESULTADOS

Com o intuito de avaliar o desempenho do MSP retangular com *shunts*, foi realizada uma comparação com dois métodos de referência, que foram aqui neste trabalho previamente apresentados na Teoria Básica vista Capítulo 2: o MSP polar e o método DLF com *shunts*. A finalidade inicial dos testes é demonstrar que o MSP retangular com *shunts* aqui desenvolvido funciona adequadamente e converge de maneira similar aos demais métodos de comparação.

A seguir, são apresentados nas Tabelas 3 e 4 os resultados dos dados de estado de tensão (módulo e ângulo) de cada barra para cada um dos métodos de solução do subsistema 1 para uma RDEE com *shunts* composta por 10 barras, descrita em RAO (2011) e disposta no Anexo A, e outra de 14 barras, descrita em CINVALAR et al. (1988) e disposta no Anexo B, cuja tolerância ε adotada em todos os métodos foi de 0,0001 e, para o caso do MSP retangular com *shunts*, a tolerância ξ adotada no método de Newton-Raphson também foi de 0,0001.

Tabela 3- Resultados do Subsistema 1 para RDEE de 10 barras.

Barra	Módulo da tensão (pu)			Ângulo da tensão (rad)		
	MSP Retangular	MSP Polar	DLF	MSP Retangular	MSP Polar	DLF
1	1,0000	1,0000	1,0000	0,000	0,000	0,000
2	0,9993	0,9993	0,9993	-0,049	-0,049	-0,049
3	0,9988	0,9988	0,9988	-0,117	-0,117	-0,117
4	0,9965	0,9965	0,9965	-0,209	-0,209	-0,209
5	0,9950	0,9950	0,9950	-0,234	-0,234	-0,234
6	1,0142	1,0142	1,0142	-0,346	-0,346	-0,346
7	1,0131	1,0131	1,0131	-0,365	-0,365	-0,365
8	1,0113	1,0113	1,0113	-0,376	-0,376	-0,376
9	1,0308	1,0308	1,0308	-0,449	-0,449	-0,449
10	1,0284	1,0284	1,0284	-0,420	-0,420	-0,420

Fonte: próprio autor.

Tabela 4 - Resultados do Subsistema 1 para RDEE de 14 barras.

Barra	Módulo da tensão (pu)			Ângulo da tensão (rad)		
	MSP Retangular	MSP Polar	DLF	MSP Retangular	MSP Polar	DLF
1	1,0000	1,0000	1,0000	0,000	0,000	0,000
2	0,9906	0,9906	0,9906	-0,367	-0,367	-0,367
3	0,9877	0,9877	0,9877	-0,540	-0,540	-0,540
4	0,9859	0,9859	0,9859	-0,693	-0,693	-0,693
5	0,9848	0,9848	0,9848	-0,700	-0,700	-0,700
6	0,9789	0,9789	0,9789	-0,756	-0,756	-0,756
7	0,9906	0,9906	0,9906	-1,413	-1,413	-1,413
8	0,9768	0,9768	0,9768	-0,763	-0,763	-0,763
9	0,9904	0,9904	0,9904	-1,483	-1,483	-1,483
10	0,9887	0,9887	0,9887	-1,778	-1,778	-1,778
11	0,9943	0,9943	0,9943	-0,322	-0,322	-0,322
12	0,9947	0,9947	0,9947	-0,448	-0,448	-0,448
13	0,9716	0,9716	0,9716	-0,518	-0,518	-0,518
14	0,9710	0,9710	0,9710	-0,586	-0,586	-0,586

Fonte: próprio autor.

Logo, como pode ser constatado nas Tabela 3 e 4, os resultados dos módulos e ângulos das tensões de barra convergiram igualmente, demonstrando que o MSP retangular com shunts desenvolvido neste trabalho é eficaz, tal como os demais métodos comparativos.

Como a solução do subsistema 2 é trivial e comum a todos os métodos, utilizando como base a solução do subsistema 1, a apresentação dos demais dados não será foco desse tópico, mas podem ser facilmente calculados através das equações resumidas na Tabela 2.

Além das RDEE's de 10 e 14 barras, foi analisada outra RDEE mais robusta: a IEEE-118 barras, descrita em ZHANG (2007). Devido à extensão dessa rede, seus dados não foram incluídos como anexo, mas podem ser consultados diretamente na referência citada. Essa variedade de sistemas permitiu avaliar o comportamento dos métodos sob diferentes condições topológicas e operacionais.

Para as redes de teste elencadas, cada um dos três métodos foi executado 10.000 vezes, gerando amostras estatisticamente representativas. A partir disso, foram analisados dois indicadores principais de desempenho para cada método: número médio de iterações até a convergência do subsistema 1 e tempo médio de execução do método iterativo por simulação.

Tal análise foi feita numa máquina de sistema operacional Windows 11, processador AMD Ryzen 5 5500, memória RAM 16GB e SSD de 1TB, executando apenas o MATLAB. Os resultados obtidos três métodos estão dispostos nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 5- Número médio de iterações.

Rede	Número médio de iterações		
	MSP Retangular	MSP Polar	DLF
10 Barras	3	4	3
14 Barras	3	4	3
118 Barras	4	5	5

Fonte: próprio autor.

Tabela 6- Tempo médio do processo iterativo.

Rede	Tempo médio do processo iterativo (μ s)		
	MSP Retangular	MSP Polar	DLF
10 Barras	235,64	14,15	25,42
14 Barras	360,28	18,36	31,43
118 Barras	3800,00	143,03	1100,00

Fonte: próprio autor.

Analisando os resultados constantes nas Tabelas 5 e 6, observa-se que, embora o MSP retangular tenha apresentado convergência igual ou melhor em termos do número de iterações, seu tempo de processamento foi bastante superior aos demais métodos, indicando um maior custo computacional devido à necessidade de utilizar o método de Newton-Raphson para o cálculo do estado das tensões de barra a cada iteração do processo de solução.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O desenvolvimento da formulação do Método da Soma das Potências em coordenadas retangulares com elementos *shunts* mostrou-se coerente com a estrutura original do método já desenvolvido. A principal diferença está na introdução das parcelas associadas aos elementos *shunts*, tanto de barra quanto de ramos, o que modificou as equações de corrente e potência e tornou o equacionamento mais completo. Essa adaptação confere maior robustez à formulação, permitindo representar com mais fidelidade as características reais das redes de distribuição.

Em termos de resultados numéricos, o MSP retangular considerando *shunts* manteve a capacidade de convergência observada nos outros métodos. Os testes realizados indicaram que a nova formulação alcança resultados consistentes, compatíveis com os obtidos pelo MSP em coordenadas polares com *shunts* e o método Direct Load Flow com *shunts*. Isso reforça que a proposta é sólida do ponto de vista da precisão, sendo especialmente útil em cenários que exigem maior detalhamento na modelagem dos componentes do sistema elétrico.

Apesar de sua eficácia, o método apresentou desempenho inferior em termos de tempo de processamento. Esta inferioridade é explicada pela ausência de uma expressão analítica para o cálculo direto das tensões e ângulos, o que impõe a necessidade de métodos iterativos, como o Newton-Raphson, que demandam a atualização e inversão da matriz Jacobiana a cada iteração. Esse fator, aliado ao aumento no número de termos, bem como no aumento no número de elementos das redes elétricas em estudo, resultam em maior custo computacional, o que pode limitar sua aplicação em análises que exijam respostas rápidas ou em redes de distribuição de grande porte.

Ainda assim, o trabalho se mostra relevante por preencher uma lacuna na literatura técnicas sobre métodos de solução do PFC de redes de distribuição, ao propor uma abordagem sistemática e funcional para o MSP retangular considerando elementos *shunts* na rede.

Para estudos futuros, recomenda-se a busca por estratégias que reduzam o esforço computacional que conciliem desempenho e precisão. Tais aprimoramentos podem ampliar mais a aplicabilidade da proposta, mantendo a robustez alcançada e otimizando sua eficiência.

6. REFERÊNCIAS

- BRIGATTO, G. A. A., “Teoria do Problema do Fluxo de Carga - Material Didático”, 2025. Apostila da disciplina Tópicos em Sistemas Eletro-Eletrônicos, do PPG EMC/UFG.
- BROADWATER, R. P. et al. Power Flow Analysis of Unbalanced Multiphase Radial Distribution System. *Electric Power System Research*, v. 14, 1988.
- CINVALAR, S. et al. Distribution Feeder Reconfiguration for Loss Reduction. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 3, n. 3, pp. 1217–1223, 1988.
- FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY JR., C.; UMANS, S. D. Máquinas elétricas. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.
- GRAINGER, J. J.; STEVENSON, W. D. Power system analysis. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1994.
- MONTICELLI, Alcir J. Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica, Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 1983.
- SANTOS, S. H.; BRIGATTO, G. A. A., Formulação Retangular do Método da Soma das Potências, Trabalho de Conclusão de Curso, EMC/UFG, 2016.
- RAO, R. S. et al. Optimal capacitor placement in a radial distribution system using Plant Growth Simulation Algorithm, *IJEPES*, pg: 1133–1139, 2011.
- SILVA, F. M., BRIGATTO, G. A. A., Formulação alternativa para a montagem da matriz DLF do método proposto por Teng para o cálculo do problema do fluxo de carga de redes de distribuição, Trabalho de Conclusão de Curso, EMC/UFG 2023.
- STEVENSON, W. D. Elementos de análise de sistemas de potência. 4. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.
- TENG, Jen-Hao. A direct approach for distribution system load flow solutions. In *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 18, no. 3, pp. 882-887, July 2003.
- ZHANG, D. et al. An improved ts algorithm for loss-minimum reconfiguration in largescale distribution systems. *Electric Power Systems Research*, 2007.

7. ANEXO A - DADOS DA REDE DE 10 BARRAS

Vbase = 23 kV

Sbase = 1000 kVA

Tabela A 1- Dados de barras da RDEE de 10 barras.

Barra	Tipo	V (pu)	Ang (°)	Pg (kW)	Qg (kvar)	Pc (kW)	Qc (kvar)	Qsh (kvar)
1	2	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0	1,00	0,00	0,00	0,00	184,00	60,00	0,00
3	0	1,00	0,00	0,00	0,00	98,00	34,00	0,00
4	0	1,00	0,00	0,00	0,00	179,00	85,00	10,00
5	0	1,00	0,00	0,00	0,00	159,00	110,00	0,00
6	0	1,00	0,00	0,00	0,00	161,00	60,00	20,00
7	0	1,00	0,00	0,00	0,00	78,00	40,00	0,00
8	0	1,00	0,00	0,00	0,00	115,00	60,00	30,00
9	0	1,00	0,00	0,00	0,00	98,00	30,00	40,00
10	0	1,00	0,00	0,00	0,00	164,00	200,00	50,00

Fonte: Dados adaptados de RAO (2011).

Tabela A 2- Dados de ramos da RDEE de 10 barras.

Da barra	Para a barra	R (Ω)	X (Ω)	b_sh (mS)	akm
1	2	0,1233	0,4127	2,0000	1,0000
2	3	0,0140	0,6051	3,0000	1,0000
3	4	0,7463	1,2050	4,0000	1,0000
4	5	0,6984	0,6084	5,0000	1,0000
5	6	0,0000	1,7276	0,0000	1,0200
6	7	0,9053	0,7886	2,0000	1,0000
7	8	2,0552	1,1640	2,0000	1,0000
8	9	0,0000	2,7160	0,0000	1,0200
9	10	5,3434	3,0264	2,0000	1,0000

Fonte: Dados adaptados de RAO (2011).

8. ANEXO B - DADOS DA REDE DE 14 BARRAS

Vbase = 100 kV

Sbase = 100 kVA

Tabela B 1- Dados de barras da RDEE de 14 barras.

Barra	Tipo	V (pu)	Ang (°)	Pg (kW)	Qg (kvar)	Pc (kW)	Qc (kvar)	Qsh (kvar)
1	2	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0	1,00	0,00	0,00	0,00	2000,00	1600,00	0,00
3	0	1,00	0,00	0,00	0,00	3000,00	1500,00	1100,00
4	0	1,00	0,00	0,00	0,00	2000,00	800,00	1200,00
5	0	1,00	0,00	0,00	0,00	1500,00	1200,00	0,00
6	0	1,00	0,00	0,00	0,00	4000,00	2700,00	0,00
7	0	1,00	0,00	0,00	0,00	5000,00	3000,00	1200,00
8	0	1,00	0,00	0,00	0,00	1000,00	900,00	0,00
9	0	1,00	0,00	0,00	0,00	600,00	100,00	600,00
10	0	1,00	0,00	0,00	0,00	4500,00	2000,00	3700,00
11	0	1,00	0,00	0,00	0,00	1000,00	900,00	0,00
12	0	1,00	0,00	0,00	0,00	1000,00	700,00	1800,00
13	0	1,00	0,00	0,00	0,00	1000,00	900,00	0,00
14	0	1,00	0,00	0,00	0,00	2100,00	1000,00	1800,00

Fonte: Dados adaptados de CINVALAR et al. (1988).

Tabela B 2- Dados de ramos da RDEE de 14 barras.

Da barra	Para a barra	R (Ω)	X (Ω)	b_sh (mS)	akm
1	2	7,5000	10,0000	0,0000	1,0000
2	3	8,0000	11,0000	0,0000	1,0000
2	4	9,0000	18,0000	0,0000	1,0000
4	5	4,0000	4,0000	0,0000	1,0000
1	6	11,0000	11,0000	0,0000	1,0000
6	7	8,0000	11,0000	0,0000	1,0200
6	8	11,0000	11,0000	0,0000	1,0000
7	9	11,0000	11,0000	0,0000	1,0000
7	10	8,0000	11,0000	0,0000	1,0000
1	11	11,0000	11,0000	0,0000	1,0000
11	12	9,0000	12,0000	0,0000	1,0000
11	13	8,0000	11,0000	0,0000	0,9800
13	14	4,0000	4,0000	0,0000	1,0000

Fonte: Dados adaptados de CINVALAR et al. (1988).