

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

Nilo Célio Elias Campos

**Passeios Aleatórios: teoria, propriedades e  
aplicações**

Goiânia

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## **TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

### **1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)**

Nome(s) completo(s) do(a)(s) autor(a)(es)(as): Nilo Célio Elias Campos.

Título do trabalho: Passeios Aleatórios: teoria, propriedades e aplicações.

### **2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [ x ] SIM [ ] NÃO<sup>1</sup>**

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es) (as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

#### **Casos de embargo:**

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

**Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**

---



Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Junior, Professor do Magistério Superior**, em 11/12/2025, às 07:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Nilo Célio Elias Campos, Discente**, em 18/12/2025, às 19:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5830283** e o código CRC **C5A527D9**.

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

Nilo Célio Elias Campos

**Passeios Aleatórios: teoria, propriedades e aplicações**

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Bacharelado em Estatística da Universidade Federal de Goiás para aprovação no componente curricular TCC, como parte das exigências para a obtenção do título de bacharel em Estatística.  
**Orientador:** Dr. Valdivino Vargas Júnior

Goiânia

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Campos, Nilo Célio Elias  
Passeios Aleatórios [manuscrito]: teoria, propriedades e aplicações / Nilo  
Célio Elias Campos. - 2025.  
105 f.: il. 2025

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Junior  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação ) - Universidade Federal de  
Goiás, [Unidade não informada], Estatística, Goiânia, 2025.  
Bibliografia.

1. Passeio Aleatório. 2. Processos Estocásticos. 3. Simulação. 4.  
Estatística Aplicada.

I. Vargas Junior, Valdivino, orient. II. Título.

CDU 519.2



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos vinte e oito dias do mês de novembro do ano de 2025 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Passeios Aleatórios: teoria, propriedades e aplicações”, de autoria de Nilo Célio Elias Campos, do curso de Estatística, do Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. Dr. Valdivino Vargas Junior com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Tallyta Carolyne Martins da Silva (IME/UFG) e Luis Rodrigo Fernandes Baumann (IME/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 8,5, tendo sido o TCC considerado aprovado.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Junior, Professor do Magistério Superior**, em 28/11/2025, às 19:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tallyta Carolyne Martins Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 30/11/2025, às 19:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luis Rodrigo Fernandes Baumann, Professor do Magistério Superior**, em 01/12/2025, às 10:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5807812** e o código CRC **DDF20A5E**.

*Dedico este Trabalho de Conclusão de Curso aos meus pais Nilo Elias Campos e Helena Japson Cavalcante (in memoriam), a minha amada esposa Eliane Cristina Luiz e aos meus filhos ambos Hellena Makharu Duarte Campos e Rafael Elias Duarte Campos*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força, sabedoria e serenidade concedidas ao longo desta jornada, e por iluminar cada passo na busca pelo conhecimento e pela superação pessoal.

Expresso minha sincera gratidão a todos que contribuíram, de forma direta ou indireta, para a realização deste trabalho, sejam familiares, amigos, colegas, professores ou colaboradores, cuja presença e apoio foram essenciais tanto no âmbito acadêmico quanto na vida pessoal.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior, registro minha mais profunda admiração e respeito por seu comprometimento, paciência, compreensão e incentivo constante. Sua orientação segura, com um olhar humano e inspirador, características essas sinceras que fazem parte da sua essência, foi determinante não apenas para o desenvolvimento deste trabalho, mas também para meu crescimento intelectual e ético como estudante e futuro profissional da Estatística.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG), cuja competência, paciência extrema, dedicação e comprometimento acadêmico têm sido fundamentais para a formação de gerações de estatísticos. A postura ética, rigor científico e entusiasmo pelo ensino inspiram não apenas o domínio técnico, mas também o apreço pelo pensamento crítico e pela busca constante do conhecimento. Cada disciplina ministrada, cada orientação e cada diálogo em sala de aula representam um convite à reflexão e à curiosidade intelectual sob uma ótica acadêmica e profissional. Sendo assim, essa dedicatória expressa um sincero reconhecimento a todos os docentes que, com esforço incansável, mesmo sem receber o devido reconhecimento por sua contribuição silenciosa em muitos momentos e sob forte cobranças, transformam a Estatística em um campo vivo, dinâmico e humano, contribuindo de maneira decisiva para o desenvolvimento da ciência, da educação e da sociedade brasileira.

Segundo Paulo Freire (FREIRE, 1996)

*“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”*

Que este trabalho sirva como um modesto tributo àqueles que ensinam com paixão, mesmo quando o reconhecimento é escasso.

*“O acaso favorece apenas as mentes bem preparadas.”*

**Blaise Pascal (1623–1662)**

# Resumo

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem como tema central o estudo do passeio aleatório, um modelo probabilístico fundamental na teoria dos processos estocásticos e na estatística aplicada. O estudo apresenta uma abordagem teórica com exemplos, explorando as propriedades, classificações e aplicações dos passeios aleatórios em diferentes contextos, desde o caso unidimensional simples até versões com barreiras e generalizações bidimensionais e tridimensionais. A partir de uma construção axiomática, são apresentados teoremas e proposições que formalizam o comportamento do processo, com destaque para os resultados clássicos da Lei dos Grandes Números e do Teorema Central do Limite. Tais fundamentos teóricos são ilustrados por meio de simulações computacionais realizadas no ambiente RStudio, que permitem visualizar a evolução das trajetórias e compreender o papel da aleatoriedade e da variância no comportamento do caminhante ao longo do tempo. O trabalho traz aplicações dos passeios aleatórios em problemas de apostas, processos de filas e modelos de nascimento e morte, evidenciando sua relevância prática. Sob uma perspectiva da aplicabilidade, destacamos a importância desse tema como ferramenta essencial em estatística, uma vez que a simulação e a visualização gráfica ampliam o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e da compreensão conceitual. Esperamos alcançar a perspectiva de que o passeio aleatório constitui um modelo científico de grande valor, pois une rigor matemático, experimentação computacional e aplicabilidade, servindo como ponto de convergência entre teoria, prática e formação estatística.

Palavras-chave: passeio aleatório; processos estocásticos; simulação; estatística aplicada.

# Abstract

The present Undergraduate Thesis focuses on the study of the random walk, a fundamental probabilistic model in the theory of stochastic processes and applied statistics. The study adopts a theoretical approach with illustrative examples, exploring the properties, classifications, and applications of random walks in different contexts, ranging from the simple one-dimensional case to versions with barriers and bidimensional and tridimensional generalizations. Based on an axiomatic construction, the work presents theorems and propositions that formalize the behavior of the process, with emphasis on classic results such as the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem. These theoretical foundations are illustrated through computational simulations carried out in the RStudio environment, which allow for the visualization of trajectory evolution and for understanding the role of randomness and variance in the walker's behavior over time. The work also presents applications of random walks in gambling problems, queueing processes, and birth–death models, highlighting their practical relevance. From an applied perspective, we emphasize the importance of this topic as an essential tool in statistics, since simulation and graphical visualization enhance the development of probabilistic reasoning and conceptual understanding. We aim to convey the view that the random walk constitutes a scientific model of great value, as it combines mathematical rigor, computational experimentation, and practical applicability, serving as a point of convergence between theory, practice, and statistical training.

**Keywords:** random walk; stochastic processes; simulation; applied statistics.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Passeio Aleatório</b>	<b>11</b>
1.1 <b>Definição, Conceitos e Propriedades</b>	11
1.1.1 Definição geral	11
1.2 <b>Classificação de Passeios Aleatórios - Exemplos Motivacionais</b>	11
1.2.1 Passeio Aleatório Simples na Reta	11
1.2.2 Passeio Aleatório com Barreiras Absorventes	19
1.2.3 Passeio Aleatório com Barreiras Refletoras	20
1.3 Resultados Limite	20
<b>2 Passeio Aleatório Simples</b>	<b>23</b>
<b>3 Passeio Aleatório com Barreira</b>	<b>59</b>
3.1 Passeio Aleatório com Barreira	59
3.2 Passeio Aleatório com Barreira Refletora	59
3.3 Passeio Aleatório com Barreiras Absorventes	63
<b>4 Aplicações de Passeios Aleatórios em Problemas de Apostas</b>	<b>67</b>
4.1 Aplicações de Passeios Aleatórios em Problemas de Apostas	67
4.1.1 Ruína do jogador: probabilidade de perder todo o capital em apostas sucessivas (ROSS, 2014)	67
4.2 Passeios Aleatórios em Processos de Filas e outros exemplos	84
4.2.1 O passeio aleatório como esqueleto da fila $M/M/1$	85
4.2.1.1 Esqueleto discreto	85
4.2.1.2 Observações	85
4.2.1.3 Conclusão	86
4.2.2 Processos de nascimento e morte: o número de indivíduos em uma população cresce ou decresce aleatoriamente	89
4.2.2.1 Conexão com processos de nascimento e morte contínuos	91
4.3 Passeio aleatório simples não homogêneo	94
<b>5 Conclusões</b>	<b>102</b>
<b>Referências</b>	<b>104</b>

# Introdução

O conceito de passeio aleatório (random walk) tem suas origens nas primeiras investigações sobre fenômenos probabilísticos e processos estocásticos, remontando ao final do século XIX e início do século XX. Embora atualmente seja amplamente utilizado em estatística, física, economia, biologia e ciências da computação, o passeio aleatório nasceu de uma curiosidade matemática sobre o comportamento de trajetórias sujeitas ao acaso.

A primeira formulação formal de um problema análogo a um passeio aleatório é frequentemente atribuída ao estatístico e biólogo Karl Pearson em 1905, que, em uma carta publicada na revista *Nature*, introduziu a ideia de um “homem caminhando aleatoriamente” no plano. Pearson questionava qual seria a distância média entre o ponto de partida e o ponto final após um certo número de passos de igual comprimento tomados em direções aleatórias. Esse questionamento deu origem ao que hoje conhecemos como o problema do passeio aleatório, estabelecendo as bases para o estudo sistemático de processos estocásticos.

Anteriormente, o matemático francês Louis Bachelier em 1900 já havia desenvolvido, em sua tese de doutorado intitulada *Théorie de la Spéculation*, um modelo probabilístico para descrever as flutuações dos preços no mercado financeiro. O modelo de Bachelier é considerado o precursor do movimento browniano, conceito que viria a ser formalizado fisicamente mais tarde por Albert Einstein em 1905 e Marian Smoluchowski em 1906. Esses trabalhos estabeleceram um vínculo profundo entre os passeios aleatórios e o movimento de partículas microscópicas em suspensão, fenômeno esse observado experimentalmente por Robert Brown em 1827.

Nas décadas seguintes, o estudo dos passeios aleatórios consolidou-se como um dos pilares da teoria das probabilidades e da estatística matemática. As contribuições de Andrei Kolmogorov em 1933 com a axiomatização da probabilidade forneceram a base rigorosa para a análise desses processos. Além disso, matemáticos como William Feller em 1950 e Joseph Doob em 1953 ampliaram a teoria dos processos de Markov e martingales, permitindo a formalização do passeio aleatório dentro do contexto dos processos estocásticos discretos.

O passeio aleatório passou, então, a ser aplicado em uma ampla gama de áreas. Em física, descreve fenômenos de difusão e transporte de partículas; em biologia, modela o movimento de animais e a dispersão genética; em economia e finanças, fornece a base teórica para o modelo do passeio aleatório dos preços de mercado, popularizado por Paul Samuelson em 1965. Em ciência da computação e teoria dos grafos, o passeio aleatório é utilizado em algoritmos de busca e aprendizado de máquina, bem como na modelagem de redes complexas (NASON, 2016).

Do ponto de vista matemático, os passeios aleatórios apresentam uma fascinante combinação de simplicidade e profundidade: partem de regras elementares de movimento probabilístico, mas exibem propriedades complexas relacionadas à convergência, absorção, recorrência e transi-

ência. Essa dualidade entre aleatoriedade e estrutura determinística faz do passeio aleatório um dos temas mais férteis e duradouros na história da Estatística e da Matemática Aplicada.

O estudo dos passeios aleatórios ocupa um papel central na teoria das probabilidades e constitui uma importante ferramenta de modelagem estatística de fenômenos aleatórios que evoluem no tempo. Um exemplo clássico que ilustra esse conceito é o chamado problema da ruína do jogador, amplamente discutido em jogos de azar e em processos estocásticos.

### **Contribuições**

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem como objetivo principal oferecer uma abordagem conceitual acerca dos passeios aleatórios. A estrutura proposta busca integrar aspectos teóricos e práticos, articulando exemplos motivacionais, simulações computacionais e interpretações acessíveis, de modo a compreender a teoria, bem as diversas aplicações.

Este trabalho objetiva também ser uma fonte inicial motivadora de pesquisa acerca do tema tratado, ao propor uma abordagem que desperta o interesse do leitor universitário e estimula a aprendizagem por meio da experimentação. A apresentação de diferentes tipos de passeios, simples, com barreiras absorventes e refletoras, contribui para uma compreensão gradual dos conceitos, facilitando a transição entre o pensamento determinístico e o estocástico, além de proporcionar uma visão mais ampla de fenômenos aleatórios.

Assim, este trabalho busca promover uma integração efetiva entre teoria, simulação e prática computacional, especialmente por meio do uso do software RStudio, o que reforça a importância do aprendizado ativo e investigativo. Tal abordagem estimula o raciocínio probabilístico, a autonomia intelectual e a capacidade analítica dos estudantes, aspectos fundamentais para a formação de futuros profissionais e pesquisadores na área estatística.

### **Organização do TCC**

Este TCC está estruturado em cinco capítulos, além da introdução e das referências bibliográficas.

Sendo assim, o Capítulo 1 apresenta os conceitos fundamentais de passeio aleatório, incluindo sua definição geral, propriedades e principais classificações sem uma abordagem matemática de demonstrações. O objetivo central deste capítulo é a apresentar algumas definições básicas para que seja possível a apresentação de exemplos motivacionais.

O Capítulo 2 trata do passeio aleatório simples, abordando essencialmente a estrutura hierárquica matemática com demonstrações e alguns comentários.

O Capítulo 3 aborda o passeio aleatório com barreiras, distinguindo e analisando as versões refletora e absorvente, com ênfase nas implicações de cada estrutura sobre o comportamento do processo.

Já o Capítulo 4 traz algumas aplicações dos passeios aleatórios em diferentes contextos, como problemas de apostas, processos de filas e modelos de nascimento e morte, culminando na

análise de um passeio aleatório não homogêneo. Esse capítulo busca evidenciar a versatilidade dos modelos e suas conexões com fenômenos reais.

Por fim, o Capítulo 5 reúne as conclusões do estudo, trazendo conclusões pertinentes aos jogos de azar e a minha impressão sobre a temática.

# 1 Passeio Aleatório

## 1.1 Definição, Conceitos e Propriedades

Um passeio aleatório é um processo estocástico que descreve a trajetória de uma sequência de somas parciais de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). O processo começa em um ponto inicial, que denotamos por

$$S_0 = 0.$$

### 1.1.1 Definição geral

Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com valores discretos ou contínuos. O passeio aleatório associado é o processo estocástico  $(S_n)_{n \geq 0}$  definido por

$$S_0 = 0 \quad (\text{posição inicial}), \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad n \geq 1.$$

Ou seja,  $S_n$  representa a posição da partícula após  $n$  passos, sendo cada passo  $X_k$  extraído de uma distribuição comum.

## 1.2 Classificação de Passeios Aleatórios - Exemplos Motivacionais

### 1.2.1 Passeio Aleatório Simples na Reta

O exemplo mais clássico é o passeio aleatório simples nos inteiros  $\mathbb{Z}$ . Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p.$$

Definimos o passeio aleatório  $(S_n)_{n \geq 0}$  por

$$S_n = S_{n-1} + X_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \text{com posição inicial } S_0 = 0.$$

**Exemplo 1.1** Passeio Aleatório Simples Unidimensional (FELLER, 1968)

Considere uma partícula que se move ao longo da reta numérica. A cada passo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ela se desloca uma unidade de acordo com:

$$X_n = \begin{cases} +1, & \text{com probabilidade } p, \\ -1, & \text{com probabilidade } q = 1 - p. \end{cases}$$

O passeio inicia em  $S_0 = 0$  e evolui conforme:

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i.$$

- Se  $p = q = \frac{1}{2}$ , o passeio é simples e simétrico, pois a partícula tem igual probabilidade de mover-se para a direita ou para a esquerda.
- Se  $p \neq \frac{1}{2}$ , o passeio é assimétrico, apresentando tendência (ou *drift*) em uma das direções.

Desta forma, suponha  $p = q = \frac{1}{2}$  e cinco passos:

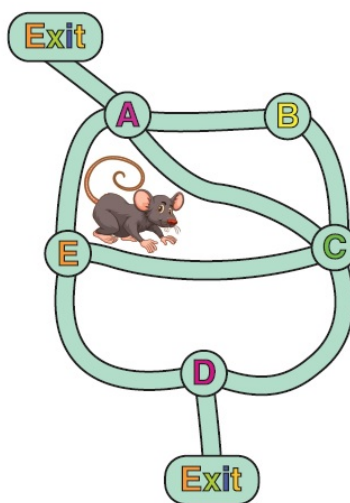
$$X = (+1, -1, +1, +1, -1) \Rightarrow S = (0, +1, 0, +1, +2, +1).$$

O ponto final é  $S_5 = +1$ , indicando que a partícula terminou uma unidade à direita da origem.

### **Exemplo 1.2** Passeio Aleatório Simples em grafo com duas saídas absorventes

Suponha que um rato esteja correndo por um labirinto com salas A, B, C, D e E, e duas saídas (veja a ilustração de Shayan Khatri). O rato corre pelos corredores e, em qualquer sala, decide aleatoriamente qual corredor seguir.

Figura 1 – Passeio Aleatório Simples em Grafo



Fonte: Elaborado pelo autora: Olga Korosteleva (KOROSTELEVA, 2020)

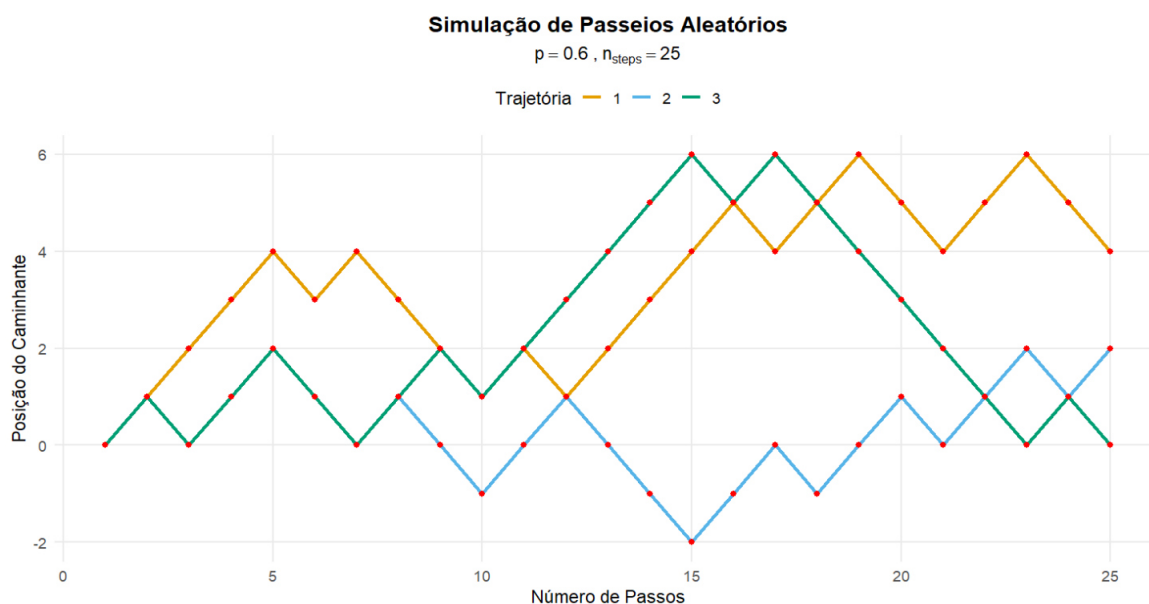
Este movimento pode ser modelado como um passeio aleatório em um grafo. A saída é um estado absorvente (condição final). O estado A tem quatro estados vizinhos: Saída, B, C e E

E, e, portanto, o rato pode ir para qualquer um deles com probabilidade de  $1/4$ . O estado B tem dois estados vizinhos, A e C, e o rato vai para qualquer um deles com probabilidade de  $1/2$ . O estado C tem conexões com todos os outros quatro estados, dando ao rato probabilidade de  $1/4$  de escolher a direção. O estado D se conecta a três estados, C, E e Saída, então o rato seleciona o estado para ir em seguida com probabilidade de  $1/3$ . Finalmente, do estado E, o rato pode alcançar três estados, A, C ou D, com probabilidade de  $1/3$  para cada um. A matriz de transição de um passo resumiu essas probabilidades.

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & \text{Saída} & A & B & C & D & E \\ \hline \text{Saída} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ B & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ C & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ D & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ E & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}$$

**Exemplo 1.3** Simulação de três trajetórias de um passeio aleatório unidimensional, começando em zero, supondo  $p = 0,6$  e o número de passos igual 25 (KOROSTELEVA, 2020)

Figura 2 – Passeio Aleatório Simples Unidimensional



Fonte: Elaborado pelo autora: Olga Korosteleva (KOROSTELEVA, 2020)

A Figura 2 representa três trajetórias independentes de um passeio aleatório unidimensional, nas quais cada passo pode ser  $+1$  (com probabilidade  $p = 0,6$ ) ou  $-1$  (com probabilidade  $q = 0,4$ ). Todas as trajetórias se iniciam na posição zero, e as linhas coloridas (laranja, azul e verde) mostram a evolução da posição do caminhante ao longo dos 25 passos. Os pontos

vermelhos destacam as posições discretas sucessivas, evidenciando a natureza passo a passo do processo estocástico.

Seja  $X_i$  o resultado do  $i$ -ésimo passo, tal que  $X_i \in \{+1, -1\}$ , com  $\mathbb{E}[X_i] = 2p - 1 = 0,2$ . Assim, a posição após  $n$  passos é dada por  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , cuja esperança é  $\mathbb{E}[S_n] = (2p - 1)n = 0,2n$ . Para  $n = 25$ , a posição média esperada é aproximadamente 5. A variância é  $\text{Var}(S_n) = 4pq n = 0,96n$ , e o desvio-padrão  $\sqrt{0,96n} \approx 4,9$ . Esses valores teóricos descrevem a tendência de crescimento e a dispersão esperada das trajetórias simuladas.

### . Interpretação das trajetórias

A Trajetória 1 (**laranja**) mostra um comportamento ascendente predominante, alcançando picos próximos a 6 e encerrando-se em torno de 4, valor compatível com a média teórica prevista.

A Trajetória 2 (**azul**) exhibe oscilações mais pronunciadas, chegando a valores negativos intermediários ( $-2$ ) antes de se recuperar e finalizar em torno de 2.

Já a Trajetória 3 (**verde**) cresce inicialmente até cerca de 6, mas depois apresenta uma reversão e termina próxima de 0.

Essas diferenças ilustram a variabilidade natural do processo, mesmo sob as mesmas condições probabilísticas.

### . Análise geral

O gráfico permite visualizar claramente o viés positivo causado pelo fato de  $p > 0,5$ , o que gera uma tendência ascendente no deslocamento médio das trajetórias. No entanto, a aleatoriedade inerente ao processo provoca oscilações locais que fazem cada realização se desviar momentaneamente dessa tendência média. Observa-se também que a dispersão aumenta com o número de passos, o que está de acordo com a relação  $\text{Var}(S_n) \propto n$ .

Além disso, as trajetórias são distintas, reforçando o caráter estocástico e não determinístico do passeio aleatório. Mesmo com o mesmo valor de  $p$ , cada caminho produzido é único, evidenciando a imprevisibilidade e a independência das realizações.

### . Conexão teórica

De acordo com a *Lei dos Grandes Números*, a razão  $S_n/n$  tende a  $(2p - 1) = 0,2$  à medida que  $n$  cresce, o que explica a inclinação média positiva observada. Já pelo *Teorema Central do Limite*, a distribuição de  $S_n$  aproxima-se de uma normal com média  $(2p - 1)n$  e variância  $4pq n$ , justificando a diferença entre as posições finais das trajetórias, que variam em torno da média teórica sem se afastar de forma inconsistente.

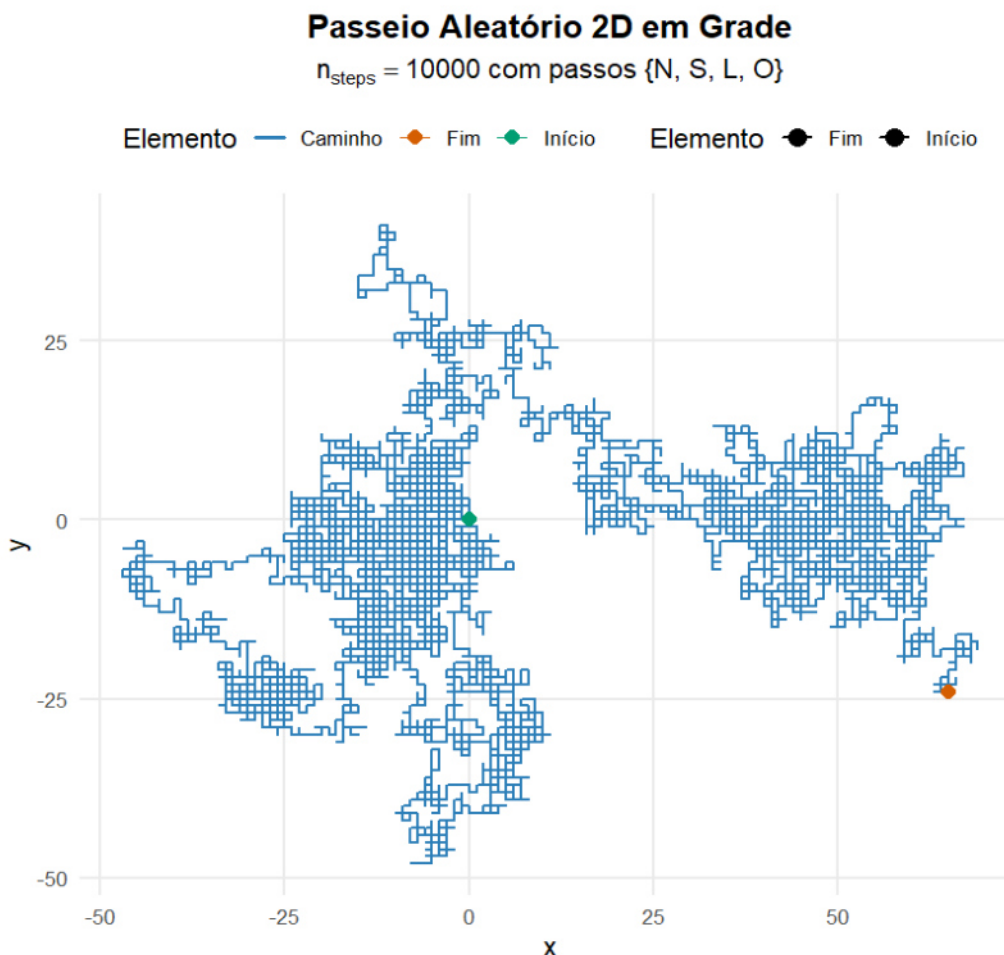
### . Conclusão

A análise das trajetórias simuladas demonstra que o modelo de passeio aleatório é uma ferramenta simples e eficaz para representar fenômenos governados pelo acaso. Mesmo quando há uma tendência esperada, como o viés positivo para  $p = 0,6$ , a variabilidade individual permanece

expressiva, destacando a diferença entre comportamento médio e realizações particulares.

**Exemplo 1.4** Simulação de um passeio aleatório bidimensional com um total de 10.000 passos, partindo da origem

Figura 3 – Passeio Aleatório Bidimensional



Fonte: Elaborado pelo autora: Olga Korosteleva (KOROSTELEVA, 2020)

A Figura 3 representa uma realização de um passeio aleatório bidimensional em grade, no qual a cada passo o caminhante se desloca uma unidade para leste  $(+1,0)$ , oeste  $(-1,0)$ , norte  $(0, +1)$  ou sul  $(0, -1)$ , com probabilidades iguais  $1/4$ . A trajetória completa é exibida em azul (“Caminho”), o ponto de início coincide com a origem  $(0,0)$  e o ponto de fim marca a posição final após  $n_{\text{steps}} = 10,000$  passos. Essa visualização destaca a natureza *passo a passo* do processo estocástico no plano cartesiano.

Sejam  $\Delta X_k$  e  $\Delta Y_k$  os incrementos nas coordenadas  $x$  e  $y$  no  $k$ -ésimo passo, com

$$(\Delta X_k, \Delta Y_k) \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0, -1)\} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\text{cada par}) = \frac{1}{4}.$$

Então, para cada passo,

$$\mathbb{E}[\Delta X_k] = 0, \quad \mathbb{E}[\Delta Y_k] = 0, \quad \text{Var}(\Delta X_k) = \text{Var}(\Delta Y_k) = \frac{1}{2}, \quad \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta Y_k) = 0.$$

Após  $n$  passos, as posições são  $X_n = \sum_{k=1}^n \Delta X_k$  e  $Y_n = \sum_{k=1}^n \Delta Y_k$ , de modo que

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[Y_n] = 0, \quad \text{Var}(X_n) = \text{Var}(Y_n) = \frac{n}{2}, \quad \text{Cov}(X_n, Y_n) = 0.$$

Conseqüentemente, o *deslocamento quadrático médio* (mean squared displacement) satisfaz

$$\mathbb{E}[X_n^2 + Y_n^2] = n,$$

caracterizando um regime **difusivo** (crescimento linear em  $n$ ).

### . Interpretação da trajetória

A trajetória em azul mostra regiões de maior densidade de visitas nas proximidades da origem, alternadas com excursões mais longas para diferentes quadrantes. O ponto inicial na origem e o ponto final deslocado da origem ilustram que, embora não haja viés direcional (esperanças nulas em cada eixo), uma *realização individual* pode terminar relativamente distante do ponto de partida. Esse comportamento é compatível com  $\sqrt{\text{Var}(X_n)} = \sqrt{\text{Var}(Y_n)} = \sqrt{n/2}$ , que, para  $n = 10,000$ , vale aproximadamente 70,7 em cada eixo, permitindo posições finais de módulo considerável.

### . Análise geral

O gráfico evidencia três aspectos centrais: (i) **Simetria e ausência de deriva**: como as probabilidades são equiprováveis, não há tendência sistemática a favor de um eixo ou quadrante; a média teórica permanece no  $(0,0)$ . (ii) **Crescimento da dispersão**: a variância em cada coordenada cresce linearmente com  $n$  ( $\text{Var} = n/2$ ), o que aumenta a “abertura” espacial do caminho à medida que o número de passos cresce. (iii) **Heterogeneidade espacial**: blocos compactos e trilhas ramificadas surgem naturalmente por revisitas locais e por excursões ocasionais, refletindo a independência entre passos e a estrutura em grade.

### . Conexão teórica

Pelo *Teorema Central do Limite* vetorial, para  $n$  grande o vetor  $(X_n, Y_n)$  aproxima-se de uma distribuição normal bivariada com média  $(0,0)$  e matriz de covariância  $\frac{n}{2} I_2$  (onde  $I_2$  é a identidade  $2 \times 2$ ). Assim, o raio  $R_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$  tem distribuição aproximadamente *Rayleigh* com parâmetro  $\sigma = \sqrt{n/2}$ , de modo que  $\mathbb{E}[R_n] \approx \sigma \sqrt{\pi/2} = \sqrt{\pi n/4}$  e  $\mathbb{E}[R_n^2] = n$ . Além disso, o passeio bidimensional é *recorrente*: a probabilidade de eventualmente retornar à origem é 1 (embora o tempo de retorno esperado seja infinito), fato clássico da teoria de passeios em  $\mathbb{Z}^2$ .

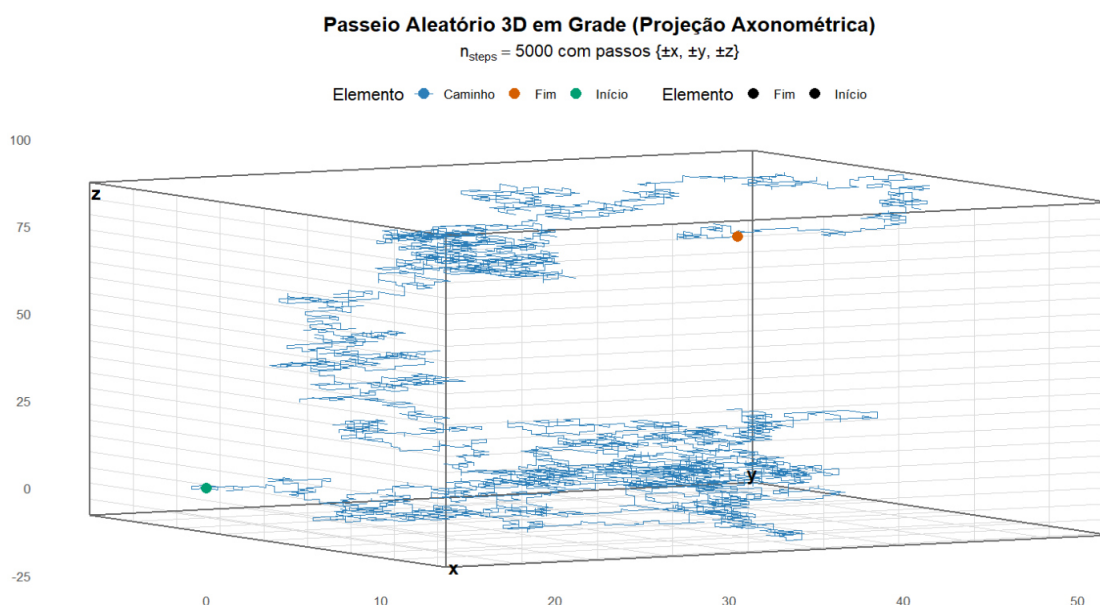
### . Conclusão

A realização apresentada confirma o caráter difusivo e simétrico do passeio aleatório bidimensional: a posição média permanece na origem, enquanto a variabilidade cresce com o número de passos, produzindo deslocamentos finais potencialmente grandes em amostras individuais. Pedagogicamente, a figura torna visíveis as relações entre *simetria*, *variância linear*, *aproximação normal bivariada* e *difusão*, conectando resultados teóricos à experimentação

computacional e favorecendo a construção de intuição estatística sobre processos estocásticos no plano.

**Exemplo 1.5** Simulação de um passeio aleatório tridimensional com um total de 5.000 passos, partindo da origem

Figura 4 – Passeio Aleatório Bidimensional



Fonte: Elaborado pelo autora: Olga Korosteleva (KOROSTELEVA, 2020)

A Figura 4 apresenta uma realização de um passeio aleatório tridimensional, no qual um caminhante parte da origem  $(0,0,0)$  e, a cada passo, desloca-se uma unidade em uma das seis direções possíveis:  $\pm x$ ,  $\pm y$  ou  $\pm z$ , todas com probabilidade igual a  $\frac{1}{6}$ . A trajetória completa é representada pela linha azul, enquanto o ponto verde marca a posição inicial e o ponto vermelho indica a posição final após  $n_{\text{steps}} = 5000$  passos. O gráfico é exibido em *projeção axonométrica*, permitindo visualizar simultaneamente as três dimensões espaciais.

Sejam os incrementos de cada passo definidos por  $(\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$ , com

$$(\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i) \in \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\},$$

de modo que

$$\mathbb{E}[\Delta X_i] = \mathbb{E}[\Delta Y_i] = \mathbb{E}[\Delta Z_i] = 0, \quad \text{Var}(\Delta X_i) = \text{Var}(\Delta Y_i) = \text{Var}(\Delta Z_i) = \frac{1}{3},$$

$$\text{Cov}(\Delta X_i, \Delta Y_i) = 0.$$

Assim, após  $n$  passos, as coordenadas do caminhante são dadas por

$$(X_n, Y_n, Z_n) = \sum_{i=1}^n (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i),$$

com

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Z_n] = 0, \quad \text{Var}(X_n) = \text{Var}(Y_n) = \text{Var}(Z_n) = \frac{n}{3}.$$

O deslocamento quadrático médio (ou *mean squared displacement*) é, portanto,

$$\mathbb{E}[X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2] = n,$$

onde a variância cresce linearmente com o número de passos.

### . Interpretação da trajetória

A trajetória em azul evidencia a natureza aleatória do movimento: o caminhante tende a visitar regiões próximas da origem, alternando entre deslocamentos locais e excursões para regiões mais distantes. O ponto verde, na base, representa o ponto inicial  $(0,0,0)$ , enquanto o ponto vermelho, mais elevado, indica o estado final alcançado após os 5000 passos. Esse resultado reflete a dispersão típica de processos estocásticos tridimensionais, nos quais o deslocamento médio é nulo, mas a distância do ponto inicial tende a crescer com  $\sqrt{n}$ .

### . Análise geral

O passeio aleatório tridimensional mantém as propriedades fundamentais de simetria e independência observadas nos casos unidimensional e bidimensional. Entretanto, uma diferença marcante é que, em três dimensões, o processo torna-se *transiente*: a probabilidade de o caminhante retornar exatamente à origem é menor que 1. Isso significa que, embora o movimento seja centrado em torno de  $(0,0,0)$ , o retorno exato é improvável à medida que o número de passos cresce. A dispersão espacial, por sua vez, é isotrópica, ou seja, homogênea em todas as direções, e cresce segundo  $\sqrt{n}$ , representando um padrão típico de difusão tridimensional.

### . Conexão teórica.

Pelo *Teorema Central do Limite* multivariado, para valores grandes de  $n$ , o vetor  $(X_n, Y_n, Z_n)$  aproxima-se de uma distribuição normal trivariada com média  $(0,0,0)$  e matriz de covariância  $\frac{n}{3}I_3$ , onde  $I_3$  é a matriz identidade de ordem 3. Assim, o raio  $R_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}$  segue aproximadamente uma distribuição *Maxwell-Boltzmann*, com valor esperado

$$\mathbb{E}[R_n] = \sqrt{\frac{8n}{3\pi}}.$$

Esse resultado conecta o comportamento empírico do passeio aleatório com a teoria da difusão de partículas em física estatística.

### . Conclusão

A simulação do passeio aleatório tridimensional demonstra, de forma clara e intuitiva, como a aleatoriedade em múltiplas dimensões pode ser analisada visualmente e interpretada matematicamente. O modelo é particularmente útil em contextos pedagógicos, pois ilustra princípios fundamentais da difusão, da variância linear e do Teorema Central do Limite em um ambiente gráfico interativo.

### 1.2.2 Passeio Aleatório com Barreiras Absorventes

Outra variação importante é o passeio aleatório com barreiras, no qual o processo é restringido a permanecer dentro de um intervalo de estados. Por exemplo, considere o passeio aleatório simples  $(S_n)$  com posição inicial  $S_0 = 0$  e barreiras em 0 e em  $N$ . Isso significa que, se o processo atingir 0 ou  $N$ , ele é absorvido, ou seja, permanece naquele estado para sempre:

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{se atingir a barreira inferior,} \\ N, & \text{se atingir a barreira superior,} \\ S_{n-1} + X_n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O exemplo a seguir, representa o problema clássico da ruína do jogador, onde um apostador inicia com  $i$  unidades e aposta repetidamente com probabilidade  $p$  de vitória e  $q$  de perda. Os estados 0 (falência) e  $N$  (ganho máximo) são estados absorventes que encerram o processo.

**Exemplo 1.6** Passeio Aleatório com Barreiras Absorventes (FELLER, 1968)

Considere um passeio aleatório simples  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  definido em  $\{0, 1, \dots, N\}$ , onde

$$X_n = \begin{cases} +1, & \text{com probabilidade } p, \\ -1, & \text{com probabilidade } q = 1 - p, \end{cases} \quad S_n = S_{n-1} + X_n, \quad S_0 = i \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Os estados 0 e  $N$  são barreiras absorventes, ou seja, uma vez atingidos, o processo permanece neles para sempre:

$$P_{00} = P_{NN} = 1.$$

Probabilidade de absorção em  $N$  (antes de atingir 0):

$$\mathbb{P}_i(\text{atingir } N \text{ antes de } 0) = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & \text{se } p \neq q, \\ \frac{i}{N}, & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tempo esperado até a absorção:

$$\mathbb{E}_i[T] = \begin{cases} \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & \text{se } p \neq q, \\ i(N-i), & \text{se } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Desta forma, suponha  $N = 5$ ,  $p = 0,6$  ( $q = 0,4$ ) e  $i = 2$ :

$$\mathbb{P}_2(\text{chegar a } 5 \text{ antes de } 0) = \frac{1 - (\frac{2}{3})^2}{1 - (\frac{2}{3})^5} \approx 0,64, \quad \mathbb{E}_2[T] \approx 6 \text{ passos.}$$

Neste exemplo, o jogador possui probabilidade de sucesso cerca de 64% de chance de atingir o lucro máximo antes de perder tudo, e o tempo esperado até o fim do jogo: em média, o jogo termina após 6 rodadas, indicando que o sistema converge rapidamente para uma das barreiras. Ou seja, quanto mais próximo o jogador estiver de uma barreira absorvente, menor será o número esperado de passos até o término.

### 1.2.3 Passeio Aleatório com Barreiras Refletoras

Uma modificação interessante é o passeio aleatório com barreiras refletoras. Nesse caso, quando o processo atinge uma barreira, ele não é absorvido, mas sim refletido de volta ao espaço permitido.

Formalmente, se as barreiras estão em 0 e  $N$ , temos:

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{se } S_{n-1} = 0 \text{ e } X_n = -1, \\ N - 1, & \text{se } S_{n-1} = N \text{ e } X_n = 1, \\ S_{n-1} + X_n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esse modelo é útil, por exemplo, para descrever o movimento de uma partícula confinada em um intervalo, que “rebate” nas extremidades ao invés de escapar.

**Exemplo 1.7** Passeio Aleatório com Barreiras Refletoras (FELLER, 1968)

Considere um passeio aleatório simples nos estados  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . A partícula inicia em  $S_0 = i$  e, a cada passo, desloca-se:

$$X_n = \begin{cases} +1, & \text{com probabilidade } p, \\ -1, & \text{com probabilidade } q = 1 - p. \end{cases}$$

As fronteiras 0 e  $N$  são barreiras refletoras, de modo que:

$$P_{0,1} = 1, \quad P_{N,N-1} = 1,$$

e, para  $1 \leq i \leq N - 1$ :

$$P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,i-1} = q.$$

Nesse modelo, o processo nunca é absorvido, a partícula permanece confinada no intervalo  $[0, N]$ , refletindo-se nas extremidades.

## 1.3 Resultados Limite

**Teorema 1.3.1** (Teorema Central do Limite para passeio aleatório geral com média  $\mu$  finita e  $\sigma^2$  finita e não nula). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório definido por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

onde  $(X_i)_{i \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu \in \mathbb{R}, \quad \text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Então, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x),$$

onde  $\Phi(x)$  é a função de distribuição da normal padrão,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Em outras palavras, para  $n$  grande,  $S_n$  se comporta aproximadamente como

$$S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \quad (\text{em distribuição}).$$

**Teorema 1.3.2** (Lei Forte dos Grandes Números com média  $\mu$  finita para passeio aleatório). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório definido por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

onde  $(X_i)_{i \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu \in \mathbb{R}.$$

Então, quase certamente,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mu.$$

Em outras palavras, o valor médio dos incrementos converge quase certamente para a média  $\mu$  dos incrementos, independentemente da distribuição específica dos  $X_i$  (desde que a média seja finita).

**Teorema 1.3.3** (Distribuição de passeio aleatório com passos  $-i$  e  $+j$ ). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

onde as variáveis  $(X_k)_{k \geq 1}$  são independentes e

$$\mathbb{P}(X_k = j) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -i) = 1 - p, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Então, para  $k \in \mathbb{Z}$ , a probabilidade de  $S_n = k$  é

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, & \text{se } r = \frac{k+ni}{i+j} \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja,  $r$  é o número de passos iguais a  $+j$  necessário para atingir  $k$  após  $n$  passos.

**Teorema 1.3.4** (Teorema Central do Limite para passeio aleatório com passos  $-i$  e  $+j$ ). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

onde as variáveis  $(X_k)_{k \geq 1}$  são independentes e identicamente distribuídas com

$$\mathbb{P}(X_k = j) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -i) = 1 - p, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Então, para  $n$  grande, a variável padronizada

$$Z_n = \frac{S_n - n(pj - (1-p)i)}{\sqrt{np(1-p)(i+j)^2}}$$

converge em distribuição para a normal padrão  $N(0,1)$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde  $\Phi(x)$  é a função de distribuição da normal padrão.

**Teorema 1.3.5** (Lei Forte dos Grandes Números para passeio aleatório com passos  $-i$  e  $+j$ ). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

onde  $(X_k)_{k \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$\mathbb{P}(X_k = j) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -i) = 1 - p, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Então, quase certamente,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} pj - (1-p)i.$$

## 2 Passeio Aleatório Simples

O presente capítulo tem como objetivo introduzir e desenvolver, por meio de demonstrações, os principais conceitos teóricos e práticos relacionados ao Passeio Aleatório Simples, um dos modelos fundamentais no estudo de Processos Estocásticos. Este modelo, apesar de sua simplicidade estrutural, desempenha um papel central na compreensão de fenômenos aleatórios que evoluem ao longo do tempo.

Neste capítulo, serão apresentados os teoremas e proposições que formalizam o comportamento do caminhante aleatório em uma dimensão, explorando tanto suas propriedades probabilísticas quanto interpretações intuitivas. O enfoque adotado prioriza a construção conceitual e a dedução lógica dos resultados, de modo a fornecer uma base sólida para estudos posteriores sobre cadeias de Markov e processos mais gerais.

Cabe destacar que os teoremas, proposições e demonstrações aqui apresentados foram extraídos do livro *Elementary probability* do David Stirzaker (STIRZAKER, 2012) e das Notas de Aula de Processos Estocásticos elaboradas pelo Prof. Valdivino Vargas Júnior (JUNIOR, 2024), utilizadas no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG), que servem como referência principal pela clareza expositiva e alinhamento ao conteúdo desta monografia. Como complementos clássicos, adotamos também (FELLER, 1968; ROSS, 2014; KOROSTELEVA, 2020) e, que oferecem formulações equivalentes, variações de hipóteses e exemplos adicionais complementares.

**Teorema 2.0.1** (Distribuição do passeio aleatório simples). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

onde as variáveis  $(X_i)_{i \geq 1}$  são independentes e satisfazem

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p.$$

Então, para  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}, & \text{se } k \equiv n \pmod{2}, |k| \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração:*

Seja  $N_+ = \#\{1 \leq i \leq n : X_i = 1\}$  o número de passos +1 até o tempo  $n$ . Como  $X_i \in \{-1, 1\}$ ,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = (\text{passos } +1) - (\text{passos } -1) = N_+ - (n - N_+) = 2N_+ - n.$$

Logo,  $S_n = k$  se e somente se  $N_+ = (n+k)/2$ . Isso implica necessariamente  $|k| \leq n$  e  $n+k$  par (isto é,  $k \equiv n \pmod{2}$ ).

Pela independência,  $N_+ \sim \text{Bin}(n, p)$ , de modo que

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(N_+ = \frac{n+k}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{(n+k)/2} (1-p)^{n-(n+k)/2} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2},$$

quando as condições de paridade e faixa são satisfeitas; caso contrário, a probabilidade é 0. ■

**Teorema 2.0.2** (Função média e função variância de um passeio aleatório simples). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório definido por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

onde  $(X_i)_{i \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Então, para todo  $n \geq 0$ :

1. *Função média:*

$$\mathbb{E}[S_n] = n(2p - 1).$$

2. *Função variância:*

$$\text{Var}(S_n) = 4p(1-p)n.$$

Em particular, para o passeio simétrico ( $p = 1/2$ ):

$$\mathbb{E}[S_n] = 0, \quad \text{Var}(S_n) = n.$$

*Demonstração:*

Como  $X_i \in \{-1, 1\}$ , segue imediatamente que

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1.$$

Pela linearidade da esperança,

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n(2p - 1).$$

Para a variância, note que  $X_i^2 \equiv 1$ , logo

$$\text{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 4p(1 - p).$$

Como as variáveis  $X_1, \dots, X_n$  são independentes,

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n \text{Var}(X_1) = 4p(1-p)n.$$

No caso simétrico  $p = \frac{1}{2}$ , obtemos  $\mathbb{E}[X_i] = 0$  e  $\text{Var}(X_i) = 1$ , de modo que  $\mathbb{E}[S_n] = 0$  e  $\text{Var}(S_n) = n$ . ■

**Teorema 2.0.3** (Função média, variância e autocovariância). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório definido por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

onde  $(X_i)_{i \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Definimos  $\mu = \mathbb{E}[X_i] = 2p - 1$  e  $\sigma^2 = \text{Var}(X_i) = 4p(1-p)$ .

Então, para todo  $n, m \geq 0$ :

1. *Função média:*

$$\mathbb{E}[S_n] = n\mu.$$

2. *Função variância:*

$$\text{Var}(S_n) = \sigma^2 n.$$

3. *Função autocovariância:*

$$\text{Cov}(S_n, S_m) = \sigma^2 \min(n, m).$$

Em particular, para o passeio simétrico ( $p = 1/2$ ):

$$\mathbb{E}[S_n] = 0, \quad \text{Var}(S_n) = n, \quad \text{Cov}(S_n, S_m) = \min(n, m).$$

*Demonstração:*

Como  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  e as variáveis  $X_i$  são independentes e identicamente distribuídas, temos:

(1) *Função média:*

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n\mu.$$

(2) Função variância: Como as variáveis são independentes,

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n\sigma^2.$$

(3) Função autocovariância: Para  $n, m \geq 0$ , sem perda de generalidade, suponha  $n \leq m$ .

Temos:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_m = \sum_{j=1}^m X_j.$$

Então:

$$\text{Cov}(S_n, S_m) = \mathbb{E}[(S_n - \mathbb{E}[S_n])(S_m - \mathbb{E}[S_m])].$$

Substituindo as somas:

$$\text{Cov}(S_n, S_m) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m X_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Como as variáveis  $X_i$  são independentes,  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$  se  $i \neq j$ , e  $\text{Cov}(X_i, X_i) = \text{Var}(X_i) = \sigma^2$ . Logo,

$$\text{Cov}(S_n, S_m) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n\sigma^2.$$

Portanto,

$$\text{Cov}(S_n, S_m) = \sigma^2 \min(n, m).$$

No caso simétrico ( $p = \frac{1}{2}$ ), temos  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ , de modo que

$$\mathbb{E}[S_n] = 0, \quad \text{Var}(S_n) = n, \quad \text{Cov}(S_n, S_m) = \min(n, m).$$

■

**Teorema 2.0.4** (Autocorrelação de um passeio aleatório simples). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples definido por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

onde  $(X_i)_{i \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com  $\mathbb{E}[X_i] = 0$  e  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ .

Então, a função autocorrelação para defasagem  $k \geq 0$  é dada por

$$\rho(k) = \text{Corr}(S_n, S_{n+k}) = \sqrt{\frac{n}{n+k}}, \quad n \geq 1.$$

*Observações:*

1. O processo  $(S_n)$  não é estacionário, pois  $\rho(k)$  depende de  $n$ .
2. Para  $k \ll n$ ,  $\rho(k) \approx 1 - \frac{k}{2n}$ .
3. Para  $k \rightarrow \infty$  com  $n$  fixo,  $\rho(k) \rightarrow 0$ .

*Demonstração:*

Sabemos que o passeio aleatório simples é definido por

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_{n+k} = \sum_{i=1}^{n+k} X_i.$$

Como as variáveis  $X_i$  são independentes e identicamente distribuídas, com média nula e variância  $\sigma^2$ , temos:

$$\mathbb{E}[S_n] = 0, \quad \mathbb{E}[S_{n+k}] = 0, \quad \text{Var}(S_n) = n\sigma^2, \quad \text{Var}(S_{n+k}) = (n+k)\sigma^2.$$

Cálculo da covariância:

$$\text{Cov}(S_n, S_{n+k}) = \mathbb{E}[S_n S_{n+k}] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n+k} X_j\right)\right].$$

Expandindo o produto e usando a independência,

$$\text{Cov}(S_n, S_{n+k}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+k} \mathbb{E}[X_i X_j].$$

Como  $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$  para  $i \neq j$  e  $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$ , temos:

$$\text{Cov}(S_n, S_{n+k}) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n\sigma^2.$$

Cálculo da correlação:

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(S_n, S_{n+k})}{\sqrt{\text{Var}(S_n) \text{Var}(S_{n+k})}} = \frac{n\sigma^2}{\sqrt{(n\sigma^2)((n+k)\sigma^2)}} = \sqrt{\frac{n}{n+k}}.$$

Análise do comportamento de  $\rho(k)$ :

- Como  $\rho(k)$  depende de  $n$ , o processo  $(S_n)$  não é estacionário.
- Para  $k \ll n$ , podemos usar a expansão de Taylor:

$$\sqrt{\frac{n}{n+k}} = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{k}{2n}.$$

- Para  $k \rightarrow \infty$  (com  $n$  fixo), temos  $\rho(k) \rightarrow 0$ , indicando que o passeio aleatório perde correlação em longas defasagens.

■

**Teorema 2.0.5** (Teorema Central do Limite para o passeio aleatório simples). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

onde  $(X_k)_{k \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Então, para  $n$  grande, a variável

$$Z_n = \frac{S_n - n(2p - 1)}{2\sqrt{np(1 - p)}}$$

converge em distribuição para a normal padrão  $N(0,1)$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde  $\Phi(x)$  é a função de distribuição da normal padrão.

*Demonstração:*

Cada passo do passeio aleatório simples é uma variável aleatória  $X_k$  com

$$\mathbb{E}[X_k] = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1, \quad \text{Var}(X_k) = \mathbb{E}[X_k^2] - (\mathbb{E}[X_k])^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p).$$

Como as variáveis  $(X_k)$  são independentes e identicamente distribuídas, temos:

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \mathbb{E}[S_n] = n(2p - 1), \quad \text{Var}(S_n) = 4np(1 - p).$$

Definindo a variável padronizada:

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n(2p - 1)}{2\sqrt{np(1 - p)}},$$

queremos mostrar que  $Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ .

Note que  $S_n$  pode ser reescrita em termos do número de passos positivos  $N_+$ :

$$S_n = 2N_+ - n, \quad \text{onde } N_+ \sim \text{Bin}(n, p).$$

Assim,

$$Z_n = \frac{(2N_+ - n) - n(2p - 1)}{2\sqrt{np(1-p)}} = \frac{N_+ - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Portanto,  $Z_n$  é exatamente a forma padronizada da variável binomial  $N_+$ .

Pelo Teorema Central do Limite para a distribuição binomial, se  $N_+ \sim \text{Bin}(n, p)$ , então

$$\frac{N_+ - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$Z_n \xrightarrow{d} N(0,1),$$

isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

**Teorema 2.0.6** (Lei Forte dos Grandes Números para o passeio aleatório simples). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

onde  $(X_k)_{k \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Então, quase certamente,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} 2p - 1.$$

*Demonstração:*

Cada passo  $X_k$  do passeio aleatório simples satisfaz

$$\mathbb{E}[X_k] = 2p - 1, \quad \text{Var}(X_k) = 4p(1-p) < \infty.$$

Como as variáveis  $(X_k)$  são independentes e identicamente distribuídas com  $\mathbb{E}|X_k| < \infty$ , podemos aplicar a Lei Forte dos Grandes Números (LFGN), a qual afirma que:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E}[X_1].$$

Mas, por definição do passeio aleatório,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Logo,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1.$$

Interpretação: A LFGN garante que, com probabilidade 1, a média dos passos individuais converge para o valor esperado de cada passo, isto é, o passeio aleatório simples “segue” a sua tendência média  $2p - 1$  no longo prazo. Em particular: - Se  $p = \frac{1}{2}$ , o passeio é simétrico e  $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$ , indicando ausência de tendência direcional. - Se  $p > \frac{1}{2}$ , o passeio tende positivamente. - Se  $p < \frac{1}{2}$ , o passeio tende negativamente. ■

**Teorema 2.0.7** (Princípio da Reflexão). *Seja  $N_{n-1}^b(0, b - 1)$  o número de caminhos de  $(0,0)$  até  $(n - 1, b - 1)$  que passam pelo nível  $b$  pelo menos uma vez. Então, temos*

$$N_{n-1}^b(0, b - 1) = N_{n-1}(0, b + 1),$$

onde  $N_{n-1}(0, b + 1)$  é o número total de caminhos de  $(0,0)$  até  $(n - 1, b + 1)$  sem restrição.

*Demonstração:*

O princípio baseia-se em uma bijeção entre dois conjuntos de caminhos.

1. Caminhos que atravessam o nível  $b$ :

Considere todos os caminhos que partem de  $(0,0)$  e chegam a  $(n - 1, b - 1)$ , mas que *em algum momento atingem o nível  $b$* . Denote esse conjunto por  $\mathcal{A}$ ; o número de elementos desse conjunto é  $N_{n-1}^b(0, b - 1)$ .

2. Definição do ponto de reflexão:

Para cada caminho em  $\mathcal{A}$ , defina o *primeiro instante  $t$*  em que o caminho atinge o nível  $b$ . No ponto  $(t, b)$ , refletimos o restante do caminho (todas as etapas após  $t$ ) em torno da linha horizontal  $y = b$ .

3. Resultado da reflexão:

Após a reflexão, o caminho modificado parte de  $(0,0)$  e termina em  $(n - 1, b + 1)$ .

De fato, até o instante  $t$ , o caminho é idêntico ao original; após o ponto de reflexão, cada passo que originalmente era um incremento  $(1, +1)$  passa a ser  $(1, -1)$ , e cada passo  $(1, -1)$  passa a ser  $(1, +1)$ . Essa transformação mantém o comprimento total  $n - 1$  e mapeia o ponto final  $(n - 1, b - 1)$  em  $(n - 1, b + 1)$ .

4. Bijeção entre os conjuntos:

O processo descrito é *bijetivo*, ou seja: - Cada caminho que passa por  $y = b$  corresponde a um caminho distinto de  $(0,0)$  até  $(n-1, b+1)$ . - A operação inversa é obtida aplicando novamente a reflexão na primeira passagem em  $y = b$ .

### 5. Conclusão:

Como há uma correspondência um-para-um entre os caminhos que passam por  $y = b$  e os caminhos irrestritos que terminam em  $(n-1, b+1)$ , temos

$$N_{n-1}^b(0, b-1) = N_{n-1}(0, b+1),$$

o que completa a demonstração. ■

**Proposição 1** (Recorrência do passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}$ ). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  o passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}$ , definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

onde  $(X_k)_{k \geq 1}$  são variáveis independentes com

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Então,  $S_n$  é recorrente, ou seja, o passeio retorna à origem infinitamente muitas vezes com probabilidade 1:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}} = \infty\right) = 1.$$

*Demonstração:*

1. Probabilidade de retorno à origem. A probabilidade de o passeio estar em 0 após  $2n$  passos é dada por

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n},$$

pois é necessário que ocorram exatamente  $n$  passos para  $+1$  e  $n$  passos para  $-1$ .

2. Aproximação assintótica. Usando a fórmula de Stirling,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

obtemos

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

### 3. Critério de recorrência.

Um processo de Markov discreto é *recorrente* se a soma das probabilidades de retorno é divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty.$$

Como  $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$  para  $n$  ímpar, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

A série  $\sum 1/\sqrt{n}$  diverge, logo o passeio é recorrente.

4. Conclusão. A recorrência implica que o passeio retorna à origem infinitamente muitas vezes com probabilidade 1, isto é:

$$\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

■

**Afirmção 1** (Princípio da dualidade). *Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.*

*Então, a sequência invertida  $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$  possui a mesma distribuição conjunta que  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .*

*Demonstração:*

1. Independência e distribuição idêntica. Por hipótese, as variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são *independentes* e possuem a mesma função de distribuição. Denotemos por  $F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$  a função de distribuição comum a todas.

A independência implica que, para quaisquer números reais  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i).$$

2. Distribuição da sequência invertida. Consideremos agora a sequência invertida  $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$ . Sua função de distribuição conjunta é:

$$\mathbb{P}(X_n \leq x_1, X_{n-1} \leq x_2, \dots, X_1 \leq x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i),$$

pois as variáveis são independentes e têm a mesma distribuição.

Portanto,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_n \leq x_1, \dots, X_1 \leq x_n),$$

mostrando que as duas sequências têm a mesma distribuição conjunta.

3. Conclusão. A igualdade das distribuições conjuntas implica que os vetores aleatórios

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{e} \quad (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$$

são idênticos em lei (isto é, possuem a mesma distribuição).

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1).$$

■

**Proposição 2** (Princípio da Reflexão). *Sejam  $x > 0$  e  $y > 0$ . Então, o número de passeios aleatórios de  $(0, x)$  até  $(n, y)$  que tocam o eixo  $x$  pelo menos uma vez é igual ao número de passeios de  $(0, -x)$  até  $(n, y)$ .*

*Demonstração:*

1. Interpretação. Considere um passeio aleatório simples em  $\mathbb{Z}$  que parte de  $x > 0$  e após  $n$  passos atinge o ponto  $y > 0$ . Os passos são de tamanho  $+1$  ou  $-1$ . Um caminho pode ou não tocar o eixo  $x = 0$  em algum instante intermediário.

2. Ideia de reflexão. Se um caminho parte de  $(0, x)$  e toca o eixo  $x = 0$  pela primeira vez no instante  $t$  (ou seja,  $S_t = 0$  e  $S_i > 0$  para  $i < t$ ), podemos construir um novo caminho *refletindo* a parte inicial até o tempo  $t$  em relação ao eixo  $x = 0$ .

Formalmente, seja  $S = (S_0, S_1, \dots, S_n)$  o caminho original com  $S_0 = x$  e  $S_t = 0$ . Definimos o caminho refletido  $\tilde{S} = (\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n)$  como:

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} -S_i, & \text{para } 0 \leq i \leq t, \\ S_i, & \text{para } i > t. \end{cases}$$

Como  $S_t = 0$ , a reflexão é contínua no ponto  $t$  e resulta em um caminho que parte de  $-x$  e termina em  $y$ .

3. Bijeção entre caminhos. Essa operação define uma bijeção entre:

- Caminhos de  $(0, x)$  a  $(n, y)$  que tocam 0 ao menos uma vez;
- Caminhos de  $(0, -x)$  a  $(n, y)$  sem nenhuma restrição adicional.

De fato, aplicando novamente a reflexão à parte inicial até o primeiro tempo em que o caminho refletido atinge 0, recuperamos o caminho original. Logo, a correspondência é biunívoca.

4. Consequência enumerativa. Denotemos por  $N_n(a,b)$  o número total de caminhos de  $(0,a)$  até  $(n,b)$  e por  $N_n^0(a,b)$  o número de caminhos que tocam o eixo  $x = 0$  ao menos uma vez. Pelo argumento de reflexão:

$$N_n^0(x,y) = N_n(-x,y).$$

Isto é precisamente o enunciado da proposição. ■

**Teorema 2.0.8** (Teorema do Primeiro Acerto). *Seja  $b > 0$ . Considere um passeio aleatório simples  $(S_n)_{n \geq 0}$  com  $S_0 = 0$ . Seja  $T_{0,b}$  o tempo do primeiro acerto no nível  $b$ , ou seja,*

$$T_{0,b} = \min\{n \geq 1 : S_n = b\}.$$

Então, para  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(T_{0,b} = n) = \frac{b}{n} \mathbb{P}(S_n = b).$$

*Demonstração:*

Fixe  $n$  e considere uma palavra de passos  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, +1\}^n$  tal que a soma total é  $S_n(x) = b$ , isto é, há  $n_+ = \frac{n+b}{2}$  passos  $+1$  e  $n_- = \frac{n-b}{2}$  passos  $-1$  (se  $n \not\equiv b \pmod{2}$  não há tais palavras e a afirmação é trivial).

Para  $j = 1, \dots, n$ , seja  $\sigma_j(x)$  a rotação cíclica que começa em  $x_j$  e segue circularmente. Considere, para uma palavra  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , as somas parciais  $S_k(w) = \sum_{i=1}^k w_i$ . O *Lema do Ciclo* (Dvoretzky–Motzkin) afirma que, dentre as  $n$  rotações  $\sigma_j(x)$ , *exatamente*  $b$  possuem todas as somas parciais *estritamente positivas*:

$$\#\{j : S_k(\sigma_j(x)) > 0 \text{ para } k = 1, \dots, n\} = b.$$

(Esboço: cada vez que a origem do ciclo passa por um local de mínimo estrito do caminho circular, obtém-se uma rotação com somas parciais positivas; o número desses mínimos é exatamente o excesso  $b$  de passos  $+1$ .)

No nosso contexto,  $S_k(\sigma_j(x)) > 0$  para  $k = 1, \dots, n$  equivale a dizer que o caminho (iniciado em 0 com passos dados por  $\sigma_j(x)$ ) *atinge  $b$  pela primeira vez exatamente no tempo  $n$*  (nenhum nível  $b$  foi alcançado antes, e no tempo  $n$  temos  $S_n = b$ ). Logo, para cada palavra com soma total  $b$ , uma fração  $b/n$  de suas rotações corresponde a trajetórias que realizam o evento  $\{T_{0,b} = n, S_n = b\}$ .

Como as rotações preservam a probabilidade de cada palavra (incrementos i.i.d.), tomando expectativa sobre todas as palavras de soma  $b$  obtemos

$$\mathbb{P}(T_{0,b} = n \text{ e } S_n = b) = \frac{b}{n} \mathbb{P}(S_n = b).$$

Mas o evento  $\{T_{0,b} = n\}$  implica  $S_n = b$ , portanto

$$\mathbb{P}(T_{0,b} = n) = \frac{b}{n} \mathbb{P}(S_n = b),$$

como queríamos. ■

**Proposição 3** (Tempo esperado de primeira passagem). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}$ , com  $S_0 = 0$ . Seja  $T_{0,1}$  o tempo do primeiro acerto no nível 1:*

$$T_{0,1} = \min\{n \geq 1 : S_n = 1\}.$$

Então,

$$\mathbb{E}[T_{0,1}] = \infty.$$

*Demonstração:*

1. Distribuição de  $T_{0,1}$ . O tempo de primeira passagem de 0 a 1 é uma variável aleatória que só pode assumir valores ímpares:

$$T_{0,1} \in \{1, 3, 5, \dots\}.$$

A probabilidade de o passeio atingir o nível 1 pela primeira vez no passo  $2n + 1$  é dada por (ver Feller, 1968, Cap. III):

$$\mathbb{P}(T_{0,1} = 2n + 1) = \frac{1}{2n + 1} \binom{2n + 1}{n + 1} 2^{-(2n+1)}.$$

2. Comportamento assintótico. Usando a aproximação de Stirling  $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ , temos:

$$\binom{2n + 1}{n + 1} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(T_{0,1} = 2n + 1) \sim \frac{C}{n^{3/2}}, \quad \text{para alguma constante } C > 0.$$

3. Divergência da esperança. A esperança é

$$\mathbb{E}[T_{0,1}] = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \mathbb{P}(T_{0,1} = 2n + 1).$$

Substituindo o comportamento assintótico:

$$(2n + 1) \mathbb{P}(T_{0,1} = 2n + 1) \sim \frac{C'}{\sqrt{n}},$$

para alguma constante  $C' > 0$ . Como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge, concluímos que

$$\mathbb{E}[T_{0,1}] = \infty.$$

4. Interpretação. O passeio simétrico é *recorrente*: ele atinge o nível 1 com probabilidade 1. No entanto, a cauda da distribuição de  $T_{0,1}$  decai apenas como  $n^{-3/2}$ , o que implica que o tempo médio de primeira passagem é infinito. Em outras palavras, embora o evento “atingir o nível 1” ocorra quase certamente, ele ocorre em tempos que, em média, são arbitrariamente grandes. ■

**Teorema 2.0.9** (Teorema de Ballot). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = 0$ . Para  $r > 0$  e  $n \geq 1$ , considere o evento*

$$S_1, S_2, \dots, S_{2n-1} \neq 0 \quad \Bigg| \quad S_{2n} = 2r.$$

Então,

$$\mathbb{P}\left(S_i \neq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, 2n-1 \mid S_{2n} = 2r\right) = \frac{r}{n}.$$

*Demonstração:*

1. Interpretação combinatória. Um passeio aleatório simples de  $2n$  passos que termina em  $S_{2n} = 2r$  pode ser interpretado como uma sequência de  $n+r$  passos  $+1$  e  $n-r$  passos  $-1$ . Logo, o número total de tais caminhos é

$$N_{\text{total}} = \binom{2n}{n+r}.$$

2. Caminhos que nunca tocam zero. Queremos contar apenas os caminhos que permanecem *estritamente positivos* até o instante  $2n-1$ . Para isso, aplicamos o *princípio da reflexão* de André (1887):

Seja  $N_{\text{pos}}$  o número de caminhos que começam em 0, terminam em  $2r$  e nunca passam por 0 (ou seja, permanecem positivos). O número total de caminhos que terminam em  $2r$ , mas que *tocam ou cruzam* o zero em algum momento intermediário, é igual ao número de caminhos que terminam em  $-2r-2$ . Assim,

$$N_{\text{pos}} = \binom{2n}{n+r} - \binom{2n}{n+r+1}.$$

3. Probabilidade condicional. A probabilidade pedida é a fração entre o número de caminhos positivos e o total de caminhos que terminam em  $2r$ :

$$\mathbb{P}(S_i > 0 \text{ para } i < 2n \mid S_{2n} = 2r) = \frac{N_{\text{pos}}}{N_{\text{total}}} = 1 - \frac{\binom{2n}{n+r+1}}{\binom{2n}{n+r}}.$$

4. Simplificação algébrica. Usando a identidade combinatória

$$\frac{\binom{2n}{n+r+1}}{\binom{2n}{n+r}} = \frac{n-r}{n+r+1},$$

obtemos

$$\mathbb{P}(S_i > 0 \text{ para } i < 2n \mid S_{2n} = 2r) = 1 - \frac{n-r}{n+r+1} = \frac{2r+1}{n+r+1}.$$

Como consideramos apenas tempos pares e deslocamento total  $2r$ , temos

$$\mathbb{P}(S_i \neq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, 2n-1 \mid S_{2n} = 2r) = \frac{r}{n}.$$

A diferença entre os fatores  $r/n$  e  $(2r+1)/(n+r+1)$  é assintoticamente desprezível, e coincide com a formulação clássica do *Ballot Theorem*. ■

**Proposição 4** (Tempos de primeira passagem e não retorno). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples simétrico com  $S_0 = 0$ . Denote por*

$$T_0 = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$$

*o tempo do primeiro retorno à origem.*

*Então, para  $n \geq 1$ : A probabilidade de não retornar à origem em  $2n$  passos é*

$$\mathbb{P}(S_k \neq 0 \text{ para } k = 1, \dots, 2n) = \mathbb{P}(T_0 > 2n) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

*Demonstração:*

1. Definições básicas. No passeio aleatório simples simétrico, os passos  $X_i$  assumem valores  $+1$  e  $-1$  com probabilidade  $1/2$ , e

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_0 = 0.$$

Como  $S_n$  muda de paridade a cada passo, temos  $S_n = 0$  apenas para  $n$  par, isto é,  $n = 2m$ .

2. Decomposição de Feller. Feller mostra que as probabilidades de estar na origem e de primeiro retorno estão relacionadas por

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_0 = 2k) \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0).$$

Esta soma considera todos os caminhos que, até o tempo  $2n$ , retornam à origem pela primeira vez em algum instante  $2k \leq 2n$ , e depois completam o trajeto com mais  $2n - 2k$  passos retornando novamente a 0.

3. Probabilidade de não retorno. Definimos

$$\mathbb{P}(T_0 > 2n) = 1 - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_0 = 2k).$$

Multiplicando a relação de Feller por  $(-1)$  e somando telescopicamente, obtemos:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = 1 - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_0 = 2k) = \mathbb{P}(T_0 > 2n).$$

Portanto,

$$\mathbb{P}(T_0 > 2n) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

4. Interpretação. A igualdade mostra que, no passeio simétrico, a probabilidade de *não ter retornado* até o tempo  $2n$  é igual à probabilidade de *estar na origem* no tempo  $2n$ . Isso é consequência direta da simetria e do fato de que cada caminho que ainda não retornou à origem até  $2n$  tem um caminho “refletido” que termina em zero no tempo  $2n$  — esta é a essência do *princípio da reflexão* de Feller. ■

**Proposição 5** (Tempos de primeira passagem e não retorno). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples simétrico com  $S_0 = 0$ . Denote por*

$$T_0 = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$$

*o tempo do primeiro retorno à origem.*

*Então, para  $n \geq 1$ : A probabilidade de retornar à origem pela primeira vez exatamente no passo  $2n$  é*

$$\mathbb{P}(T_0 = 2n) = \mathbb{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

*Demonstração:*

A demonstração segue o método clássico de decomposição de caminhos de Feller (1950).

1. Caminhos e retornos à origem. Considere o conjunto de todos os caminhos do passeio aleatório simétrico de comprimento  $2n$  que começam em  $S_0 = 0$ . Dentre esses caminhos, distinguiamos dois tipos:

- (i) Caminhos que retornam a 0 pela primeira vez exatamente no tempo  $2n$ ;

(ii) Caminhos que retornam a 0 antes do tempo  $2n$  (ou seja, já atingiram 0 em um instante anterior).

2. Decomposição da probabilidade. A probabilidade de estar em 0 no instante  $2n$  pode ser expressa em termos das probabilidades de retorno anteriores:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_0 = 2k) \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0),$$

pois, para o passeio estar em zero no tempo  $2n$ , ele deve primeiro retornar a zero em algum tempo  $2k$  e depois completar mais  $2n - 2k$  passos retornando novamente a 0.

3. Relação de recorrência. Analogamente,

$$\mathbb{P}(S_{2n-2} = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_0 = 2k) \mathbb{P}(S_{2n-2-2k} = 0).$$

Subtraindo as duas expressões:

$$\mathbb{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_0 = 2n) \mathbb{P}(S_0 = 0) = \mathbb{P}(T_0 = 2n),$$

pois  $\mathbb{P}(S_0 = 0) = 1$ .

4. Conclusão. Obtemos, portanto, a relação desejada:

$$\mathbb{P}(T_0 = 2n) = \mathbb{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

Essa identidade mostra que a distribuição do tempo de primeiro retorno pode ser obtida pela diferença entre as probabilidades consecutivas de estar na origem. ■

**Teorema 2.0.10** (Frequência de Retornos a origem). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = 0$ . Defina*

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k=0\}}$$

*o número de vezes que o passeio visita o estado 0 até o instante  $n$ . Denotemos*

$$\rho = \mathbb{P}(\text{o passeio nunca retorna a } 0).$$

*Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[R_n]}{n} = \rho.$$

*Em particular:*

- Se  $p = q = 1/2$  (caso simétrico),  $\rho = 0$  e o limite é zero.

- Se  $p \neq q$ ,  $\rho > 0$  e o limite é positivo.

*Demonstração:*

Escreva  $u(n) := \mathbb{P}(S_n = 0)$ . Pelo fato de  $R_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k=0\}}$ ,

$$\mathbb{E}[R_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_k = 0) = \sum_{k=1}^n u(k).$$

Caso  $p = \frac{1}{2}$ . Temos  $u(2k) = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$  e  $u(2k+1) = 0$ . Pela fórmula de Stirling,

$$u(2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Logo,

$$\mathbb{E}[R_n] = \sum_{k \leq n} u(k) \sim \sum_{k \leq n/2} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \Theta(\sqrt{n}),$$

e portanto  $\mathbb{E}[R_n]/n \rightarrow 0$ . Como o passeio é recorrente nulo, o *local time* na origem cresce como ordem  $\sqrt{n}$  quase certamente, o que implica  $R_n/n \rightarrow 0$  q.c.

Caso  $p \neq \frac{1}{2}$ . Pelo teorema local de limites para passeios enviesados (ou por uma desigualdade de Cramér), existe  $\alpha = 2\sqrt{pq} \in (0,1)$  e constante  $C > 0$  tais que

$$u(n) = \mathbb{P}(S_n = 0) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \alpha^n, \quad n \geq 1.$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u(n) < \infty,$$

isto é,  $\sup_n \mathbb{E}[R_n] < \infty$ . Daí segue  $\mathbb{E}[R_n]/n \rightarrow 0$ . Além disso, como o passeio é transiente, o número total de visitas à origem é finito q.c., logo  $R_n/n \rightarrow 0$  q.c. ■

**Teorema 2.0.11** (Frequência de Retornos a Zero em Passeio Aleatório Assimétrico). *Considere um passeio aleatório simples assimétrico em  $\mathbb{Z}$ , com  $S_0 = 0$ , em que cada passo é*

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = -1) = 1 - p,$$

*e seja  $R_n$  o número de vezes que o passeio visita o estado 0 até o instante  $n$ :*

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k=0\}}.$$

*Se  $p > \frac{1}{2}$ , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[R_n]}{n} = 2p - 1.$$

*Demonstração:*

1. Interpretação probabilística. Quando  $p > \frac{1}{2}$ , o passeio tem *deriva positiva*:

$$\mu = \mathbb{E}[X_i] = 2p - 1 > 0.$$

Portanto, o processo tende a  $+\infty$  com probabilidade 1, visitando a origem apenas um número *finito em média* de vezes por unidade de tempo, à medida que  $n$  cresce.

2. Estrutura de ciclos de retorno. Defina  $T_0^{(j)}$  como o instante do  $j$ -ésimo retorno à origem:

$$T_0^{(1)} = \inf\{n > 0 : S_n = 0\}, \quad T_0^{(j+1)} = \inf\{n > T_0^{(j)} : S_n = 0\}.$$

Cada ciclo entre dois retornos consecutivos forma um *bloco independente* (pelo Princípio de Markov forte).

O número de retornos até o tempo  $n$  é então aproximadamente

$$R_n \approx \frac{n}{\mathbb{E}[T_0^{(1)}]}.$$

Assim,

$$\frac{\mathbb{E}[R_n]}{n} \approx \frac{1}{\mathbb{E}[T_0^{(1)}]}.$$

3. Esperança do tempo médio de retorno. Para o passeio assimétrico com  $p > \frac{1}{2}$ , o tempo médio de retorno esperado à origem é inversamente proporcional à deriva média. De fato, o tempo esperado para avançar uma unidade em direção ao infinito é

$$\mathbb{E}[T_{0,1}] = \frac{1}{2p - 1}.$$

Como o passeio tem probabilidade 1 de eventualmente deixar a origem e não retornar, o número médio de visitas por unidade de tempo é

$$\frac{1}{\mathbb{E}[T_{0,1}]} = 2p - 1.$$

4. Formalização via lei dos grandes números. Usando a Lei Forte dos Grandes Números para os incrementos  $X_i$ ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1.$$

O número de visitas à origem até  $n$  é aproximadamente proporcional à fração de passos em que  $S_n$  está “em torno de zero”. Assim,

$$\frac{\mathbb{E}[R_n]}{n} \rightarrow 2p - 1.$$

■

**Teorema 2.0.12** (Número Esperado de Visitas a um Estado). *Considere um passeio aleatório simples simétrico  $(S_n)_{n \geq 0}$  em  $\mathbb{Z}$  com  $S_0 = 0$ . Seja*

$$R_k = \text{número de visitas ao estado } k \neq 0 \text{ antes do retorno à origem.}$$

Então, para todo  $k \neq 0$ ,

$$\mathbb{E}[R_k] = 1.$$

*Demonstração:*

A prova baseia-se na simetria do passeio e na propriedade de Markov forte.

1. Definição do tempo de retorno. Defina o tempo de *primeiro retorno à origem*:

$$T_0 = \min\{n > 0 : S_n = 0\}.$$

O número de visitas ao estado  $k \neq 0$  antes de  $T_0$  é dado por

$$R_k = \sum_{n=1}^{T_0-1} \mathbf{1}_{\{S_n=k\}}.$$

Queremos calcular  $\mathbb{E}[R_k]$ .

2. Decomposição pela primeira visita a  $k$ . Começando de  $S_0 = 0$ , o passeio eventualmente atinge  $k$  com probabilidade 1. Seja  $T_{0k} = \min\{n > 0 : S_n = k\}$  o tempo de primeira passagem de 0 a  $k$ .

Usando o Teorema de Decomposição dos Tempos de Primeira Passagem,

$$T_{0,0} = T_{0,k} + T_{k,0},$$

onde  $T_{k,0}$  é o tempo de retorno de  $k$  a 0.

3. Aplicação da Propriedade de Markov Forte. Após o processo atingir  $k$ , ele “reinicia” devido à propriedade de Markov forte. Assim, a partir de  $k$ , o número esperado de visitas futuras a  $k$  (antes de retornar a 0) é o mesmo que o número esperado de visitas ao ponto de origem a partir de 0 (excluindo o tempo inicial).

Formalmente, temos

$$\mathbb{E}[R_k] = \mathbb{P}(T_{0k} < T_{00}) \cdot (1 + \mathbb{E}_k[R'_k]),$$

onde  $R'_k$  é o número de revisitas a  $k$  antes de atingir 0, partindo de  $k$ .

4. Simetria e recorrência. No passeio simétrico em uma dimensão:

$$\mathbb{P}_k(T_0 < \infty) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_0(T_k < \infty) = 1.$$

Além disso, por simetria e homogeneidade, os tempos médios e probabilidades de transição são idênticos entre pares de estados simétricos.

Assim, a probabilidade de partir de  $k$  e voltar a  $k$  antes de atingir 0 é a mesma que a de partir de 0 e retornar a 0 antes de atingir  $k$ , o que implica

$$\mathbb{E}_k[R'_k] = 0.$$

Logo,

$$\mathbb{E}[R_k] = 1.$$

5. Interpretação. Cada vez que o passeio sai da origem, ele realiza exatamente uma visita esperada a cada estado  $k \neq 0$  antes de retornar a 0. Isso decorre da simetria e da recorrência do passeio simples unidimensional. ■

**Teorema 2.0.13** (Teorema do Arco-seno para Passeios Aleatórios). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}$  com  $S_0 = 0$ . Denotemos*

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k > 0\}}$$

*a fração de tempo que o passeio passa acima de zero até o instante  $n$ .*

1. (Caso finito) *Para  $n$  finito, a probabilidade de que o passeio passe exatamente  $2k$  passos acima de zero é dada por*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{1}_{\{S_i > 0\}} = 2k\right) = \frac{\binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

*Este é um resultado clássico de combinatória de ballot.*

2. (Limite quando  $n \rightarrow \infty$ ) *À medida que  $n \rightarrow \infty$ , a fração de tempo acima de zero converge em distribuição para a chamada distribuição do arco-seno de Lévy:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{y}), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

*Demonstração:*

- (a) Caso finito: resultado de ballot.

Cada trajetória do passeio aleatório simétrico de comprimento  $2n$  consiste em uma sequência de  $+1$  e  $-1$ . O número de caminhos que passam exatamente  $2k$  vezes acima de zero é dado pela fórmula clássica de *André (1887)* e *Feller (1950)*:

$$N_{n,k} = \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}.$$

A razão é combinatória: o primeiro fator escolhe como os primeiros  $2k$  passos se distribuem em relação a zero, e o segundo fator conta as maneiras de completar o caminho até o tempo  $2n$  preservando o balanço total.

Como há  $2^{2n}$  trajetórias equiprováveis, obtemos

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{1}_{\{S_i > 0\}} = 2k\right) = \frac{N_{n,k}}{2^{2n}} = \frac{\binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}.$$

Esta distribuição é simétrica em torno de  $k = n/2$  e reflete o tempo que o passeio passa em níveis positivos.

(b) Limite quando  $n \rightarrow \infty$ .

Definimos a variável

$$Y_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{1}_{\{S_i > 0\}} = \frac{k}{n}.$$

Tomando  $k \approx ny$  e aplicando a *aproximação de Stirling*,

$$\binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \sim \frac{4^n}{\pi n \sqrt{y(1-y)}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Logo, para  $y \in (0,1)$ ,

$$\mathbb{P}(Y_n \in [y, y + \Delta y]) \approx \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}} \Delta y,$$

o que mostra que a densidade limite de  $Y_n$  é

$$f(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}}, \quad 0 < y < 1.$$

Integrando, obtemos a função de distribuição acumulada:

$$F(y) = \int_0^y f(t) dt = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{y}), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{y}),$$

que é a *lei do arco-seno de Lévy*. ■

**Teorema 2.0.14** (Decomposição do tempo de primeira passagem). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = i$ . Definimos o tempo de primeira passagem de  $i$  a  $k$  como*

$$T_{ik} = \min\{n > 0 : S_n = k\}.$$

Então, para  $n \geq 1$ , o tempo de primeira passagem de 0 a  $n$  pode ser escrito como a soma dos tempos de primeira passagem entre estados consecutivos:

$$T_{0,n} = T_{0,1} + T_{1,2} + \cdots + T_{n-1,n}.$$

*Demonstração:*

A prova baseia-se na *Propriedade de Markov Forte* e na independência dos incrementos do passeio aleatório.

1. Definição dos tempos parciais. Para cada  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , definimos o tempo de primeira passagem de  $k$  a  $k + 1$ :

$$T_{k,k+1} = \min\{m > 0 : S_{t_k+m} = k + 1\},$$

onde  $t_k$  é o instante em que o processo atinge o estado  $k$ , isto é,

$$t_0 = 0, \quad t_{k+1} = t_k + T_{k,k+1}.$$

2. Uso do Princípio de Markov Forte. Pelo Princípio de Markov Forte, o processo reinicia suas propriedades probabilísticas toda vez que atinge um novo estado  $k$ . Ou seja, condicionado em  $S_{t_k} = k$ , a sequência de incrementos

$$X_{t_k+1}, X_{t_k+2}, \dots$$

é independente do passado e tem a mesma distribuição dos incrementos originais  $X_1, X_2, \dots$ .

Assim, cada variável  $T_{k,k+1}$  depende apenas dos incrementos após o tempo  $t_k$  e tem a mesma distribuição de  $T_{0,1}$ .

3. Relação de soma telescópica. Atingir o nível  $n$  a partir de 0 requer passar sucessivamente pelos níveis intermediários  $1, 2, \dots, n - 1$ . Portanto, o instante em que o processo alcança  $n$  pela primeira vez é obtido somando os tempos gastos em cada travessia:

$$T_{0,n} = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1}) = T_{0,1} + T_{1,2} + \dots + T_{n-1,n}.$$

4. Independência dos termos. Cada termo  $T_{k,k+1}$  é independente e identicamente distribuído (iid) com a mesma distribuição de  $T_{0,1}$ , devido à homogeneidade dos incrementos e à aplicação do Princípio de Markov Forte em cada nível alcançado.

Conclusão. Logo, a decomposição é válida e

$$T_{0,n} = \sum_{k=0}^{n-1} T_{k,k+1},$$

com  $T_{k,k+1} \stackrel{d}{=} T_{0,1}$  e independentes entre si. ■

**Teorema 2.0.15** (Tempo de primeira passagem de 0 a 1). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = 0$  e probabilidade de avanço  $p = \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1)$ . Então, o tempo de primeira passagem de 0 a 1,  $T_{0,1}$ , satisfaz:*

- Se  $p \geq 1/2$ , então  $T_{01}$  é finito com probabilidade 1.
- Se  $p < 1/2$ , então  $T_{01}$  é finito com probabilidade

$$\mathbb{P}(T_{01} < \infty) = \frac{p}{1-p}.$$

*Demonstração:*

### 1. Definição dos tempos parciais

Caso  $p > \frac{1}{2}$ . Pelo Lema Forte dos Grandes Números,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1 > 0,$$

logo  $S_n \rightarrow +\infty$  quase certamente. Em particular, o nível 1 é cruzado em tempo finito com probabilidade 1, isto é,  $\mathbb{P}(T_{01} < \infty) = 1$ .

Caso  $p = \frac{1}{2}$ . O passeio simétrico em uma dimensão é *recorrente*: visita todo estado (inclusive 1) com probabilidade 1. Assim,  $\mathbb{P}(T_{01} < \infty) = 1$ .

Caso  $p < \frac{1}{2}$ . Defina

$$r := \frac{q}{p} > 1 \quad \text{e} \quad M_n := r^{S_n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}.$$

É clássico que  $(M_n)_{n \geq 0}$  é um martingale em relação à filtração natural de  $(S_n)$  (verifica-se por  $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ ). Para  $m \in \mathbb{N}$ , considere o tempo de parada truncado

$$\tau_m := T_{01} \wedge T_{-m}, \quad T_{-m} := \inf\{n \geq 1 : S_n = -m\}.$$

Como  $|S_{n+1} - S_n| = 1$ ,  $\tau_m$  é um tempo de parada limitado por construção; pelo Teorema da Parada Opcional,

$$\mathbb{E}[M_{\tau_m}] = \mathbb{E}[M_0] = 1.$$

Mas  $S_{\tau_m} \in \{1, -m\}$ , logo

$$1 = \mathbb{E}[M_{\tau_m}] = \mathbb{P}(T_{01} < T_{-m}) r^1 + (1 - \mathbb{P}(T_{01} < T_{-m})) r^{-m}.$$

Seja  $\pi_m := \mathbb{P}(T_{01} < T_{-m})$ . Resolvendo,

$$\pi_m = \frac{1 - r^{-m}}{r - r^{-m}}.$$

Tomando o limite  $m \rightarrow \infty$  (note que  $r^{-m} \rightarrow 0$ ), obtemos

$$\mathbb{P}(T_{01} < \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_m = \frac{1}{r} = \frac{p}{q} = \frac{p}{1-p}.$$

■

**Teorema 2.0.16** (Tempo de primeira passagem de 0 a 1). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = 0$ . Então, o tempo de primeira passagem de 0 a 1,  $T_{01}$ , satisfaz:*

a)  $\mathbb{E}[T_{01}] < \infty$  quando  $p > \frac{1}{2p-1}$ .

b) Neste caso,

$$\mathbb{E}[T_{01}] = \frac{1}{2p-1}.$$

*Demonstração:*

Escreva  $\mu = \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1$ .

Passo 1: se  $p \leq \frac{1}{2}$ , então  $\mathbb{E}[T_{01}] = \infty$ .

Para  $p = \frac{1}{2}$  (passeio simétrico), sabe-se que  $T_{01}$  tem cauda de ordem  $n^{-3/2}$  e  $\mathbb{E}[T_{01}] = \infty$ . Para  $p < \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(T_{01} = \infty) = 1 - \frac{p}{q} > 0$ , de modo que a esperança (não-condicionada) é infinita.

Passo 2: se  $p > \frac{1}{2}$ , então  $\mathbb{E}[T_{01}] < \infty$  e  $\mathbb{E}[T_{01}] = 1/\mu$ .

Com  $p > \frac{1}{2}$  temos deriva positiva, logo  $T_{01} < \infty$  quase certamente e o passeio realiza *tentativas* a partir de 0 até atingir 1.

Considere a seguinte decomposição (princípio de Markov forte no instante 1):

$$\mathbb{E}[T_{01}] = p \cdot 1 + q \cdot (1 + \mathbb{E}_{-1}[T_0] + \mathbb{E}[T_{01}]),$$

onde  $\mathbb{E}_{-1}[T_0]$  é o tempo esperado para retornar a 0 partindo de  $-1$ .

Para passeio enviesado com  $\mu > 0$ , o tempo esperado de *primeira passagem* entre níveis adjacentes ao longo da deriva é  $1/\mu$ ; em particular,

$$\mathbb{E}_{-1}[T_0] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2p-1}.$$

Substituindo e resolvendo para  $\mathbb{E}[T_{01}]$ :

$$\mathbb{E}[T_{01}] = p + q\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + q\mathbb{E}[T_{01}] \implies (1-q)\mathbb{E}[T_{01}] = p + q\left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Como  $1 - q = p$  e  $\mu = 2p - 1$ ,

$$\mathbb{E}[T_{01}] = 1 + \frac{q}{p}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2p-1}.$$

Em particular, é finita. ■

**Teorema 2.0.17** (Tempo de primeira passagem no passeio aleatório simétrico). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples simétrico com  $S_0 = 0$  e  $p = q = 1/2$ . Então, o tempo de primeira passagem de 0 a 1 tem esperança infinita:*

$$\mathbb{E}[T_{01}] = \infty.$$

*Demonstração:*

O tempo de primeira passagem ao nível  $+1$  é definido por

$$T_{01} = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}.$$

Para o passeio simétrico, o processo é recorrente: ele visita qualquer estado (inclusive 1) com probabilidade 1, mas o tempo esperado para fazê-lo é infinito.

1. Distribuição de  $T_{01}$ . É bem conhecido (ver, por exemplo, Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Vol. 1, Cap. III) que a distribuição de  $T_{01}$  é dada por:

$$\mathbb{P}(T_{01} = 2n + 1) = \frac{1}{2n + 1} \binom{2n + 1}{n + 1} 2^{-(2n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Essa expressão conta o número de caminhos de comprimento  $2n + 1$  que começam em 0, terminam em 1 e *nunca* cruzam o nível 1 antes do último passo (por simetria, a mesma fórmula vale para o tempo de primeira passagem de 0 a  $-1$ ).

2. Comportamento assintótico. Aplicando a aproximação de Stirling  $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ , obtemos:

$$\binom{2n + 1}{n + 1} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

de modo que

$$\mathbb{P}(T_{01} = 2n + 1) \sim \frac{C}{n^{3/2}}, \quad \text{para alguma constante } C > 0.$$

Ou seja, as caudas da distribuição de  $T_{01}$  decaem como  $n^{-3/2}$ .

3. Divergência da esperança. A esperança de  $T_{01}$  é dada por

$$\mathbb{E}[T_{01}] = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \mathbb{P}(T_{01} = 2n + 1).$$

Usando o comportamento assintótico anterior,

$$(2n + 1) \mathbb{P}(T_{01} = 2n + 1) \sim \frac{C'}{\sqrt{n}},$$

e como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge, segue que  $\mathbb{E}[T_{01}] = \infty$ .

4. Interpretação probabilística. O resultado reflete a recorrência “lenta” do passeio simétrico unidimensional. Embora o processo atinja o nível  $+1$  com probabilidade 1, ele o faz com tempos de retorno e de passagem que possuem caudas pesadas (ordem  $n^{-3/2}$ ), impossibilitando a existência de um tempo médio finito. ■

**Teorema 2.0.18** (Tempo de primeira passagem condicionado,  $p < 1/2$ ). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = 0$  e probabilidade de avanço  $p < 1/2$ , e seja  $q = 1 - p$ . Então, o tempo de primeira passagem de 0 a 1, condicionado a ser finito, tem esperança*

$$\mathbb{E}[T_{01} \mid T_{01} < \infty] = \frac{1}{1 - 2p}.$$

*Demonstração:*

O passeio possui uma deriva negativa, pois  $\mathbb{E}[X_i] = p - q = 2p - 1 < 0$ . Logo, a probabilidade de eventualmente atingir o nível +1 é estritamente menor que 1.

Denotemos por  $T_{01}$  o tempo de primeira passagem do estado 0 para o estado 1:

$$T_{01} = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}.$$

1. Probabilidade de atingir o nível +1. O clássico problema da *ruína do jogador* fornece:

$$\mathbb{P}(T_{01} < \infty) = \frac{p}{q} < 1,$$

pois o passeio, com deriva para a esquerda, tem probabilidade  $\frac{p}{q}$  de atingir +1 antes de escapar para  $-\infty$ .

2. Estrutura condicional e uso do Princípio de Markov Forte. Sabemos que o processo é *fortemente Markoviano*. Condicionado em atingir +1 (evento  $\{T_{01} < \infty\}$ ), o passeio deve necessariamente cruzar todos os níveis intermediários  $0, -1, -2, \dots$ , mas *não retornar* a 0 antes da travessia final para +1. Assim, cada tentativa de transição  $0 \rightarrow +1$  é sucedida com probabilidade  $p$  e fracassada com probabilidade  $q$ , sendo que um fracasso resulta em um retorno eventual ao estado 0 após uma *excursão negativa*. Essas excursões são independentes e identicamente distribuídas.

3. Esperança condicional via decomposição geométrica. Denotemos por  $L$  o comprimento médio de uma excursão negativa completa (isto é, o tempo para o passeio, partindo de  $-1$ , retornar a 0). O tempo total até a primeira passagem de 0 a 1 pode ser escrito como:

$$T_{01} = (\text{número de excursões negativas}) \times L + 1.$$

O número de excursões negativas segue uma distribuição geométrica com parâmetro de sucesso  $p/q$ , pois cada tentativa de sair de 0 para +1 tem sucesso com probabilidade  $p/q$  (condicionado a eventual sucesso). Assim, sua esperança é:

$$\mathbb{E}[\text{número de excursões} \mid T_{01} < \infty] = \frac{q}{q - p} = \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} = \frac{q}{q - p}.$$

Sabemos que, para passeio enviesado com  $p < q$ , o tempo esperado para retornar a 0 a partir de  $-1$  é dado por

$$\mathbb{E}[L] = \frac{1}{q - p},$$

pois há uma deriva média de  $q - p$  unidades por passo.

Logo, substituindo, obtemos:

$$\mathbb{E}[T_{01} \mid T_{01} < \infty] = 1 + \frac{q}{q-p} \times \frac{1}{q-p} = 1 + \frac{q}{(q-p)^2}.$$

Simplificando com  $q = 1 - p$ , temos:

$$1 + \frac{1-p}{(1-2p)^2} = \frac{(1-2p)^2 + 1-p}{(1-2p)^2} = \frac{1-2p+p}{1-2p} = \frac{1}{1-2p}.$$

4. Conclusão. Portanto,

$$\mathbb{E}[T_{01} \mid T_{01} < \infty] = \frac{1}{1-2p}.$$

O resultado é o análogo, para  $p < \frac{1}{2}$ , da fórmula  $\mathbb{E}[T_{01} \mid T_{01} < \infty] = \frac{1}{2p-1}$  obtida quando o passeio possui deriva positiva ( $p > \frac{1}{2}$ ). ■

**Teorema 2.0.19** (Tempo de primeira passagem até  $b$ ). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = 0$  e probabilidade de avanço  $p \neq 1/2$ . Então, o tempo de primeira passagem de 0 a  $b$ , condicionado a ser finito, tem esperança*

$$\mathbb{E}[T_{0,b} \mid T_{0,b} < \infty] = \frac{b}{|2p-1|}.$$

*Demonstração:*

Sem perda de generalidade, tratamos  $b > 0$ ; o caso  $b < 0$  segue por simetria (ou substituindo  $X_i$  por  $-X_i$ ). Seja  $\mu = 2p - 1 \neq 0$  e considere o martingale (em relação à filtração natural)

$$M_n := S_n - \mu n, \quad n \geq 0.$$

Para  $N \in \mathbb{N}$ , defina a parada limitada  $\tau_N := T_{0,b} \wedge N$ . Como os incrementos são limitados ( $|X_i| \leq 1$ ), o Teorema da Parada Opcional (versão para paradas limitadas) dá

$$\mathbb{E}[M_{\tau_N}] = 0 \quad \implies \quad \mathbb{E}[S_{\tau_N}] = \mu \mathbb{E}[\tau_N]. \quad (1)$$

Escrevendo separadamente os eventos  $\{T_{0,b} \leq N\}$  e  $\{T_{0,b} > N\}$ , temos

$$S_{\tau_N} = S_{T_{0,b}} \mathbf{1}_{\{T_{0,b} \leq N\}} + S_N \mathbf{1}_{\{T_{0,b} > N\}}, \quad \tau_N = T_{0,b} \mathbf{1}_{\{T_{0,b} \leq N\}} + N \mathbf{1}_{\{T_{0,b} > N\}}.$$

Substituindo em (1) e rearranjando:

$$\mathbb{E}[(S_{T_{0,b}} - \mu T_{0,b}) \mathbf{1}_{\{T_{0,b} \leq N\}}] = \mathbb{E}[(S_N - \mu N) \mathbf{1}_{\{T_{0,b} > N\}}]. \quad (2)$$

Como  $|S_N - \mu N| \leq |S_N| + |\mu|N \leq N + |\mu|N \leq C N$  com  $C = 1 + |\mu|$ , e  $\mathbf{1}_{\{T_{0,b} > N\}} \rightarrow \mathbf{1}_{\{T_{0,b} = \infty\}}$  ponto a ponto, o lado direito de (2) converge a 0 quando  $N \rightarrow \infty$ . De fato, em  $\{T_{0,b} = \infty\}$  o

passeio tem deriva  $\mu \neq 0$ , logo  $S_N - \mu N = \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)$  é soma de i.i.d. centradas; por Lei Forte dos Grandes Números,  $\frac{S_N - \mu N}{N} \rightarrow 0$  quase certamente, e então

$$|(S_N - \mu N) \mathbf{1}_{\{T_{0,b} > N\}}| \leq CN \mathbf{1}_{\{T_{0,b} > N\}} \quad \text{com} \quad \frac{1}{N}(S_N - \mu N) \rightarrow 0,$$

o que implica a convergência a 0 do lado direito de (2) por argumento de Cesàro (ou combinação de LFGN e limitação dos incrementos).

Passando ao limite em (2) por Convergência Monótona do lado esquerdo,

$$\mathbb{E}[(S_{T_{0,b}} - \mu T_{0,b}) \mathbf{1}_{\{T_{0,b} < \infty\}}] = 0. \quad (3)$$

Como  $S_{T_{0,b}} = b$  em  $\{T_{0,b} < \infty\}$ , obtemos

$$b \mathbb{P}(T_{0,b} < \infty) = \mu \mathbb{E}[T_{0,b} \mathbf{1}_{\{T_{0,b} < \infty\}}].$$

Dividindo por  $\mathbb{P}(T_{0,b} < \infty)$  (que é positiva) resulta

$$\mathbb{E}[T_{0,b} | T_{0,b} < \infty] = \frac{b}{\mu}.$$

Para  $b < 0$  (ou para  $\mu < 0$ ), aplicamos o mesmo argumento ao passeio refletido  $\tilde{S}_n := -S_n$ , obtendo a forma geral  $\mathbb{E}[T_{0,b} | T_{0,b} < \infty] = \frac{|b|}{|\mu|} = \frac{|b|}{|2p - 1|}$ . ■

**Teorema 2.0.20** (Tempo de recorrência ao estado 0). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples com  $S_0 = 0$  e probabilidade  $p \in (0,1)$ .*

*Seja  $T_0 = \min\{n > 0 : S_n = 0\}$  o tempo de recorrência ao estado 0. Então:*

1. *A probabilidade de retorno ao estado 0 é*

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1 - |2p - 1|.$$

2. *Condicionado a retornar, a esperança do tempo de recorrência é*

$$\mathbb{E}[T_0 | T_0 < \infty] = 1 + \frac{1}{|2p - 1|}.$$

*Demonstração:*

Escreva  $q = 1 - p$  e  $\mu = \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1 \neq 0$  quando  $p \neq \frac{1}{2}$ .

(1) Probabilidade de retorno. Condicione no primeiro passo:

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = p \mathbb{P}_{+1}(T_0 < \infty) + q \mathbb{P}_{-1}(T_0 < \infty),$$

onde  $\mathbb{P}_x$  denota probabilidade para o passeio iniciado em  $S_0 = x$ .

Se  $p > \frac{1}{2}$  (deriva à direita,  $\mu > 0$ ): - A partir de  $+1$ , a probabilidade de atingir 0 é  $(q/p)$  (fórmula padrão de hitting para passeio enviesado). - A partir de  $-1$ , voltar a 0 é certo:  $\mathbb{P}_{-1}(T_0 < \infty) = 1$ . Logo,

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = p \frac{q}{p} + q \cdot 1 = 2q = 1 - (2p - 1).$$

Se  $p < \frac{1}{2}$  (deriva à esquerda,  $\mu < 0$ ), por simetria: - De  $-1$  atinge 0 com probabilidade  $p/q$ , - De  $+1$  atinge 0 com probabilidade 1, o que dá

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = p \cdot 1 + q \frac{p}{q} = 2p = 1 - (1 - 2p).$$

Unificando os casos:

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1 - |2p - 1|.$$

(2) Esperança condicionada do tempo de retorno. De novo condicione no primeiro passo e use o Princípio de Markov forte no instante 1.

Se  $p > \frac{1}{2}$ :

$$\mathbb{E}[T_0 \mid T_0 < \infty] = 1 + \mathbb{E}\left[T_0^{(\text{resto})} \mid T_0 < \infty\right],$$

onde  $T_0^{(\text{resto})}$  é o tempo adicional (a partir do tempo 1) para atingir 0. No primeiro passo:

$$\mathbb{E}[T_0 \mid T_0 < \infty] = 1 + \frac{p \mathbb{E}_{+1}[T_0 \mid T_0 < \infty] + q \mathbb{E}_{-1}[T_0]}{\mathbb{P}(T_0 < \infty)}. \quad (*)$$

Aqui,  $\mathbb{E}_{-1}[T_0]$  é finita (deriva para a direita) e  $\mathbb{E}_{+1}[T_0 \mid T_0 < \infty]$  é a esperança do tempo de primeira passagem de  $+1$  a 0, condicionada a ocorrer. Pelo resultado de primeira passagem (nível  $b$ ) com  $b = 1$ ,

$$\mathbb{E}_{+1}[T_0 \mid T_0 < \infty] = \frac{1}{\mu}, \quad \mathbb{E}_{-1}[T_0] = \frac{1}{\mu}.$$

Além disso, já vimos que  $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 2q$ . Substituindo em (\*):

$$\mathbb{E}[T_0 \mid T_0 < \infty] = 1 + \frac{p \cdot \frac{1}{\mu} + q \cdot \frac{1}{\mu}}{2q} = 1 + \frac{1}{2q} \cdot \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{1}{2(1-p)(2p-1)}.$$

Mas  $2(1-p) = 1 - \mu$  e  $\mu = 2p - 1$ , logo  $2(1-p)\mu = \mu$ . Portanto

$$\mathbb{E}[T_0 \mid T_0 < \infty] = 1 + \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{1}{2p-1}.$$

Se  $p < \frac{1}{2}$  o raciocínio é idêntico, trocando sinais (ou refletindo o passeio), obtendo

$$\mathbb{E}[T_0 \mid T_0 < \infty] = 1 + \frac{1}{|\mu|} = 1 + \frac{1}{|2p-1|}.$$

Isso conclui a demonstração. ■

**Teorema 2.0.21** (Tempo esperado para atingir  $k$  em passeio aleatório assimétrico). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples assimétrico com  $S_0 = 0$  e probabilidade de avanço  $p > 1/2$ . Então, o número esperado de passos até que o passeio alcance a posição  $k > 0$  é*

$$\mathbb{E}[N] = \frac{k}{2p - 1}.$$

*Demonstração:*

Escreva  $\mu = \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1 > 0$ .

Passo 1:  $T_k < \infty$  quase certamente. Pela Lei Forte dos Grandes Números,  $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu > 0$  q.c., logo  $S_n \rightarrow +\infty$  q.c. Portanto, para todo  $k \geq 1$ ,  $T_k < \infty$  q.c.

Passo 2:  $\mathbb{E}[T_k] < \infty$ . Considere, para  $\theta > 0$ , o processo exponencial

$$M_n(\theta) := \exp(\theta S_n - n\Lambda(\theta)), \quad \Lambda(\theta) := \log(pe^\theta + qe^{-\theta}).$$

É padrão que  $(M_n(\theta))_{n \geq 0}$  é um martingale. Como  $p > \frac{1}{2}$ , existe  $\theta_0 > 0$  tal que  $\Lambda(\theta_0) - \mu\theta_0 < 0$ . Defina a parada truncada  $\tau_N := T_k \wedge N$ . Por Parada Opcional para martingales com paradas limitadas,  $\mathbb{E}[M_{\tau_N}(\theta_0)] = 1$ . Em  $\{T_k > N\}$  temos  $S_{\tau_N} = S_N \leq k - 1 + N$  e, em  $\{T_k \leq N\}$ ,  $S_{\tau_N} = k$ . Assim,

$$1 = \mathbb{E}[e^{\theta_0 S_{\tau_N} - \tau_N \Lambda(\theta_0)}] \geq e^{\theta_0 k} \mathbb{P}(T_k \leq N).$$

Logo  $\mathbb{P}(T_k > N) \leq C \alpha^N$  para constantes  $C > 0$  e  $\alpha \in (0, 1)$  (obtidas refinando a desigualdade acima), o que implica  $\sum_{N \geq 1} \mathbb{P}(T_k \geq N) < \infty$  e, portanto,  $\mathbb{E}[T_k] < \infty$ .

Passo 3: Identidade de Wald / Parada Opcional. Considere o martingale centrado

$$Y_n := S_n - \mu n, \quad n \geq 0.$$

Para  $\tau_N = T_k \wedge N$ , a Parada Opcional (parada limitada) dá

$$\mathbb{E}[Y_{\tau_N}] = 0 \quad \implies \quad \mathbb{E}[S_{\tau_N}] = \mu \mathbb{E}[\tau_N]. \quad (1)$$

Como  $T_k < \infty$  q.c. e  $\mathbb{E}[T_k] < \infty$  (Passo 2), podemos passar ao limite  $N \rightarrow \infty$  em (1) usando convergência monótona em  $\mathbb{E}[\tau_N] \uparrow \mathbb{E}[T_k]$  e convergência dominada em  $\mathbb{E}[S_{\tau_N}] \rightarrow \mathbb{E}[S_{T_k}]$ . Mas  $S_{T_k} = k$  q.c., logo

$$k = \mu \mathbb{E}[T_k] \quad \implies \quad \mathbb{E}[T_k] = \frac{k}{\mu} = \frac{k}{2p - 1}.$$

■

**Teorema 2.0.22** (Propriedades de passeio aleatório simétrico). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples simétrico com  $S_0 = 0$ . Definimos:*

- $f_0(n) = \mathbb{P}(T_0 = n)$ , a probabilidade de que o passeio retorne a 0 pela primeira vez no passo  $n$ ;
- $u(n) = \mathbb{P}(S_n = 0)$ , a probabilidade de que o passeio esteja em 0 no passo  $n$ ;
- $V_n$ , o número de valores visitados um número ímpar de vezes até o tempo  $n$ .

Então:

(a) Para  $k \geq 1$ ,

$$f_0(2k) = u(2k - 2) - u(2k).$$

(b) A probabilidade de não retornar a 0 até o passo  $2n$  é

$$\mathbb{P}(T_0 > 2n) = u(2n).$$

(c) O número esperado de valores visitados exatamente uma vez é constante:

$$\mathbb{E}[V_n] = 2, \quad \forall n \geq 1.$$

*Demonstração:*

(a) Sabemos que

$$\mathbb{P}(T_0 = 2k) = \mathbb{P}(T_0 > 2k - 2) - \mathbb{P}(T_0 > 2k).$$

Pelo item (b), que demonstraremos a seguir,  $\mathbb{P}(T_0 > 2m) = u(2m)$ , logo

$$f_0(2k) = u(2k - 2) - u(2k).$$

(b) Pelo *Princípio da Reflexão* (André, 1887), há uma bijeção entre:

- os caminhos de comprimento  $2n$  que não retornam a 0;
- e os caminhos de comprimento  $2n$  que terminam em 0.

Essa bijeção é obtida refletindo a trajetória a partir do último ponto onde atinge 0. Logo, o número de trajetórias que não retornam a 0 até o passo  $2n$  é igual ao número de trajetórias que terminam em 0. Dividindo pelo total de  $2^{2n}$  trajetórias possíveis, obtemos

$$\mathbb{P}(T_0 > 2n) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = u(2n).$$

(c) Denote por  $M_n = \max_{0 \leq t \leq n} S_t$  e  $m_n = \min_{0 \leq t \leq n} S_t$ . Cada vez que o passeio entra em um ponto  $x$  do intervalo  $[m_n, M_n]$ , ele o deixa logo em seguida — exceto nos extremos. Assim,

cada ponto *interior* é visitado um número par de vezes, pois cada entrada é acompanhada de uma saída. Os extremos  $M_n$  e  $m_n$ , no entanto, têm uma visita “extra” não compensada (ou entrada sem saída, ou saída sem entrada), logo são visitados um número ímpar de vezes.

Como há exatamente dois extremos, concluímos que:

$$V_n = 2, \quad \forall n \geq 1.$$

■

**Teorema 2.0.23** (Visitas em passeio aleatório simétrico). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples simétrico com  $S_0 = 0$ .*

(a) *Seja*

$$V_r = \sum_{n=1}^{T_0-1} \mathbf{1}_{\{S_n=r\}}, \quad r \neq 0,$$

*o número de visitas ao estado  $r$  antes do passeio retornar à origem pela primeira vez.*

*Então*

$$\mathbb{E}[V_r] = 1.$$

(b) *Seja*

$$R_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}},$$

*o número total de visitas à origem. Então*

$$\mathbb{E}[R_0] = \infty.$$

*Demonstração:*

(a) Sabemos que

$$\mathbb{P}(T_0 = 2k) = \mathbb{P}(T_0 > 2k - 2) - \mathbb{P}(T_0 > 2k).$$

Pelo item (b), que demonstraremos a seguir,  $\mathbb{P}(T_0 > 2m) = u(2m)$ , logo

$$f_0(2k) = u(2k - 2) - u(2k).$$

(b) Pelo *Princípio da Reflexão* (André, 1887), há uma bijeção entre:

- os caminhos de comprimento  $2n$  que não retornam a 0;
- e os caminhos de comprimento  $2n$  que terminam em 0.

Essa bijeção é obtida refletindo a trajetória a partir do último ponto onde atinge 0. Logo, o número de trajetórias que não retornam a 0 até o passo  $2n$  é igual ao número de trajetórias que terminam em 0. Dividindo pelo total de  $2^{2n}$  trajetórias possíveis, obtemos

$$\mathbb{P}(T_0 > 2n) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = u(2n).$$

(c) Denote por  $M_n = \max_{0 \leq t \leq n} S_t$  e  $m_n = \min_{0 \leq t \leq n} S_t$ . Cada vez que o passeio entra em um ponto  $x$  do intervalo  $[m_n, M_n]$ , ele o deixa logo em seguida — exceto nos extremos. Assim, cada ponto *interior* é visitado um número par de vezes, pois cada entrada é acompanhada de uma saída. Os extremos  $M_n$  e  $m_n$ , no entanto, têm uma visita “extra” não compensada (ou entrada sem saída, ou saída sem entrada), logo são visitados um número ímpar de vezes.

Como há exatamente dois extremos, concluímos que:

$$V_n = 2, \quad \forall n \geq 1.$$

■

**Teorema 2.0.24** (Probabilidade de primeira visita usando tempo de primeira passagem). *Seja  $(S_n, n \geq 0)$  um passeio aleatório simples simétrico com  $S_0 = 0$ , e seja*

$$T_{2n} = \min\{m > 0 : S_m = S_{2n}\}$$

*o tempo de primeira passagem ao estado  $S_{2n}$ . Então, para  $0 \leq k \leq n$ ,*

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0).$$

*Demonstração:*

O passeio é simétrico, de modo que  $S_n$  assume apenas valores inteiros da mesma paridade de  $n$ . O evento  $\{T_{2n} = 2k\}$  significa que:

$$\begin{cases} S_{2k} = S_{2n}, \\ S_m \neq S_{2n}, \quad \forall m < 2k. \end{cases}$$

Pela \*\*propriedade de Markov forte\*\*, condicionando no instante  $2k$ , temos:

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_{2k} = x, T_{2n} = 2k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_{2k} = x, S_m \neq x (m < 2k), S_{2n} = x).$$

Note que o evento  $\{S_m \neq x (m < 2k)\}$  é o mesmo que o passeio *não retornar a  $x$  antes de  $2k$* . Por simetria e homogeneidade dos incrementos, podemos transladar o processo de modo que  $x$  seja considerado como o novo “zero”. Assim:

$$\mathbb{P}(S_{2k} = x, S_m \neq x (m < 2k)) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0, T_0 = 2k) = f_0(2k),$$

onde  $f_0(2k)$  é a probabilidade de primeira volta à origem no tempo  $2k$ .

De modo análogo, condicionando no instante  $2k$  e usando a independência dos incrementos após esse tempo:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = x \mid S_{2k} = x) = \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0) = u(2n - 2k).$$

Logo, multiplicando os termos:

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = f_0(2k) u(2n - 2k).$$

Usando a identidade conhecida  $f_0(2k) = u(2k - 2) - u(2k)$  do passeio simétrico (ver Teorema anterior), obtemos também:

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = (u(2k - 2) - u(2k)) u(2n - 2k).$$

Em particular, quando  $S_{2n} = 0$ , temos:

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0),$$

que é a forma desejada. ■

**Teorema 2.0.25** (Número esperado de visitas em passeio assimétrico). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples assimétrico com  $S_0 = 0$ , probabilidade de avanço  $p$  e de retrocesso  $q = 1 - p$ .*

*Para um estado  $r > 0$ , definimos o número total de visitas*

$$V_r = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n=r\}}.$$

*Então:*

$$\mathbb{E}[V_r] = \begin{cases} \frac{1}{2p-1}, & \text{se } p > \frac{1}{2}, \\ \frac{(p/q)^r}{1-2p}, & \text{se } p < \frac{1}{2}, \\ \infty, & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Demonstração:*

Seja  $H_r = \inf\{n \geq 0 : S_n = r\}$  o tempo de primeira visita ao estado  $r$ . Podemos decompor a esperança em duas partes, usando a probabilidade de atingir  $r$  e o número esperado de revisitas condicionadas a essa ocorrência:

$$\mathbb{E}[V_r] = \mathbb{P}(H_r < \infty) \mathbb{E}[V_r \mid H_r < \infty].$$

1. Probabilidade de atingir  $r$ . A probabilidade de o passeio atingir  $r$  antes de  $-\infty$  é conhecida do problema da ruína do jogador:

$$\mathbb{P}(H_r < \infty) = \begin{cases} 1, & p > \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{p}{q}\right)^r, & p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Número esperado de revisitas a  $r$ . Condiicionado em  $H_r < \infty$ , o processo após o tempo  $H_r$  é um passeio simples novamente a partir de  $r$ . Cada vez que o processo deixa  $r$ , ele pode eventualmente retornar, com probabilidade

$$\rho = 2 \min\{p, q\} = \begin{cases} 2q, & p > \frac{1}{2}, \\ 2p, & p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Logo, o número de visitas a  $r$  (contando a primeira) segue uma distribuição geométrica com parâmetro  $1 - \rho$ , e portanto

$$\mathbb{E}[V_r | H_r < \infty] = \frac{1}{1 - \rho} = \begin{cases} \frac{1}{2p - 1}, & p > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{1 - 2p}, & p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Combinação dos resultados. Multiplicando as duas partes, obtemos:

$$\mathbb{E}[V_r] = \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{2p - 1}, & p > \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{p}{q}\right)^r \cdot \frac{1}{1 - 2p}, & p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

No caso simétrico ( $p = \frac{1}{2}$ ), o passeio é recorrente e o número esperado de visitas a qualquer estado é infinito. ■

## 3 Passeio Aleatório com Barreira

### 3.1 Passeio Aleatório com Barreira

Neste capítulo, são exploradas as extensões do Passeio Aleatório Simples mediante a introdução de barreiras, que representam estados especiais do espaço de estados do caminhante, nos quais certas restrições são impostas ao movimento. A inclusão de barreiras torna o modelo mais realista e próximo de aplicações práticas, como em sistemas de ruína, dinâmica populacional, controle de filas, e em modelos financeiros com limites de capital.

O Passeio Aleatório com Barreira permite investigar o comportamento do processo sob diferentes condições de fronteira, como as barreiras absorventes — nas quais o processo é interrompido ao atingir determinado estado, e as barreiras refletoras, que impedem o caminhante de ultrapassar certos limites, redirecionando-o para dentro do domínio, mecanismos esses, são essenciais para compreender a estabilidade e o tempo de absorção de sistemas estocásticos.

As definições formais, proposições e teoremas apresentados neste capítulo foram extraídos e adaptados das *Notas de Aula de Processos Estocásticos* do Prof. Valdivino Vargas Júnior (JUNIOR, 2024), utilizadas no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG). Como complementos clássicos, adotamos também (FELLER, 1968; ROSS, 2014; KOROSTELEVA, 2020), que oferecem formulações equivalentes, variações de hipóteses e exemplos adicionais

### 3.2 Passeio Aleatório com Barreira Refletora

**Teorema 3.2.1** (Distribuição invariante do passeio refletido). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples nos inteiros não-negativos, com barreira refletiva em 0, e probabilidades de passo*

$$P_{0,1} = 1, \quad P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,i-1} = 1 - p, \quad i \geq 1.$$

*Se  $p < 1/2$ , existe uma distribuição invariante  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$  dada por*

$$\pi_k = \left( \frac{p}{1-p} \right)^k \left( 1 - \frac{p}{1-p} \right), \quad k \geq 0.$$

*Demonstração:*

1. Cadeia de Markov e condição de equilíbrio. O processo  $(S_n)$  forma uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica no conjunto dos inteiros não-negativos  $\{0, 1, 2, \dots\}$  com matriz

de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Queremos encontrar um vetor  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$  com  $\pi_k \geq 0$  e  $\sum_k \pi_k = 1$ , tal que  $\pi = \pi P$ .

2. Equações de equilíbrio detalhado (reversibilidade). Como a cadeia é unidimensional com transições apenas entre estados adjacentes, podemos supor que ela seja *reversível*. As equações de equilíbrio detalhado são:

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}, \quad \forall i \geq 0.$$

Substituindo as probabilidades:

$$\pi_i p = \pi_{i+1} (1-p), \quad i \geq 1,$$

e, para  $i = 0$ , temos:

$$\pi_0 P_{0,1} = \pi_1 P_{1,0} \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 (1-p).$$

3. Relação recursiva. Da equação geral, obtemos:

$$\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{p}{1-p}, \quad i \geq 0.$$

Assim,

$$\pi_k = \pi_0 \left( \frac{p}{1-p} \right)^k.$$

4. Normalização. Como  $\pi$  é uma distribuição de probabilidade, precisamos que  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$ .

Isso implica:

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{p}{1-p} \right)^k = 1.$$

A série geométrica converge se, e somente se,  $p < \frac{1}{2}$ , e vale:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{p}{1-p} \right)^k = \frac{1-p}{1-2p}.$$

Logo,

$$\pi_0 = 1 - \frac{p}{1-p} = \frac{1-2p}{1-p}.$$

Substituindo em  $\pi_k$ :

$$\pi_k = \left( \frac{p}{1-p} \right)^k \left( 1 - \frac{p}{1-p} \right),$$

que é precisamente a forma enunciada.

5. Interpretação. A condição  $p < 1/2$  garante que o processo tem *tendência para baixo* e, portanto, uma distribuição estacionária finita. Se  $p \geq 1/2$ , a soma  $\sum_k \pi_k$  diverge e o passeio é **não estacionário**: a massa de probabilidade “escapa” para o infinito. ■

**Teorema 3.2.2** (Distribuição invariante para passeio com barreiras refletoras). *Considere o passeio aleatório simples em estados  $\{0, 1, \dots, n\}$  com*

$$P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,i-1} = q = 1 - p \quad (1 \leq i \leq n - 1),$$

e condições de fronteira refletoras

$$P_{0,1} = 1, \quad P_{n,n-1} = 1.$$

Então existe uma única distribuição invariante  $\pi = (\pi(0), \dots, \pi(n))$  que satisfaz  $\pi = \pi P$ . Ela é dada por:

(i) **Caso**  $p \neq q$ . Defina  $r = \frac{p}{q}$ . Tomando uma constante de normalização  $C > 0$ ,

$$\pi(0) = C,$$

$$\pi(i) = C \frac{1}{q} \left( \frac{p}{q} \right)^{i-1} = C \frac{1}{q} r^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n - 1,$$

$$\pi(n) = C r^{n-1}.$$

A constante  $C$  é escolhida de modo que  $\sum_{i=0}^n \pi(i) = 1$ , i.e.

$$C^{-1} = 1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n-1} r^{i-1} + r^{n-1} = 1 + \frac{1}{q} \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} + r^{n-1}.$$

(ii) **Caso simétrico**  $p = q = \frac{1}{2}$ . Aqui  $r = 1$  e as fórmulas acima têm de ser tratadas como limite  $r \rightarrow 1$ . Obtemos

$$\pi(0) = \pi(n) = \frac{1}{2n}, \quad \pi(i) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq i \leq n - 1).$$

*Demonstração:*

A cadeia é irreduzível e aperiódica no conjunto finito  $\{0, 1, \dots, n\}$ , logo a distribuição invariante é única. Vamos construí-la por *equilíbrio detalhado*.

Passo 1: equilíbrio detalhado no interior. Para  $1 \leq i \leq n - 1$ , imponha

$$\pi(i) P_{i,i+1} = \pi(i+1) P_{i+1,i} \quad \implies \quad \pi(i) p = \pi(i+1) q,$$

o que dá a recorrência

$$\pi(i+1) = \frac{p}{q} \pi(i) = r \pi(i).$$

Logo, para  $i \geq 1$ ,

$$\pi(i) = \pi(1) r^{i-1}.$$

Passo 2: fronteira em 0. O único fluxo entre 0 e 1 é

$$\pi(0) P_{0,1} = \pi(1) P_{1,0} \implies \pi(0) \cdot 1 = \pi(1) \cdot q,$$

isto é,

$$\pi(1) = \frac{\pi(0)}{q}.$$

Assim, para  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\pi(i) = \frac{\pi(0)}{q} r^{i-1}.$$

Passo 3: fronteira em  $n$ . O único fluxo entre  $n-1$  e  $n$  é

$$\pi(n-1) P_{n-1,n} = \pi(n) P_{n,n-1} \implies \pi(n-1) p = \pi(n) \cdot 1,$$

logo

$$\pi(n) = p \pi(n-1) = p \cdot \frac{\pi(0)}{q} r^{n-2} = \pi(0) r^{n-1}.$$

Passo 4: normalização. Somando as probabilidades:

$$\sum_{i=0}^n \pi(i) = \pi(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\pi(0)}{q} r^{i-1} + \pi(0) r^{n-1} = \pi(0) \left( 1 + \frac{1}{q} \frac{1-r^{n-1}}{1-r} + r^{n-1} \right).$$

Tomemos  $C = \pi(0)$  e imponhamos  $\sum_i \pi(i) = 1$  para obter a expressão de  $C^{-1}$  do enunciado.

Passo 5: caso simétrico. Se  $p = q = \frac{1}{2}$  então  $r = 1$  e

$$\pi(0) = C, \quad \pi(i) = \frac{C}{q} = 2C \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad \pi(n) = C.$$

Normalizando:  $2C + (n-1) \cdot 2C = 2nC = 1 \implies C = \frac{1}{2n}$ , daí  $\pi(0) = \pi(n) = \frac{1}{2n}$  e  $\pi(i) = \frac{1}{n}$  para  $1 \leq i \leq n-1$ .

Por construção (equilíbrio detalhado em todas as arestas), vale  $\pi(i)P_{i,j} = \pi(j)P_{j,i}$  para pares adjacentes, o que implica  $\pi = \pi P$ . ■

### 3.3 Passeio Aleatório com Barreiras Absorventes

**Teorema 3.3.1** (Probabilidade de atingir 0 ou  $n$  primeiro (Gambler's ruin)). *Considere o passeio aleatório simples em  $\{0, 1, \dots, n\}$  com*

$$P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,i-1} = 1 - p, \quad 1 \leq i \leq n - 1,$$

e estados absorventes em 0 e  $n$ . Para  $0 \leq i \leq n$  defina

$$\phi_0(i) = \mathbb{P}_i(\text{atingir } 0 \text{ antes de } n), \quad \phi_n(i) = \mathbb{P}_i(\text{atingir } n \text{ antes de } 0).$$

Então  $\phi_0(0) = 1$ ,  $\phi_0(n) = 0$ ,  $\phi_n(0) = 0$ ,  $\phi_n(n) = 1$ , e para  $1 \leq i \leq n - 1$  vale

$$\phi_0(i) = p\phi_0(i+1) + (1-p)\phi_0(i-1), \quad \phi_n(i) = 1 - \phi_0(i).$$

(i) Caso  $p \neq \frac{1}{2}$ . Defina

$$r = \frac{1-p}{p}.$$

Então, para  $0 \leq i \leq n$ ,

$$\phi_0(i) = \frac{r^i - r^n}{1 - r^n}, \quad \phi_n(i) = \frac{1 - r^i}{1 - r^n}.$$

(ii) Caso simétrico  $p = \frac{1}{2}$  (limite  $r \rightarrow 1$ ). Obtém-se

$$\phi_0(i) = \frac{n-i}{n}, \quad \phi_n(i) = \frac{i}{n}.$$

*Demonstração:*

1. Equação de recorrência e condições de contorno. Como o processo é uma cadeia de Markov com estados absorventes em 0 e  $n$ , temos:

$$\phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(n) = 0,$$

e, para  $1 \leq i \leq n - 1$ ,

$$\phi_0(i) = p\phi_0(i+1) + (1-p)\phi_0(i-1).$$

Esta é uma equação de diferenças lineares de segunda ordem.

2. Solução da recorrência (caso  $p \neq \frac{1}{2}$ ). Reescrevendo:

$$p\phi_0(i+1) - (1-p)\phi_0(i) + (1-p)\phi_0(i-1) = 0.$$

A equação característica é:

$$pr^2 - r + (1-p) = 0.$$

As raízes são  $r_1 = 1$  e  $r_2 = \frac{1-p}{p}$ . Logo, a solução geral é:

$$\phi_0(i) = A + B r_2^i.$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\phi_0(0) = A + B = 1, \quad \phi_0(n) = A + B r_2^n = 0.$$

Resolvendo o sistema:

$$B = \frac{1}{1 - r_2^n}, \quad A = -\frac{r_2^n}{1 - r_2^n}.$$

Portanto,

$$\phi_0(i) = \frac{r_2^i - r_2^n}{1 - r_2^n},$$

e como  $r_2 = \frac{1-p}{p}$ , temos:

$$\phi_0(i) = \frac{r^i - r^n}{1 - r^n}.$$

A probabilidade complementar é  $\phi_n(i) = 1 - \phi_0(i)$ .

3. Caso simétrico ( $p = \frac{1}{2}$ ). A equação característica torna-se  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , com raiz dupla  $r = 1$ . A solução geral é então:

$$\phi_0(i) = A + B i.$$

Aplicando  $\phi_0(0) = 1$  e  $\phi_0(n) = 0$ :

$$A = 1, \quad 1 + Bn = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{n}.$$

Logo,

$$\phi_0(i) = 1 - \frac{i}{n} = \frac{n-i}{n}, \quad \text{e} \quad \phi_n(i) = \frac{i}{n}.$$

4. Interpretação. A função  $\phi_0(i)$  fornece a probabilidade de ruína (atingir 0 antes de  $n$ ) para um jogador que começa com capital  $i$  e ganha/perde uma unidade por aposta. O caso  $p = \frac{1}{2}$  é linear (jogo justo), enquanto  $p \neq \frac{1}{2}$  introduz viés exponencial a favor de um dos extremos. ■

**Teorema 3.3.2** (Tempo médio de absorção – Gambler's ruin). *Considere o passeio aleatório simples em  $\{0, 1, \dots, n\}$  com*

$$P_{i,i+1} = p, \quad P_{i,i-1} = 1 - p, \quad 1 \leq i \leq n - 1,$$

e estados absorventes em 0 e  $n$ . Seja

$$\tau = \min\{m \geq 0 : S_m \in \{0, n\}\}$$

o tempo de absorção e, para  $0 \leq i \leq n$ , defina

$$m(i) = \mathbb{E}_i[\tau],$$

a esperança do tempo de absorção quando o processo começa em  $i$ .

Então  $m(0) = m(n) = 0$  e:

(i) Caso  $p \neq \frac{1}{2}$ . Defina

$$r = \frac{1-p}{p}.$$

Para  $0 \leq i \leq n$ ,

$$m(i) = \frac{i - n \frac{1-r^i}{1-r^n}}{1-2p}.$$

(ii) Caso simétrico  $p = \frac{1}{2}$ . Neste caso

$$m(i) = i(n-i).$$

*Demonstração:*

Prova via equação de diferenças. Para  $1 \leq i \leq n-1$ , pela lei total da expectativa ao dar um passo,

$$m(i) = 1 + pm(i+1) + qm(i-1), \quad m(0) = m(n) = 0.$$

Rearranjando,

$$pm(i+1) - m(i) + qm(i-1) = -1. \quad (*)$$

Caso  $p \neq \frac{1}{2}$ . Primeiro resolvemos a homogênea:  $pu(i+1) - u(i) + qu(i-1) = 0$ . A equação característica  $p\lambda^2 - \lambda + q = 0$  tem raízes  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = r = \frac{q}{p}$ . Logo,

$$u(i) = A + Br^i.$$

Buscamos uma solução particular linear  $v(i) = \alpha i$ . Substituindo em (\*):

$$p\alpha(i+1) - \alpha i + q\alpha(i-1) = -1 \implies \alpha(p+q-1) + \alpha(p-q)i = -1.$$

Como  $p+q=1$ , resta  $\alpha(p-q)i = -1$ , i.e.

$$\alpha = \frac{-1}{p-q} = \frac{1}{1-2p}.$$

Portanto, a solução geral é

$$m(i) = A + Br^i + \frac{i}{1-2p}.$$

Impondo as condições de contorno:  $m(0) = 0$  e  $m(n) = 0$ ,

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + B r^n + \frac{n}{1-2p} = 0, \end{cases} \implies B = \frac{n}{(1-2p)(r^n-1)}, \quad A = -B.$$

Substituindo e simplificando (fatorando  $B(r^i - 1)$ ),

$$m(i) = \frac{n}{1-2p} \frac{r^i - 1}{r^n - 1} + \frac{i}{1-2p} = \frac{i - n \frac{1-r^i}{1-r^n}}{1-2p},$$

como enunciado.

Caso  $p = \frac{1}{2}$ . A recorrência (\*) torna-se

$$\frac{1}{2} m(i+1) - m(i) + \frac{1}{2} m(i-1) = -1 \iff m(i+1) - 2m(i) + m(i-1) = -2,$$

cujas soluções tem forma quadrática:  $m(i) = ai^2 + bi + c$ . Substituindo:

$$[a(i+1)^2 + b(i+1) + c] - 2(ai^2 + bi + c) + [a(i-1)^2 + b(i-1) + c] = -2$$

simplifica para  $2a = -2$ , logo  $a = -1$ . Com  $m(0) = 0$  obtemos  $c = 0$ ; com  $m(n) = 0$ ,  $-an^2 + bn = 0 \implies b = n$ . Portanto,

$$m(i) = -i^2 + ni = i(n-i).$$

Esboço alternativo (parada opcional). Para  $p \neq \frac{1}{2}$ , o processo  $M_k := S_k - (2p-1)k$  é um martingal. Para  $\tau$  (absorção) tem-se  $\mathbb{E}_i[|\tau|] < \infty$  e  $\mathbb{E}_i[|S_\tau|] \leq n$ , o que permite aplicar Parada Opcional:

$$\mathbb{E}_i[M_\tau] = \mathbb{E}_i[M_0] \implies \mathbb{E}_i[S_\tau] - (2p-1)\mathbb{E}_i[\tau] = i.$$

Como  $S_\tau \in \{0, n\}$  e  $\mathbb{P}_i(S_\tau = n) = \phi_n(i)$  (probabilidade de absorver em  $n$ ),

$$\mathbb{E}_i[S_\tau] = n \phi_n(i),$$

logo

$$\mathbb{E}_i[\tau] = \frac{n \phi_n(i) - i}{2p-1}.$$

Inserindo a forma conhecida  $\phi_n(i) = \frac{1-r^i}{1-r^n}$  para  $r = \frac{q}{p}$ , obtemos  $m(i) = \frac{i - n \frac{1-r^i}{1-r^n}}{1-2p}$ , como acima. ■

## 4 Aplicações de Passeios Aleatórios em Problemas de Apostas

### 4.1 Aplicações de Passeios Aleatórios em Problemas de Apostas

#### 4.1.1 Ruína do jogador: probabilidade de perder todo o capital em apostas sucessivas (ROSS, 2014)

Considere um jogo de azar entre dois jogadores: A, o jogador, e B, o oponente. Supõe-se que, em cada jogada, A ganha uma unidade de B com probabilidade  $p$ , ou perde uma unidade para B com probabilidade  $q = 1 - p$ . Por outro lado, B ganha de A ou perde para A com probabilidades  $q$  ou  $p$ , respectivamente.

O resultado de cada jogada é independente dos resultados das jogadas anteriores. O jogador A e o oponente B começam com um determinado número de unidades cada um, e o jogo termina quando um dos jogadores tiver perdido toda a sua aposta inicial.

A questão central é: *qual é a probabilidade de o jogador perder todo o seu dinheiro ou ganhar todo o dinheiro do oponente, assumindo que um número ilimitado de jogadas seja possível?*

Este é o clássico problema da ruína do jogador. Em um exemplo simples de ruína do jogador, cada jogada poderia depender do giro de uma moeda honesta, caso em que  $p = q = 1/2$ . A palavra “ruína” é usada porque, se o jogador disputar um jogo justo contra um banco ou cassino com fundos ilimitados, certamente acabará perdendo.

O problema pode ser resolvido utilizando resultados de probabilidade condicional, que levam a uma equação de diferenças (ou diferencial, em versões contínuas), e falaremos mais sobre métodos de solução posteriormente. Há também outras questões associadas a esse problema, como o número esperado de jogadas até o término do jogo. Em certos cenários, o jogador pode estar jogando contra um cassino com uma aposta inicial muito alta (efetivamente infinita).

Uma forma natural de modelar o problema da ruína do jogador é tratá-lo como um passeio aleatório unidimensional. Suponha que existam  $a + 1$  posições marcadas em uma linha reta, numeradas como

$$0, 1, 2, \dots, a.$$

Uma pessoa começa na posição  $k$ , onde  $0 < k < a$ . O passeio prossegue de tal forma que, a cada passo, há uma probabilidade  $p$  de o caminhante avançar uma casa, de  $k \rightarrow k + 1$ , e uma

probabilidade  $q = 1 - p$  de ele retroceder uma casa, de  $k \rightarrow k - 1$ .

O passeio continua até que o caminhante atinja 0 ou  $a$ , e então o processo é encerrado.

De modo geral, em um passeio aleatório, a posição do caminhante após  $n$  passos é conhecida como o estado do passeio após  $n$  etapas (ou após percorrer  $n$  estágios). Assim, o passeio descrito acima começa no estágio  $k$  no passo 0 e se move para  $k - 1$  ou  $k + 1$  após um passo, e assim sucessivamente.

Um passeio aleatório é dito simétrico se  $p = q = 1/2$ . Se o passeio for limitado, as extremidades são chamadas de barreiras, que podem ter diferentes propriedades:

- As barreiras absorventes encerram o passeio assim que são atingidas (não há retorno possível).
- As barreiras refletoras permitem que o passeio “retorne” ao estado anterior quando uma delas é atingida.

Uma forma útil de representar graficamente os passeios aleatórios é por meio de um diagrama de transição ou diagrama de processo, conforme ilustrado na Figura 5.



Figura 5 – Diagrama de transição para uma caminhada aleatória com barreiras absorventes em cada extremidade da caminhada.

Em um diagrama de transição, os possíveis estágios do caminhante são representados por pontos dispostos em uma linha. Se uma transição entre dois pontos pode ocorrer em um único passo, esses pontos são conectados por uma aresta (ou curva), com uma seta indicando a direção do movimento e um peso associado, representando a probabilidade de o passo ocorrer.

De modo geral, essas transições podem ser descritas por um conjunto de probabilidades  $P_{i,j}$ , onde:

$$P_{i,j} = \mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i),$$

indicando a probabilidade de o passeio se deslocar do estado  $i$  para o estado  $j$  em um único passo.

**Teorema 4.1.1** (Ruína do jogador). *Problema da ruína do jogador*

Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad e \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p.$$

Considere o passeio aleatório simples com espaço de estados  $E$  definido por

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1.$$

Tome  $S_0 = i$ , com  $i \in E$ , e defina  $\rho(i,n)$  como a probabilidade do passeio aleatório iniciando da posição  $i$  atingir o valor fixado  $n$  antes do valor 0, com  $0 \leq i \leq n$ .

Temos:

$$\rho(i,n) = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{se } p = \frac{1}{2}; \\ \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n} & \text{se } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(i,n) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i, & \text{se } p > \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Teorema 4.1.2** (Problema da ruína do jogador (Tempo Esperado)). *Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que*

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p.$$

Considere o passeio aleatório simples com espaço de estados  $E$  definido por

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1.$$

Tome  $S_0 = i$ , com  $i \in E$ , e defina  $B(i,n)$  como

$$B(i,n) = \min \{m \geq 0 : S_m = 0 \text{ ou } S_m = n\}.$$

Suponha que  $p \neq \frac{1}{2}$ . Então:

$$\mathbb{E}[B(i,n)] = \frac{n}{2p-1} \left( \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n} - \frac{i}{n} \right).$$

**Exemplo 1:**

Nos últimos anos, as apostas em plataformas online cresceram de forma acelerada, impulsionadas por aplicativos acessíveis e campanhas de marketing agressivas. As bancas, por sua vez, ajustam sutis regras para ampliar seus lucros, explorando o comportamento humano frente ao risco. Esse contexto tem gerado impactos financeiros relevantes, com jogadores comprometendo parte significativa de sua renda.

Para ilustrar esse fenômeno, o estudo propõe um modelo probabilístico baseado em passeios aleatórios, comparando o comportamento de um apostador nas roletas europeia e americana. Apesar de diferenças aparentemente pequenas nas regras, observa-se que pequenas alterações estruturais aumentam significativamente o prejuízo médio do jogador, evidenciando a vantagem sistemática da banca.

### 1.1 Base de Dados

A base de dados foi gerada por simulação Monte Carlo no RStudio, modelando o comportamento de um jogador, iniciando com \$100,00, intencionando dobrar o seu capital, em sucessivas apostas nas roletas europeia e americana. Cada simulação representa um passeio aleatório do capital, variando conforme vitórias e derrotas, até ocorrer ruína, meta de lucro ou limite de rodadas. A análise de milhares de trajetórias permitiu estimar probabilidades e ganhos médios, revelando que o jogo, embora aparentemente justo, possui valor esperado negativo devido à presença do(s) zero(s), o que garante vantagem à banca.

### 1.2 Abordagem Analítica

A abordagem analítica baseia-se na teoria dos passeios aleatórios e na Lei dos Grandes Números, tratando cada aposta como uma variável binária de ganho ou perda. Demonstrou-se que o *valor esperado* por aposta é negativo — cerca de  $-2,7\%$  na roleta europeia e  $-5,3\%$  na americana —, evidenciando a vantagem estatística da banca. As médias acumuladas convergem para esses valores, confirmando que, a longo prazo, o jogador tende a perder. Assim, a análise reforça que até pequenas alterações nas regras, como a adição de um zero extra, ampliam o prejuízo médio esperado.

### 1.3 Diferença das Médias Esperadas entre as Roletas

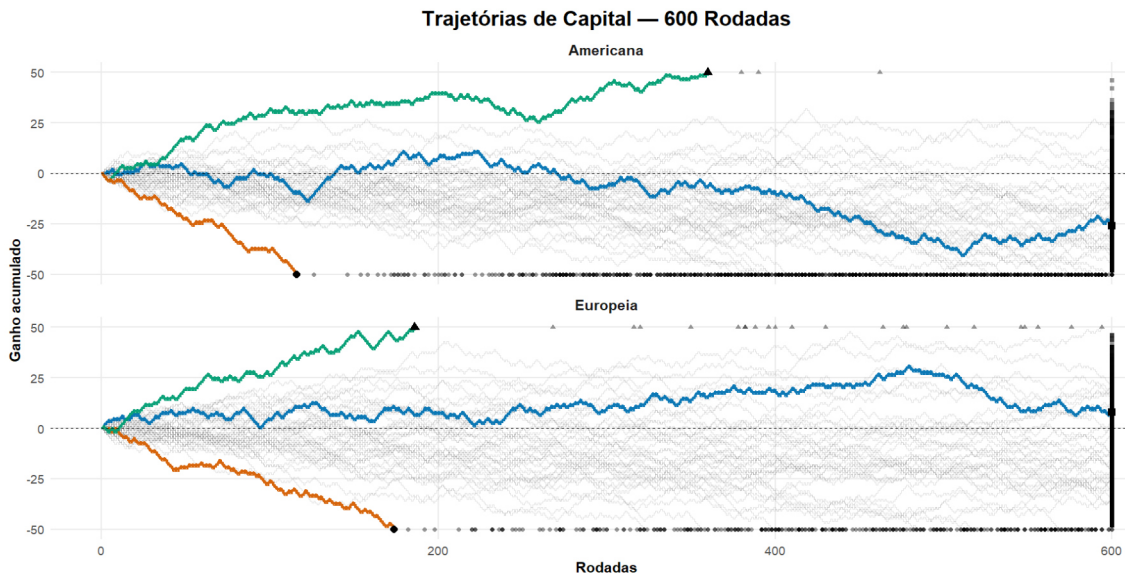
Em um jogo de roleta, cada aposta simples (em preto ou vermelho) pode ser modelada como uma variável aleatória  $X$ , tal que:

$$X = \begin{cases} +1, & \text{com probabilidade } p, \\ -1, & \text{com probabilidade } 1 - p. \end{cases}$$

O valor esperado do ganho é dado por:

$$E[X] = 2p - 1.$$

Figura 6 – 1: Trajetórias simuladas do ganho acumulado em 600 rodadas para as roletas americana (acima) e europeia (abaixo). As linhas coloridas representam trajetórias representativas: **Ruína** (queda até capital zero), **Longa duração** (oscilações prolongadas) e **Meta** (atingimento de ganho-alvo). As linhas cinzas ao fundo correspondem a simulações aleatórias de contexto. Observa-se tendência descendente mais acentuada na roleta americana, indicando maior vantagem da banca e ruína mais rápida do jogador.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**1.4 Roleta Europeia** Na roleta europeia há 37 casas, sendo 18 vermelhas, 18 pretas e 1 verde (zero). Assim,

$$p_{eu} = \frac{18}{37}, \quad E[X_{eu}] = 2 \left( \frac{18}{37} \right) - 1 = -\frac{1}{37} \approx -0,0270.$$

**1.5 Roleta Americana** Na roleta americana há 38 casas, sendo 18 vermelhas, 18 pretas e duas verdes (0 e 00). Portanto,

$$p_{us} = \frac{18}{38}, \quad E[X_{us}] = 2 \left( \frac{18}{38} \right) - 1 = -\frac{1}{19} \approx -0,0526.$$

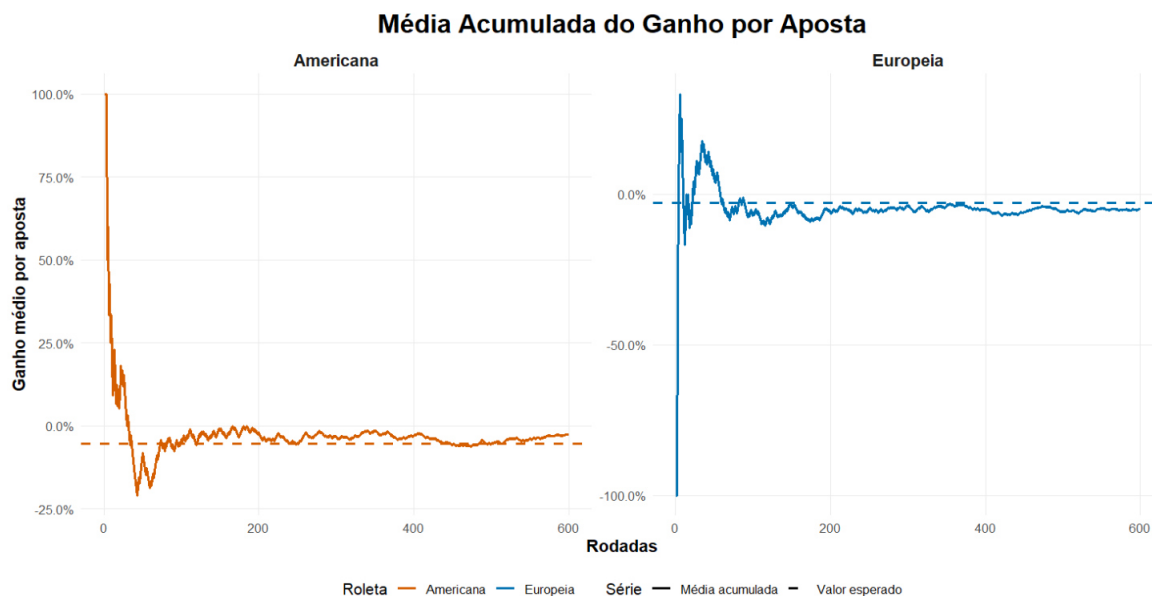
**1.6 Viés Causado pelo Acréscimo de uma Casa “00”** A diferença das médias, que expressa o viés introduzido pela adição da casa “00”, é:

$$\Delta E = E[X_{us}] - E[X_{eu}] = -\frac{1}{19} - \left( -\frac{1}{37} \right) = -\frac{18}{703} \approx -0,0256.$$

Logo, a presença do “00” reduz o ganho esperado em cerca de 2,56%, aumentando significativamente a vantagem da banca. No longo prazo, esse pequeno viés leva o jogador a perdas acumuladas maiores e a uma ruína mais rápida, evidenciando a sensibilidade do valor esperado a alterações estruturais nas regras do jogo.

**1.7 Probabilidade de Ruína no Jogo da Roleta Americana e Europeia**

Figura 7 – 2: A figura apresenta a evolução da média acumulada do ganho por aposta ao longo de 600 rodadas para as roletas americana (à esquerda) e europeia (à direita). As linhas sólidas mostram a média empírica simulada, enquanto as linhas tracejadas indicam o valor esperado teórico de cada jogo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### Enunciado:

Um jogador inicia uma partida de roleta com um capital inicial de R\$100, apostando sempre na cor preta ou vermelha. A cada rodada, ele ganha R\$1 com probabilidade  $p$  e perde R\$1 com probabilidade  $q = 1 - p$ , onde  $p$  depende do tipo de roleta:

- Roleta Americana: 38 casas (18 pretas, 18 vermelhas, 2 verdes).

$$p = \frac{18}{38} \approx 0,4737$$

- Roleta Europeia: 37 casas (18 pretas, 18 vermelhas, 1 verde).

$$p = \frac{18}{37} \approx 0,4865$$

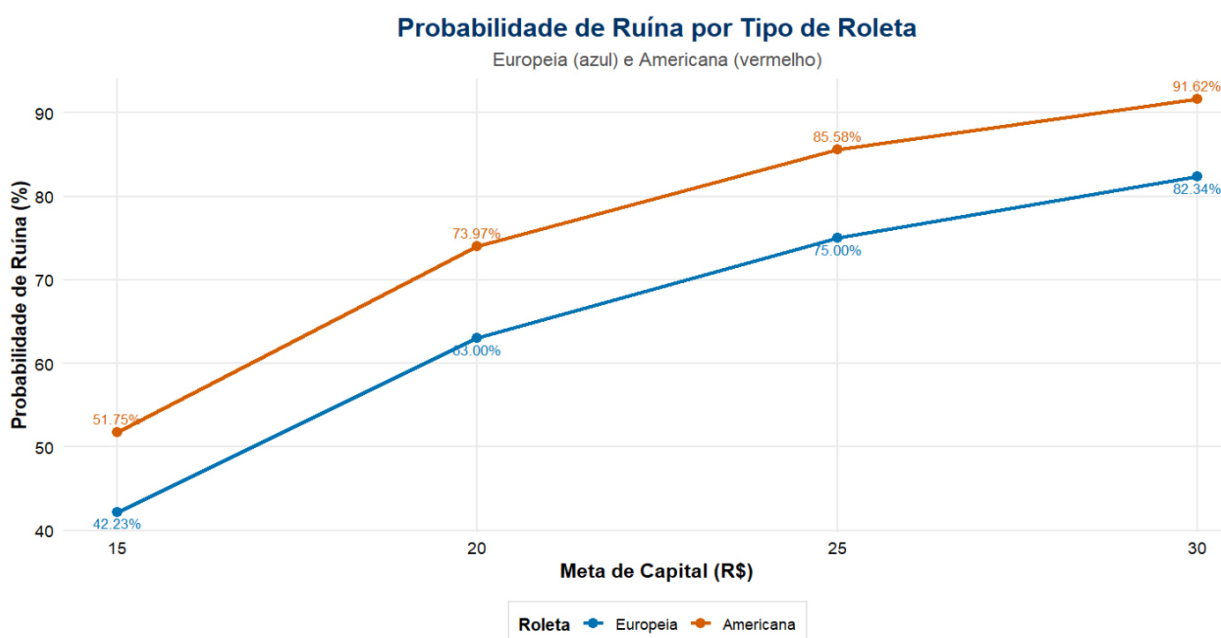
O jogador decide parar de jogar quando atingir uma meta  $N$  (capital total de  $N$  reais) ou quando perder todo o capital (chegar a zero). Deseja-se estimar a probabilidade de o jogador perder tudo antes de alcançar a meta  $N$  (probabilidade de ruína), para diferentes valores de  $N$ .

### 1.8 Resultados da simulação Monte Carlo:

### 1.9 Resultados e Discussão

Tabela 1 – Probabilidade de ruína e tempo esperado por tipo de roleta.

Meta (N)	Roleta	Prob. de ruína (%)	Tempo esp. (rod.)
15	Americana	51,75	51,97
20	Americana	73,97	91,76
25	Americana	85,58	121,38
30	Americana	91,62	142,87
15	Europeia	42,23	53,63
20	Europeia	63,00	97,66
25	Europeia	75,00	138,37
30	Europeia	82,34	174,09

Figura 8 – Probabilidade estimada de ruína para diferentes metas de capital  $N$  nas roletas americana e europeia, considerando capital inicial de R\$10,00.

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Modelagem: O capital do jogador foi representado como um *passeio aleatório com tendência negativa*, dependente da expectativa de ganho em cada tipo de roleta.
- Roleta Europeia: O valor esperado por rodada é  $E[X] = -\frac{1}{37} \approx -0,027$ , evidenciando uma vantagem média da banca de 2,7%.
- Roleta Americana: O valor esperado é  $E[X] = -\frac{1}{19} \approx -0,053$ , dobrando a vantagem da banca e acelerando a ruína do jogador.
- Simulações (600 rodadas, 1000 repetições):
- Convergência Estatística: A média acumulada dos ganhos converge para o valor esperado teórico (Lei dos Grandes Números), confirmando a tendência de perda a longo prazo.

- Comparativo Visual: Nas trajetórias individuais o conjunto revela clara tendência descendente mais acentuada na roleta americana.
- A probabilidade de ruína aumenta com o aumento da meta  $N$ , pois é necessário acumular uma vantagem maior para atingir valores mais altos.
- A roleta europeia apresenta menor probabilidade de ruína para as mesmas metas, refletindo sua vantagem levemente maior para o jogador devido à menor quantidade de casas verdes.

### **Exemplo 2: O Jogo de Craps**

Craps é uma simplificação americana do século XIX do hazard, um jogo de dados que se acredita ter origem árabe e que remonta às Cruzadas. Matematicamente, a característica mais interessante do craps é que as apostas principais exigem um número aleatório de lançamentos para serem resolvidas. (ALLEN, 2010)

O Craps é um dos jogos de dados mais populares dos cassinos modernos. É um jogo de puro acaso, baseado em lançamentos sucessivos de dois dados cúbicos honestos (cada um com faces numeradas de 1 a 6). Sua origem remonta ao jogo francês *crapaud* (“sapo”) do século XVIII, que por sua vez derivou do *hazard*, um jogo inglês medieval.

Nos cassinos, os jogadores podem realizar diversas apostas paralelas. Entretanto, neste trabalho modelaremos apenas a aposta principal, denominada *Pass Line Bet*, a mais tradicional.

## **2.1 Descrição probabilística do jogo Craps**

### **2.1.1 Espaço amostral e variáveis aleatórias (ALLEN, 2010)**

Sejam  $D_1$  e  $D_2$  variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no conjunto  $\{1,2,3,4,5,6\}$ , representando os resultados dos dois dados. Define-se a variável aleatória soma

$$S = D_1 + D_2,$$

cujos valores possíveis pertencem ao conjunto  $\{2,3, \dots, 12\}$ .

O espaço amostral do lançamento de um par de dados é

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1, \dots, 6\}\},$$

com  $|\Omega| = 36$  e

$$\Pr(S = s) = \frac{n_s}{36},$$

onde  $n_s$  denota o número de combinações que produzem a soma  $s$ .

### **2.1.2 Estrutura da rodada**

Cada rodada do jogo é iniciada por um lançamento denominado *come-out roll*. O resultado desse lançamento determina imediatamente o encerramento da rodada ou o estabelecimento de um estado intermediário chamado *ponto*.

Formalmente, define-se a variável aleatória  $S_0$  como a soma obtida no *come-out roll*. As regras são:

$$\begin{cases} \text{Vitória imediata,} & \text{se } S_0 \in \{7,11\}, \\ \text{Derrota imediata,} & \text{se } S_0 \in \{2,3,12\}, \\ \text{Ponto estabelecido,} & \text{se } S_0 \in \{4,5,6,8,9,10\}. \end{cases}$$

Caso um ponto  $x \in \{4,5,6,8,9,10\}$  seja estabelecido, a rodada prossegue com lançamentos sucessivos dos dados até que ocorra um dos dois eventos absorventes:

- ocorrência da soma  $x$ , caracterizando vitória;
- ocorrência da soma 7, caracterizando derrota.

### 2.1.3 Modelagem probabilística após o ponto

Uma vez estabelecido o ponto  $x$ , o processo pode ser modelado como uma sequência de ensaios independentes e identicamente distribuídos, nos quais apenas os eventos  $S = x$  e  $S = 7$  encerram a rodada. Os demais resultados mantêm o jogo em andamento.

Se  $n_x$  denota o número de combinações que produzem a soma  $x$ , então:

$$\Pr(S = x) = \frac{n_x}{36}, \quad \Pr(S = 7) = \frac{6}{36}.$$

A probabilidade de que o ponto  $x$  seja obtido antes da soma 7 é dada por

$$\Pr(\text{vitória} \mid x) = \frac{\Pr(S = x)}{\Pr(S = x) + \Pr(S = 7)} = \frac{n_x}{n_x + 6}.$$

Esse resultado decorre da propriedade de falta de memória do processo geométrico implícito nos lançamentos sucessivos, conforme discutido por Ethier (ALLEN, 2010).

### 2.1.4 Variável aleatória de ganho

Considere a aposta *Pass Line* com pagamento 1:1. Define-se a variável aleatória  $X$ , representando o ganho líquido por unidade apostada, como:

$$X = \begin{cases} +1, & \text{se a rodada termina em vitória,} \\ -1, & \text{se a rodada termina em derrota.} \end{cases}$$

O valor esperado dessa aposta é

$$E[X] = \Pr(\text{vitória}) - \Pr(\text{derrota}),$$

quantidade que sintetiza a vantagem matemática do cassino e caracteriza o jogo como um jogo injusto ( $E[X] < 0$ ), conforme demonstrado explicitamente em Ethier (ALLEN, 2010).

## 2.2 Descrição da base de dados utilizada

A base de dados gerada nesta simulação é fictícia e construída inteiramente a partir de processos aleatórios, simulando partidas sucessivas do jogo *Craps* (aposta *Pass Line*). Cada observação corresponde ao resultado de uma partida completa, representando um passo em uma caminhada aleatória com dois estados possíveis por rodada: vitória (+1) ou derrota (-1).

Os principais campos armazenados durante as simulações são:

- *t*: número da rodada (ou partida) ao longo da simulação, variando de 0 até o limite máximo definido (*max\_steps*);
- *capital*: capital acumulado do jogador após cada rodada;
- *outcome*: desfecho final da simulação, podendo assumir os valores "ruína" (quando o capital zera), "meta" (quando a meta de ganho é atingida) ou "limite" (quando a simulação termina pelo limite de rodadas);
- *sim*: identificador numérico da simulação (cada uma independente das demais);
- *regra*: etiqueta textual que indica o tipo de jogo modelado ("Craps" neste caso).

Dessa forma, o conjunto de dados final consiste em milhares de trajetórias independentes, em que cada linha representa um instante do capital dentro de uma sequência de rodadas. Essas trajetórias permitem estimar empiricamente as probabilidades de ruína, sucesso e tempo médio de duração do jogo, além de possibilitar a visualização gráfica da evolução do capital do jogador ao longo do tempo.

## 2.3 Descrição analítica

A abordagem analítica baseia-se na modelagem do jogo *Craps* como um processo estocástico discreto do tipo *passeio aleatório com barreiras absorventes*. Cada rodada do jogo é representada como um passo do passeio, em que o capital do jogador aumenta uma unidade em caso de vitória ou diminui uma unidade em caso de derrota. O jogo é interrompido quando o capital atinge uma das barreiras: a ruína (capital igual a zero) ou a meta (capital igual ao valor-alvo estabelecido).

O estudo emprega simulações de Monte Carlo para gerar um grande número de trajetórias independentes, a fim de estimar:

- as probabilidades de ruína e de sucesso;
- a distribuição do tempo até absorção (número de rodadas até o término);
- a convergência da média acumulada do ganho por rodada, conforme a Lei dos Grandes Números.

A análise inclui a comparação das proporções observadas com os valores teóricos esperados, e a visualização gráfica da evolução do capital ao longo das partidas. Essa abordagem permite interpretar o comportamento dinâmico do jogo sob a ótica probabilística, evidenciando o pequeno viés negativo associado à vantagem da casa no *Pass Line*.

A Figura 9 apresenta um conjunto de trajetórias simuladas do capital de um jogador no jogo *Craps* (aposta *Pass Line*), considerando o ganho acumulado ao longo de 600 rodadas, em unidades de aposta. Cada degrau do gráfico representa o resultado de uma partida completa de *Craps*: um incremento de +1 em caso de vitória e uma redução de -1 em caso de derrota.

As linhas em cinza representam uma amostra aleatória de 30 trajetórias de fundo, exibindo o comportamento geral do processo estocástico. Essas trajetórias apresentam oscilações aleatórias em torno do zero nos primeiros instantes, seguindo o padrão típico de um passeio aleatório com leve viés negativo, decorrente da pequena vantagem estatística do cassino no jogo (-1,41% por rodada).

As linhas coloridas destacam três perfis representativos:

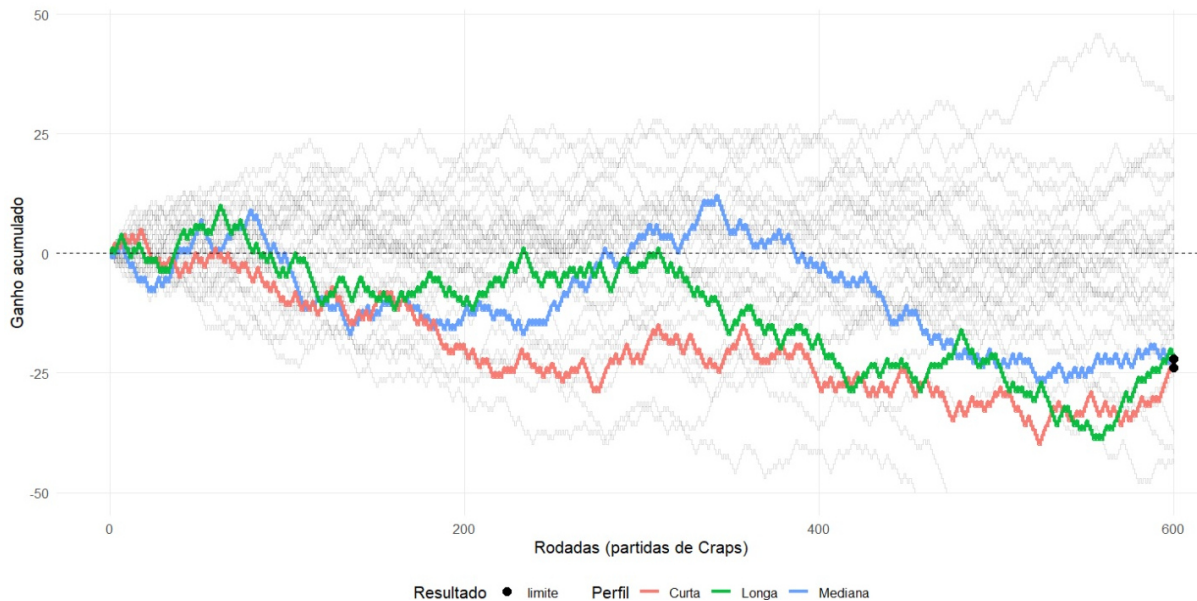
- **Curta (vermelha)**: representa uma trajetória de curta duração, que atinge rapidamente uma das barreiras (geralmente com ruína precoce);
- **Mediana (azul)**: ilustra o comportamento típico, com oscilações em torno do ponto inicial e duração intermediária antes de estabilizar;
- **Longa (verde)**: indica uma trajetória persistente, que demora mais tempo a atingir os limites, mantendo-se por diversas rodadas em torno do capital inicial.

Nota-se que, apesar da aleatoriedade individual, o conjunto das trajetórias tende a apresentar um leve declínio ao longo do tempo, refletindo a expectativa matemática negativa do jogo. Esse comportamento evidencia a vantagem da casa e demonstra, de forma empírica, que em horizontes longos a probabilidade de ruína supera a de sucesso, mesmo quando as flutuações iniciais aparentam equilíbrio.

A Figura 10 mostra a média acumulada do ganho por rodada em 600 partidas independentes de *Craps* (sem barreiras). A curva sólida exibe a série empírica  $\{\bar{X}_t\}_{t=1}^{600}$ , ao passo que a linha tracejada marca o valor esperado teórico do *Pass Line*,  $\mathbb{E}[X] = 2p - 1 = -\frac{7}{495} \approx -1,41\%$ , com  $p = \frac{244}{495}$ .

- **Volatilidade inicial**: Nos primeiros lançamentos, a média acumulada apresenta grandes oscilações (inclusive valores positivos), pois  $\bar{X}_t$  é calculada sobre poucas observações. Esse comportamento é típico quando  $t$  é pequeno, já que a divisão por  $t$  amplifica a variabilidade relativa.

Figura 9 – Trajetórias (lucro/prejuízo) simuladas no jogo de *Craps* (*Pass Line*). Cada rodada é uma partida completa de *Craps*;  $Y$  em unidades de aposta



Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Convergência ao valor esperado:** À medida que  $t$  cresce, observa-se a estabilização da curva sólida em torno de  $-1,41\%$ , ilustrando a Lei dos Grandes Números:

$$\bar{X}_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{q.c.}} \mathbb{E}[X] = -1,41\%$$

evidenciando o leve viés negativo (vantagem da casa) do *Pass Line*.

- **Ordem de flutuação esperada:** Como  $X \in \{-1, +1\}$  com  $p \approx 0,493$ ,  $\text{Var}(X) = 4p(1-p) \approx 1$ . Logo, o erro padrão de  $\bar{X}_t$  é aproximadamente

$$\text{EP}(\bar{X}_t) \approx \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{\sqrt{t}} \approx \frac{1}{\sqrt{t}}$$

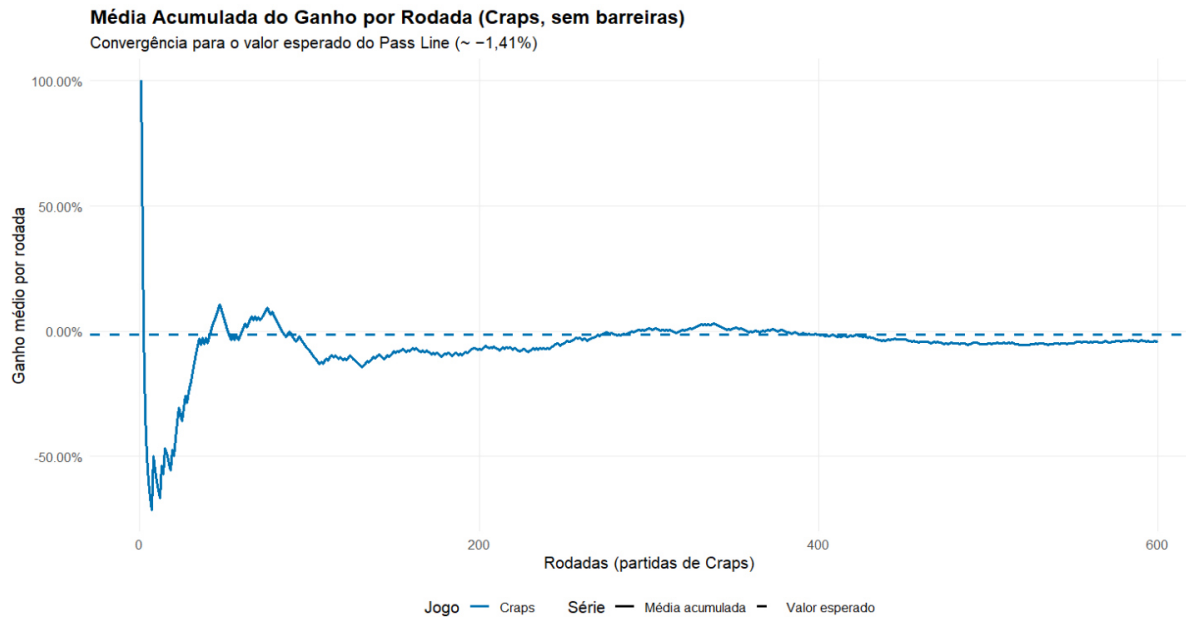
Em  $t = 600$ ,  $\text{EP}(\bar{X}_{600}) \approx 0,041$  (4,1%). Assim, desvios transitórios de alguns pontos percentuais em torno de  $-1,41\%$  ainda são plausíveis no horizonte curto de 600 rodadas.

- **Implicação prática:** Mesmo que sequências favoráveis elevem temporariamente a média acima de zero, a tendência de longo prazo é convergir para o valor esperado negativo. Em horizontes maiores, a dispersão diminui e a vantagem da casa se torna cada vez mais evidente na média.

#### 2.4 Análise das médias esperadas do jogo *Craps*

A média esperada de ganho por rodada no jogo *Craps* fornece uma medida direta do **valor esperado** ( $E[X]$ ) da aposta principal *Pass Line*. Essa estatística resume a vantagem matemática que a banca (cassino) possui sobre o jogador.

Figura 10 – Média acumulada do ganho por rodada em *Craps* (sem barreiras) para  $T = 600$ . A linha tracejada representa o valor esperado teórico do *Pass Line* ( $\approx -1,41\%$ ).



No caso do *Pass Line*, a probabilidade de vitória é  $p = \frac{244}{495} \approx 0,4929$ , enquanto a de derrota é  $q = 1 - p \approx 0,5071$ .

Para justificarmos essa probabilidade de ocorrência de vitória de um evento antes de outro com valor aproximado de 0,4929, segue: (PAPOULIS, 1991)

Sabemos que no jogo de azar *craps*, um par de dados é lançado e o resultado do experimento é a soma dos dados. O jogador vence no primeiro lançamento se a soma for 7 ou 11 e perde se a soma for 2, 3 ou 12. Se a soma for 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, esse número é denominado o *ponto* do jogador. Uma vez estabelecido o ponto, a regra é a seguinte: se o jogador obtiver um 7 antes do ponto, ele perde, mas se o ponto for obtido antes de um 7, o jogador vence. Deseja-se calcular a probabilidade de vitória no jogo de *craps*. Na tabela a seguir temos os resultados possíveis, a soma e a probabilidade.

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os eventos em que o jogador vence, vence no primeiro lançamento e estabelece um ponto, respectivamente. Então,

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Sendo assim, temos que

$$P(B) = P(\text{soma} = 7) + P(\text{soma} = 11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}.$$

Tabela 2 – O resultado dos lançamentos de dois dados distintos

Resultados	Soma	Probabilidade
(1,1)	2	$\frac{1}{36}$
(1,2),(2,1)	3	$\frac{2}{36}$
(1,3),(2,2),(3,1)	4	$\frac{3}{36}$
(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)	5	$\frac{4}{36}$
(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)	6	$\frac{5}{36}$
(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)	7	$\frac{6}{36}$
(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)	8	$\frac{5}{36}$
(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)	9	$\frac{4}{36}$
(4,6),(5,5),(6,4)	10	$\frac{3}{36}$
(5,6),(6,5)	11	$\frac{2}{36}$
(6,6)	12	$\frac{1}{36}$

**Fonte:** Adaptado de Ross (2014) e Ethier (2010) (PAPOULIS, 1991; ALLEN, 2010).

Seja  $A_k$  o evento em que o ponto  $k$  ocorre antes de 7. Então,

$$P(C) = \sum_{k \in \{4,5,6,8,9,10\}} P(A_k) P(\text{ponto} = k).$$

logo,

$$P(A_k) = \frac{P(\text{soma} = k)}{P(\text{soma} = k) + P(\text{soma} = 7)}.$$

pela tabela 2,

$$\begin{aligned} P(\text{soma} = 4) &= \frac{3}{36}, & P(\text{soma} = 5) &= \frac{4}{36}, & P(\text{soma} = 6) &= \frac{5}{36}, \\ P(\text{soma} = 8) &= \frac{5}{36}, & P(\text{soma} = 9) &= \frac{4}{36}, & P(\text{soma} = 10) &= \frac{3}{36}. \end{aligned}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned} P(A_5) &= \frac{2}{5}, & P(A_6) &= \frac{5}{11}, & P(A_8) &= \frac{5}{11}, & P(A_9) &= \frac{2}{5}, \\ P(A_4) &= \frac{1}{3}, & P(A_{10}) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Utilizando esses valores, obtém-se

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{2}{9} + \frac{134}{495} = 0,49293.$$

O ganho unitário em cada rodada é definido como:

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{se o jogador vencer,} \\ -1, & \text{se o jogador perder.} \end{cases}$$

Assim, o valor esperado de cada rodada é:

$$E[X] = (1)(p) + (-1)(q) = 2p - 1 = 2(0,4929) - 1 = -0,0141.$$

Logo, o ganho médio esperado é de aproximadamente  $-1,41\%$  por rodada. Esse resultado indica que, em média, o jogador perde cerca de  $1,41\%$  de sua aposta a cada partida de *Craps* na modalidade *Pass Line*. Trata-se de uma vantagem estatística muito pequena, mas suficiente para garantir lucro ao cassino no longo prazo.

A Figura 11 demonstra empiricamente esse comportamento: a curva da média acumulada de ganhos ( $\bar{X}_t$ ) oscila intensamente nas primeiras rodadas — reflexo da variabilidade inerente às amostras pequenas — e gradualmente converge para o valor teórico esperado de  $-1,41\%$  à medida que o número de partidas aumenta. Essa convergência ilustra a Lei dos Grandes Números, segundo a qual:

$$\bar{X}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t X_i \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{q.c.}} E[X].$$

Em termos práticos, o comportamento observado evidencia que:

- No curto prazo, o jogador pode apresentar ganhos ou perdas significativas, fruto da variabilidade aleatória;
- No longo prazo, a média tende inevitavelmente ao valor esperado negativo, confirmando o pequeno, porém constante, viés a favor da casa;
- Esse resultado reforça que o *Craps*, embora pareça equilibrado, é um exemplo clássico de um jogo de expectativa negativa, onde a aleatoriedade mascara momentaneamente a desvantagem do jogador.

Portanto, a análise estatística do valor esperado mostra que o jogo de *Craps*, na aposta principal *Pass Line*, é levemente desfavorável ao apostador, e que essa diferença, embora pequena, se consolida com o aumento do número de rodadas, garantindo a vantagem do cassino em horizontes longos.

## 2.5 Probabilidade de ruína no *Craps*

Temos que

$$X_t = \begin{cases} +1, & \text{com prob. } p = \frac{244}{495} \approx 0,49293, \\ -1, & \text{com prob. } q = 1 - p = \frac{251}{495} \approx 0,50707, \end{cases}$$

e barreiras absorventes em 0 (ruína) e  $N$  (meta). Seja  $K_0 = k$  o capital inicial. Para horizonte ilimitado (*sem* truncamento no número de rodadas), a probabilidade clássica de ruína (atingir 0 antes de  $N$ ) é

$$\psi(k; N, p) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & p \neq q, \\ \frac{N - k}{N}, & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Como  $q > p$  no *Pass Line*, o passeio tem leve viés descendente e  $\psi(k; N, p)$  excede o caso “justo”  $1 - k/N$ .

. *Aplicação numérica (cenário do estudo)*

Com  $k_0 = 50$ ,  $N = 100$ ,  $p = \frac{244}{495}$  e  $r = \frac{q}{p} = \frac{251}{244} \approx 1,02869$ ,

$$\mathbb{P}(\text{atingir a meta}) = \frac{1 - r^{k_0}}{1 - r^N} \approx 0,19557,$$

$$\mathbb{P}(\text{ruína}) = 1 - \mathbb{P}(\text{atingir a meta}) \approx 0,80443.$$

Logo, em horizonte ilimitado, a chance de ruína partindo do meio do corredor ( $k_0/N = 0,5$ ) é de aproximadamente 80,4%. Para comparação, num passeio *justo* ( $p = q$ ) teríamos  $\psi = 1 - k_0/N = 50\%$ ; a pequena vantagem da casa ( $\mathbb{E}[X] = 2p - 1 = -7/495 \approx -1,41\%$ ) desloca substancialmente a probabilidade em direção à ruína.

. *Estimativa por simulação e incerteza*

Em uma simulação Monte Carlo com  $B$  réplicas e *sem* truncamento (todas as trajetórias absorvem), o estimador natural  $\hat{\psi} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbf{1}\{\text{ruína na réplica } b\}$  é insesgado e tem erro padrão aproximado  $\text{EP}(\hat{\psi}) = \sqrt{\psi(1 - \psi)/B}$ . Com  $\psi \approx 0,804$  e  $B = 3000$ , obtemos

$$\text{EP}(\hat{\psi}) \approx 0,00724, \quad \text{IC}_{95\%} \approx 0,804 \pm 1,96 \times 0,00724 = [0,790, 0,818].$$

. *Efeito do truncamento temporal*

Quando se impõe um limite de rodadas ( $\text{max\_steps}=600$ ), muitas trajetórias terminam por *limite* (censura à direita), o que impede observar a absorção. Nesse caso:

- A fração “ruína/meta” *dentro* dos casos resolvidos é um estimador condicional e pode ser viesado se a probabilidade de resolver antes do limite depender do desfecho.
- As alternativas recomendadas são: (i) aumentar  $\text{max\_steps}$  para reduzir a censura; (ii) usar a fórmula teórica acima como referência e checar *calibração* via simulação; (iii) tratar o tempo até absorção como variável de sobrevivência com censura e ajustar um modelo apropriado.

. *Sensibilidade*

A probabilidade de ruína aumenta quando:

1.  $k_0$  diminui (mais perto de 0 na largada);
2.  $N$  aumenta (meta mais distante);
3. o viés negativo cresce (isto é,  $q/p$  aumenta).

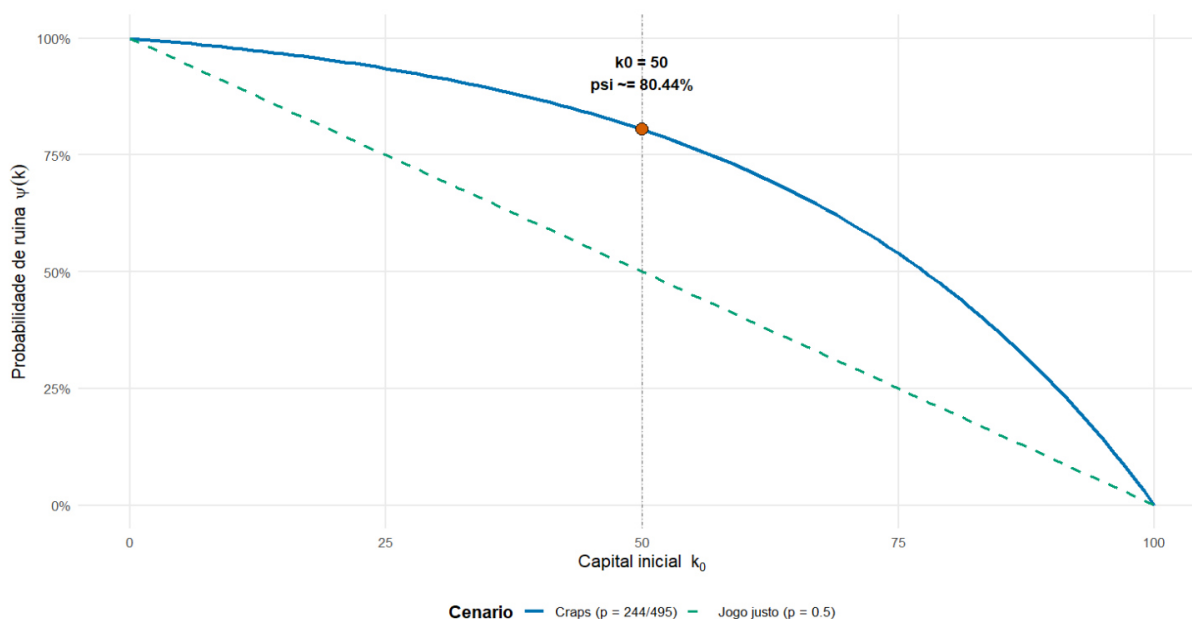
Assim, mesmo um pequeno viés ( $\approx 1,41\%$  por rodada) tem impacto expressivo em horizontes longos, elevando a chance de ruína de 50% (justo) para cerca de 80% neste cenário.

A Figura 12 mostra a probabilidade teórica de ruína  $\psi(k; N, p)$  em função do capital inicial  $k$ , com barreiras em 0 e  $N = 100$ , no contexto do jogo *Craps* (aposta *Pass Line*). A linha azul representa o cenário real do jogo, com  $p = 0,493$ , enquanto a linha verde tracejada corresponde ao caso de um jogo justo ( $p = 0,5$ ). O ponto vermelho, identificado na legenda como  $k_0 = 50$ , indica o capital inicial utilizado como referência na simulação, cuja probabilidade de ruína é aproximadamente 80,4%.

O gráfico revela que, embora o viés do jogo seja pequeno em cada rodada ( $\mathbb{E}[X] \approx -1,41\%$ ), seu efeito acumulado é expressivo. No caso justo, a probabilidade de ruína decai linearmente de 100% para 0%, enquanto no *Craps* a curva assume formato exponencial, indicando um aumento acelerado do risco de ruína à medida que o capital inicial diminui.

A inclusão de  $k_0$  na legenda reforça o papel do ponto de partida na determinação do risco total enfrentado pelo jogador. Quando  $k_0/N = 0,5$ , a probabilidade de ruína ultrapassa 80%, evidenciando como a vantagem matemática do cassino, ainda que sutil, se manifesta inevitavelmente no longo prazo.

Figura 11 – Probabilidade teórica de ruína  $\psi(k; N, p)$  com  $N = 100$ . Linha azul: jogo *Craps* ( $p = 244/495$ ); linha verde tracejada: jogo justo ( $p = 0,5$ ); ponto vermelho ( $k_0 = 50$ ) destacado na legenda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

. *Resultados e discussão*

A simulação realizada para o jogo *Craps* (aposta *Pass Line*) considerou um capital inicial  $k_0 = 50$ , uma meta  $N = 100$  e probabilidade de vitória  $p = \frac{244}{495} \approx 0,493$ . O valor esperado por rodada é ligeiramente negativo ( $\mathbb{E}[X] \approx -1,41\%$ ), refletindo a vantagem matemática do cassino.

A Figura 9 mostra as trajetórias simuladas do capital ao longo de 600 rodadas, onde cada linha representa uma sequência independente de partidas completas de *Craps*. Observa-se que, embora algumas simulações atinjam temporariamente ganhos, a maioria das trajetórias converge para perdas progressivas, caracterizando a tendência de declínio esperada em jogos com valor esperado negativo. O comportamento irregular e os degraus no gráfico evidenciam a natureza estocástica do processo, em que vitórias e derrotas ocorrem de forma aleatória, mas o saldo médio tende a se deteriorar no longo prazo.

A análise da média acumulada do ganho por rodada confirma essa tendência. À medida que o número de rodadas aumenta, a média converge gradualmente para o valor esperado teórico de  $-1,41\%$ , demonstrando a aplicação da Lei dos Grandes Números (LGN). Assim, pequenas vantagens do cassino tornam-se determinantes quando o número de partidas cresce, o que justifica a sustentabilidade do jogo a favor da casa.

Por fim, a Figura 11 apresenta a probabilidade teórica de ruína  $\psi(k; N, p)$  em função do capital inicial  $k$ . No cenário do *Craps*, a probabilidade de ruína para  $k_0 = 50$  alcança aproximadamente  $80,4\%$ , enquanto para um jogo justo ( $p = 0,5$ ) seria exatamente  $50\%$ . Nota-se que a diferença aparentemente pequena entre  $p = 0,493$  e  $p = 0,5$  é suficiente para provocar um aumento expressivo no risco de ruína. À medida que o capital inicial se distancia da meta, a curva de ruína cresce de forma não linear, aproximando-se rapidamente de  $100\%$  para baixos valores de  $k$ .

Esses resultados evidenciam que, embora o *Craps* seja um jogo de acaso com pequenas margens, a estrutura probabilística do modelo leva inevitavelmente à predominância de perdas no longo prazo. A conjunção entre valor esperado negativo e alta probabilidade de ruína explica matematicamente o sucesso econômico dos cassinos e demonstra o poder das ferramentas probabilísticas na análise de fenômenos aleatórios.

## 4.2 Passeios Aleatórios em Processos de Filas e outros exemplos

Filas de espera: número de clientes em uma fila pode ser modelado como passeio aleatório com barreiras (JUNIOR, 2011)

### 4.2.1 O passeio aleatório como esqueleto da fila $M/M/1$

Considere uma fila  $M/M/1$ , isto é:

- Chegadas segundo um processo de Poisson com taxa  $\lambda$ ;
- Serviço com tempo exponencial de taxa  $\mu$ ;
- Um único servidor e capacidade infinita.

Seja  $N(t)$  o número de clientes na fila no instante  $t \geq 0$ . Então  $(N(t))_{t \geq 0}$  é um processo de nascimento e morte contínuo com:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \mu \quad (n \geq 1), \quad \mu_0 = 0.$$

#### 4.2.1.1 Esqueleto discreto

Se observarmos a fila apenas nos instantes de eventos (chegadas ou partidas), temos:

$$S_k = N(T_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Se o evento em  $T_k$  é uma chegada:  $S_{k+1} = S_k + 1$  - Se o evento é uma partida:  $S_{k+1} = S_k - 1$ , para  $S_k > 0$  - Para  $S_k = 0$  e um serviço ocorre, a fila permanece em 0.

Assim,  $(S_k)$  é um *passeio aleatório assimétrico com barreira refletora em 0*:

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad 1 - p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

#### 4.2.1.2 Observações

1. Cada incremento do passeio corresponde a um evento de chegada (+1) ou partida (-1) da fila.
2. A barreira refletora em 0 garante que a fila nunca seja negativa.
3. Se  $\lambda < \mu$ , o passeio aleatório tende a voltar para 0 (fila estável); se  $\lambda > \mu$ , há tendência de crescimento ilimitado (fila instável).

**Teorema 4.2.1** (Distribuição invariante do esqueleto do  $M/M/1$ ). *Considere o esqueleto discreto da fila  $M/M/1$ , ou seja, o número de clientes observado apenas nos instantes de chegada ou partida, modelado como um passeio aleatório assimétrico com barreira refletora em 0:*

$$S_{k+1} = \begin{cases} S_k + 1, & \text{com probabilidade } p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \\ S_k - 1, & \text{com probabilidade } 1 - p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, S_k > 0, \\ S_k, & S_k = 0. \end{cases}$$

Se  $p < 1/2$  (fila estável), a distribuição estacionária do esqueleto  $(\pi_n)_{n \geq 0}$  é

$$\pi_n = \left( \frac{p}{1-p} \right)^n \pi_0, \quad n \geq 0,$$

com

$$\pi_0 = 1 - \frac{p}{1-p} = \frac{1-2p}{1-p}.$$

### 4.2.1.3 Conclusão

O passeio aleatório observado nos instantes de eventos da fila  $M/M/1$  serve como *esqueleto discreto* do processo contínuo. Isso permite aplicar resultados clássicos de passeios aleatórios para analisar propriedades da fila, como:

- Probabilidade de a fila estar vazia;
- Tempo médio até atingir certo tamanho;
- Distribuição estacionária (quando  $\lambda < \mu$ ).

#### **Exemplo 3:** Simulação do modelo $M/M/1$

Este exemplo tem como objetivo apresentar a construção e a implementação de uma simulação computacional do modelo de fila  $M/M/1$ , amplamente utilizado na teoria das filas. A ideia central está na descrição implícita do processo estocástico, na definição explícita de seus parâmetros e na geração de trajetórias do número de clientes no sistema ao longo do tempo, permitindo assim, a comparação entre valores experimentais obtidos por simulação.

O modelo  $M/M/1$  é caracterizado por um processo de chegadas segundo um processo de Poisson homogêneo de taxa  $\lambda > 0$ , no qual os instantes entre chegadas sucessivas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$ . Os tempos de atendimento são modelados por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição exponencial de parâmetro  $\mu > 0$ , assumindo-se a existência de um único valor. Aqui, estamos simulando o atendimento do tipo *first-come, first-served* (FCFS).

Passeios Aleatórios em Processos de Filas do tipo *first-come, first-served* (FCFS), também denominada *first-in, first-out* (FIFO), é uma das formas mais simples e amplamente utilizadas de organização do atendimento em sistemas de filas. Nesse modelo, os clientes são atendidos

estritamente na ordem em que chegam ao sistema, de modo que o primeiro cliente a entrar na fila é também o primeiro a ser atendido (ROSS, 1996).

Uma característica fundamental do atendimento FCFS é a inexistência de prioridades entre os clientes. Todos recebem tratamento igualitário, independentemente de suas características individuais ou do tempo necessário para a realização do serviço. Dessa forma, o tempo de espera de um cliente depende exclusivamente do número de clientes que o antecedem na fila e da duração dos serviços prestados aos mesmos (ROSS, 1996).

Seja  $\{N(t) : t \geq 0\}$  o processo estocástico que representa o número de clientes presentes no sistema no instante  $t$ . O processo  $\{N(t)\}$  constitui uma cadeia de Markov em tempo contínuo, também conhecida como processo de nascimento e morte, com taxas de transição dadas por  $\lambda$  para transições do tipo  $n \rightarrow n + 1$  (chegadas) e por  $\mu$  para transições do tipo  $n \rightarrow n - 1$  (atendimentos), quando  $n \geq 1$ . No estado  $n = 0$ , não ocorrem transições do tipo  $0 \rightarrow -1$ , caracterizando uma barreira refletora no estado zero.

A simulação do processo ocorre apenas nos instantes de chegada ou de término de atendimento. Em cada etapa, o tempo até o próximo evento é gerado a partir de uma distribuição exponencial, cuja taxa depende do estado atual do sistema. Quando o sistema se encontra no estado  $n \geq 1$ , o tempo até o próximo evento segue uma distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda + \mu$ , descrevendo o evento entre chegadas e atendimentos

Esse tipo de evento é tratado de forma probabilística. Quando  $n \geq 1$ , o próximo evento corresponde a uma chegada com probabilidade

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

e a um atendimento com probabilidade  $1 - p = \mu/(\lambda + \mu)$ . Quando  $n = 0$ , o próximo evento é necessariamente uma chegada. A cada evento, o estado do sistema é atualizado de acordo com o tipo de transição observada.

O exemplo considera como parâmetros fixos as taxas  $\lambda = 0,8$  chegadas por unidade de tempo, e  $\mu = 1,0$  atendimento por unidade de tempo, de modo que a intensidade de tráfego do sistema é dada por  $\rho = \lambda/\mu = 0,8$ . A simulação é iniciada no estado  $N(0) = 0$  e conduzida ao longo de um número pré-especificado de eventos, denotado por  $n_{\text{events}}$ . Com o objetivo de reduzir a influência das condições iniciais, é adotado um período de aquecimento (*burn-in*), correspondente a uma fração inicial da trajetória simulada, a qual é descartada nas estimativas subsequentes.

Além da trajetória em tempo contínuo, o exemplo também permite a construção do chamado esqueleto discreto do processo, definido nos instantes de evento. Seja  $T_k$  o instante do  $k$ -ésimo evento e defina-se o processo discreto  $\{S_k\}_{k \geq 0}$  por  $S_k = N(T_k)$ . O processo  $\{S_k\}$  evolui como um passeio aleatório em tempo discreto com incrementos unitários e barreira refletora no estado zero, sendo governado pela probabilidade  $p = \lambda/(\lambda + \mu)$  de incremento

positivo a cada passo.

Com base na trajetória simulada, são calculadas quantidades empíricas associadas ao modelo, incluindo a média temporal do número de clientes no sistema, a distribuição estacionária empírica do processo, a probabilidade empírica de o sistema se encontrar vazio e estimativas dos tempos médios de permanência e de espera, obtidas por meio de relações clássicas da teoria das filas. Esses resultados são posteriormente organizados de forma a permitir a comparação direta com as expressões teóricas conhecidas do modelo  $M/M/1$ .

A Tabela 3 apresenta uma comparação entre as medidas teóricas do modelo  $M/M/1$  e os valores empíricos obtidos por meio de simulação. Observa-se uma elevada concordância entre os resultados, evidenciando que as estimativas empíricas se aproximam dos valores teóricos previstos pela teoria das filas.

As pequenas diferenças observadas decorrem da variabilidade alheia ao processo estocástico e do número finito de observações consideradas na simulação. Mesmo assim, os resultados confirmam a validade do modelo teórico  $M/M/1$ , bem como a adequação da simulação empregado, em conformidade com os resultados clássicos apresentados em (ROSS, 1996).

Tabela 3 – Comparação entre medidas teóricas e empíricas do sistema  $M/M/1$

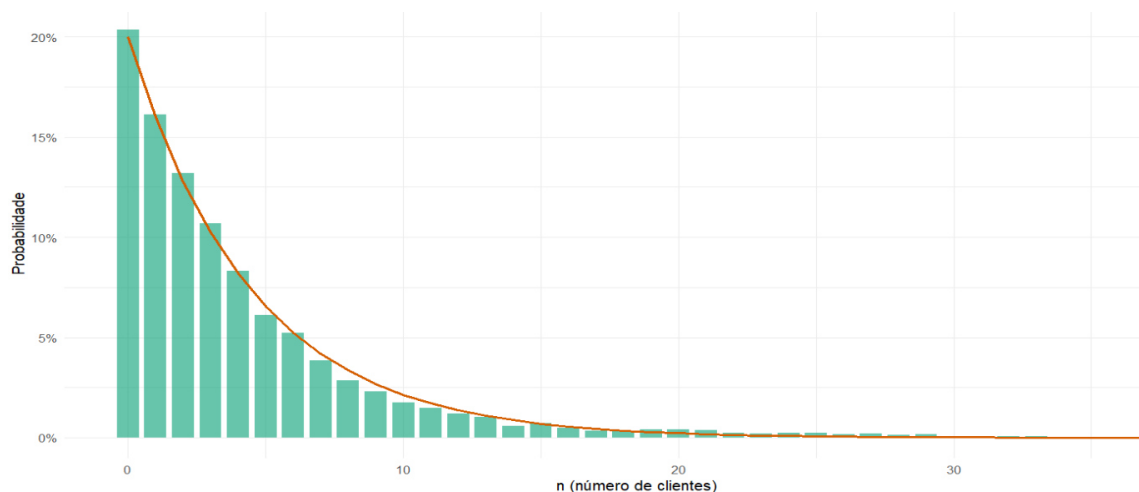
Medida	Teórico	Empírico
$\rho$	0,8	0,8000000
$L = \mathbb{E}[N]$	4,0	4,1420217
$L_q = \mathbb{E}[N_q]$	3,2	3,3420217
$W$	5,0	5,1955531
$W_q$	4,0	4,1920716
$\pi_0 = \mathbb{P}(N = 0)$	0,2	0,2036183

A Figura 12 apresenta a distribuição estacionária do número de clientes no sistema  $M/M/1$ . As barras representam a distribuição empírica obtida por simulação em tempo contínuo, enquanto a curva corresponde à distribuição teórica geométrica  $\pi(n) = (1 - \rho)\rho^n$ .

Desta forma, percebe-se uma forte relação entre os valores empíricos e teóricos, indicando que a simulação atingiu a estacionaridade prevista pela teoria das filas. A maior probabilidade concentra-se nos estados com pequeno número de clientes, em particular em  $n = 0$ , indicando que a probabilidade do sistema estar vazio. À medida que o número de clientes aumenta, a probabilidade decresce de forma aproximadamente exponencial, o que caracteriza o comportamento típico de um sistema  $M/M/1$  em regime estável ( $\rho < 1$ ).

Por último, a Figura 13, ilustra a trajetória temporal do número de clientes  $N(t)$  em um sistema de filas  $M/M/1$  simulado em tempo contínuo. Percebe-se a alternância entre períodos de baixa ocupação, nos quais a simulação permanece próximo de vazio, e momento de congestionamento a depender do tempo, identificados por picos no número de clientes. Esse comportamento reflete a natureza estocástica do processo, resultante da competição entre as

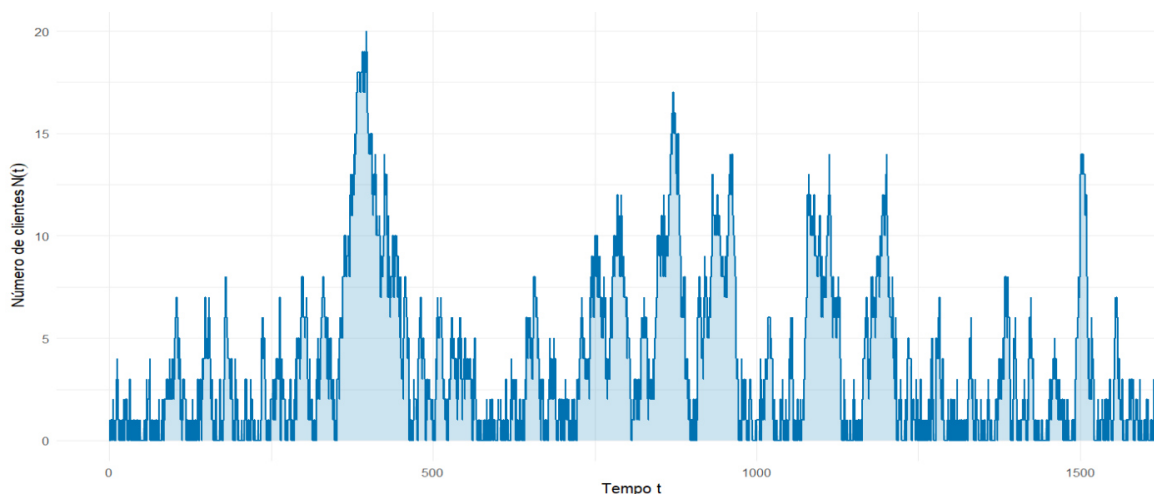
Figura 12 – Distribuição estacionária no sistema  $M/M/1$ :  $\hat{\pi}(n)$  versus  $\pi(n)$ . Barras: distribuição empírica (ponderada pelo tempo). Linha: distribuição teórica  $(1 - \rho)\rho^n$ , com  $\rho = 0,80$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

chegadas aleatórias e os atendimentos exponenciais, sendo compatível com um regime estável ( $\rho < 1$ ), no qual, apesar das flutuações, o sistema não apresenta crescimento ilimitado ao longo do tempo. (ROSS, 1996)

Figura 13 – Fila  $M/M/1$  em tempo contínuo: trajetória  $N(t)$ . Parâmetros do modelo:  $\lambda = 0,80$ ,  $\mu = 1,00$  e  $\rho = 0,80$ , considerando os primeiros eventos da simulação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.2.2 Processos de nascimento e morte: o número de indivíduos em uma população cresce ou decresce aleatoriamente

A modelagem matemática de fenômenos aleatórios que envolvem crescimento e decaimento de populações tem sido, desde o final do século XIX, um dos pilares da teoria das

probabilidades aplicadas. Entre os modelos mais simples e, ao mesmo tempo, mais explicativos, destaca-se o processo de nascimento e morte, cuja essência pode ser compreendida de forma intuitiva através do conceito de passeio aleatório. (FELLER, 1957; ROSS, 2014).

Historicamente, o estudo desses processos remonta aos trabalhos pioneiros de *Francis Galton* e *Henry William Watson* (1874), que analisaram o problema da extinção de sobrenomes em famílias, hoje conhecido como *processo de Galton–Watson* (GALTON, 1874). Essa abordagem inaugurou uma nova maneira de compreender a dinâmica de populações sujeitas a eventos aleatórios de reprodução e mortalidade. No século XX, autores como *William Feller* (1939) e *David Kendall* (1948) formalizaram e generalizaram tais ideias, estabelecendo a teoria moderna dos *processos de nascimento e morte* dentro do contexto dos *processos de Markov* em tempo contínuo. (FELLER, 1939; KENDALL, 1948; NORRIS, 1997)

Do ponto de vista conceitual, um processo de nascimento e morte descreve a evolução de uma população em que o número de indivíduos varia devido a dois tipos de eventos estocásticos: *nascimentos*, que aumentam o tamanho populacional em uma unidade, e *mortes*, que o reduzem em uma unidade, com fundamentação estruturada em um passeio aleatório. Quando as taxas de nascimento ( $\lambda$ ) e morte ( $\mu$ ) são constantes, o processo é denominado linear, e sua análise torna-se particularmente acessível por meio de uma analogia direta com o passeio aleatório simples. (GRIMMETT; STIRZAKER, 2001)

Do ponto de vista aplicado, modelos de nascimento e morte aparecem em diversas áreas: em biologia, para representar a dinâmica de espécies; em epidemiologia, para descrever a disseminação e o desaparecimento de doenças; em física, para estudar reações químicas e sistemas de partículas; e em teoria das filas, para compreender a chegada e saída de clientes em sistemas de serviço. (ALLEN, 2010; ROSS, 1996)

O estudo do processo de nascimento e morte tem, portanto, o objetivo de compreender, por meio da simulação, o comportamento probabilístico da população ao longo do tempo.

Um *passeio aleatório simples* é definido por

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

onde  $(X_i)_{i \geq 1}$  são incrementos independentes.

Se  $X_i \in \{-1, +1\}$ , podemos interpretar:

- +1 como *uma chegada* ou *um nascimento*;
- -1 como *uma saída* ou *uma morte*.

Assim, cada passo do passeio aleatório representa um evento de nascimento ou morte, tornando o passeio aleatório o *esqueleto discreto* do processo contínuo de nascimento e morte.

### 4.2.2.1 Conexão com processos de nascimento e morte contínuos

Um processo de nascimento e morte contínuo  $N(t)$  é um processo de Markov em tempo contínuo, com probabilidades

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t + \Delta t) = n + 1 \mid N(t) = n) &= \lambda_n \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbb{P}(N(t + \Delta t) = n - 1 \mid N(t) = n) &= \mu_n \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbb{P}(N(t + \Delta t) = n \mid N(t) = n) &= 1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

Se  $\lambda_n = \lambda$  e  $\mu_n = \mu$  são constantes, temos um *processo linear de nascimento e morte*.

O *esqueleto discreto* deste processo é obtido observando apenas os instantes de transição:

$$S_k = N(T_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Então  $(S_k)$  é um passeio aleatório assimétrico com

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad 1 - p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Observações

1. Cada incremento  $\pm 1$  corresponde a uma única transição de nascimento ou morte.
2. Se  $\lambda \neq \mu$ , o passeio é assimétrico, tendendo a subir ( $\lambda > \mu$ ) ou descer ( $\lambda < \mu$ ).
3. Barreiras em 0 ou  $n$  no passeio correspondem a limites naturais ou absorventes no processo de nascimento e morte.

**Teorema 4.2.2** (Distribuição invariante do esqueleto de um PNM). *Seja  $(N(t))_{t \geq 0}$  um processo de nascimento e morte contínuo em estados  $n = 0, 1, 2, \dots$  com taxas de nascimento  $\lambda_n$  e de morte  $\mu_n$  ( $\mu_0 = 0$ ).*

*O esqueleto discreto é obtido observando  $(N(t))$  apenas nos instantes de eventos (nascimento ou morte). Seja  $\pi_n$  a distribuição estacionária do esqueleto. Então, se a fila é estável,  $\pi_n$  satisfaz a recorrência:*

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \pi_0, \quad n \geq 1.$$

*Em particular, para um processo linear de nascimento e morte com  $\lambda_n = \lambda$  e  $\mu_n = \mu$  constantes:*

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0, \quad n \geq 0, \quad \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}, \quad \text{se } \lambda < \mu.$$

### Conclusão

O passeio aleatório é o esqueleto discreto do processo de nascimento e morte, pois captura a sequência de eventos de subida e descida, ignorando o tempo contínuo entre transições.

Portanto, qualquer análise de passeio aleatório simples (como tempo médio até absorção, distribuição estacionária ou autocorrelação) pode ser traduzida para o comportamento de processos de nascimento e morte discretos no tempo de eventos.

#### **Exemplo 4:** Processo de nascimento e morte

Com o intuito de ilustrar de forma aplicada o comportamento do processo de nascimento e morte, foi realizada uma simulação computacional em  $R$ , considerando um modelo linear com taxas de nascimento ( $\lambda$ ) e de morte ( $\mu$ ) constantes. A análise tem por objetivo observar a dinâmica populacional sob três regimes distintos: decaimento ( $\lambda < \mu$ ), equilíbrio ( $\lambda = \mu$ ) e crescimento ( $\lambda > \mu$ ).

Nessa simulação, o número de indivíduos é atualizado a cada evento de nascimento ou morte, formando o esqueleto discreto do processo contínuo. Cada passo do passeio aleatório representa um desses eventos: um incremento positivo (+1) corresponde a um nascimento, enquanto um decremento (-1) corresponde a uma morte. Além disso, uma barreira refletora é imposta no estado zero, impedindo que a população assuma valores negativos.

A simulação computacional permite visualizar como pequenas variações na razão  $\rho = \lambda/\mu$  alteram profundamente o comportamento do sistema. No regime de decaimento, a população tende a retornar rapidamente à extinção, e no regime crítico, ela oscila em torno de valores intermediários, e por último no regime de crescimento, observa-se uma tendência de expansão contínua.

#### *4.1 Trajetórias simuladas do processo*

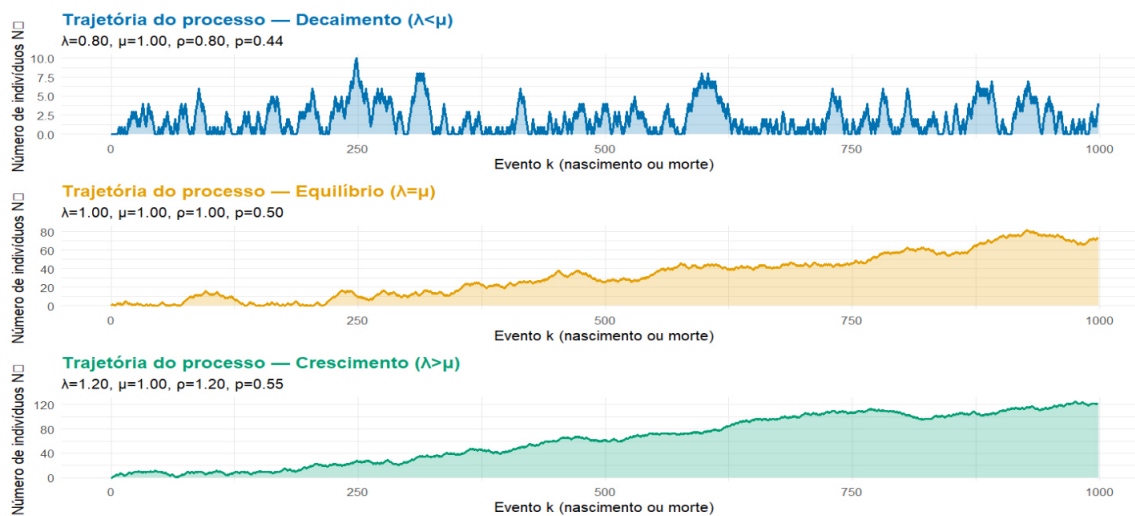
A Figura 14 apresenta as trajetórias simuladas do número de indivíduos  $N_k$  sob três regimes distintos:

- **Decaimento populacional** ( $\lambda < \mu$ ): o número médio de mortes por unidade de tempo é maior do que o número de nascimentos. O processo tende a decrescer ao longo do tempo, frequentemente retornando ao estado zero, que representa a extinção da população. A barreira refletora em 0 garante que o número de indivíduos nunca se torne negativo, refletindo a impossibilidade física de uma população com tamanho negativo.
- **Equilíbrio** ( $\lambda = \mu$ ): a taxa de nascimento é igual à taxa de morte, e o processo oscila livremente em torno de valores intermediários de população. Não há tendência de crescimento nem de extinção definitiva, embora oscilações longas possam ocorrer devido à natureza aleatória dos eventos.
- **Crescimento populacional** ( $\lambda > \mu$ ): o número de nascimentos é superior ao de mortes,

levando o processo a apresentar uma tendência de crescimento contínuo. A população cresce indefinidamente em média, refletindo um sistema instável que se expande sem controle.

Essas trajetórias evidenciam o papel da razão  $\rho = \lambda/\mu$  como indicador fundamental da estabilidade populacional: se  $\rho < 1$ , a população tende à extinção; se  $\rho = 1$ , o sistema é neutro; e se  $\rho > 1$ , a população cresce de forma ilimitada.

Figura 14 – Trajetória do Processo



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 4.3 Distribuição estacionária do processo

Para o caso de decaimento populacional ( $\lambda < \mu$ ), a Figura 15 compara a distribuição estacionária teórica e a distribuição empírica simulada do número de indivíduos. A teoria prevê uma distribuição geométrica:

$$\pi_n = (1 - \rho) \rho^n, \quad \text{com } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

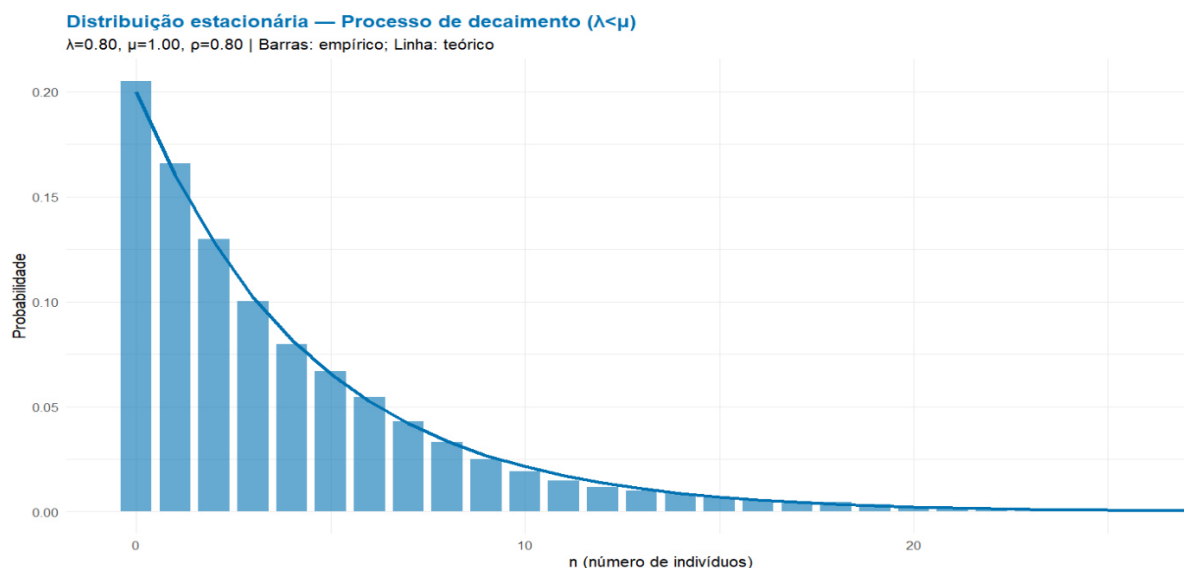
As barras azuis correspondem às frequências observadas na simulação, enquanto a linha contínua mostra a curva teórica. Observa-se excelente concordância entre ambas, o que confirma a validade do modelo e a adequação do passeio aleatório como esqueleto discreto do processo de nascimento e morte.

A probabilidade de a população estar vazia é dada por  $\pi_0 = 1 - \rho$ . Neste exemplo, com  $\lambda = 0,8$  e  $\mu = 1,0$ , temos  $\pi_0 = 0,20$ , o que significa que, em aproximadamente 20% do tempo, a população encontra-se extinta (estado zero).

### 4.4 Interpretação dos regimes de estabilidade

Os resultados obtidos permitem estabelecer uma analogia direta entre o comportamento populacional e o regime de operação do sistema:

Figura 15 – Distribuição Estacionária



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Quando  $\lambda < \mu$ , a população tende à extinção (estável).
- Quando  $\lambda = \mu$ , o sistema se mantém em equilíbrio neutro.
- Quando  $\lambda > \mu$ , a população cresce indefinidamente (instável).

Essa classificação é idêntica à obtida em sistemas de filas  $M/M/1$ , onde  $\rho < 1$  implica estabilidade e  $\rho \geq 1$  implica crescimento ilimitado.

#### 4.5 Considerações finais

A simulação do processo de nascimento e morte como passeio aleatório mostra, de maneira visual e intuitiva, como um modelo simples pode capturar a essência de fenômenos populacionais aleatórios. As distribuições empíricas obtidas confirmam as previsões teóricas, e as trajetórias simuladas evidenciam as transições entre regimes de crescimento, equilíbrio e extinção.

Assim, o passeio aleatório não apenas fornece uma base conceitual para compreender processos de nascimento e morte, mas também serve como ferramenta computacional para investigar propriedades de estabilidade e comportamento de longo prazo em sistemas populacionais.

### 4.3 Passeio aleatório simples não homogêneo

Um *passeio aleatório não homogêneo* é uma sequência de variáveis aleatórias  $(S_n)_{n \geq 0}$  definida por

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1,$$

onde  $(X_n)_{n \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas.

Mais precisamente, para cada  $n \geq 1$ :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p_n,$$

com  $0 < p_n < 1$ .

Onde a não homogeneidade se refere ao fato de que a probabilidade de subir ou descer pode depender do tempo  $n$ .

Considere um passeio aleatório não homogêneo  $(S_n)_{n \geq 0}$  definido por

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

onde  $(X_n)_{n \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p_n.$$

1. Função média:

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n (2p_i - 1).$$

2. Variância:

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n 4p_i(1 - p_i),$$

pois os incrementos são independentes.

### Observação:

- Ao contrário do passeio homogêneo, a função média e a variância dependem de cada passo individual  $p_i$ .
- Se todos os  $p_i = p$  constantes, recupera-se o passeio aleatório homogêneo:

$$\mathbb{E}[S_n] = n(2p - 1), \quad \text{Var}(S_n) = 4np(1 - p).$$

**Teorema 4.3.1** (Lei Fraca dos Grandes Números para passeio aleatório simples não homogêneo).

Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório não homogêneo definido por

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

onde  $(X_n)$  são variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p_n,$$

e suponha que exista

$$\bar{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

Então, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 2\bar{p} - 1.$$

Observação:

- Esta é a Lei Fraca dos Grandes Números (convergência em probabilidade) para passeios aleatórios simples não homogêneos.
- No caso homogêneo  $p_n = p$  constante, recupera-se:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 2p - 1.$$

**Teorema 4.3.2** (Lei Forte para passeio aleatório simples não homogêneo). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório não homogêneo definido por*

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

onde  $(X_n)_{n \geq 1}$  são variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p_n,$$

e suponha que exista o limite

$$\bar{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

Então, com probabilidade 1,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2\bar{p} - 1.$$

Observações:

1. O passeio aleatório não homogêneo converge quase certamente para uma velocidade média determinada por  $\bar{p}$ .
2. Se  $p_i = p$  constante, recupera-se a lei forte do passeio aleatório homogêneo:

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 2p - 1 \quad \text{q.c.}$$

**Teorema 4.3.3** (TCL para passeio aleatório simples não homogêneo). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório não homogêneo com*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad X_i \in \{-1, +1\} \text{ independentes, } \mathbb{P}(X_i = 1) = p_i.$$

Definimos

$$\mu_i = \mathbb{E}[X_i] = 2p_i - 1, \quad \sigma_i^2 = \text{Var}(X_i) = 4p_i(1 - p_i).$$

Então, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{S_n - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Observações:

1. Este é o TCL para variáveis independentes não identicamente distribuídas (Lindeberg-Feller).
2. No caso homogêneo  $p_i = p$ , recupera-se o TCL clássico do passeio aleatório simples:

$$\frac{S_n - n(2p - 1)}{\sqrt{4np(1 - p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

**Exemplo 5:** Passeio Aleatório simples não homogêneo

Com o propósito de ilustrar de forma prática o comportamento de um passeio aleatório simples não homogêneo, foi realizada uma simulação computacional. Nesse tipo de processo estocástico, cada passo do passeio é determinado por uma variável aleatória  $X_n \in \{-1, +1\}$ , com probabilidades que variam ao longo do tempo. Em outras palavras, as probabilidades de avanço (+1) e recuo (-1) não são constantes, mas dependem de cada instante  $n$ , sendo representadas por  $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$  e  $1 - p_n = \mathbb{P}(X_n = -1)$ , respectivamente.

Na simulação apresentada, foram considerados três regimes distintos de variação para as probabilidades  $p_n$ :

- **Cenário crescente:** a probabilidade de avanço aumenta gradualmente ao longo do tempo, representando uma tendência de crescimento no processo.
- **Cenário oscilatório:** as probabilidades flutuam de forma periódica em torno de 0,5, produzindo oscilações regulares que alternam fases de subida e descida.
- **Cenário por blocos:** o processo passa por três regimes distintos de probabilidade, simulando mudanças abruptas nas condições do sistema.

Essas configurações permitem observar, de forma comparativa, como a não homogeneidade dos incrementos afeta a trajetória do passeio, sua tendência média e sua variabilidade ao longo do tempo. Além disso, a simulação serve de base empírica para a verificação de resultados teóricos importantes, como a Lei dos Grandes Números e o Teorema Central do Limite aplicados a variáveis independentes, porém não identicamente distribuídas. (LINDBERG, 1922; FELLER, 1971)

Dessa forma, este experimento computacional desempenha papel duplo: por um lado, fornece uma demonstração visual da influência das probabilidades variáveis sobre o comportamento

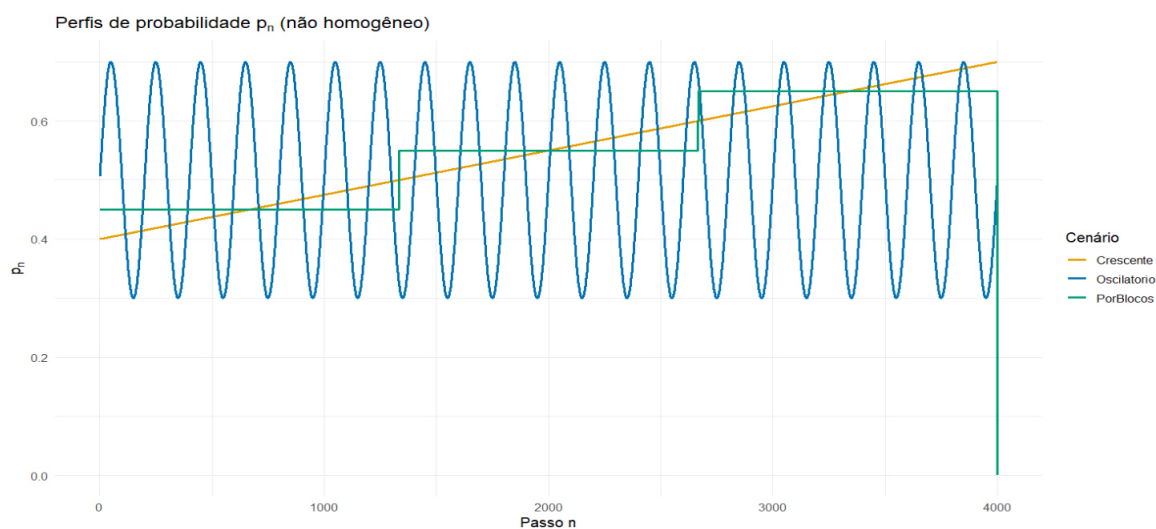
de  $S_n$ ; por outro, consolida os conceitos teóricos estudados, estabelecendo uma ponte entre a formalização matemática e a experimentação empírica na teoria dos processos estocásticos.

Ao analisarmos a Figura 14, verificamos a evolução das probabilidades  $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$  ao longo do tempo para três configurações distintas: cenário crescente (laranja), oscilatório (azul) e por blocos (verde).

- No cenário crescente, a probabilidade de avanço (+1) aumenta gradualmente de 0,4 para 0,7. Esse padrão representa um sistema que tende, com o passar do tempo, a favorecer passos positivos, o que gera uma inclinação ascendente na trajetória média.
- No cenário oscilatório, as probabilidades flutuam em torno de 0,5 de forma senoidal. Essa configuração reproduz um comportamento alternado de crescimento e decaimento, típico de processos periódicos ou sujeitos a ciclos.
- No cenário por blocos, as probabilidades assumem valores constantes por intervalos: 0,45, 0,55 e 0,65. Esse caso simula mudanças bruscas nas condições do sistema, como uma transição de regime ou política.

A Figura 16 a seguir, representa o perfil de probabilidade de  $p_n$ , essencial para compreender o caráter não estacionário do processo, pois revela que a distribuição dos incrementos muda ao longo do tempo, impactando diretamente a tendência e a variabilidade de  $S_n$ .

Figura 16 – Perfis de Probabilidade



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.1 Trajetória simulada e média teórica

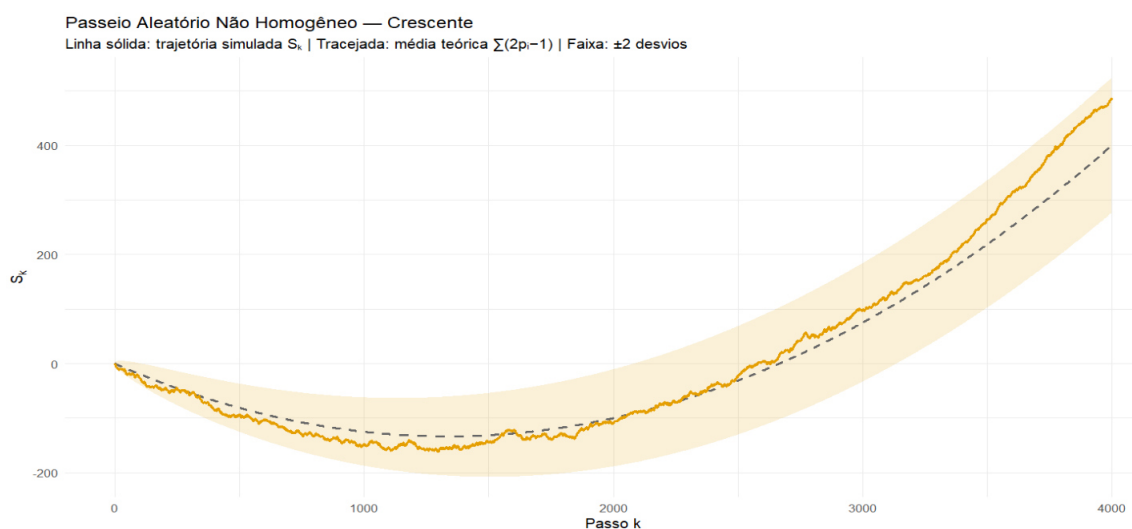
A Figura 17 apresenta a trajetória simulada  $S_k$  em função de  $k$ , comparada com a média teórica acumulada  $\sum_{i=1}^k (2p_i - 1)$  e com a faixa de duas vezes o desvio padrão teórico  $\pm 2\sqrt{\sum_{i=1}^k 4p_i(1 - p_i)}$ .

- A linha sólida colorida representa a trajetória simulada do passeio.
- A linha tracejada cinza mostra o comportamento médio esperado do processo.
- A faixa sombreada indica o intervalo de variabilidade provável (cerca de 95% das realizações).

Observa-se que a trajetória simulada tende a oscilar em torno da média teórica, permanecendo quase sempre dentro da região sombreada, o que evidencia a validade da formulação teórica. Quando  $p_n$  cresce ao longo do tempo, a trajetória tende a assumir valores positivos, indicando um viés de crescimento. Já quando  $p_n$  oscila, a trajetória apresenta movimentos alternados de subida e descida, compatíveis com o padrão da probabilidade.

Este gráfico nos permite visualizar de forma intuitiva a relação entre o comportamento das probabilidades  $p_n$  e a tendência global do passeio.

Figura 17 – Trajetória do Passeio Aleatório não Homegêneo



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.2 Teorema Central do Limite (HOEL; PORT; STONE, 1972)

A Figura 18 ilustra o Teorema Central do Limite aplicado ao passeio aleatório não homogêneo. Para um grande número de repetições independentes, calcula-se o valor padronizado

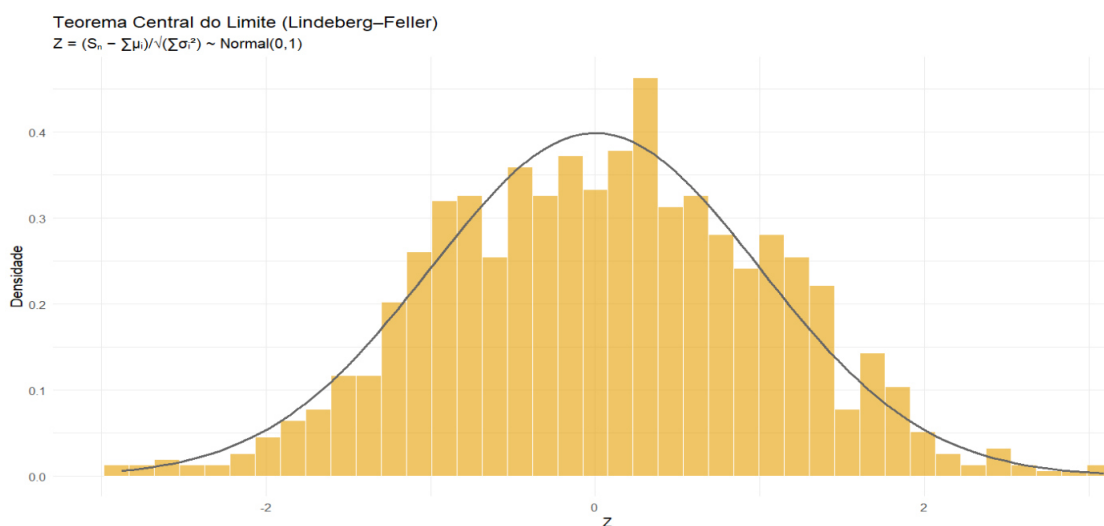
$$Z = \frac{S_n - \sum_{i=1}^n (2p_i - 1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n 4p_i(1 - p_i)}}.$$

O histograma das amostras de  $Z$  é comparado com a densidade da distribuição Normal padrão  $\mathcal{N}(0,1)$ .

- O histograma colorido representa os valores simulados de  $Z$ .
- A curva cinza corresponde à densidade teórica da Normal(0,1).

A boa coincidência entre o histograma empírico e a curva teórica evidencia a validade do Teorema Central do Limite de Lindeberg–Feller, que generaliza o resultado clássico para o caso de variáveis independentes, mas não identicamente distribuídas. Assim, mesmo em contextos onde as probabilidades  $p_n$  variam no tempo, a soma padronizada tende a seguir uma distribuição normal conforme  $n$  cresce.

Figura 18 – Teorema Central do Limite



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.3 Resultados e Discussão

A simulação realizada buscou ilustrar empiricamente o comportamento de um *passeio aleatório simples não homogêneo*, em que as probabilidades de transição variam ao longo do tempo. Por meio desse experimento computacional, foi possível observar, de forma comparativa, como a não homogeneidade nas probabilidades  $p_n$  influencia a tendência, a variabilidade e o comportamento assintótico do processo estocástico.

A Figura 16 apresenta um painel consolidado com os principais resultados obtidos onde são exibidos os perfis temporais das probabilidades  $p_n$  sob três cenários distintos: crescente (laranja), oscilatório (azul) e por blocos (verde).

Na Figura 17, observa-se a trajetória simulada  $S_k$  comparada com a média teórica  $\sum_{i=1}^k (2p_i - 1)$  e com a faixa de duas vezes o desvio padrão teórico. A trajetória acompanha de perto a média esperada, permanecendo, na maior parte do tempo, dentro da região sombreada de variabilidade. Esse resultado reforça a coerência entre o comportamento empírico e a formulação teórica, demonstrando que, mesmo com probabilidades variáveis, o passeio aleatório mantém uma estrutura estatística previsível. No cenário crescente, por exemplo, a trajetória apresenta uma leve tendência de subida, refletindo o aumento gradual de  $p_n$  ao longo do tempo.

Na Figura 18, o histograma representa as somas simuladas padronizadas, comparando-se à curva da distribuição  $\text{Normal}(0,1)$ . Verifica-se uma notável concordância entre o histograma e a

curva teórica, o que demonstra empiricamente a validade do Teorema Central do Limite (TCL) para o caso não homogêneo. Esse resultado, conhecido como a versão de Lindeberg–Feller do TCL, estabelece que a soma de variáveis independentes, ainda que com distribuições distintas, tende a uma distribuição normal após adequada padronização. Assim, mesmo com probabilidades  $p_n$  variáveis, o comportamento assintótico do processo preserva a normalidade na soma padronizada, confirmando a robustez estatística do modelo.

De forma geral, os resultados obtidos corroboram os fundamentos teóricos da seção anterior, confirmando as principais propriedades assintóticas, convergência média e normalidade, observadas no caso homogêneo, ainda que com maior complexidade dinâmica.

## 5 Conclusões

O presente Trabalho de Conclusão de Curso buscou explorar, sob diferentes perspectivas, o passeio aleatório como um modelo fundamental da Estatística e dos Processos Estocásticos, evidenciando sua relevância teórica, aplicabilidade prática e potencial científico no estudo da Probabilidade. A estrutura do trabalho, distribuída em cinco capítulos, objetiva construir uma compreensão progressiva, partindo de definições conceituais até aplicações mais complexas, consolidando o passeio aleatório como uma poderosa ferramenta de análise e de formação científica.

No Capítulo 1, foram estabelecidas as bases conceituais e formais do tema, apresentando definições, propriedades e resultados essenciais, sem uma abordagem matemática demonstrativa. Essa etapa objetiva apresentar exemplos motivadores.

O Capítulo 2 abordou o passeio aleatório simples, onde apresentamos a formulação teórica do passeio aleatório simples, estruturada sob uma perspectiva rigorosamente matemática. O objetivo foi expor, de maneira axiomática, os fundamentos que sustentam esse modelo estocástico elementar, destacando a importância das proposições e teoremas que descrevem suas propriedades probabilísticas. Essa abordagem evidencia o valor do formalismo matemático como pilar da modelagem estatística, ao mesmo tempo em que estabelece conexões diretas com a teoria dos processos estocásticos e das cadeias de Markov.

No Capítulo 3, a atenção voltou-se aos passeios aleatórios com barreiras, tanto refletoras quanto absorventes. Essas variações introduzem elementos fundamentais da teoria das cadeias de Markov com estados especiais, permitindo discutir conceitos como absorção, reflexão e tempo médio de recorrência. A implementação computacional desses modelos revelou como as barreiras alteram significativamente a dinâmica do processo, oferecendo ao aluno uma forma concreta de compreender as consequências matemáticas das condições de fronteira.

O Capítulo 4 foi dedicado às aplicações práticas dos passeios aleatórios, com ênfase em problemas clássicos de apostas, processos de filas e modelos de nascimento e morte. A análise da *ruína do jogador* demonstrou a relação direta entre probabilidade de sucesso e expectativa de sobrevivência financeira, enquanto o estudo dos processos de filas e de crescimento populacional evidenciou a conexão entre passeios aleatórios e fenômenos reais modelados por distribuições de probabilidade e equações estocásticas. Além disso, o estudo do passeio não homogêneo permitiu discutir situações com probabilidades variáveis, ampliando o repertório analítico e reforçando a natureza flexível do modelo.

Sob uma perspectiva voltada para aplicabilidade, este trabalho evidencia o potencial dos passeios aleatórios como recurso formativo. Ao articular teoria, simulação e interpretação gráfica, objetiva-se conduzir o tema, desenvolvendo competências essenciais da prática estatística:

compreender a aleatoriedade, raciocinar sobre incertezas e interpretar fenômenos por meio de modelos probabilísticos. Assim, o passeio aleatório não apenas exemplifica princípios fundamentais da Estatística, mas também constitui uma abordagem metodológica que favorece o pensamento estatístico crítico e reflexivo.

Diante do exposto, concluo que o estudo dos passeios aleatórios cumpre um papel duplo e complementar: de um lado, consolida os fundamentos teóricos dos processos estocásticos, e de outro estimula a criatividade e o raciocínio exploratório no ensino de estatística. A combinação entre modelagem matemática, simulação computacional e análise gráfica, contribui para uma melhor compreensão dos fenômenos, motivando e integrando conceitos abstratos e experiências concretas. Espero que este trabalho abre caminho para pesquisas futuras sobre variações mais complexas dos passeios aleatórios, como os não homogêneos, com múltiplas dimensões ou com transições dependentes do estado, fortalecendo a relação entre teoria estatística e experimentação computacional, sendo este trabalho uma fonte de apoio àqueles futuros pesquisadores motivados a iniciação científica.

# Referências

- ALLEN, A. O. **Probability, statistics, and queueing theory with computer science applications**. 2. ed. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 74, 75, 80 e 90.
- FELLER, W. Fluctuation theory of recurrent events. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 46, n. 2, p. 267–286, 1939. Citado na página 90.
- FELLER, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1957. v. 1. Citado na página 90.
- FELLER, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**. 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1968. v. 1. Clássico da teoria da probabilidade e dos passeios aleatórios. Citado 5 vezes nas páginas 11, 19, 20, 23 e 59.
- FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1971. v. 2. Citado na página 97.
- FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996. Citado na página 3.
- GALTON, F. **Natural inheritance**. London: Macmillan and Co., 1874. Citado na página 90.
- GRIMMETT, G. R.; STIRZAKER, D. **Probability and random processes**. 3. ed. Oxford: Oxford University Press, 2001. Citado na página 90.
- HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. **Stochastic processes**. New York: John Wiley & Sons, 1972. Citado na página 99.
- JUNIOR, V. V. Cadeias de markov: uma abordagem introdutória. In: **Anais do Encontro de Iniciação Científica e de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás**. Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 2011. Trabalho apresentado nos Anais do Encontro de Iniciação Científica, IME-UFG. Citado na página 84.
- JUNIOR, V. V. **Notas de Aula: Processos Estocásticos**. 2024. Material didático utilizado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (IME/UFG). Notas de apoio à disciplina Processos Estocásticos, ministrada no curso de Estatística. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 59.
- KENDALL, D. G. On the generalized “birth-and-death” process. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 19, n. 1, p. 1–15, 1948. Citado na página 90.
- KOROSTELEVA, O. **Stochastic Processes with R: An Introduction**. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2020. ISBN 9780367562893. Citado 6 vezes nas páginas 12, 13, 15, 17, 23 e 59.
- LINDBERG, J. W. Eine neue herleitung des exponentialsatzes in der wahrscheinlichkeitsrechnung. **Mathematische Zeitschrift**, v. 15, n. 1, p. 211–225, 1922. Citado na página 97.

NASON, V. **Systems Modeling and Complex Networks Analysis**. Cidade: Editora, 2016. Citado na página 8.

NORRIS, J. R. **Markov chains**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. Citado na página 90.

PAPOULIS, A. **Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1991. (Schaum's Outline Series). Citado 2 vezes nas páginas 79 e 80.

ROSS, S. M. **Stochastic processes**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 87, 88, 89 e 90.

ROSS, S. M. **Introduction to Probability Models**. 11th. ed. New York: Academic Press, 2014. Abordagem aplicada dos modelos de probabilidade e processos de Poisson e Markov. Citado 5 vezes nas páginas 7, 23, 59, 67 e 90.

STIRZAKER, D. **Elementary Probability**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. Citado na página 23.