

EMC
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA,
MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO



UFG
UNIVERSIDADE
FEDERAL DE GOIÁS

Thácio Breno Silva Martins

FORMULAÇÃO POR BALANÇO DE CORRENTES DE BARRA PARA A SOLUÇÃO DO
PROBLEMA DO FLUXO DE CARGA DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Goiânia

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO NO REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio do Repositório Institucional (RI/UFG), regulamentado pela Resolução CEPEC no 1240/2014, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei no 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo dos Trabalhos de Conclusão dos Cursos de Graduação disponibilizado no RI/UFG é de responsabilidade exclusiva dos autores. Ao encaminhar(em) o produto final, o(s) autor(a)(es)(as) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação (TCCG)

Nome completo do autor: Thácio Breno Silva Martins

Título do trabalho: Formulação por balanço de correntes de barra para a solução do problema do fluxo de carga de redes de distribuição

2. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador) Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [] NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à)(s) autor(a)(es)(as) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo do TCCG. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro.

Obs.: Este termo deve ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Gelson Antonio Andrea Brigatto, Professor do Magistério Superior**, em 05/12/2025, às 08:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thacio Breno Silva Martins, Discente**, em 05/12/2025, às 20:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5837825** e o código CRC **ECCD0446**.

Referência: Processo nº 23070.042212/2025-01

SEI nº 5837825



Thácio Breno Silva Martins

FORMULAÇÃO POR BALANÇO DE CORRENTES DE BARRA PARA A SOLUÇÃO DO
PROBLEMA DO FLUXO DE CARGA DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Monografia de Projeto Final de Curso
apresentado à Escola de Engenharia
Elétrica, Mecânica e de Computação da
Universidade Federal de Goiás, como
requisito parcial para a integralização
do curso em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Antônio
Andrêa Brigatto.

Goiânia
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Martins, Thácio Breno Silva
Formulação por balanço de correntes de barra para a solução do problema do fluxo de carga de redes de distribuição [manuscrito] / Thácio Breno Silva Martins. - 2025.
LXI, 61 f.: 2025

Orientador: Prof. Dr. Gelson Antônio Andrêa Brigatto
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Engenharia Elétrica, Goiânia, 2025.

Bibliografia.
Inclui: siglas, símbolos, tabelas, algoritmos, gráfico, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Balanço de Corrente. 2. Balanço de Potência. 3. Redes de Distribuição. 4. Problema do Fluxo de Carga. 5. Método de Newton-raphson.

I. Brigatto, Gelson Antônio Andrêa, orient. II. Título.

CDU 621.3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 3 (três) dias do mês de dezembro do ano de 2025 iniciou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado “Formulação por balanço de correntes de barra para a solução do problema do fluxo de carga de redes de distribuição”, de autoria de Thácio Breno Silva Martins, do curso de Engenharia Elétrica, da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da UFG. Os trabalhos foram instalados pelo Prof. orientador Gelson Antônio Andréa Brigatto - EMC/UFG, com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Profa. Dra. Lina Paola Garces Negrete (EMC/UFG) e Prof. Dr. Igor Kopcak (EMC/UFG). Após a apresentação, a banca examinadora realizou a arguição do(a) estudante. Posteriormente, de forma reservada, a Banca Examinadora atribuiu a nota final de 9,5 (nove e meio) , tendo sido o TCC considerado APROVADO.

Proclamados os resultados, os trabalhos foram encerrados e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Gelson Antonio Andrea Brigatto, Professor do Magistério Superior**, em 03/12/2025, às 11:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lina Paola Garces Negrete, Professora do Magistério Superior**, em 03/12/2025, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Igor Kopcak, Professor do Magistério Superior**, em 03/12/2025, às 11:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5823387** e o código CRC **DE08BCD3**.

Dedico este trabalho aos meus pais, Cléria e João,
à minha irmã Thays e à minha avó Ana Maria
pelo apoio e motivação;
e a todos os professores e amigos,
que somaram conhecimentos
para a escrita deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço o Prof. Dr. Gelson Antônio Andrêa Brigatto, da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da Universidade Federal de Goiás (UFG), pela orientação, dedicação, atenção e principalmente a sabedoria e aos conhecimentos necessários para a realização deste trabalho e para a minha formação acadêmica.

À Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e Computação da Universidade Federal de Goiás (UFG) e a todos os docentes que eu tive à honra de aprender e conquistar a sabedoria e os conhecimentos necessários para a realização das atividades do trabalho. A todos que direta ou indiretamente deram pequenas contribuições e colaboraram com este trabalho.

RESUMO

A formulação clássica do Problema do Fluxo de Carga baseia-se no cálculo do balanço de potências de barras do sistema elétrico em estudo e fundamenta-se na obtenção de raízes de equações de resíduos de potência, cuja a solução necessita ser obtida por métodos iterativos devido à natureza não-linear das equações. Este Projeto Final de Curso tem como objetivo a elaboração de uma formulação alternativa para a solução do Problema do Fluxo de Carga de redes de distribuição, fundamentada no cálculo do balanço de correntes de barra e sua solução pelo Método de Newton-Raphson com base na obtenção das raízes de equações de resíduos de corrente. O número de iterações e tempos de processamento são adotados como critérios de desempenho computacional para a avaliação da formulação desenvolvida e o estudo da comparação com o método de Newton-Raphson clássico por balanço de potência e os métodos Soma das Correntes, Soma das Potências e Direct Load Flow. Redes de distribuição conhecidas da literatura são empregadas como sistemas teste para a avaliação e comparação de desempenho com base na operação normal e na situação limite de perda de estabilidade dos sistemas.

Palavras-chave: Redes de Distribuição, Balanço de Potências, Balanço de Correntes, Problema do Fluxo de Carga, Método de Newton-Raphson.

ABSTRACT

The classic formulation of the Load Flow Problem is based on calculating the power balance of buses in the electrical system under study and relies on obtaining the roots of residual power equations, whose solution needs to be obtained by iterative methods due to the non-linear nature of the equations. This Final Course Project aims to develop an alternative formulation for solving the Load Flow Problem of distribution networks, based on calculating the bus current balance and its solution by the Newton-Raphson Method based on obtaining the roots of residual current equations. The number of iterations and processing times are adopted as computational performance criteria to evaluate the developed formulation and to compare it with the classical Newton-Raphson power balance method, as well as the Current Summation, Power Summation, and Direct Load Flow methods. Distribution networks known in the literature are employed as test systems for performance evaluation and comparison under both normal operation and conditions nearing the limit of stability loss.

Keywords: Distribution Networks, Power Balance, Current Balance, Load Flow Problem, Newton-Raphson Method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - ELEMENTOS DE REDE.	12
FIGURA 2.2 - CONVENÇÕES DE SINAIS POSITIVO PARA CORRENTES E POTÊNCIAS.	12
FIGURA 2.3 - MODELAGEM DE GERAÇÃO E CARGA.	14
FIGURA 2.4 - MODELAGEM DE ELEMENTOS <i>SHUNTS</i>	14
FIGURA 2.5 - ELEMENTO SÉRIE DE UM RAMO GENÉRICO <i>K-M</i>	15
FIGURA 2.6 - MODELO π DE LINHAS DE TRANSMISSÃO E DISTRIBUIÇÃO 16	16
FIGURA 2.7 - MODELO π DO TRANSFORMADOR EM FASE.	17
FIGURA 2.8 - ESQUEMA DE RAMO GENÉRICO <i>K-M</i> PARA A DEFINIÇÃO DE FLUXOS DE POTÊNCIA.	18
FIGURA 2.9 - ESQUEMA PARA A DEFINIÇÃO DO BALANÇO DE CORRENTES DE BARRAS.	19
FIGURA 2.10 - REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UMA REDE DE DISTRIBUIÇÃO. 27	27
FIGURA 2.11 - RAMO GENÉRICO <i>K-M</i> DE EXEMPLIFICAÇÃO DA VARREDURA INVERSA DO MSI.	28
FIGURA 2.12 - RAMO GENÉRICO <i>K-M</i> DE EXEMPLIFICAÇÃO DA VARREDURA DIRETA DO MSI.	29
FIGURA 2.13 - RAMO GENÉRICO <i>K-M</i> DE EXEMPLIFICAÇÃO DA VARREDURA INVERSA DO MSP.	31
FIGURA 2.14 - RAMO GENÉRICO <i>K-M</i> DE EXEMPLIFICAÇÃO DA VARREDURA DIRETA DO MSP.	33
FIGURA 4.1 - GRÁFICO: NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE SEM <i>SHUNTS</i>	49
FIGURA 4.2 - GRÁFICO: NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE COM <i>SHUNTS</i>	49
FIGURA 4.3 - GRÁFICO: TEMPO MÉDIO DE PROCESSAMENTO PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE SEM <i>SHUNTS</i>	50
FIGURA 4.4 - GRÁFICO: TEMPO MÉDIO DE PROCESSAMENTO PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE COM <i>SHUNTS</i>	50
FIGURA 4.5 - GRÁFICO: NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 A PARTIR DA PERDA DE ESTABILIDADE DAS REDES TESTE.	51
FIGURA 4.6 - GRÁFICO: NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 A PARTIR DA PERDA DE ESTABILIDADE DAS REDES TESTE.	51

LISTA DE TABELAS

TABELA 1- TIPOS DE BARRAS E INCÓGNITAS ASSOCIADAS.....	23
TABELA 2- EQUAÇÕES PARA SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 2 DO PFC.....	24
TABELA 3 - RESULTADOS DO SUBSISTEMA 1 PARA A REDE DE 14 BARRAS SEM <i>SHUNTS</i>	42
TABELA 4 - RESULTADOS DO SUBSISTEMA 1 PARA A REDE DE 14 BARRAS COM <i>SHUNTS</i>	42
TABELA 5 - NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE SEM <i>SHUNTS</i>	44
TABELA 6 - NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE COM <i>SHUNTS</i>	45
TABELA 7 - TEMPO MÉDIO DE PROCESSAMENTO PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE SEM <i>SHUNTS</i>	46
TABELA 8 - TEMPO MÉDIO DE PROCESSAMENTO PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 DE REDES TESTE COM <i>SHUNTS</i>	46
TABELA 9 - NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 A PARTIR DA PERDA DE ESTABILIDADE DAS REDES TESTE.	47
TABELA 10 - TEMPO MÉDIO DE SOLUÇÃO DO SUBSISTEMA 1 A PARTIR DA PERDA DE ESTABILIDADE DAS REDES TESTE.	48

SUMÁRIO

RESUMO	3
ABSTRACT	4
LISTA DE FIGURAS	5
LISTA DE TABELAS	6
SUMÁRIO	7
1. INTRODUÇÃO	8
1.1. Justificativa	8
1.2. Objetivos	9
1.3. Metodologia	9
1.4. Organização do trabalho	10
2. TEORIA BÁSICA	11
2.1. Introdução	11
2.2. Conceituações básicas	11
2.2.1. Elementos de Rede	11
2.2.2. Convenções de Sentidos de Corrente e Potências	12
2.2.3. Representação Por Unidade	13
2.2.4. Modelagem de Elementos de Barra	13
2.2.5. Modelagem de Elementos de Ramos	15
2.2.6. Equações Gerais de Correntes, Fluxos e Perdas de Potência	17
2.2.7. Equação Nodal de Rede	18
2.3. Modelagem do Problema do Fluxo de Carga	20
2.3.1. Formulação do PFC por Balanço de Potência de Barras	21
2.3.2. Classificação de Barras e Estratégia de Solução do PFC	22
2.3.3. Solução do Subsistema 1 por Balanço de Potência	24
2.4. Problema do Fluxo de Carga para redes de distribuição	27
2.4.1. Método da Soma da Correntes	28
2.4.2. Método da Soma das Potências	30
2.4.3. Método Direct Load Flow	33
3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO	35
3.1. Formulação do PFC por Balanço de Correntes de Barras	35
3.2. Solução do Subsistema 1 pelo Método de Newton-Raphson	38
3.3. Algoritmo para implementação computacional	40
4. TESTES E ANÁLISES DE RESULTADOS	41
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	52
6. REFERÊNCIAS	54

1. INTRODUÇÃO

A solução do Problema do Fluxo de Carga (PFC) objetiva essencialmente em obter as variáveis desconhecidas de um sistema elétrico. O PFC é decomposto em dois subproblemas de equações e incógnitas com procedimentos distintos, em que no subsistema 1 são obtidas as incógnitas de magnitude e de ângulo das tensões de barra do sistema elétrico, geralmente por meio de solução numérica com o emprego de um método iterativo, e o subsistema 2 envolve solução analítica das demais incógnitas do sistema, tal como as injeções líquidas de potências ativa e reativa de certas barras, bem como fluxos e perdas de potência nos ramos do sistema.

No caso de redes de distribuição, tem-se que as barras são normalmente classificadas como tipo de carga, exceto a barra fonte, em que o consumo de potências nas barras são dados do sistema, e a disposição dos ramos são tipicamente radiais. Com base nestas características, diversas estratégias para o cálculo do subsistema 1 do Problema do Fluxo de Carga de redes de distribuição são encontradas na literatura, tal como as estratégias baseadas em uma varredura direta e inversa das barras da rede em estudo, conhecidas como Método da Soma das Correntes e Método da Soma das Potências, e um método baseado em uma formulação matricial chamado Direct Load Flow. Além disso, devido à robustez numérica e convergência quadrática, o cálculo do subsistema 1 do PFC de redes de distribuição pode opcionalmente ser realizado também pelo método de Newton-Raphson clássico por balanço de potência.

O presente Projeto Final de Curso visa contribuir com uma nova metodologia matricial para a solução do subsistema 1 do PFC de redes de distribuição, baseada em uma estratégia de cálculo iterativo de correntes de barras e de ramos de uma rede de distribuição em estudo.

1.1. Justificativa

Devido ao fato da geração e carga em sistemas elétricos serem geralmente mensuradas em termos de potência, a formulação clássica para a obtenção das equações básicas do PFC baseia-se no cálculo do balanço de potência de todas as barras do sistema elétrico em estudo, cujo desenvolvimento constitui-se em uma extensão da imposição da Lei de Kirchhoff das Correntes a todas as barras do sistema elétrico para a obtenção do balanço de correntes das barras.

Para redes de distribuição, observa-se então que a solução aproximada para o estado das tensões de barras obtida durante o processo iterativo de cálculo do subsistema 1, permite obter uma estimativa das injeções líquidas de correntes de barra com os dados das injeções líquidas de potência ativa e reativa da rede, bem como uma estimativa das correntes de ramos

e *shunts*, tal que pode-se estimar iterativamente o balanço de correntes nas barras da rede, o que sugere a possibilidade de aplicação de uma metodologia adicional em termos de correntes.

Assim, este Projeto Final de Curso tem como objetivo desenvolver a formulação e a implementação computacional de uma estratégia alternativa para a metodologia clássica por balanço de potência, baseada no cálculo iterativo do balanço de correntes de barra para a solução do subsistema 1 do PFC de redes de distribuição pelo método de Newton-Raphson.

1.2. Objetivos

Este trabalho de conclusão de curso tem como foco os seguintes objetivos:

- Estudo da teoria básica sobre Fluxo de Carga.
- Estudo e implementação computacional da formulação clássica (coordenadas polares) do subsistema 1 por balanço de potência de barras e solução por Newton-Raphson.
- Estudo, análise e comparação computacional do Método da Soma das Correntes (MSI).
- Estudo, análise e comparação do Método da Soma das Potências (MSP).
- Estudo, análise e comparação método Direct Load Flow (DLF).
- Desenvolvimento equacional e implementação computacional da formulação proposta por balanço de correntes de barra e solução pelo método de Newton-Raphson.
- Simulações com redes de distribuição conhecidas da literatura, para análises de resultados com a formulação desenvolvida e a comparação com os demais métodos implementados.

1.3. Metodologia

A estratégia metodológica adotada neste trabalho consistiu inicialmente no estudo da teoria básica sobre fluxo de carga por meio de pesquisas bibliográficas, envolvendo conceitos básicos, modelagens de elementos de rede, cálculos de fluxos e perdas de potência de ramos, equação nodal e classificação de barras. Adicionalmente, realizou-se estudos da formulação clássica da metodologia por balanço de potência de barra e sua implementação computacional de solução por Newton-Raphson, bem como o estudo e a análise de desempenho computacional dos demais métodos abordados: Soma das Potências, Soma das Correntes e Direct Load flow.

No prosseguimento, foram formuladas as equações de resíduos de corrente de barra como equações básicas do subproblema 1 do PFC baseadas no balanço de correntes de barra proposta neste trabalho, bem como a formulação dos elementos das submatrizes da matriz

jacobiana do método de Newton-Raphson e a elaboração do algoritmo de solução. A partir da implementação computacional da metodologia proposta, foram realizados testes com diversas redes de distribuição para testes, avaliação e comparação de resultados com os métodos MSP, MSI, DLF e Newton-Raphson clássico, considerando dois critérios de desempenho (número de iterações e tempo de processamento) e duas situações para as cargas das redes: operação normal (dados de carga originais) e o aumento do carregamento em todas as barras até um ponto onde o sistema ultrapassaria o seu limite de estabilidade.

Por fim, elaborou-se a escrita do trabalho com a teoria básica e os desenvolvimentos do estudo, bem como as análises de resultados, comparações de desempenho e conclusões.

1.4. Organização do trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, apresentados de forma a encaminhar o raciocínio do leitor para a melhor compreensão dos assuntos abordados, a seguir descritos.

O capítulo 2 objetiva apresentar a teoria básica para o desenvolvimento do trabalho, abordando um texto introdutório sobre o Problema de Fluxo de Carga, bem como os métodos de Newton-Raphson clássico, Soma das Potencias, Soma das Correntes e Direct Load Flow.

O capítulo 3 apresenta o objeto de estudo do trabalho, abordando o desenvolvimento da formulação do Problema de Fluxo de Carga de redes de distribuição com base no balanço de correntes de barras da rede e o algoritmo de solução pelo método de Newton-Raphson.

O capítulo 4 apresenta os testes em redes de distribuição conhecidas da literatura e a análise e comparação de resultados obtidos com os demais métodos abordados no capítulo 3.

O capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho, obtidos com base nas análises e comparação de resultados abordados no capítulo 4, bem como sugestões de trabalhos futuros.

2. TEORIA BÁSICA

2.1. Introdução

Para o estudo do Problema do Fluxo de Carga (PFC), assume-se um comportamento estático e equilibrado para os Sistemas Elétricos de Potência (SEP) em estudo, sendo possível a representação do sistema por meio de um esquema por fase considerando as tensões de linha e resultando em potências totais, denominado diagrama unifilar (BRIGATTO, 2025).

O cálculo do PFC parte da topologia e das condições de geração e carga conhecidas do sistema elétrico em estudo, e visa essencialmente em determinar as condições de operação de do sistema em regime permanente, o que consiste em obter o estado das tensões de barra do sistema, bem como outras variáveis não conhecidas previamente, tais como certas potências geradas nas barras e as transmitidas e consumidas nos ramos do sistema (BRIGATTO, 2025).

A imposição da Lei de Kirchhoff das Correntes a cada barra de um sistema permite determinar o balanço de correntes de todas as barras e resulta na equação nodal, que relaciona as injeções líquidas de corrente e o estado das tensões de barra por meio da matriz admitância. Por extensão, a imposição do balanço de potências nas barras do sistema permite determinar a formulação básica do PFC, constituída por um conjunto de equações algébricas não-lineares. Com a classificação das barras para identificar as variáveis como dados e incógnitas do PFC, chega-se a uma estratégia de solução baseada em duas etapas com equacionamentos distintos e, utilizando-se métodos iterativos desenvolvidos para a solução deste conjunto de equações e suas variáveis, obtém-se por fim as condições de operação do sistema (BRIGATTO, 2025).

Estes diversos aspectos da modelagem de sistemas elétricos são abordados a seguir.

2.2. Conceituações básicas

Para a modelagem e desenvolvimento dos métodos de solução do PFC, é necessário inicialmente o estudo de diversos conceitos da teoria dos sistemas elétricos de potência.

2.2.1. Elementos de Rede

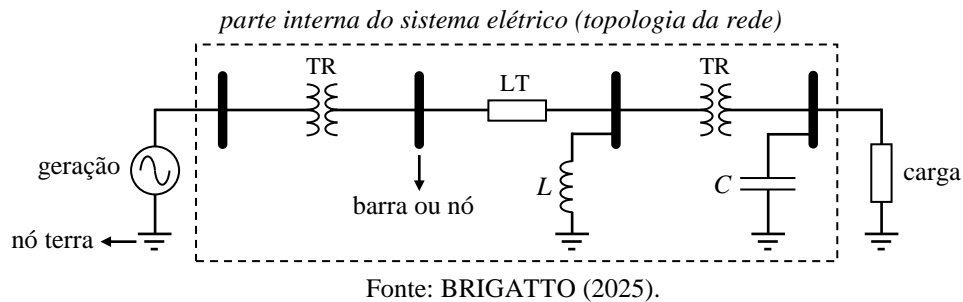
Os componentes de sistemas elétricos, nomeados elementos de rede, são classificados basicamente em dois grupos de acordo com sua função e localização no sistema (Figura 2.1):

- Elementos de barra: componentes conectados em derivação ao nó de referência de tensão do sistema (nó terra). Constituem-se na geração e carga da rede, consideradas como parte externa do sistema e modeladas por suas contribuições líquidas de potência nas barras, bem

como nos componentes capacitivos ou indutivos chamados elementos *shunt* de barra e considerados como parte interna do sistema elétrico (configuração ou topologia da rede).

- Elementos de ramos: componentes do sistema conectados entre duas barras e modelados por parâmetros concentrados, são constituídos pelas linhas de transmissão/distribuição e transformadores, sendo também considerados como parte interna do sistema elétrico.

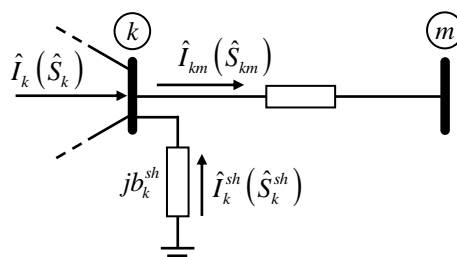
Figura 2.1 - Elementos de Rede.



2.2.2. Convenções de Sentidos de Corrente e Potências

A definição dos sentidos de correntes e potências é necessária, pelo fato dos sentidos positivos e negativos influenciar no desenvolvimento das equações. Neste trabalho é adotado as convenções propostas em MONTICELLI (1983), cujo esquema representativo é mostrado na Figura 2.2. As injeções de corrente líquida \hat{I}_k e *shunt* \hat{I}_k^{sh} em um barra k do sistema são convencionadas como positivas entrando na barra k , e a corrente \hat{I}_{km} em um ramo k - m do sistema é convencionada positiva no sentido saindo da barra k e em direção à barra m . Por consequência, as injeções de potências líquida \hat{S}_k e *shunt* \hat{S}_k^{sh} na barra k , bem como o fluxo de potência \hat{S}_{km} no ramo k - m seguem as mesmas convenções das correntes. Logo, caso o valor numérico das partes real e/ou imaginária de correntes e potências for positivo, então o sentido é o mesmo da convenção adotada e, se o valor numérico for negativo, o sentido é o contrário.

Figura 2.2 - Convenções de sinais positivo para correntes e potências.



2.2.3. Representação Por Unidade

Para a solução do PFC pode-se normalizar as grandezas fundamentais dos circuitos elétricos (tensão, corrente, impedância e potência), chamada representação por unidade (*pu*). Isso se deve ao fato de as grandezas elétricas em *pu* permitir que as impedâncias do primário e secundário do transformador apresentem o mesmo valor, o que simplifica do sistema elétrico e também viabiliza a montagem da matriz admitância nodal do sistema (BRIGATTO, 2025).

A representação por unidade consiste em fixar valores de base para as grandezas das redes, sendo ela potência total aparente (trifásica) S_{base} definida para todo o sistema e tensões de entre fases V_{base} para cada divisão de tensão da rede delimitada pelos transformadores. Uma das vantagens da representação reside no fato da abstração das grandezas elétricas, por exemplo, se as tensões de barra estão em operação com $1,0 pu$, sabe-se que o sistema está operando na tensão nominal do trecho definido pelo transformador. O estado das tensões de barra geralmente estão próximas de $1,0 pu$, e a abertura angular das tensões de barra, usualmente da ordem em módulo de no máximo $0,5 rad$. Isso permite que o vetor de estados de tensões sejam inicializados na condição *flat-start*, isso é, $V_k = 1,0 pu$ e $\theta_k = 0 rad$. Isto é justificado pelo fato do *flat-start* proporcionar uma inicialização adequada às variáveis de tensão de barra para o cálculo do PFC, visto que seus valores já se encontrarão próximos da solução, assegurando que o método convirja para um valor com significado físico.

2.2.4. Modelagem de Elementos de Barra

Elementos de geração e carga são modelados como potências constantes, sendo suas contribuições representadas por injeções líquidas de potência ativa e reativa nas barras do sistema. Logo, para um gerador que injeta uma potência $\hat{S}_k^G = P_k^G + jQ_k^G$ em uma barra k e uma carga que absorve uma potência $\hat{S}_k^C = P_k^C + jQ_k^C$ na barra k , com base no esquema da Figura 2.3 e na convenção de sinais adotada, a potência líquida na barra k é dada por:

$$\hat{S}_k = \hat{S}_k^G - \hat{S}_k^C = (P_k^G - P_k^C) + j(Q_k^G - Q_k^C) = P_k + jQ_k \quad (2.1)$$

Desta forma, a injeção líquida potência ativa P_k na barra k é determinada por:

$$P_k = P_k^G - P_k^C \quad (2.2)$$

tal que um valor positivo de P_k implica em predomínio de geração de potência ativa na barra e um valor negativo de P_k implica no predomínio de consumo (carga) de potência ativa.

Desta forma, a injeção líquida potência reativa Q_k na barra k é determinada por:

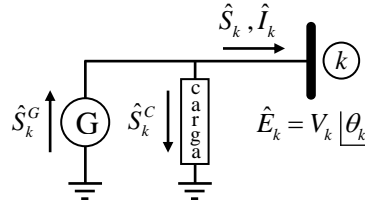
$$Q_k = Q_k^G - Q_k^C \quad (2.3)$$

tal que um valor positivo de Q_k implica em predomínio de geração de potência reativa na barra e valor negativo de Q_k implica em predomínio de consumo de potência reativa na barra.

Considerando-se conhecida a potência líquida \hat{S}_k e a tensão $\hat{E}_k = V_k \underline{\theta}_k$ na barra k , pode-se determinar a injeção líquida de corrente \hat{I}_k na barra k através da seguinte relação:

$$\hat{S}_k = \hat{E}_k \hat{I}_k^* \Rightarrow \hat{I}_k^* = \left(\frac{\hat{S}_k}{\hat{E}_k} \right) \Rightarrow \hat{I}_k = \left(\frac{\hat{S}_k}{V_k \underline{\theta}_k} \right)^* = \frac{P_k - jQ_k}{V_k \underline{-\theta}_k} \quad (2.4)$$

Figura 2.3 - Modelagem de geração e carga.

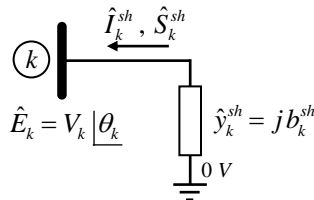


Fonte: BRIGATTO (2025).

Componentes *shunts* constituem-se de bancos de capacitores ou reatores em derivação ao nó terra e têm a função de regulação de tensão através de fornecimento ou consumo de potência reativa. Seja na Figura 2.4 o esquema de uma barra genérica k com um elemento *shunt* qualquer conectado ao nó de referência, representado pela sua admitância $\hat{y}_k^{sh} = j b_k^{sh}$, onde b_k^{sh} é a susceptância *shunt*. Desse modo, de acordo com a convenção de sentidos adotada e com base na Figura 2.4, tem-se que a injeção de corrente *shunt* \hat{I}_k^{sh} na barra k é obtida por:

$$\hat{I}_k^{sh} = (0 - \hat{E}_k) \hat{y}_k^{sh} = -\hat{E}_k \hat{y}_k^{sh} = -\hat{E}_k j b_k^{sh} \quad (2.5)$$

Figura 2.4 - Modelagem de elementos *shunts*.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Assim, a injeção de potência *shunt* \hat{S}_k^{sh} na barra k é determinada por:

$$\hat{S}_k^{sh} = \hat{E}_k (\hat{I}_k^{sh})^* = \hat{E}_k (-\hat{E}_k j b_k^{sh})^* = V_k \underline{\theta}_k V_k \underline{-\theta}_k j b_k^{sh} \Rightarrow \hat{S}_k^{sh} = j V_k^2 b_k^{sh} \quad (2.6)$$

Por fim, definindo Q_k^{sh} como sendo a potência reativa do componente *shunt* conectado na barra k , tal que: $\hat{S}_k^{sh} = jQ_k^{sh}$, tem-se que Q_k^{sh} pode ser determinada por:

$$\hat{S}_k^{sh} = jV_k^2 b_k^{sh} = jQ_k^{sh} \Rightarrow Q_k^{sh} = V_k^2 b_k^{sh} \quad (2.7)$$

2.2.5. Modelagem de Elementos de Ramos

Como mencionado, elementos de ramos residem em linhas de transmissão/distribuição e transformadores, que se encontram conectados entre duas barras da rede. Estes componentes são fundamentados por um elemento série e, dependendo da natureza do componente, estes podem também exibir efeitos capacitivos ou indutivos *shunts* nas barras terminais do ramo.

A Figura 2.5 mostra o esquema de um ramo genérico k - m contendo um elemento série de ramos representador por uma impedância \hat{z}_{km} . Definindo r_{km} como a resistência série e x_{km} como a reatância série, tem-se que a impedância série de ramos \hat{z}_{km} é definida pela equação:

$$\hat{z}_{km} = r_{km} + jx_{km} \quad (2.8)$$

A modelagem de ramos pode também ser expressa pela admitâncias série \hat{y}_{km} , onde g_{km} é definida como a condutância série e b_{km} é definida como a susceptância série, tal que:

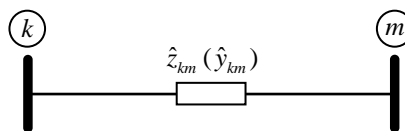
$$\hat{y}_{km} = g_{km} + jb_{km} \quad (2.9)$$

tal que, como $\hat{y}_{km} = 1/\hat{z}_{km}$, tem-se que g_{km} e b_{km} podem ser calculadas a partir de \hat{z}_{km} por:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (2.10)$$

$$b_{km} = -\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (2.11)$$

Figura 2.5 - Elemento série de um ramo genérico k - m



Fonte: BRIGATTO (2025).

No caso de linhas de transmissão e distribuição, da Figura 2.6 mostra a representação do modelo π para linhas longas, onde os efeitos resistivos e indutivos são modelados por uma admitância série \hat{y}_{km} , e os efeitos capacitivos dos alimentadores são modelados por uma susceptância *shunt* b_{km}^{sh} conectada a cada barra terminal do ramo e correspondente à metade da

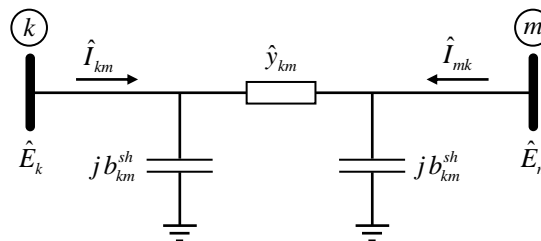
susceptância shunt total da linha. Neste caso, considerando conhecidas a tensão \hat{E}_k na barra k e \hat{E}_m na barra m , tem-se que a corrente \hat{I}_{km} no sentido k para m da linha é determinada por:

$$\hat{I}_{km} = (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km})\hat{E}_k - \hat{y}_{km}\hat{E}_m \quad (2.12)$$

e a corrente \hat{I}_{mk} no sentido m para k da linha do ramo k - m é determinada por:

$$\hat{I}_{mk} = -\hat{y}_{km}\hat{E}_k + (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km})\hat{E}_m \quad (2.13)$$

Figura 2.6 - Modelo π de linhas de transmissão e distribuição



Fonte: o próprio autor.

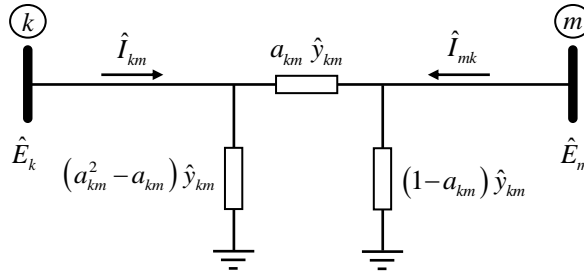
No caso dos transformadores, o modelo usual é formado por um auto-transformador ideal com relação de transformação $1:\hat{t}$, onde $\hat{t} = a_{km} \angle \varphi_{km}$, e um elemento série \hat{y}_{km} referente à admitância de curto-circuito do transformador, que caracteriza-se por ser puramente indutiva. O termo a_{km} refere-se ao tap do transformador, cujo valor define situações onde as tensões nas barras terminais do transformador são iguais (valor 1,0) ou fora das especificações nominais ($>$ ou $<$ que 1,0). O termo φ_{km} consiste em um ângulo inserido pelo transformador para causar um defasamento angular entre as tensões das barras terminais do transformador, empregado para proporcionar um certo controle no fluxo de potência ativa no ramo em que se encontra. Por ser o tipo que apresenta maior funcionalidade e constar nos sistemas de teste clássicos da literatura, apenas o modelo do transformador em fase ($\varphi_{km} = 0$) será aqui considerado.

A Figura 2.7 mostra a representação do modelo π do transformador em fase, formado por uma admitância série \hat{y}_{km} e dois elementos *shunts* que representam os efeitos capacitivos e indutivos produzidos pelo tap a_{km} do transformador. Neste caso, considerando conhecidas a tensão \hat{E}_k na barra k e \hat{E}_m na barra m , a corrente \hat{I}_{km} no sentido k para m da linha é obtida por:

$$\hat{I}_{km} = a_{km}^2 \hat{y}_{km} \hat{E}_k - a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_m \quad (2.14)$$

e a corrente \hat{I}_{mk} no sentido m para k da linha do ramo k - m é determinada por:

$$\hat{I}_{mk} = -a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_k + \hat{y}_{km} \hat{E}_m \quad (2.15)$$

Figura 2.7 - Modelo π do transformador em fase.

Fonte: o próprio autor.

2.2.6. Equações Gerais de Correntes, Fluxos e Perdas de Potência

A comparação entre as equações de correntes de ramos provenientes da modelagem dos elementos de ramos (linhas e transformadores) permite a definição das equações gerais de correntes de ramos, tal que, por inspeção, a equação geral de correntes de ramos \hat{I}_{km} no sentido k para m de um ramo qualquer $k-m$ é determinada por:

$$\hat{I}_{km} = (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \quad (2.16)$$

e a equação geral de correntes de ramos \hat{I}_{mk} no sentido m para k de um ramo $k-m$ é dada por:

$$\hat{I}_{mk} = (-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \quad (2.17)$$

A partir das equações gerais das correntes de ramos, pode-se determinar as equações gerais de fluxos de potência nos dois sentidos de ramos. Logo, para o esquema de correntes, tensões e fluxos de potência em um ramo genérico $k-m$ mostrado na Figura 2.8, tem-se que a equação geral do fluxo de potência \hat{S}_{km} no sentido k para m do ramo $k-m$ é determinado por:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{km} &= \hat{E}_k \hat{I}_{km}^* = \hat{E}_k \left((jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \right)^* = P_{km} + jQ_{km} \\ \hat{S}_{km} &= V_k \underline{\theta}_k \left((-jb_{km}^{sh}) V_k \underline{-\theta}_k + a_{km}^2 (g_{km} - jb_{km}) V_k \underline{-\theta}_k - a_{km} (g_{km} - jb_{km}) V_m \underline{-\theta}_m \right) \\ \hat{S}_{km} &= -jV_k^2 b_{km}^{sh} + a_{km}^2 V_k^2 (g_{km} - jb_{km}) - V_k V_m \underline{\theta}_{km} a_{km} (g_{km} - jb_{km}) \end{aligned}$$

onde θ_{km} é a chamada abertura angular do ramo $k-m$, definido pela diferença dos ângulos de tensão das barras k e m , tal que: $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$. Prosseguindo o equacionamento, tem-se que:

$$\hat{S}_{km} = -jV_k^2 b_{km}^{sh} + a_{km}^2 V_k^2 (g_{km} - jb_{km}) - a_{km} V_k V_m (\cos \theta_{km} + j \operatorname{sen} \theta_{km}) (g_{km} - jb_{km}) = P_{km} + jQ_{km}$$

Separando-se as partes real e imaginária do resultado, tem-se que as equações gerais dos fluxos de potência ativa P_{km} e reativa Q_{km} no sentido k para m são determinadas por:

$$P_{km} = a_{km}^2 V_k^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} - a_{km} V_k V_m b_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} \quad (2.18)$$

$$Q_{km} = -a_{km}^2 V_k^2 (b_{km}^{sh} + b_{km}) - a_{km} V_k V_m g_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} \quad (2.19)$$

De maneira análoga, com base nas equações gerais de correntes de ramos, tem-se que a equação geral do fluxo de potência \hat{S}_{mk} no sentido m para k do ramo k - m é determinado por:

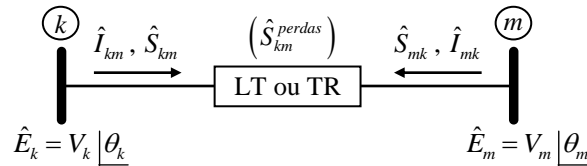
$$\hat{S}_{mk} = \hat{E}_m \hat{I}_{mk}^* = \hat{E}_m \left((-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \right)^* = P_{mk} + jQ_{mk}$$

tal que, realizando-se cálculos similares aos do fluxo \hat{S}_{km} , obtém-se que as equações gerais dos fluxos de potência ativa P_{mk} e reativa Q_{mk} no sentido m para k são determinadas por:

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - a_{km} V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (2.20)$$

$$Q_{mk} = -V_m^2 (b_{km}^{sh} + b_{km}) + a_{km} V_k V_m g_{km} \sin \theta_{km} + a_{km} V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} \quad (2.21)$$

Figura 2.8 - Esquema de ramo genérico k - m para a definição de fluxos de potência.



Fonte: o próprio autor.

Analisando o esquema da Figura 2.8 observa-se que os fluxos de potência \hat{S}_{km} e \hat{S}_{mk} tem sentidos contrários, tal que a soma destes precisa resultar nas perdas de potência no ramo. Assim, definindo-se a potência de perdas $\hat{S}_{km}^{perdas} = \hat{S}_{km} + \hat{S}_{mk} = P_{km}^{perdas} + jQ_{km}^{perdas}$, tem-se que a perda de potência ativa e a perda de potência reativa de ramos podem ser determinadas por:

$$P_{km}^{perdas} = P_{km} + P_{mk} = (a_{km}^2 V_k^2 + V_m^2) g_{km} - 2a_{km} V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} \quad (2.22)$$

$$Q_{km}^{perdas} = Q_{km} + Q_{mk} = -(a_{km}^2 V_k^2 + V_m^2) (b_{km}^{sh} + b_{km}) + 2a_{km} V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} \quad (2.23)$$

2.2.7. Equação Nodal de Rede

A Figura 2.9 mostra o esquema de uma barra k de um ramo genérico k - m , em que \hat{I}_k é a injeção líquida de corrente na barra k , \hat{I}_k^{sh} é a corrente do elemento *shunt* da barra k , definida na equação (2.5), e \hat{I}_{km} é a corrente no sentido k para m do ramo k - m , definida pela expressão geral apresentada na equação (2.16). Aplicando-se a Lei de Kirchhoff das Correntes na barra k e definindo Ω_k como o conjunto de todas as barras conectadas diretamente à barra k , exceto a própria barra k , tem-se que a equação do balanço de correntes na barra k é determinada por:

$$\hat{I}_k + \hat{I}_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} \hat{I}_{km} \Rightarrow \hat{I}_k - \hat{E}_k j b_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} \hat{I}_{km} \Rightarrow \hat{I}_k = j b_k^{sh} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \hat{I}_{km}$$

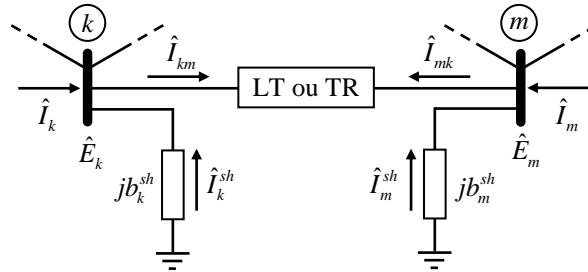
$$\hat{I}_k = j b_k^{sh} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \left((j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \right)$$

$$\hat{I}_k = \left(j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_k + \left(\sum_{m \in \Omega_k} (-a_{km} \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_m \quad (2.24)$$

Analogamente para a barra m da Figura 2.9, onde \hat{I}_{mk} é definida na equação (2.17), aplicando-se a Lei de Kirchhoff das Correntes na barra m e definindo Ω_m como o conjunto das barras ligadas à barra m , tem-se que a equação do balanço de correntes na barra m é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{I}_m + \hat{I}_m^{sh} &= \sum_{k \in \Omega_m} \hat{I}_{mk} \Rightarrow \hat{I}_m = j b_m^{sh} \hat{E}_m + \sum_{k \in \Omega_m} \left((-a_{km} \hat{y}_{km}) \hat{E}_k + (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \right) \\ \hat{I}_m &= \left(\sum_{k \in \Omega_m} (-a_{km} \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_k + \left(j b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \right) \hat{E}_m \end{aligned} \quad (2.25)$$

Figura 2.9 - Esquema para a definição do balanço de correntes de barras.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Logo, para um sistema elétrico constituído por NB barras e equacionando o balanço de correntes em todas as barras do sistema, obtém-se um conjunto de equações que relacionam as injeções líquidas de corrente e as tensões de barra do sistema. A representação do conjunto de equações na forma matricial é exemplificado abaixo, onde são mostrados apenas os elementos de matriz referentes a duas barras k e m pertencentes aos conjuntos Ω_m e Ω_k , respectivamente.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{I}_k \\ \vdots \\ \hat{I}_m \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{I}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) & \cdots & & -a_{km} \hat{y}_{km} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & -a_{km} \hat{y}_{km} & \cdots & j b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (j b_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{[\hat{Y}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{E}_k \\ \vdots \\ \hat{E}_m \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\hat{E}}$$

Definindo-se o vetor das injeções líquidas de corrente complexas de barras \hat{I} ($NB \times 1$), o vetor de tensões complexas de barra \hat{E} ($NB \times 1$) e a matriz admitância de barra $[\hat{Y}]$ ($NB \times NB$), tem-se que a relação matricial, chamada equação nodal da rede, pode se expressa por:

$$\hat{I} = [\hat{Y}] \hat{E} \quad (2.26)$$

tal que os elementos da matriz admitância de barra (diagonal e fora) são dadas pelas equações:

$$\hat{Y}_{kk} = jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) = jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 (g_{km} + jb_{km})) \quad (2.27)$$

$$\hat{Y}_{km} = -a_{km} \hat{y}_{km} = -a_{km} (g_{km} + jb_{km}) \quad (2.28)$$

$$\hat{Y}_{mk} = -a_{km} \hat{y}_{km} = -a_{km} (g_{km} + jb_{km}) \quad (2.29)$$

$$\hat{Y}_{mm} = jb_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) = jb_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (jb_{km}^{sh} + (g_{km} + jb_{km})) \quad (2.30)$$

Definindo-se a matriz admitância na forma $[\hat{Y}] = [G] + j[B]$, em que $[G]$ é a matriz condutância nodal e $[B]$ é a matriz susceptância nodal, tem-se que, separando as partes real e imaginária dos elementos da matriz admitância, pode-se determinar os elementos da diagonal e fora da diagonal das matrizes condutância e susceptância nodal, tal que:

$$G_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} a_{km}^2 g_{km} \quad (2.31)$$

$$G_{km} = -a_{km} g_{km} \quad (2.32)$$

$$G_{mk} = -a_{km} g_{km} \quad (2.33)$$

$$G_{mm} = \sum_{k \in \Omega_m} g_{km} \quad (2.34)$$

$$B_{kk} = b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (b_{km}^{sh} + a_{km}^2 b_{km}) \quad (2.35)$$

$$B_{km} = -a_{km} b_{km} \quad (2.36)$$

$$B_{mk} = -a_{km} b_{km} \quad (2.37)$$

$$B_{mm} = b_m^{sh} + \sum_{k \in \Omega_m} (b_{km}^{sh} + b_{km}) \quad (2.38)$$

2.3. Modelagem do Problema do Fluxo de Carga

A equação nodal é uma modelagem linear de sistemas elétricos e sua aplicação para a solução dessas redes é problemática, uma vez que geração e carga são geralmente mensuradas em termos de potência, tal que o emprego as injeções de corrente de barra são obtidas a partir das potências e as tensões de barra, estas normalmente incógnitas do sistema. Além disso, a equação nodal não contempla barras com tensão controlada e ainda não especifica uma barra de referência angular para o estado das tensões de barra. Assim, a formulação de sistemas elétricos precisa se basear nas potências injetadas e transmitidas no sistema (sendo por isso chamado problema do fluxo de carga ou PFC), o que resulta em uma modelagem não-linear para os sistemas elétricos, pelo fato da relação entre tensão e potência não ser linear.

2.3.1. Formulação do PFC por Balanço de Potência de Barras

Analisando a Equação (2.24), nota-se que a equação de balanço de correntes para uma barra genérica k pode ser expressa em termos do elemento principal \hat{Y}_{kk} , como também pela somatória dos elementos fora da diagonal principal \hat{Y}_{km} ($m \in \Omega_k$), de tal forma que:

$$\hat{I}_k = \underbrace{\left(j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 \hat{y}_{km}) \right)}_{\hat{Y}_{kk}} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \underbrace{(-a_{km} \hat{y}_{km})}_{\hat{Y}_{km}} \hat{E}_m \Rightarrow \hat{I}_k = \hat{Y}_{kk} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \hat{Y}_{km} \hat{E}_m$$

Considerando-se os componentes da matriz admitância nodal expressos em função das matrizes condutância e susceptância, de modo que: $\hat{Y}_{kk} = G_{kk} + j B_{kk}$ e $\hat{Y}_{km} = G_{km} + j B_{km}$, tem-se que a equação obtida acima pode agora ser reescrita da seguinte forma:

$$\hat{I}_k = (G_{kk} + j B_{kk}) \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} + j B_{km}) \hat{E}_m$$

Logo, considerando o resultado acima e a equação (2.4), tem-se que a injeção líquida de potência \hat{S}_k em uma barra genérica k pode também ser determinada por:

$$\begin{aligned} \hat{S}_k &= \hat{E}_k \hat{I}_k^* = \hat{E}_k \left((G_{kk} + j B_{kk}) \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} + j B_{km}) \hat{E}_m \right)^* \\ \hat{S}_k &= V_k^2 (G_{kk} - j B_{kk}) + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (\cos \theta_{km} + j \text{sen} \theta_{km}) (G_{km} - j B_{km}) \end{aligned}$$

Separando as partes real e imaginária do resultado e, como $\hat{S}_k = P_k + j Q_k$, tem-se que as injeções de potência ativa P_k e potência reativa Q_k numa barra genérica k são dadas por:

$$P_k = V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \text{sen} \theta_{km}) \quad (2.39)$$

$$Q_k = -V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.40)$$

As equações (2.39) e (2.40), que definem as equações básicas do PFC, expressam os balanços de potência de barras, em que as injeções líquidas de potência ativa P_k e reativa Q_k injetadas na barra k correspondem à somatória dos fluxos de potência nos ramos com a barra k como um terminal. De forma implícita, a potência *shunt* está contida em Q_k pelo termo B_{kk} .

Analisando-se as equações básicas do PFC, observa-se que a modelagem de sistemas elétricos em termos de potência apresenta forte natureza não-linear, e as variáveis de módulo e ângulo de tensões de barra estão implícitas (não podem ser isoladas das equações), tal que o cálculo destas equações requer uma solução numérica (métodos iterativos), e implementação computacional devido ao usual elevado número de barras dos sistemas elétricos.

2.3.2. Classificação de Barras e Estratégia de Solução do PFC

A análise das equações básicas do PFC mostra que o cálculo do balanço de potência para cada barra k é dependente das variáveis dos estados das tensões de barra e das injeções líquidas de potência, tal que, para cada barra k , estarão a ela associadas as seguintes variáveis de naturezas diferentes: V_k e θ_k : módulo ou magnitude e ângulo de fase da tensão complexa da barra k , e P_k e Q_k : injeções líquidas de potências ativa e reativa na barra k .

A formulação do PFC de sistemas elétricos precisa de referências de tensão e ângulo para sua solução. Neste sentido, a referência de tensão do sistema provém do nó terra, quando há elementos *shunts* na rede, ou ao menos por uma barra com tensão V_k conhecida, e a referência angular deve prover da tensão de alguma barra com o ângulo de fase θ_k conhecido.

Além disso, é necessário uma barra com injeções líquidas de potência desconhecidas para fechamento do balanço de potência, pois é necessário antes calcular as perdas nos ramos, e estas dependem dos fluxos de potência que são dependentes do estado das tensões de barra.

Assim, tem-se que cada barra k de um sistema tem a ela associada 2 equações básicas (equações (2.39) e (2.40)), com 4 variáveis (P_k , Q_k , V_k e θ_k). Contudo, para tornar o modelo matemático do PFC compatível para a solução (número de equações igual ao de incógnitas), 2 variáveis devem ser conhecidas (entram como dados no cálculo do PFC) e 2 variáveis devem ser calculadas (entram como incógnitas), tal que cada barra k do sistema pode ser classificada em 3 tipos segundo suas variáveis conhecidas e indeterminadas (resumo na Tabela 1):

- Barra PQ: barra onde as injeções líquidas de potência ativa P_k e reativa Q_k são conhecidas (dados do problema), e a magnitude de tensão V_k e ângulo de fase θ_k são incógnitas. São comumente barras de carga ou com gerador sem capacidade de regulação de tensão.
- Barra PV: barra onde a injeção líquida de potência ativa P_k e módulo da tensão V_k são conhecidas e a injeção líquida de potência reativa Q_k e o ângulo de fase θ_k são incógnitas. São comumente barras de geração com capacidade suficiente para o controle da tensão.
- Barra V θ : barra única onde V_k e θ_k são conhecidas e P_k e Q_k precisam ser calculadas. É denominada também como barra de referência ou “slack” e cuja contribuição se resume em fornecer referência angular para o sistema e realizar o fechamento do balanço de potência.

Logo, para um sistema elétrico em análise com NB barras, a cada barra está associada 4 variáveis, onde 2 são conhecidas e 2 são incógnitas. Portanto, há um total de $2NB$ equações, com $4NB$ variáveis, onde $2NB$ entram como dados e $2NB$ são incógnitas passível de solução.

Tabela 1- Tipos de barras e incógnitas associadas

Tipo de barra	Notação	Dados	Incógnitas
Barra de carga	PQ ou 0	P_k e Q_k	V_k e θ_k
Barra de tensão controlada	PV ou 1	P_k e V_k	Q_k e θ_k
Barra de referência angular	V θ ou 2	V_k e θ_k	P_k e Q_k

Fonte: o próprio autor.

Seja então um sistema com NB barras, composta por NPQ barras PQ, NPV barras PV e 1 barra V θ , tal que: $NB = NPQ + NPV + 1$, tem-se então $2NB = 2NPQ + 2NPV + 2$ equações básicas e $4NB = 4NPQ + 4NPV + 4$ variáveis, sendo $2NB = 2NPQ + 2NPV + 2$ variáveis conhecidas (dados) e $2NB = 2NPQ + 2NPV + 2$ incógnitas a serem resolvidas. Porém, como P_k e Q_k dependem do estado da rede, então V_k e θ_k podem ser obtidas primeiramente, com P_k e Q_k desconhecidas obtidas posteriormente. Com base nesse fato, pode-se decompor o Problema do Fluxo de carga em dois subproblemas de equações e incógnitas com procedimentos de solução distintos, nomeados subsistemas e descrito a seguir:

- **Subsistema 1:** nesta etapa calcula-se o estado de tensão de cada barra k em que V_k e θ_k são desconhecidas, ou seja, obtém-se V_k para NPQ barras e θ_k para $NPV + NPQ$ barras, com um total de $2NPQ + NPV$ incógnitas. Para este procedimento, é necessário conhecer P_k de $NPQ + NPV$ barras e Q_k de NPQ barras, totalizando $2NPQ + NPV$ equações com número igual de incógnitas do problema. Como as equações básicas são não lineares, deve-se fazer uso de um algoritmo de solução iterativo (solução numérica), adotar uma tolerância ao erro como critério de parada e implementação computacional do algoritmo de solução devido ao usual elevado número de barras de sistemas elétricos. No caso de redes de distribuição, para o cálculo do subsistema 1 são normalmente empregados métodos mais adequados às características destas redes, envolvendo processos de varredura ou formulação matricial.
- **Subsistema 2:** consiste na determinação das demais incógnitas do PFC, ou seja, P_k e Q_k para a barra do tipo V θ e Q_k para as barras do tipo PV, totalizando as $NPV + 2$ incógnitas restantes do PFC. Além disso, tendo já determinado V_k e θ_k para todas as barras com o cálculo do subsistema 1, pode-se determinar outras incógnitas de interesse do sistema, tal como as potências *shunt* de barra e os fluxos de potência e perdas de ramos. Neste caso, os cálculos se dão de forma trivial através de solução algébrica direta (solução analítica), com o emprego de equações até aqui formuladas, conforme resumo apresentado na Tabela 2.

Tabela 2- Equações para solução do Subsistema 2 do PFC.

Incógnita a ser calculada	Equação
Injeção líquida de potência ativa P_k	(2.39)
Injeção líquida de potência reativa Q_k	(2.40)
Fluxo de potência ativa P_{km}	(2.18)
Fluxo de potência reativa Q_{km}	(2.19)
Fluxo de potência ativa P_{mk}	(2.20)
Fluxo de potência reativa Q_{mk}	(2.21)
Perdas de potência ativa P_{km}^{perdas}	(2.22)
Perdas de potência reativa Q_{km}^{perdas}	(2.23)
Potência reativa <i>shunt</i> Q_k^{sh}	(2.7)

Fonte: o próprio autor.

2.3.3. Solução do Subsistema 1 por Balanço de Potência

Analisando as equações básicas (2.39) e (2.40), observa-se que o lado esquerdo destas equações são dados do subsistema 1 (P_k para barras PQ e PV, e Q_k para barras PQ), e o lado esquerdo são incógnitas do subsistema 1 (dependem de V_k , θ_k , V_m e θ_m não conhecidas). Para diferenciar dados e as incógnitas, a literatura nomeia os lados esquerdo e direito das equações com as denominações ‘especificado’ (dados) e ‘calculado’ (incógnitas), e define que:

$$\text{barras PQ e PV} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{P_k}_{\text{especificado}} = V_k^2 G_{kk} + V_k \underbrace{\sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \text{sen} \theta_{km})}_{\text{calculado}} \Rightarrow P_k^{esp} = P_k^{calc} \end{array} \right.$$

$$\text{barras PQ} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{Q_k}_{\text{especificado}} = -V_k^2 B_{kk} + V_k \underbrace{\sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})}_{\text{calculado}} \Rightarrow Q_k^{esp} = Q_k^{calc} \end{array} \right.$$

em que as potências ativas e reativas especificadas P_k^{esp} e Q_k^{esp} são então definidas por:

$$P_k^{calc} = V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \text{sen} \theta_{km}) \quad (2.41)$$

$$Q_k^{calc} = -V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.42)$$

O estabelecimento das igualdades $P_k^{esp} = P_k^{calc}$ e $Q_k^{esp} = Q_k^{calc}$ permite definir funções de resíduos ou *mismatches* de potência ativa ΔP_k e reativa ΔQ_k , determinadas então por:

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k^{calc} = P_k^{esp} - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \text{sen} \theta_{km}) = 0 \quad (2.43)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k^{calc} = Q_k^{esp} + V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{sen} \theta_{km} - B_{km} \text{cos} \theta_{km}) = 0 \quad (2.44)$$

tal que as raízes destas equações correspondem às $2NPQ + NPV$ incógnitas do subsistema 1.

Definindo então os vetores de potências especificadas \underline{P}^{esp} e \underline{Q}^{esp} e calculadas \underline{P}^{calc} e \underline{Q}^{calc} , obtém-se um conjunto de vetores de resíduos $\Delta \underline{P}$ e $\Delta \underline{Q}$ como as equações matriciais básicas do PFC a serem resolvidas nos cálculos do subsistema 1, determinados por:

$$\text{Para } NPQ + NPV \text{ barras: } \Delta \underline{P} = \underline{P}^{esp} - \underline{P}^{calc} = \underline{0} \quad (2.45)$$

$$\text{Para } NPQ \text{ barras: } \Delta \underline{Q} = \underline{Q}^{esp} - \underline{Q}^{calc} = \underline{0} \quad (2.46)$$

Para a determinação das raízes do conjunto de equações (2.45) e (2.46), é necessário a implementação de um método iterativo, onde o próprio valor dos resíduos é interpretado como um erro e pode ser utilizado como critério de parada do processo numérico de solução.

O método de Newton-Raphson, representado pela equação matricial recursiva descrita de forma compacta a seguir, é um algoritmo iterativo apropriado para o cálculo de raízes de um conjunto formado por n equações não lineares com n variáveis com um erro aceitável:

$$\underline{x}^{(i+1)} = \underline{x}^{(i)} - [J(\underline{x}^{(i)})]^{-1} \underline{f}(\underline{x}^{(i)}) \quad (2.47)$$

onde $\underline{f}(\underline{x})$ é o vetor de n equações dependentes do vetor \underline{x} de n variáveis relacionadas pela matriz jacobiana $[J]$ de derivadas parciais de 1ª ordem com base no vetor de equações.

Definindo-se os vetores de variáveis $\underline{\theta}$ e \underline{V} e de equações $\Delta \underline{P}$ e $\Delta \underline{Q}$, tem-se que os vetores de variáveis \underline{x} e funções $\underline{f}(\underline{x})$ do método de Newton-Raphson são definidos por:

$$\underline{x} = \left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \underline{\theta} \\ \underline{V} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} NPQ + NPV \\ NPQ \end{array} \right\} ; \quad \underline{f}(\underline{x}) = \left[\begin{array}{c} \Delta \underline{P} \\ \Delta \underline{Q} \end{array} \right] = \left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \underline{P}^{esp} - \underline{P}^{calc} \\ \underline{Q}^{esp} - \underline{Q}^{calc} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} NPQ + NPV \\ NPQ \end{array} \right\}$$

Os vetores de variáveis $\underline{\theta}$ e \underline{V} são geralmente inicializado com o *flat-start*: $\underline{V} = \underline{1} \text{ pu}$ e $\underline{\theta} = \underline{0} \text{ rad}$, por este proporcionar uma inicialização adequada às incógnitas processo de cálculo do subsistema 1, pois seus valores iniciais já se encontram ao menos próximos da solução.

Com as definições e dimensões dos vetores de funções $\underline{f}(\underline{x})$ e de variáveis \underline{x} , tem-se que as submatrizes da jacobiana apresentam as dimensões e elementos mostrados a seguir:

$$[J] = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \Delta \underline{P}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \Delta \underline{P}}{\partial \underline{V}} \\ \frac{\partial \Delta \underline{Q}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \Delta \underline{Q}}{\partial \underline{V}} \end{array} \right]}_{\substack{NPQ + NPV \\ NPQ}} \Rightarrow [J] = - \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \underline{P}^{calc}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{P}^{calc}}{\partial \underline{V}} \\ \frac{\partial \underline{Q}^{calc}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{Q}^{calc}}{\partial \underline{V}} \end{array} \right]$$

uma vez que os vetores de potências \underline{P}^{esp} e \underline{Q}^{esp} são constantes, tal que tem derivadas nulas.

Como finalidade didática, a literatura técnica da teoria do fluxo de carga denomina as submatrizes da jacobiana como submatrizes $[H]$, $[N]$, $[M]$ e $[L]$, descritas como a seguir:

$$[H] = \frac{\partial \underline{P}^{calc}}{\partial \underline{\theta}} ; [N] = \frac{\partial \underline{P}^{calc}}{\partial \underline{V}} ; [M] = \frac{\partial \underline{Q}^{calc}}{\partial \underline{\theta}} ; [L] = \frac{\partial \underline{Q}^{calc}}{\partial \underline{V}} \Rightarrow [J] = - \left[\begin{array}{c|c} [H] & [N] \\ \hline [M] & [L] \end{array} \right]$$

Assim, com base na equação matricial (2.47), tem-se que, para a iteração i e com base no vetor de estado das tensões de barra atual obtido na iteração anterior, a equação geral do método de Newton-Raphson é descrita pela equação matricial recursiva definida por:

$$\underline{x}^{(i+1)} = \underline{x}^{(i)} - [J(\underline{x}^{(i)})]^{-1} \underline{f}(\underline{x}^{(i)}) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \underline{\theta}^{(i+1)} \\ \underline{V}^{(i+1)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{\theta}^{(i)} \\ \underline{V}^{(i)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} [H^{(i)}] & [N^{(i)}] \\ \hline [M^{(i)}] & [L^{(i)}] \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \underline{\Delta P}^{(i)} \\ \underline{\Delta Q}^{(i)} \end{array} \right] \quad (2.48)$$

Considerando que o cálculo das equações (2.41) e (2.42) para uma barra m de um ramo $k-m$ reside em simplesmente permutar os índices k e m nestas equações, tem-se que os componentes da diagonal e fora da diagonal principal das submatrizes da matriz jacobiana são a seguir definidos, onde é apresentado também as equações mais simples e econômicas para o cálculo dos componentes das submatrizes que apresentam índices iguais (H_{kk} , N_{kk} , M_{kk} e L_{kk}), decorrente do fato dos valores de P_k^{calc} e Q_k^{calc} no algoritmo de solução por Newton-Raphson serem obtidos em um passo antes do passo com os cálculo dos elementos da matriz jacobiana.

$$H_{kk} = \frac{\partial P_k^{calc}}{\partial \theta_k} = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (B_{km} \cos \theta_{km} - G_{km} \sin \theta_{km}) = -Q_k^{calc} - V_k^2 B_{kk} \quad (2.49)$$

$$H_{km} = \frac{\partial P_k^{calc}}{\partial \theta_m} = V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.50)$$

$$N_{kk} = \frac{\partial P_k^{calc}}{\partial V_k} = 2V_k G_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) = \frac{1}{V_k} (P_k^{calc} + V_k^2 G_{kk}) \quad (2.51)$$

$$N_{km} = \frac{\partial P_k^{calc}}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (2.52)$$

$$M_{kk} = \frac{\partial Q_k^{calc}}{\partial \theta_k} = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) = P_k^{calc} - V_k^2 G_{kk} \quad (2.53)$$

$$M_{km} = \frac{\partial Q_k^{calc}}{\partial \theta_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (2.54)$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k^{calc}}{\partial V_k} = -2V_k B_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.55)$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k^{calc}}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) = \frac{1}{V_k} (Q_k^{calc} - V_k^2 B_{kk}) \quad (2.56)$$

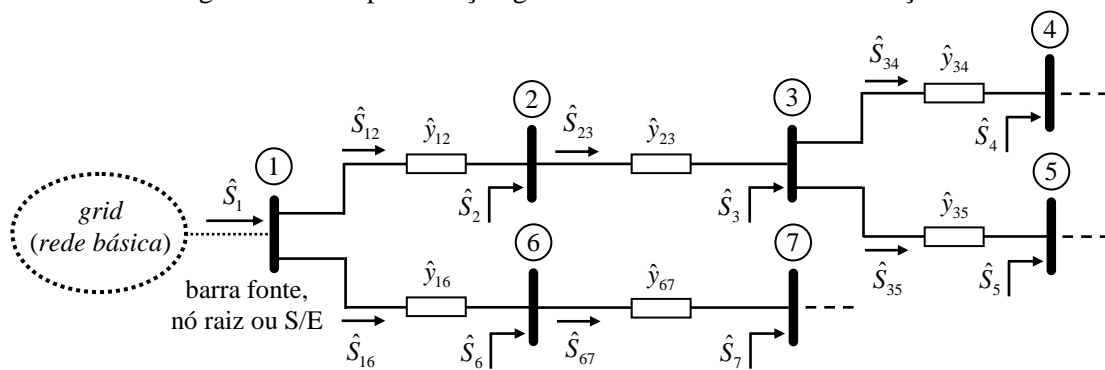
2.4. Problema do Fluxo de Carga para redes de distribuição

Redes de distribuição constituem na etapa final da cadeia de fornecimento de energia elétrica, responsáveis por transportar a eletricidade da subestação até os consumidores finais.

Estes sistemas caracterizam-se pela disposição tipicamente radial dos alimentadores e são formados basicamente por uma subestação (denominada barra fonte, nó raiz ou S/E) como ponto de recebimento de potência da rede básica (*grid*) a montante e classificada como tipo V θ , e barras de atendimento de carga (consumidores) a jusante, classificadas como tipo PQ.

A topologia de redes de distribuição normalmente se resume a elementos série (\hat{y}_{km}) de ramos, tal como exemplificado no esquema unifilar mostrado na Figura 2.10, pelo fato da modelagem básica destas redes desconsiderar a presença de *shunts* de barra ($b_k^{sh} = 0$) e de ramos ($b_{km}^{sh} = 0$), bem como a presença de transformadores reguladores de tensão ($a_{km} = 1$).

Figura 2.10 - Representação genérica de uma rede de distribuição.



Fonte: BRIGATTO (2025).

No cálculo do subsistema 1 de redes de distribuição são normalmente utilizados outros métodos adaptados às características destas redes, tais como os algoritmos fundamentados em um processo de varredura direta e inversa dos ramos da rede, chamados Método da Soma das Correntes e Métodos da Soma das Potências, bem como um algoritmo fundamentado em uma formulação matricial de desenvolvimento recente denominado método *direct load flow*.

Além disso, na eventualidade de se modelar efeitos capacitivos nos alimentadores ou o emprego de bancos de capacitores e reatores nas barras, ou ainda presença de transformadores reguladores na rede de distribuição em estudo, pode-se adaptar estes métodos para considerar a presença de *shunts* de barra ($b_k^{sh} \neq 0$) e de ramos ($b_{km}^{sh} \neq 0$) na rede, bem como a presença de transformadores em fase e seus efeito *shunts* ($a_{km} \neq 1$). A seguir são descritos resumidamente a formulação dos métodos mencionados acima, em suas versões com e sem *shunts* de rede.

2.4.1. Método da Soma das Correntes

O Método da Soma das Correntes (MSI), proposto em SHIRMOHAMMADI (1988), é um algoritmo iterativo de solução do PFC de redes radiais, fundamentado em formulações de correntes e tensões no domínio complexo. O MSI baseia-se em dois processos de varredura de barras e de ramos da rede elétrica em estudo, vistos nos itens a seguir, que são iterativamente repetidos até o critério de parada adotado ser atingido, quando a solução é por fim encontrada:

1) Varredura Inversa:

A etapa da varredura inversa do MSI reside em um processo acumulativo de correntes complexas de barras, exceto o nó fonte, obtidas com base no último estado de tensões de barra calculado na iteração anterior, partindo das barras terminais e em direção à barra fonte.

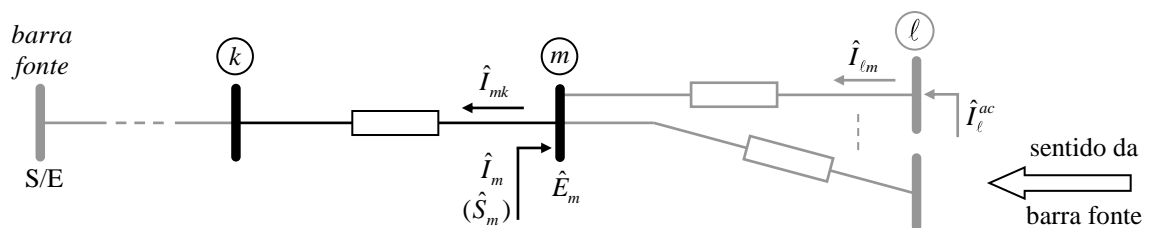
Como exemplificação, seja o ramo k - m de uma rede visto na Figura 2.11, onde a barra m situa-se mais distante da barra fonte do que a barra k . Partindo-se dos nós terminais e em direção à barra fonte, define-se o acúmulo de correntes na barra m como a soma de todas as correntes incidentes na barra m , com exceção da corrente no sentido m para k do ramo k - m . Definindo-se Φ_m como o conjunto das barras dos ramos imediatamente a jusante da barra m e baseado na Figura 2.11, tem-se que a corrente \hat{I}_m^{ac} acumulada na barra m corresponde à soma da injeção líquida de corrente \hat{I}_m na barra m com a soma das correntes $\hat{I}_{\ell m}$, $\ell \in \Phi_m$, tal que:

$$\hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{I}_{\ell m} \Rightarrow \hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{I}_{\ell}^{ac} \quad (2.57)$$

onde a corrente $\hat{I}_{\ell m}$ no sentido ℓ para m corresponde à corrente \hat{I}_{ℓ}^{ac} acumulada na barra ℓ , tal que: $\hat{I}_{\ell m} = \hat{I}_{\ell}^{ac}$, e a injeção líquida de corrente \hat{I}_m é obtida com base na equação (2.4) e nos dados de injeção líquida de potência $\hat{S}_m = P_m + jQ_m$ e tensão $\hat{E}_m = V_m \angle \theta_m$ da barra m , tal que:

$$\hat{I}_m = \frac{\hat{S}_m^*}{\hat{E}_m^*} = \frac{(P_m + jQ_m)^*}{(V_m \angle \theta_m)^*} = \frac{P_m - jQ_m}{V_m \angle -\theta_m} \quad (2.58)$$

Figura 2.11 - Ramo genérico k - m de exemplificação da varredura inversa do MSI.



Fonte: BRIGATTO (2025).

Em OLIVEIRA, ROCHA JR (2025) é apresentado o desenvolvimento do Método da Soma das Correntes considerando elementos *shunts* de barras e de ramos presentes na rede em estudo, em que a corrente \hat{I}_m^{ac} acumulada na barra m é neste caso determinada por:

$$\hat{I}_m^{ac} = \hat{I}_m + \hat{I}_m^{sh} + \sum_{\ell \in \Phi_m} \left(\hat{I}_\ell^{ac} - (jb_{m\ell}^{sh} + (a_{m\ell}^2 - a_{m\ell}) \hat{y}_{m\ell}) \hat{E}_m - (jb_{m\ell}^{sh} + (1 - a_{m\ell}) \hat{y}_{m\ell}) \hat{E}_\ell \right) \quad (2.59)$$

tal que a injeção de corrente *shunt* \hat{I}_m^{sh} na barra m é calculada com base na equação (2.5) por:

$$\hat{I}_m^{sh} = -\hat{E}_m b_m^{sh} \quad (2.60)$$

2) Varredura Direta:

A varredura direta do MSI reside em um processo corretivo das tensões complexas de barra, partindo da tensão da barra fonte (dado) e em direção às barras terminais da rede.

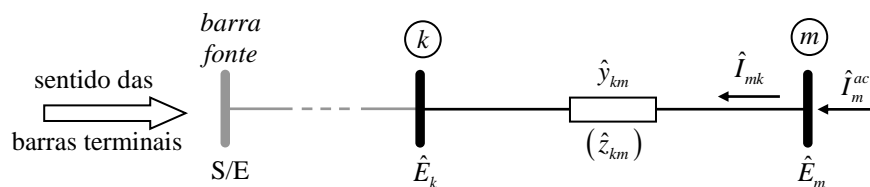
Para exemplificar o processo corretivo da varredura direta do MSI, seja o ramo k - m de uma rede de distribuição mostrado na Figura 2.12, tal que a barra m situa-se mais distante da barra fonte do que a barra k e o restante da rede a jusante da barra m está equivalenciada pela corrente \hat{I}_m^{ac} acumulada na barra m obtida com o processo de varredura inversa. Partindo-se da tensão conhecida do nó fonte e em direção aos nós terminais, tem-se com base na Figura 2.12 que a tensão complexa \hat{E}_m da barra m pode ser corrigida supondo que a tensão complexa \hat{E}_k na barra k tenha sido previamente recalculada, ou conhecida no caso da barra fonte. Logo, considerando-se $b_{km}^{sh} = 0$ e $a_{km} = 1$ para redes de distribuição, tem-se que a corrente de ramo \hat{I}_{mk} no sentido m para k da Figura 2.12, definida pela equação geral (2.15), é agora dada por:

$$\hat{I}_{mk} = -\hat{y}_{km} \hat{E}_k + (jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km}) \hat{E}_m \Rightarrow \hat{I}_{mk} = (\hat{E}_m - \hat{E}_k) \hat{y}_{km}$$

tal que, considerando $\hat{z}_{km} = \hat{y}_{km}^{-1}$, tem-se que a tensão \hat{E}_m da barra m pode ser corrigida por:

$$\hat{E}_m = \hat{E}_k + \hat{z}_{km} \hat{I}_m^{ac} \quad (2.61)$$

Figura 2.12 - Ramo genérico k - m de exemplificação da varredura direta do MSI.



Novamente, em OLIVEIRA, ROCHA JR (2025) é apresentado o desenvolvimento do MSI considerando *shunts*, tal que a tensão da barra m é neste caso corrigida por:

$$\hat{E}_m = \frac{\hat{I}_m^{ac} + a_{km} \hat{y}_{km} \hat{E}_k}{(jb_{km}^{sh} + \hat{y}_{km})} \quad (2.62)$$

A ausência de funções de resíduo no MSI implica na necessidade de se adotar um critério de parada distinto do algoritmo de Newton-Raphson. Para o MSI e demais métodos de solução do subsistema 1 de redes de distribuição vistos a seguir, normalmente adota-se um critério baseado no módulo do maior erro de magnitudes de tensões de barra entre 2 iterações sucessivas i e $i + 1$ do processo de solução, descrito matematicamente pela expressão:

$$\max_{k \in \Omega_{NB-1}} |\Delta V_k| \leq \varepsilon, \text{ onde: } \Delta V_k = V_k^{(i+1)} - V_k^{(i)} \quad (2.63)$$

onde Ω_{NB-1} é o conjunto de todas as barras da rede, com exceção da barra fonte

2.4.2. Método da Soma das Potências

O Método da Soma das Potências (MSP), proposto em BROADWATER (1988), é um algoritmo iterativo de solução do PFC de redes radiais fundamentado em um equacionamento em termos de potência e, similar ao MSI, é baseado em dois processos de varredura de ramos e barras da rede de distribuição em estudo, descritos a seguir, que são iterativamente repetidos até que o critério de parada adotado seja atingido, quando a solução é por fim encontrada:

1) Varredura Inversa:

A etapa da varredura inversa do MSP reside em um processo acumulativo de potências ativas e reativas nas barras, exceto o nó fonte, obtidas com base no último estado das tensões de barra calculado na iteração anterior, partindo das barras terminais e em direção ao nó fonte.

Como exemplificação do processo acumulativo da varredura inversa do MSP, seja o ramo $k-m$ de uma rede de distribuição mostrado na Figura 2.13, onde a barra m situa-se mais distante da barra fonte do que a barra k . Partindo-se dos nós terminais e em direção à barra fonte, define-se o acúmulo de potências na barra m como a soma de todas as potências incidentes na barra m , com exceção do fluxo no sentido m para k . Baseado na Figura 2.13, tem-se que a potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m corresponde à injeção líquida de potência \hat{S}_m na barra m , subtraída do somatório dos fluxos de potência $\hat{S}_{m\ell}$, $\ell \in \Phi_m$, uma vez que o sentido de $\hat{S}_{m\ell}$ é adotado saindo da barra m , segundo a convenção vista no item 2.2.2, tal que:

$$\hat{S}_m^{ac} = \hat{S}_m - \sum_{\ell \in \Phi_m} \hat{S}_{m\ell} \quad (1)$$

onde a injeção líquida de potência \hat{S}_m da barra m é obtida com base na equação (2.1) e o fluxo de potência $\hat{S}_{m\ell}$ no sentido m para ℓ do ramo $m-\ell$, $\ell \in \Phi_m$, pode ser determinado por:

$$\hat{S}_{m\ell}^{perdas} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_{\ell m} = \hat{S}_{m\ell} + \hat{S}_{\ell}^{ac} \Rightarrow \hat{S}_{m\ell} = \hat{S}_{m\ell}^{perdas} - \hat{S}_{\ell}^{ac} \quad (2)$$

e, com base nas equações de perdas ativa (equação (2.22)) e reativa (equação (2.23)) vistas anteriormente, tem-se que as perdas $P_{m\ell}^{perdas}$ e $Q_{m\ell}^{perdas}$ no ramo $m-\ell$, $\ell \in \Phi_m$, são obtidas por:

$$P_{m\ell}^{perdas} = (a_{m\ell}^2 V_m^2 + V_\ell^2) g_{m\ell} - 2 a_{m\ell} V_m V_\ell g_{m\ell} \cos \theta_{m\ell} \quad (2.69)$$

$$Q_{m\ell}^{perdas} = - (a_{m\ell}^2 V_m^2 + V_\ell^2) (b_{m\ell} + b_{m\ell}^{sh}) + 2 a_{m\ell} V_m V_\ell b_{m\ell} \cos \theta_{m\ell} \quad (2.70)$$

2) Varredura Direta:

Para exemplificação do processo corretivo da varredura direta do MSP, seja o ramo $k-m$ de uma rede dado na Figura 2.14, tal que a barra m situa-se mais distante da barra fonte do que a barra k e o restante da rede a jusante da barra m está equivalenciada pela potência \hat{S}_m^{ac} acumulada na barra m obtida previamente com o processo de varredura inversa. Partindo-se da tensão conhecida da barra fonte e em direção aos nós terminais, com base na Figura 2.14 tem-se que a tensão \hat{E}_m da barra m pode ser corrigida supondo-se que a tensão complexa \hat{E}_k na barra k tenha sido previamente recalculada, ou conhecida no caso da barra fonte. Neste caso, a formulação do MSP resulta em um polinômio de 4º grau biquadrático, definido por:

$$V_m^4 + A_m V_m^2 + B_m = 0$$

cuja raiz corresponde à correção do módulo da tensão V_m na barra m , um vez que o polinômio é dependente apenas de V_m , pois os termos A_m e B_m da equação acima, definidos a seguir, são conhecidos no momento do cálculo do polinômio, pois seus componentes são elementos da rede elétrica (y_{km} , g_{km} e b_{km}), ou foram previamente corrigidos (V_k) ou calculados (P_m^{ac} e Q_m^{ac}):

$$A_m = \frac{2(Q_m^{ac} b_{km} - P_m^{ac} g_{km})}{y_{km}^2} - V_k^2 \quad (2.71)$$

$$B_m = \frac{(P_m^{ac})^2 + (Q_m^{ac})^2}{y_{km}^2} \quad (2.72)$$

onde a admitância série $\hat{y}_{km} = g_{km} + j b_{km}$ é expressa em coordenadas polares por seu módulo y_{km} e ângulo ϕ_{km} , tal que $\hat{y}_{km} = y_{km} \angle \phi_{km}$, onde: $y_{km}^2 = g_{km}^2 + b_{km}^2$ e $\phi_{km} = \arctg(b_{km}/g_{km})$.

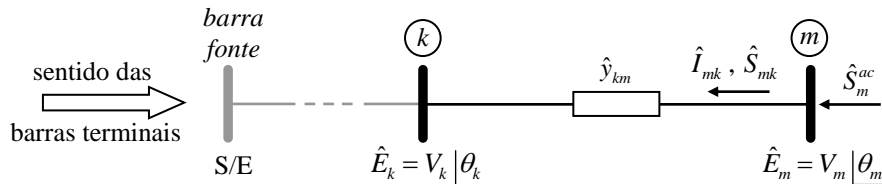
Um polinômio de 4º grau possui 4 raízes, mas apenas a raiz real positiva e próxima do valor nominal em pu ($\approx 1 pu$) tem sentido físico, tal que V_m pode ser obtida pela identidade:

$$V_m = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{A_m^2 - 4 B_m} - A_m \right)} \quad (2.73)$$

Com o módulo de tensão V_m obtido com a equação (7.12) e o ângulo de tensão θ_k na barra k corrigido previamente, tem-se o ângulo de tensão θ_m na barra m é determinado por:

$$\theta_m = \theta_k + \phi_{km} + \arctg\left(\frac{-V_m^2 b_{km} - Q_m^{ac}}{V_m^2 g_{km} - P_m^{ac}}\right) \quad (2.74)$$

Figura 2.14 - Ramo genérico $k-m$ de exemplificação da varredura direta do MSP.



Fonte: BRIGATTO (2025)

Novamente, em BRIGATTO (2025) é apresentada formulação do MSP considerando *shunts*, tal que os termos A_m e B_m do polinômio de 4º grau são agora definidos como a seguir:

$$A_m = \frac{2\left(Q_m^{ac}(b_{km} + b_{km}^{sh}) - P_m^{ac} g_{km}\right) - a_{km}^2 V_k^2 y_{km}^2}{g_{km}^2 + (b_{km} + b_{km}^{sh})^2} \quad (2.75)$$

$$B_m = \frac{(P_m^{ac})^2 + (Q_m^{ac})^2}{g_{km}^2 + (b_{km} + b_{km}^{sh})^2} \quad (2.76)$$

e o ângulo de tensão θ_m na barra m é agora determinado pela seguinte equação:

$$\theta_m = \theta_k + \phi_{km} + \arctg\left(\frac{-V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - Q_m^{ac}}{V_m^2 g_{km} - P_m^{ac}}\right) \quad (2.77)$$

2.4.3. Método Direct Load Flow

O método *Direct Load Flow* (DLF), proposto em TENG (2003), baseia-se em uma formulação matricial de tensões e correntes complexas da rede elétrica em estudo, construída com base na topologia da rede em estudo para relacionar as injeções de corrente de barras com as tensões nodais, por meio de uma matriz $[DLF]$ obtida a partir do produto entre duas matrizes básicas calculadas separadamente: $[BIBC]$ (*Bus Injection to Branch Current*), que relaciona as correntes líquidas injetadas nas barras com as correntes nos ramos, e $[BCBV]$ (*Branch Current to Bus Voltage*), que vincula as tensões nas barras às correntes nos ramos.

Em termos gerais, o método *Direct Load Flow* reside um processo iterativo em que o estado das tensões de barra (incógnitas do subsistema 1) é corrigido a cada iteração i com base nas injeções líquidas de corrente nas barras calculadas com o estado das tensões de barra atual obtido na iteração anterior, através da simples equação recursiva determinada por:

$$\underline{\hat{E}}_{barra-v\theta}^{(i+1)} = \underline{\hat{E}}_{v\theta} + [DLF] \underline{\hat{I}}_{barra-v\theta}^{(i)} \quad (2.78)$$

onde a matriz $[DLF]$ é constante em todo o processo iterativo, $\hat{\underline{E}}_{barra-v\theta}$ é o vetor das tensões complexas de barra da rede elétrica, exceto da barra fonte (tipo $V\theta$), $\hat{\underline{E}}_{v\theta}$ é o vetor formado apenas pela tensão complexa conhecida da barra fonte (dado) e $\hat{\underline{I}}_{barra-v\theta}$ reside no vetor das injeções líquidas de correntes complexas nas barras da rede, exceto da barra fonte, obtido com base na aplicação da equação (2.4) em todas as barras da rede, com exceção da barra fonte.

A formulação original do método DLF constante em TENG (2003) não considera a presença de elementos *shunts* na rede de distribuição em estudo. Porém, como um dos casos a ser abordado na análise e comparação de resultado da metodologia proposta envolve também redes com *shunts*, optou neste trabalho em empregar a formulação apresentada em SILVA e BRIGATTO (2023), na qual a equação (2.78) é construída diretamente a partir da equação nodal da rede e estudo, devido ao fato da equação nodal já expressar a relação entre o vetor de tensões complexas de barra e o vetor de injeções líquidas de corrente, e a matriz $[DLF]$ é calculado simplesmente com a inversa da matriz admitância nodal desconsiderando a linha e a coluna referentes à barra fonte, tal que não é necessário a montagem das matrizes $[BIBC]$ e $[BCBV]$ do método original, o que reduz a complexidade do algoritmo de solução.

Logo, com a matriz $[DLF]$ obtida diretamente da matriz admitância nodal, tem-se que a consideração ou não de elementos *shunts* na rede é determinada simplesmente na montagem da matriz admitância. Assim, caso seja considerado a presença de elementos *shunts* na rede de distribuição em estudo, os elementos da matriz admitância são calculados com as equações (2.27) a (2.30), e caso não sejam considerados, empregam-se as equações descritas a seguir:

$$\hat{Y}_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} (g_{km} + j b_{km}) \quad (2.79)$$

$$\hat{Y}_{km} = -(g_{km} + j b_{km}) \quad (2.80)$$

$$\hat{Y}_{mk} = -(g_{km} + j b_{km}) \quad (2.81)$$

$$\hat{Y}_{mm} = \sum_{k \in \Omega_m} (g_{km} + j b_{km}) \quad (2.82)$$

3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Em prosseguimento à apresentação dos conceitos básicos sobre a teoria do fluxo de carga e os métodos de solução do subsistema 1 do PFC abordados no Capítulo 2, este capítulo tem como objetivo apresentar o desenvolvimento da formulação por balanço de correntes de barras para a solução do subsistema 1 de redes de distribuição, que se constitui no objeto de estudo e contribuição deste trabalho, bem como o algoritmo de solução para a implementação computacional da formulação. Estes tópicos são apresentados nos itens vistos a seguir.

3.1. Formulação do PFC por Balanço de Correntes de Barras

Para início do desenvolvimento, seja a equação do balanço de correntes de barras em função dos elementos da matriz admitância apresentada anteriormente e reescrita a seguir:

$$\hat{I}_k = \hat{Y}_{kk} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \hat{Y}_{km} \hat{E}_m \quad (3.1)$$

Analisando a equação do balanço de correntes de barras, observa-se que a componente à esquerda da equação (3.1) é referente à injeção líquida de corrente \hat{I}_k em uma barra k , e a componente à direita da equação (3.1), aqui neste trabalho nomeada como \hat{I}_k^S e definida por:

$$\hat{I}_k^S = \hat{Y}_{kk} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \hat{Y}_{km} \hat{E}_m \quad (3.2)$$

pode ser interpretada como a soma da corrente nos elementos *shunts* da barra k (devido a \hat{Y}_{kk}) com o somatório das correntes nos ramos que tem a barra k como um de seus terminais.

Logo, a equação (3.1) do balanço de correntes pode ser redefinida pela igualdade:

$$\hat{I}_k = \hat{I}_k^S \quad (3.3)$$

Definindo-se as partes real $I_k^{(re)}$ e imaginária $I_k^{(im)}$ da componente \hat{I}_k , tal que tem-se: $\hat{I}_k = I_k^{(re)} + j I_k^{(im)}$, bem como as partes real $I_k^{S(re)}$ e imaginária $I_k^{S(im)}$ da componente \hat{I}_k^S , tal que: $\hat{I}_k^S = I_k^{S(re)} + j I_k^{S(im)}$, tem-se que a equação (3.3) pode agora ser redefinida como:

$$I_k^{(re)} + j I_k^{(im)} = I_k^{S(re)} + j I_k^{S(im)} \quad (3.4)$$

Determinando-se a igualdade das partes reais em ambos os lados da equação (3.4), tal que: $I_k^{(re)} = I_k^{S(re)}$, observa-se que a diferença entre as componentes $I_k^{(re)}$ e $I_k^{S(re)}$ resulta em valor nulo, o que permite determinar uma função de resíduo de corrente $\Delta I_k^{(re)}$ definida por:

$$\Delta I_k^{(re)} = I_k^{(re)} - I_k^{S(re)} = 0 \quad (3.5)$$

Analogamente, determinando a igualdade das partes imaginárias em ambos os lados da equação (3.4), tal que: $I_k^{(im)} = I_k^{s(im)}$, nota-se que a diferença entre as componentes $I_k^{(im)}$ e $I_k^{s(im)}$ é nula, permitindo a obtenção de uma função de resíduo de corrente $\Delta I_k^{(im)}$ definida por:

$$\Delta I_k^{(im)} = I_k^{(im)} - I_k^{s(im)} = 0 \quad (3.6)$$

Desenvolvendo a componente \hat{I}_k com base na equação (2.4) e considerando a tensão $\hat{E}_k = V_k \underline{\theta}_k$ na barra k e a injeção líquida de potência $\hat{S}_k = P_k + jQ_k$ na barra k , tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{S}_k = \hat{E}_k \hat{I}_k^* \Rightarrow \hat{I}_k &= \left(\frac{\hat{S}_k}{\hat{E}_k} \right)^* = \frac{P_k - jQ_k}{V_k \underline{-\theta}_k} = \frac{(P_k - jQ_k) \underline{\theta}_k}{V_k} = \frac{(P_k - jQ_k) (\cos \theta_k + j \sen \theta_k)}{V_k} \\ \hat{I}_k &= \frac{P_k \cos \theta_k + j P_k \sen \theta_k - j Q_k \cos \theta_k + Q_k \sen \theta_k}{V_k} = I_k^{(re)} + j I_k^{(im)} \end{aligned}$$

Logo, separando-se as partes real e imaginária da equação obtida, pode-se definir que as partes real $I_k^{(re)}$ e imaginária $I_k^{(im)}$ da componente \hat{I}_k podem ser determinadas por:

$$I_k^{(re)} = \frac{P_k \cos \theta_k + Q_k \sen \theta_k}{V_k} \quad (3.7)$$

$$I_k^{(im)} = \frac{P_k \sen \theta_k - Q_k \cos \theta_k}{V_k} \quad (3.8)$$

De modo semelhante, desenvolvendo-se a componente \hat{I}_k^S considerando a tensão na barra m dada por: $\hat{E}_m = V_m \underline{\theta}_m$, e os elementos da matriz admitância nodal expressos em função das matrizes condutância e susceptância, tal que: $\hat{Y}_{kk} = G_{kk} + jB_{kk}$, $\hat{Y}_{km} = G_{km} + jB_{km}$, determina-se:

$$\hat{I}_k^S = \hat{Y}_{kk} \hat{E}_k + \sum_{m \in \Omega_k} \hat{Y}_{km} \hat{E}_m = (G_{kk} + jB_{kk}) V_k \underline{\theta}_k + \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} + jB_{km}) V_m \underline{\theta}_m$$

$$\hat{I}_k^S = (G_{kk} + jB_{kk}) V_k (\cos \theta_k + j \sen \theta_k) + \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} + jB_{km}) V_m (\cos \theta_m + j \sen \theta_m)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_k^S &= V_k (G_{kk} \cos \theta_k + j G_{kk} \sen \theta_k + j B_{kk} \cos \theta_k - B_{kk} \sen \theta_k) + \\ &+ \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_m + j G_{km} \sen \theta_m + j B_{km} \cos \theta_m - B_{km} \sen \theta_m) = I_k^{S(re)} + j I_k^{S(im)} \end{aligned}$$

Logo, separando-se as partes real e imaginária da equação obtida, pode-se definir que as partes real $I_k^{S(re)}$ e imaginária $I_k^{S(im)}$ da componente \hat{I}_k^S podem ser determinadas por:

$$I_k^{S(re)} = V_k (G_{kk} \cos \theta_k - B_{kk} \sen \theta_k) + \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_m - B_{km} \sen \theta_m) \quad (3.9)$$

$$I_k^{S(im)} = V_k (G_{kk} \sen \theta_k + B_{kk} \cos \theta_k) + \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sen \theta_m + B_{km} \cos \theta_m) \quad (3.10)$$

Desse modo, por meio dos resultados obtidos nas equações (3.7) e (3.9) pode-se definir que a função de resíduo de correntes reais descrita na equação (3.5) é determinada por:

$$\begin{aligned} \Delta I_k^{(re)} &= \frac{P_k \cos \theta_k + Q_k \sen \theta_k}{V_k} - V_k (G_{kk} \cos \theta_k - B_{kk} \sen \theta_k) - \\ &- \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_m - B_{km} \sen \theta_m) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Similarmente, com os dos resultados das equações (3.8) e (3.10) pode-se definir que a função de resíduo de correntes imaginárias descrita na equação (3.6) é determinada por:

$$\begin{aligned} \Delta I_k^{(im)} &= \frac{P_k \sen \theta_k - Q_k \cos \theta_k}{V_k} - V_k (G_{kk} \sen \theta_k + B_{kk} \cos \theta_k) - \\ &- \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sen \theta_m + B_{km} \cos \theta_m) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Incluindo-se a barra k ao conjunto Ω_k e definindo-se K como o conjunto de todas as barras conectadas à barra k , inclusive a própria barra k , tem-se que as equações (3.9) e (3.10) podem ser também expressas de forma mais compacta, respectivamente por:

$$I_k^{s(re)} = \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_m - B_{km} \sen \theta_m) \quad (3.13)$$

$$I_k^{s(im)} = \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sen \theta_m + B_{km} \cos \theta_m) \quad (3.14)$$

tal que as funções de resíduos dadas nas equações (3.11) e (3.12) podem ser reescritas como:

$$\Delta I_k^{(re)} = \frac{P_k \cos \theta_k + Q_k \sen \theta_k}{V_k} - \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_m - B_{km} \sen \theta_m) = 0 \quad (3.15)$$

$$\Delta I_k^{(im)} = \frac{P_k \sen \theta_k - Q_k \cos \theta_k}{V_k} - \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sen \theta_m + B_{km} \cos \theta_m) = 0 \quad (3.16)$$

Como o cálculo das equações de resíduos (3.11) e (3.12) se baseia-se nos elementos da matriz admitância nodal de rede, pode-se empregar a formulação por balanço de corrente desenvolvida para considerar ou não a presença de elementos *shunts* na rede de distribuição em estudo, visto que esta consideração é determinada pela montagem da matriz admitância.

Assim, com as funções de resíduos de corrente, expressas pela equação (3.11) e (3.12), calculadas para todas as barras PQ da rede de distribuição em estudo, obtém-se um conjunto de vetores de resíduos $\underline{\Delta I}^{(re)}$ e $\underline{\Delta I}^{(im)}$ como as equações matriciais básicas a serem resolvidas nos cálculos do subsistema 1 por balanço de correntes de barra, determinadas por:

$$\text{Para } NPQ \text{ barras: } \underline{\Delta I}^{(re)} = \underline{0} \quad (3.17)$$

$$\text{Para } NPQ \text{ barras: } \underline{\Delta I}^{(im)} = \underline{0} \quad (3.18)$$

o que totaliza $2NPQ$ equações básicas para o cálculo do vetor de ângulos de tensão de barra $\underline{\theta}$ para NPQ barras e de magnitudes de tensão de barra \underline{V} para NPQ barras, o que totaliza $2NPQ$

incógnitas com igual número de equações. Assim, a modelagem é passível de ser solucionada pelo método de Newton-Raphson, onde o valor dos resíduos de correntes é interpretado como um erro e pode ser utilizado como critério de parada do processo numérico de solução.

3.2. Solução do Subsistema 1 pelo Método de Newton-Raphson

Como discutido anteriormente, o objetivo do subsistema 1 do PFC reside em calcular o estado das tensões de barras (módulo e ângulo) desconhecidas da rede. Assim, considerando os vetores $\underline{\theta}$ de ângulos e \underline{V} de módulos de tensão de barra, bem como os vetores de resíduos $\Delta\underline{I}^{(re)}$ e $\Delta\underline{I}^{(im)}$ do balanço de potência das barras, tem-se que o vetor \underline{x} de variáveis e o vetor $\underline{f}(\underline{x})$ de funções do método de Newton-Raphson são aqui definidos da seguinte forma:

$$\underline{x} = \left[\begin{array}{c} \underline{\theta} \\ \underline{V} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} NPQ \\ \} NPQ \end{array} \right\} ; \quad \underline{f}(\underline{x}) = \left[\begin{array}{c} \Delta\underline{I}^{(re)} \\ \Delta\underline{I}^{(im)} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} NPQ \\ \} NPQ \end{array} \right\}$$

Logo, como os vetores de funções e variáveis contém dois tipos de elementos cada, tal como na formulação clássica por balanço de potência, a matriz jacobiana $[J]$ do método de Newton-Raphson constitui-se de quatro submatrizes de sensibilidade, descrita a seguir:

$$[J] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial \Delta\underline{I}^{(re)}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \Delta\underline{I}^{(re)}}{\partial \underline{V}} \\ \hline \frac{\partial \Delta\underline{I}^{(im)}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \Delta\underline{I}^{(im)}}{\partial \underline{V}} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} NPQ \\ \} NPQ \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} [H] & [N] \\ \hline [M] & [L] \end{array} \right]$$

Assim, para cada iteração i e com base no estado das tensões de barras atual obtidos na iteração anterior, a equação matricial recursiva geral do método de Newton-Raphson para o cálculo do subsistema 1 pela formulação por balanço de corrente de barras, é expressa por:

$$\underline{x}^{(i+1)} = \underline{x}^{(i)} - [J(\underline{x}^{(i)})]^{-1} \underline{f}(\underline{x}^{(i)}) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \underline{\theta}^{(i+1)} \\ \underline{V}^{(i+1)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{\theta}^{(i)} \\ \underline{V}^{(i)} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} [H^{(i)}] & [N^{(i)}] \\ \hline [M^{(i)}] & [L^{(i)}] \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \Delta\underline{I}^{(re),(i)} \\ \Delta\underline{I}^{(im),(i)} \end{array} \right] \quad (3.19)$$

Para o cálculo dos elementos das submatrizes para uma barra genérica k desenvolvidos a seguir, deve-se lembrar que, para uma barra m de um ramo $k-m$, o cálculo reside apenas em permutar os índices k e m das equações. Como auxílio, as seguintes identidades são utilizadas:

- Para uma função: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$
- $\frac{d(\text{sen}(x))}{dx} = \text{cos}(x)$ e $\frac{d(\text{cos}(x))}{dx} = -\text{sen}(x)$

- Submatriz [H]:

$$H_{kk} = \frac{\partial \Delta I_k^{(re)}}{\partial \theta_k} = \frac{Q_k \cos \theta_k - P_k \sin \theta_k}{V_k} + V_k (G_{kk} \sin \theta_k + B_{kk} \cos \theta_k) \quad (3.20)$$

$$H_{km} = \frac{\partial \Delta I_k^{(re)}}{\partial \theta_m} = V_m (G_{km} \sin \theta_m + B_{km} \cos \theta_m) \quad (3.21)$$

- Submatriz [N]:

$$N_{kk} = \frac{\partial \Delta I_k^{(re)}}{\partial V_k} = -\frac{(P_k \cos \theta_k + Q_k \sin \theta_k)}{V_k^2} - G_{kk} \cos \theta_k + B_{kk} \sin \theta_k \quad (3.22)$$

$$N_{km} = \frac{\partial \Delta I_k^{(re)}}{\partial V_m} = B_{km} \sin \theta_m - G_{km} \cos \theta_m \quad (3.23)$$

- Submatriz [M]:

$$M_{kk} = \frac{\partial \Delta I_k^{(im)}}{\partial \theta_k} = \frac{P_k \cos \theta_k + Q_k \sin \theta_k}{V_k} + V_k (B_{kk} \sin \theta_k - G_{kk} \cos \theta_k) \quad (3.24)$$

$$M_{km} = \frac{\partial \Delta I_k^{(im)}}{\partial \theta_m} = V_m (B_{km} \sin \theta_m - G_{km} \cos \theta_m) \quad (3.25)$$

- Submatriz [L]:

$$L_{kk} = \frac{\partial \Delta I_k^{(im)}}{\partial V_k} = \frac{Q_k \cos \theta_k - P_k \sin \theta_k}{V_k^2} - G_{kk} \sin \theta_k - B_{kk} \cos \theta_k \quad (3.26)$$

$$L_{km} = \frac{\partial \Delta I_k^{(im)}}{\partial V_m} = -G_{km} \sin \theta_m - B_{km} \cos \theta_m \quad (3.27)$$

Analisando os componentes das submatrizes que apresentam índices iguais (H_{kk} , N_{kk} , M_{kk} e L_{kk}), constatou-se não ser possível encontrar equações mais simplificadas e recursivas, tal como é conseguido com a jacobiana da formulação clássica, expresso na equação (3.28) a partir da equação (2.49):

$$H_{kk} = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (B_{km} \cos \theta_{km} - G_{km} \sin \theta_{km}) + V_k^2 B_{kk} - V_k^2 B_{kk}$$

$$H_{kk} = V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) - V_k^2 B_{kk}$$

$$H_{kk} = - \underbrace{\left(-V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \right)}_{Q_k^{calc}} - V_k^2 B_{kk}$$

$$H_{kk} = -Q_k^{calc} - V_k^2 B_{kk} \quad (3.28)$$

3.3. Algoritmo para implementação computacional

Com base na formulação objeto deste trabalho, a seguir é descrito um algoritmo para implementação computacional do método do Newton-Raphson por balanço de correntes de barra desenvolvido, relatado a seguir:

1ª Etapa (iteração $i = 0$): ler e normalizar os dados da rede de distribuição. Inicializar o vetor de variáveis $[\underline{\theta}^{(0)} | \underline{V}^{(0)}]^T$ considerando o *flat-start* ($\underline{V} = \underline{1} pu$, $\underline{\theta} = \underline{0} rad$). Montar as matrizes condutância $[G]$ (equações (2.31) a (2.34)) e susceptância $[B]$ (equações (2.35) a (2.38)).

2ª Etapa (iteração i): com o vetor do estado das tensões de barra $[\underline{\theta}^{(i)} | \underline{V}^{(i)}]^T$ atual obtido na iteração anterior, calcular o vetor de funções de resíduos de correntes com as equações (3.11) e (3.12) para montar o vetor de equações de resíduos de corrente $[\underline{\Delta I}^{(re),(i)} | \underline{\Delta I}^{(im),(i)}]^T$.

3ª Etapa (iteração i): testar convergência com a tolerância adotada $\varepsilon = 10^{-4}$. Se $\max|[\underline{\Delta I}^{(re),(i)} | \underline{\Delta I}^{(im),(i)}]^T| \leq \varepsilon$, adotar $[\underline{\theta}^{(i)} | \underline{V}^{(i)}]^T$ como solução do subsistema 1, sair do processo iterativo e resolver o subsistema 2; se $\max|[\underline{\Delta I}^{(re),(i)} | \underline{\Delta I}^{(im),(i)}]^T| > \varepsilon$, ir à etapa 4.

4ª Etapa (iteração i): com o vetor do estado das tensões de barras atual $[\underline{\theta}^{(i)} | \underline{V}^{(i)}]^T$, montar a matriz jacobiana com o cálculo dos elementos não nulos das submatrizes $[H]$, $[N]$, $[M]$ e $[L]$ definidos pelas equações (3.20) a (3.27).

5ª Etapa (iteração i): incrementar $i = i + 1$ e obter a novo vetor de estado das tensões de barra $[\underline{\theta}^{(i+1)} | \underline{V}^{(i+1)}]^T$ com o cálculo da equação (3.19). Retornar à etapa 2.

4. TESTES E ANÁLISES DE RESULTADOS

Conforme mencionado, este Projeto Final de Curso teve como objetivo desenvolver uma nova proposta de método de solução do subsistema 1 do Problema do Fluxo de Carga para redes de distribuição, baseada em uma formulação por balanço de correntes de barra e solução pelo método de Newton-Raphson, apresentada no Capítulo 3 deste trabalho.

Este capítulo objetiva a realização de testes com redes de distribuição, para análises da metodologia desenvolvida e comparações de resultados com o método clássico por balanço de potências de barra e estratégia de solução por Newton-Raphson, bem como com os métodos Soma das Correntes (MSI), Soma das Potências (MSP) e *Direct Load Flow* (DLF).

O algoritmo da metodologia desenvolvida neste trabalho, bem como os algoritmos dos demais métodos de comparação (balanço de potência, MSI, MSP e DLF), foi implementado no *software* MATLAB e executados em um computador com sistema operacional Windows 10, processador Intel Core i5 de 8ª geração, memória RAM de 8 GB e SSD de 480 GB.

Os dados de barras e de ramos das redes de distribuição para testes e comparação de resultados dos métodos simulados são apresentados em: BRIGATTO (2025) para a rede de 4 barras, RAO (2011) para a rede de 10 barras, CINVALAR (1988) para a rede de 14 barras, BARAN (1989) para a rede de 33 barras, IEEE (2010) para a rede de 34 barras, CHIANG (1990) para a rede de 69 barras, CHIOU (2005) para a rede de 84 barras, ZHANG (2007) para a rede de 118 barras e BRIGATTO (2011) para a rede de 192 barras, sendo que alguns destes sistemas proporcionam topologias com as versões sem e com *shunts* presentes na rede.

Primeiramente, objetivou-se comprovar a exatidão e eficácia da formulação proposta neste trabalho em solucionar o subsistema 1 do PFC em redes de distribuição. Para realizar esta comprovação, utilizou-se a rede de 14 barras, por esta apresentar as versões sem e com *shunts* de rede, e comparou-se os resultados obtidos na solução do subsistema 1 com o método de Newton-Raphson formulado por balanço de potência, pois os demais métodos já foram devidamente estudados na literatura. Os resultados dos módulos e ângulos das tensões de barra para o caso teste na versão sem *shunts* são mostrados na Tabela 3, e com *shunts* são mostrados na Tabela 4. Analisando os resultados das tabelas 3 e 4, observa-se que os módulos e ângulos das tensões de barra convergiram igualmente com a precisão adotada, constatando-se a eficácia da formulação por balanço de correntes de barra para a solução do subsistema 1 para redes de distribuição com e sem *shunts* desenvolvida neste trabalho.

Como a solução do subsistema 2 do PFC é trivial e comum a todos os métodos de solução do subsistema 1, a apresentação dos demais resultados não será o foco deste trabalho.

Tabela 3 - Resultados do subsistema 1 para a rede de 14 barras sem *shunts*.

Barra	Módulo da tensão (<i>pu</i>)		Ângulo da tensão (<i>rad</i>)	
	Balanco de Corrente	Balanco de Potência	Balanco de Corrente	Balanco de Potência
1	1,0000	1,000	0,000	-0,000
2	0,9883	0,9883	-0,271	-0,271
3	0,9842	0,9842	-0,394	-0,394
4	0,9814	0,9814	-0,536	-0,536
5	0,9803	0,9803	-0,544	-0,544
6	0,9727	0,9727	-0,411	-0,411
7	0,9583	0,9583	-0,844	-0,844
8	0,9705	0,9705	-0,418	-0,418
9	0,9575	0,9575	-0,878	-0,878
10	0,9522	0,9522	-1,054	-1,054
11	0,9904	0,9904	-0,102	-0,102
12	0,9886	0,9886	-0,135	-0,135
13	0,9858	0,9858	-0,212	-0,212
14	0,9845	0,9845	-0,238	-0,238

Fonte: o próprio autor.

Tabela 4 - Resultados do subsistema 1 para a rede de 14 barras com *shunts*.

Barra	Módulo da tensão (<i>pu</i>)		Ângulo da tensão (<i>rad</i>)	
	Balanco de Corrente	Balanco de Potência	Balanco de Corrente	Balanco de Potência
1	1,0000	1,000	0,000	-0,000
2	0,9906	0,9906	-0,367	-0,367
3	0,9877	0,9877	-0,540	-0,540
4	0,9859	0,9859	-0,693	-0,693
5	0,9848	0,9848	-0,700	-0,700
6	0,9789	0,9789	-0,756	-0,756
7	0,9906	0,9906	-1,413	-1,413
8	0,9768	0,9768	-0,763	-0,763
9	0,9904	0,9904	-1,483	-1,483
10	0,9887	0,9887	-1,778	-1,778
11	0,9943	0,9943	-0,322	-0,322
12	0,9947	0,9947	-0,448	-0,448
13	0,9716	0,9716	-0,518	-0,518
14	0,9710	0,9710	-0,586	-0,586

Fonte: o próprio autor.

Após a comprovação da eficácia da modelagem por balanço de correntes de barra para a solução do subsistema 1, prosseguiu-se com a comparação de resultados entre a formulação desenvolvida e os demais métodos de solução abordados neste trabalho. Para estas análises, foram adotados dois critérios para a avaliação de desempenho dos algoritmos implementados:

- 1) Número de iterações: para este critério, convencionou-se que a contagem de iterações de cada programa computacional na solução do subsistema 1 do PFC ocorre somente depois que o teste de convergência é verificado, tal que, caso a convergência ainda não tenha sido atingida, o estado das tensões de barra necessita ser corrigido na iteração vigente.
- 2) Tempo de processamento: para este critério, convencionou-se que a contagem para os métodos de Newton-Raphson (por balanço de potência e por balanço de corrente de barras) e DLF é inicializada a partir da montagem da matriz admitância nodal e, para os métodos MSP e MSI, a partir da primeira vez que a varredura inversa é processada. Além disso, como nas simulações foi verificado que os tempo de execução fornecido pelos comandos *tic* e *toc* do MATLAB apresentavam valores um pouco diferentes e muito pequenos (da ordem de microsegundos) cada vez que um programa é processado, optou-se por executar 10.000 vezes cada rotina dos métodos para obter uma média dos tempos de processamento.

Os resultados obtidos com as 10.000 simulações dos métodos implementados para o critério do número de iterações são apresentados na Tabela 5 para as redes sem *shunts* e na Tabela 6 para as redes de teste que apresentam uma versão com elementos *shunts* na rede.

Analisando-se os resultados mostrados nas Tabelas 5 e 6, observa-se que o método por balanço de correntes proposto, de modo geral, convergiu em números de iterações iguais ou ainda menores comparado aos demais métodos implementados, caracterizando-se então como o melhor método de solução neste critério para as redes de teste analisadas neste trabalho.

Analisando-se exclusivamente os métodos matriciais, os resultados das Tabelas 5 e 6 demonstram que a formulação proposta apresentou números de iterações sempre menores que o método DLF e, comparado ao método por balanço de potências, a formulação por balanço de correntes apresentou desempenho praticamente igual, sendo melhor (2 contra 3 iterações) para a rede de 192 barras sem *shunts* e para a rede de 10 barras na versão com *shunts*.

O melhor desempenho com relação ao número de iterações do método por balanço de corrente em comparação ao método por balanço de potência pode ser justificado pelo fato das derivadas das equações de resíduos de corrente fornecerem uma maior sensibilidade para a matriz Jacobiana do método de Newton-Raphson, pois estas equações empregam, além de admitâncias e módulos e ângulos tensões de barra, também as injeções líquidas de potências ativa e reativa no cálculo dos elementos da matriz jacobiana, tornando-a mais comportada por

carregar maiores informações da rede em estudo, o que não ocorre com o método por balanço de potência. O embasamento desta justificativa pode se basear no fato da sensibilidade de uma matriz poder ser verificada com base na dominância da diagonal principal, tal que, quanto maior os valores, maior é a sensibilidade. Neste sentido, para a rede teste de 4 barras, tem-se que a jacobiana obtida na 3ª iteração do método por balanço de potência é determinada por:

$$[J] = - \begin{bmatrix} 44,2352 & -11,6708 & -11,4661 & 28,5673 & -8,3682 & -5,6396 \\ -11,3329 & 11,3329 & 0 & -8,5984 & 7,8148 & 0 \\ -11,0267 & 0 & 11,0267 & -6,2861 & 0 & 5,0745 \\ -28,1527 & 7,8100 & 5,1839 & 45,6604 & -12,5049 & -12,4741 \\ 8,2926 & -8,2926 & 0 & -11,7509 & 11,7144 & 0 \\ 6,0625 & 0 & -6,0625 & -11,4334 & 0 & 11,3439 \end{bmatrix}$$

e a jacobiana obtida na 3ª iteração do método por balanço de corrente é determinada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} -46,8585 & 12,3765 & 12,0686 & -27,9454 & 8,2170 & 5,3900 \\ 12,6205 & -12,6205 & 0 & 8,4938 & -7,6566 & 0 \\ 12,4506 & 0 & -12,4505 & 5,8995 & 0 & -4,5899 \\ -27,5644 & 7,6682 & 4,9538 & 48,3518 & -13,2622 & -13,1314 \\ 8,1912 & -8,1911 & 0 & -13,0867 & 13,0008 & 0 \\ 5,6893 & 0 & -5,6892 & -12,9105 & 0 & 12,7158 \end{bmatrix}$$

onde observa-se que os elementos da diagonal principal (referente aos elementos da diagonal principal das submatrizes $[H]$ e $[L]$) da jacobiana do método por balanço de corrente apresenta valores em módulo um pouco maiores do que os elementos da diagonal principal da jacobiana do método por balanço de potência, justificando assim o melhor desempenho da proposta.

Tabela 5 - Número de iterações para a solução do subsistema 1 de redes teste sem *shunts*.

Rede de teste	Número de iterações por método de solução				
	Balanço de Corrente	Balanço de Potência	MSP	MSI	DLF
4 barras	3	3	3	5	5
10 barras	3	3	4	5	5
14 barras	3	3	3	3	3
33 barras	3	3	3	4	4
34 barras	2	2	3	4	4
69 barras	3	3	4	4	4
84 barras	3	3	3	4	4
118 barras	3	3	4	5	5
192 barras	2	3	3	3	3

Fonte: o próprio autor.

Tabela 6 - Número de iterações para a solução do subsistema 1 de redes teste com *shunts*.

Rede de teste	Número de iterações por método de solução				
	Balanco de Corrente	Balanco de Potência	MSP	MSI	DLF
10 barras	2	3	3	3	3
14 barras	3	3	3	3	3
118 barras	3	3	4	5	5

Fonte: o próprio autor.

Os resultados obtidos com as 10.000 simulações dos métodos implementados para o critério do tempo médio de simulação são apresentados na Tabela 7 para as redes sem *shunts* e na Tabela 8 para as redes de teste que apresentam uma versão com elementos *shunts*.

Analisando-se os tempos médios de simulação dos métodos implementados mostrados nas Tabela 7 e 8, observa-se que o MSP apresenta o melhor desempenho em comparação aos demais métodos em todas as redes de teste analisadas. Esta constatação pode ser atribuída aos custos computacionais para a montagem e inversão de matrizes característicos dos métodos matriciais e dos cálculos com números complexos característicos dos métodos MSI e DLF.

Em comparação dos métodos de varredura (MSP e MSI) com os métodos matriciais (balanço de potência, balanço de correntes e DLF), é esperado um desempenho inferior dos métodos matriciais em termos de tempos gastos com processamento, pelo fato dos métodos de varredura serem adaptados à característica radial de rede de distribuição e não dependerem do cálculo e inversão de matrizes, que requerem um tempo demasiado para estes processos.

Com relação a uma análise exclusiva entre os métodos matriciais, observa-se que o método DLF apresentou tempos de processamento bem inferiores em todas as redes de teste. Esta constatação pode ser justificada pelo fato da matriz $[DLF]$ ser fatorada apenas uma vez (montagem e inversão da matriz admitância) e mantida constante durante todo o processo iterativo, o que não acontece com os métodos utilizando Newton-Raphson, que necessitam do cálculo e inversão da matriz jacobiana a cada iteração dos seus processos de solução.

Além disso, comparando-se os algoritmos baseados no método de Newton-Raphson, observa-se que o método por balanço de corrente apresenta menor tempo de processamento para as redes com menor número de barras, enquanto que o método por balanço de potência apresenta melhor desempenho para as redes com maior quantidade de barras. Esta constatação pode ser justificada pelo fato da maior sensibilidade da jacobiana na formulação por balanço de corrente impulsionar o caminho percorrido entre o flat-start e a solução, enquanto que as

equações simplificadas para o cálculo dos elementos da diagonal principal da jacobiana do método de Newton-Raphson por balanço de potência requerer um custo de tempo inferior quanto maior é a rede elétrica, ao passo que a formulação do método de Newton-Raphson por balanço de correntes não possibilitar a definição de uma equação simples para o cálculo dos elementos da diagonal principal da jacobiana, que necessita da varredura dos dados de barra e de ramos da rede de distribuição para o cálculo destes elementos da jacobiana a cada iteração.

Tabela 7 - Tempo médio de processamento para a solução do subsistema 1 de redes teste sem *shunts*.

Rede de teste	Tempo médio do processo iterativo (μ s)				
	Balanço de Corrente	Balanço de Potência	MSP	MSI	DLF
4 barras	18,71	59,25	7,59	14,33	14,10
10 barras	50,81	105,37	9,40	18,91	23,75
14 barras	75,13	111,53	8,82	18,41	17,58
33 barras	336,67	239,11	16,18	31,29	56,93
34 barras	220,45	160,57	14,68	32,43	59,67
69 barras	1200,00	845,62	38,89	55,44	239,57
84 barras	1300,00	940,27	35,76	65,36	320,83
118 barras	3500,00	1600,00	65,81	102,64	611,55
192 barras	9100,00	7500,00	78,78	100,01	1700,00

Fonte: o próprio autor.

Tabela 8 - Tempo médio de processamento para a solução do subsistema 1 de redes teste com *shunts*.

Rede de teste	Tempo médio do processo iterativo (μ s)				
	Balanço de Corrente	Balanço de Potência	MSP	MSI	DLF
10 barras	35,99	60,75	14,23	48,69	23,90
14 barras	75,48	110,45	8,12	47,32	20,02
118 barras	2600,00	2000,00	71,27	609,07	726,35

Fonte: o próprio autor.

Com o intuito de ratificar as justificativas para as constatações alcançadas nas análises anteriores, optou-se por realizar um estudo com as redes de teste em condições operacionais mais severas, como forma de a causar um maior custo computacional em termos de número de iterações e tempos de processamento para avaliar o desempenho dos métodos de solução do subsistema 1 implementados neste trabalho. O estudo consistiu em estressar o sistema

aumentando-se, proporcionalmente, o carregamento em todas as barras, até um ponto próximo ao seu limite de máximo carregamento, a partir do qual o sistema ultrapassaria o limite de estabilidade de tensão. Para tanto, as potências ativas P_k e reativas Q_k foram gradativamente multiplicadas por um fator de carregamento, em passos de 10%, adotando-se para os testes o carregamento imediatamente anterior ao ponto em que o fluxo de carga divergiu, ultrapassando o limite de 50 iterações. A Tabela 9 apresenta os resultados do número de iterações e a Tabela 10 os resultados dos tempos médios de processamento dos métodos nas condições limites de estabilidade das redes.

Tabela 9 - Número de iterações para a solução do subsistema 1 a partir da perda de estabilidade das redes teste.

Rede de teste	Multiplicador de P_k e Q_k	Número de iterações por método de solução				
		Balço de Corrente	Balço de Potência	MSP	MSI	DLF
4 barras	2,7	4	6	11	25	25
10 barras	2,0	4	5	12	18	18
14 barras	6,0	6	7	20	39	39
33 barras	3,6	6	6	22	31	31
34 barras	5,3	5	6	29	39	39
69 barras	3,2	6	7	26	36	36
84 barras	3,7	5	6	19	29	29
118 barras	2,4	5	6	13	19	19
192 barras	6,4	6	7	34	43	43

Fonte: o próprio autor.

Tabela 10 - Tempo médio de solução do subsistema 1 a partir da perda de estabilidade das redes teste.

Rede de teste	Multiplicador de P_k e Q_k	Tempo médio do processo iterativo (μ s)				
		Balanco de Corrente	Balanco de Potência	MSP	MSI	DLF
4 barras	2,7	35,36	112,03	35,09	51,95	35,10
10 barras	2	79,33	171,31	57,90	59,48	37,76
14 barras	6	162,60	274,02	111,43	142,25	80,89
33 barras	3,6	686,33	500,32	171,57	206,14	151,94
34 barras	5,3	573,46	491,40	200,61	253,32	176,31
69 barras	3,2	2.300,00	1.900,00	316,92	439,28	513,74
84 barras	3,7	2.200,00	2.100,00	295,64	426,25	583,15
118 barras	2,4	5.000,00	4.100,00	264,62	386,45	843,60
192 barras	6,4	25.000,00	18.800,00	966,80	1.300,00	2.800,00

Fonte: o próprio autor.

Analisando os resultados da Tabela 9 observa-se novamente que o método por balanço de corrente, convergiu em menor número de iterações comparado aos demais métodos (exceto para a rede de 33 barras, com número de iterações igual ao método por balanço de potência), ratificando então a formulação desenvolvida como a de melhor desempenho nesse critério.

Analisando-se os tempos médios de simulação dos métodos implementados mostrados na Tabela 10, observa-se novamente o melhor desempenho MSP em todas as redes de teste analisadas e, com relação somente aos métodos matriciais, observa-se que o DLF novamente gastou tempos de processamento inferiores comparados aos demais métodos matriciais.

Por fim, comparando os algoritmos baseados no método de Newton-Raphson, tem-se novamente que o método por balanço de corrente apresenta menor tempo de processamento para as redes menores e o método por balanço de potência apresenta melhor desempenho para as redes com maior quantidade de barras, justificando as mesmas constatações com base na dicotomia entre ganhos de desempenho com a maior sensibilidade da matriz jacobiana, versus a complexidade matemática para o cálculo dos elementos da matriz jacobiana.

A fim de melhorar a apresentação dos resultados obtidos nas Tabelas de 5 a 10, foram gerados gráficos na linguagem de programação *python*, sendo o gráfico da Figura 4.1 referente aos dados da Tabela 5, o gráfico da Figura 4.2 referente aos dados da Tabela 6, e assim sucessivamente até o gráfico da Figura 4.6 referente aos dados da Tabela 10.

Figura 4.1 - Gráfico: Número de iterações para a solução do subsistema 1 de redes teste sem *shunts*.

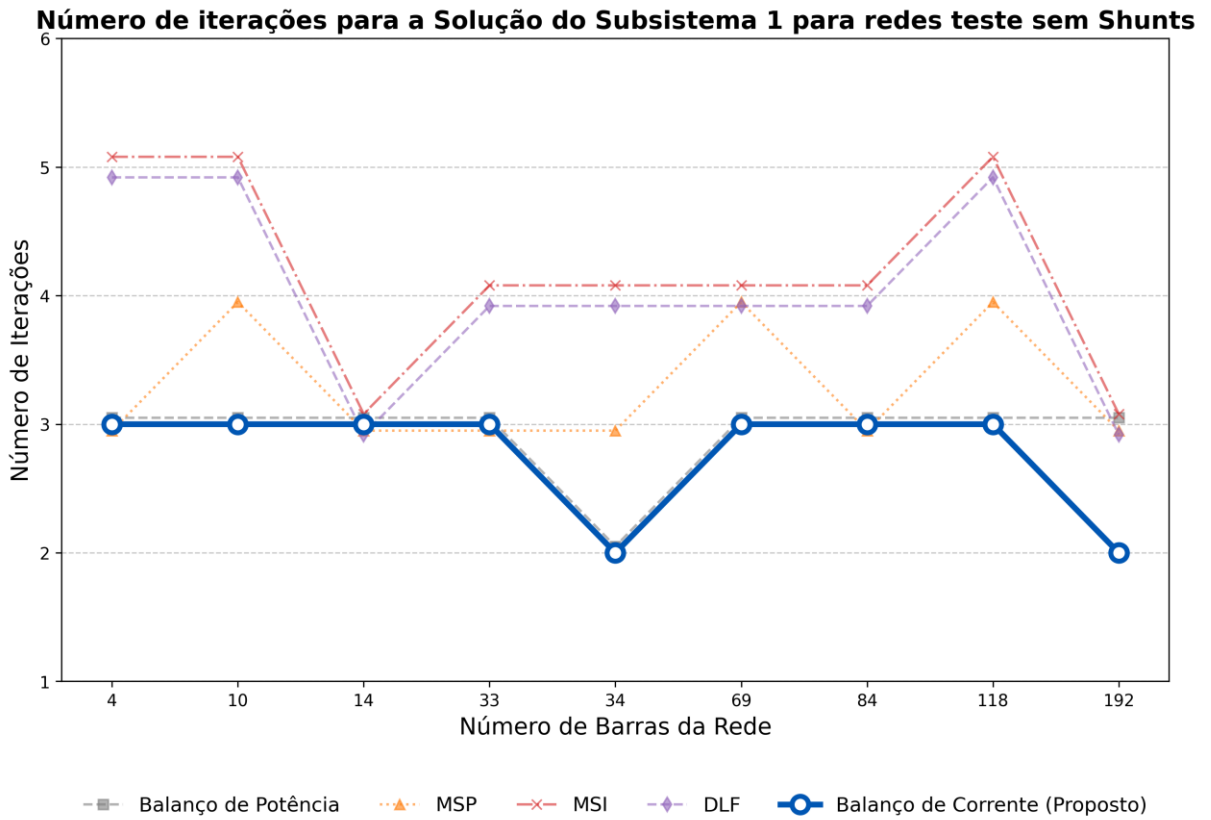


Figura 4.2 - Gráfico: Número de iterações para a solução do subsistema 1 de redes teste com *shunts*.

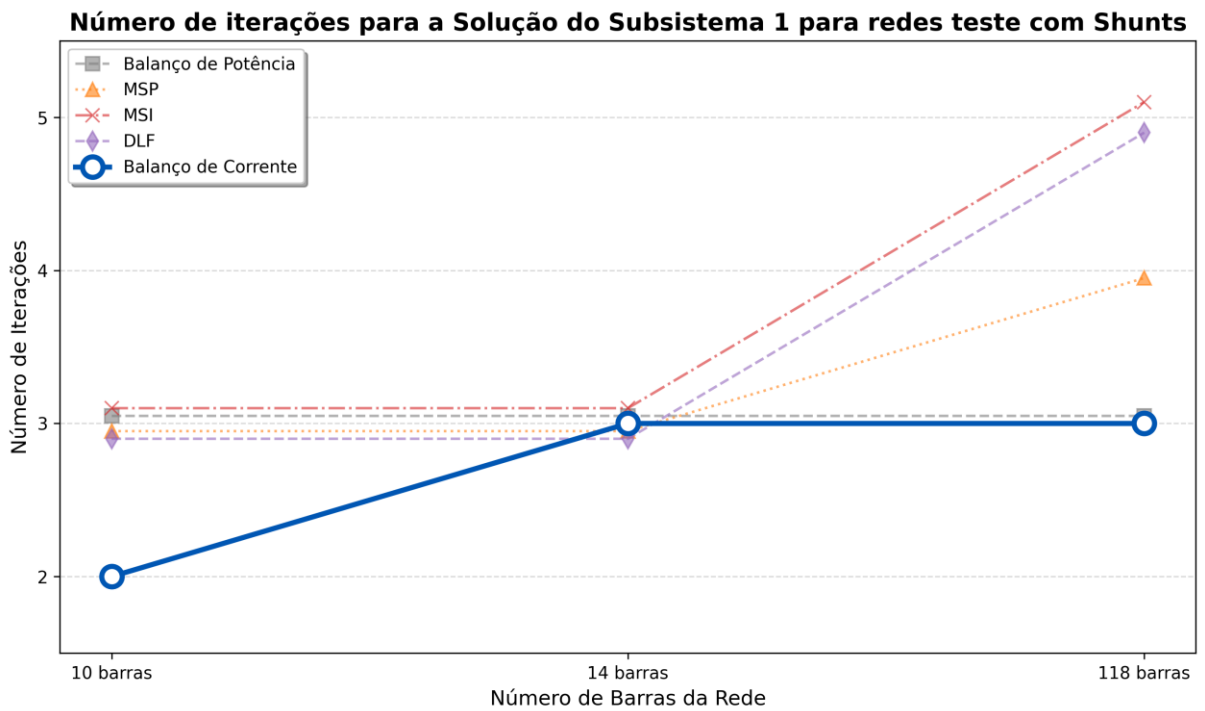


Figura 4.3 - Gráfico: Tempo médio de processamento para a solução do subsistema 1 de redes teste sem *shunts*.

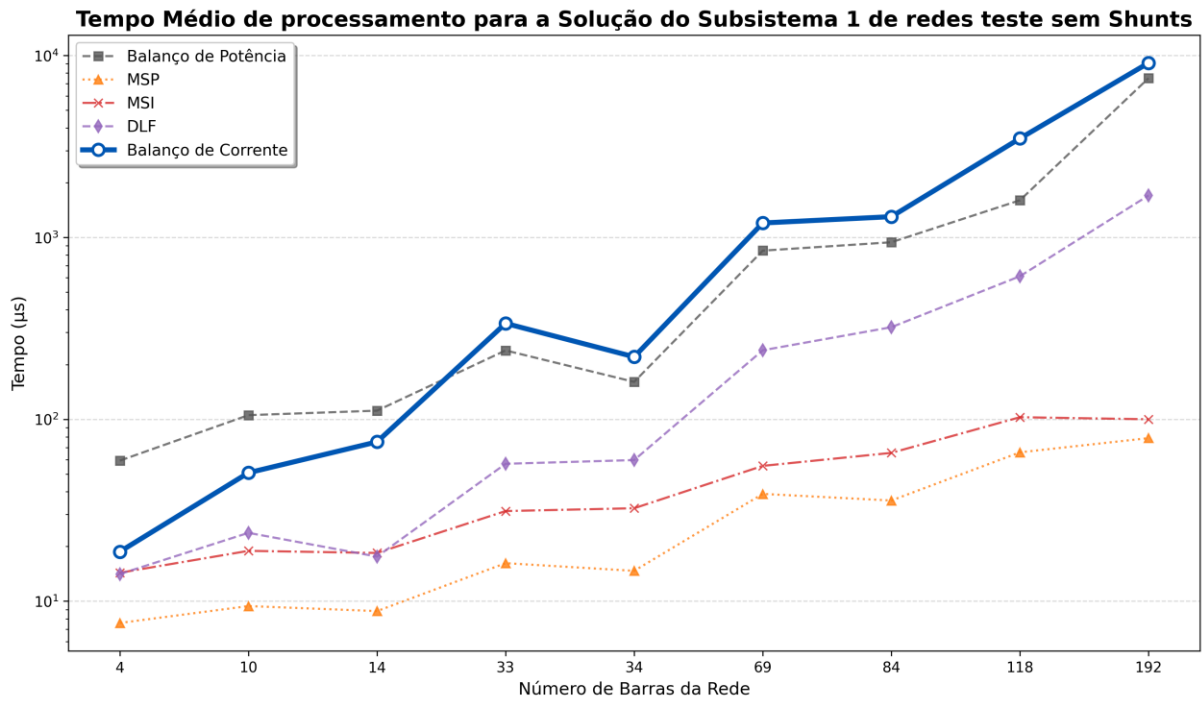


Figura 4.4 - Gráfico: Tempo médio de processamento para a solução do subsistema 1 de redes teste com *shunts*.

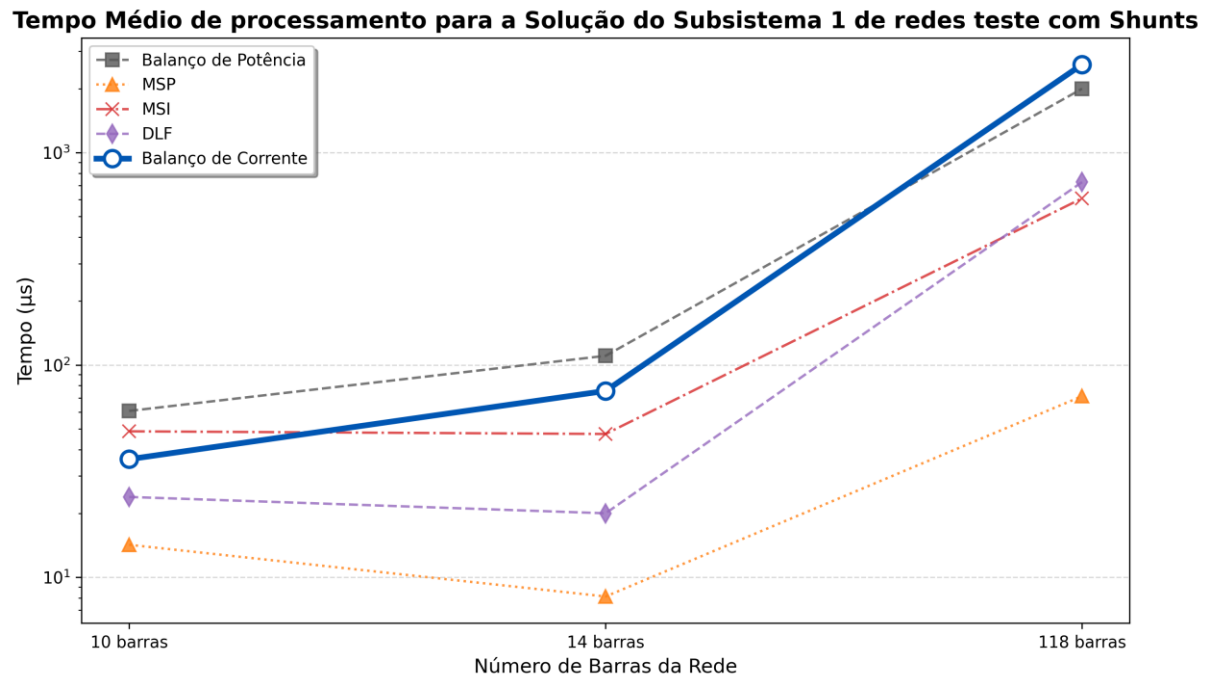


Figura 4.5 - Gráfico: Número de iterações para a solução do subsistema 1 a partir da perda de estabilidade das redes teste.

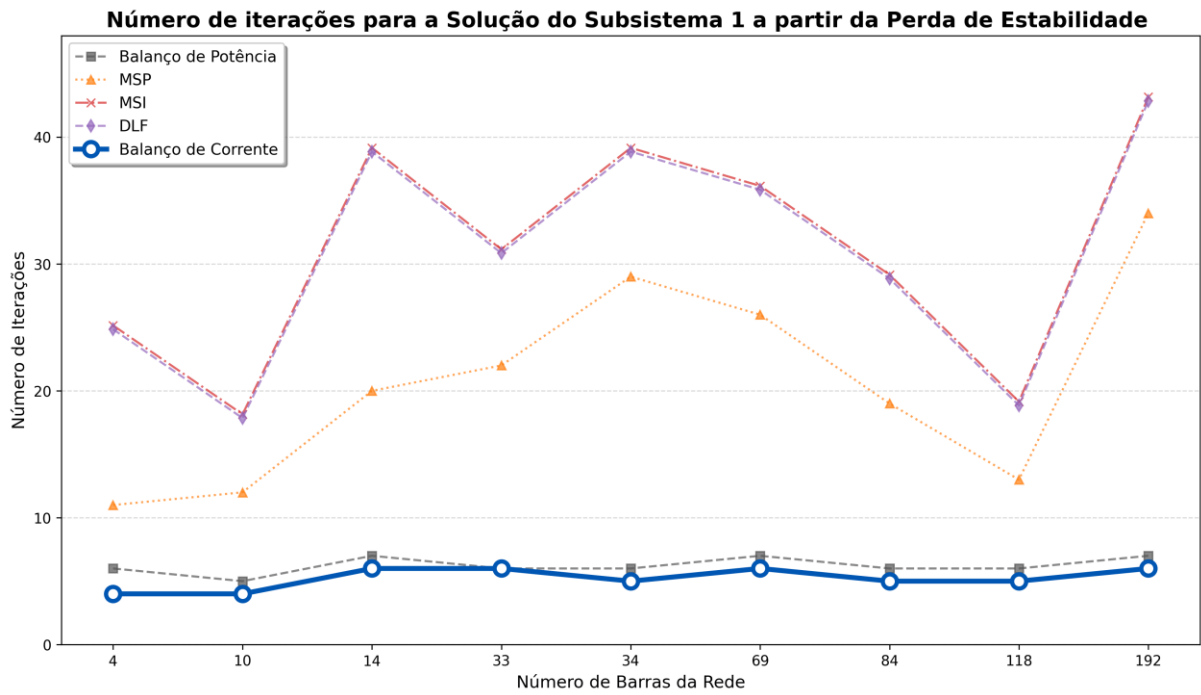
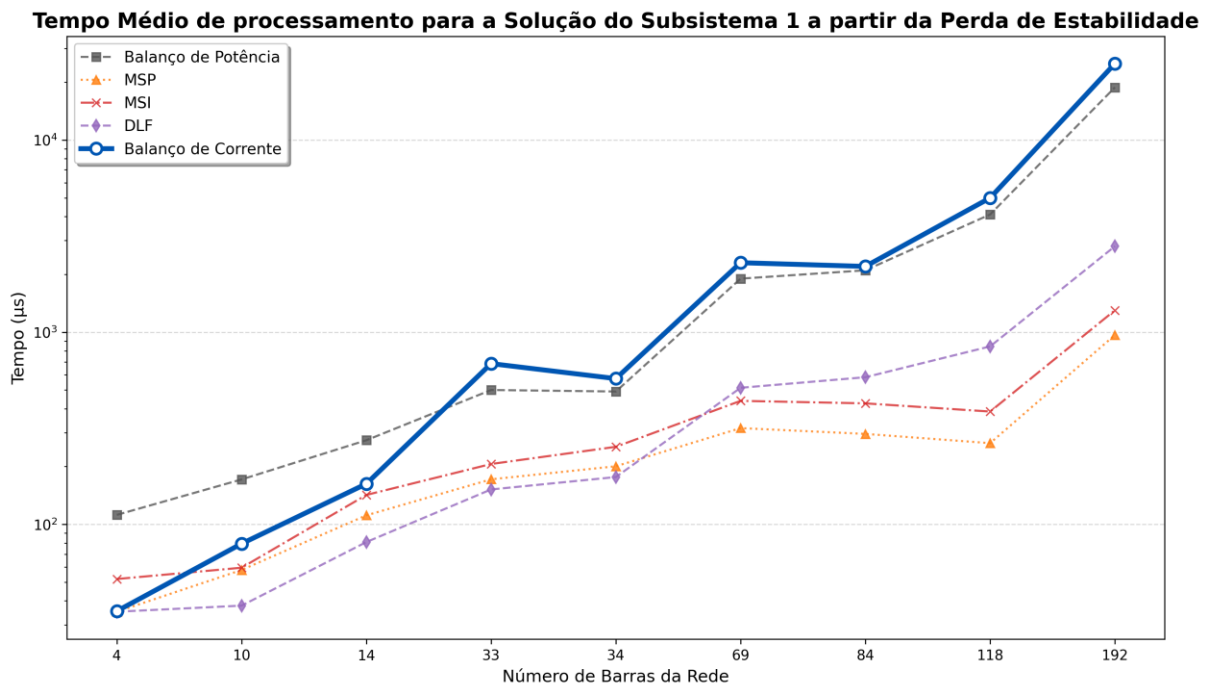


Figura 4.6 - Gráfico: Número de iterações para a solução do subsistema 1 a partir da perda de estabilidade das redes teste.



5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O desenvolvimento da formulação por balanço de correntes de barras para a solução do problema do fluxo de carga de redes de distribuição pelo método de Newton-Raphson mostrou-se coerente, confiável e uma forma alternativa aos demais métodos já consolidados na literatura técnica para a solução do subsistema 1 do PFC de redes de distribuição elétrica.

O estudo a partir da equação do balanço de correntes resultou em um método, cuja principal diferença em relação à formulação por balanço de potência está no fato das equações de resíduos de corrente apresentarem valores de variáveis de ângulo associado somente à própria barra, seja ela k ou m , não havendo abertura angular entre barras como θ_{km} ou θ_{mk} , enquanto que o método baseado no balanço de potência utiliza-se de variáveis associadas à abertura angular entre barras (diferença angular entre as barras terminais dos ramos). Essa estrutura permite que a formulação por balanço de correntes apresente resultados promissores para redes malhadas e mais complexas, talvez com a presença de barras PV e transformadores defasadores, do que as redes de distribuição de teste utilizadas trabalho.

Em relação aos resultados numéricos, o método de balanço de correntes apresentou o melhor resultado geral com base no número de iterações em comparação aos demais métodos, tanto para a rede operando em seu estado padrão quanto em sobrecarga, mesmo quando esta comparação se expande para os métodos de varredura direta e inversa. Esse fato destaca a viabilidade da proposta para o estudo do Problema do Fluxo de Carga de redes de distribuição.

A formulação matricial do método por balanço de corrente apresenta uma vantagem em relação aos métodos de varredura, pois não exige o processo de investigação dos ramos de rede para renumerar as barras iniciais e finais dos ramos nos quais o sentido de corrente tenha se invertido, pois a matriz de admitância nodal contempla toda a topologia da rede.

Porém, mesmo provando ser o método mais eficaz em relação ao número de iterações, o método por balanço de corrente apresentou desempenho inferior em relação ao tempo de processamento. Esta inferioridade deve-se ao fato de o conteúdo computacional do método proposto, juntamente com a maior complexidade matemática do seu equacionamento, serem essencialmente mais trabalhosos que os métodos de varredura, resultando em um desempenho inferior no critério de tempo para quase todas as redes de distribuição testadas no trabalho.

Ainda assim, o método de balanço de corrente apresenta resultados promissores para sistemas com menor número de barras em relação aos demais métodos matriciais, podendo

apresentar resultados ainda melhores para sistemas malhados devido à maior sensibilidade da matriz jacobiana e a utilização de variáveis angulares associadas à própria barra.

Para estudos futuros, recomenda-se a busca por estratégias que reduzam o esforço computacional, bem como o estudo do método do balanço de correntes para sistemas que incluem sistemas não radiais e de topologia mais complexa que os sistemas de distribuição, que incluam barras do tipo PV e transformadores defasadores, a fim de estudar seu desempenho em relação aos demais métodos para sistemas mais complexos e mais malhados, no intuito de avaliar as constatações alcançadas por este trabalho. Outra sugestão seria a adequação do método de balanço de correntes com o desenvolvimento do estado das tensões de barra em coordenadas retangulares, juntamente ao estudo do seu comportamento e desempenho, ampliando a aplicabilidade da metodologia de solução do subsistema 1 do PFC baseado na estratégia por balanço de correntes de barra para as redes de distribuição.

6. REFERÊNCIAS

BARAN, M.; WU, F. Network Reconfiguration in Distribution Systems for Loss Reduction and Load Balancing. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 4, n. 2, pp. 1401–1407, 1989.

BRIGATTO, G. A. A. Modelo de decisão multiobjetivo para a busca de estratégias ótimas de inserção de empreendimentos em geração distribuída. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 212. 2011.

BRIGATTO, G. A. A., “Teoria do Problema do Fluxo de Carga - Material Didático”, 2025. Apostila da disciplina Tópicos em Sistemas Eletro-Eletrônicos, do PPG EMC/UFG.

BROADWATER, R. P. et al. Power Flow Analysis of Unbalanced Multiphase Radial Distribution System. *Electric Power System Research*, , v. 14, 1988.

CHIANG, H. D.; JEAN-JUMEAU, R. Optimal Network reconfigurations in distribution systems: Part 2: Solution algorithms and numerical results. *IEEE Transactions on Power Systems*, 5, n. 3, July 1990.

CHIOU, J. P.; CHANG, C. F.; SU, C. T. Variable Scaling Hybrid Differential Evolution for Solving Network Reconfiguration of Distribution Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 2, p. 668–674, 2005.

CINVALAR, S.; GRAINGER, J.; YIN, H.; LEE, S. Distribution Feeder Reconfiguration for Loss Reduction. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 3, n. 3, pp. 1217–1223, 1988.

IEEE. IEEE PES Test Feeder, 2010. Disponível em: <https://cmte.ieee.org/pestestfeeders/resources/>. Acesso em: 23 novembro, 2025.

MONTICELLI, Alcir J. Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica, Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 1983.

OLIVEIRA, A. C., ROCHA JR, E. E., Adequação do Método da Soma das Correntes considerando elementos shunts de barra e de ramos de redes de distribuição, Trabalho de Conclusão de Curso, EMC/UFG 2025.

RAO, R. S. et al. Optimal capacitor placement in a radial distribution system using Plant Growth Simulation Algorithm, IJEPES, pg: 1133–1139, 2011.

SHIRMOHAMMADI, D. et al. A Compensation Based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks. IEEE Transactions on Power Systems, v. 3, n. 2, p. 753-762, 1988

SILVA, F. M., BRIGATTO, G. A. A., Formulação alternativa para a montagem da matriz DLF do método proposto por Teng para o cálculo do problema do fluxo de carga de redes de distribuição, Trabalho de Conclusão de Curso, EMC/UFG 2023.

TENG, Jen-Hao. A direct approach for distribution system load flow solutions. In IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 18, no. 3, pp. 882-887, July 2003.

ZHANG, D.; FU, Z.; ZHANG, L. An Improved TS Algorithm for Loss-Minimum Reconfiguration in Large-Scale Distribution Systems. Electric Power Systems Research, v. 77, pp. 685-694, 2007.